В.И.Арнольд

Особенности каустик и волновых фронтов

ФАЗИС
Москва 1996

ББК 22.16
А 84
УДК 517

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 95-01-21041

Арнольд В. И.
Особенности каустик и волновых фронтов.
М.: ФАЗИС, 1996. — x+334 с.
(Библиотека математика. Вып. 1)
ISBN 5-7036-0021-9

АРНОЛЬД Владимир Игоревич
ОСОБЕННОСТИ КАУСТИК И ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Издательство ФАЗИС (ЛР № 040108 от 11.10.91)
123557 Москва, Пресненский вал, 42–44

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 826

А $\frac{1602070000-021}{7036-96}$ Без объявл.

ISBN 5-7036-0021-9

© ФАЗИС, 1996

Оглавление

Предисловие IX

Введение 1

1 Симплектическая геометрия 6
1.1. Симплектические многообразия 6
1.2. Подмногообразия симплектических многообразий 12
1.3. Лагранжевы многообразия, расслоения, отображения и особенности 22

2 Применения теории лагранжевых особенностей 31
2.1. Осциллирующие интегралы 31
2.2. Точки решёток 39
2.3. Перестройки каустик 43
2.4. Перестройки оптических каустик 49
2.5. Особенности ударных волн и перестройки множеств Максвелла 53

3 Контактная геометрия 59
3.1. Волновые фронты 59
3.2. Особенности фронтов 69
3.3. Перестройки фронтов 75

4 Сворачивание инвариантов и отображения периодов 81
4.1. Векторные поля, касающиеся фронтов 81
4.2. Линеаризованное сворачивание инвариантов 87
4.3. Отображения периодов 95
4.4. Формы пересечения отображений периодов 102
4.5. Пуассоновы структуры 105
4.6. Главные отображения периодов 109

5 Лагранжева и лежандрова топология 113
5.1. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы 114
5.2. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы . 124
5.3. Топология комплексных дискриминантов 132
5.4. Функции с умеренными особенностями 141
5.5. Глобальные свойства особенностей 146

5.6. Топология лагранжевых включений 150
5.7. Примечание 157

6 Проектирования поверхностей и особенности видимых контуров 158
6.1. Особенности проектирований поверхности на плоскость . 158
6.2. Особенности проектирований полных пересечений 168
6.3. Геометрия бифуркационных диаграмм 182

7 Задача об обходе препятствия 195
7.1. Асимптотические лучи в симплектической геометрии . . . 197
7.2. Контактная геометрия пар гиперповерхностей 209
7.3. Раскрытые ласточкины хвосты 216
7.4. Симплектические триады 234
7.5. Контактные триады 242
7.6. Гиперикосаэдральная особенность 250
7.7. Нормальные формы особенностей в задаче об обходе препятствия 261
7.8. Примечание 272

8 Трансформации волн, определённых гиперболическими вариационными принципами 273
8.1. Гиперболические системы и их световые гиперповерхности 275
8.2. Особенности световых гиперповерхностей вариационных систем 280
8.3. Контактные нормальные формы особенностей квадратичных конусов 285
8.4. Особенности систем лучей и волновых фронтов в точках нестрогой гиперболичности 289
8.5. Внутреннее рассеяние лучей и волновых фронтов на плоскости 300

Литература 317

Предметный указатель 330

Предисловие

Каустики и волновые фронты систем лучей изучаются с давних пор. Но только совсем недавно было установлено, что особенностями систем лучей управляет теория групп евклидовых отражений и групп Вейля простых алгебр Ли. Это неожиданное и в чём-то загадочное соотношение между геометрической оптикой, вариационным исчислением и теорией оптимального управления, с одной стороны, и теорией инвариантов групп Ли и алгебр Ли, алгебраической топологией и дифференциальной геометрией, с другой стороны, привело к значительному прогрессу в развитии теории распространения волн.

Впервые эта книга вышла в свет на английском языке в 1990 году. В настоящее издание внесён ряд добавлений, в которых освещаются достижения последних лет. Примечания к главам 5 и 7 (разделы 5.7 и 7.8) написаны О.М.Мясниченко. Приложение к главе 8 (раздел 8.5) написано И.А.Богаевским, результаты которого о трансформации волн публикуются здесь с любезного согласия их автора.

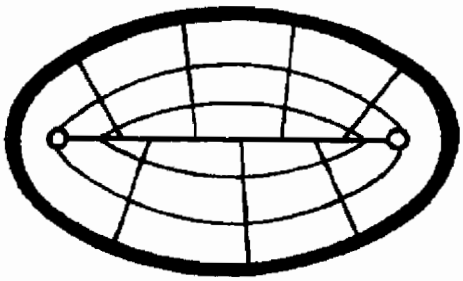
Москва,
декабрь 1995

В.И.Арнольд

Введение

Начнем с примера: рассмотрим расстояние от точки евклидовой плоскости до данной кривой; например, от точки, лежащей во внутренности эллипса до границы этого эллипса (рис. 1). Соответствующие лучи (экстремали этой вариационной задачи) суть нормали к эллипсу. Минимальное значение функционала (расстояния) удовлетворяет как функция начальной точки уравнению Гамильтона–Якоби $(\nabla u)^2 = 1$ (в точках гладкости). Однако эта функция имеет особенности (на отрезке, соединяющем фокальные точки эллипса). Система лучей также имеет особенности. Они лежат на астроиде, являющейся огибающей системы нормалей к эллипсу. Огибающая системы экстремалей называется *каустикой* системы. Каустика нашей системы имеет четыре точки возврата. Эти особенности устойчивы: любая кривая, достаточно близкая к эллипсу, имеет каустику, близкую к астроиде и имеющую четыре полукубические точки возврата.

Рис. 1. Лучи и фронты возмущения, распространяющегося внутрь эллипса



Линии уровня решения уравнения Гамильтона–Якоби называются *фронтами*. В нашем примере фронты — это эквидистанты эллипса. Эквидистанты, близкие к эллипсу, — гладкие кривые. Однако, эквидистанты, достаточно удалённые от эллипса, имеют особенности. На рис. 2 изображены четыре *полукубические точки возврата* на эквидистанте эллипса. Эти особенности устойчивы: эквидистанты любой кривой, достаточно близкой к эллипсу, имеют похожие особенности.

Конечно, линия уровня кратчайшего расстояния до эллипса образует только часть эквидистанты. Однако, большинство свойств особенностей систем лучей, каустик и фронтов становится более наглядным, если мы рассмотрим не только минимумы, но и остальные экстремальные точки функционалов. В нашем примере мы начали с изучения эквидистант и затем выделили нужные части.

Например, рассмотрим расстояние до кривой как функцию начальной точки. Её удобно рассматривать как многозначную функцию, при-

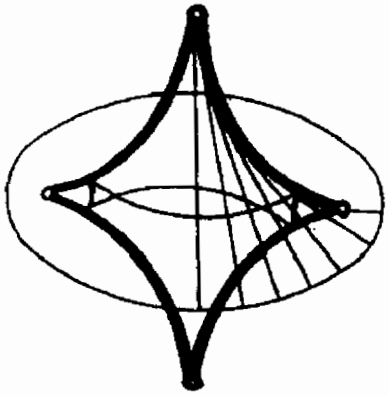


Рис. 2. Каустики как огибающие систем лучей и как множество особых точек эквидистант

нимая во внимание не только минимальное расстояние, но и длины других нормалей к этой кривой.

График многозначной функции расстояния (от точки из внутренности эллипса до границы эллипса) имеет замечательную особенность в фокальной точке эллипса. Её график локально диффеоморфен поверхности, называемой *ласточкиным хвостом* (рис. 3). Ласточкин хвост есть поверхность в трёхмерном пространстве многочленов

$$\mathbf{R}^3 = \{x^4 + ax^2 + bx + c\},$$

образованная полиномами, имеющими (вещественный) кратный корень. Эта особенность графика функции расстояния устойчива: после малого возмущения эллипса особенность не изменится (с точностью до диффеоморфизма пространства в котором лежит график).

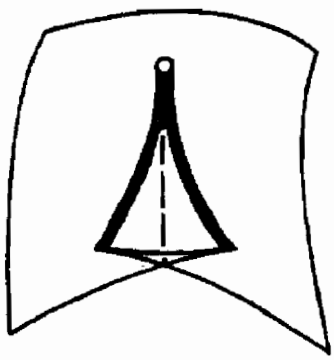


Рис. 3. Поверхность ласточкина хвоста в пространстве многочленов

График функции времени (для движения с единичной скоростью от данной начальной точки области до границы этой области) лежит в пространстве-времени и пересекает изохроны пространства-времени вдоль эквидистант. Следовательно, перестройка эквидистант эллипса (возникающая в момент, когда эквидистанта проходит через фокальную точку) диффеоморфна перестройке сечений ласточкина хвоста поверхностями уровня функции времени в трёхмерном пространстве-времени.

Типичная функция $f(a, b, c)$ в этом трёхмерном пространстве, содержащем ласточкин хвост, приводится к нормальной форме $f = \pm a +$

+ const сохраняющим ласточкин хвост локальным диффеоморфизмом (в окрестности точки $a = b = c = 0$; условие типичности: $\partial f/\partial a\,|_0 \neq 0$, см. [1]). Следовательно, перестройки эквидистант такие же, как и перестройки плоских сечений ласточкина хвоста $a = \text{const}$ (рис. 4). Изучение этих сечений — гораздо более простая проблема по сравнению с первоначальной — изучением типичных перестроек фронтов. Для того чтобы изучать точки минимума, достаточно удалить часть ласточкина хвоста, а именно пирамиду, ребра которой состоят из полукубических точек возврата и линии самопересечения ласточкина хвоста.

Рис. 4. Перестройка сечений ласточкина хвоста

Принципы применения теории особенностей к изучению систем лучей, волновых фронтов, каустик и их перестроек в общих вариационных задачах те же, что мы видели в предыдущем примере.

1. Существует список стандартных особенностей (таких как полукубическая точка возврата и ласточкин хвост в предыдущем примере). Эти особенности (довольно загадочным образом) связаны с геометрией групп, порожденных отражениями. Их можно изучать используя соответствующие алгебраические средства (группы Ли, теорию инвариантов, системы корней, диаграммы Дынкина и т. д.).

2. Доказывается, что стандартные особенности устойчивы, и что в общем случае появляются только они. Например, каустика окружности состоит только из одной точки — её центра. Такая особенность не типична, но если немного деформировать окружность, эта вырожденная каустика в центре трансформируется в небольшую кривую, чьи особенности становятся типичными: полукубические точки возврата и точки самопересечения.

3. Таким образом, изучение особенностей и перестроек таких объектов, как волновые фронты, каустики, системы лучей и т. д., связанных с типичными вариационными задачами, сведено к изучению стандартных особенностей соответствующих объектов. Например, изучение перестроек движущихся волновых фронтов сведено к изучению сечений гиперповерхностями (обобщенных) ласточкиных хвостов.

В этой книге собраны главные результаты, полученные при реализации описанной выше программы, начиная с 1972 года, когда была открыта связь между особенностями систем лучей, их каустик, волновых фронтов, преобразований Лежандра, групп, порождённых отражениями, и групп Вейля [2]. Группы A, D, E (имеющие только простые рёбра в диаграммах Дынкина) появились в первую очередь. Впоследствии, в 1978 году, была открыта взаимосвязь между группами с двойными рёбрами (B, C, F) и особенностями на границе (например, особенностями функции расстояния до многообразия с краем) (см. [3]).

Немедленно начался поиск других групп (H_2, H_3, H_4; $I_2(p)$), порождённых отражениями. В течение осени 1982 г. совместные усилия О.В.Ляшко, А.Б.Гивенталя, О.П.Щербака и автора привели к истолкованию группы симметрий икосаэдра H_3; она контролирует особенности систем лучей и фронтов в вариационной задаче о скорейшем обходе плоского препятствия, ограниченного типичной кривой с точкой перегиба ([4], [5]). Другими словами, эта группа управляет семейством эвольвент плоской кривой, имеющей точку перегиба (подобно кубической параболе), рис. 5.

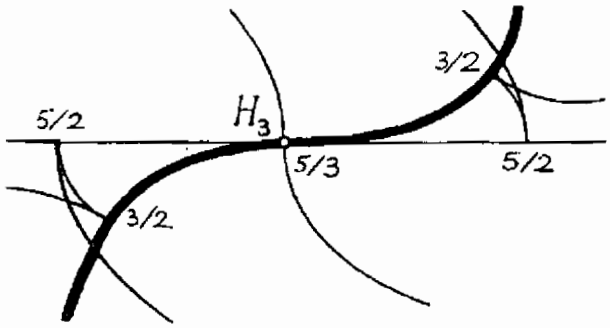


Рис. 5. Система эвольвент в точке перегиба кривой

О.П.Щербак нашёл в 1984 г. наиболее сложный "гиперикосаэдр" H_4, связанный с особенностью в задаче об обходе препятствия в трёхмерном пространстве ([6], [7]).

Техника, на которую опирается изучение особенностей систем лучей, каустик, волновых фронтов и других объектов, связанных с геометрической оптикой и вариационным исчислением, идёт из симплектической и контактной геометрии. Симплектический анализ работы О.П.Щербака привёл А.Б.Гивенталя [8] к открытию задачи классификации волновых фронтов, решения которой взаимно однозначно соответствуют конечным группам Кокстера, порождённым евклидовыми отражениями.

В то время как большинство результатов, обсуждаемых в этой книге, были получены в течение последних двадцати лет, сам предмет является классическим и идёт от Архимеда, Гюйгенса, Барроу,...; доста-

точно странно, что классики не заметили этих результатов. Например, локальная классификация проекций типичной гладкой поверхности из точек обычного трёхмерного пространства была открыта только в 1981 г. (О.А.Платонова [9], О.П.Щербак). Существует конечный список неэквивалентных ростков таких проекций; он состоит из 14 проекций. Это в точности число различных форм окрестности точки на типичной поверхности, видимых из различных точек пространства.

Одно из возможных объяснений такого позднего открытия этих фундаментальных классификационных теорем состоит в том, что доказательства трудны и опираются на неожиданные соотношения между многими областями математики. Для того чтобы понять неожиданные сокращения многих членов в утомительных и длинных вычислениях, странные совпадения бифуркационных диаграмм в на первый взгляд не связанных проблемах и мистическое появление правильных многогранников в задачах прикладной математики, необходимо заменить прямые вычисления дифференциальной геометрии простым и общим подходом симплектической и контактной геометрии.

Общий принцип здесь таков: нужно поднять геометрические объекты из "конфигурационного" пространства V в "фазовое" пространство T^*V, в котором особенности или исчезают, или упрощаются (в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в квантовой теории такой подход называется "микролокальным"). Это поднятие трансформирует простые факты дифференциальной геометрии в общие теоремы симплектической и контактной геометрии, чья область применения гораздо шире (например, можно использовать дифференциально-геометрическую интуицию, рассматривая поверхности в евклидовом пространстве, для того чтобы получить результаты, касающиеся общих вариационных задач с односторонними ограничениями).

Я начну с короткого изложения хорошо известных элементарных фактов симплектической и контактной геометрии. Я надеюсь, что читатель сможет понять по крайней мере формулировки необходимых ему результатов, даже если он не овладеет некоторыми обоснованиями.

1 Симплектическая геометрия

Симплектическая геометрия — это геометрия фазового пространства. Эта глава содержит некоторые стандартные определения и факты элементарной симплектической геометрии, вместе с некоторыми менее иэвестными примерами (например, здесь описаны симплектические структуры пространств многочленов и теория нормальных форм подмногообразий симплектического многообразия).

1.1. Симплектические многообразия

Симплектическая структура на многообразии есть замкнутая невырожденная 2-форма (называемая также *симплектической формой*).

Пример 1 (*площадь*). Элемент площади $dp \wedge dq$ определяет на (q,p)-плоскости симплектическую структуру.

Пример 2 (*произведение*). Прямое произведение двух симплектических многообразий наследует от сомножителей естественную симплектическую структуру.

Пример 3 (*нормальная форма*). $\mathbf{R}^{2n}$ имеет, например, симплектическую структуру произведения n плоскостей, $\sum dp_i \wedge dq_i$.

Теорема (Дарбу). *Все симплектические многообразия данной фиксированной размерности локально симплектически диффеоморфны.*

Другими словами, любая замкнутая, невырожденная 2-форма может быть представлена локальной нормальной формой примера 3, в некоторых локальных "*координатах Дарбу*".

Замечание. Размерность симплектического многообразия чётна, так как кососимметрическая форма на нечётномерном пространстве вырождена (любое вращение нечётномерного пространства имеет ось).

Два вектора, приложенных в одной точке симплектического многообразия, называются *косоортогональными*, если значение симплектической формы на этих векторах равно нулю. Например, все p-оси координат Дарбу косоортогональны.

Пример 4 (*фазовое пространство*). Фазовое пространство (пространство кокасательного расслоения) $M = T^*V$ любого гладкого многообразия V снабжено естественной симплектической структурой, в обычных координатах фазового пространства записываемой как $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Важно отметить, что и "интегральный инвариант Пуанкаре" $\omega = d\alpha$, и "форма действия" $\alpha = \sum p_i\, dq_i$ *не зависят* от выбора локальных координат q_i на V. Другими словами, всякий диффеоморфизм V переводит α в α и ω в ω.

Для доказательства достаточно заметить, что форма действия имеет простое бескоординатное описание. Именно,

$$\alpha(\xi) = \pi(\xi)\rho_*(\xi) \quad (\xi \in TM),$$

где $\pi : TM \to M$ есть касательное расслоение фазового пространства и $\rho : T^*V \to V$ есть кокасательное расслоение конфигурационного пространства (рис. 6).

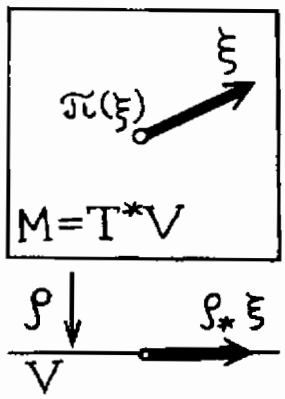


Рис. 6. Определение формы действия

Рассмотрим гиперповерхность в симплектическом многообразии.

Определение. *Характеристическим направлением* в точке гиперповерхности называется косоортогональное дополнение к её касательному пространству (в этой точке) (рис. 7).

Косоортогональное дополнение к гиперплоскости лежит в этой гиперплоскости, следовательно характеристическое направление касается гиперповерхности. Таким образом гиперповерхность снабжена полем характеристических направлений.

Интегральные кривые этого поля называются *характеристиками* гиперповерхности.

Пример 5 (*характеристики*). Характеристиками гиперповерхности $H(q,p) = 0$ (где $dH \neq 0$ и (p,q) — координаты Дарбу) являются траек-

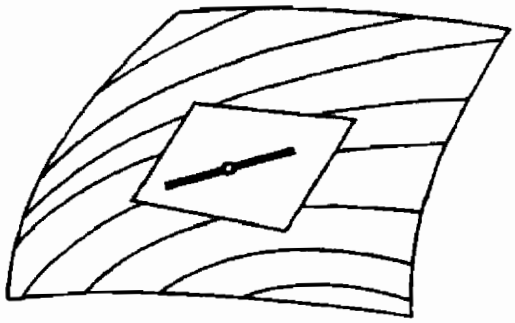


Рис. 7. Характеристическое направление и характеристики на гиперповерхности в симплектическом пространстве

тории канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Они являются также экстремалями вариационного принципа $\delta \int \alpha = 0$, $H = 0$, где $\alpha = p\,dq$.

Замечание. В математике слово "характеристический" всегда значит "присущий" или "не зависящий от произвола выбора". Таким образом характеристическое уравнение оператора не зависит от выбора координат, характеристическая подгруппа инвариантна относительно автоморфизмов (всей группы), характеристические классы когомологий инвариантны относительно диффеоморфизмов.

Характеристическое направление в точке гиперповерхности симплектического пространства может быть определено как единственное направление, инвариантное относительно симплектоморфизмов (симплектических диффеоморфизмов), сохраняющих эти гиперповерхность и точку. Как мы скоро увидим, для доказательства достаточно рассмотреть некоторую специальную гиперповерхность — скажем гиперплоскость, заданную в координатах Дарбу уравнением $p_1 = 0$ — так как все гиперповерхности в симплектическом многообразии локально симплектоморфны.

Рассмотрим пространство характеристик гиперповерхности в симплектическом многообразии. Глобально это пространство не определено, однако локально (в некоторой окрестности точки гиперповерхности) характеристики образуют многообразие. Размерность этого

многообразия на два меньше размерности исходного симплектического многообразия и, следовательно, чётна.

Пример 6 (*многообразие экстремалей*). Многообразие характеристик гиперповерхности в симплектическом многообразии наследует симплектическую структуру.

Действительно, симплектическая структура пространства характеристик определена следующим условием: значение исходной симплектической формы на двух произвольных векторах, приложенных в одной точке и касающихся гиперповерхности, равно значению искомой структуры на проекциях этих векторов в пространстве характеристик (рис. 8).

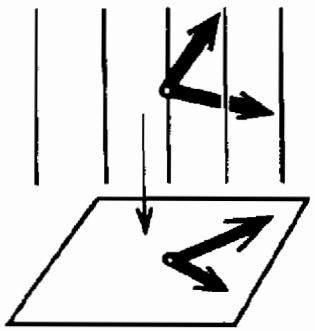


Рис. 8. Симплектическая структура пространства характеристик

Замечание. Доказательство того, что это условие определяет симплектическую структуру, является хорошим упражнением. Полезно также отметить, что симплектическое многообразие характеристик получается в два шага.

В обычной геометрии существует два способа уменьшить размерность многообразия — взять сечение или проекцию. В симплектической геометрии размерности симплектических многообразий чётны и уменьшение размерности всегда достигается в два шага, один из которых — взятие сечения, другой — проектирование. Для того чтобы получить многообразие характеристик мы начинаем с сечения коразмерности 1 (гиперповерхность) и затем проектируем его с одномерным ядром на многообразие характеристик.

Пример 7 (*пространство прямых*). В фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, определённом над евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$, рассмотрим гиперповерхность, определяющую евклидову метрику, $p^2 = 1$. Характеристики этой гиперповерхности соответствуют движению свободной частицы. Следовательно мы можем отождествить характеристики с ориентированными прямыми в $\mathbf{R}^n$. Таким образом многообразие характеристик

этой гиперповерхности определено глобально: это *многообразие всех ориентированных прямых в* $\mathbf{R}^n$.

Это многообразие может быть отождествлено с тотальным пространством (ко)касательного расслоения сферы S^{n-1}. Действительно, сопоставим каждой ориентированной прямой её единичный вектор скорости $v \in S^{n-1}$. Точка пересечения этой прямой с гиперплоскостью в $\mathbf{R}^{2n}$, касающейся S^{n-1} в v, определяет требуемый элемент T^*S^{n-1} (рис. 9). Это отождествление наделяет многообразие характеристик новой симплектической структурой (наследуемой из естественной симплектической структуры T^*S^{n-1} как фазового пространства).

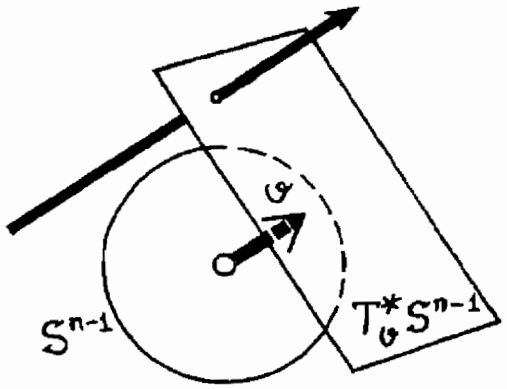


Рис. 9. Многообразие ориентированных прямых в евклидовом пространстве

Эти две симплектические структуры многообразия характеристик рассматриваемой гиперповерхности (редуцированная из $T^*\mathbf{R}^n$ и естественная симплектическая структура фазового пространства T^*S^{n-1}) отличаются только знаком.

Замечание. Таким же образом "многообразие" экстремалей регулярной одномерной вариационной задачи, соответствующей фиксированному уровню энергии, имеет естественную симплектическую структуру. (Этот факт обычно недооценивается в традиционных изложениях вариационного исчисления и теории оптимального управления.)

Следующие примеры симплектических структур на пространствах многочленов очень важны, поскольку они дают нам полезные нормальные формы особенностей лагранжевых и лежандровых многообразий.

Пример 8 (*бинарные формы*). Рассмотрим линейное пространство V вещественных форм (однородных многочленов) степени d от двух переменных x, y. Размерность этого пространства равна $d+1$. Если d нечётно, то V чётномерно. Группа $G = SL(2, \mathbf{R})$ (линейных преобразований плоскости с единичным определителем) действует на V. Су-

ществует невырожденная кососимметрическая G-инвариантная форма на V. Эта форма единственна (с точностью до ненулевого сомножителя; более или менее это было иэвестно ещё Гильберту).

Следовательно существует естественная симплектическая структура на пространстве бинарных форм нечётной степени (определённая с точностью до ненулевого сомножителя).

Точное описание этой симплектической структуры на пространстве бинарных форм нечётной степени даётся следующим образом: бинарная форма ϕ степени d может быть записана в виде

$$\phi(x,1) = q_0 e_d + \ldots + q_n e_{n+1} - p_n e_n + \ldots - (-1)^n p_0,$$

где $e_s = x^s/s!$, $(p_0, \ldots, q_n)$ — координаты Дарбу и знаки членов, содержащих p, чередуются.

Пример 9 (*многочлены чётной степени*). Гиперплоскость $q_0 = 1$ может быть отождествлена с пространством многочленов от x степени d с фиксированным старшим коэффициентом. Функция q_0 есть функция Гамильтона сдвигов вдоль оси значений многочлена. Следовательно симплектическое многообразие характеристик этой гиперповерхности может быть отождествлено с многообразием многочленов чётной степени $b = d - 1 = 2n$ с фиксированным старшим коэффициентом,

$$f(x) = e_b + q_1 e_{b-1} + \ldots + q_n e_n - p_n e_{n-1} + \ldots + (-1)^n p_1,$$

где $(p_1, \ldots, q_n)$ — координаты Дарбу.

Пример 10 (*многочлены нечётной степени с нулевым следом*). Сдвиги вдоль оси x сохраняют симплектическую структуру примера 9. Они образуют однопараметрическую группу симплектоморфизмов. Функция Гамильтона этой группы (как нетрудно видеть) записывается следующим образом

$$h = p_1 + q_1 p_2 + \ldots + q_{n-1} p_n + \frac{1}{2} q_n^2.$$

(Эта формула была иэвестна ещё Гильберту [10], см. [11], [12].)

Рассмотрим многообразие характеристик гиперповерхности $h = 0$. Отождествим это многообразие с многообразием многочленов нечётной степени $a = b - 1$ с фиксированным старшим коэффициентом и нулевым следом (то есть с нулевой суммой корней). В самом деле, сдвиг, обнуляющий сумму корней, определён единственным образом, а значение p_1 определено значениями других коэффициентов, так как $h = 0$.

Таким образом мы определили симплектическую структуру на пространстве многочленов $g(x)$ нечётной степени с фиксированным старшим коэффициентом и нулевой суммой корней:

$$g(x) = e_a + Q_1 e_{a-2} + \ldots + Q_m e_m - P_m e_{m-1} + \ldots + (-1)^m P_1,$$

где $a = 2m+1$ и $(P_1, \ldots, Q_m)$ — координаты Дарбу.

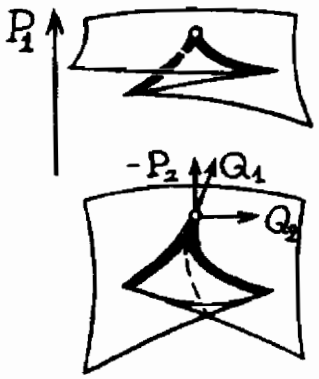


Рис. 10. Раскрытый ласточкин хвост над обыкновенным ласточкиным хвостом

Например, рассмотрим пространство многочленов пятой степени

$$\frac{1}{120}x^5 + \frac{Q_1}{6}x^3 + \frac{Q_2}{2}x^2 - P_2 x + P_1.$$

Многочлены такого вида, имеющие вещественный корень кратности 3, образуют (особую) поверхность в симплектическом 4-пространстве (рис. 10). Эта поверхность (называемая *раскрытым ласточкиным хвостом*) является лагранжевым многообразием, то есть симплектическая структура на этой поверхности равна нулю.

Раскрытый ласточкин хвост был первым обнаруженным нетривиальным примером особого лагранжева многообразия и играет важную роль в теории особенностей каустик и волновых фронтов; он связан с икосаэдром, спрятанным в точке перегиба границы препятствия на евклидовой плоскости.

1.2. Подмногообразия симплектических многообразий

Подмногообразия евклидова или риманова многообразия различаются своей внутренней геометрией и своим положением в объемлющем пространстве (например, поверхность в евклидовом 3-пространстве имеет, помимо гауссовой, среднюю кривизну). В симплектическом случае ситуация проще: внутренняя геометрия подмногообразия определяет (по меньшей мере локально) внешнюю геометрию.

Теорема (А.Б.Гивенталь [13], [14], [8]). *Росток подмногообразия в симплектическом пространстве определён, с точностью до симплектоморфизма, ограничением симплектической структуры на его касательное расслоение.*

Эта теорема обобщает теорему Дарбу (соответствующую частному случаю, когда подмногообразие — точка). Теорема близка следующему обобщению теоремы Дарбу:

Теорема (А.Вейнстейн [15]). *Подмногообразие симплектического пространства определено, с точностью до симплектоморфизма некоторой своей окрестности, ограничением симплектической формы на касательные векторы к объемлющему пространству в точках этого подмногообразия.*

Теорема Вейнстейна глобальна в том смысле, что она даёт заключение о всём многообразии. Теорема Гивенталя локальна, однако в ней требуется только "внутренняя" информация, в то время как для применения теоремы Вейнстейна необходимо знать некоторую "внешнюю" информацию (значения симплектической формы на векторах, не касающихся исследуемого многообразия).

Для наших целей теорема Гивенталя чрезвычайно полезна, в отличие от теоремы Вейнстейна.

Доказательство теоремы Гивенталя. Достаточно доказать, что для двух произвольных симплектических структур, совпадающих на ростке подмногообразия, одна может быть преобразована в другую диффеоморфизмом, сохраняющим росток. Мы докажем даже большее: можно так выбрать этот диффеоморфизм, что он оставляет на месте каждую точку подмногообразия.

Начнём с линеаризованной проблемы: ограничения симплектических структур на касательное пространство к подмногообразию в точке приложения ростка совпадают.

Лемма 1. *Единственными симплектическими инвариантами подпространства линейного симплектического пространства (снабжённого невырожденной кососимметрической билинейной формой) являются его размерность и ранг ограничения на него симплектической формы.*

Другими словами, для двух произвольных подпространств одинаковой размерности и ранга существует линейное симплектическое преобразование объемлющего пространства, отправляющее первое под-

пространство во второе. Это отображение может быть выбрано таким образом, что оно будет совпадать с произвольным линейным отображением первого подпространства на второе, при условии что это отображение переводит ограничение симплектической формы на первое подпространство в её ограничение на второе подпространство.

Элементарное доказательство этой леммы из линейной алгебры оставляется читателю (доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения обычной евклидовой геометрии).

Лемма 2. *Для любого гладкого однопараметрического семейства симплектических структур ω_t, совпадающих на ростке подмногообразия, существует семейство локальных диффеоморфизмов, оставляющих инвариантными точки подмногообразия и переводящих ω_0 в ω_t для любого t.*

Теорема следует из лемм 1 и 2. Действительно, по лемме 1 можно выбрать диффеоморфизм, оставляющий инвариантными точки подмногообразия и переводящий вторую симплектическую структуру в первую в рассматриваемой точке. Пусть две структуры, совпадающие в рассматриваемой точке, обозначаются через ω_0 и ω_1. Тогда семейство $\{\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)\}$ постоянно в рассматриваемой точке. Таким образом, формы ω_t, $0 \leq t \leq 1$, невырождены в рассматриваемой точке и, следовательно, определяют симплектические структуры в некоторой её окрестности.

Лемма 2, применённая к этому семейству, доставляет требуемую эквивалентность.

Доказательство леммы 2. Попытаемся найти требуемое семейство диффеоморфизмов как семейство зависящих от времени t преобразований, определённых зависящим от времени семейством векторных полей V_t. Для V_t мы получаем "*гомологическое уравнение*", а именно:

$$L_{V_t}\omega_t = \beta, \text{ где } \beta = -\frac{\partial \omega_t}{\partial t}.$$

Здесь L_{V_t} — производная Ли, $L_V = di_V + i_V d$. Так как ω_t замкнута, гомологическое уравнение сводится к

$$di_{V_t}\omega_t = \beta.$$

Форма β замкнута, следовательно локально $\beta = d\gamma$ (лемма Пуанкаре).

Теперь мы можем выбрать 1-форму γ так, что она равна нулю во всех точках подмногообразия. Эта "относительная лемма Пуанкаре"

следует из локальной стягиваемости окрестности подмногообразия на само подмногообразие.

Действительно, значения этой 1-формы γ могут быть записаны явным образом как интегралы вдоль орбит этого стягивания; а именно, $\int_\delta \gamma = \int_{p\delta} \beta$, где $p\delta$ есть след, заметённый цепью δ при стягивании окрестности к подмногообразию (рис. 11). Площадь, заметённая 1-цепью δ, начинающейся в точке подмногообразия, мажорируется величиной $C \mid \delta \mid^2$. Следовательно γ равна нулю в точках подмногообразия.

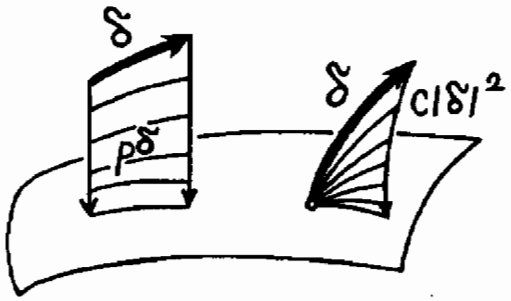


Рис. 11. Относительная лемма Пуанкаре

Таким образом, гомологическое уравнение принимает вид

$$di_{V_t}\omega_t = d\gamma,$$

где 1-форма γ равна нулю во всех точках подмногообразия. Так как формы ω_t не вырождены, линейные алгебраические уравнения

$$i_{V_t}\omega_t = \gamma$$

определяют единственные решения V_t. Эти векторные поля гладко зависят от t и равны нулю на подмногообразии. Зависящее от времени дифференциальное уравнение $\dot{x} = V_t(x)$ определяет требуемые диффеоморфизмы (отправляющие начальное значение x в момент времени $t = 0$ в значение соответствующего решения в момент времени t). Эти диффеоморфизмы определены локально, но, так как V равно нулю в рассматриваемой точке, диффеоморфизмы определены для $0 \leq t \leq 1$ в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Пример 1. *Все симплектические подмногообразия (данной, фиксированной размерности) симплектического пространства локально симплектоморфны* (посредством симплектоморфизма объемлющего пространства).

Пример 2. *Все лагранжевы подмногообразия данного симплектического пространства локально симплектоморфны* (и, следовательно, симплектоморфны любому выделенному, скажем p-плоскости в модели Дарбу).

Пример 3. *Все подмногообразия, на которых ограничения симплектической структуры объемлющего пространства имеют фиксированный, постоянный ранг, локально симплектоморфны.* (Как локальную модель мы можем выбрать, скажем, координатную плоскость $(p_1, \ldots, p_r; q_1, \ldots, q_{r+s})$ модели Дарбу; ранг кососимметрической формы всегда чётен, $2r$.).

Пример 4. *Все гиперповерхности симплектического многообразия локально симплектоморфны.*

Действительно, косоортогональное дополнение к гиперплоскости одномерно и принадлежит этой гиперплоскости. То есть коранг ограничения симплектической структуры на гиперповерхность в любой точке равен 1. Следовательно коранг постоянен, и "все гиперповерхности одинаковы". Таким же образом, "одинаковы все кривые".

Пример 5. Рассмотрим типичную 2-мерную ориентированную поверхность в симплектическом многообразии (большей размерности). Ограничение симплектической структуры на поверхность есть 2-форма $f\tau$, где τ — (некоторый) элемент площади и f — гладкая функция.

Ростки поверхности в точках, не принадлежащих линии $f = 0$, симплектичны (пример 1). В точках линии вырождения $f = 0$ ограничение формы равно нулю.

В общем случае линия вырождения гладка. В невырожденных точках вырождения ($f = 0$, $df \neq 0$) 2-форма приводима к виду $x\,dx \wedge dy$ при помощи подходящей замены локальных координат. Таким образом из теоремы Гивенталя вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Типичная 2-поверхность в симплектическом 4-многообразии локальным симплектоморфизмом приводится к одной из двух нормальных форм:*

$$p_2 = q_2 = 0 \text{ — } \textit{типичные точки};$$

$$p_1 - p_2^2 = q_2 = 0 \text{ — } \textit{вырожденные точки}.$$

Для того чтобы получить локальные нормальные формы типичной 2-поверхности в симплектическом пространстве большей размерности, достаточно добавить уравнения $p_3 = q_3 = \ldots = 0$.

Пример 6. Рассмотрим чётномерное подмногообразие симплектического пространства. Ограничение симплектической структуры на это подмногообразие в общем случае вырождается в точках некоторой *гиперповерхности вырождения*, лежащей в подмногообразии. В типичной точке гиперповерхности вырождения ограничение приводимо к нормальной форме

$$x_1\, dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \ldots dx_n \wedge dy_n$$

(доказательство представляет (лёгкое) упражнение).

Следствие 2. *Типичное чётномерное подмногообразие симплектического $2n$-многообразия в некоторой окрестности типичной точки гиперповерхности вырождения приводимо к нормальной форме*

$$p_1 - p_2^2 = q_2 = p_3 = q_3 = \ldots = p_k = q_k = 0.$$

Замечание. Эти результаты справедливы как в гладком, так и в аналитическом (или голоморфном) случае. Теория бóльших вырождений намного сложнее: ряды, приводящие к нормальным формам, в общем случае расходятся.

В следующих примерах слова "функции", "формы", "диффеоморфизмы" обозначают C^∞ объекты (даже если начальные данные, приведённые к нормальным формам, аналитичны).

Пример 7. Рассмотрим четырёхмерное подмногообразие симплектического многообразия размерности 6 (или выше). Точки вырождения (ограничения симплектической структуры на подмногообразие) образуют гладкую гиперповерхность вырождения размерности 3 на четырёхмерном подмногообразии общего положения. Ранг этого вырождения для подмногообразия общего положения равен двум в точках этой 3-поверхности (необходимо $6 > 3$ параметров, чтобы получить точку коранга 4; $2c^2 - c$ параметров, чтобы получить точку коранга $2c$).

Следовательно 3-поверхность вырождения снабжена гладким полем 2-плоскостей (ядер ограничений), касательных к исходному 4-многообразию. В типичной точке 3-поверхности вырождения ядро трансверсально этой поверхности. Линия пересечения есть ядро ограничения симплектической структуры на 3-поверхность вырождения. Таким образом эта 3-поверхность снабжена полем касательных направлений, внутренне определённых симплектической структурой; это поле называется характеристическим.

Однако, в некоторых точках 3-поверхности вырождения ядро может касаться этой 3-поверхности. Для типичного 4-многообразия это возможно на некоторой кривой на 3-поверхности. Точки этой кривой являются особыми точками характеристического поля. Ограничение симплектической формы на 3-поверхность вырождения в точках этой кривой равно нулю.

Особенности замкнутых вырожденных 2-форм на 4-многообразиях изучались Ж.Мартине [16] и называются *особенностями Мартине*. Он доказал что, как правило (для типичных форм в типичных точках особых кривых) 2-форма приводима диффеоморфизмом к одной из двух нормальных форм (называемых *эллиптической* и *гиперболической моделями Мартине*). Для того, чтобы описать эти модели, выберем элемент объёма (невырожденную 3-форму) на 3-поверхности вырождения. Ограничение нашей замкнутой 2-формы на эту поверхность есть поток бездивергентного векторного поля (зависящего от выбора элемента объёма; однако, его поле направлений, будучи характеристическим полем направлений, инвариантно определено).

Это векторное поле обнуляется на линии особенностей Мартине. Сейчас мы приведём это бездивергентное векторное поле в 3-пространстве к нормальной форме.

Общая проблема приведения к нормальной форме бездивергентного векторного поля в 3-пространстве в его изолированной особой точке почти так же сложна, как проблемы небесной механики. Однако, в нашем случае поле даже более вырождено: особые точки не изолированы, а образуют кривую. Но оказывается, что проблема приведения бездивергентного векторного поля в 3-пространстве на линии особенностей (посредством диффеоморфизма пространства сопровождаемого умножением поля на подходящий множитель) намного проще, чем соответствующая проблема для типичных бездивергентных векторных полей.

Рассмотрим линейную часть поля в выбранной точке. Одно из трёх собственных значений и сумма всех собственных значений равны нулю. Следовательно, два оставшихся собственных значения либо вещественны и разных знаков, либо комплексно сопряжены. В типичной точке линии особенностей эти два собственных значения не равны нулю. Следовательно, линейная часть приводима (подходящей заменой координат и умножением векторного поля на подходящую функцию) к одной из двух нормальных форм $x\partial_x - y\partial_y$ или $x\partial_y - y\partial_x$ (в рассматриваемой точке и в близких точках оси z). В первом случае (вещественные собственные значения) особенность называется гиперболической, во втором — эллиптической.

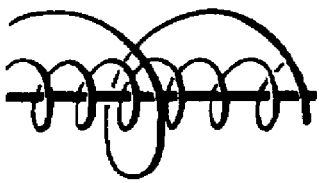
Анализ слагаемых более высокого порядка следует стандартной схеме теории нормальных форм (см. [17]). В итоге получим:

$$x\partial_x - y\partial_y + xy\partial_z,$$
$$x\partial_y - y\partial_x + (x^2 + y^2)\partial_z$$

(в гиперболическом, соответственно эллиптическом, случае).

Из этих формул видно, что, например, в эллиптическом случае интегральные кривые нормализованного поля ядер 2-формы являются спиралевидными кривыми, закрученными вокруг линии особенностей. Витки спирали, близкой к этой линии, — почти окружности, лежащие очень близко друг к другу (шаг спирали вдоль линии особенностей пропорционален квадрату радиуса), рис. 12.

Рис. 12. Типичное вырождение симплектической структуры на четырёхмерном многообразии



Поле ядер на 3-поверхности определяет симплектический тип ростка исходного 4-многообразия. Действительно, вычисления показывают, что ни на одном из шагов в приведённой выше конструкции не теряется информация: поле ядер определяет замкнутую 2-форму на 3-поверхности с точностью до диффеоморфизма этой 3-поверхности, ограничение замкнутой 2-формы на 3-поверхность вырождения определяет росток замкнутой 2-формы на 4-пространстве с точностью до диффеоморфизма 4-пространства, и, наконец, росток замкнутой 2-формы на 4-подмногообразии симплектического пространства, индуцированной из симплектической структуры, определяет подмногообразие с точностью до симплектического диффеоморфизма (по теореме Гивенталя).

Окончательно, нормальные формы 4-подмногообразий симплектического пространства таковы:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1p_3 \pm q_1q_2 + \frac{q_3^3}{6}, \\ p_3 &= 0, \\ p_4 &= q_4 = \ldots = 0 \end{aligned}$$

(в координатах Дарбу).

Замечание 1. Подобные формулы определяют особенности коразмерности 3 на любом типичном чётномерном подмногообразии симплектического многообразия (нужно заменить 4 на k в нормальных формах, чтобы получить подмногообразие размерности $2k-4$).

Нормальные формы вырождений симплектических форм на типичных подмногообразиях размерности 6 (или выше) образуют более длинный список. Однако, приведённые выше особенности устойчивы (не исчезают после малой деформации подмногообразия; после возмущения в близлежащей точке образуется эквивалентная особенность) и просты (все близлежащие особенности образуют конечный набор классов эквивалентности).

Наш список содержит все простые устойчивые ростки (чётномерных) подмногообразий симплектических многообразий (нечётномерные подмногообразия просты только если они имеют постоянный ранг). Например, эллиптическая и гиперболическая части линии особенностей на 4-подмногообразии разделены параболическими точками, которые не просты. Следовательно, типичное 4-подмногообразие с параболической точкой симплектически не устойчиво (оно не симплектоморфно своему слабому воэмущению). Такие неустойчивые 4-подмногообразия образуют открытое множество в пространстве 4-подмногообразий.

Замечание 2. Локальные классификации подмногообразий симплектического пространства и вырождений замкнутых 2-форм полностью эквивалентны, если размерность пространства не фиксирована. Действительно, любая замкнутая 2-форма на n-многообразии локально является дифференциалом 1-формы $\alpha = f_1\,dq_1 + \ldots + f_n\,dq_n$. Эта 2-форма индуцирована из стандартной формы $dp \wedge dq$ на пространстве Дарбу вложением $q \mapsto (q, p = f(q))$. Следовательно, любая замкнутая 2-форма на n-мерном многообразии локально индуцирована из симплектического $2n$-пространства. Две замкнутые формы локально приводимы друг к другу диффеоморфизмом n-многообразия, если и только если соответствующие подмногообразия симплектического $2n$-пространства симплектоморфны (по теореме Гивенталя).

Замечание 3. В приложениях часто бывает важным привести к нормальным формам некоторые особые подмногообразия со специальными особенностями в симплектическом пространстве. Например, проблемы дифракции в оптике и проблема об обходе препятствия в теории

оптимального управления ведут к симплектической классификации пар трансверсальных гиперповерхностей симплектического пространства.

Соответствующая (C^∞) нормальная форма была найдена Мельрозом [18]: в координатах Дарбу гиперповерхности таковы:

$$p_1 = p_2^2, \qquad q_2 = 0$$

(сравни со следствием 1). В аналитическом или голоморфном случае нормализующие ряды (впервые найденные Сато [19]) в общем случае расходятся (Ошима [20]). Причиной является присутствие "функциональных модулей" в голоморфной классификации: множество голоморфно неэквивалентных пар голоморфных гиперповерхностей внутри данного класса C^∞-эквивалентности пар параметризуется бесконечномерным пространством голоморфных функций, которые можно инвариантно связать с парами.

Мы вернёмся к классификации этих пар в главе 7.

Упражнение 1. *Полным флагом* в векторном пространстве V называется последовательность векторных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_N = V$, $\dim V_i = i$. Расклассифицируйте флаги в симплектическом векторном пространстве V_{2n} с точностью до линейного симплектоморфизма.

Указание. Спроектируйте V_{2n-1} в его пространство характеристик B_{2n-2} и продолжайте по индукции.

Ответ. Число неэквивалентных флагов равно

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Каждый флаг эквивалентен координатному флагу

$$\{V_i = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_i)\},$$

где $(e_1, \ldots, e_{2n})$ — перестановка *базиса Дарбу* $(\partial/\partial p_1, \ldots, \partial/\partial q_n)$. Для перечисления представителей поместите p_1 в левую позицию, q_1 в свободную (любую) позицию, p_2 в левую свободную позицию, q_2 в свободную (любую) позицию, и т. д. Типичный флаг соответствует порядку $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$. Коразмерность множества флагов, эквивалентных некоторому представителю, равна числу транспозиций соответствующей перестановки.

Пример. Три типа флагов в $\mathbf{R}^4$ представимы последовательностями

$$p_1q_1p_2q_2, \quad p_1p_2q_1q_2, \quad p_1p_2q_2q_1.$$

Коразмерности, соответственно, равны 0, 1, 2.

Замечание. Сумма ядер ограничений симплектической структуры на пространства полного флага всегда является лагранжевым подпространством (М.Вернь, [21]).

Упражнение 2. (Полный) флаг подмногообразий многообразия M есть последовательность подмногообразий $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_N = M$, $\dim M_i = i$. Флаг подмногообразий симплектического пространства называется *флагом постоянного ранга*, если ранг ограничения симплектической структуры на любое M_i постоянен вдоль M_i.

Расклассифицируйте ростки флагов подмногообразий постоянного ранга в симплектическом многообразии с точностью до симплектоморфизма.

Указание. Спроектируйте M_{2n-1} в его пространство характеристик B_{2n-2} и используйте известную (по индукции) структуру последнего для того, чтобы привести к нормальной форме ситуацию внутри M_{2n-1} (включая ограничение симплектической структуры). Затем используйте теорему Гивенталя для того, чтобы привести к нормальной форме M_{2n-1} в M.

Ответ. Росток флага постоянного ранга эквивалентен флагу векторных пространств в симплектическом векторном пространстве. Следовательно число неэквивалентных ростков в симплектическом $2n$-многообразии равно $(2n-1)!!$.

1.3. Лагранжевы многообразия, расслоения, отображения и особенности

Определение 1. *Лагранжевым подмногообразием* симплектического многообразия называется подмногообразие наибольшей размерности, ограничение симплектической структуры на которое равно нулю.

(Его размерность равна половине размерности симплектического многообразия.)

Пример 1. Плоскость $p = 0$ в $\mathbf{R}^{2n}$, снабжённом координатами Дарбу, является лагранжевым подмногообразием. Все лагранжевы подмногообразия данной размерности локально симплектоморфны (по теореме Гивенталя), и, следовательно, каждое из них локально определено уравнением $p = 0$ в некоторых координатах Дарбу.

Пример 2. Формула $p = ds$, где s — некоторая гладкая функция на V, определяет лагранжево сечение T^*V. Например, нулевое сечение кокасательного расслоения является лагранжевым подмногообразием. Некоторая окрестность лагранжева подмногообразия симплектоморфна окрестности нулевого сечения его кокасательного расслоения (это следует из теоремы Вейнстейна, см. §1.2).

Пример 3. Слои кокасательного расслоения являются лагранжевыми подпространствами.

Пример 4. Пусть Γ — подмногообразие евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ (Γ может быть гиперповерхностью, точкой, кривой,...). Множество ориентированных нормалей к Γ является лагранжевым подмногообразием симплектического пространства ориентированных прямых в $\mathbf{R}^n$.

Пример 5. Множество многочленов степени $2m$ с единичным старшим коэффициентом и делящихся на x^m является лагранжевым подпространством.

Замечание. Эмпирическое правило Вейнстейна гласит: в симплектической геометрии *любой* важный объект является лагранжевым подмногообразием (например, уравнения Гамильтона и симплектоморфизмы могут быть описаны как лагранжевы многообразия).

Определение 2. *Лагранжевым расслоением* симплектического многообразия называется расслоение с лагранжевыми слоями.

Пример 1. $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $(q, p) \mapsto q$.

Пример 2. Кокасательное расслоение над гладким многообразием является лагранжевым расслоением (лагранжевым расслоением фазового пространства над конфигурационным).

Пример 3. Поставим в соответствие каждой ориентированной прямой в евклидовом пространстве её единичный вектор. Таким образом

мы получим отображение симплектического многообразия ориентированных прямых в евклидовом пространстве на единичную сферу.

Это отображение является лагранжевым расслоением (в сущности оно совпадает с проекцией кокасательного расслоения сферы, единственное отличие — знак симплектической структуры).

Теорема. *Все лагранжевы расслоения (фиксированной размерности) локально эквивалентны (то есть в подходящих координатах Дарбу любое из них определено формулами примера 1 в некоторой окрестности любой точки пространства расслоения).*

Доказательство. Пусть $\pi : E^{2n} \to B^n$ — лагранжево расслоение и $f : B^n \to \mathbf{R}$ — функция. Поднимем f до функции $F = f\pi : E^{2n} \to \mathbf{R}$ и рассмотрим гамильтонов поток g^t, определённый гамильтоновым векторным полем V_F (определяемым так: $\omega(V_F, \xi) = dF(\xi)$ для любого вектора $\xi \in TE$, где ω является симплектической структурой многообразия E).

Лемма. *Векторное поле V_F вертикально (касается слоёв), и потоки, построенные по разным функциям f и g на базе, коммутируют.*

Доказательство. $dF(\xi) = 0$ для всех вертикальных ξ. Следовательно, V_F косоортогонален касательному пространству к слою. Но это линейное пространство лагранжево, следовательно совпадает со своим косортогональным дополнением. Таким образом V_F принадлежит этому вертикальному лагранжеву пространству.

Коммутативность очевидна, так как скобки Пуассона $(F, G) = \omega(V_F, V_G) = 0$ для $F = f\pi$, $G = g\pi$.

Для того, чтобы вывести теорему из леммы, выберем локальные координаты $f_1, \ldots, f_n$ на базе и локальное лагранжево сечение $s : B \to E$, проходящее через данную точку E. Пусть $F_i = f_i\pi : E \to \mathbf{R}$ и g_i^t — соответствующий поток. Точка с координатами Дарбу (p, q) есть $g_1^{-p_1} \ldots g_n^{-p_n} s(b)$, где b — точка базы с координатами $f_i(b) = q_i$.

Замечание. Слои любого лагранжева расслоения имеют естественную аффинную структуру: сдвиги определены потоками, порождёнными функциями Гамильтона, поднятыми с базы.

Пример 4. Пусть интегрируемая по Лиувиллю система с интегралами $I_1, \ldots, I_n$ имеет компактное, регулярное интегральное n-подмногообразие $I_1 = C_1, \ldots, I_n = C_n$, $(I_i, I_j) = 0$. В некоторой окрестности

этого многообразия отображение I является лагранжевым расслоением. Следовательно инвариантные торы интегрируемых систем образуют лагранжевы расслоения.

Аффинная структура на слоях является главным ингредиентом в конструкции переменных действие–угол для интегрируемых систем.

Определение 3 (*лагранжевы отображения*). Рассмотрим вложенное лагранжево подмногообразие L в пространстве лагранжева расслоения $E \twoheadrightarrow B$. Проекция L в B называется *лагранжевым отображением*. Таким образом, лагранжево отображение — тройка $L \hookrightarrow \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$, где левая стрелка является лагранжевой иммерсией, а правая — лагранжевым расслоением (рис. 13).

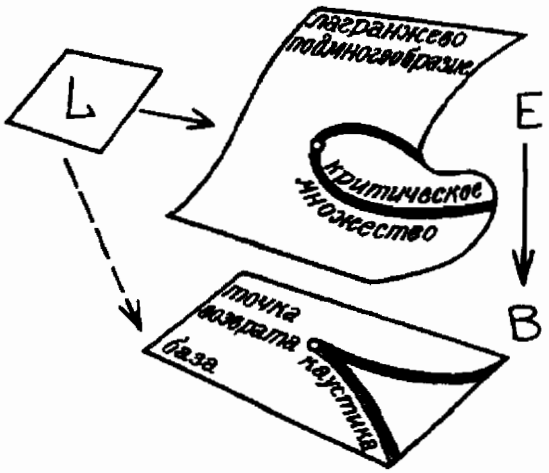


Рис. 13. Лагранжево отображение и его каустика

Лагранжевой эквивалентностью двух отображений называется симплектоморфизм тотального пространства, переводящий слои первого лагранжева расслоения в слои второго и первую лагранжеву иммерсию во вторую. Таким образом, лагранжева эквивалентность является коммутативной (3×2) диаграммой; где строки — данные лагранжевы отображения, вертикальные стрелки — диффеоморфизмы, средняя стрелка — симплектоморфизм.

Множество критических значений лагранжева отображения называется его *каустикой*. Каустики эквивалентных отображений диффеоморфны.

Пример 1 (*градиентное отображение*). $q \mapsto p = \partial S/\partial q$. Лагранжево подмногообразие L является графиком этого отображения; здесь лагранжево расслоение — кокасательное расслоение $(q, p) \mapsto q$.

Пример 2 (*нормальное отображение*). Сопоставим каждому вектору нормали к подмногообразию его конечную точку. Получившееся отображение — лагранжево (лагранжево подмногообразие L в $T^*\mathbf{R}^n$ образовано 1-формами $(n,.)$ в конечных точках нормальных векторов n).

Каустика этого отображения является огибающей семейства нормалей к исходному подмногообразию. (Для гиперповерхности каустика также называется *фокальным множеством* гиперповерхности.)

Пример 3 (*отображение Гаусса*). Это отображение трансверсально ориентированной гиперповерхности евклидова пространства в единичную сферу, отправляющее точку гиперповерхности в единичную нормаль к гиперповерхности в этой точке.

Отображение Гаусса лагранжево. Лагранжево подмногообразие симплектического многообразия ориентированных прямых в евклидовом пространстве образовано нормалями к гиперповерхности.

Эти три примера мотивировали (в 1966 г.) создание теории лагранжевых особенностей по аналогии с общей теорией особенностей Уитни–Тома–Мезера.

Определение 4 (*лагранжевы особенности*). *Лагранжева особенность* есть росток лагранжева отображения, рассматриваемый с точностью до лагранжевой эквивалентности.

Важным физическим явлением, в котором встречаются лагранжевы особенности, являются световые каустики.

Пусть $F(x,q)$ обозначает оптическое расстояние от точки x (когерентного) источника света на гладком многообразии до точки q многообразия наблюдения. Фазы волн на многообразии наблюдения определены (согласно принципу стационарной фазы Френеля) лагранжевым многообразием (рис. 14)

$$L = \{(p,q) \mid \exists x : \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ p = \frac{\partial F}{\partial q}\}. \qquad (*)$$

Семейство F функций переменной x, зависящих от параметров q, называется *производящим семейством* этого лагранжева подмногообразия (и его лагранжева отображения $(q,p) \mapsto q$ на многообразие наблюдения).

Каустики таких лагранжевых отображений — это места, где яркость света больше обычной.

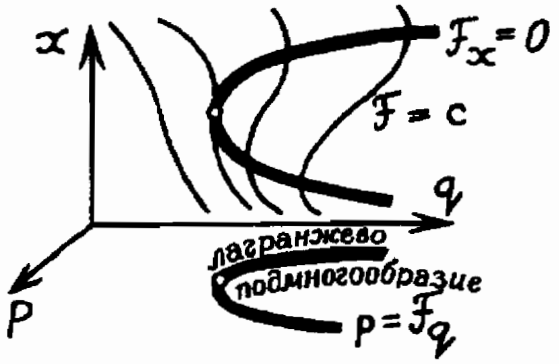


Рис. 14. Лагранжева кривая, порождённая семейством $x^3 - qx$

Пример (*см.* [2]). Лагранжевы особенности типичных лагранжевых отображений многообразий размерности $n \leq 5$, с точностью до лагранжевой эквивалентности, содержатся в следующем *списке лагранжевых особенностей*, определённых производящими семействами $\mu \leq n+1$):

$$A_\mu:\ F = \pm x^{\mu+1} + q_1 x^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu-1}x;$$

$$D_\mu:\ F = x_1^2 x_2 \pm x_2^{\mu-1} + q_1 x_2^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu-2}x_2 + q_{\mu-1}x_1;$$

$$E_6:\ F = x_1^3 \pm x_2^4 + q_1 x_1 x_2^2 + q_2 x_1 x_2 + q_3 x_2^2 + q_4 x_1 + q_5 x_2;$$

$$E_7:\ F = x_1^3 + x_1 x_2^3 + q_1 x_1^2 x_2 + q_2 x_1^2 + q_3 x_1 x_2 + q_4 x_2^2 + q_5 x_1 + q_6 x_2;$$

$$E_8:\ F = x_1^3 + x_2^5 + q_1 x_1 x_2^3 + q_2 x_1 x_2^2 + q_3 x_2^3 + q_4 x_1 x_2 + q_5 x_2^2 + q_6 x_1 + q_7 x_2.$$

Все особенности A, D, E, определённые этими производящими семействами (для произвольного μ), устойчивы и просты (не имеют модулей). Простейшие особенности A_2 (складка) и A_3 (сборка) явным образом задаются проекцией $(q,p) \mapsto q$ лагранжевых многообразий

$$A_2:\ q_1 = \mp 3x^2, p_1 = x;$$

$$A_3:\ q_2 = \mp 4x^3 - 2xq_1, p_1 = x^2, p_2 = x.$$

Обе складки ($\mp$ в A_2) лагранжево эквивалентны, в отличие от лагранжевых сборок ($\mp$ в A_3).

Таким образом, типичные лагранжевы 2-поверхности в фазовом 4-пространстве определяют, при проекции на конфигурационную 2-плоскость, те же особенности Уитни, что и типичные (не лагранжевы) 2-поверхности (с точностью до диффеоморфизма). Это не очевидно *априори*, так как лагранжевы отображения достаточно специальны. И действительно, в больших размерностях есть отличия между типичными лагранжевыми и общими отображениями: некоторые типичные

общие особенности не встречаются в списке типичных лагранжевых особенностей, в то время как некоторые типичные лагранжевы особенности не являются типичными для (не лагранжевых) общих особенностей.

Пример 1. Типичная одномерная каустика имеет (помимо самопересечений) только полукубические точки возврата (особенности A_3). Типичная двумерная каустика имеет (помимо самопересечений) только ласточкины хвосты (A_4), пирамиды (D_4^-) и кошельки (D_4^+), рис. 15 (Эти D особенности Р.Томом в [22] были названы "омбилическими особенностями", так как они связаны с омбилическими точками на 2-поверхностях в евклидовом 3-пространстве; они являются особенностями фокальных множеств поверхностей.)

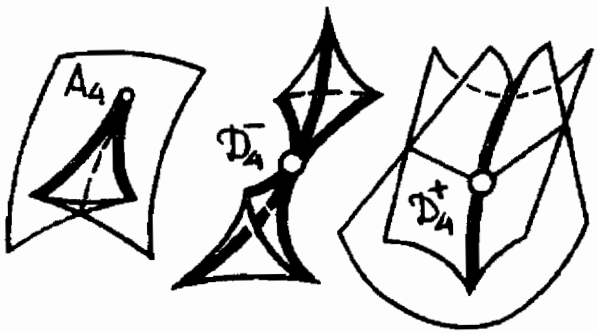


Рис. 15. Типичные особенности каустик в трёхмерном пространстве

Пример 2. Гауссово отображение типичной поверхности в евклидовом 3-пространстве имеет только *складки* (A_2) (в типичных точках параболической линии) и *сборки* (A_3) (в изолированных точках параболической линии, в которых асимптотическое направление касается этой линии). Более подробно это изложено в [23]–[26].

Типичные лагранжевы особенности отображений пространств размерности $n > 5$ имеют модули (непрерывные инварианты лагранжевой эквивалентности), для больших размерностей появляются даже функциональные модули. Несмотря на эти трудности, найдена классификация, с точностью до лагранжевой эквивалентности, типичных лагранжевых особенностей для $n \leq 10$ (см. [27]–[29]). Соответствующие нормальные формы содержат произвольные параметры (модули) и функции (функциональные модули).

Эта классификация тоньше, чем топологическая классификация (с точностью до гомеоморфизма). Известно, что число топологически различных типов лагранжевых особенностей типичных лагранжевых отображений конечно для любой размерности n ([30], [31]). Однако,

для $n \leq 10$ проблема топологической классификации трудна, несмотря на то что гладкая классификация известна. Основная сложность заключается в том, чтобы найти значения модуля, для которых соответствующая особенность топологически неэквивалентна особенностям, соответствующим типичным близким значениям модуля. Такие исключительные значения модулей существуют, но их вычисление (даже в простейших случаях) чрезвычайно сложно.

Вернёмся к общей теории лагранжевых особенностей. Любая лагранжева особенность может быть определена производящим семейством F функций переменной x, зависящим от параметров q. (Такое семейство определяет гладкое лагранжево многообразие, если уравнение $\partial F/\partial x = 0$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции; это условие трансверсальности включается в определение производящего семейства.)

Два семейства функций называются *R^+-эквивалентными*, если каждое из них может быть преобразовано в другое гладкой заменой переменных (гладко зависящей от параметров), гладкой заменой параметров и прибавлением гладкой функции параметров; другими словами:

$$F(x,q) \sim F(X(x,q),Q(q)) + \Phi(q).$$

Два семейства функций (возможно с разным числом аргументов) называются *стабильно R^+-эквивалентными*, если они становятся R^+-эквивалентными после прибавления к ним невырожденных квадратичных форм от новых переменных.

Пример. Функция x^3 одной переменной x стабильно эквивалентна функции $x^3 - y^2$ двух переменных (x,y), но не является стабильно эквивалентной функции x^3, рассматриваемой как функция тех же двух аргументов.

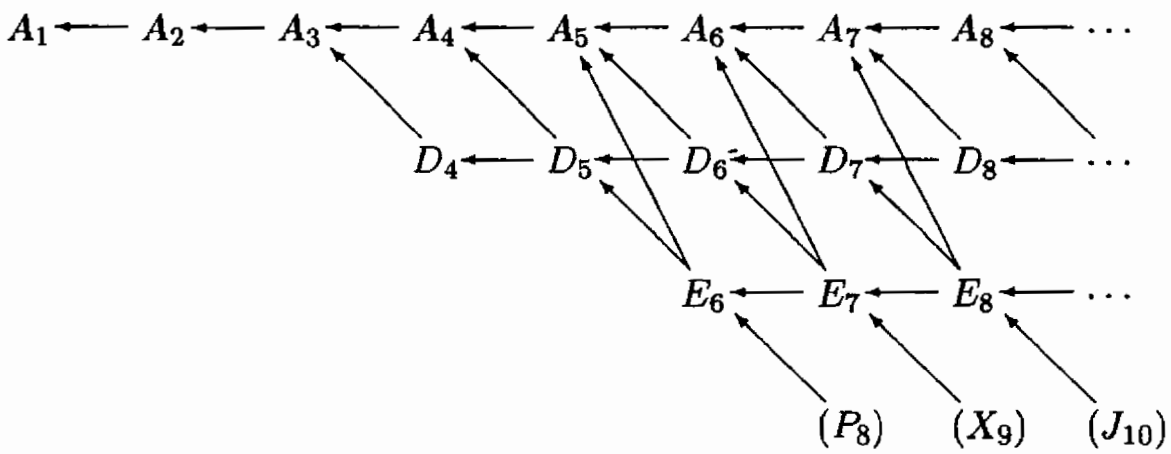
Теорема. *Все производящие семейства лагранжево эквивалентных особенностей локально стабильно R^+-эквивалентны. Стабильно R^+-эквивалентные производящие семейства определяют лагранжево эквивалентные отображения.*

Доказательство имеется, например, в [2], [28].

Таким образом, классификация лагранжевых особенностей (с точностью до лагранжевой эквивалентности) сведена к классификации ростков семейств функций (с точностью до стабильной R^+-эквивалентности).

Например, лагранжева устойчивость означает *версальность* соответствующего семейства (см. [28]).

Хорошо известная *иерархия критических точек* гладких функций (см. [2]) влечёт за собой иерархию лагранжевых особенностей, и т. д.



2 Применения теории лагранжевых особенностей

Мы опишем пять приложений классификации лагранжевых особенностей: к методу стационарной фазы (то есть к теории интегралов быстро осциллирующих функций), к вычислению асимптотик числа (целочисленных) точек решёток в типичных больших гладких областях, к космологической теории крупномасштабной структуры Вселенной и к изучению перестроек оптических каустик и ударных волн.

2.1. Осциллирующие интегралы

Каустика лагранжева отображения может быть описана как множество точек q, в которых следующий интеграл (от быстро осциллирующей функции) убывает (при уменьшении длины волны h) медленнее, чем в типичных точках q:

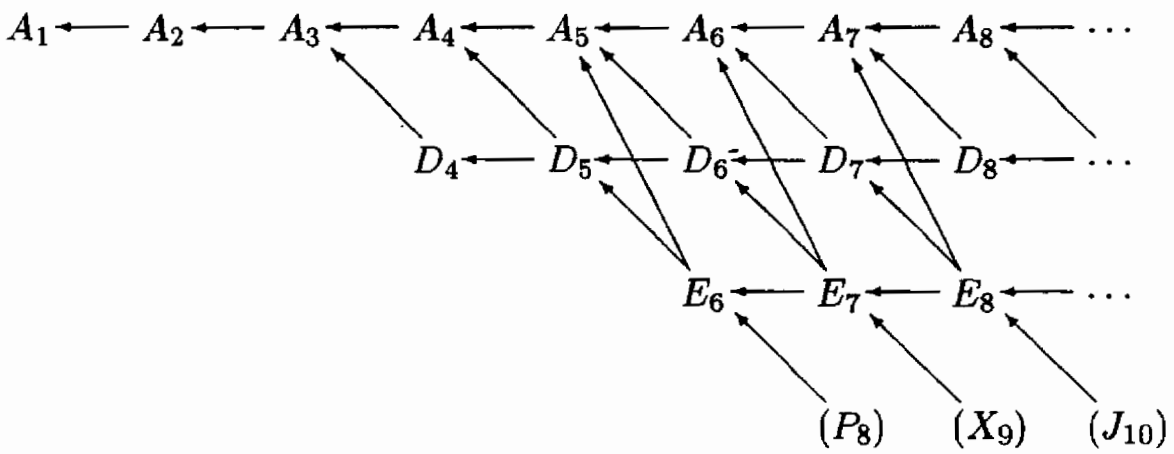
$$I(h,q) = \int e^{iF(x,q)/h} a(x,q)\,dx.$$

Вещественнозначная функция F переменных x и параметров q называется *фазой*, функция a называется *амплитудой* интеграла. Зависимость интеграла от амплитуды линейна. В большинстве случаев амплитуда предполагается бесконечно гладкой и равной нулю вне некоторого компакта. Обсуждая асимптотики интегралов, мы имеем в виду поведение соответствующего линейного функционала от функции амплитуды. Таким образом, под асимптотикой интеграла мы поимаем его поведение для "самой плохой" амплитуды (т. е. для гладкой амплитуды, дающей наиболее медленное убывание интеграла при $h \to \infty$), и, следовательно, для любой типичной амплитуды.

Простейшим примером осциллирующего интеграла является *интеграл Френеля* $\int \cos(x^2/h)\,dx$. Наибольший вклад в этот интеграл вносит малая окрестность критической точки фазы $F = x^2$ (рис. 16). Диаметр центрального горба функции $\cos(x^2/h)$ имеет порядок $\sqrt{h}$. Следовательно, сам интеграл убывает подобно $h^{1/2}$ (следующие положительные и отрицательные горбы компенсируют друг друга).

Например, лагранжева устойчивость означает *версальность* соответствующего семейства (см. [28]).

Хорошо известная *иерархия критических точек* гладких функций (см. [2]) влечёт за собой иерархию лагранжевых особенностей, и т. д.



2 Применения теории лагранжевых особенностей

Мы опишем пять приложений классификации лагранжевых особенностей: к методу стационарной фазы (то есть к теории интегралов быстро осциллирующих функций), к вычислению асимптотик числа (целочисленных) точек решёток в типичных больших гладких областях, к космологической теории крупномасштабной структуры Вселенной и к изучению перестроек оптических каустик и ударных волн.

2.1. Осциллирующие интегралы

Каустика лагранжева отображения может быть описана как множество точек q, в которых следующий интеграл (от быстро осциллирующей функции) убывает (при уменьшении длины волны h) медленнее, чем в типичных точках q:

$$I(h,q) = \int e^{iF(x,q)/h} a(x,q)\,dx.$$

Вещественнозначная функция F переменных x и параметров q называется *фазой*, функция a называется *амплитудой* интеграла. Зависимость интеграла от амплитуды линейна. В большинстве случаев амплитуда предполагается бесконечно гладкой и равной нулю вне некоторого компакта. Обсуждая асимптотики интегралов, мы имеем в виду поведение соответствующего линейного функционала от функции амплитуды. Таким образом, под асимптотикой интеграла мы понимаем его поведение для "самой плохой" амплитуды (т. е. для гладкой амплитуды, дающей наиболее медленное убывание интеграла при $h \to \infty$), и, следовательно, для любой типичной амплитуды.

Простейшим примером осциллирующего интеграла является *интеграл Френеля* $\int \cos(x^2/h)\,dx$. Наибольший вклад в этот интеграл вносит малая окрестность критической точки фазы $F = x^2$ (рис. 16). Диаметр центрального горба функции $\cos(x^2/h)$ имеет порядок $\sqrt{h}$. Следовательно, сам интеграл убывает подобно $h^{1/2}$ (следующие положительные и отрицательные горбы компенсируют друг друга).

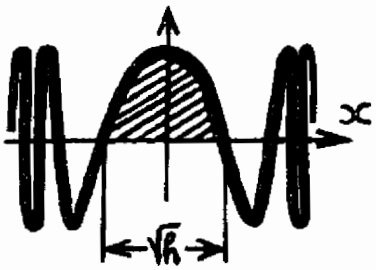


Рис. 16. Осциллирующий интеграл Френеля с морсовской фазой

Для n независимых переменных x_i и для невырожденных *морсовских критических точек* фазовой функции (т. е. когда $\det \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j \neq 0$ в критических точках) интеграл убывает подобно $h^{n/2}$. (Для доказательства нужно локально привести F к сумме квадратов, а затем использовать интеграл Френеля.)

Коэффициент при $h^{n/2}$ в асимптотике пропорционален $|\det(\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j)|^{-1/2}$ (этот множитель получается из якобиана замены переменных, приводящей фазу к сумме квадратов). Колен де Вердье в [32] доказал следующую верхнюю оценку для интегралов в терминах суммы асимптотик в комплексных морсовских критических точках голоморфной фазы:

$$|I| \leq Ch^{n/2} \sum \left| \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|^{-1/2};$$

эта оценка верна в некаустических точках q и равномерна вне некоторой окрестности каустики. Этот результат был доказан для типичных фазовых функций, зависящих от не более чем шести параметров (и для фазовых функций, имеющих только простые и параболические лагранжевы особенности). Я, однако, не знаю контрпримера для общего случая (для типичных семейств с бóльшим числом параметров).

В принадлежащей каустике точке q соответствующая фазовая функция $F(.,q)$ имеет, как функция переменной x, вырожденную (неморсовскую) критическую точку. Для такого q интеграл убывает медленнее, и показатель $\beta(q)$ старшего члена асимптотического разложения

$$I(h,q) \sim Ch^{\beta(q)} \ln^{\gamma(q)}(h) + \ldots, \quad h \to 0,$$

меньше своего обычного значения $n/2$.

Показатели $\beta(q)$ и $\gamma(q)$ во многих случаях могут быть найдены с помощью многогранника Ньютона фазовой функции (рис. 17). Рассмотрим ряд Тейлора фазовой функции в критической точке. Перенося критическую точку в нуль, получим ряд $F \sim \sum a_m x^m$ (значение параметра q фиксировано). Показатель m принадлежит положительному

октанту целочисленной решётки $\mathbf{Z}^n$. *Носителем* (ряда F) называется множество таких m, что соответствующий коэффициент $a_m \neq 0$. Присоединим к каждой точке носителя замкнутый неотрицательный октант $\mathbf{R}^n_+$. Граница выпуклой оболочки полученной таким образом "лестницы" (т. е. объединения октантов $m + \mathbf{R}^n_+$) называется *многогранником Ньютона* (разложения в ряд) функции F.

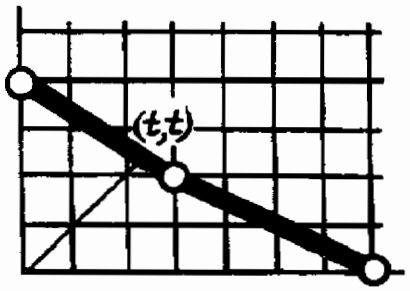


Рис. 17. Многогранник Ньютона и его индекс $\beta = 1/t$

Замечательный факт, *о*ткрытый Ньютоном, состоит в том, что, по крайней мере для типичных значений коэффициентов, большинство топологических или дискретных инвариантов критической точки не зависит от значений коэффициентов ряда и не зависит от членов, находящихся вне многогранника Ньютона (являющегося многомерным обобщением порядка нуля функции одной переменной).

Этот общий принцип ведёт ко многим интересным формулам, давая значения топологических и других дискретных инвариантов особенностей (числа Ходжа, спектры,...) в терминах геометрии целочисленных выпуклых многогранников — многогранников Ньютона. Много интересных формул такого типа содержится в [33]–[35]. Интересно отметить, что эта связь топологии особенностей с геометрией выпуклых тел полезна в обоих направлениях, так как она даёт возможность использовать связи между инвариантами особенностей (известными из топологии, алгебраической геометрии и т. д.) для получения чрезвычайно нетривиальных теорем комбинаторики выпуклых многогранников. (Доказательство Хованским и Прохоровым отсутствия групп отражений с фундаментальной областью конечного объема в пространствах Лобачевского размерности, превышающей 995, — один из примеров использования этой связи.)

Вернёмся к асимптотикам осциллирующих интегралов. Справедлива следующая формула для показателя β старшего члена (предложенная автором в качестве гипотезы и доказанная А.Н.Варченко).

Рассмотрим точку $(t, \ldots, t)$ пересечения многогранника Ньютона с диагональю положительного октанта. *Индексом β многогранника Ньютона* называется величина $1/t$.

Пример 1. Индекс β многогранника Ньютона функции Морса $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ равен $n/2$.

Индекс γ многогранника Ньютона есть, по определению, размерность множества опорных гиперплоскостей к этому многограннику в точке $(t, \ldots, t)$.

Многогранник называется *далёким* (от нуля), если $t > 1$.

Теорема (А.Н.Варченко [33]). 1) *Для типичной фазы с данным многогранником Ньютона показатели β и γ главного члена асимптотики равны индексам β и γ многогранника Ньютона при условии, что многогранник далёк (от нуля).*

2) *Если многогранник не далёк, то*

$$\beta(\textit{типичная функция}) \geq \beta(\textit{многогранник}).$$

3) *Для аналитической фазы, зависящей от двух переменных,*

$$\beta(\textit{типичная функция}) = \beta(\textit{многогранник})$$

в подходящей системе аналитических координат.

В этой теореме "нетипичные" функции — это функции, для которых коэффициенты Тейлора членов, принадлежащих многограннику Ньютона, удовлетворяют некоторому нетривиальному алгебраическому уравнению. Если многогранник далёк (от нуля), то

$$\beta(F) < \beta(\text{многогранник})$$

для *любой* функции с этим многогранником.

Другими словами, *если многогранник далёк от нуля, то осциллирующий интеграл никогда не убывает быстрее, чем это предписано его многогранником Ньютона, и его старшая часть почти всегда в точности такая, как это предписано многогранником.*

Если многогранник не далёк, то типичный интеграл убывает не медленнее, чем это предписано многогранником Ньютона. В этом случае теорема оставляет возможность более быстрого убывания. Это значит, что в этом случае интеграл ведёт себя как в ситуации менее вырожденной особенности. Объяснение состоит в том, что вырожденная особенность, предписанная многогранником, может иметь чисто комплексную природу, не проявляющуюся в вещественной области. Теорема Варченко говорит о том, что такое "чисто комплексное явление" невозможно, если многограиник далёк.

Варченко нашёл пример фазовой функции, для которой имеет место это "чисто комплексное явление". Соответствующий многогранник Ньютона в 5-пространстве не является далёким:

$$\beta(\text{многогранник}) = 29/18, \qquad \beta(F) = 7/4 > 29/18$$

для открытого множества фазовых функций, имеющих такой многогранник Ньютона. А именно, этот феномен встречается для многогранника Ньютона функции

$$u^2 + x^9 + y^9 + z^9 + (u - (x^2 + x^4 + y^2 + z^2))v.$$

Для функций $n \leq 3$ переменных такой пример невозможен, и условие на многогранник Ньютона в первом утверждении теоремы, касающееся β, может быть опущено (индекс $\gamma(F)$ может быть равен

$$\gamma(\text{многогранник}) - 1$$

для некоторых фазовых функций трёх переменных; эти числа равны также для функции $F = xy$ от двух переменных).

Вернёмся к осциллирующим интегралам с фазой $F(x, q)$, зависящей от параметра q. Для некаустических значений q интеграл убывает подобно $h^{n/2}$ при $h \to 0$, где n — это размерность $\{x\}$. В типичных особых точках каустики интеграл убывает медленнее, подобно $h^{n/2-1/6}$.

Для значений q, принадлежащих особой части каустики, интеграл при $h \to 0$ убывает ещё медленнее. Чем вырожденнее особенность, тем медленнее убывание. В простейших случаях интеграл мажорируется (равномерно по q в некоторой окрестности данного q_0) главным членом своей асимптотики в q_0 или, по крайней мере, оценкой $Ch^{\beta(q)-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для $n = \dim\{x\} = 1$ (и гладких амплитуд a, равных нулю вне некоторого компакта) такая равномерная оценка (с $\varepsilon = 0$) была доказана И.М.Виноградовым [37]. Для $n = 2$ этот результат был доказан В.Н.Карпушкиным [38], [39].

Для $n = 3$ Варченко построил контрпример; в этом примере β не является полунепрерывным, и, следовательно, равномерная оценка не имеет места. А именно, для

$$F = (qx_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^{12} + x_2^{12} + x_3^{12}$$

в точке $q = 0$ индекс "скачет":

$$\beta(q = 0) = \frac{5}{8}, \qquad \beta(q < 0) = \frac{7}{12} < \frac{5}{8}.$$

Эта ситуация (отсутствие полунепрерывности) неизбежна в семействах, зависящих от $l \geq 73$ параметров. Если число параметров мало, то оценка выполняется в случае общего положения (например, В.Н.Карпушкин доказал это для $l \leq 7$). Точное значение l, для которого равномерная оценка впервые не выполняется, не известно.

Ф.Фам в [40] выдвинул гипотезу о том, что равномерная оценка имеет место для семейств с произвольным числом параметров, если только изменить определение β так, чтобы принимать во внимание комплексные цепи (рассматривая интегралы, для которых применим метод перевала, а не осциллирующие интегралы). Иерархия экспоненциальных интегралов с многими сливающимися седловыми точками была изучена В.А.Васильевым [41]. Гипотеза Фама следует из коротко описанной ниже более общей теории, развитой А.Н.Варченко.

Асимптотические разложения интегралов (с произвольными амплитудами a и цепями интегрирования) использовались А.Н.Варченко ([42]–[44]) для определения *смешанных структур Ходжа* особенностей. Другое определение смешанных структур Ходжа до этого ввёл Й.Стинбринк [45] (дискретные инварианты — числа Ходжа — в обоих случаях совпадают, но определяемые ими фильтрации когомологий слоёв Милнора различны). Из теории смешанных структур Ходжа особенностей вытекает много важных результатов. Среди этих результатов — доказательство Стинбринком и Варченко старых гипотез о полунепрерывности спектра особенности [46], [47], о постоянстве β вдоль страта $\mu = \text{const}$ [48] и о совпадении модальности и так называемой внутренней модальности квазиоднородных функций [49].

Смешанная структура Ходжа особенности неявно содержит обширную геометрическую информацию; эта информация, однако, хорошо спрятана.

Рассмотрим индекс Пуанкаре градиентного векторного поля вещественнозначной гладкой функции от $2m$ переменных в критической точке. Этот индекс мажорируется средним числом Ходжа смешанной структуры Ходжа, ассоциированной с единичным собственным значением оператора монодромии [34],

$$|\text{ind}| \leq h_1^{m,m}.$$

Смешанная структура Ходжа предоставляет естественный способ определения аргументов собственных значений оператора монодромии, $e^{2\pi ip/q}$. Например, для особенностей Фама–Брискорна

$$f(x) = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$$

спектром является множество рациональных чисел

$$\frac{p}{q} = \frac{k_1}{a_1} + \ldots + \frac{k_n}{a_n}, \qquad 0 < k_j < a_j, \quad 1 \le j \le n$$

(всего их $\mu = (a_1 - 1) \ldots (a_n - 1)$).

Условие полунепрерывности спектра аналогично принципу Фишера–Релея–Куранта, в соответствии с которым длины осей эллипсоида разделены длинами осей любого гиперплоского центрального сечения этого эллипсоида. Рассмотрим особенность S', примыкающую к некоторой данной (более вырожденной) особенности S. Обозначим спектры через $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_\mu$ для S и $\alpha'_1 \le \alpha'_2 \le \ldots \le \alpha'_{\mu'}$ для S' ($\mu' < \mu$) (оба спектра симметричны относительно $n/2$). Свойство полунепрерывности состоит в выполнении неравенств

$$\alpha_1 \le \alpha'_1, \; \alpha_2 \le \alpha'_2, \; \ldots, \; \alpha_{\mu'} \le \alpha'_{\mu'}.$$

Если $\mu' = \mu - 1$, то это эквивалентно свойству разделимости

$$\alpha_1 \le \alpha'_1 \le \alpha_2 \le \alpha'_2 \le \ldots \le \alpha'_{\mu'} \le \alpha_\mu.$$

Замечание 1. Спектр (возможно по-другому отмасштабированный) можно рассматривать как множество собственных частот осциллятора, ассоциированного с особенностью (или квазиклассической асимптотики части спектра квантовой системы; эта часть отделена от бесконечной части спектральной дырой, как в уравнении Фоккера–Планка на замкнутом многообразии).

Таким образом, мы можем рассматривать полунепрерывность как проявление некоторой спрятанной осциллирующей системы, образованной исчезающими циклами особенности.

Замечание 2. Экспериментальный материал показывает, что примыкающие особенности критических точек функций порождены примыканиями коразмерности 1: для любой пары примыкающих особенностей $S' \leftarrow S$ существует цепь

$$S' = S_0 \leftarrow S_1 \leftarrow \ldots \leftarrow S_r = S,$$

где $\mu(S_i) - \mu(S_{i-1}) = 1$. Неизвестно, однако, справедливо ли это экспериментальное правило в общем случае.

Замечание 3. Многие целые числа, ассоциированные с особенностью, должны мажорироваться инвариантами смешанных структур Ходжа

и/или численными характеристиками многогранников Ньютона. Например, морсификации некоторой данной особенности имеют числа Морса M_i (числа невырожденных критических точек произвольного фиксированного отрицательного индекса инерции i второго дифференциала) и числа Бетти b_i (вещественных гиперповерхностей уровня). Максимумы таких величин как M_i, $M_0 - M_1 + \ldots \pm M_i$; b_i, $b_0 - b_1 + \ldots \pm b_i$ по всем морсификациям данной особенности являются важными топологическими характеристиками особенности; нахождение их точных граней является старой задачей теории особенностей [50].

Тем не менее, даже в простейших частных случаях, помимо прямых обобщений хорошо известных результатов, в вещественной алгебраической геометрии [51]–[53], известно очень немногое. Рассмотрим, например, вещественный многочлен степени d от двух переменных. Легко видеть, что количество точек максимума и минимума, $M_0 + M_2$, не превосходит $d^2/2 + O(d)$, но не известно как велика может быть их разность $M_0 - M_2$. Для произведения d линейных функций асимптотика была найдена Ю.Чекановым в [54], при этом использовалась арифметика эллиптических кривых по модулю p; ответ таков: $M_0/M_2 \leq 2$ и для некоторых конфигураций прямых, $M_0/M_2 \geq 2 - O(1/d)$ (см. также [55]–[57]).

Одной из классических проблем этого типа (связанной с комплексными особенностями) является задача определения максимального числа ν морсовских критических точек гиперповерхности степени d от n переменных. Для $n = 2$, $\nu = d(d-1)/2$ (это число достигается для d прямых). Для $n = 3$ максимальное число конических морсовских особых точек известно только для $d < 7$:

d	1	2	3	4	5	6	7
ν	0	1	4	16	31	65	$90 \leq \nu \leq 108$

Пример Чмутова в [44], основанный на многочленах Чебышёва $f = \sum T_d(x_i)$, доставляет при $n = 3$ оценку $\nu \geq 3d^3/8 + O(d^2)$ для числа морсовских точек. Из неравенства Мияока [58] вытекает, что в этом случае $\nu \leq 4d^3/9 + O(d^2)$. Точные коэффициенты верхней грани, насколько я знаю, до сих пор неизвестны (см. [59], где обсуждаются также родственные неравенства для числа сосуществующих неморсовских особенностей).

2.2. Точки решёток

Пусть G — компактная область в $\mathbf{R}^n$, ограниченная гладкой гиперповерхностью, имеющая объем V. Через λG будем обозначать гомотетичную область, через $N(\lambda)$ — число точек решётки, содержащихся в λG. Рассмотрим остаток в асимптотической формуле $N(\lambda) \sim \lambda^n V$, $\lambda \to \infty$:

$$R(\lambda) = \lambda^n V - N(\lambda).$$

Современная теория лагранжевых особенностей и осциллирующих интегралов приводит к интересным соотношениям между дифференциальной геометрией и теорией чисел.

1°. Ясно, что $|R(\lambda)| \leq C\lambda^{n-1}$, так как остаток мажорируется числом точек решётки в d-окрестности границы области λG, где d есть диаметр единичного куба, и площадь границы пропорциональна λ^{n-1} (рис. 18).

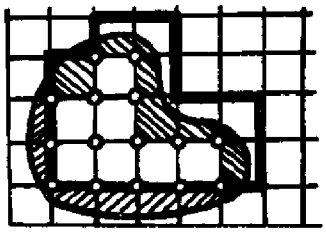


Рис. 18. Точки решетки в растягиваемой области

2°. Остаток не может быть меньше числа точек решётки на границе. В самом деле, произвольно малое изменение λ ведёт к изменению $N(\lambda)$ на число точек границы. Следовательно, для некоторого шара с центром в нуле, $|R(\lambda)| \geq C\lambda^{n-2}$ для некоторых (сколь угодно больших) значений λ.

Действительно, рассмотрим слой между сферами радиусов r и $r+a$. Число точек решётки в этом шаровом слое пропорционально r^{n-1}. Число сфер, содержащих эти точки, (т. е. число целых чисел, находящихся между r^2 и $(r+a)^2$) пропорционально r. Следовательно, согласно "принципу ящиков" Дирихле, существует сфера, содержащая не менее cr^{n-2} точек решётки. Следовательно $|R(\lambda)| \geq C\lambda^{n-2}$ для некоторых (произвольно больших) значений λ.

3°. Колен де Вердье в [32], используя теорию лагранжевых особенностей, нашёл верхнюю грань

$$|R(\lambda)| \leq C\lambda^{n-2+2/(n+1)}$$

для областей G, ограниченных типичными гиперповерхностями в $\mathbf{R}^n$, при $n \leq 7$.

Неизвестно, справедлива ли эта оценка в бóльших размерностях. При $n = 2$ показатель в этой оценке — наилучший; при бóльших n показатель может быть меньше, но это не доказано даже в случае положительной кривизны.

4°. Остаток R может рассматриваться как сумма многих ($\sim \lambda^{n-1}$) слагаемых, с нулевым средним значением (каждое слагаемое соответствует кубической клетке, пересекаемой граничной гиперповерхностью). Если бы эти слагаемые были бы независимыми случайными величинами, тогда (по законам теории вероятностей) сумма была бы пропорциональной $\lambda^{(n-1)/2}$ ($\leq \lambda^{n-2}$ при $n \geq 3$).

Теория лагранжевых особенностей даёт некоторое обоснование этим эвристическим рассуждениям.

Теорема (А.Н.Варченко [60]). *Среднее квадратичное значение остатка $|R(\lambda)|$, усреднённое по множеству решёток, полученных сдвигами и вращениями из стандартной решётки, мажорируется величиной $C\lambda^{(n-1)/2}$ для любой области в $\mathbf{R}^n$, ограниченной гладкой гиперповерхностью.*

Выпуклый аналитический случай был изучен Рэндолом [61].

Идея доказательства похожа на идею доказательства унитарности "канонического оператора" Маслова: фазовая функция $f(x) - (q, x)$, рассматриваемая как функция двух аргументов x и q, имеет только морсовские критические точки.

5°. Связь между задачей подсчёта точек решетки и теорией осциллирующих интегралов основана на теории квадратурных формул.

Для того чтобы оценить ошибку в квадратурной формуле для функции на торе, естественно сначала применить эту формулу к гармоникам (впоследствии представляя функцию как линейную комбинацию гармоник). Для гармоник ошибка может быть явно вычислена: она равна 0, за исключением некоторых специальных гармоник с большими волновыми векторами (пропорциональными λ). Следовательно, ошибка зависит, главным образом, от коэффициентов Фурье с этими большими волновыми векторами характеристической функции множества G (функций, равных 1 внутри G и 0 вне G в кубе решётки).

Эти коэффициенты являются также значениями осциллирующих ин-

тегралов вдоль границы области (фазами этих интегралов являются ограничения на границу линейных функций — фаз гармоник).

Таким образом ошибка может быть измерена в терминах осциллирующих интегралов, критические точки фазы которых отражают перегибы и уплощения границы. Следовательно особенности систем лучей, ортогональных границе, управляют асимптотиками числа точек решётки в расширяющихся областях.

Остаток $R(\lambda)$ может быть записан в виде

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} = \int f\,dx - \sum \frac{f(z/\lambda)}{\lambda^n}, \qquad z \in \mathbf{Z}^n, \tag{1}$$

представляющем ошибку в квадратурной формуле с шагом $1/\lambda$, применённой к характеристической функции f области G. Для простоты предположим, что G лежит в единичном кубе и периодически распространим характеристическую функцию на всё $\mathbf{R}^n$. Предположим также, что λ — целое (эти ограничения легко могут быть сняты).

Для периодической функции, интеграл в формуле (1) берётся по одному кубу (периоду), а сумма — по λ^n слагаемым, соответствующим точкам этого куба (другими словами, мы интегрируем по тору $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ и суммируем по подгруппе корней порядка λ из единицы на этом торе).

Обозначим гармоники (характеры тора) через $e_k = e^{2\pi i(k,x)}$, где k — точка двойственной решётки $\mathbf{Z}^{n*}$.

При $f = e_k$ ошибка квадратурной формулы равна

$$\left(\frac{\sum}{\lambda^n} - \int\right) e_k = \begin{cases} 1 & \text{если } k \in \lambda\mathbf{Z}^{n*} \setminus 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для f с рядом Фурье $\sum f_k e_k$ находим

$$\left(\frac{\sum}{\lambda^n} - \int\right) f = \sum f_k, \qquad k \in \lambda\mathbf{Z}^{n*} \setminus 0.$$

Волновые векторы гармоник суммы кратны λ и, следовательно, велики при большом λ ($|k| \geq \lambda$). Кроме того, коэффициенты Фурье f_k равны интегралам по периоду:

$$f_k = \int f(x) e^{-2\pi i(x,k)}\,dx.$$

Экспонента в этом интеграле быстро осциллирует при больших k. Если f является характеристической функцией области G, то этот интеграл может быть преобразован к интегралу по границе, с фазой $-2\pi i(x,k)$.

Вырождения критических точек ограничения этой линейной функции на границу ответственны за порядок величины коэффициентов f_k, и, следовательно, за порядок величины остатка $R(\lambda)$.

Конечно, ряд Фурье характеристической функции сходится медленно. Следовательно, вывод оценки для R из оценок для коэффициентов Фурье требует некоторого сглаживания характеристической функции (так называемый метод Ван дер Корпута). О деталях этой техники можно узнать в [32], [60], [61].

6°. Упомянем ещё одну оценку, связанную с точками решёток и найденную как побочный продукт классификации лагранжевых особенностей с помощью диаграмм Ньютона.

Теорема (Г.Эндрюс [62], С.Севастьянов, С.Конягин [63]). *Число вершин выпуклого многогранника в* $\mathbf{R}^n$, *объём которого равен* V, *а вершины — целочисленны, не превышает* $CV^{(n-1)/(n+1)}$.

Такая же оценка верна для числа граней любой (фиксированной) размерности такого многогранника.

Примеры, показывающие, что порядок этой оценки не может быть понижен, описаны в [64], где эта оценка была доказана для $n = 2$. Число вершин ограничивающей площадь S плоской диаграммы Ньютона некоторой особенности не может превышать $CS^{1/3}(\ln S)^{2/3}$. Логарифм числа диаграмм Ньютона, ограничивающих площадь S, ограничен сверху и снизу числами, пропорциональными $S^{1/3}(\ln S)^{2/3}$ (для числа классов замкнутых выпуклых многогранников, ограничивающих площадь S, эти грани пропорциональны $S^{1/3}$). Все эти результаты были получены Конягиным.

Замечание 1. Приведённые выше оценки энтропии множества выпуклых гиперповерхностей с целочисленными вершинами могут быть интерпретированы как оценки влияния выпуклости и целочисленного квантования: энтропия множества целочисленных выпуклых поверхностей имеет тот же порядок, что и ε-энтропия множества функций порядка гладкости $1+1/n$. Так как выпуклость, более или менее, эквивалентна 1-гладкости, цена целочисленной квантизации — $1/n$-ая от одной производной.

Замечание 2. Взаимодействие гладкой и целочисленной структур является решающим в оценках числа точек решёток. Оно также существенно и в других задачах анализа.

Рассмотрим расположение гладкого подмногообразия евклидова пространства по отношению к гиперплоскостям, определённым уравнениями с целыми коэффициентами. Задача получения оценок расстояния от типичной точки типичного подмногообразия до гиперплоскостей, задаваемых уравнениями с ограниченными целыми коэффициентами, изучается в теории диофантовых приближений на подмногообразиях [65], [66]. Эта (нерешённая) задача важна для многих приложений, например при изучении резонансов в нелинейных колебаниях (см. [17], глава 4). Ответ зависит от ограничений на кривизну. Уплощение границы способствует резонансному захвату фазы.

Например, усредненная на большом участке времени скорость дрейфа переменных действия в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, ограничена экспоненциальной оценкой Нехорошева; эта оценка включает в себя числа Нехорошева и зависит от характеристик типа кривизны поверхностей уровня функции Гамильтона. Для аналитических функций условия Нехорошева на кривизну могут быть сформулированы следующим образом: критические точки ограничений невозмущенной функции Гамильтона на аффинные подпространства (произвольной размерности) пространства переменных действия должны быть изолированными в комплексной области (Ю.С.Ильяшенко, [67]).

Точные значения чисел Нехорошева в настоящее время вычислены только для типичных систем с двумя и тремя степенями свободы [68].

2.3. Перестройки каустик

В типичных однопараметрических семействах лагранжевых отображений встречаются нетипичные особенности (при некоторых значениях параметра). При прохождении параметра через такое значение каустика меняет свою форму. В этом параграфе обсуждаются перестройки каустик в типичных семействах в пространствах малой размерности.

Пример. Инерциальное движение континуума взаимодействующих частиц может быть описано в терминах однопараметрического семейства отображений $x \mapsto x + tv(x)$ (рис. 19). Если поле скоростей v потенциально, то эти отображения лагранжевы. Каустики таких отобра-

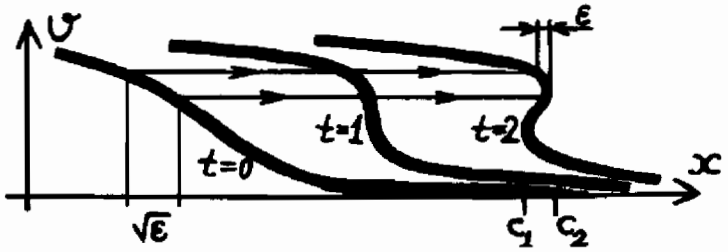


Рис. 19. График скорости в среде, состоящей из невзаимодействующих частиц

жений являются местами наибольшего скопления частиц (рис. 20). Согласно Я.Б.Зельдовичу [69], подобная модель (где принимается во внимание гравитация и расширение Вселенной) описывает образование неоднородностей плотности (крупномасштабной структуры Вселенной) на ранней стадии расширения горячей и почти однородной Вселенной.

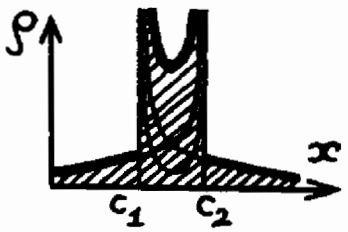


Рис. 20. Плотность среды после образования каустики

[Лагранжева природа этого отображения сохраняется при движении частиц в потенциальном поле сил (так как фазовый поток любой гамильтоновой системы переводит лагранжевы подмногообразия в лагранжевы). Поле может зависеть от времени или быть порождённым самими движущимися частицами (например, лагранжевость сохраняется при движении частиц под действием их собственного гравитационного поля).

Однако, после первой перестройки (т. е. после образования каустики) лагранжево подмногообразие приобретает некоторые особенности ("слабые разрывы"), так как плотность (и, следовательно, гамильтониан) становится особой на каустике.

Похоже, что эти особенности лагранжевых отображений слишком слабы, чтобы разрушить топологию каустик и их перестроек. Тем не менее, даже в одномерном случае, это предположение строго не доказано (см. [70], [71]).]

Перестройки каустик могут быть описаны как метаморфозы сечений "большой каустики" в пространстве-времени изохронами (см. [1], [72]). Нормальные формы больших каустик и функций времени для трёхмерного пространства приведены в следующей таблице:

тип	производящее семейство	функция времени
A_3	$x^4 + q_1x^2 + q_2x$	q_3 или $\pm q_1 \pm q_3^2 \pm q_4^2$
A_4	$x^5 + q_1x^3 + q_2x^2 + q_3x$	q_4 или $\pm q_1 \pm q_4^2$
A_5	$x^6 + q_1x^4 + q_2x^3 + q_3x^2 + q_4x$	$\pm q_1$
$D_4^{\pm}$	$x_1^2x_2 \pm x_2^3 + q_1x_2^2 + q_2x_2 + q_3x_1$	q_4 или $\pm q_1 + aq_2 + q_3 \pm q_4$
D_5	$x_1^2x_2 + x_2^4 + q_1x_2^3 + q_2x_2^2 + q_3x_2 + q_4x_1$	$\pm q_1 + q_4 + aq_2$

Здесь $(q_1, \ldots, q_4)$ — координаты на пространстве-времени, a — вещественный параметр.

Напомним определение (большой) каустики в терминах производящего семейства $F(x, q)$: это — множество значений параметра q, для которых соответствующая функция $F(., q)$ имеет неморсовские критические точки, то есть

$$\{q | \exists x : F_x = 0, \det F_{xx} = 0\}.$$

Эта каустика является множеством критических значений проекции на q-пространство вдоль p-пространства соответствующего лагранжева многообразия

$$\{(p, q) | \exists x : F_x = 0, p = F_q\}.$$

Перестройки, соответствующие семействам из таблицы, изображены на рис. 21. (Впервые эти рисунки появились в [73]; более подробно см. [72], [74].) Параметр a является модулем, следовательно существует непрерывное семейство дифференцируемо неэквивалентных перестроек (в то время как существует только 6 неэквивалентных ростков особенностей типичных больших каустик в четырёхмерном пространстве-времени).

Число топологически неэквивалентных перестроек конечно. Для получения полного списка топологических классов типичных перестроек в физическом 3-пространстве достаточно положить $t = q_1 + q_2$ в случае

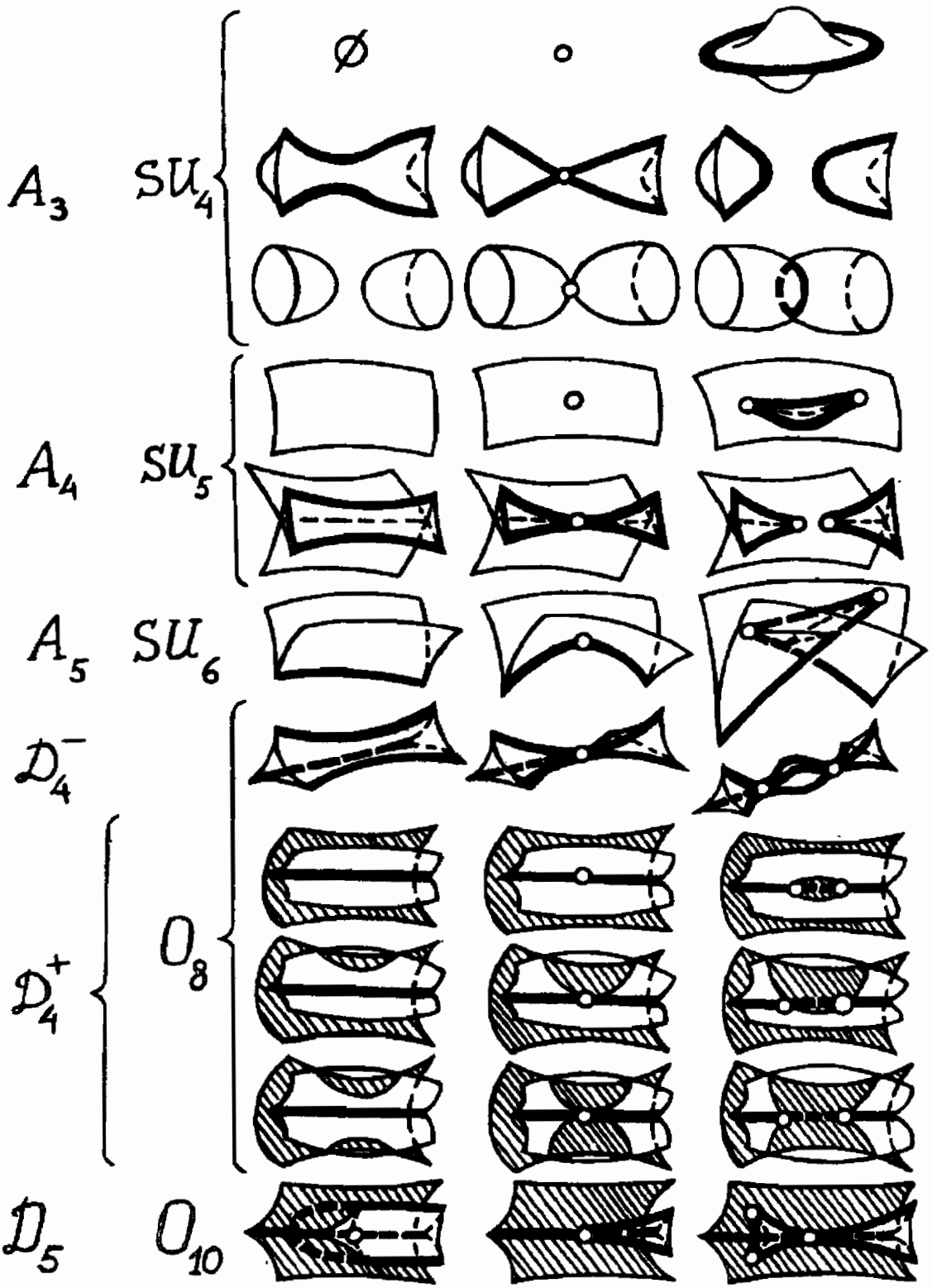


Рис. 21. Типичные перестройки каустик в трёхмерном пространстве

D_4^-, $t = q_1 \pm q_2$ или $t = q_1 + q_3$ в случае D_4^+ и $t = \pm q_1$ в случае D_5. Следовательно, число различных типов равно 11 (пренебрегая ориентацией оси времени).

Пример. Рассмотрим образование первой каустики (типа A_3, $t = -q_1 + q_3^2 + q_4^2$). Для того, чтобы понять, что происходит в 3-пространстве, удобно сначала рассмотреть плоский случай (положив в формулах $q_4 = 0$).

Большая каустика в трёхмерном пространстве-времени (рис. 22) — это поверхность с ребром возврата (в (q_1, q_2, q_3)-пространстве уравнение этой поверхности

$$\{q | \exists x : F_x = F_{xx} = 0, F = x^4 + q_1 x^2 + q_2 x\}$$

имеет вид $8q_1^3 + 27q_2^2 = 0$).

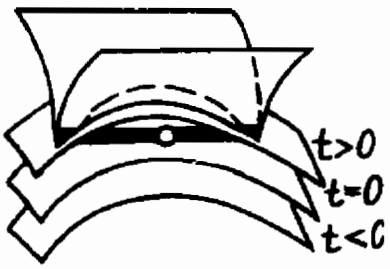


Рис. 22. Перестройка появления каустики в пространстве-времени

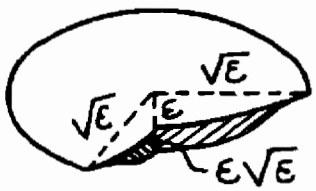


Рис. 23. Новорожденная каустика в 3-пространстве — блюдце или блин Зельдовича

Изохроны $t = \text{const}$ не пересекают большую каустику, если $t < 0$. При $t = 0$ появляется единственная точка каустики, немедленно начинающая расти (бесконечно быстро, с самого первого момента). В момент времени $t = \varepsilon$ эта каустика имеет серповидную форму, размера порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Эта каустика имеет две точки возврата и (для перестройки общего положения) две точки перегиба. Р.Том назвал эту перестройку "губами".

В четырёхмерном пространстве-времени перестройка появления каустики аналогична предыдущей: новая каустика имеет вид блюдца с диаметром порядка $\sqrt{\varepsilon}$, глубиной порядка ε и толщиной порядка $\sqrt{\varepsilon}\varepsilon$. Край этого блюдца — почти эллиптическое ребро возврата (рис. 23).

Я.Б.Зельдович в [69] называл эти блюдца "блинами". Он отождествлял перестройки появления блинов (в потенциальных потоках пылевидной материи) с образованием галактик (или скоплений галактик) из малых неоднородностей начального поля скоростей материи.

Теория особенностей и перестроек каустик предсказывает образование ячеечной структуры на более поздних этапах. А именно, на поверхностях каустик, образующих стенки ячеек, образуются скопления частиц. Плотность повышается на определенных линиях (линиях особенностей каустик), наибольшая же плотность достигается в некоторых изолированных точках. По-видимому этот общий характер распределения материи совместим с наблюдаемым распределением скоплений галактик ([75], [76], [74]).

С.Ф.Шандарин сравнил данные наблюдений с теорией ячеечной структуры, используя метод перколяционного параметра. Рассмотрим объединение шаров радиуса r с центрами в данных точках. Мы хотим найти минимальное r такое, что диаметры связных компонент этого объединения сравнимы с диаметром всей системы. Критическое r, оцененное для наблюдаемого распределения галактик, намного меньше значения r для случайного распределения Пуассона, имеющего ту же усреднённую плотность, и также намного меньше значения r для иерархического распределения вокруг случайным образом выбранных центров и имеющего ту же корреляционную функцию, что и наблюдаемое распределение.

Это показывает, что наблюдаемое распределение имеет выраженную концентрацию галактик вдоль некоторых поверхностей, или, по крайней мере, вдоль некоторых линий. Таким образом, ячеечная (или, возможно, паутинообразная) структура наблюдаемого распределения галактик — не искусственное предположение, но объективный феномен.

В принципе возможно различить ячеечное и паутинообразное распределения, используя другой перколяционный параметр: максимальное значение r, для которого объединение шаров радиуса r делит всё пространство на пустые области, малые по сравнению со всей системой.

Существующие списки особенностей каустик в пространствах бóльших размерностей [28] позволяют изучать события бóльшей коразмерности в системах каустик в физическом 2- или 3-пространстве. При малом возмущении системы такие события распадаются на последовательности стандартных перестроек, описанных выше. Однако, если система зависит от параметров, то вырождения более высоких порядков

становятся неустранимыми: после малого возмущения системы, зависящей от параметров, при некоторых значениях параметров (близких исходному значению) в некоторой точке пространства (близкой исходной точке) встретится это же вырождение более высокого порядка.

2.4. Перестройки оптических каустик

Проверка общей теории особенностей и перестроек каустик с помощью лазерной оптики (Дж.Най и Дж.Хэннай [77]) привела к открытию некоторых новых и интересных топологических свойств оптических лагранжевых особенностей (Ю.В.Чеканов [78]).

Определение. Лагранжево подмногообразие пространства лагранжева расслоения называется *оптическим*, если оно лежит в гиперповерхности, которая трансверсально пересекается с каждым слоем по квадратично выпуклой в слое гиперповерхности.

Напомним, что слой лагранжева расслоения имеет естественную аффинную структуру. Следовательно, квадратичная выпуклость (положительная определённость второй квадратичной формы) гиперповерхности в слое лагранжева расслоения вполне определена.

Пример. Уравнение эйконала $p^2 = 1$ определяет послойно квадратично выпуклую гиперповерхность в пространстве кокасательного расслоения риманова многообразия. Следовательно, решения уравнения Гамильтона–Якоби $(\nabla u)^2 = 1$ определяют оптические лагранжевы подмногообразия.

Оптические лагранжевы подмногообразия образуют довольно узкий подкласс в классе всех лагранжевых подмногообразий. Тем не менее, все устойчивые особенности лагранжевых отображений допускают оптическую реализацию. Более того, типичные оптические лагранжевы особенности совпадают с типичными (произвольными) лагранжевыми особенностями (см. [79], [199], [200] и результаты И.А.Богаевского, 1989).

Всё же случается, что оптические лагранжевы особенности имеют некоторые специальные глобальные свойства, не присущие произвольным лагранжевым особенностям.

Пример. *Эйлерова характеристика гладкого компактного множества критических точек лагранжевой проекции типичного оптического лагранжева подмногообразия равна нулю* [78].

Следствие 1. *Компоненты каустик лагранжевых особенностей в виде блюда (блина) в оптическом случае невозможны.*

Действительно, соответствующее множество критических точек является 2-сферой, а эйлерова характеристика 2-сферы равна 2.

Следствие 2. *Для оптических каустик невозможна перестройка появления блюда.*

Доказательство Чеканова основано на следующем интересном результате:

Лемма. *Характеристики послойно выпуклой гиперповерхности, содержащей оптическое лагранжево подмногообразие, не касаются критического множества лагранжевой проекции. В точках гладкости критического множества определено касательное поле направлений; оно совпадает с полем ядер лагранжева отображения в точках типа* A_μ, $\mu \geq 3$.

Полный список *оптических перестроек* каустик в 3-пространстве содержит семь оптических метаморфоз (приведённый выше список (произвольных) лагранжевых метаморфоз содержит одиннадцать топологически различных метаморфоз, если пренебречь ориентацией оси времени).

Оптически невозможными являются четыре перестройки типа A_3 и D_4^+ (см. рис. 21).

Для описания топологических ограничений на типичные оптические каустики и их перестройки в 3-пространстве рассмотрим поверхность критических точек лагранжевой проекции оптического лагранжева 3-многообразия. Эта поверхность имеет простые (квадратичные) конические особенности в точках, где лагранжево отображение имеет особенности типа D_4; в остальных местах (в точках типа A_μ) она является гладкой.

В общей теории лагранжевых особенностей мы различаем точки D_4 двух типов: D_4^+ и D_4^-, в соответствии со знаком члена x_2^3 в нормальной форме.

В оптической теории мы должны различать три случая. Рассмотрим касательный конус к поверхности критических точек в точке типа D_4. Это — невырожденный квадратичный конус в 3-пространстве (в касательном пространстве к лагранжеву подмногообразию). Ядро проекции на базу лагранжева расслоения в точках типа D_4 является 2-плоскостью. Эта плоскость может пересекать конус либо вдоль двух вещественных прямых (случай D_4^+), либо в вершине конуса (линии пе-

ресечения комплексно сопряжены, случай D_4^-). В первом случае одна вещественная кривая точек типа A_3 подходит к вершине конуса. Во втором случае имеются три такие кривые.

Части касательной к этой A_3-кривой и характеристического направления объемлющей послойно выпуклой гиперповерхности в точке типа D_4^+, лежащие в одной и той же области, ограниченной полой конуса, могут быть разделены или не разделены нашей 2-плоскостью (ядром лагранжевой проекции). Соответственно, мы различаем следующие два случая: (D_4^+, капля) и (D_4^+, треугольник) (рис. 24).

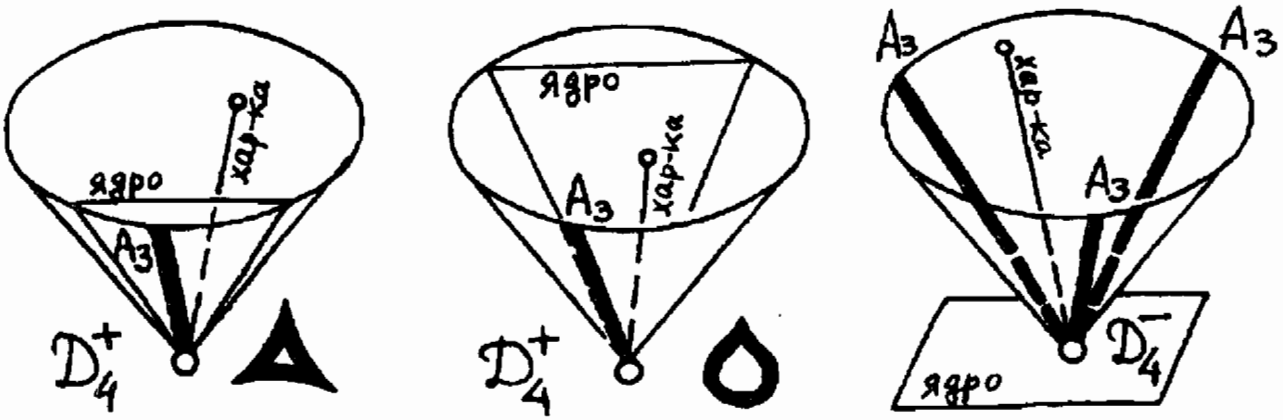


Рис. 24. Конус A_2 критических точек, ядро Кег лагранжевой проекции, и характеристика объемлющей гиперповерхности, для трёх вариантов особенности типа D_4

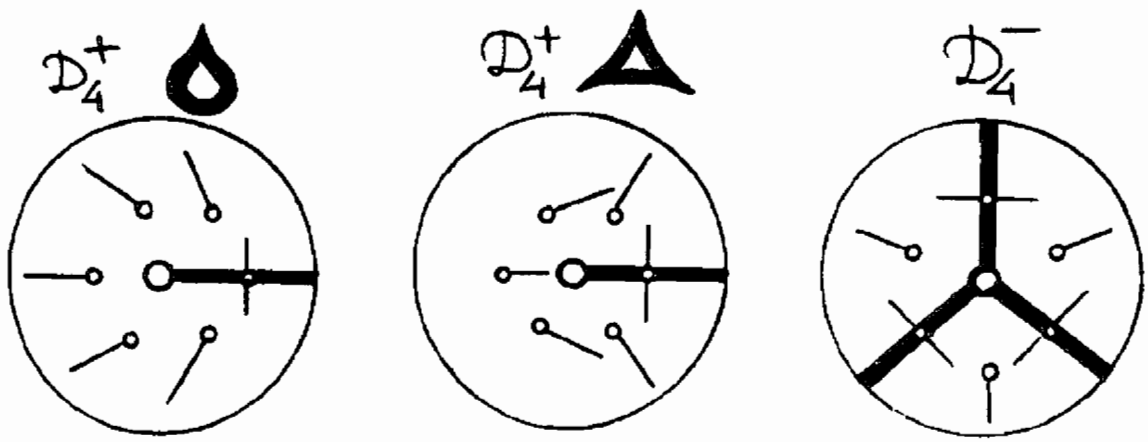


Рис. 25. Поле ядер проекции на конусе критических точек

Название отражает поведение поля ядер лагранжевой проекции на поверхности критических точек. Вид одной из половин этой конче-

ской поверхности, видимой со стороны вершины этого конуса, приведён на рис. 25. Представлена только видимая часть поля ядер. Вращение проекции поля ядер в трёх случаях такое же, как и вращение касательных прямых, либо "треугольной" гипоциклоиды с тремя точками возврата (случаи (D_4^-) и $(D_4^+$, треугольник)), либо каплеобразной кривой (рис. 26). Эти три типа оптических особенностей D_4 соответствуют трём типам омбилических точек на поверхностях в евклидовом 3-пространстве.

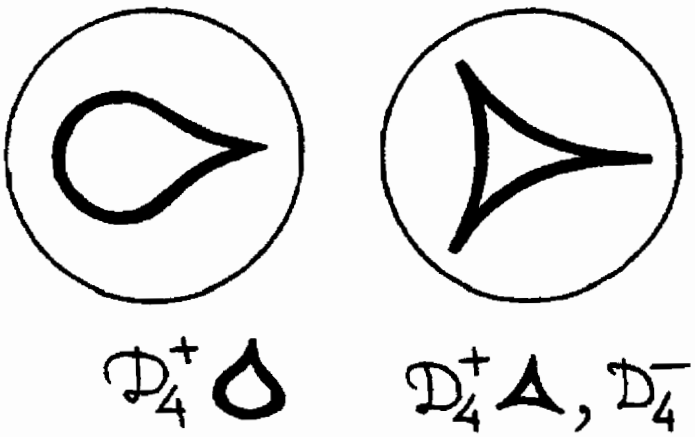


Рис. 26. Треугольник и капля

Эйлерова характеристика χ компактной критической поверхности некоторой оптической лагранжевой проекции (имеющей только особенности A_μ и D_4) даётся формулой Чеканова:

$$\chi + 2(\#(D_4^-) + \#(D_4^+, \text{треугольник})) = 0.$$

Более того, левая часть формулы (значение которой может быть ненулевым) сохраняется при оптических перестройках критических поверхностей с границей, при условии, что граница не перестраивается, и что все критические точки — только типов A_μ или D_4.

Из невозможности появления "летающей тарелки" при перестройке оптической каустики в 3-пространстве следует невозможность появления "губ" при перестройке плоской оптической каустики. Чеканов доказал также, что компонента типа "губы" глобально невозможна для односвязной лагранжевой поверхности.

2.5. Особенности ударных волн и перестройки множеств Максвелла

Модель невзаимодействующих частиц, ведущая к их скоплению на каустиках лагранжевых отображений, пренебрегает эффектами от соударений или рассеивания близлежащих частиц. Например, в одномерном случае эта модель позволяет "частицам" проходить друг сквозь друга.

Модели, принимающие во внимание (неупругие) соударения, ведут к другим сценариям — к образованию ударных волн в местах столкновений. Одна из простейших моделей такого рода описывается *уравнением Бюргерса* с исчезающей вязкостью:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \triangle u, \quad \varepsilon \to 0,$$

для потенциального векторного поля $u = \bigtriangledown S$.

Хорошо известное описание ударных волн для этого уравнения связывает эти волны с особенностями функций максимума семейств гладких функций.

Зависимость максимального значения функции семейства от параметра является непрерывной, но может быть не гладкой для некоторых значений параметра; а именно для тех значений, при которых этот максимум достигается в более чем в одной точке.

Рассмотрим, например, линию горизонта некоторого ландшафта. Эта линия теряет гладкость в точке пересечения видимых контуров двух холмов (рис. 27).

Рис. 27. Негладкая функция максимума гладкого семейства функций

Значения параметров, при которых функция максимума не является гладкой функцией параметров, образуют, для семейства общего положения, гиперповерхность в пространстве параметров. Будем называть эту гиперповерхность (малым) *множеством Максвелла* данного семейства (в связи с правилом Максвелла теории Ван дер Ваальса, согласно которому фазовый переход совершается при таком значении параметра, при котором два максимума некоторой гладкой функции равны между собой). Это малое множество Максвелла является частью большого множества Максвелла $2A_1$, состоящего из точек пространства параметров, при которых у соответствующей функции есть два равных

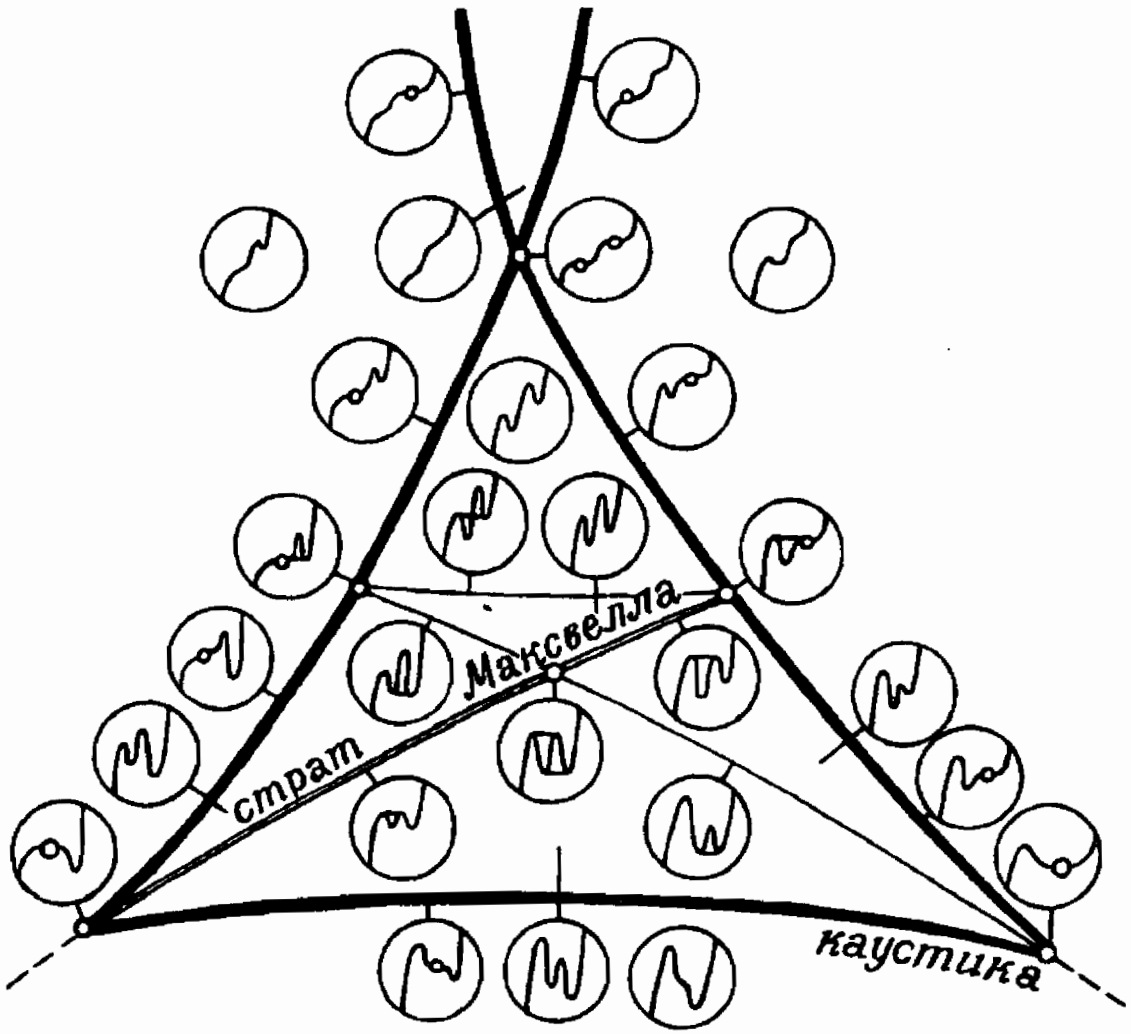


Рис. 28. Каустика и страты Максвелла семейства $x^5 - x^3 + bx^2 + cx$

критических значения. Оба множества Максвелла находятся в том же пространстве, что и каустика, определяемая этим семейством функций (каустика — это множество A_2 тех точек пространства параметров, для которых функция имеет неморсовскую критическую точку).

Пример. Каустика и (локальное) множество Максвелла семейства $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$ — диффеоморфные поверхности в пространстве параметров (a, b, c), если принимать во внимание комплексные критические точки. На рис. 28 приведены сечения этих поверхностей плоскостью $a = -1$. Малое множество Максвелла изображено двойной линией, в то время как комплексное множество Максвелла — пунктиром.

В этом случае и каустика, и аналитическое продолжение множества Максвелла диффеоморфны ласточкину хвосту.

Замечание. (Большое) множество Максвелла делит пирамиду, образованную многочленами (из предыдущего примера), имеющими только вещественные критические точки, на пять частей (пересечения которых с плоскостью $a = -1$ изображены на рис. 28).

Последовательность ($k_\mu = 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \ldots$ для $\mu = 0, 1, 2, \ldots$), состоящая из числа таких пирамид для общих A_μ семейств функций ($f = x^{\mu+1} + q_1 x^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu-1}x$), порождает функцию

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} k(\mu)\frac{t^\mu}{\mu!} = \tan t + \sec t.$$

Число компонент дополнения к объединению каустики и (большого) множества Максвелла равно $k_\mu + k_{\mu-2} + k_{\mu-4} + \ldots$ [80].

Эти результаты доставляют естественные обобщения чисел Бернулли и Эйлера: нужно только заменить A_μ на какую-либо серию особенностей, например D_μ.

Упражнение. Докажите, что

$$k(B_\mu) = k(C_\mu) = k(A_{\mu+1}).$$

Малые множества Максвелла типичных семейств функций, зависящих от 2-х параметров, являются плоскими кривыми с особенностями двух типов: конечными точками (A_3) и Y-образными тройными точками ($3A_1$). Здесь, как и в других задачах теории особенностей, число аргументов функции не существенно (оно даже может быть бесконечным, т. е. утверждение справедливо не только для семейств функций, но и для семейств функционалов). Существенно только число параметров.

Предположим теперь, что семейство функций зависит от времени. Зависящая от времени функция (зависящая к тому же от k параметров) может рассматриваться как функция, зависящая от $(k+1)$-го параметра. Таким образом, множество Максвелла зависящего ещё и от времени k-параметрического семейства функций может рассматриваться как гиперповерхность в $(k+1)$-мерном "параметрическом пространстве-времени". При этом мгновенные множества Максвелла — это сечения этой гиперповерхности изохронами $t = \text{const}$.

Следовательно, для изучения типичных перестроек мгновенных множеств Максвелла нам необходимо исследовать типичные перестройки сечений типичных множеств Максвелла в $(k+1)$-пространстве.

Эта задача была решена Богаевским для случаев $k = 2$ (перестройки кривых на плоскости параметров) и $k = 3$ ([80]). Ответ для $k = 2$ изображён на рис. 29 ([81], [82]).

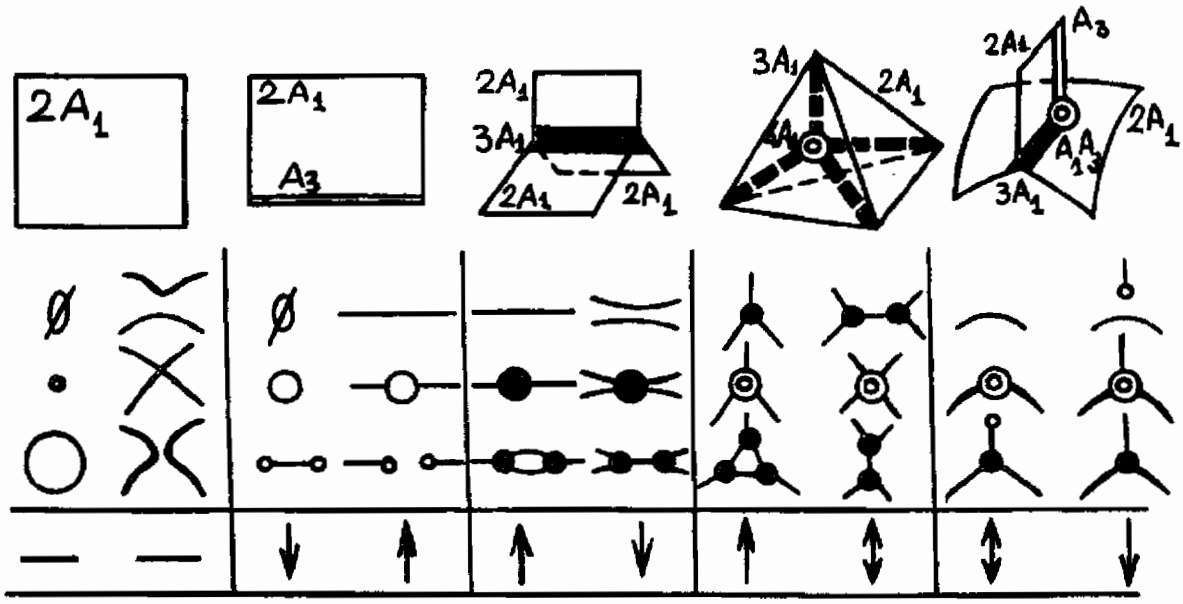


Рис. 29. Типичные особенности поверхности Максвелла в 3-пространстве и типичные перестройки кривых Максвелла и ударных волн на плоскости

Существует пять топологически различных ростков типичных поверхностей Максвелла в 3-пространстве. Типичные перестройки сечений этих поверхностей изохронами зависят от положения критической изохроны по отношению к множеству Максвелла. На рис. 29 изображено десять типичных перестроек (если случаи, отличающиеся только направлением времени, считать отдельно, то получим восемнадцать различных перестроек).

Вернёмся к ударным волнам. *Ударными волнами* для уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью являются множества Максвелла для некоторого специального семейства функций; а именно,

$$F(x,t) = \min_y f(y;t,x), \quad f = \frac{(x-t)^2}{2t} - S_0(y)$$

(это следует из так называемого преобразования Коула–Хопфа, приводящего уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности и описанного в учебнике Форсайта [83] за много лет до того, как оно было переоткрыто Флорином [84]). В пространстве-времени $\{t,x\}$ ударные волны заметают множество Максвелла данного выше семейства функций, зависящих от физической точки y и параметров (t,x). Мгновенные ударные волны — это пересечения множества Максвелла с изохронами.

Функция минимума F может быть геометрически описана следующим образом. Будем опускать вниз параболоид с вертикальной осью, расположенной над точкой x, ширина которого зависит от параметра t, до тех пор, пока он не коснётся графика исходной потенциальной функции S_0. Высота параболоида, на которой он впервые касается этого графика, и есть требуемая функция переменной x.

Если t очень мало, то параболоид $z = (x-y)^2/2t$ очень тонок. В этом случае точка контакта между параболоидом и графиком единственна. Эта точка гладко зависит от t, так что F является гладкой функцией для малых t. При увеличении t параболоид расширяется. В этом случае для некоторых x появится более чем одна точка контакта (рис. 30). Эти специальные значения x образуют мгновенную ударную волну (и мгновенное множество Максвелла нашего семейства).

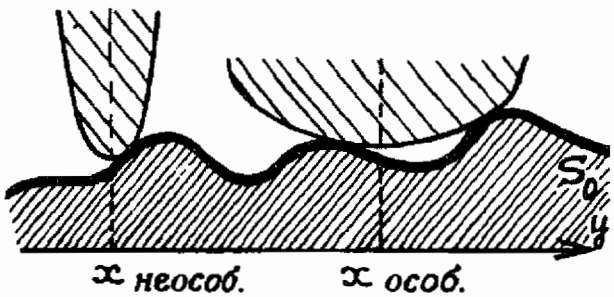


Рис. 30. Особые и неособые значения x осей параболоида

Эксперименты с этими параболоидами показывают, что для типичных начальных поверхностей (потенциалов S_0) встречаются только типичные особенности и перестройки из списка Богаевского. Однако, как заметили Гурбатов и Саичев [85], множество типичных перестроек ударных волн меньше множества типичных перестроек множеств Максвелла, содержащегося в списке Богаевского.

Одни перестройки множеств Максвелла встречаются как перестройки волновых фронтов только в одном направлении изменения времени (например, треугольник может исчезнуть, но не может возникнуть); другие перестройки множеств Максвелла реализуемы ударными волнами в обоих направлениях изменения времени; третьи не встречаются вовсе. Допустимые направления перестроек на рис. 29 обозначены стрелками.

Эти допустимые направления обусловлены выпуклостью ограничения на пространство импульсов функции Гамильтона, определяющей соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби. (Для уравнения Бюргерса функция Гамильтона равна $p^2/2$.) А именно, необходимыми и достаточными условиями реализуемости перестройки множеств Макс-

велла в виде перестройки ударного фронта (системы, определённой послойно выпуклой функцией Гамильтона) являются:

1. *Локальная ударная волна, рождённая в момент перестройки, в следующий момент стягиваема в некоторой окрестности точки перестройки* (теорема Богаевского).

2. *Гомотопический тип дополнения к ударной волне сразу же после момента перестройки такой же, как и в этот момент* (теорема Ю.Барышникова).

Любое из этих двух условий является необходимым и достаточным для реализуемости перестройки зависящего от времени множества Максвелла на плоскости или в 3-пространстве (Богаевский). Однако, неизвестно, верно ли это в бóльших размерностях; неизвестно также эквивалентны ли эти два условия для многомерных ударных волн, подчиняющихся уравнению Бюргерса с исчезающей вязкостью.

Замечание. Теории Чеканова (§2.4) и Богаевского (§2.5) говорят о том, что вложение лагранжева многообразия в послойно выпуклую гиперповерхность налагает строгие топологические ограничения. Это наводит на мысль о том, что оптическая топология довольно существенно отличается от общей симплектической топологии (см. также [86]–[89]).

Проблема. Якоби в [90] упомянул о том, что любая каустика семейства геодезических, стартующих в общей точке эллипсоида, имеет не менее четырёх точек возврата. Верно ли это для других римановых метрик на сфере (например, для типичных метрик, близких стандартной)? Это свойство четырёх точек возврата, если оно имеет место, должно быть обобщением на симплектическую топологию теоремы о четырёх вершинах, согласно которой замкнутая плоская кривая имеет не менее четырёх точек точек экстремума кривизны (см. [91], [92]).

3 Контактная геометрия

Контактная геометрия составляет математический базис геометрической оптики в таком же смысле, в каком симплектическая геометрия является базисом классической механики. "Оптико-механическая" аналогия Гамильтона позволяет интерпретировать проблемы и результаты симплектической геометрии на языке контактной геометрии и наоборот. Тем не менее, прямой подход в терминах контактной геометрии во многих случаях предпочтительнее, по крайней мере с точки зрения геометрической интуиции: он демонстрирует геометрическое содержание формул симплектической теории. Связь между симплектической и контактной геометриями подобна связи между геометрией линейных пространств и проективной геометрией: для того чтобы получить контактный аналог симплектического утверждения, необходимо заменить функции гиперповерхностями, аффинные пространства проективными и т. д.

В этой главе контактная геометрия используется для изучения особенностей и перестроек волновых фронтов.

3.1. Волновые фронты

Каустики могут быть описаны как следы, заметаемые особенностями движущихся волновых фронтов. Теория особенностей волновых фронтов является частным случаем общей теории лежандровых особенностей контактной геометрии. Эта общая теория занимается классификацией особенностей преобразований Лежандра гладких функций и гиперповерхностей, дуальных гладким проективным поверхностям.

Определение. *Контактной структурой* на многообразии называется поле касательных гиперплоскостей (*контактных гиперплоскостей*), невырожденное в каждой точке (рис. 31).

Локально такое поле определено как поле нулей некоторой 1-формы α, называемой *контактной формой*. Условия невырожденности заключаются в следующем: $d\alpha$ невырождена на гиперплоскостях, на которых α равна нулю; эквивалентно, в $(2n+1)$-пространстве:

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

велла в виде перестройки ударного фронта (системы, определённой послойно выпуклой функцией Гамильтона) являются:

1. *Локальная ударная волна, рождённая в момент перестройки, в следующий момент стягиваема в некоторой окрестности точки перестройки* (теорема Богаевского).

2. *Гомотопический тип дополнения к ударной волне сразу же после момента перестройки такой же, как и в этот момент* (теорема Ю.Барышникова).

Любое из этих двух условий является необходимым и достаточным для реализуемости перестройки зависящего от времени множества Максвелла на плоскости или в 3-пространстве (Богаевский). Однако, неизвестно, верно ли это в бóльших размерностях; неизвестно также эквивалентны ли эти два условия для многомерных ударных волн, подчиняющихся уравнению Бюргерса с исчезающей вязкостью.

Замечание. Теории Чеканова (§2.4) и Богаевского (§2.5) говорят о том, что вложение лагранжева многообразия в послойно выпуклую гиперповерхность налагает строгие топологические ограничения. Это наводит на мысль о том, что оптическая топология довольно существенно отличается от общей симплектической топологии (см. также [86]–[89]).

Проблема. Якоби в [90] упомянул о том, что любая каустика семейства геодезических, стартующих в общей точке эллипсоида, имеет не менее четырёх точек возврата. Верно ли это для других римановых метрик на сфере (например, для типичных метрик, близких стандартной)? Это свойство четырёх точек возврата, если оно имеет место, должно быть обобщением на симплектическую топологию теоремы о четырёх вершинах, согласно которой замкнутая плоская кривая имеет не менее четырёх точек точек экстремума кривизны (см. [91], [92]).

3 Контактная геометрия

Контактная геометрия составляет математический базис геометрической оптики в таком же смысле, в каком симплектическая геометрия является базисом классической механики. "Оптико-механическая" аналогия Гамильтона позволяет интерпретировать проблемы и результаты симплектической геометрии на языке контактной геометрии и наоборот. Тем не менее, прямой подход в терминах контактной геометрии во многих случаях предпочтительнее, по крайней мере с точки зрения геометрической интуиции: он демонстрирует геометрическое содержание формул симплектической теории. Связь между симплектической и контактной геометриями подобна связи между геометрией линейных пространств и проективной геометрией: для того чтобы получить контактный аналог симплектического утверждения, необходимо заменить функции гиперповерхностями, аффинные пространства проективными и т. д.

В этой главе контактная геометрия используется для изучения особенностей и перестроек волновых фронтов.

3.1. Волновые фронты

Каустики могут быть описаны как следы, заметаемые особенностями движущихся волновых фронтов. Теория особенностей волновых фронтов является частным случаем общей теории лежандровых особенностей контактной геометрии. Эта общая теория занимается классификацией особенностей преобразований Лежандра гладких функций и гиперповерхностей, дуальных гладким проективным поверхностям.

Определение. *Контактной структурой* на многообразии называется поле касательных гиперплоскостей (*контактных гиперплоскостей*), невырожденное в каждой точке (рис. 31).

Локально такое поле определено как поле нулей некоторой 1-формы α, называемой *контактной формой*. Условия невырожденности заключаются в следующем: $d\alpha$ невырождена на гиперплоскостях, на которых α равна нулю; эквивалентно, в $(2n+1)$-пространстве:

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

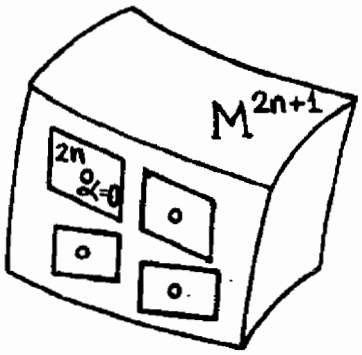


Рис. 31. Контактная структура: максимально неинтегрируемое поле касательных гиперплоскостей

Это условие выражает максимальную неинтегрируемость, так как условие Фробениуса интегрируемости поля гиперплоскостей $\alpha = 0$ состоит в том, что $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Пример 1. $\mathbf{R}^{2n+1}$, $\alpha = dz - p_1\,dq_1 - \ldots - p_n\,dq_n$. *Все контактные структуры на многообразии фиксированной размерности локально контактноморфны, и все контактные формы локально диффеоморфны* (и, следовательно, могут быть записаны в упомянутой выше нормальной форме, используя подходящие *координаты Дарбу*; смотри, например, [93], [14]).

Пример 2. *Многообразие* $J^1(M, \mathbf{R})$ *1-струй* функций $M \to \mathbf{R}$ (рис. 32) имеет естественную контактную структуру, "$dz - p\,dq$" (1-струя (z, p, q) функции f является многочленом первой степени её разложения Тейлора $f(x) = z + p(x - q) + \ldots$).

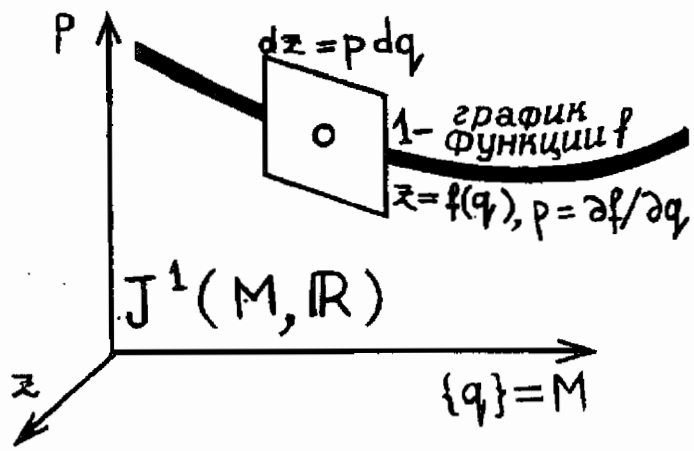


Рис. 32. Контактная структура многообразия 1-струй функций

Пример 3. *Контактный элемент* на V — это гиперплоскость в касательном к V пространстве. Все контактные элементы на V образуют расслоение над V, со слоем — проективным пространством контактных элементов, приложенных в одной точке контакта. *Расслоение контактных элементов* над V есть проективизация кокасательного расслоения V. Таким образом, *пространство проективизации кокасательного расслоения* PT^*V имеет естественную контактную структуру (рис. 33).

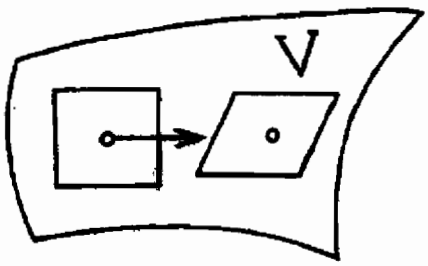


Рис. 33. Контактная структура многообразия контактных элементов на V

Естественные контактные структуры примеров 2 и 3 определены "условиями интегрируемости" и "условием конька" соответственно.

Скорость движения контактного элемента принадлежит контактной гиперплоскости, если и только если скорость движения точки контакта принадлежит этому контактному элементу.

Контактная структура пространства 1-струй функций определена следующим условием: для всякой функции многообразие её 1-струй во всех точках многообразия M касается (контактной) гиперплоскости.

Эта естественная контактная структура пространства 1-струй функций в локальных координатах (z, p, q) задаётся как поле нулей контактной 1-формы $dz - p\,dq$ (здесь z обозначает значение функции, q — точка области определения, p — значение первого дифференциала функции в точке q).

Теорема Гивенталя справедлива для подмногообразий контактного пространства: *локальная внешняя геометрия определена локальной внутренней геометрией* ([13], [14]).

На подмногообразии контактного многообразия контактная структура определяет пфаффову структуру. *Уравнением Пфаффа* называется уравнение вида $\alpha = 0$, где α — дифференциальная 1-форма. *Пфаффова структура* (локально) задаётся классом эквивалентных уравнений Пфаффа (два уравнения Пфаффа называются *эквивалентными*, если

соответствующие 1-формы отличаются только умножением на нигде не нулевую функцию). Пфаффова структура определяет поле касательных гиперплоскостей в точках, где пфаффовы формы не равны нулю. В окрестности такой невырожденной точки пфаффова структура полностью определена соответствующим полем касательных гиперплоскостей.

Пример. Пфаффовы структуры, определённые формами $x\,dx$ и $x^2\,dx$, совпадают в окрестности любой ненулевой точки, но отличаются в точке $x = 0$.

Теорема 1. *Росток подмногообразия контактного пространства определён, с точностью до контактоморфизма, пфаффовой структурой, индуцированной на подмногообразии из контактной структуры объемлющего пространства.*

Теорема 2. *Предположим, что ростки ограничений на подмногообразие двух контактных структур объемлющего пространства совпадают. Тогда существует локальный диффеоморфизм объемлющего пространства, неподвижный на подмногообразии, отправляющий первую структуру во вторую.*

Доказательства имеются в [14].

Определение. *Лежандровым подмногообразием* контактного многообразия называется интегральное подмногообразие максимальной размерности (равной n для $(2n+1)$-мерного контактного многообразия).

Пример 1. Слои расслоения $PT^*V \to V$ — лежандровы подмногообразия.

Пример 2. Множество 1-струй любой функции на M является лежандровым подмногообразием многообразия $J^1(M, \mathbf{R})$ 1-струй функций на M.

Пример 3. Множество контактных элементов V, касающихся какого-либо гладкого подмногообразия (любой размерности) в V, является лежандровым подмногообразием пространства контактных элементов V.

Определение. *Лежандровым расслоением* называется расслоение с лежандровыми слоями.

Пример 1. Проективизация кокасательного расслоения $PT^*V \to V$, сопоставляющее контактному элементу его точку контакта, является лежандровым расслоением.

Пример 2. Расслоение $J^1(M, \mathbf{R}) \to J^0(M, \mathbf{R})$ пространства 1-струй функций над пространством 0-струй, определённое "отображением забывания производных", $(q, p, z) \mapsto (q, z)$, является лежандровым расслоением.

Теорема. *Все лежандровы расслоения одинаковой размерности локально (в окрестности точки пространства расслоения) лежандрово эквивалентны.*

Спроектируем гиперплоскость, определяющую контактную структуру, из точки пространства лежандрова расслоения вдоль слоя на базу. Её образ есть контактный элемент к базе в точке, являющейся образом исходной точки.

Таким образом мы сконструировали отображение из пространства лежандрова расслоения в пространство контактных элементов к базе. Это отображение является (локальным) диффеоморфизмом, так как невырожденность контактной структуры влечёт тот факт, что проекция гиперплоскости, задающей контактную структуру, вращается с ненулевой скоростью, когда точка пространства расслоения движется с ненулевой скоростью вдоль слоя.

Это отображение переводит исходные контактную структуру и лежандрово расслоение в контактную структуру и естественное лежандрово расслоение пространства контактных элементов базы, что и доказывает теорему.

Замечание. Слои лежандрова расслоения локально снабжены естественной проективной структурой (определённой в предыдущем доказательстве). Эта структура аналогична естественной аффинной структуре слоёв лагранжева расслоения симплектической геометрии.

Проективная структура слоёв лежандрова расслоения имеет даже большее геометрическое содержание, так как любое отображение лежандровых расслоений (сохраняющее контактную структуру и слои) автоматически индуцирует единственное проективное отображение слоёв (определённое действием диффеоморфизма баз на контактных элементах к базам). В симплектическом случае аффинные отображения слоёв определены только с точностью до сдвигов.

Определение. Проекция лежандрова подмногообразия пространства лежандрова расслоения в базу этого расслоения называется *лежандровым отображением* (рис. 34). Образ лежандрова отображения называется его *фронтом*.

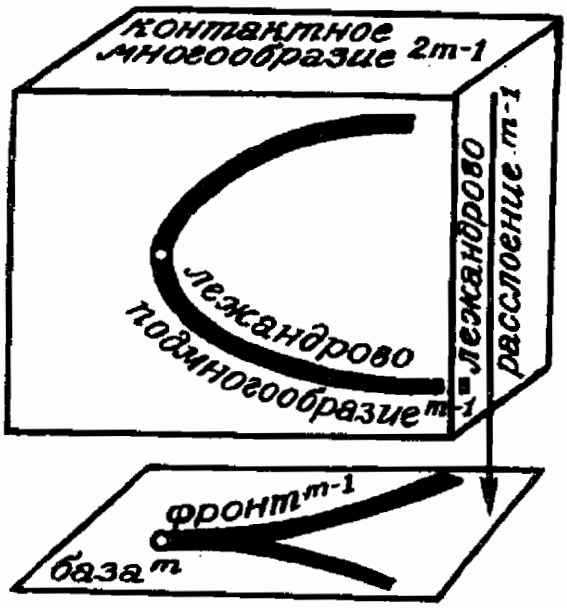


Рис. 34. Лежандрово отображение и его фронт

Обычно фронт является гиперповерхностью базового пространства лежандрова расслоения. Исключительные лежандровы подмногообразия (например, слои, чьи фронты — точки базы) образуют множество бесконечной коразмерности в пространстве всех лежандровых подмногообразий пространства расслоения.

Пример 1 (*Двойственность Лежандра*). Рассмотрим пространство контактных элементов проективного пространства P^n. Это пространство естественно изоморфно пространству контактных элементов дуального проективного пространства P^{n*}:

$$PT^*(P^n) \approx PT^*(P^{n*}). \tag{1}$$

В самом деле, точка в первом пространстве может быть рассмотрена как пара, образованная точкой из P^n и гиперплоскостью, содержащей эту точку. Изоморфизм отправляет эту пару в пару, образованную гиперплоскостью и этой точкой (то есть меняет местами элементы пары).

Геометрической основой теории преобразований Лежандра является следующая элементарная

Теорема. *Естественный изоморфизм* (1) *отправляет естественную контактную структуру первого пространства в естественную контактную структуру второго пространства.*

Доказательство. Рассмотрим гладкое подмногообразие прямого произведения многообразия на себя, касающееся диагонали (так что касательное пространство подмногообразия в точках диагонали, рассматриваемое как подпространство касательного пространства произведения, содержит касательное пространство диагонали). Нам понадобится очевидная

Лемма. *Касательное пространство выбранного выше подмногообразия в точке диагонали инвариантно относительно инволюции прямого произведения, задаваемой перестановкой сомножителей.*

Рассмотрим многообразие флагов PT^*P^n (точка $\subset$ гиперплоскость) в P^n. Скажем, что флаг *доминируется* другим флагом, если точка последнего принадлежит гиперплоскости первого. График этого отношения является гладким подмногообразием произведения многообразия флагов на себя и содержит диагональ. Перестановка сомножителей преобразует график отношения "доминировать" в график отношения "быть доминируемым".

Касательные плоскости к обоим графикам в точке диагонали совпадают (согласно лемме). Следовательно пересечения этих касательных плоскостей с касательной плоскостью произведения первого сомножителя и этой точки (в рассматриваемой точке диагонали) совпадают. Но эти два пересечения определяют естественные контактные структуры на первом сомножителе, рассматриваемом как $PT^*(P^n)$ для первого пересечения и как $PT^*(P^{n*})$ для второго. Совпадение пересечений доказывает теорему.

Замечание. Подобные рассуждения доказывают аналогичную теорему для полных флагов (состоящих из проективных пространств произвольных размерностей). Эта теорема двойственности является основой проективной двойственности кривых в проективном пространстве P^n (двойственная кривая лежит в P^{n*} и состоит из соприкасающихся гиперплоскостей исходной кривой, рассматриваемых как точки двойственного пространства. Она также является ребром возврата гиперповерхности, образованной всеми гиперплоскостями, касающимися исходной кривой).

Возвращаясь к двойственности Лежандра, рассмотрим два естественных расслоения пространства флагов (точка, гиперплоскость):

$$\begin{array}{ccc} PT^*(P^n) & \twoheadrightarrow & P^n \\ \rotatebox{90}{$\simeq$} & & \\ PT^*(P^{n*}) & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & P^{n*} \end{array}$$

Согласно теореме, оба расслоения лежандровы.

Множество всех контактных элементов, касающихся данной гиперповерхности $H^{n-1} \subset P^n$ является лежандровым подмногообразием пространства флагов. Следовательно, ограничение проекции π на это лежандрово подмногообразие является лежандровым отображением (рис. 35).

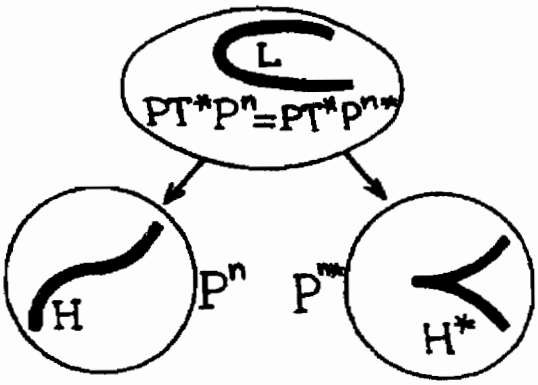


Рис. 35. Проективная двойственность между гиперповерхностью (H) и её фронтом (H^*)

Фронт $H^* \subset P^{n*}$ этого отображения называется *гиперповерхностью, двойственной к* H. Аффинная версия построения фронта данной гиперповерхности называется *преобразованием Лежандра.*

Из предыдущей теоремы вытекает, что конструкция двойственной гиперповерхности (и, следовательно, преобразование Лежандра) инволютивно.

Следствие. $H^{**} = H$.

Вместо гиперповерхности H мы могли бы взять подмногообразие произвольной размерности в проективном пространстве: оно всегда определяет лежандрово отображение. Например, фронт кривой в проективном пространстве (то есть фронт соответствующего лежандрова отображения) есть многообразие касающихся этой кривой гиперплоскостей.

Пример 2 (*эквидистанты*). Для гладкой гиперповерхности H евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ зафиксируем на каждой нормали точку на расстоянии t. Получим лежандрово отображение $H \hookrightarrow PT^*\mathbf{R}^n \twoheadrightarrow \mathbf{R}^n$.

Фронт этого отображения называется *эквидистантой* данной гиперповерхности H (рис. 36).

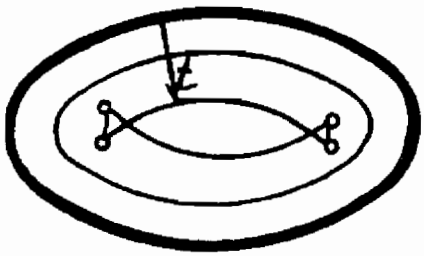


Рис. 36. Эквидистанты эллипса

Локально, любое лежандрово отображение эквивалентно отображению примера 1, а также отображению примера 2. Фронт (лежандрова отображения подмногообразия в $J^1(M, \mathbf{R})$ или PT^*V) единственным образом определяет лежандрово отображение (исключая множество отображений бесконечной коразмерности в пространстве всех лежандровых отображений). Следовательно (локальная) теория лежандровых особенностей совпадает с теорией особенностей преобразований Лежандра, а также с теорией особенностей эквидистант гиперповерхностей.

Общая теория лежандровых особенностей позволяет трансформировать любой результат геометрии волновых фронтов (эквидистант гиперповерхностей) в результат геометрии преобразований Лежандра и наоборот. Ясно, что их можно применять и в случаях, где контактная структура не так очевидна.

Пример 3 (*педальные гиперповерхности*). Рассмотрим гладкую гиперповерхность евклидова пространства, не содержащую точку O. *Педальной гиперповерхностью* называется множество оснований нормалей, проведённых из O к касательным гиперплоскостям гиперповерхности (рис. 37).

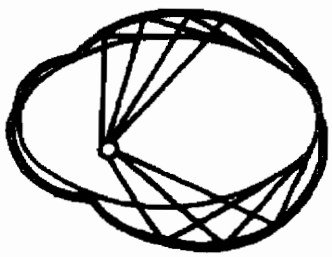


Рис. 37. Педальная кривая эллипса (является гладкой)

Педальная гиперповерхность может иметь особенности.

Задача. Докажите, что особенности педальных к типичным гиперповерхностям совпадают (с точностью до диффеоморфизма) с особенностями фронтов типичных лежандровых отображений (и, следовательно, с особенностями двойственных гиперповерхностей для типичных

гладких гиперповерхностей и с особенностями графиков преобразований Лежандра типичных гладких функций).

Указание. Педальная поверхность есть инверсия фронта данной гиперповерхности, то есть она может быть получена из двойственной гиперповерхности инверсией. Инверсия является диффеоморфизмом вне точки O.

Пример 4 (*огибающая нормальных гиперплоскостей*). Рассмотрим гиперплоскости, нормальные радиус-векторам гиперповерхности (проведённым из точки O, не принадлежащей гиперповерхности, (рис. 38)). Огибающая этого семейства может иметь особенности (впервые изучавшиеся А.Кэли в случае плоских эллипсов и пространственных эллипсоидов).

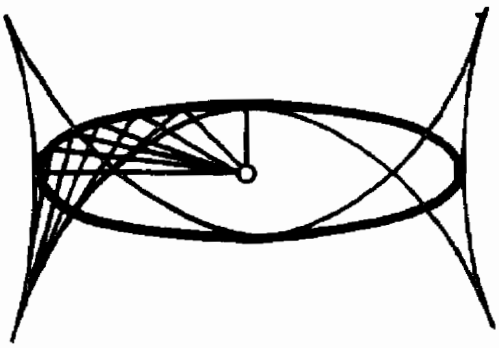


Рис. 38. Огибающая нормалей к радиус-векторам эллипса

Задача. Докажите, что особенности огибающих нормальных гиперплоскостей, построенных по типичной гиперповерхности, диффеоморфны особенностям фронтов типичных лежандровых особенностей (и, следовательно, особенностям типичных волновых фронтов, графиков преобразований Лежандра и педальных гиперповерхностей).

Указание. Огибающая нормалей есть фронт инверсии данной гиперповерхности.

Замечание. Слово "фронт" идёт от физических фронтов, ограничивающих область распространения физических процессов в фиксированные моменты времени. Например, если скорость распространения равна 1 и начальная область воэмущения ограничена начальным фронтом H (на рис. 36 — внешность эллипса), тогда в момент времени t возмущение распространится на внешность эквидистантной эллипсу кривой, расстояние от которой до начального фронта равно t. Строго говоря, настоящий фронт (граница возмущённой области) образует только часть эквидистантной кривой (на рис. 36 — граница области, имеющей форму линзы). Полная эквидистантная гиперповерхность должна

называться ***волновым фронтом*** (так как распространение волн ведёт к образованию особенностей вдоль всей эквидистантной гиперповерхности). Для краткости, в дальнейшем мы будем говорить о фронтах, вместо волновых фронтов.

3.2. Особенности фронтов

Классификация лежандровых особенностей сводится к изучению семейств гиперповерхностей таким же образом, каким изучение лагранжевых особенностей было сведено к классификации семейств функций.

Рассмотрим лагранжево подмногообразие в пространстве кокасательного расслоения некоторого многообразия. Оно может быть поднято (по крайней мере локально) до лежандрова подмногообразия многообразия 1-струй функций на выбранном многообразии:

$$z = \int_{q_0}^{q} p\,dq.$$

Полученное таким образом лежандрово подмногообразие проектируется на исходное лагранжево подмногообразие с помощью естественной проекции $J^1(M, \mathbf{R}) \to T^*M$ ("забывания значений функции").

Таким образом, производящее семейство лагранжева подмногообразия определяет лежандрово подмногообразие пространства 1-струй функций переменной q:

$$\Lambda = \{(p, q; z) \mid \exists x : F_x = 0,\ p = F_q,\ z = F(x, q)\}.$$

Проекция $(p, q; z) \mapsto (q; z)$ является лежандровым расслоением (контактная структура $dz = p\,dq$).

Мы получили лежандрово отображение лежандрова подмногообразия Λ на свой фронт (в пространстве с координатами (q, z)).

[Локально, приведённая выше конструкция описывает все лежандровы отображения. Лежандрова эквивалентность лежандровых отображений преобразуется в стабильную эквивалентность семейств гиперповерхностей $z = F(x, q)$ в x-пространстве (расслоенную над пространством параметров (q, z)). Понятие стабилизации аналогично данному в симплектическом случае для производящих семейств лагранжевых отображений. А именно, гиперповерхность $H(x) = 0$ стабильно

эквивалентна удвоению своего дополнения (то есть двулистному накрытию объемлющего пространства, разветвлённому вдоль этой гиперповерхности). Это разветвлённое накрытие определено уравнением $y^2 = H(x)$.]

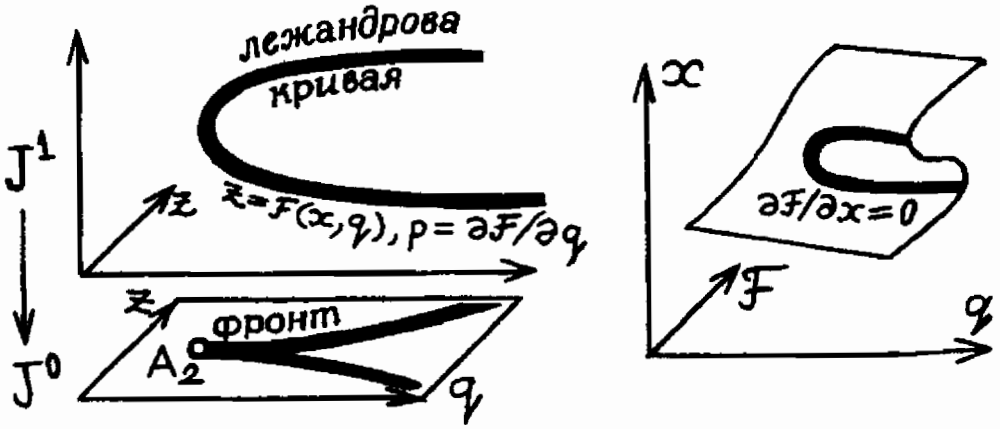


Рис. 39. Лежандрова особенность A_2 и её производящее семейство

Пример 1. Производящее семейство лагранжевой особенности A_2 (рис. 39):

$$F(x, q) = x^3 + qx,$$

определяет лежандрову кривую в 3-пространстве $\{(p, q; z)\}$:

$$q = -3x^2, \quad p = x, \quad z = -2x^3.$$

Это — гладкая кривая, но её фронт (при проекции на $(q; z)$-плоскость) имеет полукубическую точку возврата.

Пример 2. Производящее семейство особенности A_3 (см. §1.3) определяет фронт, диффеоморфный ласточкину хвосту.

Теорема (см. [2]). *Фронты, определённые семействами A, D, E, локально диффеоморфны (в комплексной области) многообразиям нерегулярных орбит соответствующих групп, порождённых отражениями (то есть многообразиям групп Вейля, соответствующим простым группам Ли: $A_\mu \sim SU_{\mu+1}$, $D_k \sim O_{2k}, \ldots$).*

Связь между фронтами и группами отражений будет важна в дальнейшем, поэтому мы остановимся на ней подробнее.

Определение. *Отражением* в линейном евклидовом пространстве называется ортогональное отображение, неподвижное на гиперплоскости

(называемой *зеркалом* этого отображения) и меняющее ориентацию нормали к зеркалу.

Группа отражений — конечная группа, порождённая некоторым множеством отражений.

Пример 1. Плоские группы отражений являются группами симметрий $I_2(n)$ правильных n-угольников (рис. 40).

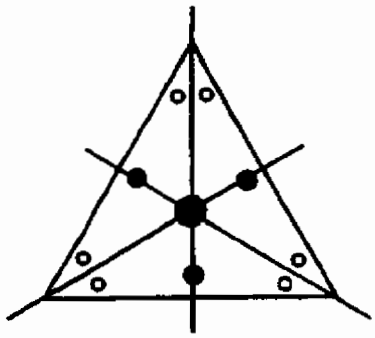


Рис. 40. Зеркала и орбиты группы $I_2(3) = A_2$

Группа отражений в $\mathbf{R}^\mu$ действует также на комплексном пространстве $\mathbf{C}^\mu$. Орбиты этого комплексного действия образуют гладкое многообразие орбит B, диффеоморфное $\mathbf{C}^\mu$ (это следует из обобщения теоремы о симметричных функциях). Отображение $\mathbf{C}^\mu \to B$, отправляющее точку в её орбиту, называется *отображением Виета.*

Пример 2. Группа A_μ перестановок координат $(z_0, \ldots, z_\mu)$ действует на пространстве $\mathbf{C}^{\mu+1}$. Это действие приводимо: диагональ, и следовательно ортогональная ей гиперплоскость $z_0 + \ldots + z_\mu = 0$, инвариантна. Действие группы A_μ на пространстве

$$\mathbf{C}^\mu = \{z \in \mathbf{C}^{\mu+1} \mid z_0 + \ldots + z_\mu = 0\}$$

неприводимо (инвариантных подпространств нет). Пространством орбит является многообразие многочленов

$$z^{\mu+1} + \lambda_1 z^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu.$$

Отображение Виета отправляет множество корней $(z_0, \ldots, z_\mu)$ в множество коэффициентов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$. Это отображение определено элементарными симметрическими многочленами $(\sigma_2, \ldots, \pm\sigma_{\mu+1})$ от z.

Пример 3. Группа D_μ действует на $\mathbf{C}^\mu$ как группа перестановок координатных осей, в композиции с чётным числом перемен знаков некоторых координат. Отображение Виета определено многочленами

$$\sigma_1(z_1^2, \ldots, z_\mu^2), \ldots, \pm\sigma_{\mu-1}(z_1^2, \ldots, z_\mu^2);\ z_1 \ldots z_\mu.$$

Число точек орбиты типичной точки под действием группы отражений равно числу элементов группы. Однако, некоторые орбиты меньше. Такие орбиты называются *нерегулярными*.

Определение. Многообразие нерегулярных орбит называется *дискриминантной гиперповерхностью*. Дискриминантная гиперповерхность является образом зеркал при отображении Виета.

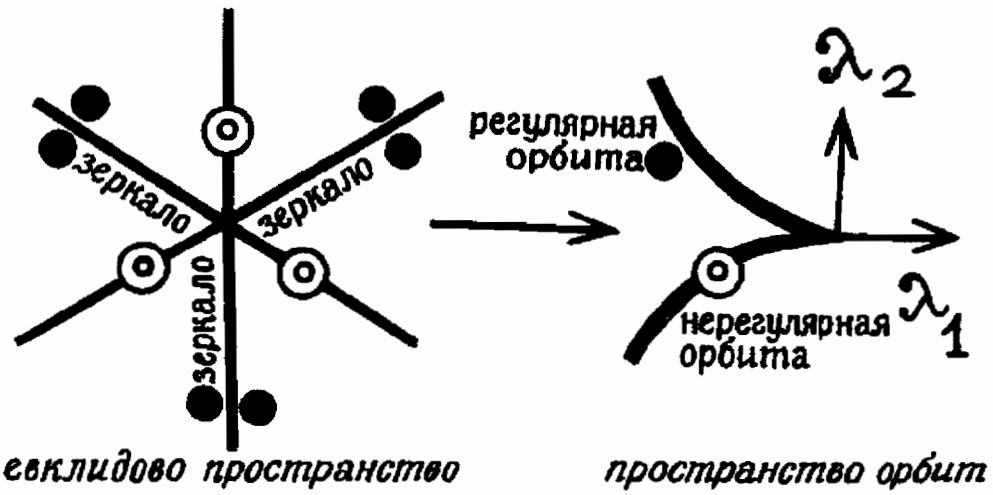


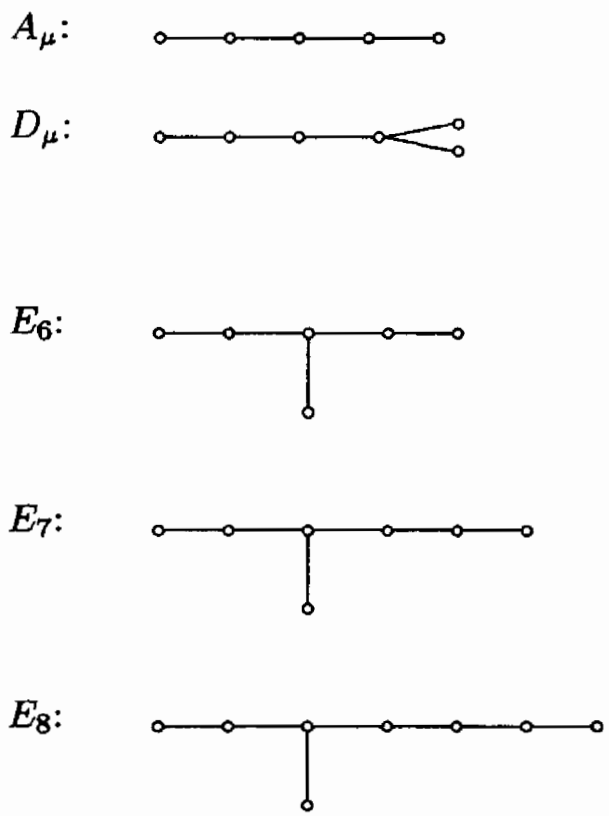
Рис. 41. Отображение Виета и многообразие нерегулярных орбит (дискриминантная гиперповерхность) группы A_2

Пример 1. Дискриминантным многообразием группы A_2 (порождённой отражениями плоскости относительно трёх прямых, образующих углы 120°) является плоская полукубическая парабола (рис. 41).

Пример 2. Дискриминантным многообразием группы A_μ является множество комплексных многочленов $x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu$, имеющих хотя бы один кратный корень ("*обобщённый ласточкин хвост* в μ-мерном пространстве").

Таким образом, предыдущая теорема утверждает, что фронты, определённые производящими семействами A, D, E, диффеоморфны обобщенным ласточкиным хвостам, ассоциированным с соответствующими неприводимыми группами отражений.

Для того, чтобы определить эти группы, достаточно описать зеркала порождающих отражений. Эти множества зеркал описываются "*диаграммами Дынкина*" (также называемыми диаграммами Кокстера и изобретёнными, кажется, Е.Виттом):



Каждая точка представляет вектор в евклидовом μ-мерном пространстве. Две точки соединены линией, если соответствующие векторы образуют угол 120°. В противном случае векторы ортогональны.

Образующие зеркала — гиперплоскости, ортогональные этим векторам.

Лежандровы особенности типов A, D, E устойчивы и *просты* (не имеют модулей). Типичные лежандровы отображения n многообразий размерности $n \leq 5$ имеют только простые и устойчивые особенности, лежандрово эквивалентные A_μ, D_μ, E_μ ($\mu \leq n+1$). Особенности типов A_μ, D_μ, E_μ (и только они) являются простыми и устойчивыми и при бóльших n.

Типичные лежандровы отображения многообразий размерности $n > 5$ имеют, кроме особенностей типов A, D, E, и другие особенности, имеющие модули (непрерывные инварианты). Более подробно классификация лежандровых особенностей описана в [94], [28], [29].

Изложенная выше теория приводит к следующему списку особенностей типичных волновых фронтов на плоскости и в трёхмерном пространстве:

Особенности плоских фронтов

- *типичные (полукубические) точки возврата* (A_2);
- *точки трансверсального самопересечения* (A_1A_1).

Обе особенности устойчивы (сохраняются при малой деформации фронта).

Замечание. Одномерный фронт является проекцией пространственной кривой на плоскость. Проекция типичной кривой не имеет точек возврата (рис. 42). Лежандрова природа нашей кривой делает проекцию более особой чем в общем случае (и точки возврата становятся неустранимыми). Это — проявление общего принципа: *особенности притягивают особенности.* Действительно, лежандрово многообразие является проекцией множества критических (особых) точек функций производящего семейства.

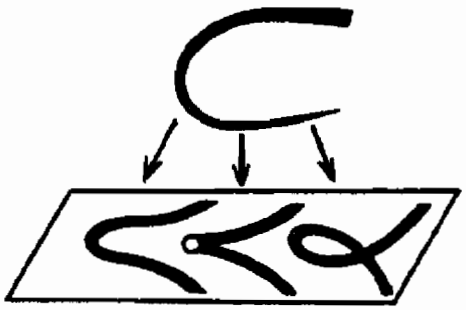


Рис. 42. Исчезновение точки возврата при малом изменении направления проектирования

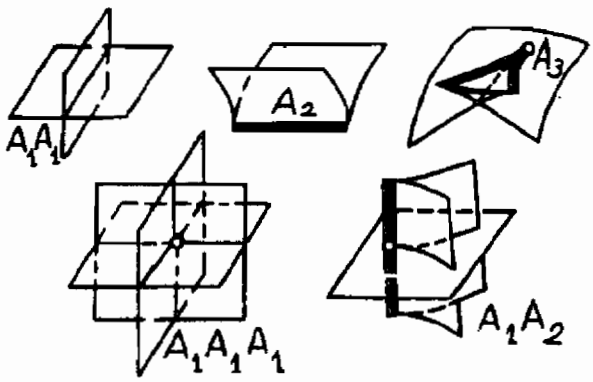


Рис. 43. Типичные особенности волновых фронтов в 3-пространстве

Типичный фронт в трёхмерном пространстве имеет следующие особенности (рис. 43):

Особенности пространственных фронтов

- (*полукубические*) *рёбра возврата* (A_2);

- *ласточкины хвосты* (A_3);

- *точки трансверсального самопересечения* (A_1A_1), (A_1A_2), ($A_1A_1A_1$).

Связь между особенностями фронтов и теорией групп отражений оказалась мощным инструментом при изучении геометрии фронтов, предоставляя возможность использовать теорию инвариантов, групп и алгебр Ли, алгебраическую геометрию и т. д.

3.3. Перестройки фронтов

Особенности движущихся фронтов могут изменять свою форму. Например, фронт возмущения, распространяющегося внутрь эллипса (внутренние эквидистанты эллипса, см. рис. 36), является гладким для малых t, приобретая 4 точки возврата при бóльших t.

Перестройки фронтов, как и перестройки каустик, легче изучать в пространстве-времени. Объединение фронтов в различные моменты времени образует гиперповерхность в пространстве-времени. Легко видеть, что эта гиперповерхность, образованная типичным движущимся фронтом, сама является фронтом типичного лежандрова отображения подмногообразия, размерность которого на 1 больше размерности изучаемого движущегося фронта.

Действительно, пусть $F_t(x, q)$ будет производящим семейством лежандрова отображения, зависящего от времени t. Тогда, рассматривая t как дополнительный параметр, мы можем рассматривать F как производящее семейство лежандрова отображения в (q, t) пространство-время. Гиперповерхность в пространстве-времени, образованную фронтами в различные моменты времени, будем называть *большим фронтом.*

Пример. Объединение внутренних эквидистант эллипса, помещённых в различных плоскостях $t = \text{const}$ (где t — расстояние до эллипса), является большим фронтом в трёхмерном пространстве-времени. Этот фронт имеет 4 ласточкина хвоста (рис. 44).

Таким образом, особенности больших фронтов, образованных в пространстве-времени перестройками в типичных семействах дви-

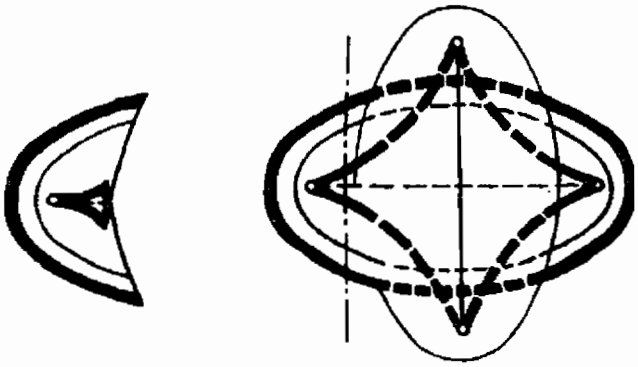


Рис. 44. Перестройка эквидистант эллипса

жущихся фронтов, известны: это — особенности фронтов типичных лежандровых отображений в пространство размерности на 1 большей размерности пространства, где движется исходный фронт.

Пример. Если исходное пространство трёхмерно, то особенности типичных больших фронтов диффеоморфны либо дискриминантному многообразию (дискриминанту) группы A_4 или D_4, либо произведению прямой на дискриминант группы A_3 (ласточкин хвост), либо произведению плоскости на дискриминант группы A_2 (полукубическую параболу). Возможны также трансверсальные самопересечения.

Время t, рассматриваемое как функция на пространстве-времени, не имеет критических точек. Следовательно, изучение перестроек типичных движущихся волновых фронтов ведёт к изучению функций, не имеющих критических точек, на пространстве, содержащем большой фронт (особенности которого известны). А именно, мы приведём функцию времени к нормальной форме диффеоморфизмами, сохраняющими большой фронт. Это достаточно просто в случае, когда большой фронт диффеоморфен дискриминанту группы отражений

Теорема 1 (см. [1]). *Росток типичной функции в нуле многообразия орбит неприводимой группы евклидовых отражений (значение функции в нуле равно нулю) приводим к ростку линейной функции диффеоморфизмом многообразия орбит, сохраняющим дискриминантную гиперповерхность. Точнее, он может быть приведён к ростку инварианта наименьшей степени (равной 2).*

Следствие. *Росток типичной функции переменных* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ *в нуле приводим к виду* $\lambda_1 + \text{const}$ *диффеоморфизмом, сохраняющим обобщённый ласточкин хвост*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid z^{\mu+1} + \lambda_1 z^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu \text{ имеет кратный корень}\}$$

(*условие типичности:* $\partial f/\partial \lambda_1 \mid_0 \neq 0$).

Пример. Гладкая кривая, проходящая через точку возврата полукубической параболы и не касающаяся параболы в нуле, может быть преобразована в прямую (не касающуюся параболы в нуле) диффеоморфизмом, сохраняющим параболу (рис. 45).

Рис. 45. Выпрямление функции времени

Доказательство теоремы основано на эквивариантном аналоге леммы Морса:

Теорема 2. *Если второй дифференциал в нуле функции, инвариантной относительно неприводимой компактной группы линейных преобразований, невырожден, то в некоторой окрестности нуля функция приводима к своей квадратичной части эквивариантным (то есть коммутирующим с действием группы) диффеоморфизмом.*

Эта теорема легко доказывается, подобно обычной лемме Морса, гомотопическим методом. Единственным новым ингредиентом является построение эквивариантного решения гомотопического уравнения усреднением по компактной группе. Детали доказательств теорем 1 и 2 изложены в [1]. Обе теоремы верны в голоморфном, аналитическом и гладком случаях.

Замечание. Хотя следствие легко следует из этих теорем, кажется невозможным открыть его с их помощью. Действительно, теоремы 1 и 2 были открыты только после того, как следствие было доказано путём длинных вычислений (использовавших явные формулы для векторных полей, касающихся ласточкина хвоста). Мы вернёмся к этим векторным полям позже (§§4.1–4.2).

Теорема 1 доставляет нормализацию функции времени в наиболее вырожденных точках большого фронта. Однако, большой фронт имеет также менее вырожденные точки. Например, большой фронт в трёхмерном пространстве-времени имеет, помимо ласточкиных хвостов, рёбра возврата (т. е. линии особенностей). В типичной точке ребра возврата изохрона (поверхность фиксированного времени) трансверсальна ребру. Но в некоторых точках ребра возврата эта поверхность может касаться ребра. Это событие также может быть устойчивым (не исчезнет после малой деформации фронта). Такие точки являются критическими точками ограничения функции времени на ребро

возврата. Изучим перестройки фронтов в таких точках. Для простоты ограничимся голоморфным случаем.

Рассмотрим k-мерное "ребро" большого фронта, соответствующее особенности типа X_μ (где X обозначает A, D или E). В невырожденных точках ограничения функции времени на ребро перестроек мгновенных фронтов нет. В некоторой окрестности некритической точки большой фронт, вместе с его сечениями изохронами, диффеоморфен произведению мгновенного фронта на ось времени (этот диффеоморфизм пространства-времени сохраняет время и не сохраняет, в общем случае, точки пространства).

Ограничение на "ребро" многообразия типичной функции на пространстве-времени имеет только изолированные невырожденные (морсовские) критические точки (рис. 46). Рассмотрим одну из таких точек. Выберем координаты $(\tau_1, \ldots, \tau_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ на пространстве-времени так, что "ребро" задаётся уравнением $\lambda = 0$ и большой фронт имеет вид "λ принадлежит дискриминанту X_μ".

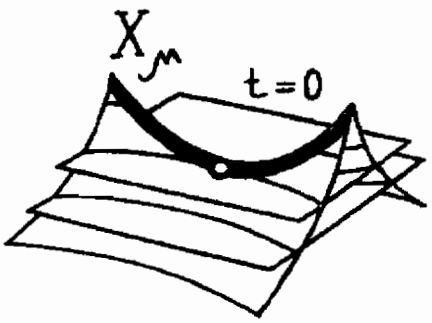


Рис. 46. Типичная особенность ограничения функции времени на "ребро возврата" X_μ

Согласно параметрической лемме Морса, в подходящих координатах τ функция времени может быть приведена к локальной нормальной форме

$$\tau_1^2 + \ldots + \tau_k^2 + \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu).$$

Для типичной функции времени росток ϕ в нуле типичен, следовательно (по теореме 1) приводим к виду $\phi = \lambda_1 + \text{const}$ (где λ_1 есть инвариант наименьшей степени) диффеоморфизмом многообразия орбит, сохраняющим дискриминант.

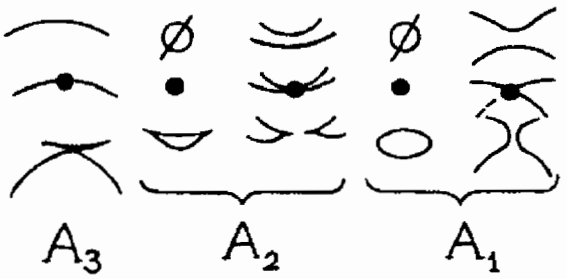
Таким образом, мы получили нормальные формы типичных перестроек, зависящих от времени фронтов в пространствах размерности ≤ 5.

Пример. *В трёхмерном пространстве-времени типичные перестройки каждой ветви фронта могут быть локально сведены к следующим нормальным формам*:

тип	большой фронт	функция времени
A_3	$\{\lambda \mid z^4+\lambda_1 z^2+\lambda_2 z+\lambda_3$ имеет кратный корень $\}$	$\pm\lambda_1$
A_2	$\{\lambda \mid z^3+\lambda_1 z+\lambda_2$ имеет кратный корень $\}$	τ_1 или $\pm\lambda_1 \pm \tau_1^2$
A_1	$\lambda_1 = 0$	τ_1 или $\pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \tau_2^2$

Перестройки двумерных фронтов в момент времени $t = 0$ изображены на рис. 47 (на рисунке изображены фронты в моменты $t < 0$, $t = 0$ и $t > 0$, прошлое и будущее могут меняться местами).

Рис. 47. Типичные перестройки волновых фронтов на плоскости



Кроме того, различные ветви фронта свободно движутся друг сквозь друга. Следовательно, в изолированные моменты возникают дополнительные перестройки: одна ветвь может проходить через точку пересечения двух других, или через точку возврата; две ветви могут касаться друг друга, соответствующая перестройка — рождение или смерть двух точек пересечения.

Перестройки фронтов в пространствах бóльших размерностей описаны в [95], [96], [28]. Изображения перестроек фронтов в трёхмерном пространстве приведены на рис. 48 (взятом из [98]).

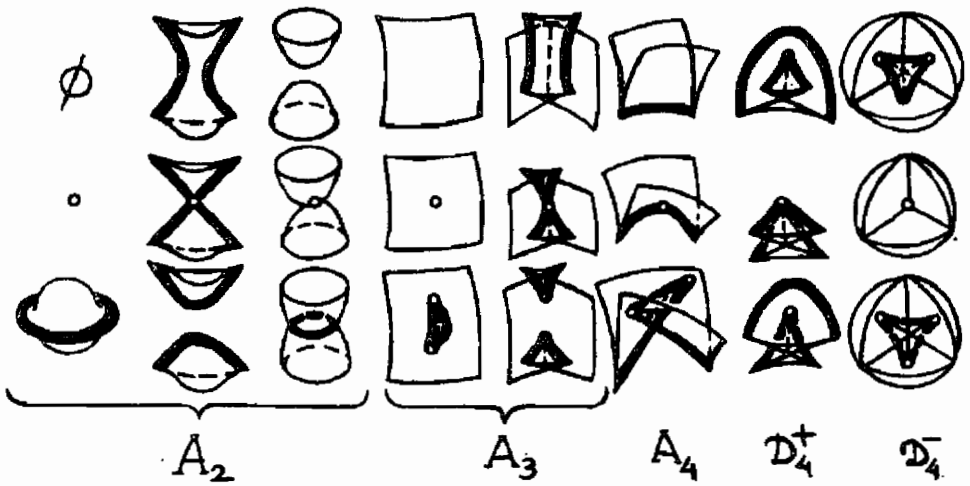


Рис. 48. Типичные перестройки волновых фронтов в 3-пространстве

Замечание. Некоторые из описанных выше перестроек фронтов не реализуемы при распространении волновых фронтов. В самом деле, нетривиальные перестройки A_1 и A_2 изменяют число связных компонент соответствующего лежандрова многообразия. Следовательно, они не могут появиться как перестройки эквидистант гиперповерхностей.

Тем не менее, они могут появиться при изучении "лежандровых кобордизмов", как, например, в следующей ситуации. Рассмотрим след движущегося в пространстве фронта (скажем, ударной волны от летящего самолёта) на поверхности Земли. Топология лежандрова многообразия, соответствующего фронту в пространстве, в процессе движения фронта остаётся неизменной. Но лежандрово многообразие, описывающее след фронта на поверхности Земли, в определённые моменты времени претерпевает (морсовские) перестройки.

4 Сворачивание инвариантов и отображения периодов

В этой главе мы опишем алгебраическую технику, используемую при приведении дифференциально-геометрических объектов к нормальным формам. Например, теория нормальных форм перестроек волновых фронтов, описанная ранее, основана на приведении к нормальным формам функции времени диффеоморфизмами пространства-времени, сохраняющими ласточкины хвосты. Алгебра Ли группы таких преобразований образована векторными полями, касающимися ласточкина хвоста. Основные результаты данной главы в сжатой форме описывают эти векторные поля; эта информация может быть также получена прямыми, но длинными вычислениями, использующими симметрические функции.

Успех достигается с помощью результатов теории инвариантов групп евклидовых отражений. В конце этой главы излагается теория отображений периодов, развитая А.Н.Варченко и А.Б.Гивенталем. Эта теория может рассматриваться как обобщение на случай непростых квазиоднородных особенностей геометрии векторных полей, касающихся дискриминантов групп отражений.

Отображения периодов переносят форму пересечений из пространства гомологий неособого множества уровня функции на базу версальной деформации, определяя поле 2-форм на кокасательных пространствах базы. Это поле может рассматриваться как аналог римановой метрики на пространстве регулярных орбит группы евклидовых отражений.

4.1. Векторные поля, касающиеся фронтов

Фронт простой особенности биголоморфно эквивалентен дискриминанту конечной группы евклидовых отражений (§3.1). Поэтому мы будем изучать голоморфные векторные поля на многообразии орбит, касающиеся дискриминанта (то есть множества *нерегулярных орбит*).

Напомним некоторые обозначения. Группа отражений действует на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\mu$ и на его комплексификации $\mathbb{C}^\mu$. *Многообразие орбит* B диффеоморфно $\mathbb{C}^\mu$. Обозначим через $\pi : \mathbb{C}^\mu \to B$

Замечание. Некоторые из описанных выше перестроек фронтов не реализуемы при распространении волновых фронтов. В самом деле, нетривиальные перестройки A_1 и A_2 изменяют число связных компонент соответствующего лежандрова многообразия. Следовательно, они не могут появиться как перестройки эквидистант гиперповерхностей.

Тем не менее, они могут появиться при изучении "лежандровых кобордизмов", как, например, в следующей ситуации. Рассмотрим след движущегося в пространстве фронта (скажем, ударной волны от летящего самолёта) на поверхности Земли. Топология лежандрова многообразия, соответствующего фронту в пространстве, в процессе движения фронта остаётся неизменной. Но лежандрово многообразие, описывающее след фронта на поверхности Земли, в определённые моменты времени претерпевает (морсовские) перестройки.

4 Сворачивание инвариантов и отображения периодов

В этой главе мы опишем алгебраическую технику, используемую при приведении дифференциально-геометрических объектов к нормальным формам. Например, теория нормальных форм перестроек волновых фронтов, описанная ранее, основана на приведении к нормальным формам функции времени диффеоморфизмами пространства-времени, сохраняющими ласточкины хвосты. Алгебра Ли группы таких преобразований образована векторными полями, касающимися ласточкина хвоста. Основные результаты данной главы в сжатой форме описывают эти векторные поля; эта информация может быть также получена прямыми, но длинными вычислениями, использующими симметрические функции.

Успех достигается с помощью результатов теории инвариантов групп евклидовых отражений. В конце этой главы излагается теория отображений периодов, развитая А.Н.Варченко и А.Б.Гивенталем. Эта теория может рассматриваться как обобщение на случай непростых квазиоднородных особенностей геометрии векторных полей, касающихся дискриминантов групп отражений.

Отображения периодов переносят форму пересечений из пространства гомологий неособого множества уровня функции на базу версальной деформации, определяя поле 2-форм на кокасательных пространствах базы. Это поле может рассматриваться как аналог римановой метрики на пространстве регулярных орбит группы евклидовых отражений.

4.1. Векторные поля, касающиеся фронтов

Фронт простой особенности биголоморфно эквивалентен дискриминанту конечной группы евклидовых отражений (§3.1). Поэтому мы будем изучать голоморфные векторные поля на многообразии орбит, касающиеся дискриминанта (то есть множества *нерегулярных орбит*).

Напомним некоторые обозначения. Группа отражений действует на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\mu$ и на его комплексификации $\mathbb{C}^\mu$. *Многообразие орбит* B диффеоморфно $\mathbb{C}^\mu$. Обозначим через $\pi : \mathbb{C}^\mu \to B$

отображение Виета, отправляющее точку в её орбиту. *Дискриминант* Σ (многообразие нерегулярных орбит) есть гиперповерхность в B, она образована образами зеркал. Дискриминант будет также называться *обобщённым ласточкиным хвостом* в связи со следующим примером.

Пример. В случае A_μ многообразие орбит B является многообразием всех комплексных полиномов $z^{\mu+1}+\lambda_1 z^{\mu-1}+\ldots+\lambda_\mu$. Отображение Виета сопоставляет неупорядоченному множеству корней такого многочлена упорядоченное множество его коэффициентов. Зеркала определены уравнениями $z_i = z_j$ (см. рис. 41, где $\mu = 2$); здесь z_j — декартовы координаты на $\mathbf{C}^{\mu+1}$, и $\mathbf{C}^\mu$ есть гиперплоскость $\sum z_i = 0$.

Многообразие нерегулярных орбит:

$$\Sigma = \{\lambda \in B \mid z^{\mu+1} + \lambda_1 z^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu \text{ имеет кратный корень}\}.$$

Для $\mu = 3$ это — обычный ласточкин хвост в $\mathbf{C}^3$.

Функции на B называются *инвариантами* (так как для $\alpha : B \to \mathbf{C}$ функция $\alpha \circ \pi : \mathbf{C}^\mu \to \mathbf{C}$ инвариантна относительно группы отражений, и любая инвариантная функция допускает представление $\alpha \circ \pi$).

Определение. Операцией *сворачивания инвариантов* Φ называется билинейная операция, сопоставляющая паре инвариантов евклидово скалярное произведение их евклидовых градиентов в $\mathbf{C}^\mu$:

$$\pi^*\Phi(a,b) = < \nabla\pi^* a, \nabla\pi^* b >,$$

где $< .,. >$ и ∇ — евклидовы скалярное произведение и градиент в $\mathbf{C}^\mu$, $\pi^*\alpha = \alpha \circ \pi$.

Пример. Рассмотрим действие группы A_2 на плоскости. Сворачивая базисные инварианты λ_1 и λ_2, получим (проводя некоторые вычисления с симметрическими функциями):

$$\Phi(\lambda_1,\lambda_1) = -2\lambda_1, \quad \Phi(\lambda_1,\lambda_2) = -3\lambda_2, \quad \Phi(\lambda_2,\lambda_2) = \frac{2}{3}\lambda_1^2.$$

Операция сворачивания инвариантов симметрична, билинейна и удовлетворяет *тождеству Лейбница*: при фиксированном первом аргументе она является дифференцированием второго аргумента,

$$\Phi(a,bc) = b\Phi(a,c) + c\Phi(a,b).$$

Следовательно, каждый инвариант $a : B \to \mathbf{C}$ определяет векторное поле V_a на многообразии орбит: производная инварианта b вдоль V_a есть $\Phi(a,b)$.

Будем называть V_a *потенциальным полем с потенциалом* a.

Теорема. *Всякое потенциальное поле V_a касается многообразия нерегулярных орбит.*

Доказательство. Евклидов градиент инвариантной функции π^*a инвариантен относительно отражений. Следовательно, он касается зеркал. Таким образом, проекция этого градиента на многообразие орбит касается проекции зеркал, что и требовалось доказать.

Выберем базис инвариантов (т. е. координатную систему $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ на B; на B не фиксируется никакой линейной структуры). По функциям λ_i построим μ векторных полей $\{V_{\lambda_i}\}$ на B, касающихся дискриминантной гиперповерхности. Эти поля будут называться *базисными*.

Пример. Базисные поля для базиса инвариантов (λ_1, λ_2) группы A_2 таковы:

$$V_{\lambda_1} = -2\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} - 3\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2},$$
$$V_{\lambda_2} = -3\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{2\lambda_1^2}{3} \frac{\partial}{\partial \lambda_2}$$

(это следует из предыдущего примера). В этом случае дискриминантная гиперповерхность является полукубической параболой $\Delta = 0$, где $\Delta = 4\lambda_1^3 + 27\lambda_2^2$. Первое из этих полей является эйлеровым квазиоднородным полем, второе — гамильтоново поле с гамильтонианом $\Delta/18$.

Теорема (см. [98]). *Векторы μ базисных полей независимы в любой точке многообразия регулярных орбит. На многообразии нерегулярных орбит их определитель имеет нуль первого порядка.*

В точке многообразия нерегулярных орбит базисные поля порождают касательное пространство к страту естественной стратификации дискриминантной гиперповерхности, содержащему данную точку.

Зная базисные векторные поля, мы можем построить множество других полей, касающихся дискриминанта: любая линейная комбинация базисных полей с (голоморфными) функциональными коэффициентами является таковой.

Любое голоморфное векторное поле (его росток), касающееся дискриминанта, представимо в таком виде, а соответствующие голоморфные коэффициенты (их ростки) определены единственным образом [99].

Другими словами, ростки в нуле голоморфных векторных полей, касающихся дискриминанта, образуют свободный модуль над $\mathbf{C}$-алгеброй

(ростков) голоморфных функций с μ образующими (в качестве которых может быть выбрана любая система базисных полей).

Пример. Любое плоское векторное поле, голоморфное в нуле и касающееся полукубической параболы $\Delta = 0$, имеет вид $a_1 V_{\lambda_1} + a_2 V_{\lambda_2}$ (используя обозначения предыдущего примера); голоморфные коэффициенты определены единственным образом.

Замечание. Бесконечно гладкое векторное поле на вещественном трёхмерном пространстве, касающееся вещественного ласточкина хвоста (образованного вещественными полиномами $z^4 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z + \lambda_3$ с кратным вещественным корнем), в общем случае не является линейной комбинацией базисных полей с гладкими коэффициентами.

В самом деле, в $\mathbf{R}^3$ ласточкин хвост имеет линию самопересечения (рис. 49), аналитическое продолжение которой в другую сторону от вершины ласточкина хвоста является кривой, не принадлежащей вещественному ласточкину хвосту (соответствующие кратные корни комплексны). Гладкое векторное поле, касающееся вещественного ласточкина хвоста, в общем случае не касается этой продолженной кривой, в отличие от базисных полей.

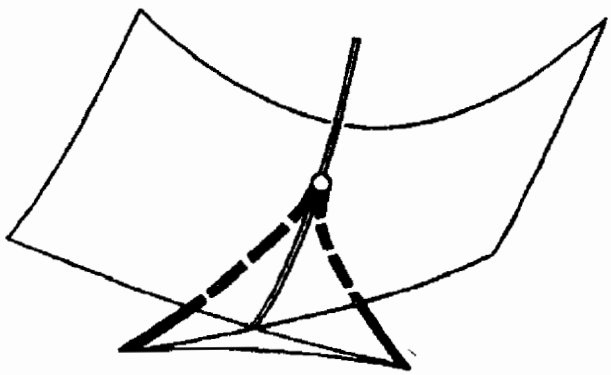


Рис. 49. Линия самопересечения вещественного ласточкина хвоста и её аналитическое продолжение

Во всяком случае, знание базисных полей чрезвычайно полезно для приведения к нормальным формам различных геометрических объектов с помощью сохраняющих дискриминант диффеоморфизмов, поскольку любая функциональная линейная комбинация базисных полей касается дискриминанта.

Явные формулы для компонент базисных полей, касающихся дискриминантов групп отражений, имеются в [1], [98], [100]. Так как эти

компоненты равны $\Phi(\lambda_i, \lambda_j)$, достаточно вычислить свёртки базисных инвариантов.

Пример. Матрица $\Phi(\lambda_i, \lambda_j)$ для A_3 записывается следующим образом (в указанном выше базисе):

$$-\begin{Vmatrix} 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_2 & 4\lambda_3 - \lambda_1^2 & -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} \\ 4\lambda_3 & -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} & 2\lambda_1\lambda_3 - \frac{3\lambda_2^2}{4} \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, базис модуля векторных полей, касающихся ласточкина хвоста в $\mathbf{C}^3$, образован полями

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\lambda_1\partial_1 + 3\lambda_2\partial_2 + 4\lambda_3\partial_3, \\ V_2 &= 3\lambda_2\partial_1 + (4\lambda_3 - \lambda_1^2)\partial_2 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\partial_3, \\ V_3 &= 4\lambda_3\partial_1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\partial_2 + (2\lambda_1\lambda_3 - \frac{3\lambda_2^2}{4})\partial_3. \end{aligned}$$

Общая формула для свёртки инвариантов группы A_μ была найдена Д.Б.Фуксом [1]. Обозначим через σ_i i-ую симметрическую функцию от корней многочлена $z^{\mu+1} + \lambda_1 z^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu$:

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \lambda_1,\ \sigma_3 = -\lambda_2, \ldots,\ \sigma_{\mu+1} = \pm\lambda_\mu, \sigma_{\mu+2} = \ldots = 0.$$

Тогда, для $i \le j$,

$$\Phi(\sigma_{i+1}, \sigma_{j+1}) = \frac{i(\mu+1-j)}{\mu+1}\sigma_i\sigma_j - \sum(\beta - \alpha)\sigma_\alpha\sigma_\beta,$$

где суммирование ведётся по всем парам (α, β), удовлетворяющим

$$\alpha + \beta = i + j, \qquad 0 \le \alpha < i.$$

Формулы для остальных простых особенностей имеются в [101], [102].

Практический метод для быстрого вычисления векторных полей, касающихся фронтов, был изобретён В.М.Закалюкиным [95]. В квазиоднородном случае его конструкция начинается с версальной деформации F квазиоднородного полинома f,

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_\mu g_\mu(x),$$

где g_k суть мономы, образующие (над $\mathbf{C}$) локальную алгебру

$$Q_f = \mathbf{C}[[x]] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

(Здесь $(\partial f/\partial x_j)$ обозначает "идеал, образованный функциональными линейными комбинациями $\sum h_j \partial f/\partial x_j$ в алгебре $\mathbf{C}[[x]]$ формальных степенных рядов переменных x"[1]). Этот идеал является касательным пространством к орбите f под действием группы диффеоморфизмов.)

Рассмотрим разложение

$$g_i(x)F(x,\lambda) = \sum h_{i,j}(x,\lambda)\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum V_{i,j}(\lambda)g_j(x),$$

существующее согласно теореме Вейерштрасса (см., например, [28]).

Векторные поля

$$V_i = \sum V_{i,j}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$$

касаются фронта, определённого формулами

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C}^\mu \mid \text{ многообразие } V_\lambda = \{x \mid F(x,\lambda) = 0\} \text{ особо}\}.$$

Любое векторное поле, голоморфное в нуле и касающееся фронта, единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных полей V_i с голоморфными в нуле коэффициентами.

Конструкция Закалюкина основана на следующих соображениях. Рассмотрим малую деформацию $(1+\varepsilon g)F$ семейства F (ε — малый параметр). Это семейство R-эквивалентно семейству, индуцированному из F (так как F версально, см. [28]). Соответствующая замена параметров близка к тождественной. Её производная по ε, при $\varepsilon = 0$, даёт требуемое векторное поле. Оно касается фронта Σ, так как многообразия V_λ (и, следовательно, фронты рассмотренных семейств) не зависят от ε. Так как замена параметров переводит фронт во фронт, её производная V касается фронта Σ.

[1] *Алгеброй* (функций, рядов и т. д.) называется линейное пространство элементов (функций,...), содержащее вместе с любыми двумя элементами их произведение. *Идеалом* называется линейное подпространство алгебры, содержащее вместе с любым своим элементом все произведения этого элемента на элементы алгебры. Фактор-пространство $Q = A/I$ алгебры по модулю идеала само является алгеброй. Алгебра называется *локальной*, если она имеет единственный максимальный идеал (не содержащийся в других идеалах, отличных от алгебры). Алгебра $\mathbf{C}[[x]]$ локальна, *максимальный идеал* образован рядами без свободного члена.

4.2. Линеаризованное сворачивание инвариантов

Размерность алгебры Ли векторных полей, касающихся фронта лежандрова отображения (или дискриминанта группы отражений), бесконечна. Однако, мы можем построить конечномерную алгебру Ли, заменяя каждое векторное поле его линейной частью в нуле. В большинстве вычислений, использующих касающиеся фронтов векторные поля, достаточно знание этих конечномерных алгебр. В отличие от сворачивания полных инвариантов, алгебра линеаризованных сворачиваний допускает простое явное описание в терминах умножения в локальной градуированной алгебре соответствующей особенности.

Будем обозначать касательное пространство в нуле к многообразию орбит группы отражений через T, двойственное ему пространство — через T^*.

Определение. *Линеаризованным сворачиванием инвариантов* называется билинейное отображение

$$\phi : T^* \times T^* \to T^*,$$

определённое формулой

$$\phi(da, db) = d(\Phi(a, b)),$$

где d есть дифференциал функции в нуле многообразия орбит и Φ — сворачивание инвариантов.

Легко видеть, что определение корректно (значение ϕ зависит только от дифференциалов a, b в нуле, а не от самих инвариантов a, b).

Пример. Обозначим дифференциалы координат λ_i в нуле многообразия орбит B теми же буквами λ_i. Тогда для группы A_3 линеаризованное сворачивание инвариантов описывается (в обозначениях §4.1) "треугольной" матрицей

$$-\begin{Vmatrix} 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_2 & 4\lambda_3 & 0 \\ 4\lambda_3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Треугольная матрица подобного вида описывает линеаризованное сворачивание инвариантов для A_μ (первая строка — $(2\lambda_1, \ldots, (\mu+1)\lambda_\mu)$ и все элементы на линиях, параллельных вспомогательной диагонали, равны между собой).

Этот пример показывает, что, в отличие от полных сворачиваний, линеаризованные могут быть описаны в простых терминах. В действительности, линеаризованное сворачивание инвариантов допускает единообразное описание для всех групп евклидовых отражений, связанных с простыми краевыми особенностями, в терминах локальных градуированных алгебр особенностей.

Эти локальные алгебры имеют вид

$$Q = \mathbf{C}[[x_1, x_2, x_3]] \Big/ \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

(Мы факторизуем по идеалу, который есть касательное пространство к орбите группы диффеоморфизмов, сохраняющих край и действующих на пространстве функций.) Здесь f принадлежит следующему списку *простых краевых особенностей* ростков функций на многообразии $(\mathbf{C}^3, 0)$ с "краем" $x_1 = 0$:

тип	нормальная форма f	r_1	r_2	r_3	h	диаграмма Дынкина
A_μ	$x_1 + x_2^{\mu+1} + x_3^2$	$2\mu+2$	2	$\mu+1$	$2\mu+2$	$\mu \geq 1$
B_μ	$x_1^\mu + x_2^2 + x_3^2$	2	μ	μ	2μ	$\mu \geq 2$
C_μ	$x_1x_2 + x_2^\mu + x_3^2$	$2\mu-2$	2	μ	2μ	$\mu \geq 3$
D_μ	$x_1 + x_2^2x_3 + x_3^{\mu-1}$	$2\mu-2$	$\mu-2$	2	$2\mu-2$	$\mu \geq 4$
E_6	$x_1 + x_2^3 + x_3^4$	12	4	3	12	
E_7	$x_1 + x_2^2 + x_2x_3^3$	18	6	4	18	
E_8	$x_1 + x_2^3 + x_3^5$	30	10	6	30	
F_4	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2$	3	2	3	6	

(двойные рёбра обозначают угол 135°).

Связь между этими функциями и соответствующими группами отражений объяснена ниже. Рассмотрим *версальную деформацию* крае-

вой особенности f функции на многообразии $(\mathbf{C}^3, 0)$ с "краем" $x_1 = 0$:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x), \qquad 1 \le i \le \mu,$$

где g_i — такие мономы, что их образы порождают линейное пространство Q над $\mathbf{C}$.

Пример. В случае F_4:

$$F(x, \lambda) = f + \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 + \lambda_4.$$

Определение. *Бифуркационной диаграммой краевой особенности* называется гиперповерхность в базе $\mathbf{C}^\mu = \{\lambda\}$ версальной деформации, образованная теми значениями параметра λ, при которых гиперповерхность нулевого уровня

$$V_\lambda = \{x \in \mathbf{C}^3 \mid F(x, \lambda) = 0\}$$

либо особа, либо нетрансверсальна "краю" $x_1 = 0$ (рис. 50).

Замечание. Приведённый выше список содержит все простые, устойчивые краевые особенности, с точностью до сохраняющей край стабильной эквивалентности (для того чтобы получить нормальные формы простых, устойчивых краевых особенностей функций бóльшего числа переменных n, нужно добавить квадраты новых переменных; в случае $n = 2$ опускается слагаемое x_3^2 в нормальных формах A_μ, B_μ, C_μ, F_4; в случае $n = 1$ опускается слагаемое $x_2^2 + x_3^2$ в нормальной форме B_μ).

Теорема (см. [3]). *Бифуркационная диаграмма любой краевой особенности $A_\mu, \ldots, F_4$ диффеоморфна дискриминанту соответствующей группы евклидовых отражений.*

Биголоморфный диффеоморфизм базы версальной деформации в многообразие орбит группы отражений, отождествляющий бифуркационную диаграмму с дискриминантом, не единствен. Такие диффеоморфизмы (точнее их ростки в нуле) будут называться *допустимыми отождествлениями* базы с многообразием орбит.

Замечание. Список кристаллографических групп евклидовых отражений (или групп Вейля простых групп Ли) содержит ещё одну группу, G_2 (группа симметрий правильного шестиугольника). Список неприводимых групп евклидовых отражений содержит, помимо групп Вейля, одну бесконечную серию, $I_2(p)$ (группы симметрий правильных p-угольников), и две исключительные группы, H_3 (симметрий икосаэдра)

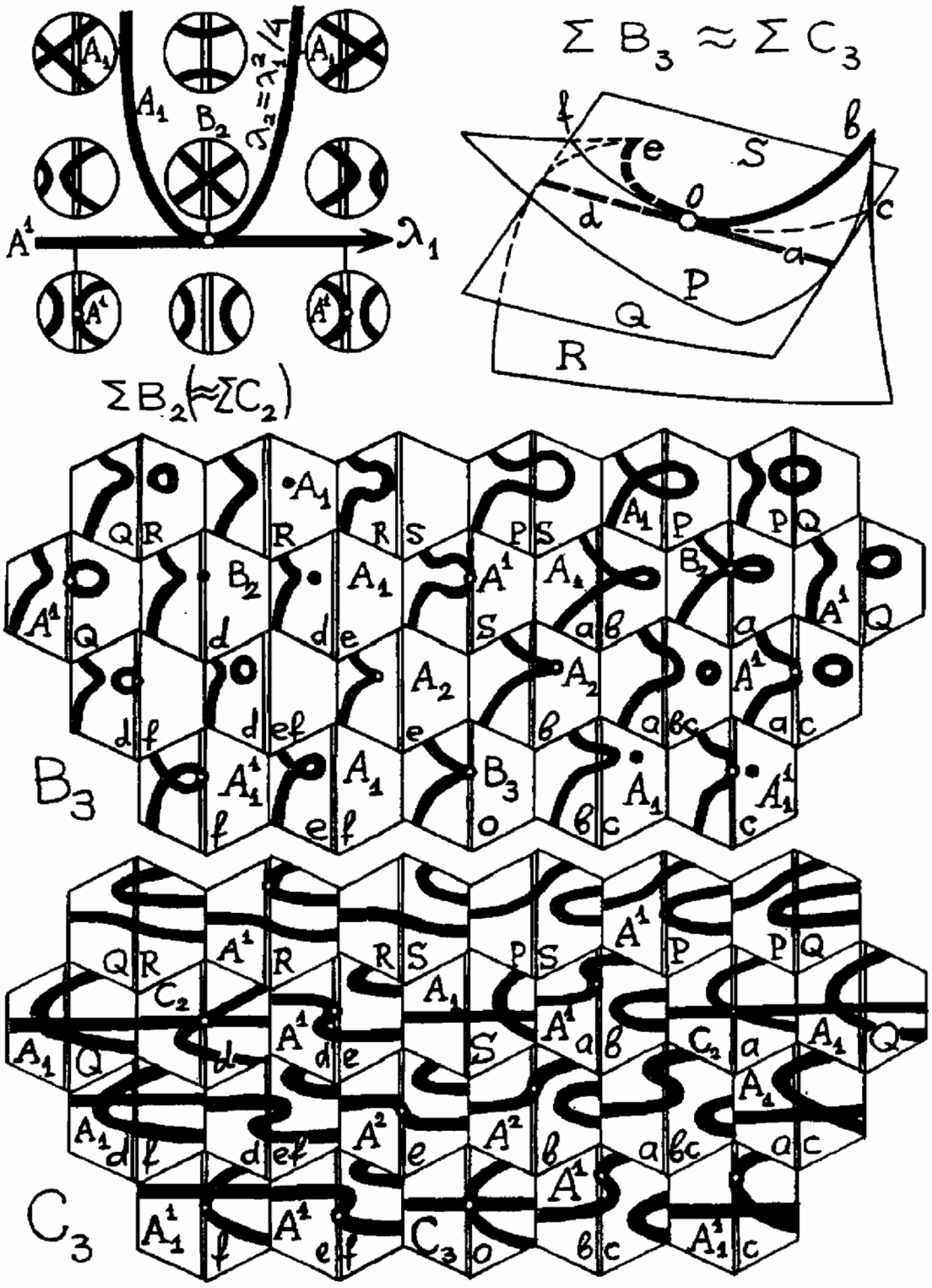


Рис. 50. Бифуркационные диаграммы краевых особенностей B_2, B_3, C_2, C_3

и H_4 (группа симметрий гиперикосаэдра — правильного многогранника, имеющего 120 вершин, в четырёхмерном евклидовом пространстве). Особенности, связанные с этими группами отражений, были открыты О.В.Ляшко, О.П.Щербаком и А.Б.Гивенталем. В главе 7 мы обсудим эти особенности.

Нормальные формы функций f в предыдущем списке являются квазиоднородными многочленами с положительными весами w_i. Это значит, что $f = Df$, где $D = \sum w_i x_i (\partial/\partial x_i)$ есть квазиоднородное векторное поле. Веса $w_i = u_i/h$ обозначены в списке нормальных форм.

Эйлерово дифференцирование[2] D сохраняет идеал в знаменателе формулы, определяющей Q. Следовательно, оно действует на Q как дифференцирование. Будем также обозначать это дифференцирование через D и называть его *дифференцированием Эйлера.*

Теорема ([98], [100]). *Линеаризованное сворачивание инвариантов $T^* \times T^* \to T^*$ эквивалентно(как билинейная операция) отображению $Q \times Q \to Q$, определённому формулами $(p, q) \mapsto S(pq)$, где $S = D + (2/h)E$.*

Отождествление пространств T^* и Q, подразумеваемое в этой теореме, достаточно неестественно. Существует более естественное отождествление касательного пространства многообразия орбит в нуле T и локальной алгебры Q.

В самом деле, рассмотрим допустимое отождествление базы версальной деформации с многообразием орбит (росток в нуле биголоморфного отображения, переводящего росток бифуркационной диаграммы в росток многообразия нерегулярных орбит). Его производная в нуле отождествляет T с касательным пространством к базе версальной деформации, а последнее естественно изоморфно пространству локальной алгебры Q (скорости деформации соответствует её класс в Q).

Таким образом, мы определили *допустимое отождествление* T^* с Q^*. Следующая теорема описывает перенос на Q^* линеаризованного сворачивания инвариантов, но сначала нам потребуется вспомогательная конструкция.

Определение. Элемент l двойственного локальной алгебре пространства Q^* называется *допустимым*, если линейная функция $l : Q \to \mathbf{C}$ не равна нулю на аннуляторе максимального идеала алгебры Q (рис. 51).

[2] *Дифференцированием (коммутативной) алгебры* называется линейное отображение этой алгебры в себя, удовлетворяющее правилу Лейбница $D(ab) = a\,Db + b\,Da$.

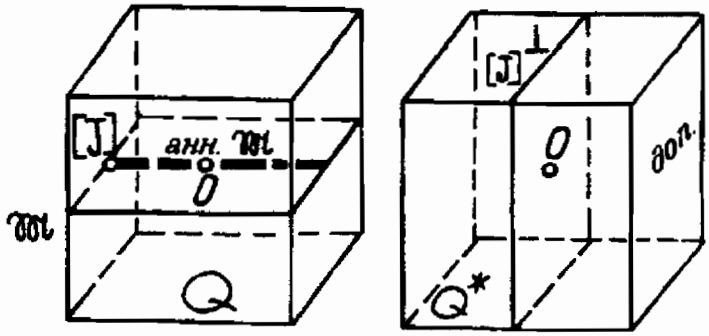


Рис. 51. Максимальный идеал, якобиан и допустимые линейные формы

Замечание. Этот аннулятор одномерен. Он образован классом якобиана функций из знаменателя формулы, определяющей Q, (см. [103] или [28]). Следовательно *недопустимые элементы Q^* образуют гиперплоскость, и типичный элемент допустим.*

Определение. *Билинейной формой $B_l : Q \times Q \to \mathbf{C}$, ассоциированной с допустимым элементом $l \in Q^*$*, называется форма

$$B_l(b, c) = l(bc).$$

Эта билинейная форма невырождена, если элемент l допустим (см. [28]). Обозначим через $N_l : Q \to Q^*$ линейный оператор, определяющий эту форму.

Теорема. *Любое допустимое отождествление сопоставляет линеаризованному сворачиванию инвариантов операцию*

$$\phi_l : Q^* \times Q^* \to Q^*, \quad \phi_l(a, b) = R^* N_l(N_l^{-1}a, N_l^{-1}b),$$

где $R = E - D$ и l — допустимый элемент Q^*.

Любая из операций ϕ_l(с допустимым l) является образом линеаризованного сворачивания инвариантов при подходящем допустимом отождествлении.

Следствие. *Все операции ϕ_l с допустимыми l эквивалентны.*

Замечание. Предыдущие теоремы, открытые в [98] для серий A, B, C, D, были сформулированы в терминах *двойственности соответствующих семейств квадратичных форм.*

Зафиксируем допустимое отождествление касательного пространства T многообразия орбит и линейного пространства локальной алгебры Q. Линеаризованное сворачивание инвариантов для каждого элемента $q \in Q$ определяет симметрическую билинейную форму:

$$\psi_q : Q^* \times Q^* \to \mathbf{C}, \quad \psi_q(a,b) = \phi(a,b)\,|_q\,.$$

Из предыдущих теорем вытекает

Следствие. *Семейства форм $\{B_l\}$ на Q и $\{\psi_q\}$ на Q^* двойственны в том смысле, что для любой невырожденной формы из одного семейства двойственная ей форма принадлежит другому семейству.*

Соотношение между параметрами двойственных форм l и q нелинейно. Оно линейно эквивалентно операции обращения в локальной алгебре Q.

Подобные формулы справедливы и в вещественном случае. Двойственные вещественные формы B_l и ψ_q имеют одинаковые индексы инерции. Но сигнатура формы B_l равна индексу Пуанкаре соответствующей особенности (более подробно см. [98]). Следовательно *индексы Пуанкаре краевых особенностей совпадают с сигнатурами соответствующих форм ψ_q, порождённых линеаризованным сворачиванием инвариантов.* Эти утверждения, обнаруженные экспериментально, привели к открытию двойственности между линеаризованным сворачиванием инвариантов и операцией умножения в локальной алгебре соответствующей особенности, описанной выше.

Теоремы о линеаризованном сворачивании инвариантов могут быть сформулированы в терминах алгебр Ли линейных векторных полей. Полное сворачивание инвариантов определяет векторные поля, касающиеся дискриминантной гиперповерхности (и, следовательно, фронтов соответствующих особенностей). На линеаризованном уровне эта конструкция доставляет линейное семейство линейных векторных полей на касательном пространстве многообразия орбит в нуле. Эти векторные поля параметризованы точками двойственного пространства T^*.

Определение. Линейное поле w_a, *ассоциированное с элементом* $a \in T^*$, определяется условием: производная любой линейной функции b на T вдоль w_a является линеаризованным сворачиванием $\phi(a,b)$. Другими словами, w_a является *линейной частью в нуле векторного поля* V_a, определённого полным сворачиванием инвариантов (§4.1).

Теорема ([98]). *Поля w_a образуют μ-параметрическую алгебру Ли.*

Для любого базиса $(a_1, \ldots, a_\mu)$ пространства T^* векторы w_{a_i} линейно неэависимы в любой точке T, не принадлежащей гиперплоскости, касающейся многообразия нерегулярных орбит (соответствующая группа отражений неприводима).

Уравнение этой исключительной гиперповерхности: $a_\mu = 0$, где a_μ — дифференциал инварианта наивысшей степени.

Замечание. Мы сопоставили любой группе евклидовых отражений в μ-мерном пространстве (например, группе Вейля простой группы Ли ранга μ) алгебру Ли размерности μ. Соответствующая группа Ли есть группа линейных частей диффеоморфизмов, сохраняющих "обобщённый ласточкин хвост". Такие линейные отображения сохраняют касательную гиперплоскость к ласточкину хвосту в его вершине, а также множество касательных пространств к различным стратам естественной стратификации обобщённого ласточкина хвоста (включая линию, соответствующую аннулятору максимального идеала).

Однако, наша группа линейных отображений меньше, чем вся группа линейных отображений, сохраняющих касательные пространства к стратам. Наша группа сохраняет некоторую дополнительную структуру на T, некоторый *призрак* обобщённого ласточкина хвоста, живущий в его касательном пространстве.

Предыдущие теоремы описывают алгебру Ли полей w_a в терминах градуированной локальной алгебры соответствующей особенности. Обозначим через $M_q : Q \to Q$ оператор умножения на элемент $q \in Q$. Для любого дифференцирования $D : Q \to Q$ определим линейный оператор:

$$W_q = M_q R : Q \to Q, \qquad R = E - D.$$

Теорема ([98]). *Для любого дифференцирования D коммутативной алгебры Q, операторы W_q образуют алгебру Ли.*

Если D является эйлеровым дифференцированием локальной алгебры простой особенности, то алгебра Ли $\{W_q\}$ изоморфна алгебре Ли $\{w_a\}$ линеаризаций векторных полей, касающихся дискриминанта.

Соотношение между параметрами q и a соответствующих векторных полей линейно. После допустимого отождествления Q и T, это соотношение даётся формулой $a = N_b(q)$ (где b зависит от выбора отождествления).

Алгебраическая связь между линеаризованным и полным сворачиванием инвариантов до сих пор не совсем ясна. Существует ли формула, выражающая полное сворачивание инвариантов в терминах линеа-

ризованного (подобно формуле для операции в группе Ли в терминах коммутатора алгебры Ли)? Каковы аксиомы для полного и линеаризованного сворачивания инвариантов? Думается, что ответы должны использовать линеаризованное сворачивание инвариантов вместе с его кососимметричным близнецом: симплектической или пуассоновой структурой, описанными ниже (§4.3–4.6). Таким образом, представляется интересным найти некоторый супералгебраический подход, обобщающий симметрический и кососимметрический случаи.

4.3. Отображения периодов

Существует обобщение операций сворачивания инвариантов на случай непростых особенностей. Это обобщение, открытое А.Б.Гивенталем и А.Н.Варченко [104], основано на связях между этими операциями и общей теорией асимптотик интегралов, разработанной А.Н.Варченко [43], [42] (смотри также §2.1 и [44]).

Нам понадобятся некоторые (простые) понятия, связанные с отображением периодов произвольного локально тривиального расслоения. Рассмотрим расслоения гомологий и когомологий слоёв такого расслоения (над одной и той же базой). Эти новые расслоения являются локально тривиальными, и, в отличие от исходного расслоения, канонически локально тривиализованы. В самом деле, любой целочисленный цикл в слое может быть однозначно, на уровне гомологий, перенесён в близлежащий слой. (Эти топологически определённые локальные тривиализации расслоений гомологий и когомологий называются *связностями Гаусса–Манина.*)

Определение. *Отображением периодов* называется сечение ассоциированного расслоения когомологий.

Пример 1. Предположим, что на тотальном пространстве (гладкого) расслоения зафиксирована дифференциальная форма, замкнутая вдоль слоёв. Отображение, сопоставляющее точке базы класс когомологий ограничения этой формы на слой (над этой точкой), является отображением периодов.

Определение. Отображение примера 1 называется *отображением периодов дифференциальной формы.*

Пример 2. Зафиксируем векторное поле на базе. Производная любого гладкого отображения периодов вдоль этого поля является отображением периодов.

Действительно, близлежащие слои расслоения когомологий могут быть отождествлены с помощью топологической тривиализации. После этого отождествления, сечения расслоения когомологий (локально) становятся отображениями в слой и могут быть дифференцируемы как обычные функции.

Пример 3. Рассмотрим частный случай, когда база является комплексным многообразием, и комплексные размерности базы и слоя (комплексного) когомологического расслоения совпадают.

Определение. Отображение периодов называется *невырожденным*, если его производные вдоль линейно независимых векторных полей линейно независимы. Другими словами, соответствующее локальное отображение базы в слой должно быть диффеоморфизмом.

Производная любого отображения периодов определяет линейное отображение касательного пространства базы в слой когомологического расслоения. Невырожденное отображение периодов определяет изоморфизм пространства касательного расслоения базы с когомологическим расслоением.

Двойственный изоморфизм отправляет гомологическое расслоение базы в пространство её кокасательного расслоения. Таким образом, *невырожденное отображение периодов отправляет все структуры, присутствующие на слоях гомологического расслоения, на кокасательные пространства базы.*

Пример 4. Предположим, что слоями исходного расслоения являются чётномерные, ориентированные, гладкие многообразия. Рассмотрим n-мерные гомологическое и когомологическое расслоения, где n равно половине размерности слоя исходного расслоения.

Билинейная форма пересечений, определённая на этом гомологическом расслоении, симметрична, если размерность слоёв кратна 4, и кососимметрична в противном случае. Она не вырождена, если слои замкнуты (являются компактными многообразиями без границы); в противном случае она может иметь ненулевое ядро.

Пример 5. Предположим, что форма пересечений невырождена. В этом случае невырожденное отображение периодов индуцирует на ба-

зе либо симметрическую дифференциальную форму (если размерность слоёв кратна 4), либо внешнюю дифференциальную форму.

Теорема. *Индуцированная форма является либо плоской комплексной псевдоримановой метрикой на базовом пространстве, либо комплексной симплектической структурой (если размерность слоёв равна* $4p+2$*).*

Действительно, индуцированная дифференциальная форма локально индуцируется из формы с постоянными коэффициентами на пространстве гомологий. Следовательно она замкнута в кососимметрическом случае и определяет плоскую метрику в симметрическом.

Гивенталь и Варченко применили эту общую конструкцию к случаю версальной деформации ростка функции $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ в нулевой критической точке. Зафиксируем деформацию

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_\mu g_\mu(x),$$

где мономы g_j образуют базис локальной алгебры $Q = \mathbf{C}[[x]]/(\partial f/\partial x)$, рассматриваемой как линейное пространство над $\mathbf{C}$. Удобно считать, что $g_\mu \equiv 1$. Таким образом, λ_μ является "свободным членом" семейства F.

Зафиксируем достаточно малый шар B вокруг нуля в x-пространстве $\mathbf{C}^n$. Затем зафиксируем достаточно малый шар Λ (зависящий от B) в λ-пространстве $\mathbf{C}^\mu$.

Определение. Точка $\lambda \in \Lambda$ называется *бифуркационной*, если *многообразие уровня*

$$V_\lambda = \{x \in B \mid F(x, \lambda) = 0\}$$

вырождено (рис. 52).

Определение. Множество бифуркационных точек называется *дискриминантом* Σ (особенности f или её версальной деформации F).

Над $\Lambda \setminus \Sigma$ многообразия уровня V_λ образуют локально тривиальное расслоение. Размерность μ базы равна размерности пространства когомологий слоя. Вещественная размерность слоя чётна (она кратна 4, если число n аргументов f нечётно). Чтобы приложить предыдущую теорию, мы должны только найти невырожденное отображение периодов.

Рассмотрим голоморфную дифференциальную $(n-1)$-форму на $B \times \Lambda$. Такая форма ω замкнута вдоль любого слоя V_λ, следовательно

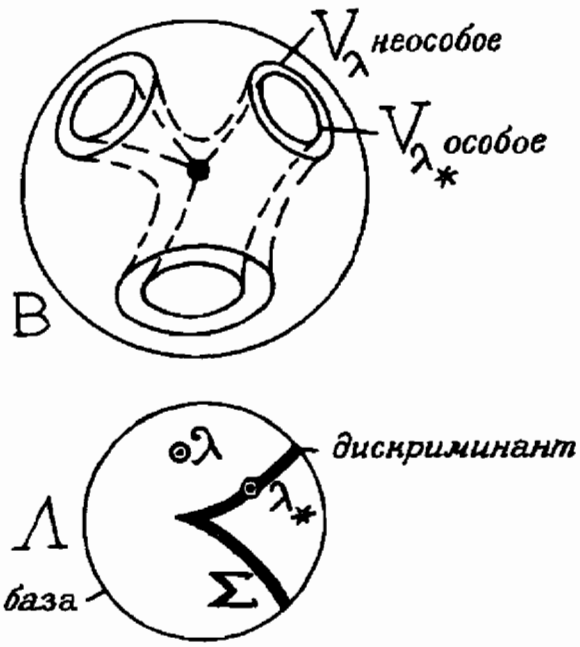


Рис. 52. Многообразия уровня V_λ, база Λ версальной деформации и дискриминант Σ

определяет отображение периодов: точке $\lambda \in B \setminus \Sigma$ оно сопоставляет класс когомологий

$$[\omega]_\lambda \in H^{n-1}(V_\lambda, \mathbf{C})$$

ограничения формы ω на слой V_λ.

Определение. Отображение $\lambda \mapsto [\omega]_\lambda$ называется *отображением периодов формы* ω.

(Конечно, мы можем начать с ростка голоморфной формы. Некоторый представитель этого ростка определяет отображение периодов на некоторой части Λ.)

Пример. Пусть $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ будет функцией Морса. В этом случае кратность μ равна 1, версальная деформация $F = f + \lambda$, слой V_λ гомотопически эквивалентен "исчезающей сфере" S_λ^{n-1}. Сфера S_λ, $\lambda < 0$, является пересечением слоя с вещественным пространством. Радиус этой сферы $r = |\lambda|^{1/2}$ мал, если λ мало.

Интеграл типичной голоморфной $(n-1)$-формы по исчезающей сфере убывает как $|\lambda|^{n/2}$ при $\lambda \to 0$. В самом деле, этот интеграл равен потоку векторного поля, ассоциированного с этой формой, через поверхность сферы. Этот поток равен интегралу дивергенции поля по n-диску радиуса r. Интеграл функции по такому диску равен

$$C_n r^n + C_{n+2} r^{n+2} + \ldots,$$

где первое слагаемое пропорционально объему диска (и значению функции в центре).

Следовательно, *отображение периодов морсовской особенности допускает асимптотическое разложение*

$$[\omega]_\lambda \mid S_\lambda = C\lambda^{n/2} + \dots \text{ при } \mid \lambda \mid \to 0,$$

где $C \neq 0$ для типичной формы ω.

Определение. k-м *ассоциированным отображением периодов* голоморфной формы ω называется k-я производная отображения периодов формы ω вдоль векторного поля $\partial_\mu = \partial/\partial\lambda_\mu$.

Замечание. Векторное поле ∂_μ трансверсально в нуле (и, следовательно, везде) гиперплоскости, касающейся дискриминанта, так как $g_\mu \equiv 1$ согласно нашему выбору версальной деформации.

Пример. Значение k-го ассоциированного отображения периодов типичной формы ω на исчезающем цикле S_λ функции Морса асимптотически равно $c\lambda^{(n/2)-k}$ для нечётного n или для $k \leq n/2$ (в обозначениях предыдущего примера).

Если n чётно и $k > n/2$, то порядок стремления к нулю выше (так как дифференцирование убивает главный член асимптотики).

Возвращаясь к общей версальной деформации произвольной голоморфной функции, рассмотрим k-е ассоциированное отображение периодов типичной формы. Зафиксируем базис пространства целочисленных гомологий слоя, непрерывно зависящий от точки базы (в некоторой окрестности выбранной точки базы) — "постоянный базис" канонической локальной тривиализации. Рассмотрим определитель матрицы производных вдоль базисных векторных полей $\partial/\partial\lambda_i$ компонент (в этом базисе) отображения периодов.

Пример. Для функции Морса этот определитель пропорционален $\lambda^{(n/2)-k-1}$ при нечётном n или при $k < n/2$.

Этот определитель (для морсовской и, разумеется, для любой функции) определён с точностью до знака (так как различные базисы пространства гомологий получаются друг из друга преобразованиями с определителем ± 1). Квадрат определителя есть голоморфная функция на $\Lambda \setminus \Sigma$ (так как интеграл голоморфной формы по циклу является голоморфной функцией параметров). *Эта функция мероморфна на* Λ.

Для доказательства достаточно рассмотреть типичные (неособые) точки дискриминанта. В такой точке вырождение слоя V_λ имеет морсовский тип, и, следовательно, ветвление на цикле описывается формулами Пикара–Лефшеца.

Мы можем пренебречь более сложными особыми точками дискриминанта, так как они образуют множество комплексной коразмерности 2 в Λ. Следовательно, согласно теореме Хартогса, любая функция, мероморфная вне этого множества, мероморфна также и в точках этого множества.

Лемма. *Порядок стремления к нулю определителя*[3] *k-го ассоциированного отображения периодов типичной голоморфной формы на кривой, трансверсальной дискриминанту в нуле (например, вдоль оси λ_μ), не меньше чем $\mu(n-2k-2)/2$.*

Для морсовской точки вычисления были проведены в предыдущих примерах. Из этого следует, что в типичной точке дискриминанта порядок стремления к нулю определителя отображения периодов типичной голоморфной формы равен $(n-2)/2$. Типичная интегральная линия поля направлений $\partial/\partial\lambda_\mu$ пересекает дискриминант в μ точках (см., например, [28]; рис. 53). Следовательно порядок стремления к нулю (при движении к вершине дискриминанта) ограничения на трансверсальную кривую определителя отображения периодов равен $\mu(n-2)/2$. Каждое дифференцирование элементов матрицы порядка μ снижает порядок стремления определителя к нулю на (как минимум) μ. После k дифференцирований получим утверждение леммы.

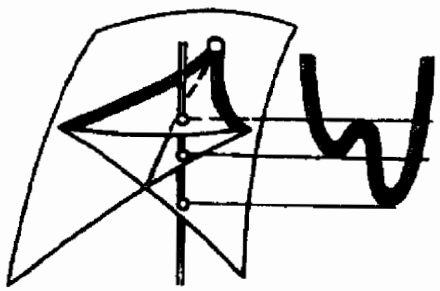


Рис. 53. μ точек пересечения типичной кривой и дискриминантной гиперповерхности в некоторой окрестности вершины

Определение. k-е ассоциированное отображение голоморфной формы *инфинитезимально невырождено*, если порядок стремления к нулю (при стремлении к вершине дискриминанта) ограничения его определителя на λ_μ-ось имеет наименьшее возможное значение (равное $\mu(n-2k-2)/2$).

[3] равный половине порядка убывания к нулю квадрата определителя.

Пример. k-е ассоциированное отображение периодов типичной голоморфной формы инфинитезимально невырождено для функции Морса от n переменных, при условии нечётности n; оно инфинитезимально вырождено, если n чётно и $k \geq n/2$.

Главными результатами статьи Гивенталя и Варченко являются следующие 11 теорем.

Теорема 1. *Если k-е ассоциированное отображение периодов инфинитезимально невырождено, то оно невырождено.*

Теорема 2. *Отображение периодов типичной формы инфинитезимально невырождено. Если форма пересечения невырождена, то k-е ассоциированное отображение периодов типичной формы инфинитезимально невырождено для любого k.*

"Нетипичные формы" этой теоремы принадлежат собственному голоморфному подмножеству пространства струй достаточно высокого порядка в нуле.

Определение. *Изотопией* называется гладкий путь в группе (вещественных) диффеоморфизмов, начинающийся в единице этой группы.

Изотопия базового пространства допускает единственное поднятие до послойно линейной изотопии когомологического расслоения с комплексными коэффициентами (сохраняющее когомологии с целочисленными коэффициентами): целочисленный цикл над точкой базы непрерывно переносится в целочисленные циклы над точками пути на базе, индуцированного данной изотопией.

Определение. *Допустимым отображением* расслоения когомологий в себя называется конечная точка поднятой изотопии, индуцированной изотопией базы.

Определение. Два отображения периодов называются *эквивалентными*, если образ первого из них преобразуется в образ второго при помощи допустимого отображения когомологического расслоения.

В рассматриваемом нами специальном случае расслоения над $\Lambda \setminus \Sigma$ (где Σ есть дискриминант версальной деформации с базой Λ) мы будем рассматривать только очень узкий подкласс класса всех изотопий базы: а именно, пути в группе голоморфных диффеоморфизмов Λ, сохраняющих Σ. В последующем, *эквивалентность отображений периодов индуцируется этими специальными изотопиями.*

Теорема 3. *Если k-е ассоциированное отображение периодов голоморфной формы инфинитезимально невырождено, то оно устойчиво (то есть локально (в точках, близких к вершине) оно эквивалентно k-му ассоциированному отображению периодов любой близкой формы).*

Теорема 4. *Все инфинитезимально невырожденные k-е ассоциированные отображения периодов голоморфных форм эквивалентны, при условии квазиоднородности исходной функции f.*

4.4. Формы пересечения отображений периодов

Определение. *Формой пересечения невырожденного отображения периодов* называется поле 2-форм на слоях кокасательного расслоения $T^*(\Lambda \setminus \Sigma)$, индуцированное отображением периодов из формы пересечения на средних гомологиях (то есть на гомологиях половинной размерности) множеств уровня голоморфных функций n переменных.

Теорема 5. *Форма пересечения k-го ассоциированного инфинитезимально невырожденного отображения периодов голоморфна вне дискриминанта и допускает голоморфное продолжение на дискриминант, если $n \leq 2k-2$.*

Теорема 6. *Форма пересечения из теоремы 5 устойчива (две таких формы, определённые k-ми ассоциированными отображениями периодов близких голоморфных форм, преобразуются друг в друга биголоморфным отображением пары (Λ, Σ) на себя).*

Теорема 7. *Любые два ростка форм пересечения, определённых инфинитезимально устойчивыми k-ми ассоциированными отображениями периодов голоморфных форм, эквивалентны, при условии квазиоднородности исходной функции f.*

Эти формы пересечения обобщают сворачивание инвариантов, определённое для простых особенностей в §4.1. В самом деле, зафиксируем инфинитезимально невырожденное k-е ассоциированное отображение периодов, где $2k+2 \geq n$ (наиболее важен случай $n = 2k+1$). Сопоставим паре функций, голоморфных в нуле базы Λ версальной деформации, новую функцию, значения которой в точках вне дискриминанта равны значениям формы пересечения отображения периодов на

дифференциалах функций пары в этих точках. Эта новая функция голоморфно продолжается на дискриминант (по теореме 5). Эта функция билинейно зависит от двух первоначальных функций. Эта билинейная форма симметрична для нечётных n и кососимметрична для чётных.

Для того чтобы получить сворачивание инвариантов, применим описанную выше конструкцию к простым особенностям (A_μ, D_μ, E_μ) функций $n = 2k+1$ переменных.

Предположим, что форма пересечения невырождена. Оператор, обратный к оператору этой формы, определяет *обратную форму* на двойственном пространстве. В этом случае невырожденное отображение периодов индуцирует 2-форму на *касательном* пространстве базы (в дополнение к форме пересечений, определённой на кокасательном пространстве).

Определение. *Обратной формой пересечений* невырожденного отображения периодов называется образ обратной формы пересечений на пространстве когомологий под действием изоморфизма между когомологическим и касательным расслоениями, определённым отображением периодов.

Теорема 8. *Обратная форма пересечений инфинитезимально невырожденного k-го ассоциированного отображения периодов голоморфной формы допускает голоморфное продолжение на дискриминант, определяя симплектическую форму на базе версальной деформации, при условии $n = 2k+1$.*

Ограничения симплектической структуры из теоремы 8 на различные страты дискриминанта "запоминают" типы критических точек, определяющих эти страты.

Пример. $(\mu/2)A_1$-страт является лагранжевым.

Действительно, соответствующие $\mu/2$ циклов исчезают на одном и том же уровне и, следовательно, не пересекаются.

Замечание. Таким образом мы определили естественную симплектическую структуру на базе Λ версальной деформации

$$F(x,\lambda) = x^{2r+1} + \lambda_1 x^{2r-1} + \ldots + \lambda_{2r}$$

типа A_{2r} (эта структура является обратной формой пересечений для $F(x,\lambda) + y^2$).

Ранее мы определили естественную симплектическую структуру на пространстве многочленов в §1.1. Эта структура индуцирована

SL_2-инвариантной симплектической формой на пространстве бинарных форм степени $2r+3$.

Две естественные симплектические структуры, определённые таким образом, на этом пространстве многочленов *различны*.

Действительно, для первой структуры (определённой отображением периодов) множество многочленов, имеющих r двойных корней,

$$\{(x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r)^2(x - 2a_1)\}, \tag{1}$$

является лагранжевым подмногообразием, в то время как для второй структуры (определённой SL_2) оно не лагранжево.

С другой стороны, для второй структуры (определённой с помощью SL_2) множество многочленов, имеющих корень кратности $r+1$,

$$\{(x^r + b_1x^{r-1} + \ldots + b_r)(x - c)^{r+1}\}, \quad b_1 = c(r+1), \tag{2}$$

является лагранжевым подмногообразием, в то время как для первой структуры оно не лагранжево.

Обе структуры полезны, но для разных целей.

Особые лагранжевы многообразия (1) и (2) диффеоморфны (они называются "раскрытыми" ласточкиными хвостами размерности r, так как дифференцирование многочленов из (2) отображает это многообразие в обычный r-мерный ласточкин хвост в пространстве многочленов степени $2r$).

Раскрытый ласточкин хвост является нормализацией обычного ласточкина хвоста: проекция, определённая выше, однозначна вне прообраза линии самопересечения

$$\{(2r+1)(x^2 - c^2)^r\}$$

обычного ласточкина хвоста; эта линия накрывается дважды. Вне её прообраза проекция является локальным диффеоморфизмом, следовательно, раскрытый ласточкин хвост имеет те же особенности, что и обычный ласточкин хвост, единственное исключение — отсутствие линии самопересечения (см. рис. 10). Отсюда следует, что раскрытый ласточкин хвост гомеоморфен евклидову пространству.

Упражнение. Докажите, что дополнение вещественного раскрытого ласточкина хвоста в пространстве вещественных полиномов диффеоморфно $\mathbf{R}^{2r} \setminus \mathbf{R}^r$.

Указание. Смотри [92].

Задача. Докажите, что лагранжевы многообразия (1) и (2) симплектоморфны (существует симплектоморфизм, переводящий первую симплектическую структуру во вторую и первое многообразие во второе).

Указание. Многочлену

$$P(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n, \qquad n = 2g + 1,$$

сопоставьте многочлен

$$Q(x) = \mathrm{RES}_{t=\infty}[(t-x)^{2g-1} P(t)]^{1/2}\, dt.$$

Отображение $P \mapsto Q$ есть квазиоднородный диффеоморфизм на пространство многочленов степени n с фиксированным (ненулевым) старшим коэффициентом. Подпространство многочленов с нулевым коэффициентом при члене степени $n-1$ (т. е. $\lambda_1 = 0$) отображается в пространство многочленов с нулевым коэффициентом при члене степени $n-1$. Многообразие (1) отображается в многообразие многочленов, пропорциональных многочленам из (2). Таким образом строится диффеоморфизм между многообразиями (1) и (2). Локальная эквивалентность симплектических структур, в которых они лагранжевы, следует, по существу, из теоремы Гивенталя (§1.2), точнее из её обобщения на неприводимые квазиоднородные особые многообразия (более подробно см. [8]).

Замечание. Эквивалентность многообразий (1) и (2) близко связана с диффеоморфностью каустики и страта Максвелла семейства функций $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$ (см. рис. 28): обе поверхности — ласточкины хвосты.

В случае, когда форма пересечений на пространстве гомологий вырождена, индуцированная структура на базе версальной деформации не является симплектической. Действительно, невырожденное отображение периодов определяет в этом случае вырожденные 2-формы на кокасательных пространствах базы (вне дискриминанта).

Если (комплексная) размерность слоя нечётна, то эти 2-формы кососимметричны. Рассмотрим этот случай более подробно.

4.5. Пуассоновы структуры

Пусть f и g — функции на многообразии, кокасасательное расслоение которого снабжено полем кососимметричных форм. Беря значения

формы на дифференциалах этих функций, получим новую функцию. Таким образом мы определили бинарную операцию на пространстве (C^∞) функций на многообразии. Эта операция билинейна и кососимметрична. Зафиксировав одну из функций, получим операцию дифференцирования второго аргумента вдоль некоторого векторного поля

$$\{f,g\} = \sum c_{i,j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Определение. Поле кососимметричных билинейных форм на кокасательных пространствах многообразия называется *пуассоновой структурой*, если индуцированная операция на функциях (называемая *скобкой Пуассона* и обозначаемая $\{.,.\}$) удовлетворяет *тождеству Якоби*

$$\{\{a,b\},c\} + \{\{b,c\},a\} + \{\{c,a\},b\} = 0.$$

Теорема 8′. *Невырожденное отображение периодов определяет пуассонову структуру на базе версальной деформации особенности (даже если форма пересечений вырождена).*

Тождество Якоби следует из того, что наша форма индуцирована из формы пересечений, имеющей "постоянные коэффициенты".

Для доказательства других свойств отображений периодов нам потребуется более подробная информация о пуассоновых структурах.

Пример 1. Простейший пример пуассоновой структуры доставляется симплектической структурой, для которой скобка Пуассона двух функций определена как производная одной функции вдоль гамильтонова векторного поля, определённого другой функцией.

Пример 2. Другой важный пример пуассоновой структуры был рассмотрен Якоби и Ли (эта структура обычно называется структурой Березина–Кириллова–Константа, так как эти учёные обнаружили её важные применения).

В этом случае пуассоново многообразие есть двойственное линейное пространство алгебры Ли. Для определения скобки Пуассона любых двух функций рассмотрим сначала линейные функции. Эти функции являются элементами алгебры Ли. Их скобка Пуассона, по определению, есть их коммутатор в алгебре Ли. Скобки Пуассона нелинейных функций теперь автоматически определены, так как эта операция должна удовлетворять правилу Лейбница:

$$\{f,g\}_{\text{Пуассон}} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}[x_i,x_j]_{\text{Ли}}.$$

[Мы можем повторить эту конструкцию: начиная с алгебры Ли мы строим (пуассонову) структуру на пространстве функций на двойственном алгебре Ли пространстве. Это пространство функций также является (новой) алгеброй Ли. Следовательно, эта конструкция (применённая ещё раз) снабжает пуассоновой структурой двойственное этой (новой) алгебре Ли пространство, являющееся пространством распределений на исходном пуассоновом многообразии. Таким образом получаются естественные пуассоновы структуры уравнений Власова в математической физике.]

Пример 3. Рассмотрим систему гамильтоновых дифференциальных уравнений. Первые интегралы этой системы могут рассматриваться как функции на "пространстве орбит" системы.

Естественная пуассонова структура на этом пространстве была введена Якоби (см. [90], гл. 1). В самом деле, (симплектическая) скобка Пуассона двух первых интегралов есть снова первый интеграл. Следовательно, исходная симплектическая структура на фазовом пространстве определяет пуассонову структуру на пространстве орбит. По выражению Якоби, мы выбираем первые интегралы системы и каждый раз добавляем их скобки Пуассона к предыдущим интегралам. На некотором шаге мы получим функционально зависимые интегралы; затем мы выбираем максимальное множество функционально независимых интегралов (координаты на пространстве орбит). Все остальные интегралы (и, следовательно, их скобки Пуассона) являются функциями выбранных. В частности, Якоби рассмотрел конструкцию примера 2 для группы вращений и группы движений евклидова пространства.

Если пространство орбит гладкое, то конструкция Якоби совпадает с современным определением пуассоновой структуры. Однако, эта конструкция имеет то преимущество, что она работает также в случае особого пространства орбит: в действительности Якоби ввёл *особые пуассоновы многообразия*, а не элементарные гладкие пуассоновы многообразия своих эпигонов.

Функция на пуассоновом многообразии определяет векторное поле (такое, что скобка Пуассона этой функции с произвольной функцией является производной второй функции вдоль этого векторного поля). Это поле называется *гамильтоновым векторным полем* (и начальная функция называется *функцией Гамильтона* этого поля). Две точки на пуассоновом многообразии называются *достижимыми* (друг из друга), если существует (зависящая от времени) функция Гамильтона, траектория гамильтонова поля которой соединяет эти точки.

Достижимость является отношением эквивалентности. Точки, достижимые из данной точки, образуют класс эквивалентности, называемый *листом* пуассоновой структуры. Листы являются гладкими многообразиями. Таким образом, пуассонова структура разлагает многообразие на слои, и гамильтоновы поля касаются этих листов. В общем случае размерности различных листов не равны друг другу.

Пример. Листами естественной пуассоновой структуры на двойственном пространстве алгебры Ли $so(3)$,

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y,$$

являются 2-сферы $x^2 + y^2 + z^2 = C$ и точка $(0, 0, 0)$.

Листы естественной пуассоновой структуры двойственного алгебре Ли пространства являются орбитами коприсоединённого представления соответствующей группы Ли (рис. 54).

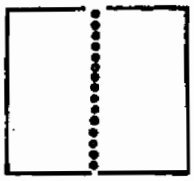


Рис. 54. Пуассоновы листы в двойственном пространстве алгебры Ли группы аффинных преобразований прямой

Размерности листов пуассонова многообразия чётны. В самом деле, каждый лист имеет естественную симплектическую структуру (скобка Пуассона которой совпадает с ограничением исходной скобки на этот лист).

Таким образом, пуассоново многообразие есть набор симплектических многообразий разных размерностей, чьи симплектические структуры таковы, что получающаяся полная скобка Пуассона является гладкой.

Пример. Устойчивое отображение периодов особенности A_3, $f = x^4 + y^2$, определяет на базе версальной деформации (рис. 55)

$$F = x^4 + ax^2 + bx + c + y^2 \quad (\omega = y\,dx)$$

пуассонову структуру, голоморфно продолжаемую на дискриминант (то есть на ласточкин хвост в (a, b, c)-пространстве).

Листами этой пуассоновой структуры являются вертикальные плоскости $b = \text{const}$, и структура может быть приведена к виду

$$\{a, b\} = \{b, c\} = 0, \quad \{a, c\} = 1$$

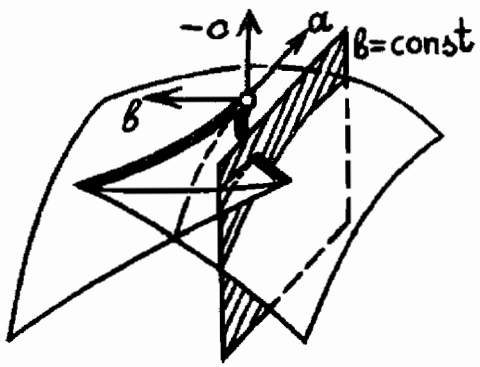


Рис. 55. Пуассонова структура отображения периодов особенности A_3

диффеоморфизмом, сохраняющим ласточкин хвост. Симплектические структуры на слоях $b = \text{const}$ равны $da \wedge dc$. Рассмотрим любую пуассонову структуру на (a, b, c)-пространстве, содержащем ласточкин хвост. Предположим, что лист, содержащий вершину ласточкина хвоста, трансверсален касательной плоскости ласточкина хвоста ($dc = 0$) и содержит линию самопересечения.

Упражнение. Докажите, что *любая пуассонова структура с этими свойствами может быть приведена к вышеприведённой нормальной форме локальным диффеоморфизмом, сохраняющим ласточкин хвост.*

Пуассоновы структуры на базах версальных деформаций, определённые типичными отображениями периодов, не являются типичными по отношению к соответствующим бифуркационным диаграммам; их ограничения на различные страты бифуркационных диаграмм или на касательные пространства к этим диаграммам в точках стратов меньших размерностей сохраняют некоторую информацию о типах вырождений на этих стратах соответствующих многообразий уровня V_λ.

Лагранжева природа раскрытых ласточкиных хвостов и тот факт, что линия самопересечения обычного ласточкина хвоста принадлежит слою пуассоновой структуры, определённой отображением периодов, являются проявлениями этого общего феномена.

Для ласточкиных хвостов бóльшей размерности ограничения, накладываемые на пуассоновы (или симплектические) структуры, реализуемые отображениями периодов (типичных форм), не перечислены.

4.6. Главные отображения периодов

Рассмотрим случай, когда слои имеют чётную (комплексную) размерность. В этом случае форма пересечения *симметрична*.

Определение. *Главными отображениями периодов* функции $n = 2k + 1$ переменных называются инфинитезимально невырожденные k-е ассоциированные отображения периодов голоморфных форм.

[Выбор k обоснован поведением отображения Виета на зеркалах простой особенности. Для функции Морса отображение периодов асимптотически равно $a\lambda^{n/2} + \ldots$. Следовательно, k-е ассоциированное отображение ведёт себя подобно $b\lambda^{(n/2)-k}$. Для $n = 2k + 1$ первый член этой асимптотики равен $b\lambda^{1/2}$. Таким образом, при этом выборе k, k-е ассоциированное отображение периодов функции Морса имеет в $\lambda = 0$ простейшее ветвление второго порядка (как у функции $\sqrt{\lambda}$). Этот пример показывает, что для любой функции n переменных k-е ассоциированное отображение периодов (с определённым выше k) имеет ту же особенность, что и обратное отображение Виета в типичных точках дискриминанта (многообразия нерегулярных орбит) группы отражений.]

Теорема 9. *Если форма пересечений невырождена, то изоморфизм* $T^*(\Lambda \setminus \Sigma) \to T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$, *определённый любым главным отображением периодов, изоморфно отображает модуль ростков голоморфных дифференциальных* 1*-форм на* Λ *на модуль ростков в нуле голоморфных векторных полей на* Λ, *касающихся* Σ.

Эта теорема является прямым обобщением конструкции полей, касающихся фронта, основанной на сворачивании инвариантов группы евклидовых отражений. В общем случае евклидова метрика заменена формой пересечений главного отображения периодов.

Рассмотрим главное отображение периодов для одной из простых особенностей A_μ, D_μ, E_μ. В этом случае форма пересечений является определённой. Группа монодромии (образ представления фундаментальной группы базы $\Lambda \setminus \Sigma$ в пространстве когомологий $H^{n-1}(V_\lambda)$ слоя) является группой евклидовых отражений.

Отображение периодов сопоставляет точке базы элемент пространства когомологий слоя над этой точкой; элемент определён с точностью до действия группы монодромии. В случае простой особенности мы получим отображение многообразия $\Lambda \setminus \Sigma$ (дополнения к бифуркационному множеству в базе версальной деформации) в многообразие орбит соответствующей группы отражений.

Теорема 10. *Главное отображение периодов для простой особенности может быть продолжено до изоморфизма, отправляющего базу* Λ *в пространство орбит соответствующей группы отражений, и*

бифуркационную диаграмму Σ в дискриминант этой группы отражений (многообразие нерегулярных орбит). Этот изоморфизм отправляет форму пересечений отображения периодов в форму, определяющую сворачивание инвариантов группы отражений.

Эта теорема, следующая из результатов Э.Лойенги [105], показывает, что главное отображение периодов обобщает сворачивание инвариантов групп отражений.

Рассмотрим линеаризованное сворачивание инвариантов. Пытаясь обобщить его, мы столкнулись со следующей трудностью: для непростых особенностей, в отличие от простых, сворачивание двух функций, нулевых в нуле, не обязательно равно нулю в нуле. В этом случае линейная часть сворачивания в нуле не определена линейными частями функций.

Эта трудность не возникает в случае *квазиоднородных* (возможно даже непростых) функций нечётного числа переменных, имеющих невырожденную форму пересечений. Действительно, по теореме 9, голоморфное векторное поле ∇a, соответствующее дифференциалу функции a, касается бифуркационной диаграммы Σ (здесь используется невырожденность формы пересечений). По теореме В.М.Закалюкина [95], голоморфное векторное поле, касающееся бифуркационной диаграммы нулей *квазиоднородной* функции, имеет особую точку в нуле базы Λ. Обозначим значение формы пересечений на da, db через $< \nabla a, \nabla b >$. Тогда функция

$$< \nabla(ab), \nabla c >= a < \nabla b, \nabla c > + b < \nabla a, \nabla c >= a(\nabla b \mid c) + b(\nabla a \mid c),$$

где функции a и b равны нулю в нуле Λ, имеет в нуле нуль (как минимум) второго порядка, так как поля ∇a и ∇b имеют в 0 особую точку. Следовательно, линейная часть $< \nabla u, \nabla v >$ в нуле не зависит от членов порядка выше первого в рядах Тейлора функций u и v в нуле.

Таким образом, *главное отображение периодов квазиоднородной функции, имеющей невырожденную форму пересечений, определяет линеаризованную операцию сворачивания* $C : T_0^*\Lambda \times T_0^*\Lambda \to T_0^*\Lambda$.

Касательное пространство $T_0\Lambda$ базы версальной деформации может быть канонически отождествлено с пространством локальной алгебры Q (скорости деформации сопоставляем его класс в пространстве локальной алгебры). Следовательно $T_0^*\Lambda$ канонически отождествляется с Q^*. То есть, линеаризованное сворачивание C отождествляется с некоторой операцией $c : Q^* \times Q^* \to Q^*$. Эта операция зависит от голоморфной формы, отображение периодов которой определяет C. Фор-

мула для этой операции на Q^* была найдена Гивенталем и Варченко [104]:

Теорема 11. *Операция c, построенная по любому главному отображению периодов квазиоднородной функции, совпадает с одной из операций ϕ_l, построенных в §4.2 по локальной алгебре Q этой функции. Каждая операция ϕ_l, с допустимым l, является операцией c для подходящего главного отображения периодов.*

Насколько мне известно, для вещественных непростых функций соотношение между сигнатурами форм ϕ_l, определёнными "линеаризованным сворачиванием", и сигнатурами форм B_l Левина–Ейзенбада (см. §4.2) до сих пор не исследовано.

Обобщения предыдущих теорий на неквазиоднородный случай и изучение образов многозначных отображений периодов в случае непростых особенностей существуют пока что только в зачаточной форме (возможно, такой образ должен рассматриваться в обобщённой верхней полуплоскости Зигеля, определённой как пространство смешанных структур Ходжа с данными дискретными инвариантами).

5 Лагранжева и лежандрова топология

Теории лагранжевых и лежандровых особенностей тесно связаны с глобальными топологическими проблемами, касающимися вопросов сосуществования различных особенностей и их связи с топологией многообразия, на котором они лежат.

Простейшим примером является теория Морса, связывающая критические точки функций на многообразии с топологией этого многообразия. Лагранжевы и лежандровы многообразия в некотором смысле являются обобщениями функций (а именно "многозначных" функций). Таким образом, лагранжева и лежандрова топология является, в некотором смысле, обобщением теории Морса на многозначные функции. В этой главе мы опишем лагранжевы и лежандровы кобордизмы (проявляющиеся в геометрической оптике как соотношения между волновым полем в области и его следом на границе этой области). Инвариантами этих кобордизмов являются лагранжевы и лежандровы характеристические числа, определённые соответствующими характеристическими классами когомологий.

Эти характеристические классы двойственны подмногообразиям, определённым стратами естественной стратификации пространства функций. В определённом смысле они также могут рассматриваться как определяющие когомологии "нелинейного грассманова пространства" всех лагранжевых (лежандровых) многообразий.

Стратификация пространства функций даёт возможность определить комплексы, для которых клетки различных размерностей являются типами особенностей соответствующих коразмерностей. Гомологии этих комплексов порождают лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Однако, эти комплексы (и спектральные последовательности, ассоциированные с мультиособенностями) сами по себе важнее, чем их гомологии: они содержат, в концентрированной форме, обширную информацию, касающуюся примыканий друг к другу различных типов особенностей.

Топологические проблемы, связанные с естественными стратификациями пространств функций и отображений, очень трудны. В этой главе мы представим несколько конкретных результатов (как вещественных, так и комплексных). Проблемы, касающиеся топологических свойств типичных гладких, лагранжевых, лежандровых или гауссовых отображений, далеки от разрешения даже в размерности 2. Теорема о

мула для этой операции на Q^* была найдена Гивенталем и Варченко [104]:

Теорема 11. *Операция c, построенная по любому главному отображению периодов квазиоднородной функции, совпадает с одной из операций ϕ_l, построенных в §4.2 по локальной алгебре Q этой функции. Каждая операция ϕ_l, с допустимым l, является операцией c для подходящего главного отображения периодов.*

Насколько мне известно, для вещественных непростых функций соотношение между сигнатурами форм ϕ_l, определёнными "линеариэованным сворачиванием", и сигнатурами форм B_l Левина–Ейэенбада (см. §4.2) до сих пор не исследовано.

Обобщения предыдущих теорий на неквазиоднородный случай и изучение образов многозначных отображений периодов в случае непростых особенностей существуют пока что только в зачаточной форме (возможно, такой образ должен рассматриваться в обобщённой верхней полуплоскости Зигеля, определённой как пространство смешанных структур Ходжа с данными дискретными инвариантами).

5 Лагранжева и лежандрова топология

Теории лагранжевых и лежандровых особенностей тесно связаны с глобальными топологическими проблемами, касающимися вопросов сосуществования различных особенностей и их связи с топологией многообразия, на котором они лежат.

Простейшим примером является теория Морса, связывающая критические точки функций на многообразии с топологией этого многообразия. Лагранжевы и лежандровы многообразия в некотором смысле являются обобщениями функций (а именно "многозначных" функций). Таким образом, лагранжева и лежандрова топология является, в некотором смысле, обобщением теории Морса на многоэначные функции. В этой главе мы опишем лагранжевы и лежандровы кобордизмы (проявляющиеся в геометрической оптике как соотношения между волновым полем в области и его следом на границе этой области). Инвариантами этих кобордизмов являются лагранжевы и лежандровы характеристические числа, определённые соответствующими характеристическими классами когомологий.

Эти характеристические классы двойственны подмногообразиям, определённым стратами естественной стратификации пространства функций. В определённом смысле они также могут рассматриваться как определяющие когомологии "нелинейного грассманова пространства" всех лагранжевых (лежандровых) многообразий.

Стратификация пространства функций даёт возможность определить комплексы, для которых клетки различных размерностей являются типами особенностей соответствующих коразмерностей. Гомологии этих комплексов порождают лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Однако, эти комплексы (и спектральные последовательности, ассоциированные с мультиособенностями) сами по себе важнее, чем их гомологии: они содержат, в концентрированной форме, обширную информацию, касающуюся примыканий друг к другу различных типов особенностей.

Топологические проблемы, связанные с естественными стратификациями пространств функций и отображений, очень трудны. В этой главе мы представим несколько конкретных результатов (как вещественных, так и комплексных). Проблемы, касающиеся топологических свойств типичных гладких, лагранжевых, лежандровых или гауссовых отображений, далеки от разрешения даже в размерности 2. Теорема о

4-х вершинах, теорема о 4-х омбилических точках[1)] и обобщенная невыпуклая задача Минковского являются одними из естественных кандидатов на исследование в рамках симплектической или контактной топологии.

5.1. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы

Простейшим примером лежандрова кобордизма является след, оставляемый на поверхности Земли движущимся в воздухе волновым фронтом. След в один момент времени может топологически отличаться от следа в другой момент времени, но любые два таких следа кобордантны друг другу.

Отношение кобордизма налагает определённые ограничения на особенности, имеющиеся в различные моменты времени. Например, чётности чисел точек возврата кобордантных фронтов должны быть равными.

Определение лагранжева кобордизма опирается на понятие лагранжева края. Рассмотрим лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения многообразия с краем. Физически лагранжево подмногообразие описывает коротковолновую асимптотику волнового поля. Волновое поле в области индуцирует волновое поле на краю этой области. Его асимптотика определяет лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения края. Это лагранжево подмногообразие называется лагранжевым краем исходного (лагранжева) подмногообразия. Размерность лагранжева края на единицу меньше размерности исходного подмногообразия, и оно вложено в симплектическое пространство, размерность которого на 2 меньше размерности исходного симплектического пространства.

Другими словами, вложение $\partial V \hookrightarrow V$ индуцирует проекцию $\partial(T^*V) \twoheadrightarrow T^*(\partial V)$ из края пространства кокасательного расслоения в пространство кокасательного расслоения края (эта проекция отправляет 1-форму в точке края в ограничение этой формы на край).

Рассмотрим лагранжево подмногообразие пространства T^*V (быть

[1)] Примечание: Недавно М.Э.Казарян [191] построил характеристический класс специального оснащенного лагранжева грассманиана, отвечающий за особенности типа D_4, то есть за омбилические точки.

может иммерсированное, то есть имеющее самопересечения). Предположим, что оно трансверсально краю фазового пространства. Тогда оно пересекает край вдоль некоторого гладкого (иммерсированного) подмногообразия. Проектируя это пересечение в $T^*(\partial V)$, получим иммерсированное лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения края. Это подмногообразие называется *лагранжевым краем* исходного лагранжева подмногообразия.

Задача. Докажите, что образ этой проекции на самом деле иммерсирован.

Лежандров край определяется аналогичной конструкцией. Рассмотрим, например, (иммерсированное) лежандрово подмногообразие пространства 1-струй функций на многообразии M с краем ∂M.

Край пространства 1-струй, $\partial J^1(M, \mathbf{R})$, расслоен над многообразием 1-струй функций на краю (отображение $\partial J^1(M, \mathbf{R}) \twoheadrightarrow J^1(\partial M, \mathbf{R})$ переводит 1-струю функции в точке края в 1-струю ограничения этой функции на край).

Лежандрово подмногообразие, трансверсальное краю пространства струй, пересекает его (край) вдоль (иммерсированного) подмногообразия. Проекция в $J^1(\partial M, \mathbf{R})$ этого пересечения называется *лежандровым краем* исходного лежандрова подмногообразия. Размерность края на 1 меньше размерности исходного подмногообразия. "Физическая интерпретация" очевидна: фронт лежандрова края является обычным краем фронта исходного подмногообразия.

Задача. Докажите, что образ этой проекции действительно иммерсирован.

Рассмотрим теперь контактное пространство PT^*B контактных элементов многообразия B с краем ∂B. Снова рассмотрим проекцию, отправляющую каждый контактный элемент в точке ∂B в его пересечение с касательным пространством края. Предположим, что иммерсированное лежандрово подмногообразие пространства PT^*B трансверсально краю $\partial(PT^*B)$ этого пространства.

Задача. Докажите, что эта проекция принадлежит $PT^*(\partial B)$ и является там иммерсированным лежандровым подмногообразием.

Спроектированное лежандрово многообразие называется *лежандровым краем* исходного многообразия.

Подобные конструкции определяют лежандровы края лежандровых подмногообразий пространства ST^*B трансверсально ориентированных ("вооружённых") контактных элементов (ST^*B является сферисе-

ским расслоением, дважды накрывающим проективное расслоение PT^*B). Можно также рассматривать ориентированные контактные элементы ("вооружённые" или нет).

Рассмотрим два замкнутых (т. е. компактных без края) лагранжева подмногообразия L_0 и L_1 пространства кокасательного расслоения T^*V. *Лагранжевым (цилиндрическим) кобордизмом* между L_0 и L_1 (рис. 56) называется лагранжево подмногообразие пространства $T^*(V \times [0,1])$ (кокасательного расслоения цилиндра над V), лагранжев край которого есть разность между $L_1 \times 1$ и $L_0 \times 0$ (для ориентированных кобордизмов изменение ориентации многообразия индуцирует изменение знака в кобордизме; в неориентированном случае коэффициенты принадлежат $\mathbf{Z}_2$).

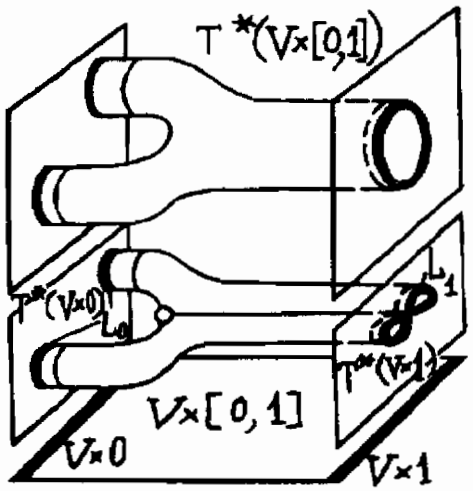


Рис. 56. Лагранжев кобордизм

Лагранжевы многообразия L_0 и L_1 называются *лагранжево ориентировано* (соответственно *неориентировано*) *цилиндрически кобордантными*, если между ними существует некоторый ориентированный (неориентированный) кобордизм.

Классы лагранжево цилиндрически кобордантных подмногообразий образуют полугруппу, которая на самом деле является группой (см. [106], [107]). Эти группы называются группами классов лагранжевых ориентированных (соответственно неориентированных) цилиндрических кобордизмов над V (для краткости называемых *группами лагранжевых кобордизмов* над V).

Случай $V = \mathbf{R}^n$ особенно интересен, так как группы кобордизмов над $\mathbf{R}^n$ и градуированные кольца сумм этих групп играют роль групп и колец коэффициентов для теорий бордизмов.

Лежандров кобордизм лежандровых подмногообразий пространств 1-струй функций или лежандровых подмногообразий пространств кон-

тактных элементов (вооружённых или нет, ориентированных или нет) определяются аналогично.

В случае лежандровых многообразий, вместо кобордизмов лежандровых иммерсий, можно просто рассматривать кобордизмы фронтов (так как лежандрово подмногообразие одноэначно определяется своим фронтом). Единственное требование — трансверсальность кобордизма фронтов краю базы лежандрова расслоения, в котором находится соответствующее кобордизму лежандрово подмногообразие (чтобы избежать ссылок на теорию трансверсальности стратифицированных особых многообразий, можно считать, что в некоторой окрестности края фронта кобордизм является прямым произведением этого края и полуинтервала).

Списки перестроек лагранжевых и лежандровых особенностей (§2.3 и §3.3) позволяют явным образом вычислить группы кобордизмов в малых размерностях.

Теорема. *Группа лежандровых ориентированных кобордизмов лежандровых подмногообразий пространства 1-струй функций одной переменной изоморфна группе целых чисел. Образующей этой группы является класс кобордизмов лежандрова подмногообразия, фронт которого имеет форму бантика (восьмёрки с заострёнными вершинами, рис. 57).*

Рис. 57. Образующая группы лежандровых кобордизмов (бантик)

Зададим 1-струю функции f координатами (x, y, p) (где $y = f(x)$, $p = df/dx$). В этих координатах *бантик* определен так:

$$x = \cos t, \qquad y = \sin 4t - 2\sin 2t$$

(на соответствующем лежандровом многообразии $p = 8\sin 3t$).

Доказательство этой теоремы изображено на рис. 58. Во-первых мы можем рассматривать только типичные фронты и их кобордизмы. Типичный одномерный фронт является замкнутой кривой с точками возврата. В точке возврата касательная к фронту не вертикальна (для фронтов в пространстве струй функций). Следовательно, мы можем различать 4 типа точек возврата фронтов: отклоняющих влево или вправо на восходящих или нисходящих фронтах.

За отклоняющей влево точкой возврата всегда следует точка возврата, отклоняющая вправо, и наоборот, следовательно число точек возврата чётно.

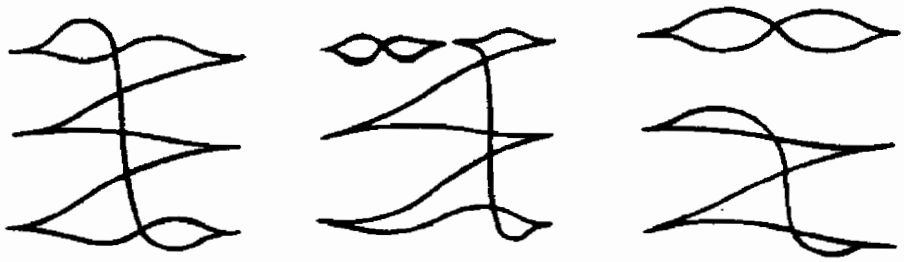


Рис. 58. Кобордизм фронта к нескольким бантикам

Пара, состоящая из точек возврата на восходящей и нисходящей ветви (в любом порядке), может быть сокращена перестройкой типа ласточкин хвост. Следовательно мы можем предположить, что на связном фронте все точки возврата — на восходящей (или нисходящей ветви).

Регулярная изотопия является особенно простым видом кобордизма. С помощью такой изотопии мы можем нормализовать точки возврата и их порядок. Наш фронт F_n (рис. 58) состоит из невертикальных сегментов, соединяющих внутри области $0 \leq x \leq 1$ точки

$$(0,0) \to (1,0) \to (0,n) \to (1,n) \to \ldots \to (0,1) \to (1,1) \to (0,0).$$

Кобордизм между этим фронтом и объединением подобного фронта F_{n-1} с бантиком изображён на рис. 58. По индукции, любой фронт кобордантен объединению бантиков (возможно, противоположно ориентированных).

Все эти объединения не кобордантны нулю. Действительно, разность между числом восходящих и нисходящих точек возврата не меняется при типичных перестройках волновых фронтов. Следовательно эта разность является характеристическим числом ориентированного фронта: два кобордантных фронта имеют одинаковую разность между числом восходящих и нисходящих точек возврата.

Для бантика эта разность равна 2; для n бантиков — $2n$. Следовательно все эти объединения не кобордантны, что и доказывает теорему.

Теорема. *Группа лежандрово неориентированных кобордизмов лежандровых подмногообразий пространства* 1*-струй функций одной переменной тривиальна.*

Последовательность перестроек бантиков, доказывающая это утверждение, изображена на рис. 59. Эта последовательность трансформирует бантик в пустое множество, и следовательно определяет кобор-

дизм бантика и нуля. Этот кобордизм, рассматриваемый как лежандрово многообразие, является листом Мёбиуса. Неориентированная лежандрова граница последнего является лежандровой кривой, фронт которой — бантик.

Рис. 59. Неориентированный кобордизм бантика и 0

Коротко говоря, неориентированный кобордизм рисунка 59 сопоставляет бантику лист Мёбиуса. Та же последовательность (и обратная ей) определяет лежандрову иммерсию бутылки Клейна в $\mathbf{R}^5$ (и следовательно её лагранжеву иммерсию в $\mathbf{R}^4$). Проективная плоскость не имеет лагранжевых иммерсий в $\mathbf{R}^4$ (и, следовательно, лежандровых иммерсий в $\mathbf{R}^5$). Компактные связные поверхности чётной эйлеровой характеристики имеют лежандровы иммерсии в $\mathbf{R}^5$. Поверхности, эйлерова характеристика которых нечётна, не имеют даже лагранжевых иммерсий в $\mathbf{R}^4$.

Замечание. Задача о точных лагранжевых вложениях поверхностей в $\mathbf{R}^4$ не так проста (лагранжево подмногообразие называется *точным*, если оно является проекцией лежандрова подмногообразия).

Соответствующая одномерная задача проще: точные лагранжевы кривые (то есть проекции компактных лежандровых кривых из пространства 1-струй функций на вещественной прямой в пространство кокасательного расслоения этой прямой) обязательно имеют точки самопересечения.

Теорема. *Замкнутая плоская кривая (с полукубическими точками возврата и самопересечениями), касательная к которой нигде не вертикальна, имеет вертикальную хорду такую, что в её конечных точках касательные к кривой параллельны друг другу* (*рис.* 60).

Доказательство. Кривая в (x, y)-пространстве является фронтом лежандрова подмногообразия (x, y, p)-пространства 1-струй функций. Проекция на (x, p)-плоскость каждой связной компоненты этого подмногообразия является связной замкнутой кривой, ограничивающей *нулевую площадь* (так как $\oint p\,dx = 0$, так как мы начали с *лежандрова*

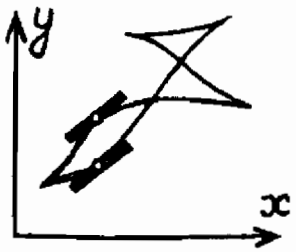


Рис. 60. Параллельные касательные в граничных точках вертикальной хорды фронта

подмногообразия). Следовательно проекция имеет точки самопересечения, что и требовалось доказать.

Невозможность точного лагранжева вложения замкнутой поверхности в $\mathbf{R}^4$ геометрически означает, что замкнутая поверхность в $\mathbf{R}^3$, касательная плоскость к которой нигде не вертикальна (особенности которой — только рёбра возврата, ласточкины хвосты и самопересечения), имеет вертикальную хорду, в концах которой касательные плоскости поверхности параллельны друг другу.

Теорема ([108]). *Ориентируемое n-мерное многообразие с ненулевой эйлеровой характеристикой не может быть лагранжево вложено в $\mathbf{R}^{2n}$.*

В самом деле:

1) Индекс самопересечения вложенного ориентируемого многообразия в его цилиндрической окрестности совпадает с этим индексом во всём объемлющем многообразии (это не верно для иммерсированных многообразий).

2) Индекс самопересечения подмногообразия евклидова пространства равен 0.

3) Индекс самопересечения в цилиндрической окрестности равен числу Эйлера нормального расслоения.

4) Нормальное расслоение лагранжева подмногообразия евклидова пространства изоморфно касательному расслоению.

Из этих утверждений вытекает равенство нулю эйлеровой характеристики вложенного в евклидово пространство лагранжева многообразия.

Например, 2-сфера не имеет лагранжевых вложений в $\mathbf{R}^4$ (иммерсии существуют: например, блюдце из §2.3).

Таким образом, утверждение о хордах с параллельными касательными доказано для всех ориентируемых поверхностей, за исключением

тора. Тор может быть лагранжево вложен в $\mathbf{R}^4$, но точных вложений не существует (это недавно было доказано Громовым [109]).

Теорема. *Группа классов лагранжевых ориентированных кобордизмов плоских кривых изоморфна* $\mathbf{R}+\mathbf{Z}$. *Класс кобордизма кривой определяется двумя числами, являющимися инвариантами кобордизма: интегралом формы* $p\,dx$ *и индексом Маслова. Индекс Маслова плоской кривой равен удвоенному числу оборотов касательного вектора, и, следовательно, чётен. Таким образом, все плоские кривые с данным числом оборотов, ограничивающие данную площадь, лагранжево кобордантны.*

Доказательство элементарно (см. [106]).

Пример. Рассмотрим интегрируемую систему с двумя степенями свободы, например, точку, движущуюся в центральном поле сил на $(q_1; q_2)$-плоскости. Множества уровня двух первых интегралов являются лагранжевыми подмногообразиями в $\mathbf{R}^4$. Зафиксируем значение одной из координат, скажем $q_2 = \text{const}$, и рассмотрим соответствующий лагранжев край ("след" лагранжева подмногообразия на (q_1, p_1)-плоскости, полученный забыванием значения p_2).

Предположим, например, что лагранжево подмногообразие — тор, проекция которого на конфигурационное пространство является кольцом (рис. 61). Для больших значений q_2 след пуст. При уменьшении значения q_2 след претерпевает перестройку "рождение". "Новорожденный" след кобордантен нулю. Следовательно его число оборотов равно 0, и он ограничивает нулевую площадь. То есть этот след не может иметь форму эллипса; он имеет форму восьмёрки.

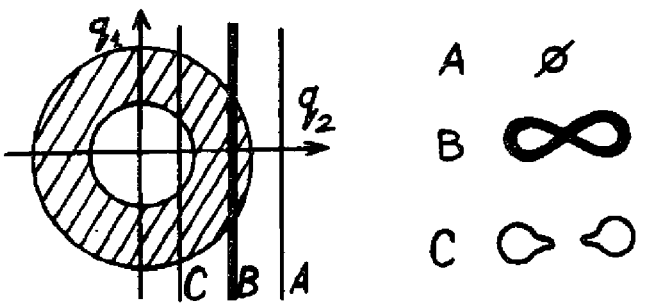


Рис. 61. Перестройка рождения лагранжева края

Задача. Докажите, что *в некоторой окрестности любой типичной критической точки функции* q_2 *на лагранжевой поверхности, поверх-*

ность, образованная её следами в трёхмерном (p_1, q_1, q_2)*-пространстве, диффеоморфна "зонтику Уитни–Кэли"* $y^2 = zx^2$ (*рис.* 62).

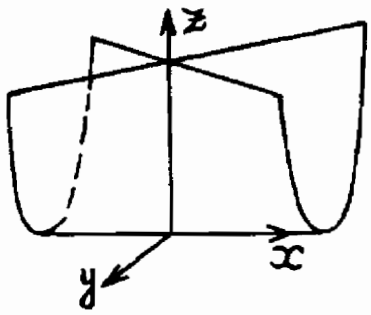


Рис. 62. Зонтик Уитни–Кэли

В работах [106] и [107] определены десятки различных теорий кобордизмов (принимая во внимание или нет ориентацию лагранжевых и лежандровых многообразий, кобордизмов, баз расслоений и контактных элементов). Соответствующие группы были вычислены для кривых и поверхностей.

Пример. Группа классов лежандровых кобордизмов ориентированных и вооружённых (трансверсально ориентированных) фронтов на проективной плоскости является свободной циклической группой $\mathbf{Z}$ (то есть группой целых чисел).

Образующей является класс полукубической параболы $x^2 = y^3$ на проективной плоскости.

Единственным инвариантом кобордизма для ориентированных и вооружённых фронтов на проективной плоскости является *индекс*, равный числу точек возврата, подсчитанных с учётом их знаков. Точка возврата *положительна*, если, двигаясь вдоль кривой в ориентирующем её направлении, мы проходим через точку возврата в направлении нормали, вооружающей фронт.

Например, индекс бантика (см. рис. 57) равен 2, так как обе точки возврата проходятся в направлении вооружающей нормали (вверх на рис. 57).

Индекс определяется для фронтов на любой поверхности, ориентированной или нет. Его значения на проективной плоскости могут быть чётными и нечётными. Индекс кривой на проективной плоскости может быть также вычислен подсчётом точек перегиба (взятых со знаками). Точка перегиба *положительна*, если фронт пересекает касательную прямую в этой точке в направлении, противоположном направлению вооружающей нормали.

Например, среди шести точек перегиба на бантике (рис. 57) четыре положительных, расположенных вблизи точек возврата.

Индексы проективно двойственных кривых противоположны.

Соотношения между индексами Маслова кривых на лагранжевых подмногообразиях и перегибами их фронтов в евклидовом пространстве были найдены Твороговым (см. [110], [111]).

Индекс ориентированного вооружённого одномерного фронта связан с *индексом Маслова* кривой на лагранжевой поверхности (являющимся, по определению, индексом пересечения с циклом особенностей лагранжевой проекции).

Вооружённый фронт на V определяет коническое лагранжево подмногообразие в пространстве T^*V кокасательного расслоения V. Это подмногообразие состоит из 1-форм, нулевых на касающихся фронта контактных элементах и положительных на вооружающих нормалях. Для типичного фронта это коническое многообразие гладко иммерсировано в T^*V. Риманова метрика на V определяет иммерсию фронта в это коническое коническое многообразие (отправляет точку фронта в 1-форму, равную 1 на вооружающем нормальном единичном векторе). Индекс одномерного фронта, определённый выше как число точек перегиба (с учётом их знаков), равен индексу Маслова кривой, соответствующей этому фронту и лежащей на коническом лагранжевом подмногообразии в T^*V (см. [107]).

Я.М.Элиашберг свёл вычисление групп лагранжевых и лежандровых кобордизмов к гомотопической проблеме.

Теорема ([112]). *Группа классов лежандровых ориентированных кобордизмов подмногообразий пространства 1-струй функций на* $\mathbf{R}^n$ *изоморфна стабильной гомотопической группе,*

$$L_n \approx \lim \pi_{n+k}(T\lambda_k), \qquad k \to \infty,$$

где T есть пространство Тома и λ_k — тавтологическое расслоение над лагранжевым грассманианом $U(k)/SO(k)$ лагранжевых ориентированных подпространств в $\mathbf{R}^{2k}$.

Градуированная алгебра классов кобордизмов, $\oplus L_n$, изоморфна (над рациональными числами) внешней алгебре с образующими степеней $4k+1$.

Если я не ошибаюсь, кручение до сих пор не вычислено (см., однако, работы М.Одэн [113], [114], книгу В.А.Васильева [115] и обзор А.Б.Гивенталя [14]).

Версия Элиашберга конструкции Понтрягина–Тома доставляет также гомотопическое описание других групп кобордизмов лагранже-

вых и лежандровых многообразий. На практике, однако, эти формулы чаще используются в противоположном направлении (как в вычислениях Понтрягина и Рохлина гомотопических групп) — геометрия фронтов используется для получения гомотопической информации.

Пример. Группы ориентированных (ω) и неориентированных (ν) кобордизмов ориентированных (ω) и неориентированных (ν), вооружённых (S) и невооружённых (P) фронтов на двумерных поверхностях приведены в следующей таблице (см. [107]):

	S	P
ω	$\mathbf{Z}^{b_0+b_1} + \mathbf{Z}_2^c$	$\mathbf{Z}^{b_1} + \mathbf{Z}_2^{2b_0}$
ν	$\mathbf{Z}_2^{b_0+b_1-b_2}$	$\mathbf{Z}_2^{2b_0+b_1-b_2}$

где b_i — числа Бетти поверхности, c — число неориентируемых компонент поверхности, имеющих чётные эйлеровы характеристики.

5.2. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы

Лагранжевы и лежандровы характеристические классы — это классы когомологий замкнутых (компактных, без края) лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные многообразиям лагранжевых (лежандровых) особенностей. Соответствующие характеристические числа инвариантны относительно лагранжевых (лежандровых) кобордизмов.

Простейшим из таких классов является *класс Маслова*, двойственный многообразию, состоящему из всех особых точек проекции лагранжева многообразия на базу лагранжева расслоения. В §1.3 это многообразие обозначалось через A_2.

Соответствующий класс когомологий одномерен: он сопоставляет целое число любой кривой на лагранжевом многообразии. Это число равно числу особенностей типа A_2 вдоль кривой (подсчитываемых с подходящими знаками).

Классы, соответствующие более сложным типам особенностей проекции на V лагранжева подмногообразия в T^*V, были введены В.А.Васильевым [116]. Например, в ориентируемом случае он определил: целочисленный четырёхмерный класс когомологий, двойственный A_5 (име-

ющий второй порядок); пятимерные классы, двойственные A_6 и E_6 (эти классы когомологичны друг другу); шестимерный целочисленный класс, двойственный P_8. Он также вычислил мультипликативные соотношения между этими классами, например, $A_2A_6 = 3P_8$.

Подобные реэультаты верны и для лежандровых особенностей. Например, число особенностей типа A_6 (принимая во внимание знаки) на замкнутом, ориентированном лежандровом подмногообразии пространства 1-струй функций на $\mathbf{R}^5$, совпадает с числом особенностей типа E_6. Эти числа совпадают также для ориентируемо кобордантных лежандровых многообразий. Для замкнутых лежандровых подмногообразий соответствующих размерностей (разумеется, здесь и ниже, предполагается, что лагранжевы и лежандровы подмногообразия — типичны) числа особенностей типов

$$A_4 + D_4,\ D_5,\ D_6,\ D_7,\ A_6 + E_6,\ E_7 + P_8,\ A_8 + D_8,\ D_8 + E_8,\ P_9$$

чётны, в то время как число особенностей типа A_6 (с учётом знаков) делится на 3.

Общая схема построения лагранжевых и лежандровых характеристических классов, ассоциированных с особенностями, такова. Рассмотрим класс из классификации $(A_\mu^\pm, D_\mu^\pm, \ldots)$ критических точек функций, то есть тип лагранжевых или лежандровых особенностей ($\pm$ в обозначениях соответствует различным вещественным формам одной и той же комплексной особенности: соответствующие отображения эквивалентны в комплексной области, но не эквивалентны в вещественной области, как для $A_3^\pm \approx \pm x^4$).

Обозначим коразмерность этого класса через c (например, $\operatorname{codim} A_2 = 1$, $\operatorname{codim} A_k = \operatorname{codim} E_k = k - 1$). Для определения индекса пересечения многообразия особенностей данного типа (вернее, его замыкания) с ориентированным подмногообразием размерности c, нам нужна трансверсальная ориентация многообразия особенностей, то есть ориентация слоёв нормального расслоения. Эта ориентация должна быть "естественной", то есть инвариантной относительно действия группы, определяющей эквивалентность особенностей.

Если такая ориентация существует, то соответствующий класс особенностей называется (естественно) *кооориентируемым.*

Пример. В.П.Маслов в [117] заметил, что *класс* A_2 *кооориентируем*, и нашёл его естественную ориентацию (определяемую направлением увеличения индекса инерции второго дифференциала производящей функции).

Теорема (В.А.Васильев). *Классы стабильной R^+-эквивалентности $A^{\pm}_{4p+1}$, A_{2p} кооориентируемы, в то время как классы $A^{\pm}_{4p-1}$, $D^{\pm}_p$ не кооориентируемы. Среди классов коразмерности ≤ 7 кооориентируемыми являются:*

$$A^{\pm}_{4p+1},\ A_{2p},\ E^{\pm}_6,\ E_7,\ E_8,\ P^{1,2}_8,\ P_9;$$

все остальные классы,

$$A^{\pm}_{4p-1},\ D^{\pm}_p,\ X_9,$$

не кооориентируемы.

Здесь обозначения $A, \ldots, X$ классов особенностей следуют классификации критических точек функций ([28]), с точностью до *R^+-эквивалентности* (две функции R^+-эквивалентны, если одна из них может быть преобразована в другую подходящей заменой независимых переменных и прибавлением константы). Большинство классов определено в §1.3: $A^{\pm}_k$ — это $\pm x^{k+1}$ и т.д.

Зафиксируем кооориентируемый класс. Кооориентация, сама по себе, не достаточна для корректного определения индекса пересечения, так как класс не является циклом. Примыкающие классы, коразмерность которых на единицу больше коразмерности рассматриваемого класса, образуют "границу" нашего класса, на которой необходимо наложить некоторые условия на кооориентации для того, чтобы индекс пересечения был корректно определён.

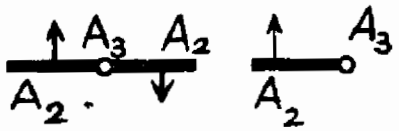


Рис. 63. Два нерегулярных примыкания

Пример. Рассмотрим многообразие особенностей типа A_2. Этот класс коразмерности 1 допускает естественную кооориентацию. Коразмерность границы равна 2. Рассмотрим типичную точку на границе и построим двумерную поверхность, трансверсальную границе в этой точке. След класса A_2 на поверхности является кривой с особой точкой. Вне этой точки кривая трансверсально ориентирована. Если бы ситуация в этой точке была топологически эквивалентна тому, что изображено на рис. 63, то тогда бы индекс пересечения кривых с замыканием A_2 не существовал. Действительно, число пересечения малой окружности с центром в граничной точке и A_2 в этом случае не равно нулю, и, так как окружность ограничивает диск, оно должно равняться нулю (коциклы равны нулю на границах). Истинная кооориентация A_2 в

(граничной) точке A_3 указана на рис. 64. Это регулярное поведение A_2 в точках A_3 и делает возможным определение класса Маслова.

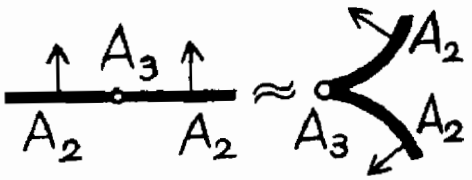


Рис. 64. Регулярное примыкание A_3 и A_2

Общее "условие регулярности" класса с примыкающими классами большей коразмерности было сформулировано Васильевым следующим образом: *класс должен быть коциклом некоторого абстрактного комплекса.* Коцепями этого комплекса ω являются формальные суммы кориентируемых классов (с целочисленными коэффициентами). Градуировка коцепи определяется как коразмерность соответствующего класса. Кограничный оператор δ определяется примыканиями (принимая во внимание кориентации). Например, примыканию на рис. 63 слева соответствует оператор $\delta A_2 = 2A_3$, на рис. 63 справа — оператор $\delta A_2 = A_3$ и на рис. 64 — истинное значение $\delta A_2 = 0$.

Начальная часть *комплекса Васильева* ω была явно вычислена в [116], [115]. Первые группы когомологий приведены в следующей таблице:

i	1	2	3	4	5	6
$H^i(\omega)$	$\mathbf{Z}$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
Образующие	A_2	–	–	A_5	A_6	P_8
Нули	–	–	–	A_5	$A_6 - E_6$	$E_7 + 3P_8$

Эти классы индуцируют *лагранжевы характеристические классы когомологий* с целочисленными коэффициентами на лагранжевых подмногообразиях пространства кокасательного расслоения T^*V.

Например, класс A_2 индуцирует индекс Маслова кривых на лагранжевых подмногообразиях. Индекс пересечения с трансверсально ориентированным многообразием особенностей типа A_6 определяет пятимерный класс когомологий на лагранжевых подмногообразиях в T^*V.

Последняя строка таблицы содержит ограничения на сосуществование особенностей, вытекающие из вычислений Васильева. Напри-

мер, подсчитанное с учётом знаков, определяемых кориентацией, число особенностей типа A_5 лагранжевой проекции замкнутого, ориентированного лагранжева многообразия равно нулю (это означает, что когомологический класс A_5, абстрактного комплекса Васильева, не реализуется гомологически нетривиальным классом особенностей). Для шестимерного многообразия сумма числа особенностей типа E_7 с утроенным числом особенностей типа P_8 равна нулю (принимая во внимание знаки).

В неориентируемом случае кориентации не играют роли, и соответствующий *комплекс* ν порождается всеми (ориентируемыми или нет) классами особенностей с коэффициентами из $\mathbf{Z}_2$. Первые группы когомологий таковы:

i	1	2	3	4	5	6
$H^i(\nu)$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$
Образующие	A_2	A_3	$A_4 = D_4$	A_5	$A_6 = D_6$	A_7, E_7

Эти классы когомологий индуцируют лагранжевы характеристические классы когомологий с $\mathbf{Z}_2$-коэффициентами на лагранжевых подмногообразиях в T^*V.

Для проекции лагранжева края число особенностей данного типа чётно. Числа особенностей типов A_2, A_6, E_6, E_7, P_8 (принимая во внимание знаки) равны нулю для проекции лагранжева края замкнутого ориентированного лагранжева многообразия.

Подобная теория для лежандровых особенностей начинается с более грубой, по сравнению с использовавшейся выше R^+-эквивалентностью, классификации критических точек функций.

Лежандрова эквивалентность соответствует эквивалентности поверхностей нулевого уровня функций, а не эквивалентности самих функций. Определение естественной кориентации принимает во внимание инвариантность относительно действия этой группы (которая, в общем случае, больше, чем группа R^+-эквивалентностей).

Для малых размерностей ($i \leq 6$) соответствующие результаты приведены ниже.

1) Лежандровы подмногообразия в пространствах 1-струй функций и в пространствах вооружённых контактных элементов определяют

такие же комплексы (как в ориентируемом, так и в неориентируемом случае) как в случае лагранжевых подмногообразий в пространствах кокасательных расслоений. Следовательно, результаты, касающиеся чётности и числа типов особенностей, справедливы и для лежандровых многообразий и кобордизмов.

2) Лежандровы подмногообразия в пространствах PT^*V (неориентированных контактных элементов) определяют следующие группы когомологий в ориентируемом (ω) и в неориентируемом (ν) случае:

i	1	2	3	4	5	6
$H^i(\omega)$	0	0	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$
Образующие	—	—	—	A_5	—	$E_7 + 3P_8, P_8$

i	1	2	3	4	5	6
$H^i(\nu)$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^3$
Образующие	A_2	A_3	A_4, D_4	A_5	A_6, D_6, E_6	A_7, E_7, P_8

На лежандровом крае число особенностей данного типа (соответствующей коразмерности) чётно. Число особенностей типов E_7 и P_8 (с учётом знаков) на лежандровых краях ориентированных лежандровых многообразий равно нулю.

Эти соотношения не исчерпывают все ограничения на сосуществование особенностей на лежандровых и лагранжевых многообразиях. Например, число ласточкиных хвостов (A_3) на двумерном фронте чётно, так как линия самопересечения, начинающаяся в вершине одного ласточкина хвоста, заканчивается в вершине другого.

А.В.Алексеев доказал, что ребро возврата фронта лежандрова подмногообразия пространства 1-струй функций на поверхности пересекает сам фронт в чётном числе точек: $|A_1A_2| = 0 \bmod 2$.

Так, если замкнутая поверхность в $\mathbf{R}^3$ не имеет особенностей отличных от рёбер возврата, ласточкиных хвостов и самопересечений, то число точек пересечения рёбер возврата с этой поверхностью чётно. Доказательство основывается на построении кобордизма между данным фронтом и фронтом без точек типа A_1A_2, а также на том факте, что на кобордантных фронтах количества точек типа A_1A_2 совпадают по модулю 2.

На замкнутом фронте в $\mathbf{R}^3$ число точек типа A_1A_2 чётно вдоль любой замкнутой кривой, образованной рёбрами возврата и примыкающими вершинами ласточкиных хвостов. Это следует из того, что в $\mathbf{R}^3$ фронт определяет цикл по модулю 2, гомологичный нулю. В этом результате мы можем заменить $\mathbf{R}^3$ пространством $J^0(V^2, \mathbf{R})$.

Обобщение этого результата Алексеева, найденное В.А.Васильевым, описывает пересечения одномерного страта фронта с самим фронтом. Обозначим через $\{\Xi\}$ взятое по модулю 2 число точек пересечения фронта с замыканием страта Ξ, минус индекс пересечения этих же объектов в $\mathbf{Z}_2$-гомологиях объемлющего пространства. Тогда (см. [115]):

$$\{A_2\} = \{A_3\} = \{A_4\} = 0,\ \{A_5\} = \#E_6,\ \{A_6\} = \#E_7,\ \{A_7\} = 0,$$

$$\{D_4\} = \{D_5\} = 0,\ \{D_6\} = \#E_7,\ \{D_7\} = 0,$$

$$\{E_6\} = \#E_7,\ \{P_8\} = 0,\ \{E_7\} = \#E_8 + < E_7, \mathrm{des} >,$$

где des — декоориентирующий 1-коцикл в $\mathbf{Z}$-когомологиях рассматриваемого лежандрова многообразия (этот коцикл индуцируется из первого класса Штифеля–Уитни тавтологического расслоения при тождественном отображении нашего лежандрова многообразия в PT^*V).

Подобные формулы верны также для каждой компоненты замыкания одномерного страта.

Числа особенностей типов A_5 и A_7 чётны на замкнутых фронтах соответствующих размерностей, в то время как число особенностей типа E_6 совпадает по модулю 2 с числом точек пересечения стратов A_5 и A_1. Эти результаты вытекают из рассмотрения спектральной последовательности Васильева для мультиособенностей [118].

Соответствующее обобщение комплекса ν неориентируемых классов порождается множествами, состоящими из нескольких лежандровых особенностей. Дифференциал задаётся распадениями сложных мультиособенностей на более простые, встречаемыми в типичных однопараметрических деформациях особенности, для которых все особенности данной мультиособенности встречаются в одной точке.

Число мультиособенностей данного типа (взятое по модулю 2) является инвариантом лежандровых кобордизмов, если этот тип является коциклом комплекса мультиособенностей. Если этот тип является кограницей, то соответствующее число чётно.

Индексы соответствующей спектральной последовательности таковы:

p — коразмерность мультиособенности (то есть сумма коразмерностей особенностей, образующих мультиособенность, в пространстве функций, имеющих нулевое критическое значение в нуле);

q — число особенностей, образующих мультиособенность.

Например, $p(A_1A_1) = 0$, так как $\operatorname{codim} A_k = k - 1$; $q(A_1A_1) = 2$.

Коразмерность в $\mathbf{R}^n$ многообразия мультиособенностей данного типа для фронта в $\mathbf{R}^n$ равна $p + q$. Таким образом, коразмерность линии самопересечения A_1A_1 ласточкина хвоста в $\mathbf{R}^3$ равна 2. Определим группу коцепей $E_1^{p,q}$ как группу формальных сумм типов мультиособенностей, имеющих фиксированные значения индексов p и q (с коэффициентами из $\mathbf{Z}_2$). Начальная часть таблицы образующих свободных $\mathbf{Z}_2$-модулей $E_1^{p,q}$ такова:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$
$q=1$	A_1	A_2	A_3
$q=2$	A_1A_1	A_1A_2	A_1A_3, A_2A_2
$q=3$	$A_1A_1A_1$	$A_1A_1A_2$	$A_1A_1A_3, A_1A_2A_2$

Дифференциал, порождённый примыканиями, увеличивает p (например, $\delta(A_1A_1) = A_3$, так как линии самопересечения фронта заканчиваются в вершинах ласточкиных хвостов).

Спектральная последовательность порождена p-фильтрацией комплекса мультиособенностей: $F^p = \oplus E_1^{i,q}$, $i \geq p$.

В.А.Васильев показал, что для $p \leq 5$ эта спектральная последовательность вырождается при

$$E_\infty^{p,q} = E_3^{p,q},$$

и вычислил первые группы когомологий:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\dim H^i(S)$	1	1	1	1	1	2	3
$\dim H^i(P)$	1	1	1	2	2	5	7

Здесь S есть комплекс мультиособенностей вооружённых фронтов, а P — невооружённых (определение эквивалентности функций в первом случае включает умножение на положительную функцию, во втором — умножение на ненулевую функцию).

К сожалению, для этих теорий известно очень немного примеров, и для очень многих характеристических классов, соответствующих типам (мульти)особенностей, неизвестно, равны ли они нулю.

Нетривиальность некоторых классов следует из сравнения теоремы Элиашберга, статьи Фукса [119] о когомологиях лагранжева грассманиана и вычислений Васильева [115], [116], показывающих, что шестимерная образующая группы когомологий лагранжева грассманиана индуцирует класс, двойственный особенности типа P_8, в то время как удвоенная пятимерная образующая индуцирует класс, двойственный особенности типа A_6.

Тем не менее, комплексы особенностей и мультиособенностей важны сами по себе, и их следует рассматривать скорее как метод представления сложных соотношений между различными классами особенностей, чем как средство для вычисления характеристических классов.

Комбинаторика и топология естественных стратификаций пространств функций содержит большой объем скрытой информации, касающейся особенностей систем лучей и волновых фронтов; эта информация была лишь частично использована в теориях лагранжевых и лежандровых характеристических классов и кобордизмов.

5.3. Топология комплексных дискриминантов

Естественные стратификации пространств функций и отображений существуют как в вещественном, так и в комплексном случае. Топологические свойства этих стратификаций важны во многих приложениях теории особенностей; например, в теории лакун Петровского для гиперболических уравнений (см. [120]–[122], [80]). Например, возможность акустической связи в нашем 3-пространстве (и невозможность таковой в 2-пространстве) объясняется различием знаков в формуле Пикара-Лефшеца, описывающей ветвление интегралов в комплексной области.

Дискриминанты комплексных особенностей, будучи гиперповерхностями, не разделяют базу версальной деформации. Комплексной версией понятия края является гиперповерхность ветвления двулистного разветвлённого накрытия (как в теории краевых особенностей, см. [3]). В общем случае, комплексифицированные объекты очень сильно отличаются от своих вещественных версий.

В качестве примера приведём следующую таблицу:

вещественный случай	**комплексный случай**
край	ветвление
$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$
π_0	π_1
пространства со стягиваемыми компонентами	$K(\pi,1)$ пространства
ортогональные группы	унитарные группы
классы Штифеля–Уитни	классы Черна
симметрические группы	группы кос
теория Морса	теория Пикара–Лефшеца

Было бы очень интересным комплексифицировать теорию гомологий, а также подход с помощью параметрической теории Морса к обобщённым группам Уайтхеда, основанный на стратификации пространства вещественных функций.

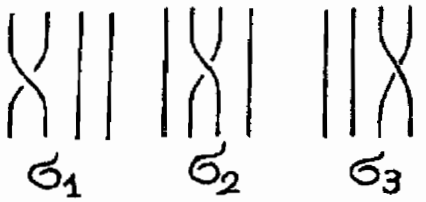
В любом случае, вычисление топологических инвариантов стратификаций вещественных и комплексных дискриминантов полезно во многих приложениях. Здесь мы опишем некоторые из результатов, полученных в этом направлении.

Пример 1. Дополнение к дискриминанту особенности типа A_k в комплексном пространстве $\mathbf{C}^k$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$ группы $\mathrm{Br}(k+1)$ кос из $k+1$ нитей.

Например, фундаментальная группа дополнения к полукубической параболе в $\mathbf{C}^2$ есть группа $\mathrm{Br}(3)$, фундаментальная группа дополнения к поверхности ласточкина хвоста в $\mathbf{C}^3$ — группа $\mathrm{Br}(4)$.

Группа кос из $k+1$ нитей имеет k образующих $\sigma_1,\dots,\sigma_k$, связанных определяющими соотношениями $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ для $|i-j|>1$ (см. рис. 65).

Рис. 65. Образующие группы кос Br(4) из 4-х нитей



$K(\pi,1)$-свойство ($\pi_i = 0$ для $i>1$) является комплексным аналогом стягиваемости ($\pi_i = 0$ при $i>0$) связных компонент дополнения дискриминанта в вещественном пространстве.

Таким образом, ветвление различных интегралов, связанных с особенностями типа A_k, управляется представлением монодромии группы кос (являющейся фундаментальной группой дополнения комплексного дискриминанта).

Появление групп кос в теориях уравнений Бакстера и алгебр Гекке объясняется теми же причинами (см. [123]–[125]).

Пример 2. Дополнения дискриминантов других простых особенностей являются пространствами $K(\pi, 1)$ для соответствующих "комплексных версий" групп Вейля. Эти "обобщённые группы кос" были введены и изучены Брискорном [128].

Этот результат справедлив также и для некристаллографических групп Коксетера (дискриминантами которых являются бифуркационные диаграммы соответствующих задач геометрии лучей и фронтов; об этом будет сказано ниже, в главе 7).

Пример 3. Рассмотрим *бифуркационную диаграмму семейства функций*, состоящую из тех точек в пространстве параметров, для которых число различных критических значений (в некоторой окрестности нуля) меньше типичного (равного числу критических точек, которые стремятся к нулю при стремлении к нулю параметров).

Для семейства функций $x^4 + ax^2 + bx$, зависящего от параметров $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, графиком критического значения (рассматриваемого как многозначная функция параметров) является ласточкин хвост (рис. 66). Бифуркационная диаграмма является проекцией (вдоль вертикального направления на горизонтальную плоскость) особой кривой ласточкина хвоста. Эта проекция состоит из двух кривых: полукубической параболы (проекции ребра возврата) и касательной к этой параболе в её точке возврата (проекции линии самопересечения). Число критических точек, на которые рассыпается исходная критическая точка, равно 3.

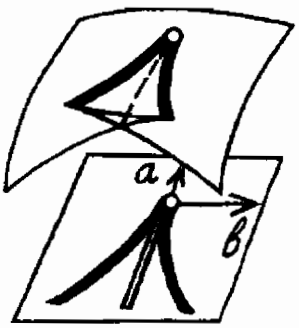


Рис. 66. Бифуркационные диаграммы функций семейства A_3

Так же как в этом примере, бифуркационная диаграмма типичного семейства функций состоит из двух гиперповерхностей: *каусти-*

ки (A_2), образованной значениями параметров, при которых функция из этого семейства имеет вырожденную критическую точку, и *множества Максвелла* ($2A_1$), состоящего из функций с двумя совпадающими критическими значениями.

Теорема (Ляшко [127], Лойенга [128]). *Дополнения бифуркационных диаграмм функций версальных деформаций простых особенностей являются пространствами* $K(\pi, 1)$.

Здесь фундаментальная группа π является подгруппой группы кос $\mathrm{Br}(k)$, где k есть число критических значений, на которые распадается исходное критическое значение. Индекс этой подгруппы в группе кос равен

$$\frac{k!h^k}{|W|},$$

где $|W|$ есть порядок соответствующей группы отражений, а h есть *число Кокстера* (равное степени инварианта самого высокого порядка).

Например, фундаментальная группа дополнения в $\mathbf{C}^2$ объединения полукубической параболы и её касательной в точке возврата есть подгруппа группы кос из трёх нитей, индекс которой равен

$$\frac{3!4^3}{4!} = 16$$

(для семейства A_k индекс равен $(k+1)^{k-1}$ и совпадает с числом деревьев, имеющих упорядоченные вершины в количестве $k+1$. Это совпадение не случайно, но обобщение этого результата на особенности B_k, C_k, D_k не сформулировано).

Упомянутое выше $K(\pi, 1)$-свойство справедливо также для каждого открытого страта естественной стратификации бифуркационной диаграммы простой особенности, а также для некристаллографических групп отражений.

Вещественной версией этого свойства является стягиваемость этих открытых стратов.

Доказательства всех этих результатов основаны на построении подходящего отображения рассматриваемого дополнения к бифуркационной диаграмме на дополнение дискриминанта A_{k-1}. Это отображение отправляет точку базы семейства функций в неупорядоченное множество, состоящее из k критических значений, рассматриваемых как точ-

ки на комплексной прямой, нуль которой совпадает с центром масс этих критических значений.

Это отображение Ляшко–Лойенги является собственным, поскольку оно является квазиоднородным отображением пространств одинаковой размерности с положительными весами. Его якобиан равен нулю в точности на бифуркационной диаграмме и определяет накрытие пространства регулярных орбит $K(\pi,1)$ группы A_{k-1}. Индекс равен кратности этого накрытия и может быть вычислен с использованием весов квазиоднородных функций, определяющих расслоение. Детали см. в [128]. Обобщение отображения Ляшко–Лойенги на случай многочленов Лорана описано в [198].

Интересно отметить, что $K(\pi,1)$-свойство имеет место для дополнений многих других бифуркационных диаграмм, при условии осторожного выбора определения бифуркационной диаграммы. Например, Кноррер в [129] нашёл контр-пример $K(\pi,1)$-свойству для дополнения бифуркационной диаграммы нульмерного полного пересечения $x^2 = y^2 = 0$ в $\mathbf{C}^2$ (в $\mathbf{C}^4$ это дополнение имеет нетривиальную группу π_2). Тем не менее, Горюнов в [130] заметил, что соответствующее бифуркационное множество для *проекции* полного пересечения является $K(\pi,1)$ пространством (эта бифуркационная диаграмма содержит дополнительную гиперплоскость в $\mathbf{C}^4$).

$K(\pi,1)$-свойство также имеет место для дополнений простых бифуркационных диаграмм простых проекций на комплексную прямую полных пересечений положительной размерности [131], для дополнений бифуркационных диаграмм простых отображений $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ и для дополнений многих других бифуркационных диаграмм (см. [132], [133], [80]).

Если коразмерность особенности увеличивается, то увеличивается также размерность дискриминанта и сложность его топологии. Тем не менее, имеет место важный феномен *стабилизации*: всё упрощается в предельном случае бесконечной коразмерности (как это обычно бывает в топологии).

Пример. Рассмотрим группы гомологий дополнений дискриминантов (фронтов) особенностей типа A_k:

$$G_k = \{\lambda \in \mathbf{C}^k | x^{k+1} + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k \text{ не имеет кратных корней}\}.$$

Несколько первых групп $H_i(G_k)$ приведены в следующей таблице

i \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1,2	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
3,4	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	0	0	0	0	0	0
5,6	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_3$	0	0	0	0
7,8	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	0	0
9,10	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_5$

Легко заметить, что i-е группы гомологий стабилизируются при $k \to \infty$. Например, одномерная группа гомологий $H_1(G_k) = \mathbf{Z}$ стабильна с самого начала: гомологический класс замкнутой петли в G_k определён числом полных оборотов дискриминанта соответствующего многочлена вокруг начала координат.

Изоморфизмы $H_i(G_k) \to H_i(G_{k+1})$ $(k \geq 2i-1)$ индуцируются вложениями $G_k \hookrightarrow G_{k+1}$, порождёнными вложением комплексной k-мерной трансверсали к одномерному страту A_k дискриминанта A_{k+1} (на рис. 67 эта трансверсаль изображена для $k = 2$). Эти отображения, разумеется, определены для любого k, но индуцируют изоморфизм i-ой группы гомологий только для дискриминантов высоких размерностей $(k \geq 2i-1)$. Эта стабилизация возможных положений i-мерных циклов в дополнении дискриминанта (для дискриминантов высоких размерностей) является упрощением, которого мы добиваемся, повышая размерность k (то есть повышая коразмерность особенности, или, иначе, усложняя её).

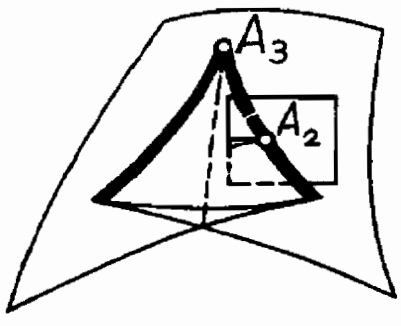


Рис. 67. Пространство версальной деформации особенности A_2 в пространстве версальной деформации особенности A_3

Стабильные группы $\lim H_i(G_k)$, $k \to \infty$, могут рассматриваться как "i-е группы гомологий дополнения дискриминанта версальной деформации гиперповерхности, заданной уравнением $f(x) \equiv 0$, где f зависит от одной переменной".

Для определения этих групп гомологий нет необходимости рассматривать версальные деформации с бесконечным числом параметров и соответствующие дискриминанты (иначе, фронты в бесконечно-мер-

ных пространствах). Несколько первых стабильных групп приведено в таблице:

i	0	1	2	3	4	5
$H_i(G_\infty)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_6$

Подобная стабилизация имеет место и для групп когомологий. Эта стабилизация основана на обратных изоморфизмах

$$H^i(G_k) \leftarrow H^i(G_{k+1}).$$

Стабилизируется также структура кольца когомологий. Она сходится к кольцу когомологий $H^*(G_\infty)$ ("дополнения бесконечномерного фронта A_∞"). Сведения о структуре этого кольца можно найти в [134]–[136].

Элементы этого кольца определяют "характеристические классы" в дополнении комплексных волновых фронтов, имеющих только "обобщённые ласточкины хвосты" (особенности типа A_k). Их поднятия при помощи отображения Ляшко–Лойенги определяют характеристические когомологические классы в дополнениях бифуркационных диаграмм функций, проекций и т. д.

Приведённый выше пример является примером общей теории стабилизации, предложенной в [50] и развитой недавно В.А.Васильевым ([137], [138]).

Рассмотрим, например, дискриминанты (бифуркационные диаграммы нулей) особенностей гиперповерхностей, определённых голоморфными функциями n комплексных переменных, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Пусть X обозначает тип особенности, и пусть Y $(\to X)$ будет примыкающий (более сложный) тип особенности. Дискриминант (волновой фронт), соответствующий Y, содержит страт, соответствующий X. Гиперплоскость, трансверсальная этому страту, пересекает дискриминант особенности Y вдоль гиперповерхности, локально диффеоморфной дискриминанту особенности X. Таким образом, существует вложение $G_X \hookrightarrow G_Y$ (локальных) дополнений бифуркационных диаграмм, а следовательно и отображение $H^*(G_Y) \to H^*(G_X)$ колец когомологий.

Трудности этого "стабилизационного" проекта таковы:

1) может существовать несколько стратов, соответствующих X;

2) дискриминант, соответствующий X, может допускать топологически нетривиальные автоморфизмы, следовательно отображение когомологий не является хорошо определённым даже в случае существования единственного X-страта в дискриминанте особенности Y.

Васильев в [137] доказал следующие теоремы.

1) Для любого типа особенности X существует такое число N, что X-страт дискриминанта любой особенности с $j^N(f) = 0$ неприводим (следовательно связен). [$j^N(f)$ обозначает многочлен Тейлора степени N функции f в нуле.]

2) Для любого i существует N такое, что для любой изолированной особенности типа X, для которой $j^N(f) = 0$, отображение из $H_j(G_X)$ в $H_j(G_Y)$ инвариантно относительно автоморфизмов группы $H_j(G_X)$, индуцированных биголоморфными отображениями пространства версальной деформации, сохраняющими дискриминант, при условии, что $Y \to X$ (Y примыкает к X) и $j \leq i$.

Таким образом, мы можем определить предел H_*. Двойственный объект H^* (который также может быть определён как обратный предел колец $H^*(G_X)$) имеет естественную структуру кольца когомологий.

Это кольцо зависит от n, но существует и подобная стабилизация при $n \to \infty$. Результирующее кольцо когомологий является универсальным объектом: это — "кольцо когомологий дополнения дискриминанта гиперповерхности, заданной тривиальным уравнением $f \equiv 0$, где f зависит от бесконечного числа переменных".

Приведём несколько первых групп когомологий ([137]):

i	0	1	2	3	4	5
H^i	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6 + \mathbf{Z}_2$

Все стабильные группы когомологий с $i > 2$ конечны. Стабилизация при $n \to \infty$ имеет место для $n \geq 1 + i/2$ (n есть число независимых переменных в функциях).

В [137] приведена также формула для стабильных групп когомологий, использующая скрученные когомологии симметрических групп:

$$H^i = \bigoplus_{k=0}^{i} H^{i-k}(S(k), T),$$

где T — нетривиальное представление автоморфизмами группы $\mathbf{Z}$ (и $S(k)$ — группа перестановок k элементов).

Эти стабильные группы когомологий связаны также с пространствами итерированных петель сфер. В случае группы кос ($n = 1$) этот результат был получен Дж.П.Мэйем и Г.Сигалом [135]:

$$H^*(\mathrm{Br}_\infty) \approx H^*(\Omega^2 S^3).$$

Общий же результат Васильева таков (см. [138]):

$$H^*(\text{фронты}, n) \approx H^*(\Omega^{2n} S^{2n+1}).$$

Для того чтобы объяснить этот результат, рассмотрим миниверсальную деформацию $\{f_\lambda\}$ голоморфной функции $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$. Дискриминант — это множество значений параметров λ, для которых 0 является критическим значением. Для любого λ можно рассмотреть отображение $g_\lambda : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$, отправляющее точку x в касательное пространство графика функции f_λ в точке x. Точка λ не принадлежит дискриминанту, если и только если образ отображения g_λ не пересекает нуля пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, рассматриваемого как пространство невертикальных плоскостей в $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ (эта нулевая точка является плоскостью $y = 0$).

Таким образом, мы получили отображение $h_\lambda : \mathbf{C}^n \to S^{2n+1}$ пространства $\{x\}$ в единичную сферу в $\mathbf{C}^{n+1}$.

В сущности, на границе некоторой окрестности нуля это отображение не зависит от λ. Следовательно, h_λ определяет точку в пространстве $2n$ раз итерированных петель сферы. Итак, h определяет отображение дополнения дискриминанта f в пространство итерированных петель. Из теорем Васильева следует, что это отображение индуцирует изоморфизм на кольцо стабильных когомологий, соответствующее функциям от n переменных.

Подобная конструкция применима и для дополнений каустик. В этом случае мы начинаем с пространства 2-струй и определяем "запрещённое" многообразие уравнениями

$$df = 0, \qquad \det d^2 f = 0.$$

Многообразие невырожденных квадратичных форм гомотопически эквивалентно

$$\Lambda(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) \sim \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})/\mathrm{O}(n, \mathbf{C}).$$

Стабильные когомологии дополнения (комплексной) каустики таковы:

$$H^*(\text{каустики}, n) \approx H^*(\Omega^{2n} \Sigma^{2n} \Lambda(n)),$$

где Σ означает надстройку (В.А.Васильев, 1989, см. [138]).

Пример. При $n = 1$, $\Lambda(1) \sim S^1$, $\Sigma^{2n}(\Lambda(n)) \sim S^3$,

$$H^*(\text{каустики}, 1) \approx H^*(\text{фронты}, 1) \approx H^*(\Omega^2 S^3).$$

5.4. Функции с умеренными особенностями

Топология и комбинаторика различных бифуркационных диаграмм (например, фронтов, каустик и т. д.) доставляет большое количество топологических инвариантов, как в комплексном, так и в вещественном случае.

В вещественном случае компоненты дополнений дискриминантов простых особенностей стягиваемы. Мы можем, однако, рассматривать дополнения стратов дискриминантов; их топология далеко не тривиальна.

В глобальной ситуации, мы можем рассмотреть пространства (вещественных) гладких функций на данном дифференцируемом многообразии, с некоторыми ограничениями на критические точки этих функций (например, пространства морсовских функций, пространства функций с особенностями кратности меньшей чем k и т. д.). Топологические и гомотопические инварианты таких пространств доставляют, в принципе, инварианты дифференцируемой структуры исходного многообразия.

Как мы скоро увидим, даже в простейшем случае функций от одной переменной появляются интересные топологические пространства.

Пример. Рассмотрим пространство функций от одной переменной, особенности которых не сложнее чем A_2 (то есть разрешены морсовские точки и точки типа x^3). Для простоты предположим, что на бесконечности функции ведут себя подобно x (для функций, ведущих себя на бесконечности подобно x^2, или для функций на окружности результаты аналогичны).

Теорема. *Фундаментальная группа пространства функций на вещественной прямой, не имеющих критических точек кратности превышающей* 2, *изоморфна группе целых чисел.*

Явный изоморфизм задаётся с помощью следующего "*индекса*" петли $\{f(x,t)\}$, соединяющей $f(x,0) \equiv x$ и $f(x,1) \equiv x$.

Рассмотрим кривую критических точек ($\partial f/\partial x = 0$) на плоскости $\{(x,t)\}$. Для петли общего положения эта кривая — гладкая и не имеет горизонтальных касательных в точках перегиба (рис. 68). Рассмотрим поверхность $z^2 = -\partial f/\partial x$ в 3-пространстве с координатами (t,x,z). *Индексом* кривой называется число

$$\mathrm{ind} = \#\max - \#\min,$$

где $\#\max$ есть число максимумов, а $\#\min$ — число минимумов функции t, ограниченной на эту поверхность (число сёдел не играет никакой роли!).

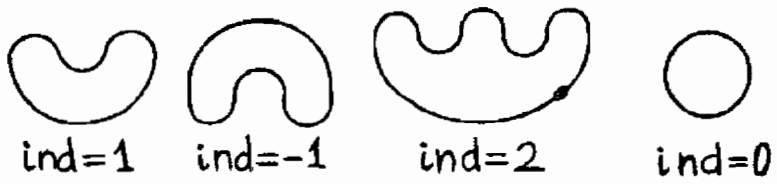


Рис. 68. Индексы замкнутых кривых, не имеющих горизонтальных касательных в точках перегиба

Индексы изображённых на рис. 68 кривых равны $2-1=1$, $1-2=-1$, $3-1=2$, $1-1=0$. Таким образом первая из этих кривых, называемая *почкой*, соответствует образующей нашей группы.

Доказательство теоремы изображено на рис. 69 (более подробное доказательство имеется в [92]).

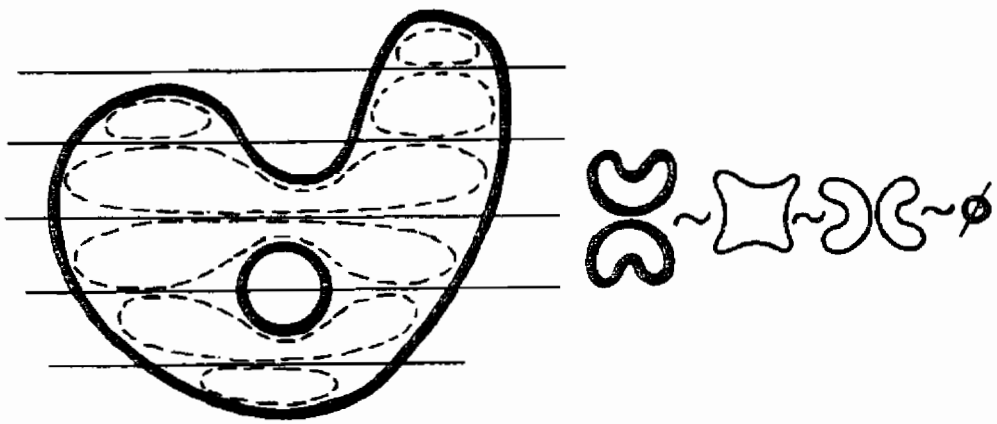


Рис. 69. Кобордизм кривой к почкам и антипочкам

Существует интересная аналогия между (вещественными) алгебраическими функциями или отображениями и расслоениями Серра. Например, типичная деформация множества вещественных корней многочлена (корни могут исчезать парами) может быть накрыта типичной деформацией многочлена и т. д.

Изоморфизм Понтрягина между гомотопическими группами сфер и группами кобордизмов оснащённых многообразий соответствует, в

нашем случае, изоморфизму между гомотопическими группами пространств функций с умеренными особенностями ($< A_3$ в рассматривавшемся случае) и группами кобордизмов многообразий со слабыми перегибами (то есть кривых без горизонтальных касательных в точках перегиба).

Рис. 69 показывает, что любая кривая кобордантна объединению "почек". Инвариантность индекса относительно кобордизмов очевидна, следовательно наша группа кобордизмов является свободной циклической группой, порождённой "почкой".

Замечание. Индекс петли в пространстве функций на вещественной прямой, ведущих себя на бесконечности подобио функции x, является индексом пересечения со стратом Максвелла (замыканием гиперповерхности, образованной функциями которые имеют равные критические значения в разных критических точках). Страт Максвелла имеет естественную кооориентацию (несмотря на его особенности, он определяет одномерный класс когомологий). А именно, деформация функции с двумя равными критическими значениями положительна, если правое критическое значение становится больше чем левое, в случае когда оба критических значения являются максимумами (или минимумами). Если одна критическая точка — точка максимума, а другая — точка минимума, то деформация положительна, если она увеличивает значение левой точки по сравнению со значением правой.

Для доказательства того, что таким образом действительно задаётся кооориентация страта Максвелла, достаточно рассмотреть рис. 28 и 70. Подобная конструкция применима и к функциям, ведущим себя на бесконечности подобно x^2.

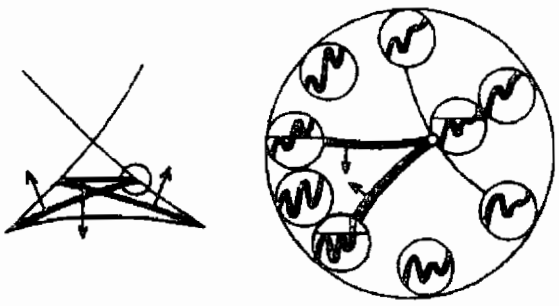


Рис. 70. Кооориентация страта Максвелла в окрестности точки типа A_1A_2

Предостережение. *Не существует никакой естественной кооориентации страта Максвелла в пространстве функций на окружности.*

Конечномерной версией пространства функций с умеренными особенностями является дополнение страта высокой коразмерности в про-

странстве версальной деформации некоторой функции. Случай функций от одной переменной соответствует пространству многочленов

$$\mathbf{R}^N = \{x^{N+1} + a_1 x^{N-1} + \ldots + a_N\}.$$

Рассмотрим область функций без кратных корней кратности, превышающей k, и обозначим её через $D_k(N)$. Например, $D_1(N)$ есть дополнение ласточкина хвоста в N-пространстве, $D_2(N)$ — дополнение (замыкания) его ребра возврата, $D_k(N) = \mathbf{R}^N \setminus$ (замыкание A_k).

Эти пространства описываются в следующей таблице (см. [92]):

N \ k	1	2	3	4	5	6	7
1	$\mathbf{Z}_2$	•	•	•	•	•	•
2	$\mathbf{Z}_2$	S^1	•	•	•	•	•
3	$\mathbf{Z}_3$	S^1	S^2	•	•	•	•
4	$\mathbf{Z}_3$	S^1	S^2	S^3	•	•	•
5	$\mathbf{Z}_4$		S^2	S^3	S^4	•	•
6	$\mathbf{Z}_4$	$\frac{1-t^3}{1-t}$	S^2	S^3	S^4	S^5	•
7	$\mathbf{Z}_5$			S^3	S^4	S^5	S^6
8	$\mathbf{Z}_5$		$\frac{1-t^6}{1-t^2}$	S^3	S^4	S^5	S^6
9	$\mathbf{Z}_6$	$\frac{1-t^4}{1-t}$			S^4	S^5	S^6
10	$\mathbf{Z}_6$				S^4	S^5	S^6
11	$\mathbf{Z}_7$			$\frac{1-t^9}{1-t^2}$		S^5	S^6
12	$\mathbf{Z}_7$	$\frac{1-t^5}{1-t}$	$\frac{1-t^8}{1-t^2}$			S^5	S^6
13	$\mathbf{Z}_8$				$\frac{1-t^{12}}{1-t^4}$		S^6
14	$\mathbf{Z}_6$						S^6

Здесь $\mathbf{Z}_i$ и S^i являются гомотопическими типами, а $p(t)$ — многочленом Пуанкаре. k-й столбец состоит из отрезков, каждый из которых представляет собой повторение $k+1$ раз многочлена Пуанкаре $(1-t^{u(k-1)})/(1-t^{k-1})$, $u = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидные включения $D_k(N) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow D_k(N+1)$ индуцируют изоморфизм гомотопических групп π_i при $k > 1$ и $i \leq ([\frac{N+1}{k+1}]+1)(k-1) - 2$ (В.А.Васильев, [158]).

Индекс, рассматривавшийся выше, есть образующая группы когомологий $H^1(D_2(\infty), \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$. "Почка", изображённая на рис. 68, есть образующая группы $H_1(D_2(N), \mathbf{Z}) \approx \pi_1(D_2(N)) \approx \mathbf{Z}$ при $N > 3$.

Любой полином f, принадлежащий $D_2(N)$, определяет отображение $x \mapsto (f(x), f'(x), f''(x))$, отправляющее $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^3 \setminus 0$. Так как условия на бесконечности не зависят от f, мы получим петлю на сфере S^2 (на которую стягивается $\mathbf{R}^3 \setminus 0$). Васильев доказал, что результирующее отображение

$$D_k(N) \to \Omega S^k,\ k > 2$$

является слабой гомотопической эквивалентностью для размерностей, не превосходящих некоторого значения i, растущего вместе с N (гомологии стабилизируются также и для следующего значения i).

Пример. Стабильные группы $\pi_2(D_2(\infty)) \approx \pi_2(D_2(9)) \approx \mathbf{Z}$. Рассмотрим проекции гладких поверхностей в 3-пространстве на горизонтальную плоскость вдоль вертикальной прямой. Предположим, что все особенности — складки. Наши стабильные гомотопические группы могут быть отождествлены с группами кобордизмов таких проекций.

"Индекс", являющийся единственным инвариантом такого отображения и определяющий его класс кобордизмов, может быть вычислен следующим образом.

Точка на линии складки называется *чётной* (*нечётной*), если чётно (нечётно) число точек пересечения поверхности и вертикальной линии, лежащих между данной точкой и бесконечностью (подсчитанных с кратностями).

Все точки замкнутой линии складки имеют одинаковую чётность. Таким образом, линии складки разделяются на два типа: чётные компоненты и нечётные компоненты.

Индексом поверхности называется коэффициент зацепления объединений чётных и нечётных линий складки (снабжённых естественными ориентациями).

[Ориентация линии складки индуцирует ориентацию соответствующего видимого контура. Этот контур локально является границей образа некоторой окрестности линии складки. Контур должен иметь ориентацию границы этого образа (находящегося на ориентированной горизонтальной плоскости). Это требование определяет естественную ориентацию линии складки.]

Топология пространств функций с умеренными особенностями может быть использована для изучения топологических свойств каустик и волновых фронтов, а также лагранжевых и лежандровых особенностей.

Пример. Индекс кривых, порождающий $H^1(D_2)$, различает два типа лагранжевых сборок.

Рассмотрим особенность типа "сборка" лагранжевой проекции поверхности на плоскость. В некоторой окрестности такой особенности лагранжева поверхность задаётся *производящим семейством* (см. [28]) $F(x,q)$ формулами

$$\{(p,q)|F_x=0,\ p=F_q\},$$

где (p,q) — обычные координаты на кокасательном расслоении и где лагранжева проекция отправляет (p,q) в q. Например, мы можем выбрать $F=\pm x^4+q_1x^2+q_2x$.

Функции из этого семейства, соответствующие точкам q, которые не являются точками возврата, не имеют особенностей сложнее чем A_2. Следовательно, петля, ограничивающая диск в q-плоскости с центром в точке возврата, имеет индекс. Этот индекс равен 1 для точек возврата одного типа, и -1 — для точек возврата другого типа.

Более строго, мы должны выбрать естественную ориентацию q-плоскости, для того чтобы определить петлю.

При определении индекса мы использовали то, что "на бесконечности функция ведёт себя так же, как x"; если бы она вела себя, как $-x$, то индекс поменял бы знак. Следовательно, мы выбрали положительное направление оси x производящей функции таким образом, что $F_x(x,0)$ положительна. Этот выбор задаёт ориентацию ядра проекции и, следовательно, линии складки. Таким образом, в точке лагранжевой сборки кривая критических значений (локально диффеоморфная полукубической параболе) имеет естественную ориентацию. Эта ориентация задаёт естественную ориентацию базовой плоскости (лагранжева расслоения), в которой находится кривая критических значений: эта кривая должна быть ориентирована как граница "острой" ограничиваемой ею области.

Такой граничный индекс типичного двупараметрического семейства функций от одной переменной доставляет нижнюю оценку для числа точек возврата проекции лагранжевой поверхности, задаваемой этим производящим семейством функций.

5.5. Глобальные свойства особенностей

Начнём с примера: рассмотрим гауссово отображение кориентированной поверхности в евклидовом 3-пространстве. Это лагранжево отображение отправляет точку поверхности в единичный нормальный век-

тор, приложенный в нуле. Если поверхность квадратично выпукла, то гауссово отображение не имеет особенностей. Якобиан этого отображения равен гауссовой кривизне поверхности. *Задачей Минковского* называется задача определения выпуклой поверхности, гауссова кривизна которой задана как функция на гауссовой сфере (образе гауссова отображения).

Нетрудно видеть, что эта функция должна быть положительна, и что центр масс сферы (при распределении массы, заданном этой функцией) должён совпадать с её геометрическим центром. Глубокая теорема (Минковского, А.Д.Александрова, Погорелова,...) утверждает, что такое восстановление выпуклой поверхности по данной гауссовой кривизне на гауссовой сфере возможно.

Если поверхность не выпукла (она даже может иметь топологию, отличную от топологии сферы), то ограничение на центр масс все ещё имеет силу. Однако постановка задачи Минковского в этом случае требует более точного описания исходных данных. Мне кажется, что такими данными для невыпуклой проблемы Минковского является гладкое отображение

$$f : (M, \tau^n) \to S^n,$$

где S^n — стандартная гауссова сфера, а M^n — замкнутое многообразие без края, снабжённое невырожденным элементом объема (n-формой) τ. Прямой образ формы τ при отображении f является плотностью на гауссовой сфере, центр масс которой должён находиться в центре сферы. В выпуклом случае f есть тождественное отображение и $\tau = \omega/K$, где ω — стандартный элемент площади, а K — гауссова кривизна сферы.

Таким образом, в общем случае гауссова кривизна на M должна заменяться якобианом $J = (f^*\omega)/\tau$ отображения f. Тогда возникает проблема: *какие функции на M являются якобианами гладких отображений из (M, τ) в стандартную сферу?* Разумеется, интеграл от такой функции должен равняться объёму стандартной сферы. Образ множества $J \geq 0$ должен покрывать сферу. Но существуют ли другие ограничения? *Подобные проблемы возникают и для произвольных лагранжевых отображений (гауссово отображение — только частный случай таких отображений), и для гауссовых отображений (иммерсированных или вложенных гиперповерхностей).*

Эти задачи далеки от своего разрешения. Рассмотрим, например, самый простой случай: какая функция может быть якобианом отображения сферы на плоскость? Другими словами, какие дифференциальные 2-формы на сфере представимы в виде произведения двух замкну-

тых 1-форм? Локально такое представление всегда возможно, но для глобального представления необходимо, чтобы эта 2-форма была точной (интеграл от неё должен равняться нулю).

Теорема. *Любая типичная точная 2-форма на 2-сфере индуцирована элементом площади евклидовой плоскости при помощи типичного гладкого отображения сферы на плоскость.*

(Сравните с результатом из [139].)

Рассмотрим нули данной точной 2-формы общего положения. Первое условие общности положения требует, чтобы эти нули образовывали гладкую кривую (если форма записывается в виде $h\tau$, где τ — элемент площади, то требование такое: 0 не является критическим значением гладкой функции h). Компоненты этой кривой делят сферу на области, в которых якобиан сохраняет знак. Второе условие общности положения требует, чтобы интегралы от формы по этим областям были нерезонансными (то есть они не должны удовлетворять конечному множеству линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами). Достаточна, например, рациональная независимость этих интегралов.

Условие общности положения на отображение заключается в том, что оно имеет только расположенные общим образом особенности типа складок и сборок Уитни (из чего следует устойчивость такого отображения).

Определение. *Типичным деревом* называется граф, вершинами которого являются области, на которых якобиан положительно определён, и рёбра которого соединяют те области, которые разделены компонентами кривой нулей.

Пример. Дерево стандартной проекции сферы на её экваториальную плоскость записывается следующим образом: $\bullet - \bullet$, вершинами являются северная и южная полусферы, ребром — экватор.

Типичная форма на сфере определяет дерево и положительную функцию на этом дереве (то есть на множестве вершин): интегралы вдоль областей, ориентированных формой. Знакочередующаяся сумма значений этой функции равна нулю. Дерево и эта функция являются единственными инвариантами типичной 2-формы на 2-сфере.

Определение. *Дефектом функции* на корневом дереве называется разность между суммой её значений в чётных вершинах (соединённых

с корнем чётным числом рёбер) и суммой значений в нечётных (остальных) вершинах.

Любая положительная функция с нулевым дефектом на некотором дереве реализуется некоторой невырожденной 2-формой на 2-сфере.

Определение. *Дефектом корневого дерева* называется дефект постоянной функции 1 (то есть разность чисел чётных и нечётных вершин).

Теорема. *Типичная 2-форма на 2-сфере может быть получена из элемента площади на плоскости при помощи отображения, единственными особенностями которого являются складки, если и только если её дерево имеет нулевой дефект.*

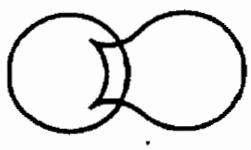
Число точек возврата типичного отображения, индуцирующего форму с данным деревом, ограничено снизу удвоенным дефектом дерева.

В действительности, всегда существует способ так распределить знаки точек возврата, что их число, подсчитанное с учётом знаков, равно удвоенному дефекту дерева [140].

А именно, точка возврата *положительна*, если чётна область, диффеоморфно отображаемая во внутренность "рога", образованного критическими значениями в некоторой окрестности этой точки.

Пример. Корневое дерево $\circ - \bullet - \bullet$, дефект которого равен 1, реализуется отображением (2-сферы на плоскость), изображённым на рис. 71. Обе точки возврата положительны.

Рис. 71. Реализация дерева с тремя вершинами отображением сферы в плоскость



Подобные результаты справедливы для отображений других поверхностей на плоскость, при условии, что компоненты знакоопределённости являются проколотыми дисками. Граф, соответствующий такой форме на ориентируемой поверхности рода g, гомотопически эквивалентен букету g окружностей. Он не имеет нечётных циклов, следовательно его дефект корректно определён.

5.6. Топология лагранжевых включений

Рассмотрим отображение гладкого многообразия в симплектическое пространство. Такое отображение называется *изотропным*, если оно индуцирует нулевую форму из симплектической структуры.

Пример. Иммерсия лагранжева многообразия (или его подмногообразия) является изотропным отображением.

Естественным путём определения особых лагранжевых многообразий является рассмотрение изотропных отображений многообразий, имеющих подходящую размерность (равную половине размерности объемлющего симплектического многообразия). Такое отображение называется *лагранжевым включением*, если его особые точки образуют подмногообразие меньшей размерности.

Пример. Рассмотрим пространство конормального расслоения полукубической параболы:

$$\{(p,q)|q_1 = t^2,\ q_2 = t^3,\ p_1 2 + p_2 3t = 0\}.$$

Оно может быть параметризовано формулами

$$q_1 = t^2, \quad q_2 = t^3, \quad p_1 = -3st, \quad p_2 = 2s,$$

задающими изотропное отображение, образом которого является поверхность в симплектическом 4-пространстве, единственная особенность которой находится в нуле. Эта поверхность гомеоморфна 2-плоскости.

Гивенталь в [141] назвал эту поверхность *раскрытым зонтиком*. Её проекция в 3-пространство вдоль p_2-оси есть обычный *зонтик Уитни–Кэли*.

Раскрытый зонтик является лагранжевой поверхностью с единственной особой точкой. Эта точка может быть сглажена в классе всех поверхностей в 4-пространстве (так как пересечение этой поверхности с малой 3-сферой с центром в особой точке незауэлено). Однако, эта особенность не может быть сглажена в классе лагранжевых подмногообразий, так как индекс Маслова петли, охватывающей особую точку, не равен нулю (в зависимости от ориентации он равен ± 2).

Гивенталь доказал, что эта особенность изотропного включения устойчива: любое близкое изотропное включение при помощи диффеоморфизма поверхности и симплектоморфизма пространства может

быть приведено к виду, указанному в предыдущем примере, в близкой точке исходной поверхности.

Гипотеза Гивенталя. *Лагранжевы включения поверхностей, единственными особенностями которых являются раскрытые зонтики (и, разумеется, самопересечения), плотны в пространстве всех лагранжевых включений.*

На уровне струй, плохое множество в этой проблеме имеет коразмерность 7, следовательно, кажется убедительным предположение о том, что типичное лагранжево вложение размерности 2 не пересекает его. Однако, доказательство не может быть сведено к обычным аргументам трансверсальности, так как уравнение, определяющее изотропное вложение ($f^*\omega = 0$, где f — вложение, а ω — симплектическая форма), *квадратично* по отношению к f.

Таким образом, в гипотезе рассматриваются "типичные" отображения в многообразие, заданное системой квадратичных однородных уравнений. Это многообразие является очень вырожденным конусом, который может иметь компоненты различных размерностей. Можно дать много, априори неэквивалентных, естественных определений "типичности" отображений в этот конус (эта же сложность встречается в проблеме классификации "типичных" алгебр Ли данной размерности, в которой тождество Якоби — система квадратичных уравнений).

Возможно, простейшей проблемой такого типа является задача классификации "типичных" отображений из плоскости в плоскость, якобиан которых тождественно равен нулю.

Раскрытый зонтик появляется в теории систем лучей в следующей ситуации. Рассмотрим гиперповерхность $2n$-мерного симплектического пространства и $(n-1)$-мерное изотропное подмногообразие в этой гиперповерхности (мы будем называть его *начальным многообразием*).

Лучи (характеристики гиперповерхности), проходящие через точки начального многообразия, образуют (локально) подмногообразие в $(2n-2)$-мерном симплектическом многообразии характеристик. Это подмногообразие изотропно и в общем случае $(n-1)$-мерно. При $n=3$ это подмногообразие является лагранжевым включением поверхности. В [8] Гивенталь доказал, что единственными особенностями соответствующих лагранжевых включений являются раскрытые зонтики (при условии, что начальное многообразие принадлежит некоторому открытому и плотному множеству в пространстве всех подмногообразий размерности $n-1$).

Раскрытые зонтики бóльших размерностей являются пространствами конормальных расслоений раскрытых ласточкиных хвостов подходящих размерностей. *Раскрытым ласточкиным хвостом* размерности m называется множество многочленов

$$\{x^{2m+1} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m} = (x-t)^{m+1}(x^m + \ldots)\},$$

имеющих корень кратности, превышающей m. Это подмногообразие лагранжево в пространстве многочленов нечётной степени, снабжённом симплектической структурой, описанной в §1.1.

Пример. Полукубическая парабола на плоскости является одномерным раскрытым ласточкиным хвостом. Двумерный раскрытый ласточкин хвост в 4-пространстве многочленов пятой степени изображён на рис. 10.

Естественная проекция (определяемая кратным дифференцированием многочленов) отправляет $2m$-мерное пространство многочленов степени $2m+1$ в $(m+1)$-мерное пространство многочленов степени $m+2$. Этой проекцией "раскрытый" ласточкин хвост размерности m отображается на обычный m-мерный ласточкин хвост (образованный многочленами, имеющими кратный корень). Это отображение однозначно везде, за исключением линии самопересечения ласточкина хвоста (при $n=2$). Каждая точка этой линии, за исключением вершины ласточкина хвоста, имеет 2 прообраза на раскрытом ласточкином хвосте. Топологически раскрытый ласточкин хвост гомеоморфен евклидову пространству. Этот гомеоморфизм сохраняет все особенности обычного ласточкина хвоста, за исключением самопересечений. Таким образом, "поднятие" обычного ласточкина хвоста на раскрытый (топологически эквивалентное "нормализации" в алгебраической геометрии) упрощает топологическую структуру и разрезает некоторые петли в точках самопересечения. Название "раскрытый" как раз и отражает этот факт. Как мы увидим ниже, раскрытые ласточкины хвосты управляют особенностями систем лучей на препятствии. Здесь же мы используем эти m-мерные особые лагранжевы многообразия для определения раскрытых зонтиков. Забудем про симплектическую структуру объемлющего $2m$-мерного пространства. Конормальное расслоение m-мерного раскрытого ласточкина хвоста лежит в $4m$-мерном симплектическом пространстве кокасательного расслоения над пространством многочленов. Это многообразие лагранжево, чётной размерности $2m$, оно является образом лагранжева включения.

Особенности $2m$-мерного раскрытого зонтика образуют флаг подмногообразий чётных размерностей, причём $2k$-мерное подмногообразие этого флага изоморфно $2k$-мерному раскрытому зонтику.

Другими (эквивалентными) определениями $2m$-мерного раскрытого зонтика являются:

1) Подмногообразие в пространстве пар многочленов

$$\{e_{2m+1} + q_1 e_{2m-1} + \ldots + q_{2m} e_0, \quad p_{2m} e_{2m-1} - p_{2m-1} e_{2m-2} + \ldots - p_1 e_0\}$$

(где $e_s = x^s/s!$), образованное парами, имеющими общий корень кратности не меньшей $(m+1, m)$.

2) Компонента особого лагранжева многообразия, задаваемого вырожденным производящим семейством

$$F(x, q, Q) = \int_0^x (Q_1 \xi^{m-1} + \ldots + Q_m)(\xi^{m+1} + q_1 \xi^{m-1} + \ldots + q_m)\, d\xi.$$

Это семейство задаёт лагранжево многообразие

$$\left\{p = \frac{\partial F}{\partial q}, \;\; P = \frac{\partial F}{\partial Q}, \;\; F_x = 0\right\},$$

компоненту $x^{m+1} + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m = 0$ которого мы и рассматриваем.

Возвращаясь к системам лучей, рассмотрим обычную ситуацию: систему нормалей к гиперповерхности в евклидовом пространстве, или систему характеристик уравнения Гамильтона–Якоби, соответствующих данным начальным значениям неизвестной функции, ограниченной на гиперповерхность в конфигурационном пространстве.

В этом случае типичные граничные условия определяют лагранжево подмногообразие, трансверсально пересекающее гиперповерхность (задающую уравнение Гамильтона–Якоби). Следовательно, соответствующая система лучей является иммерсированным лагранжевым подмногообразием пространства лучей, не имеющим особенностей типа раскрытых зонтиков.

Как было упомянуто выше, поверхности с ненулевой эйлеровой характеристикой не могут быть иммерсированы в симплектические пространства как лагранжевы подмногообразия. Однако, Гивенталь построил лагранжевы включения в стандартное симплектическое 4-пространство поверхностей с произвольной эйлеровой характеристикой

$\chi \leq -2$. Эти включения могут быть выбраны таким образом, что они не имеют точек самопересечения, в этом случае образ включения гомеоморфен прообразу [141]. Может случиться, что эти включения не точны.

Рассмотрим произвольное лагранжево включение поверхности L^2 в симплектическое многообразие M^4. Гивенталь доказал, что

$$L \cdot L = \chi(L) + 2s + u,$$

где u — число раскрытых зонтиков, s — число точек самопересечения, χ — эйлерова характеристика, $L \cdot L$ — индекс самопересечения образа фундаментального цикла многообразия L в $H_2(M)$. Самопересечения подсчитываются с учётом знаков, определяемых ориентацией L (если L не ориентируемо, то формула справедлива по модулю 2).

Из этой формулы вытекает, что точка самопересечения или 2 вершины раскрытых зонтиков могут рассматриваться как "антиручка". Действительно, в некоторой окрестности любой точки вложенного лагранжева многообразия мы можем приделать малую лагранжеву ручку, на которой есть либо точка самопересечения, либо 2 раскрытых зонтика. Получившееся особое лагранжево многообразие также вложено (в случае зонтиков ручка нарушает ориентацию).

Эта конструкция может даже сохранять точность многообразия: если исходное лагранжево многообразие является проекцией лежандрова, то прикрепление ручки может быть произведено таким образом, что полученное лагранжево многообразие также является образом проекции особого лежандрова многообразия.

Ручки могут быть описаны в терминах фронтов, соответствующих точным лагранжевым многообразиям в $\mathbf{R}^4 = T^*\mathbf{R}^2$. Во первых поднимем многообразие до лежандрова подмногообразия в $\mathbf{R}^5 = J^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, а затем спроектируем его в 3-пространство $J^0(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^3$. Образ этой проекции и есть фронт.

Фронт типичной гладкой лагранжевой поверхности имеет только полукубические рёбра возврата и ласточкины хвосты. Касательная плоскость нигде не вертикальна (трансверсальна слоям естественного расслоения $J^0(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \twoheadrightarrow \mathbf{R}^2$). Самопересечения лагранжевой поверхности соответствуют вертикальным хордам фронта, в конечных точках которых касательные плоскости к фронту параллельны.

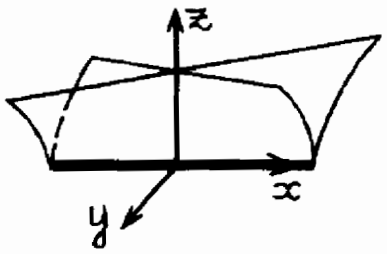
Раскрытые зонтики лагранжева многообразия соответствуют особенностям фронта типа "сложенный зонтик". Нормальная форма *сложенного зонтика* — это поверхность в 3-пространстве, задаваемая

формулой

$$y^2 = z^3x^2.$$

Эта поверхность, имеющая полукубические рёбра возврата и линию самопересечения, изображена на рис. 72. Эта особенность встречается во многих задачах теории особенностей.

Рис. 72. Сложенный зонтик



Пример 1. Рассмотрим движущуюся каустику (типичное однопараметрическое семейство каустик) в 3-пространстве. Рёбро возврата этой каустики заметает поверхность, называемую *бикаустикой*. Типичные особенности бикаустик изучались в [72], [142]. Сложенный зонтик — одна из таких особенностей.

Пример 2. Рассмотрим объединение касательных прямых к типичной проективной кривой в пространстве. Это объединение является *развёртывающейся поверхностью*, ребро возврата которой есть исходная прямая. Типичная кривая может иметь изолированные *точки уплощения* (в которых равно нулю кручение). Поверхность, образованная касательными, в таких точках особа, особенность — сложенный зонтик ([143], [144]).

Пример 3. В 3-пространстве рассмотрим типичную поверхность с обычным ребром возврата. Рассмотрим типичное *отображение складывания* этого 3-пространства (в подходящих координатах задаваемое формулами $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$). Образ поверхности имеет особенности типа сложенный зонтик в точках пересечения ребра возврата с поверхностью складки. Этот пример вместе с топологической эквивалентностью сложенного зонтика и зонтика Уитни и дали название "сложенный зонтик".

Пример 4. Сложенный зонтик доставляет некоторые нормальные формы типичных особенностей в теории Давыдова медленного движения в *релаксационных системах* с одной быстрой и двумя медленными переменными (см. [145]–[147]).

Обсуждение многомерных обобщений сложенных зонтиков имеется в [8].

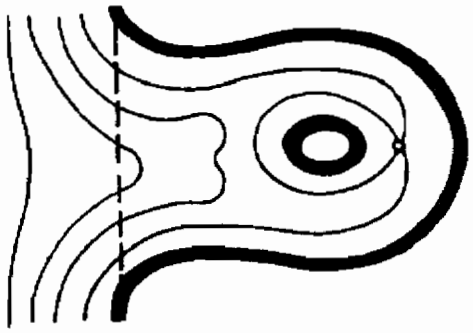


Рис. 73. Фронт лагранжевой ручки с одной точкой самопересечения

Вернёмся к прикреплению лагранжевых ручек. Начнём со стандартного фронта с обычным ребром возврата, локально задаваемого уравнением $y^2 = x_1^3$ в координатах (x_1, x_2, y) на пространстве J^0. Новые фронты с ручками изображены на рис. 73 (одна точка самопересечения лагранжевой иммерсии) и на рис. 74 (два раскрытых зонтика на лагранжевом включении). Фронты симметричны относительно плоскости $y = 0$; линии уровня функции y на фронтах изображены на рисунках. Из этой симметрии вытекает то, что единственные возможные самопересечения лагранжева многообразия встречаются в точках фронта, в которых касательное пространство горизонтально, то есть в особых точках линий уровня. Таким образом, на рис. 73 изображена одна точка самопересечения лагранжева многообразия, а на рис. 74 таких точек нет.

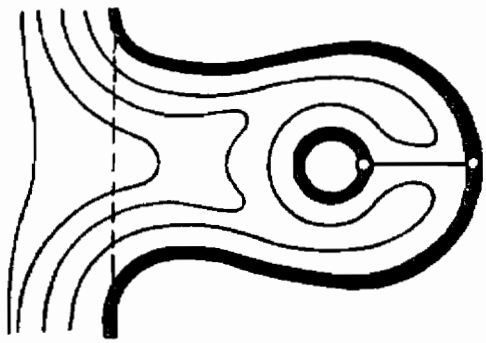


Рис. 74. Фронт лагранжевой ручки с двумя раскрытыми зонтиками

Из приведённой выше конструкции Гивенталя следует, что уничтожение пар раскрытых зонтиков лагранжевых включений поверхности возможно, если поверхность имеет достаточное число ручек.

Теорема. *Замкнутая неориентируемая поверхность, эйлерова характеристика которой отрицательна и кратна* 4, *допускает нео-*

собое лагранжево вложение в стандартное симплектическое 4-пространство.

(Доказательство имеется в [141].)

Неизвестно, допускают ли бутылка Клейна, проективная плоскость и поверхность эйлеровой характеристики -1 гомеоморфные лагранжевы включения в стандартное 4-пространство (включения, имеющие раскрытые ласточкины хвосты и самопересечения, были построены Гивенталем в [141]).

5.7. Примечание

Начиная с 1993 года исследования симплектических обобщений упоминавшихся во Введении теорем о четырёх вершинах и четырёх омбилических точках привели к созданию теории инвариантов и перестроек кривых и волновых фронтов на плоскости [192]–[196], связанной с теорией инвариантов узлов. Появились работы об оценках числа точек уплощений кривых в многомерных проективных пространствах, числа точек возврата на каустиках лагранжевых цилиндров, близких к системе нормалей окружности (лагранжевых коллапсов), и многие другие [194].

Обобщение теоремы о четырёх омбилических точках получил М.Э.Казарян [191]. Число таких особенностей с учётом специально выбранных знаков является топологическим инвариантом трёхмерных лагранжевых многообразий, оснащённых касательным векторным полем, имеющим регулярную проекцию на базу лагранжева расслоения. Он же [187] построил новые когомологические спектральные последовательности стратификаций лагранжевых или лежандровых иммерсий, учитывающие вместе с каждым лагранжевым (лежандровым) классом группу симметрий данной особенности и указал на связь теоремы о четырёх вершинах с циклическими гомологиями [197].

В этих работах получены новые (по сравнению с работами В.А.Васильева) лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Показано, что построенные спектральные последовательности сходятся к когомологиям стабильных лагранжевых (лежандровых) грассманианов. Из этого вытекают новые топологические ограничения на сосуществование лагранжевых и лежандровых особенностей.

6 Проектирования поверхностей и особенности видимых контуров

Отображения проекций (проектирования) встречаются весьма часто. Например, мы различаем объекты по видимым контурам их проекций на сетчатку нашего глаза, то есть по критическим значениям этих проектирований.

Особенности проектирований важны также в теории бифуркаций положений равновесия динамических систем. В этом случае проектируемое многообразие лежит в произведении пространства параметров и фазового пространства динамической системы: оно образовано положениями равновесия для всех значений параметра. Особенности проектирований этого многообразия на пространство параметров ответственны за бифуркации положений равновесия при изменении значений параметров.

Отличие теории особенностей проектирований от общей теории особенностей заключается, главным образом, в меньшем запасе допустимых отображений. Определение эквивалентности проектирований также отличается от общего определения (RL-) эквивалентности отображений. А именно, два проектирования (подмногообразий пространств расслоений на соответствующие базы) эквивалентны, если существует диффеоморфизм из пространства первого расслоения в пространство второго, расслоённый над диффеоморфизмом баз, отображающий первое подмногообразие на второе.

В этой главе мы обсудим классификацию особенностей проектирований с точностью до этого отношения эквивалентности.

6.1. Особенности проектирований поверхности на плоскость

Рассмотрим поверхность в 3-пространстве. Согласно классической теореме Уитни, особенности таких типичных проектирований — это складки (вдоль линий критических точек) и сборки (в изолированных точках). Однако, проектируя типичную поверхность вдоль некоторых направлений, мы можем получить более сложные особенности. Другими словами, типичная поверхность, рассматриваемая вдоль некоторых направлений, может иметь необычную форму.

Число различных типов, получаемых таким образом (глядя в подходящем направлении из точки вне поверхности), равно 14. Их изучение основывается на анализе векторных полей, касающихся (обобщённых) ласточкиных хвостов.

Проектированием поверхности M, лежащей в проективном пространстве $\mathbf{R}P^3$, из точки O, не принадлежащей M, называется диаграмма $M \hookrightarrow \mathbf{R}P^3 \setminus O \twoheadrightarrow \mathbf{R}P^2$, где левая стрелка — включение, а правая — проектирование, отображающее точку в прямую, соединяющую эту точку с O.

Ростком проектирования называется аналогичная диаграмма ростков. Два проектирования (ростки проектирований) *эквивалентны*, если существует коммутативная (3×2)-диаграмма, строки которой — проектирования (ростки проектирований), а столбцы — диффеоморфизмы (ростки диффеоморфизмов).

Плоскость $\mathbf{R}P^2$, на которую мы проектируем, называется *базой* проектирования. Таким образом, эквивалентность подразумевает существование диффеоморфизма объемлющего 3-пространства, расслоённого над некоторым диффеоморфизмом базовых пространств.

Композиции $M \to \mathbf{R}P^2$, определённые эквивалентными проектированиями, RL-эквивалентны (то есть могут быть преобразованы друг в друга при помощи диффеоморфизмов отображаемой поверхности M и пространства $\mathbf{R}P^2$).

Видимые контуры (то есть множества критических значений) эквивалентных проектирований диффеоморфны. Следовательно классификация ростков проектирований с точностью до эквивалентности проектирований влечёт за собой классификацию видимых контуров с точностью до диффеоморфизмов. Однако, из диффеоморфности видимых контуров не следует эквивалентность проектирований.

Иерархия ростков типичных проектирований изображена на рис. 75 (она была построена О.А.Платоновой [9] и исправлена О.П.Щербаком [13], [148]). Рисунки обозначают ростки проектирований, эквивалентных росткам проектирований поверхностей $z = f(x, y)$ вдоль оси x. В неособом случае 1 функция f равна x; остальные функции f таковы:

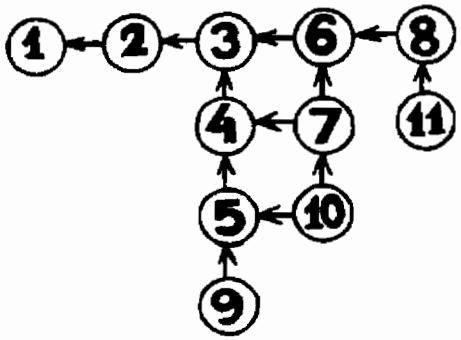


Рис. 75. Иерархия ростков проектирований

тип	$f(x,y)$	тип	$f(x,y)$
2	x^2	**7**	$x^4+x^2y+xy^2$
3	x^3+xy	**8**	$x^5\pm x^3y+xy$
4	$x^3\pm xy^2$	**9**	$x^3\pm xy^4$
5	x^3+xy^3	**10**	$x^4+x^2y+xy^3$
6	x^4+xy	**11**	x^5+xy

Теорема. *Проектирование типичной поверхности не имеет ростков, неэквивалентных перечисленным выше* 14 *росткам* (*при любом выборе центра проектирования* (*вне проектируемой поверхности*)).

Соответствующие особенности видимых контуров изображены на рис. 76. Росток проектирования из типичного центра имеет тип **1** в типичных точках на поверхности, тип **2** (складку) в точках на некоторой линии на поверхности и тип **3** (сборку) в некоторых изолированных точках. А именно, сборки появляются, если направление проектирования совпадает с асимптотическим направлением поверхности.

Для описания других особенностей, видимых только вдоль специфических направлений, нам потребуется проективная классификация точек на типичной поверхности в проективном 3-пространстве (О.А.Платонова [9], Е.Е.Ландис [25], рис. 77).

Гладкая *кривая параболических точек* $\Pi_{3,2}$ делит поверхность на *область эллиптических точек* Π_2 (не имеющую вещественных касательных, порядок касания которых превышает 2) и *область гиперболических точек* $\Pi_{3,1}$ (в каждой точке которой имеется пара таких касательных, называемых *асимптотическими прямыми*; их направления в точках касания называются *асимптотическими направлениями*). В этих обозначениях первый индекс равен максимальной кратности пе-

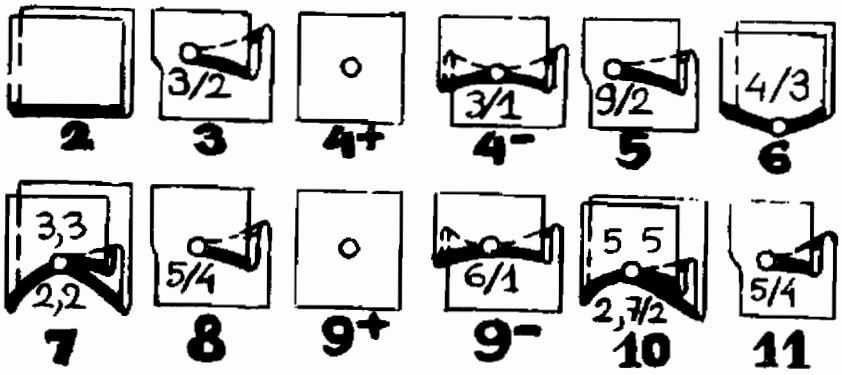


Рис. 76. Особенности видимых контуров типичной поверхности

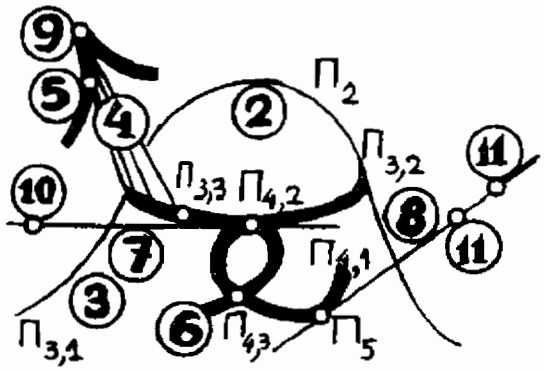


Рис. 77. Тангенциальные особенности поверхности в проективном 3-пространстве

ресечения касательной прямой с поверхностью (порядок касания равен этой кратности минус 1).

В область гиперболических точек гладко иммерсирована *кривая перегибов асимптотических линий* $\Pi_{4,1}$ (порядок касания асимптотической касательной прямой превышает 2). Эта кривая содержит множество изолированных *точек биперегиба* Π_5 (касание 4-го порядка) и множество *точек самопересечения* $\Pi_{4,3}$ (обе асимптотические касательные имеют касание 3-го порядка). В *точках* $\Pi_{4,2}$ кривая перегибов имеет касание (1-го порядка) с кривой параболических точек (в этих точках единственное асимптотическое направление касается кривой параболических точек). И наконец, кривая параболических точек имеет изолированные *точки типа* $\Pi_{3,3}$, описание которых приведено ниже.

Получающаяся иерархия классов точек на поверхности изображена на рис. 78 (находящиеся в одном столбце классы имеют одинаковую коразмерность).

Поверхность, проективно двойственная нашей типичной гладкой поверхности, имеет полукубическое ребро возврата в точках, соответствующих $\Pi_{3,2}$ и $\Pi_{3,3}$, и ласточкины хвосты в точках, соответствующих $\Pi_{4,2}$. В этих точках p-струи поверхности проективны-

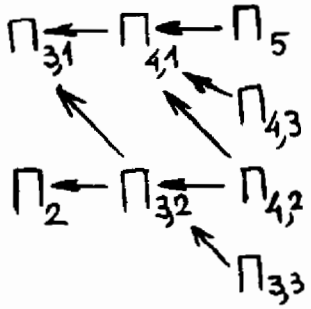


Рис. 78. Иерархия тангенциальных особенностей

ми преобразованиями приводятся к следующим нормальным формам (см. [9]):

класс	нормальная форма	ограничения	p	codim
Π_2	x^2+y^2	-	2	0
$\Pi_{3,1}$	$xy \pm x^3+y^3$	-	3	0
$\Pi_{3,2}$	$y^2+x^3+xy^3+ax^4$	-	4	1
$\Pi_{4,1}$	$xy+y^3+x^4+hx^3y$	-	4	1
$\Pi_{4,2}$	$y^2+x^2y+ux^4$	$u \neq 0, \frac{1}{4}$	4	2
$\Pi_{4,3}$	$xy+x^4+ax^3y+bxy^3 \pm y^4$	-	4	2
Π_5	$xy+y^3 \pm x^3y+\phi_5$	$\phi_5(0,y) \neq 0$	5	2
$\Pi_{3,3}$	$y^2+x^3+ax^4+by^5 \pm xy^4+x^2\phi_3$	-	5	2

Здесь ϕ_r — некоторый однородный многочлен степени r от x и y.

Теорема. *Любая p-струя типичной поверхности проективно эквивалентна p-струе поверхности $z=f(x,y)$, где f — одна из приведённых в предыдущей таблице нормальных форм.*

Замечание. Для типичной алгебраической поверхности степени d в $\mathbf{C}P^3$ числа точек в классах коразмерности 2 зависят только от d. Эти числа равны (согласно [149], [26], [150]):

$$\begin{array}{cc} \Pi_5 & \Pi_{4,3} \\ 5d(d-4)(7d-12) & 5d(7d^2-28d+30) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \Pi_{4,2} & \Pi_{3,3} \\ 2d(d-2)(11d-24) & 10d(d-2)(7d-16) \end{array}$$

Степени кривых, образованных точками классов коразмерности 1, равны, соответственно:

$$\begin{array}{cc} \Pi_{3,2} & \Pi_{4,1} \\ 4d(d-2) & d(11d-24) \end{array}$$

Следствие. *Вещественная алгебраическая поверхность в* $\mathbf{R}P^3$ *достаточно высокой нечётной степени имеет, как минимум, одну вещественную точку биперегиба асимптотических кривых, как минимум, одну вещественную точку перегиба обеих асимптотических кривых и, как минимум, одну кривую параболических точек.*

Замечание. Аналогичные результаты, касающиеся гиперповерхностей в $\mathbf{C}P^4$, имеются в [151], [152].

Вернёмся к описанию проектирований из нетипичных центров (см. рис. 77). Особенности **4** и **6** появляются при проектировании из точек, принадлежащих некоторым поверхностям (образованным, соответственно, асимптотическими касательными прямыми в параболических точках и в точках перегиба асимптотических кривых). Таким образом, для того чтобы увидеть особенность 4, нужно рассматривать типичную поверхность из типичной точки на асимптотической прямой, касающейся исходной поверхности в типичной параболической точке. Для того чтобы увидеть особенность **6**, нужно выбрать центр проектирования на асимптотической касательной 3-го порядка.

Особенности **5**, **7** и **8** встречаются при проектировании из точек, принадлежащим некоторым кривым. А именно, для того чтобы увидеть особенность **5**, нужно рассматривать типичную поверхность из типичной точки на ребре возврата поверхности, образованной асимптотическими касательными прямыми в параболических точках (эта поверхность является развёртывающейся и имеет ребро возврата).

Особенность **7** встречается при проектировании из типичной точки, принадлежащей асимптотической прямой, которая касается кривой параболических точек (то есть выходит из $\Pi_{4,2}$). Особенность **8** видна из типичных точек на асимптотической касательной, порядок касания которой равен 4.

Самые редкие особенности **9**, **10** и **11** видны лишь из изолированных точек. Именно, особенность **9** видна из некоторой точки на ребре возврата описанной выше развёртывающейся поверхности (соответствующая асимптотическая прямая касается поверхности в точке $\Pi_{3,3}$). Особенность **11** видна из двух "фокальных" точек на асимптотической касательной порядка 4. Особенность **10** встречается при проектировании из некоторой точки на асимптотической прямой, касающейся (в $\Pi_{4,2}$) кривой параболических точек.

Эта классификация проектирований следующим образом связана с векторными полями, касающимися ласточкиных хвостов.

Рассмотрим пересечение прямой, задающей направление проектирования, с поверхностью как 0-мерное подмногообразие этой прямой. Для типичной прямой такие пересечения — трансверсальные, но в особых точках точки пересечения сливаются. Таким образом, каждая особенность проектирования поверхности в 3-пространстве на плоскость задаёт 2-параметрическую деформацию 0-мерного подмногообразия прямой (состоящего из μ слившихся точек, где μ есть кратность пересечения в точке касания, задающей проекцию прямой с поверхностью). Эти 2 параметра определяют прямую в пространстве расслоения: базой деформации является (росток) проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$ прямых, проходящих через центр проектирования. Эта 2-параметрическая деформация, как и любая другая, эквивалентна индуцированной из версальной деформации. Следовательно, она определяет отображение базы нашей деформации в базу соответствующей версальной деформации (т. е. в пространство, содержащее обобщённый ласточкин хвост — дискриминант особенности типа A_μ). Например, при $\mu = 3$ мы получим поверхность, содержащую вершину обычного ласточкина хвоста в $\mathbf{R}^3$.

Диффеоморфизм базы версальной деформации, сохраняющий (обобщённый) ласточкин хвост, преобразует нашу поверхность к некоторому виду. Получившаяся новая поверхность задаёт новую 2-параметрическую деформацию μ-кратной точки, а следовательно, и новое проектирование. Это новое проектирование эквивалентно исходному в определённом выше смысле эквивалентности проектирований (более подробно см. [98]).

Таким образом, для приведения проектирования к нормальной форме, достаточно привести к нормальной форме соответствующую поверхность в пространстве, содержащем (обобщённый) ласточкин хвост, при помощи сохраняющего ласточкин хвост диффеоморфизма. Знание векторных полей, касающихся ласточкиных хвостов, позволяет привести к нормальным формам различные объекты в содержащих ласточкины хвосты пространствах сохраняющими ласточкины хвосты диффеоморфизмами (можно использовать стандартные гомотопические методы и квазиоднородность или спектральные последовательности). Более подробное изложение имеется в [98], [1].

Проектирования поверхности из точек 3-пространства образуют 3-параметрическое семейство отображений. В типичных 3-параметрических семействах отображений поверхности на плоскость появляются некоторые особенности, не эквивалентные перечисленным в списке 1–11. Следуя вычислениям В.В.Горюнова, такие особенности эквива-

лентны росткам в начале координат проектирований вдоль оси x поверхностей

$$z = x^4 \pm x^2y^2 + xy^2,$$
$$z = x^5 + x^3y + x^2y,$$
$$z = x^6 + ax^4y + x^3y + xy.$$

Теорема Платоновой и Щербака говорит о том, что эти особенности не встречаются при проектировании типичной поверхности в 3-пространстве из произвольной точки. Причиной этого является строгая взаимосвязь между проектированиями из точек на одной и той же прямой проектирования: 3-параметрические семейства, появляющиеся в этой задаче достаточно специальны.

Рассмотрим, например, последнюю особенность из этого списка, для которой $\mu = 6$. Типичное проектирование имеет изолированные сборки, для которых $\mu = 3$. Следовательно, типичное 3-параметрическое семейство имеет изолированные точки, в которых $\mu = 6$. Но кратность пересечения прямой, задающей проектирование, с поверхностью не зависит от выбора центра проектирования на этой прямой. Следовательно, изолированные центры, в которых изменяется кратность, невоэможны. Действительно, пространство касательных прямых трёхмерно. Каждое повышение на 1 порядка касания налагает одно ограничение на касательную прямую. Следовательно, максимальный порядок касания равен 4 (максимальная кратность пересечения равна 5). Следовательно, не существует центра проектирования в 3-пространстве, для которого встречается особенность с $\mu = 6$ (при условии, что проектируемая поверхность — общего положения).

Те же рассуждения показывают, что особенности с $\mu = 6$ не встречаются при проектировании типичных поверхностей вдоль экстремалей произвольной вариационной задачи (и даже вдоль кривых произвольного 4-параметрического семейства кривых в 3-мерном многообразии).

Подобные причины объясняют отсутствие остальных двух особенностей коразмерности 3 из списка Горюнова (эти причины были найдены О.П.Щербаком): они скорее отражают свойства прямой, задающей проектирование, нежели свойства центра проекции. Особенность $x^5 + x^3y + x^2y$ возможна только при проектировании из точки на асимптотической касательной, имеющей 4-й порядок касания с поверхностью в параболической точке. Однако, типичные поверхности не имеют таких касательных.

Особенность $x^4 \pm x^2y^2 + xy^2$ возможна только при проектировании из точки на асимптотической касательной, имеющей 3-й порядок касания с поверхностью в особой точке кривой, состоящей из параболических точек. Однако, типичная поверхность не имеет таких точек.

Особенности проектирований пучком параллельных прямых были классифицированы в [98] (10 типов; отсутствуют 4 особенности типов **9**, **10**, **11**). Этот список совпадает со списком особенностей типичных 2-параметрических семейств проекций (Горюнов) и со списком особенностей, чья лево-правая коразмерность не превышает 2 (см. [153], [133]).

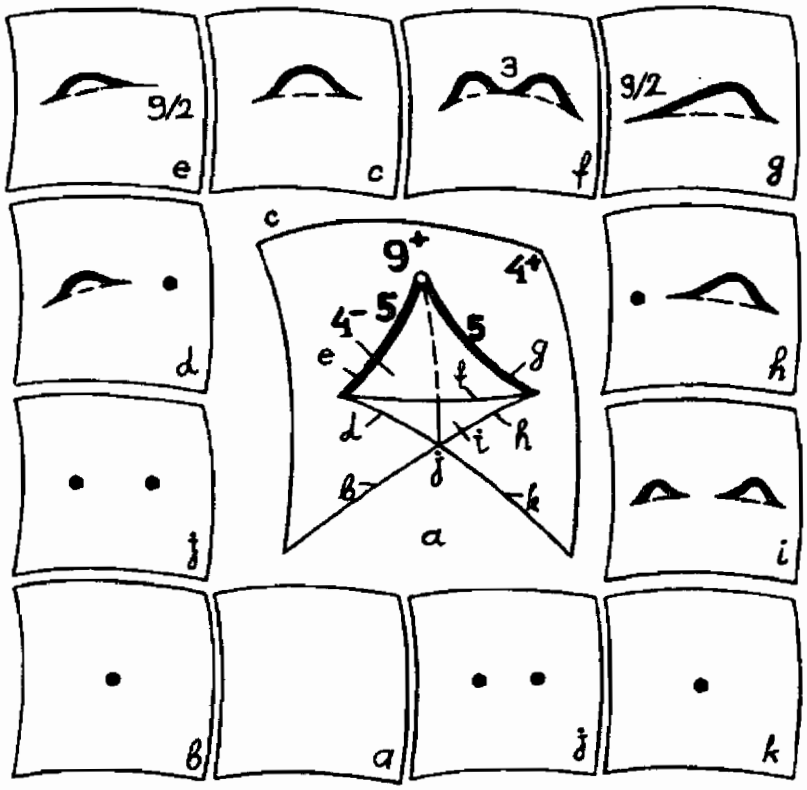


Рис. 79. Бифуркации проектирования $x^3 + xy^4$

Если смотреть на типичную поверхность из одной из самых вырожденных точек (**9, 10, 11**), то, при небольшом изменении точки зрения, видимый контур поверхности изменится. Результаты такого изменения точки зрения изображены на рис. 79–82. В центре каждого рисунка изображена бифуркационная диаграмма, образованная центрами нетипичных проектирований. Проектирования, соответствующие центрам,

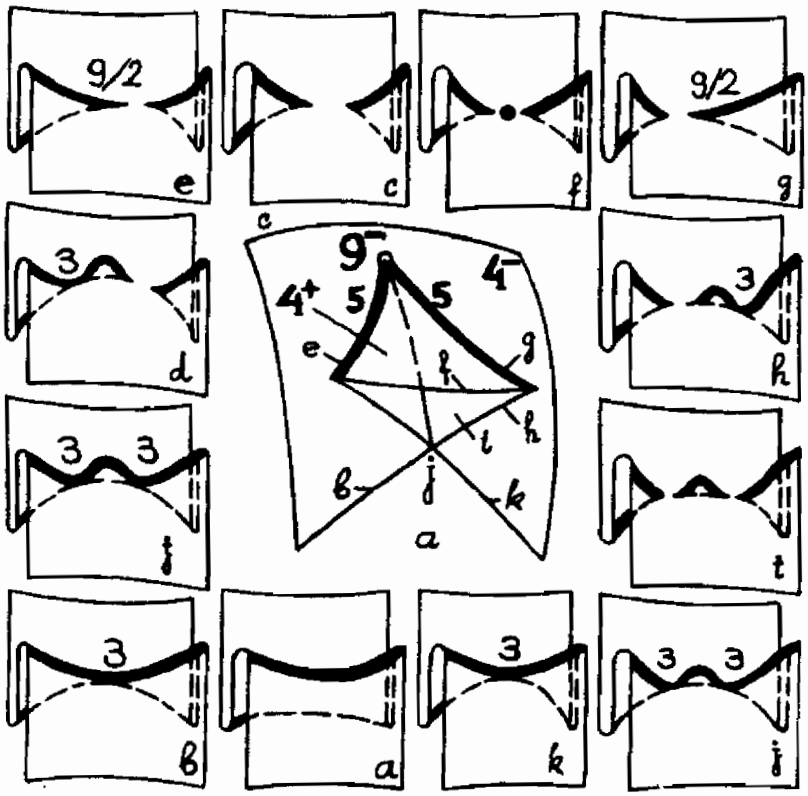


Рис. 80. Бифуркации проектирования $x^3 - xy^4$

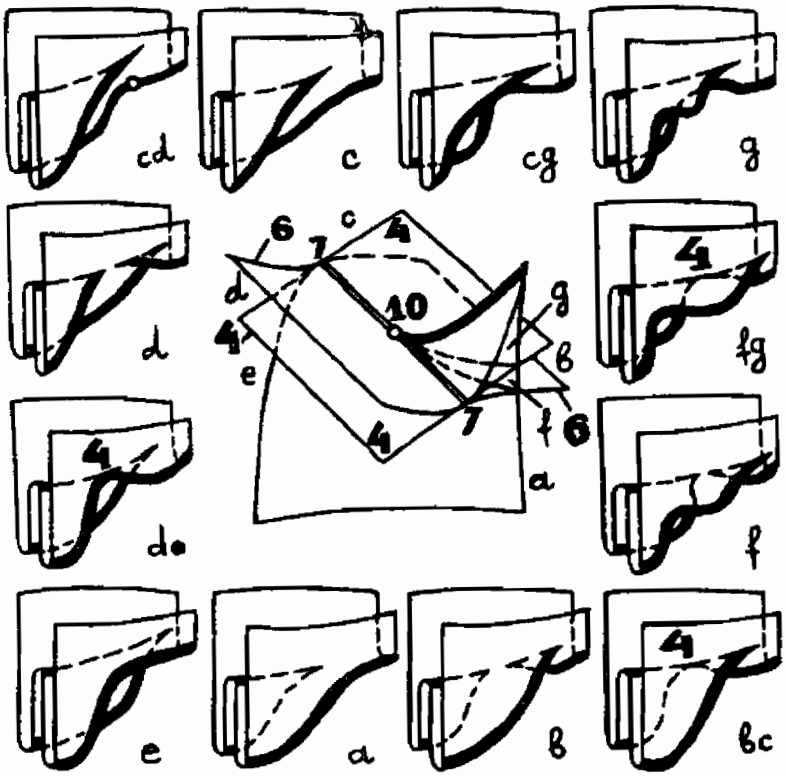


Рис. 81. Бифуркации проектирования $x^4 + x^2y + xy^3$

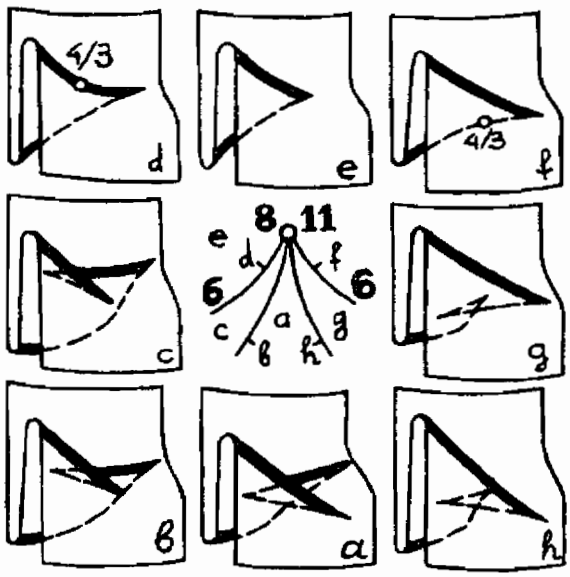


Рис. 82. Бифуркации проектирования $x^5 + xy + axy^3$

принадлежащим различным стратам бифуркационной диаграммы и её дополнению, изображены в клеймах, расположенных вдоль сторон соответствующих рисунков.

6.2. Особенности проектирований полных пересечений

Классификации особенностей различных объектов показывают, что алгебраически наиболее естественны классификации простых объектов, то есть объектов, не имеющих модулей. Так, классификация простых критических точек функций, простых особенностей гиперповерхностей, простых лагранжевых и лежандровых особенностей, простых особенностей каустик и волновых фронтов ведёт к списку A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8 диаграмм Дынкина, не имеющих кратных рёбер (углов, отличных от 120° между неортогональными простыми корнями), см. [2]. Классификация простых критических точек функций на многообразии с краем ведёт к тому же списку, дополненному диаграммами B_μ, C_μ, F_4 (допускаются углы в 135°).

В любой проблеме естественно искать простые объекты. При этом полезно прежде всего изучать бифуркационные диаграммы, так как они играют роль отпечатков особенностей. Так, простые алгебры Ли были распознаны в списке простых краевых особенностей благодаря

топологической эквивалентности бифуркационных диаграмм, появляющихся в обоих теориях (см. [3]).

Классификация простых особенностей проектирований $V \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ подмногообразия V тотального пространства E расслоения $E \twoheadrightarrow B$ на базу B, с точностью до эквивалентности (то есть с точностью до расслоённого над B диффеоморфизма E) принадлежит В.В.Горюнову [131].

В его теории V предполагается не обязательно гладким многообразием, но полным пересечением (задаваемым уравнениями, число которых равно коразмерности V в E). Эти ограничения естественны в теориях перестроек и кобордизмов проектирований. В самом деле, в этих теориях особые проектирования встречаются при бифуркационных значениях параметров, от которых зависит это проектирование. Эта ситуация описывается диаграммой

$$V' \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow B' \twoheadrightarrow P,$$

где P — пространство параметров, а V' — гладкое подмногообразие пространства гладкого расслоения $E' \twoheadrightarrow B'$.

Слой расслоения над P задаёт проектирование $V_p \hookrightarrow E_p \twoheadrightarrow B_p$. Многообразие V_p становится особым при бифуркационном значении параметра p.

Определим *надстройку проектирования* $V \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ как включение E в пространство большего расслоения с той же самой базой B (в качестве подрасслоения). *Стабильная эквивалентность проектирований* обозначает эквивалентность их подходящих надстроек. *Проектированием "на"* называется проектирование, для которого размерность базы B не превышает размерности проектируемого многообразия V.

Проектирование V на B задаёт семейство подмногообразий в слоях расслоения $E \twoheadrightarrow B$ (семейство пересечений V со слоями). Росток проекции $V \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ может быть рассмотрен как деформация многообразия V_0 в некотором выделенном слое. Коразмерность V_0 в этом слое равна коразмерности V в E.

Теорема (см. [131]). *Простой росток проектирования "на" послойно стабильно эквивалентен деформации либо гиперповерхности, либо кривой в 3-пространстве, либо (кратной) точки на плоскости.*

В каждом из этих трёх случаев Горюнов перечислил все простые особенности. Некоторые части этих списков совпадают со списками

простых особенностей других классификационных проблем. Например, им доказана следующая

Теорема. *Деформация кривой в* $\mathbf{C}^3$ *задаёт простой росток проектирования, если и только если эта деформация является версальной деформацией простой особенности кривой в* $\mathbf{C}^3$.

Список простых особенностей пространственных кривых в $\mathbf{C}^3$, задаваемых двумя уравнениями, был опубликован М.Джусти в [154]. Иерархия этих особенностей изображена на рис. 83.

Этот список[1)] содержит бесконечную серию

$$S_\mu : x^2 + y^2 + z^{\mu-3} = yz, \qquad \mu \geq 5,$$

и 10 исключительных кривых $f_1 = f_2 = 0$, где f_i приведены в следующей таблице:

тип	f	тип	f
T_7	$x^2+y^3+z^3,\ yz$	U_9	$x^2+yz,\ xy+z^4$
T_8	$x^2+y^3+z^4,\ yz$	W_8	$x^2+z^3,\ y^2+xz$
T_9	$x^2+y^3+z^5,\ yz$	W_9	$x^2+yz^2,\ y^2+xz$
U_7	$x^2+yz,\ xy+z^3$	Z_9	$x^2+z^3,\ y^2+z^3$
U_8	$x^2+yz+z^3,\ xy$	Z_{10}	$x^2+yz^2,\ y^2+z^3$

Версальная деформация особого многообразия в некоторой его точке определяется следующей конструкцией (мотивировка которой может быть найдена, например, в [28]).

Деформация ростка $\{x|f(x) = 0\}$ коразмерности m в начале координат есть росток $F(x,\lambda)$ такой, что $F(x,0) = f(x)$. Деформация *версальна*, если образы начальных скоростей деформации,

$$g_i(x) = \left.\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=0},$$

в фактор модуле

$$\mathcal{O}^m \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, f_i e_j \right\rangle,$$

[1)] Простые особенности полных пересечений могут рассматриваться как простые особенности гиперповерхностей в супермногообразиях (М.Казарян, 1990).

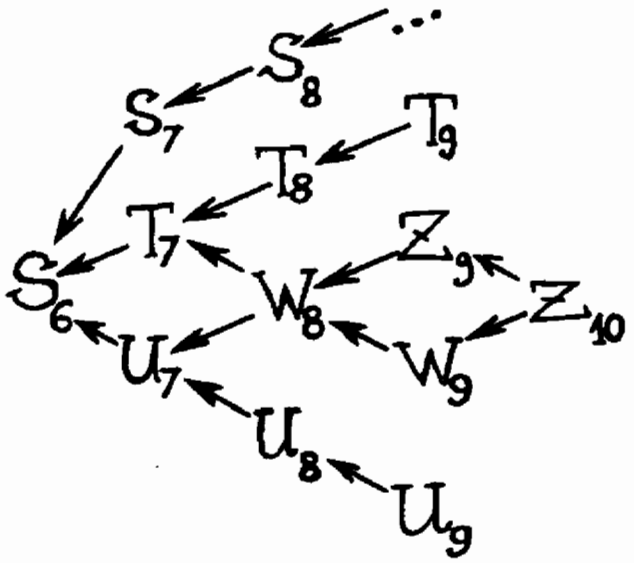


Рис. 83. Иерархия простых пространственных кривых $f_{1,2}(x,y,z)=0$

порождают этот модуль над $\mathbf{C}$. Здесь $\mathcal{O}=\mathbf{C}[[x]]$ есть $\mathbf{C}$-алгебра рядов Тейлора в начале координат, $\mathcal{O}^m=\oplus\mathcal{O}e_i$ — свободный $\mathcal{O}$-модуль с образующими $\{e_i\}$, и угловые скобки обозначают подмодуль, порождённый стоящими в скобках элементами.

Пример. Рассмотрим кривую S_5,

$$f_1=x^2+y^2+z^2,\quad f_2=yz.$$

В качестве версальной деформации возьмём

$$F_1=f_1+\lambda_1,\quad F_2=f_2+\lambda_2+\lambda_3x+\lambda_4y+\lambda_5z.$$

Проектирование поверхности $F_1=F_2=0$ на λ-пространство имеет простую особенность в начале координат.

Таким образом список Джусти (приведённый выше) содержится в списке Горюнова пространственных кривых.

Сравнение списков Горюнова и Джусти показывает, что появляющиеся в списке простых особенностей проектирований $V\hookrightarrow E\twoheadrightarrow B$ подмногообразия V, которые не являются стабильно эквивалентными проектированиям гиперповерхностей, являются в действительности *гладкими* подмногообразиями E. Для остальных простых проектирований полных пересечений подмногообразия V не обязательно гладкие.

Список Горюнова простых проектирований полных пересечений достаточно велик, особенно в вещественном случае. (Кроме того, он не совпадает ни с одним другим известным списком простых объектов.)

Здесь мы приведём ту часть этого списка, которая соответствует проектированиям "на" комплексную прямую.

Теорема (см. [131], [130]). 1) *Для простого ростка проектирования на прямую проектируемое подмногообразие является (с точностью до расслоённой стабильной эквивалентности) либо гиперповерхностью, либо (особой) кривой в 3-пространстве, либо (кратной) точкой на плоскости или в 3-пространстве.*

2) *Простой росток проектирования гиперповерхности в пространстве расслоения $(x, u) \mapsto u$ расслоённым голоморфным диффеоморфизмом вида $(x, u) \mapsto (h(x, u), v(u))$ приводится к проектированию на ось и одной из гиперповерхностей из приведённого ниже списка*

тип	*гиперповерхность*
$A_\mu, \mu \geq 0$	$u + x_1^{\mu+1} + q = 0$
$D_\mu, \mu \geq 4$	$u + x_1^2 x_2 + x_2^{\mu-1} + q = 0$
E_6	$u + x_1^3 + x_2^4 + q = 0$
E_7	$u + x_1^3 + x_1 x_2^3 + q = 0$
E_8	$u + x_1^3 + x_2^5 + q = 0$
$B_\mu, \mu \geq 2$	$x_1^2 + u^\mu + q = 0$
$C_\mu, \mu \geq 3$	$x_1^\mu + u x_1 + q = 0$
F_4	$x_1^3 + u^2 + q = 0$

где q обозначает сумму квадратов оставшихся переменных ($q = x_2^2 + \ldots + x_n^2$ для A_μ, B_μ, C_μ, F_4 и $q = x_3^2 + \ldots + x_n^2$ для D_μ и E_μ). Диаграмма примыканий изображена на рис. 84.

3) *Простые проектирования ростков кривых в 3-пространстве на прямую образуют 2 бесконечные серии (одна из которых имеет 2 индекса); они приводятся к проектированиям на ось и ростков в начале координат следующих кривых:*

тип	*ограничения*	*кривая*
$C_{k,l}$	$2 \leq k \leq l$	$xy = 0,\ x^k + y^l + u = 0$
F_{2k+1}	$2 \leq k$	$x^2 + y^3 = 0,\ y^k + u = 0$
F_{2k+4}	$1 \leq k$	$x^2 + y^3 = 0\ xy^k + u = 0$

диаграмма примыканий изображена на рис. 85.

4) *Простые проектирования полных пересечений на прямую образуют 2 бесконечные последовательности (одна из которых имеет 2*

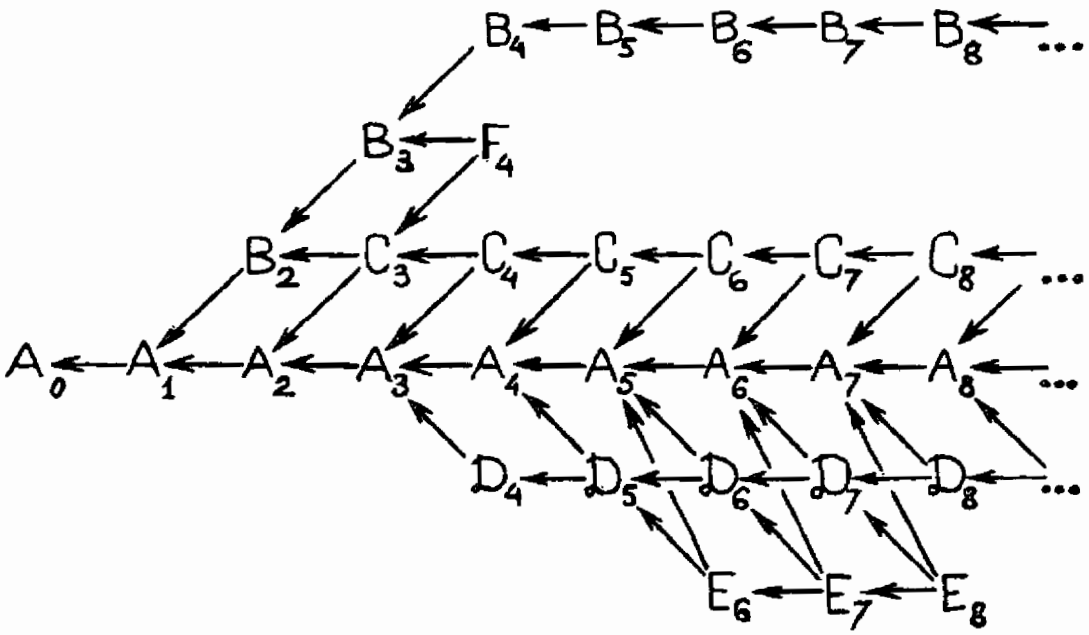


Рис. 84. Иерархия простых проектирований гиперповерхностей

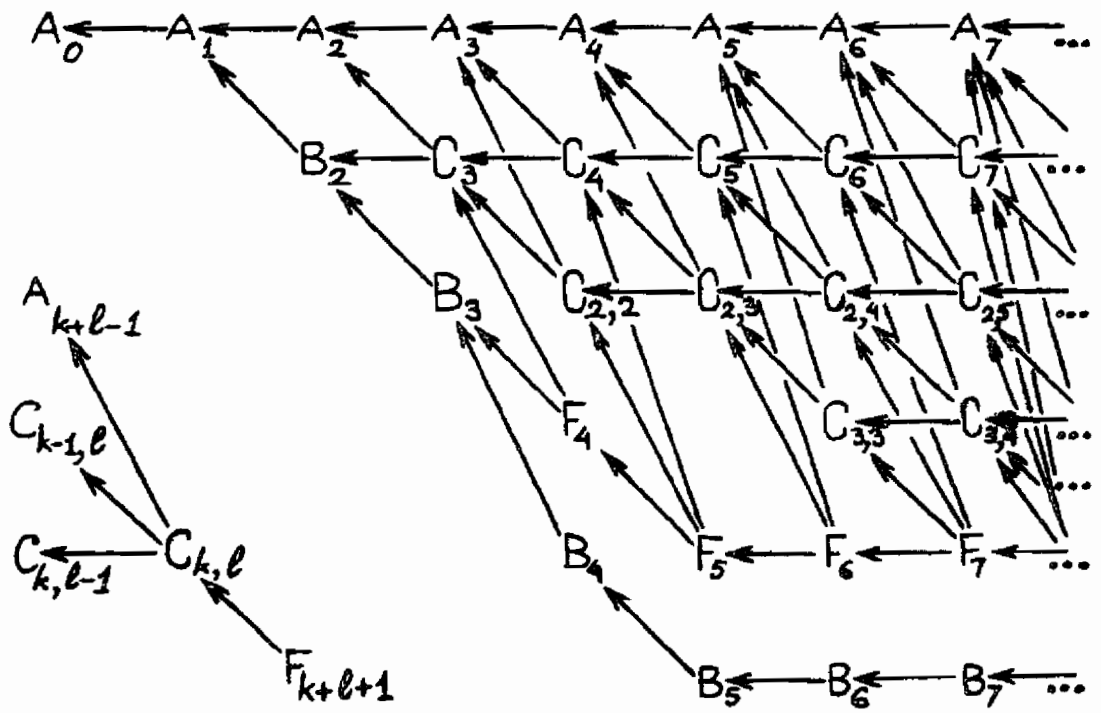


Рис. 85. Иерархия простых проектирований пространственных кривых

индекса) и 7 исключительных особенностей; они эквивалентны проектированиям на ось и следующих ростков в начале координат кратных точек на (x, u)-плоскости или в (x, y, u)-пространстве:

тип	*ограничения*	*кратные точки*
B_μ	$\mu \geq 0$	$x = u^\mu = 0$
$X_{k,l}$	$2 \leq k \leq l$	$x^k + u = x^l = 0$
U_μ	$4 \leq \mu$	$x^2 + u^{\mu-2} = ux = 0$
V_6		$x^2 + u^2 = 0$
V_7		$x^3 + u^2 = ux = 0$
$\Gamma^{a,b}_{a+b+3}$	$a = 2, \quad b = 2$ *или* 3 $a = 3, \quad b = 2, 3$ *или* 4	$xy = x^2 + y^a = u + y^b$

Примыкания изображены на рис. 86.

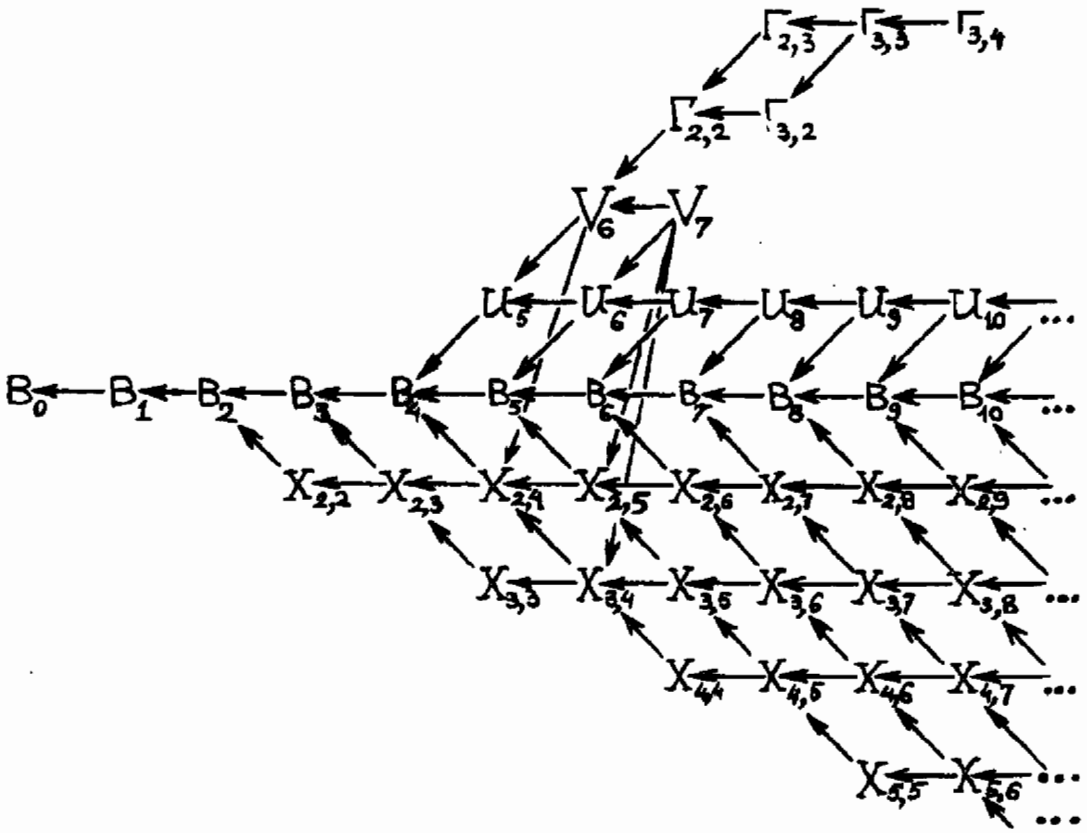


Рис. 86. Иерархия простых проектирований кратных точек

Эта классификация ведёт к следующим выводам.

1. **Краевые особенности.** Простые особенности проектирований гиперповерхностей классифицируются (с точностью до комплексной стабильной эквивалентности) группами Вейля $A_\mu, \ldots, F_4$, то есть тем же

списком, что классифицирует краевые особенности [3]. Обычные (не краевые) особенности соответствуют проектированиям *гладких* гиперповерхностей.

Отношение эквивалентности в теории краевых особенностей гиперповерхностей "шире" чем в теории особенностей проекций гиперповерхностей: в первом случае эквивалентностями являются диффеоморфизмы, сохраняющие край (одну гиперповерхность), в то время как во втором случае эквивалентности сохраняют расслоение (на гиперповерхности, параллельные данной гиперповерхности).

Совпадение обоих списков — результат априори неожиданный. Эти списки совпадают также со списком простых краевых особенностей функций (а также со списком простых краевых лагранжевых и лежандровых особенностей). Инфинитезимальное "объяснение" этих совпадений (использующее аргументы квазиоднородности) приведено в §2 работы [133].

Замечание. Унимодальные и бимодальные краевые особенности функций классифицированы в [3], [155], [156]. Получившиеся списки до сих пор не идентифицированы с другими интересными классификациями.

Теория краевых лагранжевых особенностей ведёт к интересной "лагранжевой двойственности", меняющей местами функцию на объемлющем пространстве и её ограничение на край (эта версия "правила множителей Лагранжа" была получена И.Г.Щербак [157]).

Пусть $f(x,y)$ ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$) есть росток функции в критической точке 0 n-пространства с "краем" $x = 0$. Его *лагранжево дуальная функция* определяется формулой $f^*(z,x,y) = zx + f(x,y)$, где уравнение "дуального края" — $z = 0$. Ограничение f^* на край есть f, в то время как ограничение f на край стабильно эквивалентно f^*. Кроме того f^{**}, рассматриваемая как функция на многообразии с краем, стабильно эквивалентна f.

Бифуркационные диаграммы нулей функций f и f^{**} диффеоморфны, но компоненты (соответствующие вырождениям многообразия нулевого уровня и его нетрансверсальности краю) меняются местами.

Таким образом, краевые особенности могут рассматриваться как "произведения" обычных особенностей:

$$C_k \sim (A_1, A^{k-1}), \quad B_k \sim (A_{k-1}, A^1), \quad F_4 \sim (A_2, A^2)$$

(индекс, равный кратности, записывается вверху, если он соответствует особенности ограничения на край, и внизу, если он соответствует особенности на объемлющем пространстве).

"Произведение" определяется сомножителями не единственным образом, и "умножение" не всегда возможно. Например, невозможно умножить A_2 на A^3 (и, в общем случае, A_{2k} на A^p, при $p > 2k$).

Произведения A_p на A^p образуют m-параметрическое семейство особенностей, где $m = [(p-1)/2]$:

$$F_p^p = x^2 + y^{p+1} + xa(y),$$

где $a(y) = a_1 y^{p-1} + \ldots + a_m y^{p-m}$.

Произведения простых особенностей были классифицированы И.Г.Щербак в [157]. Диаграмма Дынкина *простого* произведения разлагается на диаграммы сомножителей после удаления двойного ребра (направленного к диаграмме ограничения функции на край). Модальность произведения не превышает суммы модальностей сомножителей, по крайней мере в примерах.

2. **Проектирования кривых**. Обозначения серий C и F отражают внутреннюю связь этих особенностей с особенностями C_k и F_4 гиперповерхностей. В самом деле, для этих особенностей В.В.Горюнов доказал теоремы о геометрии бифуркационных диаграмм, подобные соответствующим теоремам обычной теории. Он также определил диаграммы Дынкина этих особенностей (см. рис. 88). Таким образом, исключительная алгебра Ли F_4 является "предком" последовательности F_k родственных объектов.

3. **Форма пересечений**. Для определения формы пересечений проектирований на прямую, $V_0 \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \mathbf{C}$, мы используем тот же метод, что и в случае краевых особенностей.

В пространстве E зафиксируем малый шар B_r радиуса r с центром в нуле и выберем малое (по отношению к r) положительное ε. Пусть полное пересечение V_0 задаётся в E уравнением $f = 0$ (рис. 87). *Слоем Милнора* проектирования называется неособое многообразие уровня $V_\xi = B_r \cap f^{-1}(\xi), |\xi| = \varepsilon$, где ξ — типичное значение. Это многообразие трансверсально пересекает слой расслоения $E \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ над нулём вдоль многообразия комплексной коразмерности 1 в V_ξ, обозначаемого через V_ξ^0.

Рассмотрим двулистное накрытие $\tilde{V}_\xi \to V_\xi$ над V_ξ, разветвлённое вдоль V_ξ^0 ("комплексификация" "края" есть "двулистное разветвлённое накрытие"). Рассмотрим группу $\tilde{H}$ целочисленных гомологий средней размерности многообразия $\tilde{V}_\xi$. Перестановка листов накрытия действует на $\tilde{H}$ как инволюция. Пусть H^- обозначает антиинвариантную

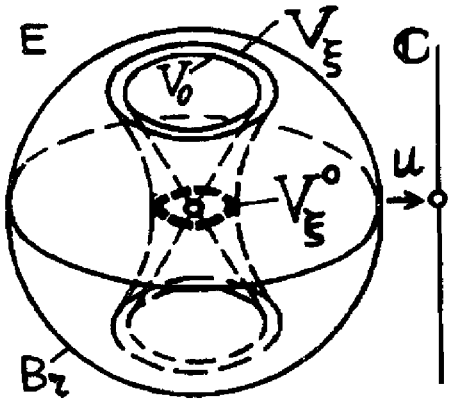


Рис. 87. Слой Милнора проектирования

часть $\tilde{H}$. Форма пересечений на $\tilde{H}$ индуцирует на H^- билинейную форму, называемую *билинейной формой проектирования.*

4. **Диаграмма Дынкина.** Если комплексная размерность V_ξ чётна, то форма пересечения симметрична. В этом случае диаграмма Дынкина определяется так же, как и для краевых особенностей. А именно, антиинвариантное пространство порождается *длинными корнями* (длинный корень есть разность между двумя прообразами исчезающего цикла на V_ξ) и *короткими корнями* (короткий корень образован прообразами относительного цикла V_ξ по модулю V_ξ^0, то есть исчезающим полуциклом; детали см. в [3]).

Если комплексная размерность V_ξ нечётна (в нашей ситуации — когда V_ξ является кривой, в случаях F_k или $C_{k,l}$), определения длинных и коротких корней не так очевидны. В случае краевых особенностей эта трудность не существенна, так как мы можем использовать процедуру стабилизации, преобразуя функцию с кососимметричной формой пересечений в функцию с симметричной формой пересечений. Для проектирований такой процедуры не существует (или, точнее, она не известна), и мы определяем короткие и длинные корни при помощи следующей конструкции.

Рассмотрим антиинвариантную H^- и инвариантную H^+ части группы $\tilde{H}$. Группа H^- может быть естественным образом спроектирована на факторгруппу $\tilde{H}/H^+$. Антиинвариантный элемент назовём *коротким элементом*, если его образ в $\tilde{H}/H^+$ не делится на 2, в противном случае назовём его *длинным элементом.*

Диаграммой Дынкина кососимметричной формы является граф, вершины которого представляют базисные вектора. Две вершины соединены некоторым числом рёбер (это число равно значению формы на паре соответствующих базисных векторов). Рёбра ориентированы (так, что упомянутые выше значения положительны). Ребро, соединя-

ющее длинную вершину с короткой, помечено знаком $<$, направленным к короткой вершине.

Если граф является деревом (возможно, с кратными рёбрами) ориентации рёбер на диаграмме не указываются (их можно сделать произвольными, меняя базисные вектора на противоположные).

Следуя этому определению, получаем, что краевые особенности имеют обычные диаграммы Дынкина $A_k, \ldots, F_4$.

Теорема (см. [131]). *В подходящих базисах формы пересечений проектирований F_k и $C_{k,l}$ определяются диаграммами Дынкина, изображёнными на рис.* 88.

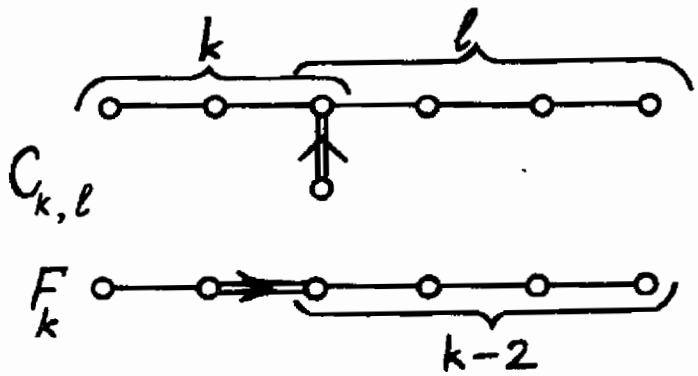


Рис. 88. Диграммы Дынкина $C_{k,l}$ и F_k

5. *Версальные деформации проектирований.* Упомянутые выше базисы могут быть выбраны отмеченными, как и в обычной теории критических точек функций. Однако, мы должны приспособить к нашей ситуации определение отмеченных базисов из теории краевых особенностей [3].

Во-первых, нам нужны некоторые обозначения. Рассмотрим проектирование $(x, u) \mapsto u$ полного пересечения V (задаваемого в E уравнением $f(x, u) = 0$) на базу $B = \{u\}$. *Деформация* этого проектирования задаётся уравнением $F(x, u, \lambda) = 0$, где $F(x, u, 0) \equiv f(x, u)$ и λ принадлежит некоторой окрестности нуля в некотором конечномерном пространстве.

Версальная деформация может быть выбрана в следующем виде:

$$F = f + \sum \lambda_i g_i(x, u),$$

где *скорости деформации* g_i порождают над $\mathbf{C}$ факторпространство

$$Q_f = \{\lambda\} / \left\{ \sum f_i \beta_i + \sum \gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum \delta_s \frac{\partial f}{\partial u_s} \right\},$$

а функции α, β, γ, δ — голоморфны в некоторой окрестности начала координат пространства $\{(x, u)\}$ (α и каждая компонента β_i суть

вектор-функции, число компонент которых равно числу компонент f; δ_s и γ_j — скалярные функции, и $\delta_s = \delta_s(u)$ не зависит от x).

Замечание. Числитель этой формулы является касательным пространством к пространству деформаций f. Первое слагаемое в знаменателе порождено (инфинитезимальными) деформациями f, оставляющими неподвижным многообразие $f = 0$. Остальные слагаемые порождены инфинитезимальными деформациями E, расслоёнными над B.

Пример. Кривая $C_{2,2}$ в $\mathbf{C}^3$ задаётся уравнениями $f_1 = f_2 = 0$, где $f_1 = xy$, $f_2 = x^2 + y^2 + u$. Следовательно, $\dim_{\mathbf{C}} Q_f = 3$, и 3-параметрическая версальная деформация может быть выбрана в виде

$$F_1 = f_1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y, \quad F_2 = f_2.$$

6. **Исчезающие циклы и полуциклы.** Выбрав деформацию, задаваемую отображением F, определим отображения

$$F_\lambda : (x, u) \mapsto F(x, u, \lambda), \quad F_\lambda^0 : (x, 0) \mapsto F(x, 0, \lambda).$$

Множества критических значений этих отображений являются гиперповерхностями в пространстве значений F. Предположим, что точка ξ из этого пространства не является критическим значением отображения F_λ. В этом случае многообразие $V_{\lambda,\xi}$, задаваемое уравнением $F_\lambda = \xi$, в пространстве $\{(x, u)\}$ является гладким. Если ξ не является критическим значением F_λ^0, то $V_{\lambda,\xi}$ трансверсально пересекает гиперплоскость $u = 0$ вдоль гладкой гиперповерхности $V_{\lambda,\xi}^0 \subset V_{\lambda,\xi}$.

Начиная с пары $(V_{\lambda,\xi}, V_{\lambda,\xi}^0)$, определим форму пересечения способом, описанным в предыдущем пункте 3 для пары (V_ξ, V_ξ^0), соответствующей случаю $\lambda = 0$. Точки (λ, ξ) и $(0, \xi)$ могут быть соединены путём, не пересекающим гиперповерхность, состоящую из критических точек. Над этим путём соответствующие пары образуют гладкое расслоение. Мы можем выбрать тривиализацию этого расслоения над этим путём, тождественную на некоторой окрестности границ (шаров в пространстве $\{(x, u)\}$. Эта тривиализация задаёт изоморфизм гомологий двулистного разветвлённого накрытия и групп антиинвариантных классов гомологий H^- для различных значений (λ, ξ), и формы пересечений на группах гомологий средней размерности.

Мы будем использовать эти изоморфизмы для определения исчезающих циклов и полуциклов на полных пересечениях в многообразиях с краем.

Выберем типичную точку λ (вблизи начала координат) и рассмотрим типичную комплексную прямую, проходящую через некритическую точку ξ. Прообраз этой прямой (при отображении F_λ) есть гладкое многообразие, размерность которого равна размерности $V_{\lambda,\xi}$ плюс 1. Это многообразие содержит гиперповерхность $u = 0$ (являющуюся прообразом той же самой прямой при отображении F^0_λ). Предположим, что наша прямая трансверсально пересекает множество критических значений отображения F_λ в a точках и множество критических значений отображения F^0_λ в a^0 точках (все пересечения — типичны). Переместим точку ξ в эти критические точки вдоль непересекающихся путей (так делается всегда при определении отмеченных базисов, см. [44] и рис. 89).

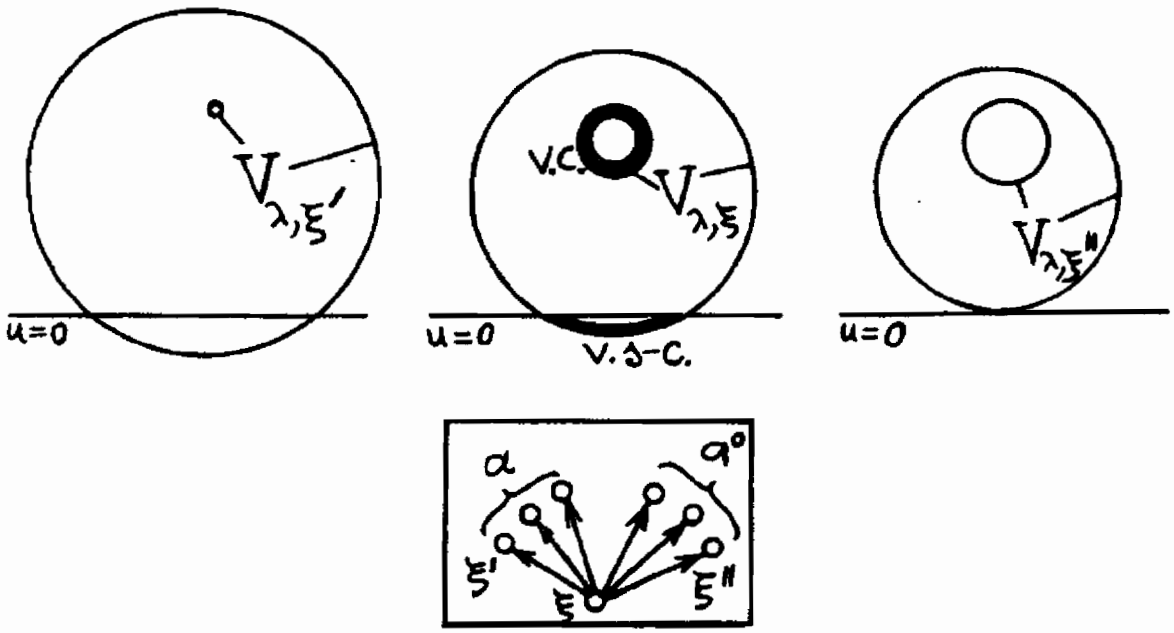


Рис. 89. Исчезающие циклы и полуциклы

Когда ξ приближается к a точкам первого вида, циклы Пикара–Лефшеца на $V_{\lambda,\xi}$ исчезают. Когда ξ приближается к a^0 точкам второго вида, исчезают полуциклы, представляющие относительные классы гомологий в $H(V_{\lambda,\xi}, V^0_{\lambda,\xi})$ (см. [3]). Эти $a + a^0$ цикла и полуцикла порождают всю группу относительных гомологий, но они могут быть зависимыми.

Любой исчезающий цикл (полуцикл) определяет антиинвариантный цикл в $H^-_{\lambda,\xi}$. Эти циклы называются *отмеченными циклами* (исчезающий цикл определяет длинный отмеченный цикл, исчезающий полуцикл — короткий отмеченный цикл). Диаграммы Дынкина, изображённые

на рис. 88, являются диаграммами форм пересечений в базисах, образованных некоторыми отмеченными циклами (излишние отмеченные циклы не принимаются во внимание).

Замечание 1. Эти излишние отмеченные циклы являются проявлением следующего общего принципа: естественное обобщение систем корней (соответствующих полным пересечениям гиперповерхностей) должно находиться не в гомологиях самих полных пересечений, но в некоторых пространствах, ассоциированных с флагом подмногообразий всех размерностей, каждое из которых является гиперповерхностью в предыдущем.

Рассмотрим полное пересечение (или его неособый слой Милнора) как гиперповерхность уровня некоторой функции на полном пересечении, размерность которого на 1 превосходит размерность исходного полного пересечения. Критические точки этой функции определяют исчезающие циклы в средних гомологиях слоя Милнора и системы отмеченных циклов. В общем случае, однако, эти системы не являются базисами, так как число критических точек больше чем среднее число Бетти слоя.

Поэтому мы будем рассматривать свободную абелеву группу, порождённую исчезающими циклами системы отмеченных циклов, вместе с гомоморфизмом этой группы на группу гомологий слоя, отправляющим исчезающий цикл в его гомологический класс.

Для изучения ядра этого гомоморфизма мы должны исследовать гомологии полного пересечения на 1 большей размерности, в котором наш слой является гиперповерхностью уровня.

Повторяя предыдущую конструкцию, мы получим "резольвенту", или башню, каждый этаж которой снабжён формой пересечений, монодромией, смешанной структурой Ходжа и т. д. К сожалению, ни геометрия, ни алгебра этой конструкции не привлекли того внимания, которое они заслуживают.

Задача. Найти обобщение кристаллографических групп Кокстера для этой конструкции с башнями (ответ, по-видимому, будет включать список башен, соответствующих простым проектированиям кривых).

Замечание 2. Для проектирований полных пересечений на прямую существует другой тип "отмеченных базисов" (ведущий, в общем случае, к другим диаграммам Дынкина).

Рассмотрим проектирование на прямую как функцию u. Для типичных λ ограничение функции u на многообразие $V_{\lambda,0}$ (используя преды-

дущие обозначения) является морсовской функцией с μ невырожденными критическими точками и μ различными критическими значениями. Число критических значений равно числу сфер в букете, которому гомотопически эквивалентно пространство $V_{\lambda,0}/V^0_{\lambda,0}$. Следовательно это число равно рангу группы H^- антиинвариантных классов гомологий двулистного накрытия $\tilde{V}^0_{\lambda,0} \to V_{\lambda,0}$, разветвлённого вдоль $V^0_{\lambda,0}$. Если проекция проста, то $\mu = \nu + 1$, где ν есть размерность базы миниверсальной деформации.

Когда u движется из некритического значения ($u = 0$) в одно из μ критических значений вдоль одного из μ отмеченных путей на комплексной прямой $\{u\}$, гиперповерхность уровня на $V_{\lambda,0}$ вырождается. В момент вырождения исчезают μ полуциклов, а следовательно исчезают также μ гомологических классов $V_{\lambda,0}/V^0_{\lambda,0}$. Соответствующие антиинвариантные циклы в гомологиях двулистного накрытия $\tilde{V}_{\lambda,0} \to V_{\lambda,0}$, разветвлённого вдоль $V^0_{\lambda,0}$, образуют отмеченный (в новом смысле) базис из μ коротких циклов в H^-.

Для особенностей $A_\mu, \ldots, E_8$ эта конструкция ведёт к обычным диаграммам Дынкина. Но для B_μ результат необычен: в симметрическом случае диаграмма распадается на точки (наш базис состоит из корней e_i, так что остальные корни равны $\pm e_i, \pm e_i \pm e_j$).

Другим следствием классификации простых проектирований является описание геометрии соответствующих бифуркационных диаграмм. Напомним сначала их некоторые общие свойства.

6.3. Геометрия бифуркационных диаграмм

Одной из простейших бифуркационных диаграмм является полукубическая парабола, состоящая из точек на (a, b)-плоскости, для которых многочлен $x^3 + ax + b$ имеет кратные корни. Эта кривая появляется в качестве бифуркационной диаграммы во многих задачах теории особенностей. Например, она может рассматриваться как бифуркационная диаграмма нулей функции x^3: она образована теми точками версальной деформации этой функции, для которых множество нулевого уровня деформированной функции является особым. Эта бифуркационная диаграмма имеет замечательные свойства. Например, её дополнение в $\mathbf{C}^2$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$: все его гомотопические группы тривиальны, за исключением фундаментальной группы (являющейся группой кос Артина из 3-х нитей, см. рис. 65).

Рассмотрим типичное голоморфное векторное поле на плоскости, содержащей полукубическую параболу. Например, рассмотрим постоянное поле $\partial/\partial b$ на описанной выше плоскости кубических многочленов. В точке возврата полукубической параболы вектор этого поля трансверсален касательной к этой параболе. Любое другое векторное поле, обладающее этим свойством, может быть приведено к этому специальному полю при помощи диффеоморфизма, сохраняющего полукубическую параболу.

Эти свойства полукубической параболы — её дополнение есть пространство $K(\pi, 1)$; типичное векторное поле может быть выпрямлено — присущи и многим другим бифуркационным диаграммам. Например, оба эти свойства имеют место для ласточкина хвоста (см. рис. 3), для бифуркационных диаграмм нулей простых функций на многообразиях с краем и для бифуркационных диаграмм простых проектирований.

Рассмотрим, во-первых, функции на многообразии с краем. Пусть $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ есть росток голоморфной функции на многообразии $\mathbf{C}^n$, в которое вложена гиперповерхность ("край") $\mathbf{C}^{n-1}$, задаваемая уравнением $x_1 = 0$ (x_k — координаты на $\mathbf{C}^n$). Точка 0 называется *краевой особенностью* f, если она является критической точкой ограничения f на край.

Кратностью μ краевой особенности называется размерность, над $\mathbf{C}$, *краевой локальной алгебры*

$$Q_f|_{x_1} = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]/(x_1 f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

где $f_k = \partial f/\partial x_k$. Версальная деформация может быть выбрана в виде:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_\mu g_\mu(x),$$

где g_k суть мономы, образы которых образуют базис (над $\mathbf{C}$) факторпространства $Q_f|_{x_1}$. Пусть $g_\mu \equiv 1$. Пространство $\mathbf{C}^\mu$ с координатами $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ называется *базой* версальной деформации, пространство $\mathbf{C}^{\mu-1}$ с координатами $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1})$ называется базой усечённой версальной деформации или *усечённой базой*.

Пример. Для краевой особенности C_3 возьмём

$$f = x_2^3 + x_1 x_2, \quad F = f + \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3.$$

Определение. Число α называется *критическим значением* $F(., \lambda)$, если многообразие $F(., \lambda) = \alpha$ либо особо, либо не трансверсально краю (гиперповерхности $x_1 = 0$).

Определение. *Бифуркационной диаграммой нулей краевой особенности* называется множество таких точек базы версальной деформации, для которых 0 есть критическое значение $F(.,\lambda)$. Эта бифуркационная диаграмма обозначается через Σ.

Пример. Бифуркационная диаграмма нулей простой особенности C_3 образована такими точками (a,b,c), для которых многочлен x^3+ax^2+bx+c имеет либо нулевой, либо кратный корень. Эта диаграмма, изображённая на рис. 90, имеет 2 неприводимые компоненты. Одна из них (поверхность, соответствующая кратным корням) диффеоморфна цилиндру над полукубической параболой. Другая, соответствующая нулевому корню, есть плоскость $c=0$. Первая компонента соответствует многообразиям нулевого уровня $F(.,\lambda)=0$, не трансверсальным краю. Вторая компонента соответствует особым многообразиям нулевого уровня (в этом примере $\lambda_1=a$, $\lambda_2=b$, $\lambda_3=c$).

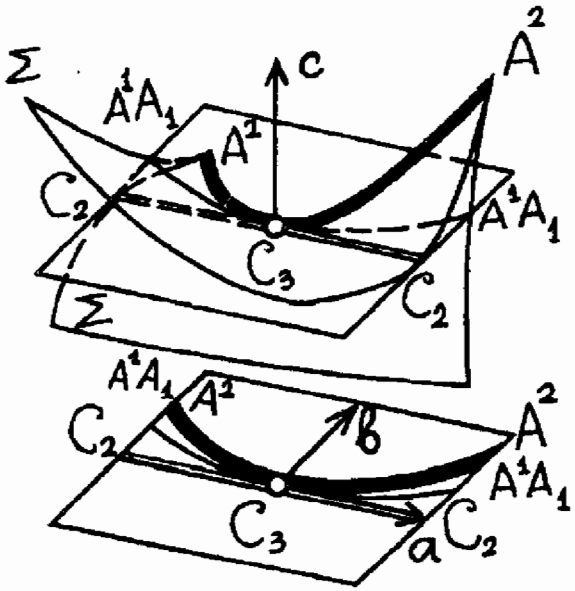


Рис. 90. Бифуркационная диаграмма краевой особенности C_3

Бифуркационные диаграммы нулей простых краевых особенностей совпадают с дискриминантами (пространствами нерегулярных орбит) соответствующих групп отражений (§4.2). Эти алгебраические многообразия имеют однозначно определённые касательные гиперплоскости в начале координат ($d\lambda_\mu=0$ в введённых обозначениях).

Теорема 1. *Любое голоморфное векторное поле, трансверсальное касательному пространству бифуркационной диаграммы нулей простой краевой особенности, локально приводится к постоянному векторному полю $\partial/\partial\lambda_\mu$ при помощи голоморфного диффеоморфизма, сохраняющего бифуркационную диаграмму.*

Эта теорема, открытая в [98], была доказана О.В.Ляшко в [159], [160]. В.М.Закалюкин в [29] распространил её на некоторые непростые особенности.

Теорема Ляшко базируется на теореме 2, сформулированной ниже.

Определение. *Бифуркационная диаграмма функций (для краевой особенности)* образована теми точками $\bar\lambda$ усечённой базы, для которых деформированная функция $F(.,\bar\lambda,\lambda_\mu)$ имеет менее чем μ различных критических значений (заметим, что значение λ_μ не существенно, так как $F(.,\bar\lambda,\lambda_\mu) = F(.,\bar\lambda,0)+\lambda_\mu$).

Пример. Бифуркационная диаграмма функций краевой особенности C_3 образована прямой $b=0$ и двумя касающимися её в начале координат в (a,b)-плоскости параболами (рис. 90).

Бифуркационная диаграмма функций краевой особенности C_4 изображена на рис. 91. Усечённая версальная деформация может быть выбрана в виде:

$$F = f + ax^3 + by^2 + cy, \quad f = xy + x^4,$$
$$\text{край: } x = 0.$$

Бифуркационная диаграмма квазиоднородна (инвариантна относительно квазиоднородных растяжений $(a,b,c) \mapsto (ta, t^2b, t^3c)$). Поэтому на рисунке изображено только её пересечение с плоскостью $a = \text{const}$.

Бифуркационная диаграмма краевой особенности C_k состоит из четырёх гиперповерхностей в усечённой базе. Действительно, она образована каустикой и множеством Максвелла. Каустика имеет 2 компоненты:

A^2 (ограничение на границу имеет неморсовскую критическую точку),

C_2 (критическая точка принадлежит краю).

Множество Максвелла также имеет 2 компоненты:

A^1A_1 (краевые и внутренние критические значения совпадают),

$2A^1$ (два краевых критических значения совпадают).

Каустика C_4 образована такими многочленами $y^4 + ay^3 + by^2 + cy$, которые имеют либо неморсовскую критическую точку (A^2), либо нуле-

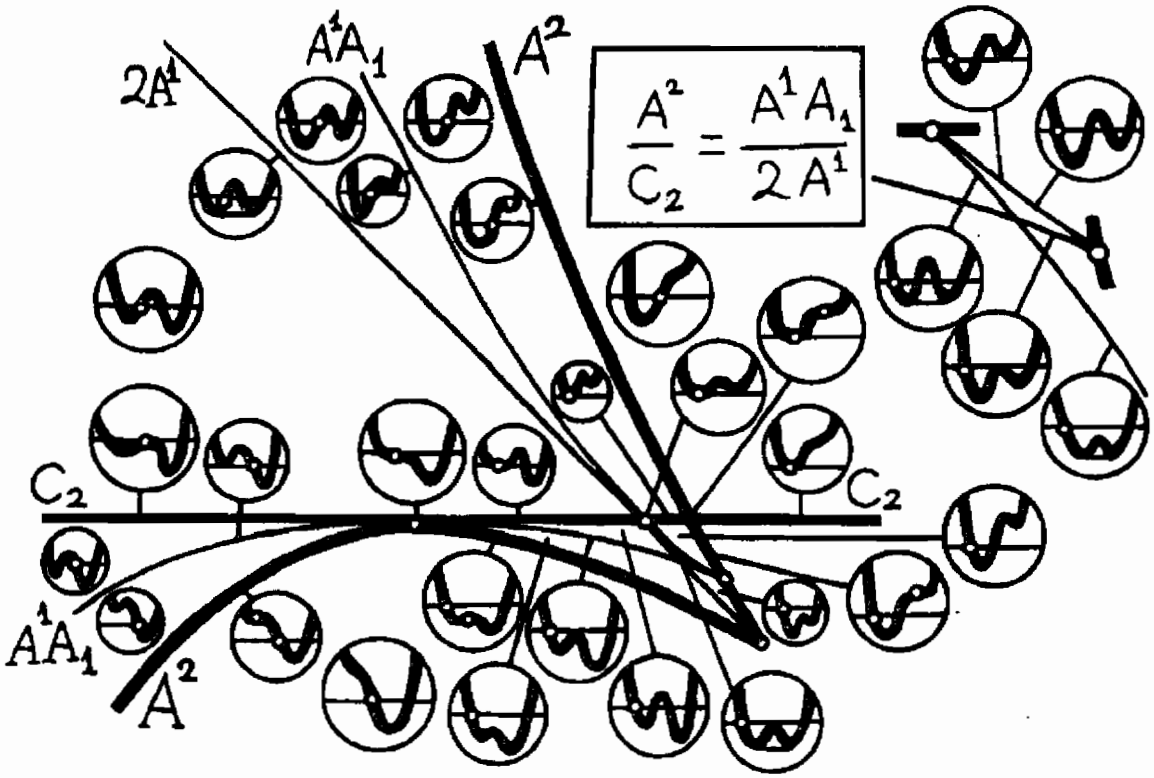


Рис. 91. Бифуркационная диаграмма функций C_4

вую критическую точку (C_2). Следовательно она диффеоморфна дискриминанту C_3 (аналогично, каустика C_{k+1} диффеоморфна дискриминанту C_k).

Рисунок 91 показывает, что множество Максвелла C_4 диффеоморфно каустике этой особенности. Априори это далеко не очевидно. Этот результат распространяет теорему Гивенталя о двух раскрытых ласточкиных хвостах, обсуждённую в конце §4.4, на случай C_k (или B_k). Было бы интересно понять причины этой странной связи между каустиками и множествами Максвелла.

Вернёмся к общей теории бифуркационных диаграмм функций для краевых особенностей. Обобщая конструкцию Ляшко-Лойенги, каждой точке $\bar{\lambda}$ усечённой базы сопоставим значение свободного члена версальной деформации, для которого сумма μ критических значений функции $F(.,\bar{\lambda},\lambda_\mu)$ равна нулю. Построим многочлен, корнями которого являются эти критические значения. Таким образом мы построили отображение усечённой базы в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ многочленов степени μ, с единичным старшим и нулевым последующим коэффициентом.

Теорема 2 (см. [160]). *Построенное выше отображение является*

собственным и голоморфным, при условии что краевая особенность является простой. Дополнение бифуркационной диаграммы функций накрывает многообразие многочленов, не имеющих кратных корней.

Следствие. *Дополнение бифуркационной диаграммы простой краевой особенности является $K(\pi, 1)$ пространством, где π есть подгруппа конечного индекса в группе кос из μ нитей.*

Для того чтобы вывести теорему 1 из теоремы 2, рассмотрим μ моментов, когда движущаяся вдоль нашего векторного поля частица пересекает дискриминант. Эти моменты задают прямую, в которую требуемый диффеоморфизм должен отобразить орбиту этой частицы, с точностью до выбора из конечного числа возможностей.

Деформация стандартного векторного поля в наше векторное поле единственным образом может быть накрыта некоторой деформацией тождественного диффеоморфизма; эта конструкция доставляет требуемый диффеоморфизм, сохраняющий дискриминант (подробности описаны в [159], [160]).

Теорема 1 доставляет также информацию о векторных полях, трансверсальных дискриминантам обычных (не краевых) особенностей. Например, из неё следует возможность выпрямления типичного векторного поля в вершине обычного ласточкина хвоста при помощи сохраняющего ласточкин хвост диффеоморфизма.

Для того чтобы привести к нормальной форме векторное поле в некоторой окрестности вершины бифуркационной диаграммы нулей функции g, применим теорему к функции

$$f(x) = x_0 + g(x_1, \ldots, x_n)$$

на многообразии с краем $x_0 = 0$. В этом случае бифуркационная диаграмма имеет единственную компоненту: она совпадает с бифуркационной диаграммой ограничения f на край, то есть с бифуркационной диаграммой нулей функции g, так как многообразия уровня функций $F(., \lambda)$ не особы.

Следствие. *Проектирование на плоскость вдоль оси с ласточкина хвоста, образованного имеющими кратные корни многочленами $x^4 + ax^2 + bx + c$, устойчиво: в некоторой окрестности начала координат ей эквивалентно любое близкое проектирование.*

Естественно, подобное следствие справедливо для всех простых особенностей функций (на имеющих или не имеющих край многообрази-

ях) и для дискриминантов всех групп отражений (включая унитарные группы отражений).

Применение теоремы 1 к изучению нормальных форм и перестроек различных геометрических объектов в пространстве, содержащем бифуркационную диаграмму, (например, применение к теории проектирований гладких гиперповерхностей) обсуждается в [98], где эта теорема была впервые сформулирована. Вместе с теоремой 1, сформулированная ниже теорема 3 очень полезна при изучении нормальных форм. В этой теореме бифуркационная диаграмма нулей заменена произвольной гиперповерхностью V в $\mathbf{C}^n$ (особой или нет).

Предположим, что ограничение расслоения $p : \mathbf{C}^n \to\!\!\!\!\to \mathbf{C}^{n-1}$ на росток гиперповерхности $V \subset \mathbf{C}^n$ есть собственное отображение. Тогда локально V может быть задано уравнением $R(x) = 0$, где R есть многочлен вдоль любого слоя проекции p. Его степень k равна кратности пересечения V с содержащим точку приложения ростка слоем. Обозначим через $D : \mathbf{C}^{n-1} \to \mathbf{C}$ дискриминант многочлена R. Многообразие нулевого уровня дискриминанта назовём *бифуркационной диаграммой проектирования* $V \hookrightarrow \mathbf{C}^n \to\!\!\!\!\to \mathbf{C}^{n-1}$.

Определение. Скажем, что векторное поле v *сохраняет многообразие* $f = 0$, если производная f вдоль v принадлежит идеалу, порождённому f.

Теорема 3 (см. [159]). *Предположим, что размерность множества точек базы, в которых сливается более двух точек пересечения гиперповерхности V со слоем (при этом общее число различных точек пересечения слоя с V становится меньше чем $n-1$), строго меньше размерности бифуркационной диаграммы.*

Тогда росток любого голоморфного векторного поля на базе, касающегося бифуркационной диаграммы, допускает поднятие до ростка голоморфного векторного поля на пространстве расслоения $\mathbf{C}^n \to\!\!\!\!\to \mathbf{C}^{n-1}$, сохраняющего гиперповерхность V.

Следствие. *Любое голоморфное векторное поле, сохраняющее бифуркационную диаграмму функций простой особенности, допускает поднятие до голоморфного векторного поля, касающегося бифуркационной диаграммы нулей (дискриминанта).*

Пример. Любое поле, касающееся объединения полукубической параболы с касающейся её в точке возврата прямой, допускает поднятие на ласточкин хвост, ребро возврата и линия самопересечения которого

проектируются на полукубическую параболу и эту касательную прямую.

Эти инфинитезимальные результаты имеют глобальные аналоги, в которых векторные поля заменены диффеоморфизмами. Для того чтобы поднять диффеоморфизм, сохраняющий бифуркационную диаграмму, полезно знать группу π_0 связных компонент пространства биголоморфных диффеоморфизмов, сохраняющих диаграмму.

Для дискриминантов групп отражений ответ был найден О.В.Ляшко [159], [160]:

Теорема 4. *Группа π_0 совпадает с фактором группы автоморфизмов группы отражений, сохраняющих множество отражений, по инвариантной подгруппе внутренних автоморфизмов. Эта группа состоит из 2-х элементов для случаев $D_{2k}, B_2, F_4, G_2, I_2(2k)$ и изоморфна группе перестановок 3-х элементов для случая D_4. В остальных случаях эта группа тривиальна.*

Вернёмся теперь к простым проектированиям полных пересечений. В.В.Горюнов распространил приведённые выше теоремы Ляшко и на этот случай. Его список простых проекций (§6.2) включает список простых краевых особенностей. Но даже в этом случае теоремы Горюнова доставляют информацию, отличную от содержащейся в теоремах Ляшко: начиная с тех же краевых особенностей, Горюнов получает *другие* пространства Эйленберга–Маклейна и выпрямляет *другие* векторные поля.

Пример. Рассмотрим ещё раз пространство кубических многочленов $x^3 + ax^2 + bx + c$, имеющих кратные корни. Это пространство, диффеоморфное цилиндру над полукубической параболой, образует часть бифуркационной диаграммы нулей особенности C_3. На этот раз мы спроектируем его не вдоль оси c (как в теореме Ляшко и как на рис. 90), а вдоль оси b (рис. 92). В этом случае вертикальная плоскость, обозначенная на рис. 92 точками, не принадлежит проектируемому многообразию.

Видимый контур проектирования на (a, c)-плоскость состоит из двух гладких кривых, A^2 и C_2, имеющих кубическое касание друг с другом в начале координат. В этом примере теоремы Горюнова формулируются следующим образом [131], [161].

Теорема 5. *Дополнение видимого контура есть пространство Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$, где π есть подгруппа индекса 8 в группе кос из 3-х нитей.*

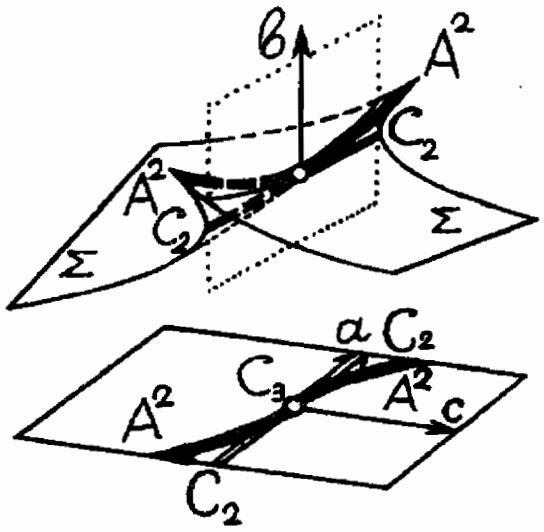


Рис. 92. Бифуркационная диаграмма проектирования C_3

Теорема 6. *Проектирование вдоль оси b приведённого выше цилиндра над полукубической параболой устойчиво: любое близкое (быть может нелинейное) голоморфное проектирование этого цилиндра локально биголоморфно эквивалентно проектированию $(a, b, c) \mapsto (a, c)$.*

Теорема 7. *Росток в начале координат векторного поля $\partial/\partial b$ устойчив по отношению приведённому выше полукубическому цилиндру: любое близкое голоморфное векторное поле приводится (в некоторой точке, близкой к началу координат) к виду $\partial/\partial b$ локальным биголоморфным диффеоморфизмом 3-пространства, сохраняющим полукубический цилиндр.*

Теорема 8. *Любое типичное голоморфное векторное поле в любой точке ребра возврата полукубического цилиндра $u^2 = v^3$ приводится (диффеоморфизмом 3-пространства с координатами (u, v, w), сохраняющим этот цилиндр) к одной из двух нормальных форм $\partial/\partial u$ (в типичных точках), $\partial/\partial v + w\partial/\partial u$ (в особых точках).*

Для того чтобы сформулировать общие результаты для произвольных проектирований на прямую, рассмотрим проектирование на ось u полного пересечения V_0, заданного уравнениями $f(x, u) = 0$. Деформация этого проектирования является семейством проектирований $(x, u) \mapsto u$ полных пересечений V_λ, задаваемых уравнениями $F(x, u, \lambda) = 0$, где $F(x, u, 0) = f(x, u)$. Предположим, что F является минивер-

сальной деформацией простого ростка голоморфного проектирования. Это значит, что число n — параметров λ — минимально (определение версальной деформации см. в §6.2).

Пример. Для ростка простого проектирования C_3 полное пересечение V_0 есть плоская кривая $f(x,u)=0$, где $f=x^3+ux$. Миниверсальная деформация есть двупараметрическое семейство кривых $F(x,u,\lambda)=0$, где $F=f+\lambda_1x^2+\lambda_2$.

Деформации проектирования сопоставим "большое полное пересечение"

$$W=\{(x,u,\lambda)|F(x,u,\lambda)=0\}.$$

Если деформация версальна, то W не особо в начале координат.

Определение. *Бифуркационной диаграммой нулей проектирования* называется росток в начале координат множества критических значений ограничения отображения $(x,u,\lambda)\mapsto(u,\lambda)$ на росток многообразия W.

Пример. Бифуркационная диаграмма нулей проектирования C_3 образована теми точками (u,λ), для которых многочлен $x^3+\lambda_1x^2+$ $+ux+\lambda_2$ имеет кратный корень (на рис. 92 (λ_1,u,λ_2) обозначаются через (a,b,c)).

Рассмотрим теперь естественную проекцию бифуркационной диаграммы нулей проектирования вдоль оси u на пространство параметров $\{\lambda\}$.

Определение. *Бифуркационной диаграммой проектирования* называется объединение проекции на пространство параметров $\{\lambda\}$ множества особых точек бифуркационной диаграммы нулей и множества критических значений этого проектирования на гладкой части этой бифуркационной диаграммы нулей.

Пример 1. Для проектирования гладкой части бифуркационной диаграммы нулей C_3 на $\{\lambda\}$-плоскость ((a,c)-плоскость на рис. 92) множество критических значений есть ось a. Проекцией множества особых точек бифуркационной диаграммы нулей является кубическая парабола. Их объединение образует бифуркационную диаграмму проектирования C_3. Это многообразие не диффеоморфно бифуркационной диаграмме функций C_3 (состоящей из трёх квадратично касающихся друг друга компонент).

Пример 2. Проектирование ласточкина хвоста вдоль направления, трансверсального касательной плоскости в вершине, на плоскость не имеет критических значений на гладкой части ласточкина хвоста. Множество особых точек ласточкина хвоста состоит из двух компонент: ребра возврата и линии самопересечения. Их образ образует бифуркационную диаграмму проектирования A_3 (совпадающую с бифуркационной диаграммой функции A_3). Здесь $f = u + x^4$, $F = f + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$.

В общем случае бифуркационная диаграмма проектирования состоит из 3-х частей: проекции ребра возврата бифуркационной диаграммы нулей, проекции множества самопересечений и множества критических значений проектирования гладкой части.

Бифуркационная диаграмма проектирования также может быть определена как множество тех значений параметров λ миниверсальной деформации, при которых либо многообразие $V_\lambda = \{(x,u)|F(x,u,\lambda) = 0\}$ особо, либо ограничение на него функции u не является морсовской функцией.

Теорема 9 (см. [131], [133]). *Росток дополнения бифуркационной диаграммы простого проектирования полного пересечения положительной размерности на прямую есть пространство Эйленберга–Маклэйна $K(\pi, 1)$, где π есть подгруппа конечного индекса в группе кос из $n+1$ нитей (здесь $n = \dim\{\lambda\}$).*

Теорема 10. *Росток в нуле векторного поля $\partial/\partial u$ устойчив по отношению к бифуркационной диаграмме нулей простого проектирования: любое близкое векторное поле приводится к этой нормальной форме в некоторой близлежащей точке биголоморфным диффеоморфизмом, сохраняющим бифуркационную диаграмму нулей.*

Подобные результаты справедливы для непростых проектирований, при условии существования для них квазиоднородных версальных деформаций.

Пример. В $\mathbf{C}^n$ рассмотрим гиперповерхность Σ, состоящую из многочленов $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, имеющих кратные корни. Эта гиперповерхность диффеоморфна декартову произведению ласточкина хвоста в $\mathbf{C}^{n-1}$ на прямую $\mathbf{C}$. Произведение вершины этого хвоста на $\mathbf{C}$ есть самая вырожденная кривая на Σ. Теоремы Ляшко и Горюнова описывают нормальные формы типичных голоморфных векторных полей во всех точках этой особой кривой.

Действительно, в типичных точках этой кривой векторное поле трансверсально гиперплоскости, касающейся Σ. В некоторой окрестности такой точки векторное поле приводится к виду $\partial/\partial a_n$ сохраняющим Σ диффеоморфизмом (теорема 1). В некоторых изолированных точках этой самой особой кривой векторное поле принадлежит касательной гиперплоскости, и вектор поля типичен в этой гиперплоскости (при условии, что исходное векторное поле типично). В некоторой окрестности этой изолированной точки поле приводится к виду $\partial/\partial a_{n-1}$ (теорема 10).

Замечание. Приведённые выше теоремы имеют множество обобщений. Например, Горюнов распространил их на случай простых проектирований полных пересечений с краем на прямую (эти проектирования стабильно эквивалентны простым проектированиям гиперповерхностей с краем), и на случай простых линейных особенностей, которые ввёл в [162] Д.Сирсма.

Неизолированная критическая точка функции называется *линейной*, если множество критических точек образует гладкую кривую, и если особенность ограничения функции на типичную гиперплоскость, трансверсальную этой кривой, не вырождена (морсовского типа).

Горюнов обнаружил, что простые линейные особенности классифицируются группами отражений. Иерархия неизолированных особенностей отражает иерархию серий особенностей. Например, в обозначениях [28],

$$A_n \sim J_{n+1,\infty}, \quad B_n \sim T_{2n+2,\infty,\infty};$$
$$C_n \sim Z_{2n-2,\infty}, \qquad F_4 \sim W_{1,\infty}.$$

Для этих особенностей Горюнов определил бифуркационные диаграммы и доказал $K(\pi,1)$-свойство [80].

Интересно отметить, что для простых объектов $K(\pi,1)$-свойство имеет место только в "естественных" теориях, и что в этом смысле проектирования являются более естественными объектами нежели полные пересечения (состояние теории отмеченных базисов, обсуждённой в §6.2, приводит к этому же выводу).

Пример. Рассмотрим бифуркационную диаграмму нулей 0-мерного полного пересечения

$$x^2 + u^2 = 0, \quad xy = 0$$

(обозначенного через $I_{2,2}$ в списке Джусти [154] простых особенностей

полных пересечений). Кнорrер в [129] доказал, что дополнение этой диаграммы в $\mathbf{C}^4$ имеет нетривиальную группу π_2, следовательно не является $K(\pi,1)$ пространством.

Однако, Горюнов в [130] заметил, что дополнение бифуркационной диаграммы простого *проектирования* на ось u этого полного пересечения *является* $K(\pi,1)$ пространством.

Бифуркационная диаграмма этого полного пересечения имеет вид

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^4 |\ \text{многообразие } u^2+\lambda_1 u+\lambda_2+\lambda_3 x+x^2=0,\ ux=\lambda_4 \text{ особо}\}.$$

Бифуркационная диаграмма проектирования $(x,u)\mapsto u$ является объединением бифуркационной диаграммы полного пересечения и гиперповерхности $\lambda_4=0$ (над этой гиперповерхностью число различных значений u на полном пересечении меньше чем над дополнением полного пересечения).

Таким образом, проектирования лучше полных пересечений (несмотря на то, что существуют простые проектирования полных пересечений, для которых $K(\pi,1)$-гипотеза не доказана; а именно, $X_{k,l}$, $3\le k<l$, V_6, V_7, $\Gamma^{a,b}_{a+b+3}$).

Теория проектирований 0-мерных полных пересечений на плоскости доставляет топологическую классификацию многочленов Лорана и тригонометрических многочленов. Эта теория приводит к перечислению связных графов с n вершинами и n нумерованными рёбрами [198].

7 Задача об обходе препятствия

В евклидовом пространстве рассмотрим препятствие, ограниченное гладкой поверхностью общего положения. Задача об обходе препятствия состоит в том, чтобы найти особенности функции расстояния до точки в пространстве от некоторого начального множества (скажем, точки) вдоль путей, огибающих препятствие.

Для препятствия, ограниченного плоской кривой, линии уровня функции расстояния являются звольвентами кривой (рис. 93). Следовательно, эти линии уровня имеют полукубические точки возврата в точках границы, если граница выпукла (при условии, что кривизна границы нигде не равна нулю).

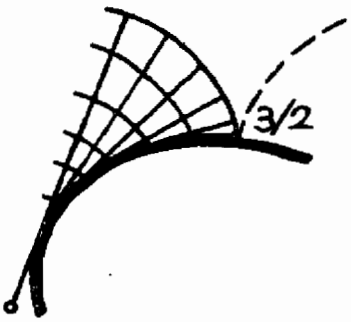


Рис. 93. Эвольвенты как волновые фронты

В типичной точке перегиба на границе эвольвента имеет особенность E_8 порядка 5/3 (как нетрудно подсчитать). Лежандрово подмногообразие (в пространстве контактных элементов плоскости), соответствующее этому фронту, само имеет особенность (полукубическую точку возврата).

Фронты вариационных задач на многообразиях без края (например, эквидистанты гиперповерхности в гладком многообразии) также могут иметь особенности. Однако, эти особенности являются особенностями проекций: проектируемое лежандрово многообразие является гладким. В вариационных задачах на многообразиях с краем (и для более общих вариационных задач с односторонними ограничениями) сами лежандровы многообразия, образованные касающимися фронтов контактными элементами, являются особыми.

Особые лагранжевы многообразия появляются таким же образом. Экстремали, соединяющие точку многообразия с другими точками, образуют лагранжево подмногообразие пространства экстремалей. Эти лагранжевы многообразия гладки, если конфигурационное многообразие не имеет края, и могут быть особыми в противном случае.

полных пересечений). Кнорrер в [129] доказал, что дополнение этой диаграммы в $\mathbf{C}^4$ имеет нетривиальную группу π_2, следовательно не является $K(\pi,1)$ пространством.

Однако, Горюнов в [130] заметил, что дополнение бифуркационной диаграммы простого *проектирования* на ось u этого полного пересечения *является* $K(\pi,1)$ пространством.

Бифуркационная диаграмма этого полного пересечения имеет вид

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^4 |\ \text{многообразие } u^2+\lambda_1 u+\lambda_2+\lambda_3 x+x^2=0,\ ux=\lambda_4 \text{ особо}\}.$$

Бифуркационная диаграмма проектирования $(x,u)\mapsto u$ является объединением бифуркационной диаграммы полного пересечения и гиперповерхности $\lambda_4=0$ (над этой гиперповерхностью число различных значений u на полном пересечении меньше чем над дополнением полного пересечения).

Таким образом, проектирования лучше полных пересечений (несмотря на то, что существуют простые проектирования полных пересечений, для которых $K(\pi,1)$-гипотеза не доказана; а именно, $X_{k,l}$, $3\le k<l$, V_6, V_7, $\Gamma^{a,b}_{a+b+3}$).

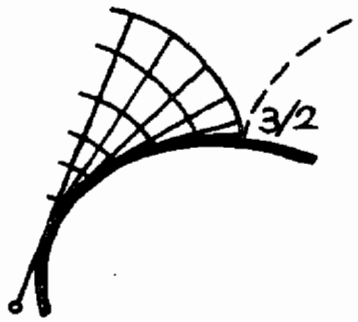
Теория проектирований 0-мерных полных пересечений на плоскости доставляет топологическую классификацию многочленов Лорана и тригонометрических многочленов. Эта теория приводит к перечислению связных графов с n вершинами и n нумерованными рёбрами [198].

7 Задача об обходе препятствия

В евклидовом пространстве рассмотрим препятствие, ограниченное гладкой поверхностью общего положения. Задача об обходе препятствия состоит в том, чтобы найти особенности функции расстояния до точки в пространстве от некоторого начального множества (скажем, точки) вдоль путей, огибающих препятствие.

Для препятствия, ограниченного плоской кривой, линии уровня функции расстояния являются эвольвентами кривой (рис. 93). Следовательно, эти линии уровня имеют полукубические точки возврата в точках границы, если граница выпукла (при условии, что кривизна границы нигде не равна нулю).

Рис. 93. Эвольвенты как волновые фронты



В типичной точке перегиба на границе эвольвента имеет особенность E_8 порядка 5/3 (как нетрудно подсчитать). Лежандрово подмногообразие (в пространстве контактных элементов плоскости), соответствующее этому фронту, само имеет особенность (полукубическую точку возврата).

Фронты вариационных задач на многообразиях без края (например, эквидистанты гиперповерхности в гладком многообразии) также могут иметь особенности. Однако, эти особенности являются особенностями проекций: проектируемое лежандрово многообразие является гладким. В вариационных задачах на многообразиях с краем (и для более общих вариационных задач с односторонними ограничениями) сами лежандровы многообразия, образованные касающимися фронтов контактными элементами, являются особыми.

Особые лагранжевы многообразия появляются таким же образом. Экстремали, соединяющие точку многообразия с другими точками, образуют лагранжево подмногообразие пространства экстремалей. Эти лагранжевы многообразия гладки, если конфигурационное многообразие не имеет края, и могут быть особыми в противном случае.

Рассмотрим, например, кратчайшие пути из фиксированной точки евклидова 3-пространства до произвольной точки вне препятствия (рис. 94). Начальная часть такого пути является прямой, соединяющей начальную точку с точкой касания этой прямой с границей препятствия. Следующая часть — отрезок геодезической на границе препятствия. Таким образом, на поверхности препятствия возникает однопараметрическое семейство геодезических. Следующая часть пути лежит на прямой, "срывающейся" с поверхности в направлении, касательном некоторой геодезической семейства в некоторой точке и т. д.

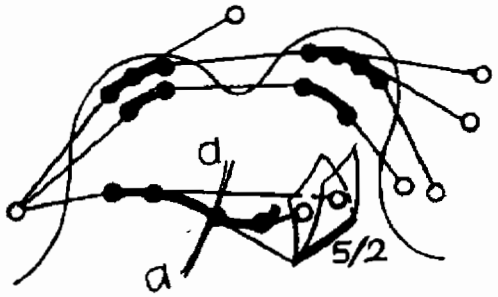


Рис. 94. Экстремали задачи об обходе препятствия

В некоторых точках поверхности препятствия направление геодезической из описанного выше семейства совпадает с асимптотическим направлением поверхности. Для семейства общего положения такие точки образуют гладкую кривую (кривая a на рис. 95). Лучи, срывающиеся с поверхности в этих точках, образуют ребро возврата лагранжева многообразия срывающихся лучей. В некоторых изолированных точках кривой a геодезическая семейства касается этой кривой.

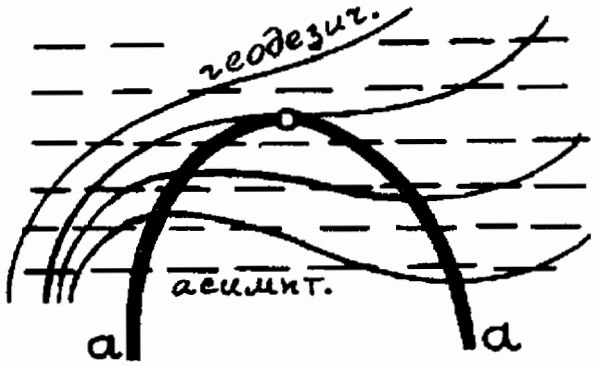


Рис. 95. Поле асимптотических направлений и пучок геодезических

Для семейства общего положения срывающийся с поверхности препятствия в такой точке на a луч является вершиной раскрытого ласточкина хвоста, образованного срывающимися с границы препятствия лучами (рис. 10). Именно таким образом раскрытый ласточкин хвост появился в современной теории особенностей (см. [23]).

Лагранжевы и лежандровы многообразия, описывающие решения вариационных задач с односторонними ограничениями, всегда имеют

особенности такого типа. Хотя задача об обходе препятствия до сих пор полностью не решена даже для евклидова 3-пространства, мы опишем в этой главе нормальные формы наиболее важных особых лагранжевых и лежандровых многообразий, возникающих в этой задаче, включая нормальные формы соответствующих семейств лучей в пространстве экстремалей.

Эти нормальные формы доставляются теорией инвариантов бинарных форм. Совершенно неожиданная связь теории бинарных форм и вариационного исчисления была открыта в большой серии работ ([23]–[25], [72], [11], [12], [4], [5], [8], [143], [144]) в результате попыток понять глубокие причины совпадений бифуркационных диаграмм в различных теориях, удивительных сокращений многих членов в длинных формулах и странной универсальности раскрытого ласточкина хвоста.

С другой стороны, график функции времени в плоской задаче об обходе препятствия локально диффеоморфен многообразию нерегулярных орбит группы симметрий икосаэдра (группы H_3 в классификации Кокстера групп отражений). В пространственной (трёхмерной) задаче об обходе препятствия эта поверхность появляется как особенность фронта (в точке касания асимптотического луча поверхности препятствия).

Дискриминант группы симметрий гиперикосаэдра H_4 появляется как особенность графика функции расстояния в точке асимптотического луча, срывающегося в параболической точке поверхности препятствия. Мы начнём наш анализ задачи об обходе препятствия с обсуждения геометрии асимптотических касательных к поверхностям.

7.1. Асимптотические лучи в симплектической геометрии

Типичная плоская кривая не имеет касательных, порядок касания которых превышает 2. Типичная поверхность в евклидовом 3-пространстве не имеет касательных прямых, порядок касания которых превышает 4. Касательные прямые, порядок касания которых превышает 1 (асимптотические прямые), существуют в целой области гиперболичности. Касательные прямые выше второго порядка существуют на кривой, четвёртого порядка — в изолированных точках этой кривой (см. рис. 77).

Иерархия асимптотических касательных прямых становится более ясной, если её сформулировать на языке симплектической (или контактной) геометрии. Эта переформулировка распространяет теорию асимптотических касательных на широкий класс новых ситуаций; например, на случай подмногообразий римановых пространств или на общие вариационные задачи с односторонними ограничениями.

Рассмотрим гиперповерхность ∂M в M — римановом многообразии с краем. Точки фазового пространства T^*M будем называть *векторами*. Риманова метрика определяет гиперповерхность векторов длины 1 в фазовом пространстве. Поверхность ∂M определяет в фазовом пространстве гиперповерхность векторов, приложенных в точках ∂M.

Бóльшая часть внешней геометрии ∂M в M может быть описана в терминах симплектической геометрий пар гиперповерхностей симплектического многообразия (это было замечено Р.Мельрозом [18] для бильярда Биркгофа, когда M есть область, ограниченная ∂M). Ни структура кокасательного расслоения объемлющего симплектического фазового пространства, ни происхождение гиперповерхностей не играют никакой роли: мы можем рассмотреть любую пару гиперповерхностей в любом симплектическом многообразии. Таким образом, мы можем использовать геометрическую интуицию, основанную на опыте работы с поверхностями в обычном евклидовом пространстве, в общих вариационных задачах с односторонними ограничениями.

7.1.1. Геометрия пар гиперповерхностей симплектических многообразий

Рассмотрим две типичные гладкие гиперповерхности в симплектическом многообразии. Одну из них будем называть "поверхностью ортов", другую — "поверхностью краевых векторов". Предположим, что они трансверсально пересекаются вдоль подмногообразия "единичных краевых векторов" (коразмерности 2 в исходном симплектическом многообразии). Любая гиперповерхность в симплектическом многообразии локально расслаивается на характеристики (интегральные кривые поля косоортогональных дополнений касательных гиперплоскостей). Характеристики "поверхности ортов" будем называть "лучами" (если эта поверхность трансверсально ориентирована, то "лучи" имеют естественную ориентацию).

Пространство "лучей" чётномерно и наследует из объемлющего пространства естественную симплектическую структуру (§1.1). "Многообразие ортов" расслоено над пространством "лучей" и включает,

как гиперповерхность, "подмногообразие краевых ортов". Пара, образованная включением и проекцией, определяет *каноническую проекцию* пространства "краевых ортов" в пространство "лучей": каждому "краевому орту" отвечает "луч, выходящий из этого орта". Эта проекция — отображение пространств одинаковой размерности.

Особенности канонической проекции, построенной по паре типичных гиперповерхностей, являются стандартными особенностями Уитни. Это значит, что локально они эквивалентны особенностям A_k (то есть особенностям проекций гиперповерхности

$$\{(x, \lambda) \mid x^{k+1} + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k = 0\}$$

в пространстве расслоения $(x, \lambda) \mapsto \lambda$ на базу $\{\lambda\}$).

Пример. $k = 1$ соответствует особенности типа "складка": парабола $x^2 + \lambda_1 = 0$ проектируется на λ_1-ось.

Определение. "Краевой орт" называется "*касательным*", если он является особой точкой канонической проекции. Он называется "*асимптотическим*", если соответствующая особенность проекции вырождена более, чем складка ($k > 1$). Для $k = 2$ он называется *биасимптотическим*, и т. д. (рис. 96).

Пример. Для поверхности $F(x) = 0$ в евклидовом 3-пространстве и для поверхности ортов $\{(x, p) \mid p^2 = 1\}$ эти определения совпадают с обычными определениями дифференциальной геометрии.

Вместе с введённой выше канонической проекцией мы можем определить *вторую каноническую проекцию* с помощью той же конструкции, меняя местами гиперповерхности.

Возвращаясь к приведённому выше примеру, рассмотрим импульс p как вектор в евклидовом пространстве. Характеристика поверхности краевых векторов состоит из векторов, приложенных в точке x, концы которых принадлежат прямой, ортогональной касательной плоскости к краю в точке x (рис. 97).

Имея в виду этот пример, мы будем называть пространство характеристик "гиперповерхности краевых векторов" "(ко)касательным расслоением края".

Вторая каноническая проекция отображает многообразие "краевых ортов" в многообразие "(ко)касательных векторов края". В примере эта проекция отправляет краевой орт в его ортогональную проекцию P на касательное пространство (рис. 97). В этом примере единственной

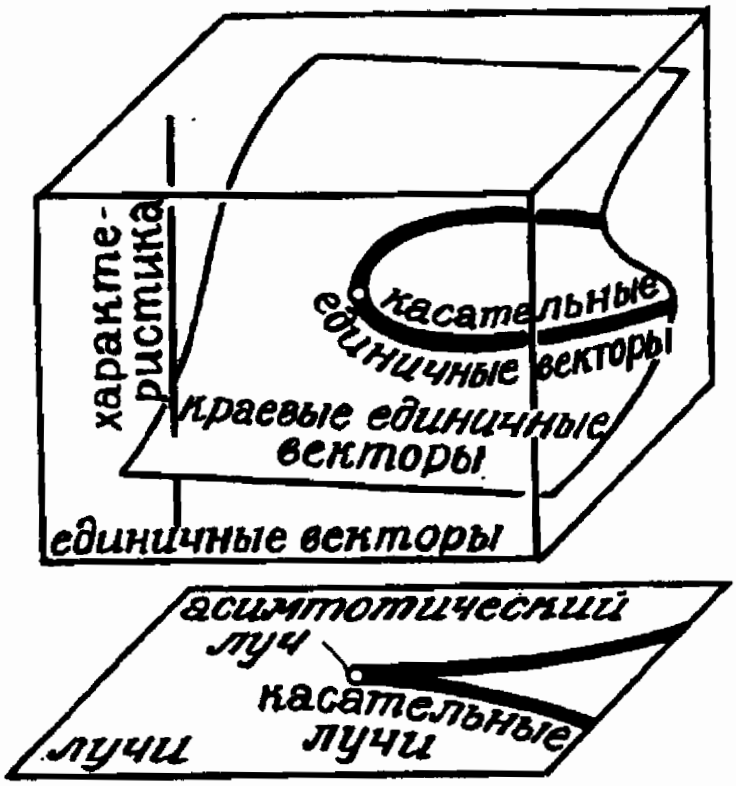


Рис. 96. Асимптотические единичные векторы как особые точки канонической проекции

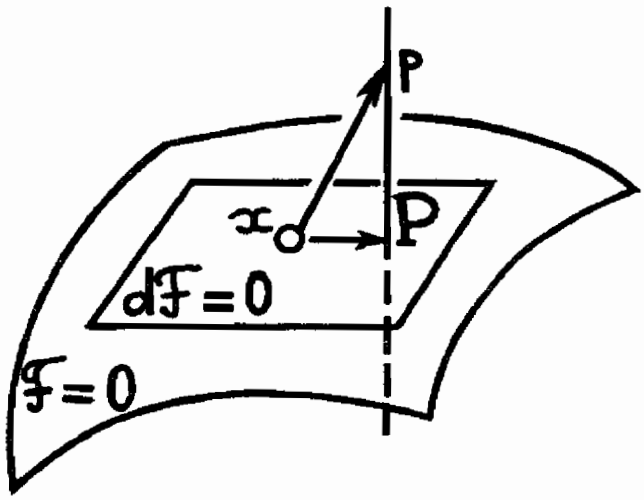


Рис. 97. Характеристика поверхности краевых векторов

особенностью второй канонической проекции является складка (A_1) вдоль многообразия ортов, касающихся края (рис. 98). Конечно, это верно для любого риманова многообразия.

Смысл второй канонической проекции становится более ясным, если мы рассмотрим импульс p как кокасательный вектор на конфигураци-

Рис. 98. Вторая каноническая проекция

онном пространстве, то есть как 1-форму на касательном пространстве в точке x конфигурационного пространства. Характеристика многообразия краевых векторов является прямой, образованной 1-формами $p + \mathbf{R}\,dF$. Эта прямая однозначным образом определяется ограничением формы p на касательное пространство $dF = 0$ края. Следовательно, *вторая каноническая проекция отправляет 1-форму в её ограничение на край.*

7.1.2. Нормальные формы

Если граница препятствия в евклидовом пространстве квадратично строго выпукла (т. е. её вторая квадратичная форма невырождена), тогда обе канонические проекции имеют только особенность A_1 (складку) на многообразии "краевых ортов". Предположим, что пара гиперповерхностей в симплектическом пространстве порождает две особенности A_1 канонических проекций. Отображение складки (локально) определяет *инволюцию* на отображаемом многообразии в окрестности её гиперповерхности критических точек, переставляющую местами прообразы точек образа этого отображения складки. В нашем случае обе

канонические проекции имеют особенности A_1. Следовательно, мы получаем *две* инволюции на многообразии "краевых ортов"; обе эти инволюции неподвижны на гиперповерхности "ортов, касающихся края". Эти две инволюции, определённые первой и второй канонической проекцией, будем называть первой и второй *инволюциями Мельроза.*

Пример. Для плоской выпуклой кривой первая инволюция отправляет орт, приложенный в точке кривой, в орт, имеющий то же направление, но приложенный в другой точке пересечения луча, определённого исходным ортом, и кривой (рис. 99). Вторая инволюция отражает этот орт относительно касательной к кривой в точке прикрепления.

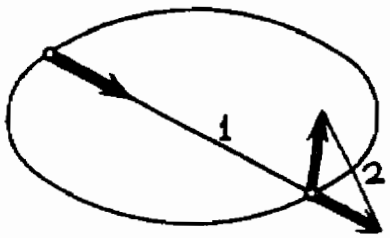


Рис. 99. Бильярдное преобразование Биркгофа как композиция двух инволюций Мельроза

Произведение двух инволюций Мельроза является *бильярдным преобразованием Биркгофа.*

В подходящих координатах Дарбу ($\omega = dp_0 \wedge dq_0 + \ldots$) пара гиперповерхностей приводится к локальной C^∞-нормальной форме

$$q_0 = 0, \quad q_0 = p_0^2 + p_1,$$

при условии, что особенности обеих проекций являются складками (Мельроз [18]). Объекты, сконструированные нами (например, инволюции Мельроза), следовательно, также приводятся к нормальным формам.

Интересно отметить, что приведение к указанным выше нормальным формам возможно в C^∞ ситуации и на уровне формальных рядов, но невозможно в аналитическом и в голоморфном случае. Пары инволюций, встречающиеся на практике в аналитической или голоморфной ситуации, обычно имеют простую формальную или C^∞ классификацию и пространства функциональных модулей. В задаче классификации пар гиперповерхностей в симплектическом многообразии, насколько мне известно, пространства функциональных модулей до сих пор не изучены (это относится также к локальной аналитической классификации соответствующих пар симплектических инволюций и их произведений).

"Глобальная" задача классификации пар инволюций вдоль полного замкнутого подмногообразия неподвижных точек является безнадёжной задачей, даже на топологическом уровне. В самом деле, в простейшем случае, когда это многообразие является окружностью, произведение соответствующих инволюций есть симплектическое отображение кольца, неподвижное на окружности. Топологическая классификация таких отображений включает в себя большинство трудностей, присутствующих в неинтегрируемых задачах гамильтоновой динамики (см. [93]).

Если особенности одной из канонических проекций сложнее, чем складка, то не существует простых нормальных форм для пары гиперповерхностей (см. [163]). Однако, для следующих двух особенностей, A_2 и A_3 (например, для обычных лучей, асимптотически и биасимптотически касающихся поверхностей в евклидовом пространстве), можно привести к нормальной форме (по крайней мере на уровне формальных рядов) пару, образованную первой гиперповерхностью и её пересечением со второй.

Теорема 1. *В некоторой окрестности точки, в которой каноническая проекция имеет особенность A_k, многообразие коразмерности* 1 *в гиперповерхности $q_0 = 0$ приводится к нормальной форме $q_0 = F = 0$, где*

$$F = p_0^2 + p_1 \quad \textit{для } k = 1,$$
$$F = p_0^3 + p_1 p_0 + q_1 \quad \textit{для } k = 2,$$
$$F = p_0^4 + p_1 p_0^2 + q_2 p_0 + p_2 \quad \textit{для } k = 3.$$

Здесь (q, p) — некоторые координаты Дарбу ($\omega = dp_0 \wedge dq_0 + \ldots + dp_n \wedge \wedge dq_n$).

Этот результат, доказанный в [23] на уровне формальных рядов, предположительно верен и в C^∞ ситуации; однако, доказательство, насколько мне известно, никогда не было опубликовано.

Из теоремы вытекает возможность приведения к простым нормальным формам объектов, построенных по паре, образованной первой гиперповерхностью и её пересечением со второй; например, для первой канонической проекции (которая становится отображением "забывания" p_0).

Критические значения первой канонической проекции образуют многообразие "касательных лучей", имеющее полукубическое ребро возврата в случае A_2, и особенность, диффеоморфную произведению ласточкина хвоста на гладкое многообразие, в случае A_3. Это много-

образие "касательных лучей" является гиперповерхностью в симплектическом пространстве лучей.

Приведение к симплектической нормальной форме пары (гиперповерхность, подгиперповерхность) влечёт за собой приведение к симплектической нормальной форме многообразия "касательных лучей".

Предыдущие результаты доставляют локальные нормальные формы симплектических структур в пространствах, содержащих гиперповерхности, диффеоморфные произведению полукубической параболы или ласточкина хвоста на гладкое многообразие:

Теорема 2. *Типичная симплектическая структура формально приводится к виду*

$$dA \wedge dB + dC \wedge dD + \dots$$

в некоторой окрестности точки 0 *гиперповерхности* $A^3 = B^2$ (*здесь, типичная* = *невырожденная на пространстве* $A = B = 0$) *или к виду*

$$dA \wedge dD + dC \wedge dB + dE \wedge dF + \dots$$

в некоторой окрестности точки 0 *гиперповерхности, определённой условием:*

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C \text{ имеет кратный корень}$$

(*здесь, типичная* = *невырожденная на пространстве* $B = C = 0$).

Доказательство может быть найдено в [23] (утверждения, по-видимому, верны и в C^∞ ситуации).

Эти результаты могут быть интерпретированы как приведение к нормальной форме, при помощи симплектоморфизмов, произведений полукубической параболы или ласточкина хвоста на линейное пространство.

Подобная формальная классификация для $k > 3$ невозможна, так как появляются модули.

Контактные версии предыдущей классификации были получены Е.Е.Ландис [164], [165] (смотри также работу Мельроза [163]):

$$\alpha = dZ - B\,dA - \dots$$

в некоторой окрестности ребра возврата цилиндра $A^3 = B^2$;

$$\alpha = dZ - D\,dA - C\,dB - E\,dF - \dots$$

в некоторой окрестности ребра цилиндра над поверхностью ласточкина хвоста.

7.1.3. Геодезические

Множество критических значений канонической проекции является гиперповерхностью в симплектическом пространстве. Её характеристики называются *геодезическими*.

Пример. Рассмотрим пару гиперповерхностей в фазовом пространстве, соответствующую поверхности в евклидовом пространстве. Критические значения первой канонической проекции суть касательные лучи. В этом случае "геодезические" являются кривыми в пространстве лучей, образованными касательными лучами к геодезическим на поверхности.

Критические значения второй канонической проекции суть орты, (ко)касательные к поверхности. В этом случае "геодезические" суть орбиты обычного геодезического потока на поверхности.

Так же, как в примере, определим два множества "геодезических линий": одно, определённое первой, другое — второй канонической проекцией.

Третье семейство состоит из характеристик на многообразии критических точек (одинаковом для обеих проекций). Это многообразие имеет коразмерность 3 в объемлющем симплектическом многообразии. Определим *характеристическое направление* как ядро ограничения симплектической структуры (оно косоортогонально касательному пространству многообразия критических точек).

Характеристики множества критических точек будем называть "*верхними геодезическими*". Канонические проекции отправляют верхние геодезические в нижние (в точках складки, где нижние геодезические определены), см. [166].

Используя нормальные формы первой канонической проекции можно получить следующие нормальные формы первого семейства "верхних" и "нижних геодезических" [23]:

Теорема 3. *В координатах теоремы* 1 *уравнения "верхних геодезических" таковы:*

$$q_0 = p_0 = 0,\ q_1 = \xi,\ \textit{для } k = 1,$$
$$q_0 = 0,\ p_0 = \xi,\ p_1 = -3\xi^2,\ q_1 = 2\xi^3,\ \textit{для } k = 2$$

(*оставшиеся координаты постоянны;* ξ *— параметр вдоль геодезической*).

Для того чтобы описать "геодезические" для $k = 3$, рассмотрим многочлен от p_0:

$$\Phi(p_0) = \frac{p_0^5}{5} + \frac{p_1 p_0^3}{3} + \frac{q_2 p_0^2}{2} + p_2 p_0 + \frac{q_1}{2} = \frac{q_1}{2} + \int F\, dp_0.$$

"Геодезические" в пространстве лучей, снабжённом координатами Дарбу $(p_1, \ldots, q_n)$, определяются условиями:

Φ имеет корень ξ кратности $\geq 3, p_1, p_3, q_3, \ldots, p_n, q_n$ постоянны.

"Верхние геодезические" определяются теми же условиями плюс условия $q_0 = 0$, $p_0 = \xi$.

Рассмотрим случай $k = 3$, $n = 2$ (такой выбор соответствует биасимптотическому лучу в евклидовом 3-пространстве). Из предыдущих формул следует

Теорема 4 ([23]). *Типичное лагранжево подмногообразие прямого произведения M ласточкина хвоста и прямой в симплектическом многообразии $\mathbf{R}^4$*

$$M = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \mid \Phi' \text{ имеет корень кратности } \geq 2\}$$

(формальным) симплектоморфизмом приводимо к нормальной форме

$$\{(p_1, p_2, q_1, q_2) \mid \Phi \text{ имеет корень кратности } \geq 3\}.$$

Это особое лагранжево многообразие является раскрытым ласточкиным хвостом. Из предыдущих теорем вытекает

Следствие 5 ([23])]. *Типичное лагранжево подмногообразие трёхмерного многообразия "касательных лучей" в некоторой окрестности "биасимптотического луча" диффеоморфно раскрытому ласточкину хвосту.*

В отличие от предыдущих теорем, зто следствие (и его обобщения на большие размерности) было доказано в C^∞ и аналитическом (голоморфном) случае (см. ниже, §§7.3–7.4).

Применим следствие 5 к случаю поверхности в евклидовом 3-пространстве. Рассмотрим однопараметрическое семейство геодезических на поверхности. Прямые, касающиеся геодезических семейства, образуют двумерное особое многообразие в четырёхмерном пространстве прямых в 3-пространстве.

Следствие 6 ([23]). *В биасимптотической касательной прямой многообразие касательных прямых локально диффеоморфно (лагранжеву) раскрытому ласточкину хвосту (при условии, что поверхность и семейство геодезических — общего положения).*

Экстремальные кривые в задаче об обходе препятствия образованы отрезками геодезических на поверхности препятствия и отрезками прямых, касающихся геодезических. Система кратчайших путей от начальной точки (или множества) до точек пространства содержит, как правило, семейство прямых, касающихся геодезических на поверхности. Это семейство, в задаче общего положения, содержит изолированные биасимптотические касательные прямые. Таким образом, следствия 5 и 6 описывают типичную особенность системы экстремалей задачи об обходе препятствия: раскрытый ласточкин хвост.

Появление раскрытого ласточкина хвоста как типичной особенности системы лучей в задаче об обходе препятствия априори совершенно не очевидно. Трудно понять, почему биасимптотическая прямая соответствует многочлену пятой степени. Даже зная, что такое соответствие существует, трудно отыскать этот многочлен или описать его геометрически.

Система экстремалей обычной вариационной задачи образует гладкое лагранжево подмногообразие симплектического многообразия экстремалей. Мы видим, что в задачах с односторонними ограничениями система экстремалей образует не гладкое, а *особое* лагранжево многообразие.

Особенности лагранжевых многообразий, определённых таким образом, очень специальны: это особенности лагранжевых подмногообразий *особой* гиперповерхности "касательных лучей".

Определение особых лагранжевых многообразий, возникающих в задаче об обходе препятствия, далеко от абстрактной аксиоматической конструкции, продолжающей понятие лагранжева многообразия на особый случай. Например, можно изучать лагранжевы идеалы (замкнутые по отношению к взятию скобки Пуассона) или особые многообразия, определяемые производящими семействами, для которых не удовлетворяются условия трансверсальности. Эти аксиоматические конструкции ведут к другой иерархии особых лагранжевых многообразий. Мне кажется, что первое определение (особого лагранжева многообразия как подмногообразия особого многообразия "касательных лучей") является правильным, и что полукубическая парабола на плос-

кости и раскрытый ласточкин хвост в симплектическом 4-пространстве являются простейшими объектами этой (будущей) теории.

Зафиксируем обозначения

X — симплектическое многообразие;

Y, Z — две гиперповерхности в X;

W — пересечение $Y \cap Z$;

U, V — пространства характеристик Y и Z;

Σ — множество критических точек проекций $W \to U$, $W \to V$.

Естественные включения и канонические проекции образуют шестиугольную коммутативную диаграмму, как показано на рис. 100. Мы используем $\hookrightarrow$ для обозначения вложений и $\twoheadrightarrow$ для расслоений. Эту диаграмму полезно иметь в виду, изучая особенности систем лучей и фронтов.

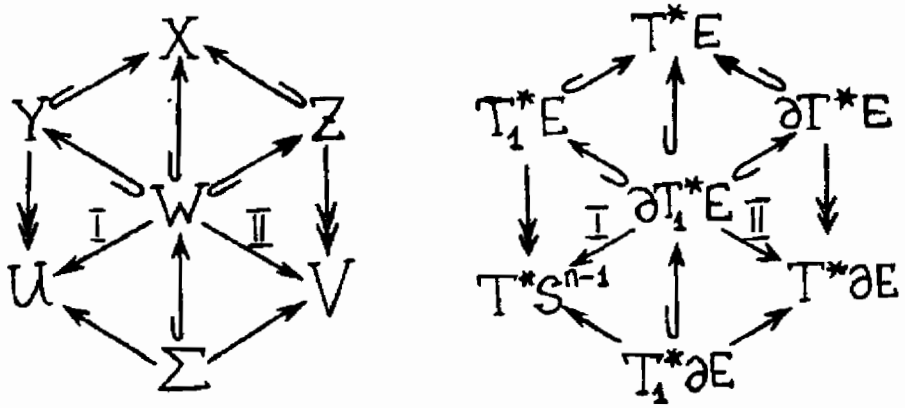


Рис. 100. Диаграмма, порожденная двумя гиперповерхностями в симплектическом пространстве

Пример. На правом рисунке 100 общая диаграмма показана для частного случая, соответствующего обычной дифференциальной геометрии гиперповерхности ∂E евклидова пространства $E = \mathbf{R}^n$. Здесь

$X^{2n} = T^*E = \{x, p\}$ — симплектическое фазовое пространство свободной частицы;

$Y^{2n-1} = T_1^*E = \{x, p \mid p^2 = 1\}$ — гиперповерхность, определяющая метрику на E;

$Z^{2n-1} = \partial T^*E = \{x, p \mid F(x) = 0\}$ — ковекторы на E в точках ∂E;

$U^{2n-2} = T^*S^{n-1}$ — многообразие ориентированных прямых в E;
$V^{2n-2} = T^*\partial E$ — фазовое пространство "связанной" частицы;
$W^{2n-2} = \partial T_1^* E = \{x, p \mid F(x) = 0, p^2 = 1\}$ — (ко)орты на E в точках ∂E;
$\Sigma^{2n-3} = \partial T_1^*(\partial E) = \{x, p \mid F(x)=0, p^2=1, p(\partial F/\partial x)=0\}$ — (ко)орты, касающиеся края.

7.2. Контактная геометрия пар гиперповерхностей

Результаты §7.1 имеют контактные аналоги. Для того чтобы сформулировать их, мы используем контактизацию, преобразующую симплектическое фазовое пространство T^*M в пространство 1-струй функций $J^1(M, \mathbf{R})$. Размерность этого пространства на 1 больше размерности фазового пространства. В качестве новой координаты добавляется значение производящей функции. Эта операция преобразует лагранжевы подмногообразия в лежандровы (по крайней мере локально).

В координатах Дарбу $(p_0, \ldots, q_n; z)$ на J^1 контактная форма записывается в виде $\alpha = dz - p\,dq$.

Предположим, что

1) две гиперповерхности в контактном многообразии пересекаются трансверсально;

2) пересечение трансверсально контактной гиперплоскости;

3) во всех рассматриваемых точках характеристики каждой гиперповерхности имеют первый порядок касания с пересечением гиперповерхностей.

Теорема 1 (см. [163]). *Пара гиперповерхностей локально может быть приведена к нормальной форме Мельроза*

$$q_0 = 0, \quad q_0 = p_0^2 + p_1,$$

с помощью локального C^∞ контактоморфизма объемлющего пространства.

Замечание. Если либо пересечение не трансверсально контактным гиперплоскостям, либо порядок касания превышает 1, то в C^∞ классификации появляются функциональные модули (см. [163], [165]).

Эта теорема Мельроза не может быть применена в контактном 3-пространстве, так как условия 1–3 в этом случае противоречивы. Линия пересечения типичной пары поверхностей в контактном 3-пространстве касается характеристик в изолированных точках, и для пары общего положения порядок касания равен 1, но эта линия не трансверсальна контактным плоскостям в этих точках. Вблизи таких точек пара приводима (формальным или C^∞ диффеоморфизмом) к нормальной форме (в координатах Дарбу):

$$z = q, \quad p^2 = q.$$

Ряды, приводящие пару аналитических поверхностей к этой нормальной форме, в общем случае расходятся. В самом деле, на линии пересечения определены две инволюции, но две инволюции с общей неподвижной точкой имеют функциональные модули (см. [167]).

Теорема 2 (см. [164], [165]). *Подмногообразие коразмерности* 1 *общего положения в гиперповерхности контактного многообразия формальным контактоморфизмом локально приводится к одной из нормальных форм теоремы* 1 §7.1 (*при выполнении сформулированных ниже условий невырожденности*).

Обозначим через $\Sigma(k)$ множество точек подмногообразия, в которых порядок его касания с характеристиками гиперповерхности больше либо равен k (здесь k обозначает то же число, что и в теореме 1 §7.1.)

Условия невырожденности заключаются в следующем:

$k = 1$	подмногообразие трансверсально контактным гиперплоскостям;	
$k = 2$	$\dim \ker d\alpha \mid_{\{\alpha=0\}\cap T_x\Sigma(1)} = 1$;	$(*)$
$k = 3$	$(*)$ и $\Sigma(2)$ трансверсально контактным гиперплоскостям.	

Для подмногообразия общего положения эти условия нарушаются только на подмногообразии коразмерности 1 в $\Sigma(1)$.

Пример. Рассмотрим гиперповерхность в евклидовом пространстве E. Построим отображение exp многообразия ненулевых векторов,

приложенных в точках гиперповерхности, в многообразие ортов объемлющего пространства. Это отображение отправляет вектор xy, приложенный в точке x, в орт, имеющий направление вектора xy и приложенный в точке y.

Отображение exp может рассматриваться как первое каноническое отображение для пары гиперповерхностей в контактном пространстве $J^1(M, \mathbf{R})$. А именно, в качестве первой гиперповерхности выберем уравнение Гамильтона–Якоби для движущейся с единичной скоростью частицы: $(\bigtriangledown z)^2 = 1$. Второй гиперповерхностью контактного пространства является цилиндр над данной гиперповерхностью евклидова пространства.

Следующие ниже формулы доставляют локальные нормальные формы для отображения exp.

Теорема 3 (см. [164], [165]). *Особенности отображения* exp *в окрестностях векторов асимптотических направлений типичной поверхности в евклидовом* 3*-пространстве перечислены в следующей таблице:*

точка	$\Pi_{3,1}$	$\Pi_{4,1}$	Π_5	$\Pi_{4,3}$	$\Pi_{3,2}, \Pi_{3,3}$	$\Pi_{4,2}$
особенность	A_2, A_2	A_2, A_3	A_2, A_4	A_3, A_3	A_2	A_3

Типы $\Pi_{i,j}$ определены в §6.1. Отображение A_k эквивалентно проекции вдоль оси x поверхности $\{(x, \lambda) \mid x^{k+1} + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k = 0\}$ на пространство λ.

Орт в евклидовом пространстве будем называть *особым* (по отношению к данной типичной поверхности), если содержащая этот орт прямая линия касается поверхности. Особые орты образуют 4-мерную гиперповерхность в 5-мерном многообразии ортов.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 4. *Гиперповерхности особенностей особых ортов в окрестностях ортов асимптотических касательных локально диффеоморфны: цилиндру над полукубической параболой (в ортах обычных асимптотических касательных), цилиндру над ласточкиным хвостом (в ортах биасимптотических касательных), цилиндру над трёхмерным ласточкиным хвостом (в ортах три-асимптотических касательных).*

Применение к задаче об обходе препятствия

С задачей об обходе препятствия связаны два типа лежандровых многообразий: многообразия 1-струй (многозначных) функций времени и многообразия контактных элементов, касающихся фронтов. Приведённые выше результаты несут информацию об особенностях этих многообразий на плоскости и в трёхмерном пространстве (общий случай обсуждается ниже, в §7.5).

Для того чтобы получить эту информацию, перенесём на контактный случай конструкции канонических проекций (смотри §7.1, раздел C). Будем использовать терминологию задачи об обходе препятствия в римановом случае, но вся теория практически не меняется в общем случае типичной пары гиперповерхностей в произвольном контактном многообразии.

Начнём с многообразия $J^1(M, \mathbf{R})$ 1-струй функций на многообразии M с гладким краем ∂M. Точку, в которой берётся струя функции, обозначим через $x \in M$; значение функции в этой точке — через $t \in \mathbf{R}$; значение первого дифференциала в x — через p.

В контактном пространстве 1-струй функций на M рассмотрим две гиперповерхности $SJ^1(M, \mathbf{R})$, $\partial J^1(M, \mathbf{R})$. Первая из них определена уравнением Гамильтона–Якоби $p^2 = 1$, вторая — условием $x \in \partial M$.

Характеристики первой гиперповерхности являются орбитами геодезического потока в пространстве сферизованного расслоения ST^*M, с естественным параметром t на этих орбитах. Множество характеристик может быть отождествлено с пространством сферизованного касательного расслоения M. Действительно, выберем момент времени τ. Произвольной точке параметризованной орбиты геодезического потока сопоставим точку этой же орбиты, соответствующую моменту $t = \tau$. Это соответствие определяет расслоение $SJ^1(M, \mathbf{R}) \twoheadrightarrow ST^*M$, слоями которого являются характеристики. Следовательно, мы отождествили пространство характеристик гиперповерхности $SJ^1(M, \mathbf{R})$ с многообразием ST^*M. Это отождествление зависит от выбора τ.

Характеристика второй гиперповерхности образована 1-струями в точке ∂M продолжений функции с ∂M на M. Таким образом, многообразие характеристик естественно отождествляется с $J^1(\partial M, \mathbf{R})$.

Контактные структуры пространств характеристик совпадают со стандартными контактными структурами на пространствах ST^*M и $J^1(\partial M, \mathbf{R})$, определёнными в §3.1.

Пересечение наших двух гиперповерхностей есть линейное расслоение контактных элементов над пространством-временем, ограниченное на край:

$$W = \{(x, p, t) \mid p^2 = 1,\ x \in \partial M\}.$$

Первая каноническая проекция $\mathrm{I} : W \to ST^*M$ отправляет граничный вектор в момент времени t в орт, касающийся той же геодезической в момент τ.

Вторая каноническая проекция $\mathrm{II} : W \to J^1(\partial M, \mathbf{R})$ отправляет 1-струю функции на M в точке, принадлежащей ∂M, в 1-струю ограничения этой функции на ∂M. Это отображение имеет особенность A_1 (складку) в точках гиперповерхности $\Sigma \subset W$, образованной ортами, касающимися ∂M,

$$\Sigma = \{(x, p, t) \mid p^2 = p_\partial^2 = 1,\ x \in \partial M\},$$

где p_∂ есть ограничение формы p на $T_x\partial M$.

Множество критических значений второй канонической проекции является гиперповерхностью $SJ^1(\partial M, \mathbf{R})$, определённой над ∂M уравнением Гамильтона–Якоби $p_\partial^2 = 1$. Таким образом мы получили вложение $SJ^1(\partial M, \mathbf{R}) \hookrightarrow W$ (естественный диффеоморфизм на Σ) и отображение $\exp : SJ^1(\partial M, \mathbf{R}) \to ST^*M$ (по существу, это отображение совпадает с отображением exp, определённом в примере перед теоремой 3).

Эти объекты образуют шестиугольную часть диаграммы, изображённой на рис. 101.

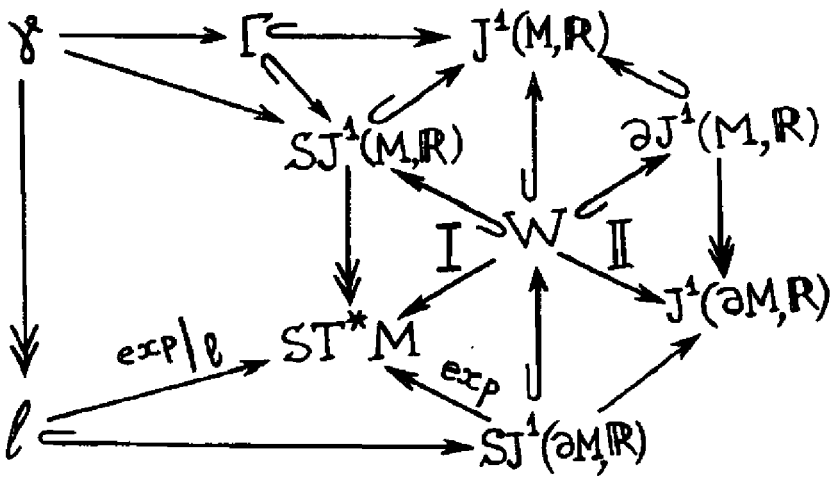


Рис. 101. Диаграмма, порожденная задачей об обходе препятствия

Система геодезических на ∂M, ортогональных некоторой фиксированной гиперповерхности в ∂M и параметризованных (ориентиро-

ванным) расстоянием от этой гиперповерхности, определяет решение уравнения Гамильтона–Якоби $p_\partial^2 = 1$ на ∂M и, следовательно, лежандрово подмногообразие l, которое можно вложить в $SJ^1(\partial M, \mathbf{R})$. По этому лежандрову подмногообразию мы построим два лежандровых многообразия: 1-график функции времени и множество контактных элементов, касающихся фронтов в задаче об обходе препятствия.

Рассмотрим образ многообразия l под действием отображения exp и объединение Γ характеристик первой гиперповерхности $SJ^1(M, \mathbf{R})$, пересекающих l.

Теорема 5 ([166], [170]). *Многообразия* $\exp l$ *и* Γ *являются лежандровыми подмногообразиями в* ST^*M *и* $J^1(M, \mathbf{R})$, *соответственно. Первое из них образовано контактными элементами фронта, соответствующего моменту времени* t, *а второе —* 1*-струями (многозначной) функции времени в задаче об обходе препятствия, где препятствие ограничено* ∂M, *при условии, что ограничение функции времени на* ∂M *определено лежандровым подмногообразием* $l \subset J^1(\partial M, \mathbf{R})$.

График Γ 1-струйного расширения функции времени можно описать, используя гладкое пространство γ расслоения $\gamma \twoheadrightarrow l$ с одномерными слоями, индуцированного из расслоения $SJ^1(M, \mathbf{R}) \twoheadrightarrow ST^*M$ отображением баз $\exp|_l \colon l \to ST^*M$. А именно, Γ есть образ многообразия γ под действием индуцированного отображения тотальных пространств, $\gamma \to SJ^1(M, \mathbf{R})$.

Теоремы 5 и 2 настоящего раздела, а также теорема 1 и следствие 5 из §7.1, приводят всю левую часть диаграммы, изображённой на рис. 101, к нормальной форме, если число k из теоремы 1 не превышает 3 (например, в асимптотических и биасимптотических лучах в задаче об обходе препятствия в 3-пространстве). А именно, мы получили нормальные формы для следующих объектов:

$$SJ^1(M, \mathbf{R}),\ W,\ SJ^1(\partial M, \mathbf{R}),\ ST^*M,\ l,\ \exp l,\ \mathrm{I},\ \exp,\ \exp|_l,\ \gamma,\ \Gamma.$$

За исключением W, $SJ^1(\partial M, \mathbf{R})$ и exp, все эти объекты приводятся к нормальной форме C^∞ или аналитическим контактоморфизмом для любых значений k (смотри §7.5), то есть в многомерных задачах об обходе препятствия.

Здесь я не буду выписывать все нормальные формы, упомяну только следующее

Следствие 6 ([166], [170]). *В типичной задаче об обходе препятствия в* 3*-пространстве, многообразие контактных элементов фронта и многообразие* 1*-струй многозначной функции времени имеют* (*в*

некоторой окрестности элемента, соответствующего срывающемуся с границы биасимптотическому лучу) особенность, диффеоморфную особенности в нуле многообразия многочленов

$$x^5 + A_1x^4 + \ldots + A_5 \quad (x^7 + a_1x^6 + \ldots + a_7),$$

имеющих корень кратности большей чем 2 (*соответственно, корень кратности большей чем* 4) *и нулевую сумму корней:*

$$\exp l \simeq \{(x-u)^3(x^2+3ux+v)\}, \Gamma \simeq \{(x-u)^5(x^2+vx+w)\}.$$

На Γ *функция времени имеет вид* $t = \pm a_1 + \text{const}$; *любой луч* (*характеристика*) *образован сдвигами многочлена вдоль оси* x.

В типичной плоской задаче об обходе препятствия, в некоторой окрестности элемента, соответствующего касательной в точке перегиба, имеем

$$\exp l \simeq \{(x-u)^2(x+2u)\} \subset \{x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3\}, \Gamma \simeq \{(x-u)^4(x+v)\}.$$

Выражения для контактных элементов пространств 1-струй и нормальные формы поверхностей $SJ^1(M, \mathbf{R})$ в координатах A_i и a_i приведены в §7.5.

Пример. Из следствия 6 вытекает, что многообразие контактных элементов фронта диффеоморфно раскрытому ласточкину хвосту (в пространственной задаче) или полукубической параболе (в плоской), 1-графики функций времени диффеоморфны цилиндрам над этими многообразиями.

Из рисунка 5 ясно, что в плоской задаче об обходе препятствия проекция 1-графика функции времени на плоскость имеет (в типичной точке перегиба границы препятствия) особенность, диффеоморфную проекции бифуркационной диаграммы C_3,

$$\{x^3 + ax^2 + bx + c = (x-u)^2(x-v)\} \mapsto \{a, c\},$$

изображённой на рис. 92.

На рисунке 5 можно также увидеть форму 0-графика функции времени. Каждая эвольвента должна быть рассмотрена как плоская кривая, принадлежащая расположенной на высоте t горизонтальной плоскости (эта горизонтальная плоскость является изохроной пространства-времени). Поверхность в пространстве-времени, заметённая эвольвентами, имеет два ребра возврата (порядков 3/2 и 5/2) и линию самопересечения. Порядок касания рёбер возврата равен 3. Эта поверхность (рис. 102) диффеоморфна многообразию нерегулярных орбит группы отражений H_3 (то есть группы симметрий икосаэдра).

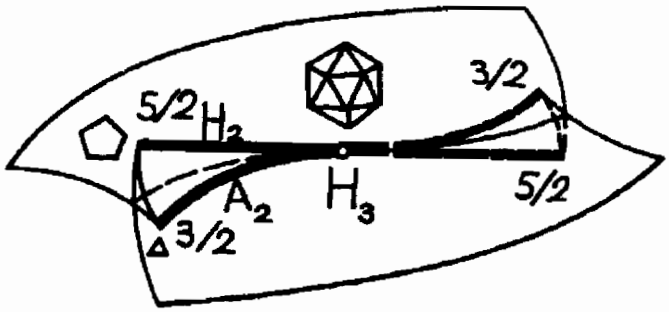


Рис. 102. График многозначной функции времени, рассматриваемый как дискриминант группы симметрий икосаэдра H_3

Нормальная форма этого многообразия записывается в виде

$$\{(A,B,C) \mid x^5 + Ax^4 + Bx^2 + C \text{ имеет кратный корень}\}.$$

Функция времени на пространстве-времени может быть приведена к нормальной форме сохраняющим эту поверхность диффеоморфизмом пространства-времени. Эта нормальная форма такова: $t = A + \text{const}$ (см. [1], [4], [5]).

7.3. Раскрытые ласточкины хвосты

В этом параграфе мы исследуем некоторые специальные алгебраические многообразия: многообразия многочленов фиксированной степени, имеющих корень фиксированной кратности. Такие многообразия доставляют нормальные формы для многих особенностей, появляющихся в теории систем лучей.

Пример 1. Многообразие многочленов

$$x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

имеющих корень кратности (не меньшей) 3-х, называется *раскрытым ласточкиным хвостом.*

Эта поверхность локально диффеоморфна поверхности в 4-пространстве прямых линий в евклидовом пространстве, образованной экстремальными лучами типичной задачи об обходе препятствия в 3-прос-

транстве. А именно, вершина раскрытого ласточкина хвоста соответствует лучу, касающемуся кривой, вдоль которой направления срывающихся с границы лучей являются асимптотическими (см. рис. 95 и сопровождающий его текст).

Пример 2. Рассмотрим волновой фронт, типичным образом распространяющийся в 3-пространстве. Рёбра возврата фронтов заметают каустику. Предположим, что каустика имеет особенность, диффеоморфную ласточкину хвосту (эта особенность типична для каустик). Движущийся фронт описывается гиперповерхностью (большим фронтом) в пространстве-времени. В нашем случае эта гиперповерхность имеет особенность, диффеоморфную трёхмерному ласточкину хвосту (многообразию многочленов $x^5+Ax^3+Bx^2+Cx+D$, имеющих кратный корень). Рёбра возврата мгновенных фронтов заметают 2-мерное многообразие на большом фронте. Это многообразие образовано такими точками (A, B, C, D), что соответствующий многочлен имеет корень кратности (не меньшей) 3.

Таким образом, *рёбра возврата мгновенных фронтов заметают раскрытый ласточкин хвост в четырёхмерном пространстве-времени.*

Дифференцирование многочленов понижает на 1 как степень многочлена, так и кратности его корней. Раскрытый ласточкин хвост в 4-пространстве многочленов степени 5 проектируется при помощи этого отображения на обычный ласточкин хвост в 3-пространстве многочленов степени 4 (см. рис. 10). Эта проекция имеет физическую интерпретацию. Пространство-время расслоено на мировые линии событий "в данной точке пространства". База этого расслоения трёхмерна. Типичный большой фронт в пространстве-времени может быть приведён к нормальной форме

$$\{(A, B, C, D) \mid x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \text{ имеет кратный корень}\}$$

диффеоморфизмом пространства-времени, переводящим мировые линии в прямые, параллельные оси D. (Более того, по теореме Ляшко [159], см. также §6.3, этот диффеоморфизм может быть выбран таким образом, что на каждой мировой линии время отличается от D на аддитивную константу.)

Таким образом, *дифференцирование многочленов соответствует проекции пространства-времени вдоль мировых линий*: большой фронт находится в пространстве многочленов степени 5, каустика — в пространстве многочленов степени 4 (в подходящих локальных координатах в некоторой окрестности особенности).

Изучение заметания каустик особенностями мгновенных фронтов теперь разделено на две задачи: во-первых, мы изучаем заметание раскрытого ласточкина хвоста на большом фронте, а затем, проектируем результат на обычный ласточкин хвост.

Для изучения заметания раскрытого ласточкина хвоста на большом фронте мы должны привести к нормальной форме функцию времени. *Типичная функция времени на всём большом фронте приводима к нормальной форме*

$$t = \pm A + \text{const}$$

диффеоморфизмом, сохраняющим большой фронт (см. [1]). Однако, этот диффеоморфизм не сохраняет мировых линий: он преобразует семейство прямых, параллельных оси D, в некоторое семейство кривых. Следовательно, мы не можем использовать такие диффеоморфизмы в этой задаче. Таким образом, мы пришли к задаче приведения к нормальной форме функции времени диффеоморфизмом, сохраняющим расслоение пространства-времени на мировые линии.

Невозможно требовать, чтобы приводящий диффеоморфизм сохранял весь большой фронт. В самом деле, такие диффеоморфизмы образуют очень малое множество, не достаточное для приведения к нормальной форме семейства рёбер возврата мгновенных фронтов. Таким образом, мы будем приводить к нормальной форме только *ограничение* функции времени на многообразие, образованное рёбрами возврата мгновенных фронтов в пространстве-времени. Это многообразие имеет в нуле особенность, диффеоморфную раскрытому ласточкину хвосту.

Сформулируем окончательные результаты.

Определение 1. *Функцией времени* называется функция переменных (A, B, C, D), которая равна нулю в начале координат, причём её производная вдоль оси A отлична от нуля.

Определение 2. Две функции времени называются *эквивалентными*, если их ограничения на раскрытый ласточкин хвост могут быть переведены друг в друга действием пары: диффеоморфизма оси времени и диффеоморфизма (A, B, C, D)-пространства, сохраняющего раскрытый ласточкин хвост и расслоение на прямые, параллельные оси D.

Теорема 1 (см. [72]). *Типичная функция времени формально эквивалентна функции* $A + D$.

Другими словами, семейства рёбер возврата мгновенных фронтов локально приводимы к нормальной форме $A + D = \text{const}$, по крайней мере на уровне формальных рядов.

Замечание 1. Такая редукция невозможна на голоморфном уровне: в общем случае приводящие ряды расходятся.

В самом деле, рёбра возврата движущихся фронтов дважды пересекают каждую точку на линии самопересечения каустики (рис. 103).

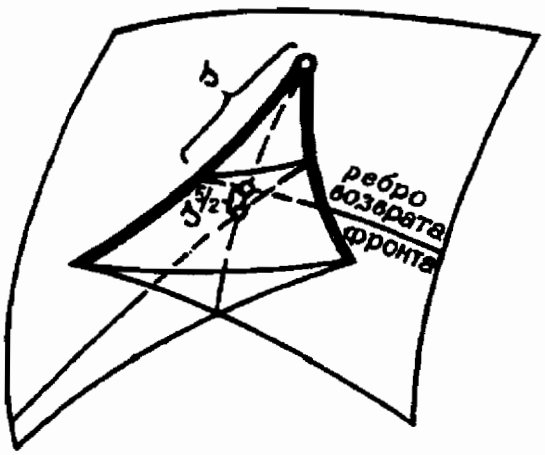


Рис. 103. Заметание каустики ласточкина хвоста рёбрами возврата движущихся волновых фронтов

Рассмотрим прообраз линии самопересечения ласточкина хвоста на поверхности раскрытого ласточкина хвоста. Это — гладкая кривая, содержащая вершину. На ней определены две естественные инволюции, сохраняющие вершину ласточкиного хвоста: одна переставляет две точки большого фронта, отображающиеся в одну точку самопересечения каустики, другая переставляет две точки, принадлежащие одной изохроне.

Пара ростков инволюций $\mathbf{C}$ в их общей неподвижной точке может быть приведена к простой нормальной форме на уровне формальных рядов. В голоморфном случае, однако, эти ряды, вообще говоря, расходятся. Более того, пары инволюций имеют функциональные модули (Воронин [167], [168], Экаль [169]).

Таким образом, из теории пар инволюций прямой следует расходимость рядов, приводящих функцию времени на раскрытом ласточкином хвосте к нормальной форме $A + D$.

Замечание 2. В работах [72], [170], [144] доказаны и другие теоремы о нормальных формах различных поверхностей, заметаемых рёбрами возврата движущихся волновых фронтов.

Пример 1. В некоторой окрестности перестройки "губы" или "клюв-к-клюву" каустики (или фронта), движущейся на плоскости, *движу-*

щаяся кривая формальным диффеоморфизмом пространства-времени, расслоенным над осью времени, может быть приведена к нормальной форме ([72])

$$t = u + u^{3/2} \pm v^2$$

(*где u и v — координаты на плоскости, t — время*). Запрещая преобразования времени, мы можем привести это семейство к нормальной форме

$$t = f(u) + u^{3/2} \pm v^2, \quad f'(0) = 0,$$

при помощи *настоящего* (не только формального) диффеоморфизма.

Приведение голоморфных семейств каустик или волновых фронтов к первой нормальной форме может быть только формальным: в общем случае приводящие ряды расходятся.

Пример 2. Рассмотрим заметание зонтика Уитни–Кэли (образа отображения $(p, q) \mapsto (p, pq, q^2)$) рёбрами возврата мгновенных каустик или волновых фронтов. *Нормальная форма функции времени такова* [72]:

$$t = q + a(q^2).$$

Приведение к этой нормальной форме может быть осуществлено настоящим (не только формальным) диффеоморфизмом, даже при условии, что запрещены замены времени. Если не запрещать замен времени, то нормальная форма: $t = q$. Например, *типичное семейство гладких кривых, заметающих зонтик, сохраняющим зонтик диффеоморфизмом может быть сведено к семейству прямых* (рис. 104).

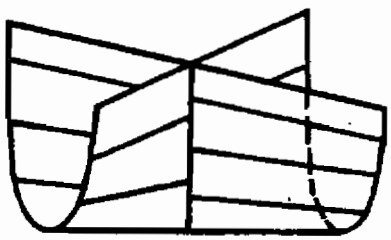


Рис. 104. Заметание зонтика гладкими кривыми

Рассмотрим каустику, движущуюся в пространстве (*не* в пространстве-времени). Рёбра возврата движущейся каустики заметают поверхность, называемую бикаустикой в [72].

Определение. *Бикаустикой* (каустики, являющейся гиперповерхностью в пространстве расслоения с одномерными слоями) называется проекция на базу расслоения объединения особенностей (отличных от самопересечений) исходной каустики.

Опишем *классификацию особенностей типичных бикаустик на плоскости и в 3-пространстве* (детали можно найти в [72]; результаты впервые появились в [13]).

Типичная бикаустика на плоскости в некоторой окрестности каждой своей точки диффеоморфна одной из следующих кривых в некоторой окрестности нуля:

$$u = 0, \quad uv = 0, \quad u^3 = v^2, \quad u^3 = au^2v^2 + v^6 \quad (4a^3 + 27 \neq 0).$$

Эти особенности устойчивы (деформация может только менять значение параметра a в последней нормальной форме).

Типичная бикаустика в 3-пространстве может иметь только следующие особенности (помимо самопересечений):

1) рёбра возврата (образованные A_4 точками);

2) ласточкин хвост (A_5 точка);

3) зонтик (A_3 точки);

4) линии D_4 с точками D_5;

5) пересечения линий A_4 и D_4 с линиями самопересечений.

Случай A_3. *Проекция общего положения из 4-пространства в 3-пространство поверхности особенностей типичной каустики в некоторой окрестности любой гладкой (A_3) точки этой поверхности является либо вложением, либо эквивалентно стандартному отображению плоскости на зонтик,*

$$(u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$$

(*в этой нормальной форме рассматриваемая точка совпадает с началом координат*).

Устойчивость обоих отображений хорошо известна.

Таким образом, единственными особенностями типичных бикаустик в 3-пространстве являются (помимо трансверсальных самопересечений) зонтики Уитни–Кэли и особенности на линиях, заметёнными точками особенностей мгновенных каустик (то есть линии A_4 и D_4).

Случай A_4. *Типичная бикаустика A_4 в 3-пространстве локально*

$$u^2 = v^3, \qquad u^2 = v^3w^2, \qquad u^2w = v^3w$$

(*A_4 точка соответствует нулю, точки A_5 и D_5 не появляются*). *Эти особенности устойчивы.*

Таким образом, проекция линии A_4 есть полукубическое ребро возврата бикаустики, за исключением (изолированных) точек, в которых обе части бикаустики, разделённые ребром возврата, пересекают друг друга. Особенность бикаустики в таких точках есть сложенный зонтик (рис. 105).

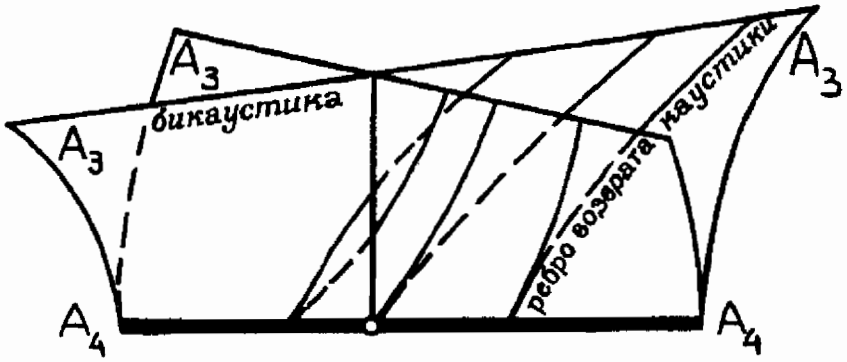


Рис. 105. Сложенный зонтик; особенность A_4 бикаустики

Доказательство основано на общей теореме: *образ типичной поверхности, имеющей полукубическое ребро возврата, под действием отображения складки 3-пространства* $((u,v,w)\mapsto(u^2,v,w))$ *локально диффеоморфен "сложенному зонтику"* $u^2=v^3w^2$.

Случай D_4. *Типичная D_4-бикаустика в 3-пространстве диффеоморфна либо плоскости (случай D_4^+, "кошелёк"), либо поверхности $w(w-v^2)(w-Av^2)=0$, где $A=a+u, a\neq 0$ в типичной точке кривой D_4 и $A=u$ или $A=a\pm u^2, a\neq 0,1$ в некоторых специальных точках (случай D_4^-, "пирамида", рис.* 106).

Эти особенности также устойчивы (значение параметра a при деформации может меняться).

Случай A_5. *Типичная бикаустика в 3-пространстве диффеоморфна ласточкиному хвосту в точках A_5.*

Случай D_5. Нормальная форма бикаустики в 3-пространстве в её D_5 точках неизвестна (рис. 107).

Конечно, типичная бикаустика содержит также точки трансверсального пересечения различных ветвей особенностей, описанных выше.

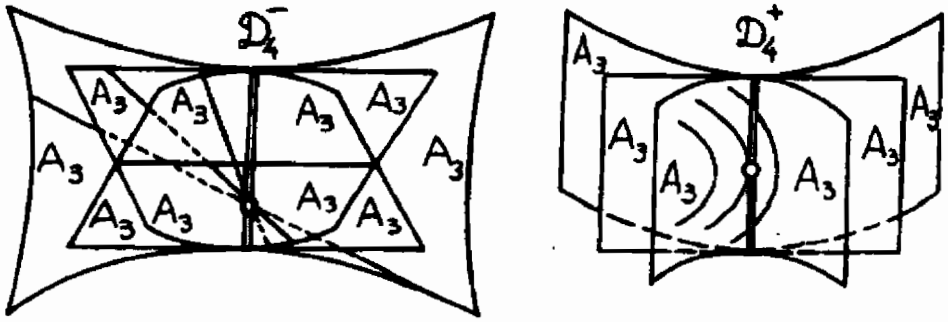


Рис. 106. Особенность D_4 бикаустики

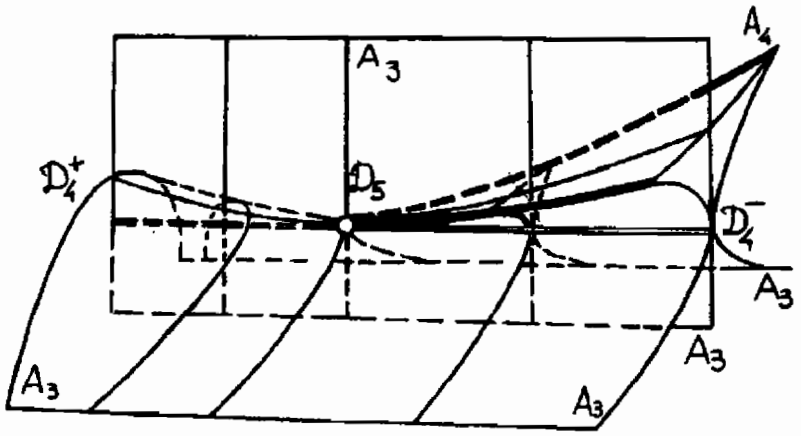


Рис. 107. Особенность D_5 бикаустики

Вернёмся к раскрытому ласточкину хвосту. Теорема 1 описывает типичное заметание бикаустики рёбрами возврата мгновенных фронтов в особенности A_5.

Доказательство теоремы 1 использует свойства векторных полей, касающихся раскрытого ласточкина хвоста.

Теорема 2. *Векторное поле на 3-пространстве, касающееся ласточкина хвоста и голоморфное в его вершине, является проекцией векторного поля на 4-пространстве, касающегося раскрытого ласточкина хвоста и голоморфного в его вершине.*

Эта теорема доказана в [72] прямыми и очень сложными вычислениями: результат получен за счёт невероятного сокращения большого числа членов. Анализ причин этого сокращения привёл А.Б.Гивенталя к следующей общей теории многомерных раскрытых ласточкиных хвостов в пространствах многочленов произвольной степени.

Рассмотрим *башню Гивенталя*, образованную пространствами многочленов с комплексными коэффициентами произвольной степени, имеющих единичный старший коэффициент. (Подобная теория существует и для вещественных многочленов.)

Пространство

$$\mathbf{C}^n = \{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\}$$

образует n-й этаж этой башни. Композиция деления на степень и дифференцирования проектирует каждый этаж на предшествующий (проекция является расслоением с одномерным слоем).

Определение. *Кократностью* корня многочлена называется разность между степенью многочлена и кратностью корня.

Дифференцирование не меняет кократности корня. Многочлены с как минимум одним корнем кократности, не превышающей k, образуют (аффинное) алгебраическое подмногообразие n-го этажа. Фиксируя k, получим цепь алгебраических подмногообразий пространств многочленов различной степени, состоящих из многочленов с как минимум одним корнем кократности, не превышающей k. Проекция каждого этажа нашей башни на предшествующий этаж отправляет верхнее многообразие цепи на нижнее многообразие.

Теорема 3 (см. [11]). *Эта цепь стабилизируется на $(2k+1)$-м этаже (первом этаже, на котором корень кократности, не превышающей k, единствен).*

Более точно, *каждое многообразие на верхнем этаже* (то есть многообразие многочленов степени $n > 2k+1$, имеющих корень кократности не превышающей k) *принадлежит гладкой алгебраической гиперповерхности, диффеоморфно проектирующейся на пространство предыдущего этажа.*

Следовательно, *все многообразия многочленов степени n, имеющих корень кократности, не превышающей k, диффеоморфны друг другу, при условии, что $n \geq 2k+1$* (они диффеоморфны как особые и как алгебраические многообразия).

Замечание. Подобная теорема справедлива и для многочленов с нулевым следом (следом многочлена называется сумма его корней). Это легко следует из теоремы 3, так как дифференцирование коммутирует со сдвигами x.

Пример. Рассмотрим проекцию ласточкина хвоста, образованного имеющими кратный корень многочленами $x^4 + Ax^2 + Bx + C$, на (A, B)-

плоскость вдоль оси C (рис. 108). Рёбра возврата ласточкина хвоста диффеоморфно проектируются на полукубическую параболу. В самом деле, рёбра возврата принадлежат поверхности $C = -A^2/4$. Здесь $k = 1$ и цепь стабилизируется на уровне кубических многочленов.

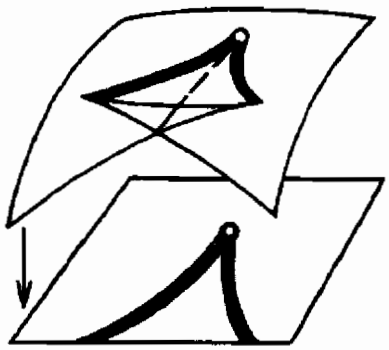


Рис. 108. Стабилизация 1-мерного раскрытого ласточкина хвоста

Гладкая гиперповерхность, упомянутая в теореме 3, может быть выписана явным образом: она является графиком квадратичного многочлена. Для первого над стабильным этажа ($n = 2k + 2$) эта гиперповерхность была найдена Гильбертом [10]. А именно, им была доказана лёгкая

Теорема 4. *Если*

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = (x - a)^{k+2}(x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k),$$

то

$$2n!\, b_n = \sum (-1)^{i+1} i!\, (n-i)!\, b_i b_{n-i}, \quad 1 \le i < n.$$

Уравнения упомянутых параболоидов в пространствах многочленов бóльшей степени также могут быть выписаны явным образом. Введём, для удобства, дифференциальные операторы $G^{(s)}$:

$$G^{(s)} F = \frac{\frac{d^s F}{dx^s}}{(s-r)!},$$

где r — некоторое число и "факториалы" отрицательных чисел определены как произведение предыдущих отрицательных чисел, усечённое на достаточно удалённом месте; например, мы можем использовать "факториалы"

$$(s-r)! = (s-r)\ldots(1-r), \text{ для } s < r.$$

Теорема 5. *Если*

$$F = (x-a)^{r+1}(x^{m-1} + \ldots), \text{ где } r > m,$$

то

$$\sum (j-i)G^{(i)}[F]G^{(j)}[F] = 0$$

(*суммирование ведётся по* $i+j = r+m$, $0 \le i \le m$).

Теорема 5 даёт явное уравнение параболоида на этаже многочленов степени $r+m$, содержащего многообразие многочленов с корнем кократности, не превышающей $k = m-1$.

Теорема 3 следует из теорем 4 и 5. Из них вытекает также следующее

Следствие. *Все* n *коэффициентов многочлена*

$$(x-a)^r(x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k) = x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

могут быть выражены как многочлены с рациональными коэффициентами от переменных $(b_1, \ldots, b_{2k+1})$.

Теоремы 4 и 5 могут быть доказаны прямыми вычислениями (они описывают достаточно сложные комбинаторные тождества между биномиальными коэффициентами). Гивенталь заметил, что теоремы 3 и 4 могут быть выведены из следующих двух тождеств (в которых $F^{(i)} = d^iF/dx^i$):

Теорема 6 (см. [11], [171]). *Для любого многочлена* F *чётной степени* n *многочлен*

$$R_0[F] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F^{(i)}F^{(n-i)}$$

является константой. Эта константа равна нулю, если F *имеет корень кократности, меньшей* $n/2$.

Для произвольного многочлена F *нечётной степени* n, *многочлен*

$$R_1[F] = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (n-2i)^i F^{(i)}F^{(n-i)}$$

является линейным, и

$$\frac{d}{dx}R_1[F] = R_0\left[\frac{dF}{dx}\right].$$

Линейный многочлен $R_1[F]$ *тождественно равен нулю, если* F *имеет корень кократности, меньшей* $(n-1)/2$.

Доказательство (см. [11]). Рассмотрим "обобщенное уравнение Ньютона порядка $2m$ для свободной частицы",

$$\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}} = 0.$$

Функция

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}u^{(i)}u^{(2m-i)} \left(= \int u^{(2m)}\dot{u}\,dt\right)$$

является его первым интегралом. Используя координаты Дарбу, введём симплектическую структуру

$$q_i = u^{(i-1)}, \quad p_i = (-1)^{i+1}u^{(2m-i)}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

(другими словами, рассмотрим симплектическую структуру, соответствующую вариационному принципу $\delta \int L\,dt = 0$, где $L = (u^{(m)})^2/2$).

Уравнение Ньютона принимает вид гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Её решения являются многочленами степени меньше, чем $2m$. Теорема 4 и первая часть теоремы 6 выражают закон сохранения H для уравнения свободной частицы.

Рассмотрим однородное и квазиоднородное эйлеровы векторные поля,

$$E_0 = \sum u^{(i)}\frac{\partial}{\partial u^{(i)}}, \quad E_1 = \sum iu^{(i)}\frac{\partial}{\partial u^{(i)}}.$$

Соответствующие растяжения переводят в себя фазовые траектории уравнений Гамильтона свободной частицы. Поле

$$V_1 = \frac{2m-1}{2}E_0 - E_1$$

гамильтоново (так как однородная степень симплектической структуры равна 2 и её квазиоднородная степень равна $2m-1$).

Функция Гамильтона поля V_1 такова:

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum(-1)^{i-1}(2m+1-2i)u^{(i-1)}u^{(2m-i)} \qquad (1 \le i \le m).$$

Используя однородность и квазиоднородность H, легко вычислить скобку Пуассона функций H и H_1. Получаем

$$\{H, H_1\} = H.$$

Это доказывает вторую часть теоремы 6 (а также и теорему 3).

Пример. Рассмотрим многообразие многочленов $x^n + a_0 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}$, имеющих корень кократности, не превышающей 2. Такое многообразие в пространстве многочленов степени 4 представляет собой обычный ласточкин хвост. В пространстве многочленов степени 5 это многообразие — раскрытый ласточкин хвост.

Проекция раскрытого ласточкина хвоста на обычный не является диффеоморфизмом (точки на линии самопересечения имеют по два прообраза). Согласно теореме 3, раскрытый ласточкин хвост в пространстве многочленов степени $2k+1 = 5$ стабилен: все многообразия в нашей цепи на верхних этажах диффеоморфны ему.

Как и в этом примере, стабилиэация всегда имеет место на наименьшем этаже, где исчезают все самопересечения. Поэтому мы будем наэывать первое стабильное многообразие *многомерным раскрытым ласточкиным хвостом*. Одномерный раскрытый ласточкин хвост является полукубической параболой. Двумерный раскрытый ласточкин хвост является поверхностью в пространстве многочленов степени 5 и т. д.

Теорема 7 (см. [11]). *Росток любого голоморфного векторного поля, касающегося многомерного ласточкина хвоста (многообразия многочленов с кратными корнями), может быть поднят до ростка голоморфного векторного поля, касающегося стабильного многообразия над этим ласточкиным хвостом.*

Другими словами, на пространстве многочленов произвольной степени $N \geq (2n-3, n)$ существует голоморфный росток векторного поля, касающийся многообразия многочленов с корнем кократности, не превышающей $n-2$, и проектирующийся (посредством $N-n$ дифференцирований) в наперёд заданное векторное поле на пространстве многочленов степени n, касающееся многообразия многочленов с кратными корнями.

Замечание 1. Подобные теоремы верны для пространств многочленов, на которые не наложены ограничения на старший коэффициент и след, а также для полиномиальных векторных полей на всем пространстве.

Замечание 2. Поля, касающиеся многомерных ласточкиных хвостов, хорошо изучены (смотри §4.1). Доказательство теоремы 7, опубликованное в [11], содержит явные формулы для поднятых полей.

Замечание 3. Ограничение $N \geq 2n-3$ теоремы 7 существенно: утверждение неверно при $N = 6$, $n = 5$.

Замечание 4. Любое полиномиальное векторное поле на пространстве многочленов степени n может быть разложено в сумму полиномиального векторного поля, поднятого с пространства многочленов степени $n-1$, и поля, касающегося многообразия многочленов с кратным корнем. То есть верно следующее обращение теоремы 7: любое полиномиальное векторное поле, касающееся многообразия многочленов степени n с корнем кократности не превышающей k, может быть разложено в сумму поднятий полей, касающихся предыдущих ласточкиных хвостов (то есть многообразий многочленов степеней $n, n-1, \ldots, k-2$, имеющих кратные корни).

В последующем нам потребуется ещё один результат, касающийся раскрытых ласточкиных хвостов.

Теорема 8 (см. [11]). *Раскрытый ласточкин хвост размерности k*

$$\{x^n + a_0 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} = (x-t)^{k+1}(x^k + \ldots)\}$$

является (особым) лагранжевым многообразием в пространстве многочленов степени $n = 2k+1$ с единичным старшим коэффициентом и нулевым следом, снабжённом естественной симплектической структурой (см. §1.1, пример 10).

Доказательство. Наше пространство является пространством характеристик гиперповерхности $h = 0$ в симплектическом пространстве многочленов степени $n+1$, где h есть гамильтониан сдвигов вдоль оси x.

Раскрытый ласточкин хвост размерности k есть образ в пространстве характеристик проекции многообразия многочленов степени $n+1$, имеющих нулевой корень кратности $k+2$. Симплектическая форма объемлющего $(2k+2)$-мерного симплектического пространства равна нулю на этом гладком k-многообразии (так как это многообразие есть координатная q-плоскость в координатах Дарбу, введённых в §1.1). Следовательно, его проекция в $2k$-мерное пространство характеристик является лагранжевым подмногообразием (в общем случае особым).

Явное выражение симплектической структуры теоремы 8 легко может быть получено с помощью алгоритма параграфа 1.1.

Пример. Рассмотрим обычный раскрытый ласточкин хвост ($k = 2$)

$$\{x^5 + Ax^4 + Bx^2 + Cx + D = (x-t)^3(x^2 + 3tx + s)\}.$$

Мы начинаем с обычной симплектической структуры на пространстве

многочленов степени $2k+3=7$,

$$\{q_0e_7+q_1e_6+q_2e_5+q_3e_4-p_3e_3+p_2e_2-p_1e_1+p_0e_0\},$$

где $e_j=x^j/j!$, и (p,q) — координаты Дарбу раздела 1.1. Гиперплоскость $q_0=1$ расслоена на характеристики, параллельные оси p_0. Пространство характеристик естественно отождествляется с пространством производных, то есть с пространством многочленов степени $2k+2=6$,

$$e_6+q_1e_5+q_2e_4+q_3e_3-p_3e_2+p_2e_1-p_1e_0\}$$

(снабжённом симплектической структурой $\sum dp_i\wedge dq_i$). Гамильтониан сдвигов есть функция

$$H=p_1+p_2q_1+p_3q_2+\frac{q_3^2}{2}.$$

Выберем координаты (q_1,q_2,q_3,p_3,p_2) на гиперповерхности $H=0$. Характеристикой этой гиперповерхности является многочлен, для которого $H=0$, вместе с его сдвигами вдоль оси x. Таким образом, пространство характеристик может быть отождествлено с пространством многочленов степени $2k+2=6$ с нулевым следом $(q_1=0)$ и $H=0$. Выберем координаты (p_2,q_2,p_3,q_3) на этом пространстве.

Это пространство многочленов дифференцированием диффеоморфно проектируется на пространство многочленов степени $2k+1=5$. Следовательно, мы отождествили пространство характеристик с пространством многочленов степени $2k+1=5$ с фиксированным старшим коэффициентом и нулевым следом. Симплектическая структура пространства характеристик может быть выписана в терминах остальных (не старших) коэффициентов этих многочленов. В терминах выбранных координат Дарбу выражения для коэффициентов имеют вид:

$$A=20q_2,\quad B=60q_3,\quad C=-120p_3,\quad D=120p_2.$$

Следовательно, *раскрытый ласточкин хвост является лагранжевым многообразием для симплектической структуры* $3\,dA\wedge dD-dB\wedge dC$.

В общем случае симплектическая структура такова:

$$\sum(-1)^i i!\,j!\,da_i\wedge da_j,\quad i+j=n-2.$$

Раскрытый ласточкин хвост описывает также типичные особенности в теории двойственности кривых в проективном пространстве.

Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ — гладкое отображение. Будем называть его *кривой порядка* (a, b, c) *в нуле*, если первая ненулевая производная в нуле имеет порядок a, первая последующая производная, неколлинеарная в нуле a-ой, имеет порядок b, первая последующая, некомпланарная в нуле первым двум, имеет порядок c.

Кривые порядка $(a_1, \ldots, a_n)$ в пространствах $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}P^n, \mathbf{C}^n, \mathbf{C}P^n$ определяются аналогично. Кривая конечного порядка в каждой точке имеет соприкасающуюся гиперплоскость.

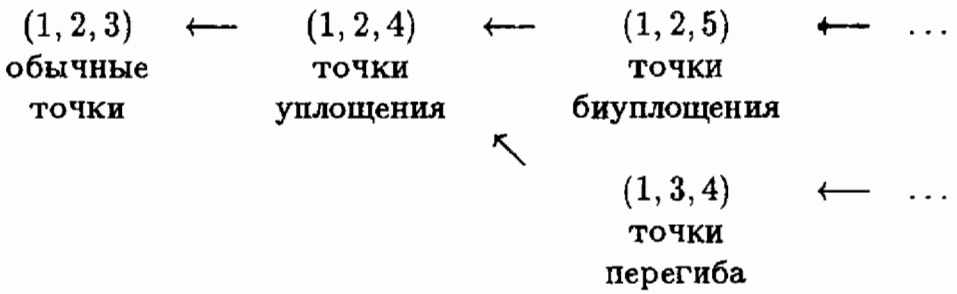
Определение. Кривая $f^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^{n*}$, двойственная кривой $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^n$, образована соприкасающимися гиперплоскостями кривой f.

Следующая теорема легка и хорошо известна (см., например, [148] и [143], [14], [172]–[174]):

Теорема 9. *$f^{**} = f$; порядок, двойственный (a, b, c), равен $(c - b, c - a, c)$. В n-мерном случае двойственный порядок даётся формулой:*

$$(a_1, \ldots, a_n)^* = (a_n - a_{n-1}, \ldots, a_n - a_1, a_n).$$

Регулярные точки кривой выделены условием $a_1 = 1$. Начальная часть *иерархии гладких кривых* в $\mathbf{R}^3$ такова:



Коразмерность порядка равна

$$c = \sum (a_i - i)$$

(порядок коразмерности c неустраним в семействах кривых, зависящих от $c - 1$ параметра).

Определение. Многообразие касательных гиперплоскостей (то есть гиперплоскостей, содержащих касательную прямую) кривой f в двойственном проективном пространстве называется *фронтом* лежандровой особенности f (для краткости, *фронтом кривой* f). Фронт является развёртывающейся поверхностью, ребро возврата которой — двойственная кривая f^*.

Пример. Предположим, что f имеет простейшую особенность коразмерности 1 (порядка $(1,2,4)$). Тогда f^* имеет особенность порядка $(2,3,4)$, подобную особенности кривой $(x = t^2, y = t^3, z = t^4)$. Касательные прямые этой кривой заметают ласточкин хвост — фронт кривой f.

Типичная кривая в 3-пространстве может иметь изолированные точки уплощения, но не может иметь необычных точек другого порядка. Следовательно фронт типичной кривой есть поверхность, особенностями которой (кроме самопересечений) могут быть только полукубические рёбра возврата и изолированные ласточкины хвосты.

Рассмотрим типичное однопараметрическое семейство кривых в 3-пространстве. Кривые, соответствующие изолированным значениям параметра, могут иметь точки биуплощения. Рассмотрим семейство двойственных кривых. Поместим каждую двойственную кривую в отдельное 3-пространство, зависящее от параметра семейства. Эти двойственные кривые заметают поверхность в 4-пространстве $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ (где $\mathbf{R}$ обозначает ось параметра).

Теорема 10 (см. [23], [143]). *Поверхность, заметённая двойственными кривыми, локально диффеоморфна раскрытому ласточкину хвосту. Разбиение этой поверхности на двойственные кривые диффеоморфно разбиению на линии* $A = \text{const}$ *многообразия многочленов* $x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, *имеющих корень кратности не меньше чем* 3.

Для некоторых изолированных значений параметра кривые исходного семейства могут иметь точки перегиба. Согласно О.П.Щербаку ([143], [172]), нормальная форма поверхности, заметённой двойственными кривыми такова:

$$\{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \text{ имеет кратный корень}\}.$$

Разложение на двойственные кривые эквивалентно $B = \text{const}$.

Среди прочего, статья Щербака [143] содержит следующие результаты:

1) *Фронт кривой, двойственной типичной кривой* (т. е. развёртывающаяся поверхность, ребро возврата которой есть исходная гладкая кривая в $\mathbf{R}^3$ или $\mathbf{R}P^3$), *имеет особенность "сложенный зонтик" в точках перегиба* $(1,2,4)$ *исходной кривой.* Следовательно он локально диффеоморфен поверхности $y^2 = x^2z^3$ (рис. 105).

2) *Единственными особенностями фронта типичной кривой в* $\mathbf{R}P^n$ *являются многомерные ласточкины хвосты* (локально диффеоморфны дискриминантам A_k, $k \leq n$). *Объединение фронта кривой с гиперплоскостью, двойственной соответствующей точке уплощения исходной кривой, локально диффеоморфно дискриминанту* B_k.

3) *Рассмотрим типичное однопараметрическое семейство кривых в* $\mathbf{R}P^n$. *Для некоторых изолированных значений параметра встречаются особенности порядков*

$$(1, \ldots, n-1, n+2) \text{ и } (1, \ldots, n-2, n, n+1).$$

Нормальные формы соответствующих перестроек фронтов таковы:

$$\{x^{n+2} + u_1 x^n + \ldots + u_{n+1} \text{ имеет кратный корень}\},$$

фронты: $u_1 = \text{const}$;

$$\{x^{n+1} + u_1 x^n + \ldots + u_{n+1} \text{ имеет кратный корень}\},$$

фронты: $u_2 = \text{const}$.

Теория фронтов кривых может рассматриваться как часть теории лежандровых особенностей.

Более общая конструкция фронтов подмногообразий произвольной размерности в проективном пространстве приведена ниже.

Подмногообразие в проективном пространстве определяет лежандрово подмногообразие в пространстве контактных элементов объемлющего проективного пространства: оно образовано контактными элементами, содержащими касательное пространство исходного подмногообразия. Пространство контактных элементов проективного пространства расслоено над двойственным проективным пространством (контактному элементу сопоставляем содержащую его гиперплоскость). Это расслоение является лежандровым (см. §3.1, рис. 35). Лежандрово подмногообразие, образованное контактными элементами, касающимися исходного подмногообразия, определяет лежандрово отображение в двойственное проективное пространство. Образ этого отображения (то есть множество касающихся исходного подмногообразия гиперплоскостей) является фронтом этого лежандрова отображения. Для краткости будем называть его *фронтом исходного подмногообразия*. Лежандрово отображение называется *фронтальным отображением* (ассоциированным с подмногообразием).

Фронт подмногообразия произвольной размерности в проективном пространстве является гиперповерхностью в дуальном пространстве.

Хорошо известно, что (многомерные) ласточкины хвосты являются развёртывающимися поверхностями. Следующая теорема есть обобщение этого факта на другие фронты.

Теорема 11 (см. [172]). *Любой устойчивый росток лежандрова отображения коранга m лежандрово эквивалентен ростку фронтального отображения, ассоциированного с некоторым m-мерным подмногообразием проективного пространства. Фронтальные отображения, ассоциированные с типичными кривыми, имеют только особенности A_k. Перестройки лежандровых отображений коранга m, встречающиеся в типичных семействах с конечным числом параметров, лежандрово эквивалентны перестройкам фронтальных отображений, ассоциированных с m-мерными подмногообразиями проективных пространств.*

7.4. Симплектические триады

Задача об обходе препятствия привела к раскрытому ласточкину хвосту — особенности лагранжева многообразия лучей, срывающихся с поверхности препятствия, в симплектическом пространстве всех лучей. Раскрытый ласточкин хвост описывает также особенности двух типов лежандровых многообразий: первое из них образовано контактными элементами фронта, второе — 1-струями многозначной функции времени (§7.2).

В §7.3 мы изучили многомерные раскрытые ласточкины хвосты, используя геометрию пространств многочленов и бинарных форм. Сейчас мы будем использовать результаты предыдущих двух параграфов для объяснения того, почему многообразия многочленов с корнем большой кратности описывают особенности лагранжевых и лежандровых многообразий в многомерных вариационных задачах с односторонними ограничениями.

Теория симплектических триад, излагаемая ниже, была разработана А.Б.Гивенталем [8], получившем их описание, отбросив излишнюю часть описанной в §7.1 конструкции Мельроза.

Определение 1. *Симплектическая триада* (H, L, l) состоит из гиперповерхности H в симплектическом многообразии и лагранжева подмно-

гообразия L, имеющего первый порядок касания с H вдоль подмногообразия $l \subset L$, коразмерность которого в L равна 1.

Пример 1. Рассмотрим область D на гиперповерхности в римановом многообразии M.

Пучок геодезических на D определён *функцией времени* $s : D \to \mathbf{R}$ (равной расстоянию от некоторого начального фронта в D). Функция времени удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби $(\nabla s)^2 = 1$ (если s гладка на D).

С этой ситуацией мы свяжем симплектическую триаду в фазовом пространстве T^*M. В качестве H возьмём гиперповерхность, образованную всеми ортами ($p^2 = 1$). В качестве L возьмём все продолжения алгебраических 1-форм $p = ds\,|_q$ с касательных пространств гиперповерхности D на касательные пространства объемлющего многообразия M.

Гиперповерхность H пересекает L вдоль подмногообразия $l \subset L$ коразмерности один: l состоит из продолжений, нулевых на нормалях к D.

[Если мы, используя риманову метрику, отождествим 1-формы на M с касательными векторами, то l можно описать как график градиента s. L состоит из векторов, ортогональная проекция которых на касательные пространства D принадлежит l.]

Теорема 1. *Тройка (H, L, l), построенная по пучку геодезических, является симплектической триадой.*

Доказательство. Порядок касания H с L вдоль l равен 1, так как риманова метрика квадратично выпукла (порядок касания может быть выше в менее регулярных вариационных задачах или в комплексной области).

Подмногообразие L лагранжево, так как

$$i^* p\,dq = d\pi^* s$$

(где $i : L \hookrightarrow T^*M$ — вложение, $\pi : L \to D$ — естественная проекция, $p\,dq$ — каноническая 1-форма на T^*M).

Следовательно (H, L, l) является симплектической триадой.

Рассмотрим произвольную симплектическую триаду.

Определение 2. *Лагранжевым многообразием, порождённым триадой* (H, L, l) называется образ подмногообразия l в пространстве характеристик гиперповерхности H.

Ясно, что это многообразие лагранжево во всех своих неособых точках.

Теорема 2. *Лагранжево многообразие, порождённое триадой теоремы* 1, *состоит из лучей (геодезических объемлющего пространства), касающихся геодезических исходного пучка геодезических на гиперповерхности.*

Разумеется, пространство характеристик гиперповерхности $p^2 = 1$ является пространством (ориентированных) геодезических объемлющего многообразия. Начальные точки, принадлежащие l, являются ортами, касающимися геодезических исходного пучка.

Лагранжевы многообразия, порождённые эквивалентными симплектическими триадами, симплектоморфны. Из теорем 1 и 2 следует, что для того чтобы найти нормальные формы многообразий лучей, срывающихся с геодезических пучка, достаточно симплектоморфизмами привести к нормальным формам соответствующие триады. Нормальные формы триад даются следующим примером.

Пример 2. Рассмотрим симплектическое пространство V многочленов от x степени $d = 2k + 2$ с фиксированным старшим коэффициентом, снабжённое естественной симплектической структурой (см. §1.1). Многочлен, координаты Дарбу которого — (p, q), записывается в виде

$$e_d + q_1 e_{d-1} + \ldots + q_{k+1} e_{k+1} - p_{k+1} e_k + \ldots + (-1)^{k+1} p_1 e_0,$$

где $e_j = x^j/j!$.

Обозначим через h функцию Гамильтона сдвигов,

$$h = p_1 + p_2 q_1 + \ldots + q_k p_{k+1} + \frac{q_{k+1}^2}{2}.$$

Пусть H будет гиперповерхностью $h = 0$, L — лагранжевой плоскостью $p = 0$. Гиперповерхность H имеет первый порядок касания (квадратично касается) с лагранжевой плоскостью L вдоль гиперповерхности $l \subset L$, задаваемой уравнениями

$$l: \quad p = 0, q_{k+1} = 0.$$

Нетрудно проверяется следующая

Теорема 3. *Лагранжево многообразие, порождённое триадой примера* 2, *симплектоморфно k-мерному раскрытому ласточкину хвосту,*

то есть многообразию многочленов, имеющих корень кратности превышающей k, в симплектическом пространстве многочленов степени $2k+1$ (с фиксированным старшим коэффициентом и нулевым следом).

Главным результатом, касающимся лагранжевых триад, является следующая

Теорема 4. *Росток в нуле триады примера 2 устойчив. Росток триады общего положения в точке квадратичного касания гиперповерхности и лагранжева подмногообразия симплектоморфен триаде примера 2 или её надстройке.*

Надстройкой триады (H, L, l) в $\mathbf{R}^{2a}$ с координатами Дарбу (p, q) называется триада в $\mathbf{R}^{2a+2a'}$ с координатами Дарбу $(p, p'; q, q')$ в которой $H_{\text{новое}} = H + \mathbf{R}^{2a'}$, $L_{\text{новое}} = L + L'$, где L' — лагранжева плоскость $p' = 0$ в $\mathbf{R}^{2a'}$.

Следствие 5. *Лагранжево многообразие, порождённое триадой общего положения, в каждой точке локально диффеоморфно декартову произведению (многомерного) раскрытого ласточкина хвоста на гладкое многообразие.*

Следствие 6. *Многообразие лучей, срывающихся с поверхности препятствия, локально диффеоморфно декартову произведению (многомерного) раскрытого ласточкина хвоста на гладкое многообразие (при условии, что поверхность препятствия и пучок геодезических на ней — общего положения).*

Замечание 1. Условия общности положения теоремы 4 могут быть сформулированы в терминах поля характеристических направлений гиперповерхности H. В точках l характеристическое направление касается L. Таким образом, мы получили на l поле направлений (касающихся L). Условия общности положения триады в теореме 4 требует общности этого поля: оно должно приводится к локальной нормальной форме $\partial/\partial x$ диффеоморфизмом многообразия L, отправляющим l в гиперповерхность

$$x^a + u_1 x^{a-2} + \ldots + u_{a-1} = 0.$$

Или, что эквивалентно, l: $q_a = 0$, поле: $\partial/\partial q_1 + q_1 \partial/\partial q_2 + \ldots + q_{a-1}\partial/\partial q_a$.

Замечание 2. Теорема 4 и её следствия верны в гладком и в голоморфном (аналитическом) случае.

Доказательство теоремы 4. (См. [170], [8].)

1) Выпрямим H, выбирая такие координаты Дарбу, что уравнение H в некоторой окрестности рассматриваемой точки (нуля) принимает вид $q_1 = 0$.

2) Выберем лагранжево пространство, линейное в этих координатах и трансверсальное в нуле как H, так и L. Параллельные пространства образуют лагранжево расслоение (в некоторой окрестности нуля). Лагранжево многообразие L является сечением этого расслоения.

3) Выберем новые координаты Дарбу (линейные по отношению к предыдущим) такие, что слои имеют вид $q = \text{const}$. Уравнения для L принимают вид $p = \partial s/\partial q$; H все ещё гиперплоскость.

4) Введём сдвинутые координаты Дарбу $P = p - \partial s/\partial q$, $Q = q$. В них L становится нулевым сечением расслоения $(P, Q) \mapsto Q$. Отождествим это лагранжево расслоение (локально) с кокасательным расслоением T^*L (точка (P, Q) соответствует 1-форме $P\,dQ$ на касательном пространстве к L в точке Q).

5) Пересечение H со слоем T^*L является аффинной гиперплоскостью в этом слое.

6) Аффинная гиперплоскость в пространстве, двойственном линейному, задаётся содержащей нуль прямой в исходном пространстве и линейной 1-формой на этой прямой. Действительно, гиперплоскость $Y = \{y : y\,|_x = c\}$ определяет прямую $\{x : y\,|_x = z\,|_x$ для любых $y, z \in Y\}$ и 1-форму $y\,|_x$ на этой прямой. Эта пара (прямая, 1-форма) определяет гиперплоскость, и любая такая пара определяет некоторую аффинную гиперплоскость.

7) Таким образом, гиперповерхность H может быть описана внутренней геометрией L с помощью пары, образованной полем направлений на L и полем 1-форм на этих направлениях. Другими словами, H может быть описано парой, образованной полем направлений на L и семейством дифференциальных 1-форм вдоль интегральных кривых этого поля.

   Гиперповерхность l образована точками L, в которых формы из этого семейства равны нулю. В точках l направления поля являются характеристическими для H.

8) Вложение l в L и расслоение L на интегральные кривые определяет проекцию гиперповерхности вдоль одномерных слоёв. Особенности этой проекции — стандартные особенности Уитни, при условии, что триада — общего положения (см. §7.2 и замечание 1).

9) Следовательно, мы можем выбрать координаты (x, u) на L таким образом, что интегральные кривые принимают вид $u = \text{const}$, а гиперповерхность l задаётся уравнением

$$F = 0, \text{ где } F = x^a + u_1 x^{a-2} + \ldots + u_{a-1}.$$

10) Семейство дифференциальных 1-форм вдоль интегральных кривых, записанное в этих координатах, имеет вид $f(x, u)\,dx$. Функция f на l равна нулю, этот нуль — второго порядка, так как H квадратично касается L вдоль l. Таким образом,

$$f(x, u) = g(x, u)F^2(x, u), \text{ где } g(0, 0) \neq 0.$$

11) **Лемма.** *Семейство дифференциальных 1-форм*

$$gF^2\,dx = g(x, u)(x^a + u_1 x^{a-2} + \ldots + u_{a-1})^2\,dx,$$

где $g(0,0) \neq 0$, *локально приводимо к виду*

$$(X^a + U_1 X^{a-2} + \ldots + U_{a-1})^2\,dX$$

расслоенной локальной заменой переменных

$$x = x(X, U), \quad u = u(U).$$

12) **Доказательство.** По существу, этот результат является теоремой о версальной деформации для форм степени $1/2$,

$$x^a \mid dx \mid^{1/2}.$$

[Подобные теоремы верны для дифференциальных форм $f(x)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)^p$ от n переменных, произвольной комплексной степени p. Их изучение, инициированное обсуждаемой здесь проблемой, ведёт к интересной теории, имеющей и другие применения; например, в теории пуассоновых структур на плоскости. Смотри [175]–[180].]

В случае $n = 1$, $p = 1/k$ (например, в нашем случае, где $p = 1/2$), теорема о версальной деформации (в аналитическом случае) сводится к обычной теореме о версальной деформации для функции

$$\int x^{ak}\,dx$$

(так как условие "производная функции является k-й степенью регулярной функции" инвариантно относительно диффеоморфизмов).

13) Перепишем конструкции пп. 6 и 7 в явной координатной форме. Пусть q_i — координаты на L, p_i — соответствующие импульсы.

В пп. 6 и 7 мы сопоставили гиперповерхности $H \subset T^*L$, определённой уравнением

$$v_0 + v_1 p_1 + \ldots + v_a p_a = 0, \quad v_i = v_i(q),$$

поле направлений векторного поля на L с компонентами

$$\dot{q}_1 = v_1, \ldots, \dot{q}_a = v_a, \quad \dot{q}_i = 0 \ (i > a),$$

и семейство дифференциальных 1-форм вдоль интегральных кривых, записываемое в виде

$$-\frac{v_0}{v_1}\,dq_1 = \ldots = -\frac{v_0}{v_a}\,dq_a.$$

Например, если $v_1 = 1$, то семейство форм есть $-v_0\,dq_1$.

И обратно, зная компоненты поля и 1-форм, мы можем восстановить уравнение гиперповерхности H.

14) Выберем координаты X, U на L в соответствии с леммой п. 11. В этих координатах поле направлений — это поле $\partial/\partial X$, поле 1-форм — это $F^2(X, U)\,dX$.

Обозначим импульсы, соответствующие этим координатам, через p_X и p_U.

Из п. 13 следует, что уравнение H имеет вид:

$$F^2(X, U) + p_X = 0.$$

Эта формула определяет некоторую нормальную форму триады и, следовательно, доказывает первую часть теоремы 4. Для доказательства оставшегося, преобразуем получившуюся триаду к виду, указанному в теореме.

15) **Лемма.** *Триада*

$$(H : p_X + F^2(X,U) = 0,\ \ L : p = 0,\ \ l = H \cap L)$$

симплектически эквивалентна триаде

$$(H : p_1 + q_1p_2 + \ldots + q_{a-1}p_a + \frac{q_a^2}{2} = 0,\ \ L : p = 0,\ \ l : p = q_a = 0).$$

16) Для доказательства этой леммы, выпрямим l (искривляя поле). Удобно сначала привести старший коэффициент многочлена F к $1/a!$, а затем привести семейство форм к $F^2(X,U)\,dX/2$ (растяжениями). После этого производные F выбираем в качестве новых координат на L:

$$q_a = F, q_{a-1} = \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots, q_1 = \frac{\partial^{a-1}F}{\partial X^{a-1}} (= X)$$

(мы сохраняем остальные координаты q_i, от которых ни поле, ни 1-формы не зависят).

17) В новых координатах легко вычислить выражения для поля направлений и 1-форм. Действительно, производные новых координат по X:

$$\dot{q}_1 = 1, \dot{q}_2 = q_1, \ldots, \dot{q}_a = q_{a-1}.$$

Вдоль интегральных кривых этого поля направлений

$$\frac{1}{2}F^2\,dX = \frac{q_a^2}{2}\,dq_1.$$

Следовательно, по формуле п. 13, уравнение гиперповерхности H имеет вид:

$$\frac{q_a^2}{2} + p_1 + p_2q_1 + \ldots + p_aq_{a-1}.$$

Это доказывает эквивалентность нашей триады и триады теоремы 4. Теорема доказана.

Замечание. Появление F^2 в нормальной форме п. 14 говорит, по-видимому, о существовании связи между многообразием многочленов, имеющих корень высокой кратности, и многообразием многочленов, имеющих много корней кратности 2. Эти два многообразия действительно диффеоморфны (см. [8], [104]).

Каждый многочлен чётной степени единственным образом может быть записан в виде суммы квадрата и многочлена, степень которого не превышает половины степени исходного многочлена; иначе, такой многочлен единственным образом может быть записан в виде суммы многочлена с нулевым корнем, кратность которого равна половине степени, и многочлена, степень которого не превышает половины степени исходного многочлена.

Нормальная форма п. 17 связана со вторым разложением, но в других задачах бывает полезна симплектическая структура, связанная с первым разложением. Явные формулы для диффеоморфизма между этими двумя лагранжевыми многообразиями (многочленов, имеющих корень высокой кратности, и многочленов, имеющих много двойных корней) приведены в [8]. К сожалению, они не дают ни явную форму симплектической структуры, для которой многообразие многочленов с большим числом двойных корней является лагранжевым, ни объяснений причин диффеоморфности ласточкина хвоста и многообразия многочленов $x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx$, имеющего кратные критические значения.

Недавнее экспериментальное открытие диффеоморфности каустик и множеств Максвелла особенности C_4 (см. рис. 91) также говорит о достаточно неудовлетворительном состоянии соответствующей теории (например, обобщения упомянутого результата на более высокие особенности C_k ещё ждут своего открытия).

7.5. Контактные триады

Предыдущая теория имеет контактный аналог [166]. Его цель — изучение лежандровых многообразий, возникающих в задаче об обходе препятствия (т.е. особенностей множеств контактных элементов, касающихся фронтов, и особенностей множеств 1-струй функций, см. §7.2).

Определение. *Контактная триада* (H, L, l) состоит из

1) гиперповерхности H в контактном многообразии, трансверсальной контактным гиперплоскостям;

2) лежандрова подмногообразия L в этом контактном многообразии;

3) гладкой гиперповерхности l в L, вдоль которой H имеет касание первого порядка с L.

Мы будем изучать росток триады в точке $O \in l$.

Определение. *Лежандровым многообразием, порождённым триадой* (H, L, l) *в* O, называется образ ростка l в точке O под действием проекции вдоль характеристик гиперповерхности H.

Пример 1. Рассмотрим контактное многообразие $J^1(M, \mathbf{R})$ 1-струй функций на римановом многообразии (без края) M, снабжённом гладкой гиперповерхностью ∂M (мы можем считать M евклидовым пространством; подходит даже случай евклидовой плоскости).

Уравнение Гамильтона–Якоби $(\nabla u)^2 = 1$, описывающее распространение в M возмущений с единичной скоростью, определяет в $J^1(M, \mathbf{R})$ гиперповерхность H. Рассмотрим пучок геодезических на ∂M, ортогональных некоторой гиперповерхности в ∂M; каждая геодезическая параметризована расстоянием s до этой гиперповерхности. Рассмотрим все возможные продолжения функции s с ∂M на M. Многообразие 1-струй всех продолжений во всех точках ∂M является лежандровым подмногообразием в $J^1(M, \mathbf{R})$.

Это подмногообразие пересекает H вдоль многообразия 1-струй таких продолжений, производная которых вдоль нормали к ∂M равна нулю. Обозначим это пересечение через l.

Теорема 1. *Тройка* (H, L, l), *построенная по гиперповерхности* ∂M *риманова многообразия* M *и по пучку параметризованных геодезических на* ∂M, *является контактной триадой.*

Действительно, порядок касания H с L вдоль l равен 1, так как метрика невырожденно выпукла.

Замечание. В обозначениях рис. 101, построение L по l симметрично построению γ по l (симметрия переставляет отображения I и II; на рис. 101 l изображено не на вертикальной оси только ради экономии места).

Теорема 2. *Лежандрово многообразие, порождённое триадой теоремы* 1, *состоит из контактных элементов, касающихся фронта в задаче об обходе препятствия* (*это многообразие вложено в многообразие ориентированных контактных элементов на* M).

Доказательство. Смотри §7.2, теорема 5.

Для описания нормальных форм контактных триад мы используем естественные контактные структуры на нечётномерных простран-

ствах многочленов с единичным старшим коэффициентом. Мы начинаем с пространства бинарных форм нечётной степени, снабжённого естественной (SL_2-инвариантной) симплектической структурой (см. §1.1).

Проективизация этого чётномерного пространства даёт нечётномерное проективное пространство гиперповерхностей (т. е. 0-мерных подмногообразий) фиксированной нечётной степени на проективной прямой.

Косортогональные дополнения к радиус-векторам образуют GL_2-инвариантное поле гиперплоскостей в пространстве ненулевых бинарных форм. Это поле определяет поле гиперплоскостей в проективном пространстве 0-мерных подмногообразий фиксированной степени на проективной прямой. Это поле гиперплоскостей и есть контактная структура. Эта контактная структура естественна (инвариантна под действием группы проективных преобразований прямой на пространстве 0-мерных подмногообразий фиксированной степени).

Для явного описания этой контактной структуры используем координаты (p, q) на аффинной части нашего проективного пространства размерности $d = 2a - 1$, состоящей из 0-мерных подмногообразий, не содержащих "бесконечно удалённую" точку $x = \infty$. Такие подмногообразия могут быть заданы уравнением $f(x) = 0$, где

$$f = e_d + q_2 e_{d-1} + \ldots + q_a e_a - p_a e_{a-1} + \ldots + (-1)^a p_1 \qquad (*)$$

(где $e_j = x^j/j!$, а знаки перед p_i чередуются). Легко доказывается

Теорема 3. *Естественная контактная структура проективного пространства* 0*-подмногообразий определена* 1*-формой*

$$\alpha = p'\,dq' - q'\,dp' - dp_1,$$

где $p' = (p_2, \ldots, p_a)$, $q' = (q_2, \ldots, q_a)$.

Определение. *Нейтральной гиперповерхностью* однопараметрической группы контактных диффеоморфизмов называется гиперповерхность, в точках которой вектор скорости принадлежит контактной гиперплоскости ($\alpha(v) = 0$, где v — вектор скорости, $\alpha = 0$ — уравнение контактной гиперплоскости).

Предположим, что нейтральная гиперповерхность трансверсальна контактным гиперплоскостям. Орбиты группы на нейтральной гиперповерхности являются её характеристиками.

Сдвиги многочленов вдоль оси x действуют на пространстве многочленов $(*)$ и сохраняют контактную структуру.

Теорема 4. *Нейтральная гиперповерхность задаётся уравнением* $k = 0$, *где*

$$k = p_2 + p_3 q_2 + \ldots + p_a q_{a-1} + \frac{q_a^2}{2}.$$

Действительно, компоненты поля скоростей группы сдвигов вдоль оси x таковы:

$$\dot{q}_i = q_{i-1},\ \dot{p}_i = -p_{i+1},\ \text{где } p_{a+1} \equiv q_a,\ q_1 \equiv 1.$$

Теперь мы готовы привести нормальные формы контактных триад. Они определяются с помощью нейтральной гиперповерхности $k = 0$ в контактном многообразии многочленов $(*)$ и лежандрова многообразия многочленов, имеющих в нуле корень кратности не меньшей a.

Теорема 5. *Тройка*

$$(H : k = 0,\ \ L : p = 0,\ \ l : p = q_a = 0)$$

является контактной триадой в пространстве $\mathbf{R}^{2a+1}$, *снабжённом контактной структурой*

$$\alpha = p'\,dq' - q'\,dp' - dp_1.$$

Доказательство является простой проверкой, основанной на выражении для k (приведённом в теореме 4).

Определение. Контактная триада теоремы 5 и особое лежандрово многообразие, определяемое ею, называются *стандартной контактной триадой* в $\mathbf{R}^{2a-1}$ и *стандартным особым лежандровым многообразием.*

Размерность этого стандартного многообразия равна $m = a - 2$. Обозначим стандартное особое лежандрово многообразие через Σ^m.

Из теоремы 5 вытекает

Следствие 6. *Стандартное особое лежандрово многообразие* Σ^{a-2} *состоит из таких многочленов* $(*)$, *для которых*

$$q_2 = 0,\ \ p_2 = -p_4 q_3 - \ldots - p_a q_{a-1} - \frac{q_a^2}{2},$$

и которые имеют корень кратности не меньшей a. *Контактная структура на этом пространстве определяется с помощью* 1*-формы*

$$\alpha = p''\,dq'' - q''\,dp'' - dp_1,$$

где $q'' = (q_3, \ldots, q_a)$, $p'' = (p_3, \ldots, p_a)$.

Комбинируя этот результат с результатами §7.3, касающимися многочленов с корнями высокой кратности, получаем

Следствие 7. *Стандартное особое лежандрово многообразие Σ^m диффеоморфно раскрытому ласточкину хвосту размерности m, то есть многообразию многочленов вида*

$$x^{2m+1} + u_1 x^{2m-1} + \ldots + u_{2m} = (x-t)^{m+1}(x^m + \ldots).$$

Пример. При $a = 3$, применяя следствие 6, получаем многочлены

$$\tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{q_3}{6}x^3 - \tfrac{p_3}{2}x^2 - p_1,$$
$$\alpha = p_3\,dq_3 - q_3\,dp_3 - dp_1.$$

Многочлены такого вида, имеющие корень кратности не меньшей 3-х, образуют лежандрову кривую

$$\Sigma_1 = \left\{ f = \frac{1}{120}(x-t)^4(x+4t) \right\},$$

то есть

$$q_3 = -\frac{t^2}{2}, \qquad p_3 = -\frac{t^3}{3}, \qquad p_1 = -\frac{t^5}{30}.$$

Эта кривая диффеоморфна полукубической параболе. Её особенность ответственна за 5/2-особенность эвольвент плоских кривых в типичной точке перегиба.

Замечание. Многообразие Σ^{a-2} квазиоднородно. Присвоим координатам следующие веса:

$$\deg q_i = i - 1, \qquad \deg p_i = 2a - i.$$

Тогда $\deg k = 2a - 2$, $\deg \alpha = 2a - 1$. Многообразие Σ^{a-2} является образом, под действием квазиоднородного отображения, координатного пространства с весами $(1, \ldots, a-2)$.

Пример. При $a = 4$ координаты $(q_3, q_4, p_4, p_3, p_1)$ имеют соответственно веса $(2, 3, 4, 5, 7)$. Лежандрово многообразие Σ^2 является образом (t, s)-плоскости, где

$$\deg t = 1, \qquad \deg s = 2,$$

поскольку

$$\Sigma^2 = \left\{ f = \frac{1}{7!}(x-t)^5(x^2+5tx+s) \right\}.$$

Это многообразие Σ^2 диффеоморфно многообразию многочленов степени 6, с фиксированным старшим коэффициентом, нулевым следом и корнем кратности не меньшей четрёх.

Определение. *Надстройкой* стандартной триады в $\mathbf{R}^{2a-1}$ называется триада в пространстве $\mathbf{R}^{2b-1}$, снабжённом контактной структурой

$$\alpha = p'\,dq' - q'\,dp' - dp_1, \quad p' = (p_2, \ldots, p_b), \quad q' = (q_2, \ldots, q_b),$$

определяемая следующим образом:

$$\left(H : p_2 + p_3 q_2 + \ldots + p_a q_{a-1} + \frac{q_a^2}{2} = 0, \quad L : p = 0,\, l : p = q_a = 0\,(b \geq a) \right).$$

Теорема 8. *Ростки в нуле стандартных триад (и ростки их надстроек) устойчивы (как ростки контактных триад, рассматриваемых с точностью до контактной эквивалентности).*

Триада общего положения локально, в окрестности каждой своей точки, контактоморфна стандартной триаде или её надстройке.

Следствие 9. *Лежандровы многообразия, образованные контактными элементами, касающимися фронта в типичной задаче об обходе препятствия, устойчивы. В некоторой окрестности любой своей точки эти многообразия контактоморфны стандартным особым лежандровым многообразиям (или их надстройкам); то есть они локально диффеоморфны раскрытым ласточкиным хвостам.*

Для доказательства теоремы 8 достаточно контактифицировать теорему 4 §7.4. А именно, выберем 1-форму α, определяющую контактную структуру, для которой ядро формы $d\alpha$ в точках гиперповерхности (первом члене триады) касается этой гиперповерхности.

Проекция контактного многообразия (вдоль интегральных кривых этого поля ядер) определяет симплектическую структуру на чётномерном пространстве интегральных кривых (образ формы $d\alpha$).

Проектируя контактную триаду, получаем симплектическую триаду. Исходная контактная триада может быть восстановлена по её симплектической проекции с помощью операции контактизации (добавлением значения производящей функции лагранжева многообразия

в качестве новой координаты). Применяя эту общую конструкцию к стандартной симплектической триаде (из теоремы 4 §7.4), получим стандартную контактную триаду теоремы 8. Теперь мы можем привести к нормальным формам особенности 1-графиков функции времени (этот 1-график является подмногообразием в $J^1(M, \mathbf{R})$, состоящим из 1-струй многозначной функции времени).

График 1-струй функции времени (в §7.2, рис. 101, обозначенный через Г) образован характеристиками гиперповерхности H (в §7.2 обозначаемой через $SJ^1(M, \mathbf{R})$), пересекающими многообразие l триады (H, L, l) из теоремы 1 (см. теорему 10 в §7.2).

Рассмотрим задачу об обходе препятствия, в которой препятствие ограничено типичной гиперповерхностью ∂M в римановом многообразии M. На ∂M рассмотрим типичный пучок геодезических, параметризованных расстоянием s от данной гиперповерхности в ∂M. Этот пучок определяет функцию времени на M (совпадающую с s на ∂M).

Теорема 10. *Многообразие* Г 1*-струй функции времени локально контактоморфно многообразию многочленов* $(*)$*, имеющих корень кратности, превышающей* a.

Упомянутый выше диффеоморфизм отправляет 1-струи функции времени в точках любого фиксированного луча (т. е. в точках фиксированной геодезической на M) в многочлены $(*)$, получающиеся друг из друга сдвигом вдоль оси x.

Доказательство. По теореме 1, тройка (H, L, l), построенная по s, является контактной триадой. Эта триада — общего положения, при условии, что препятствие и пучок геодезических на нём находятся в общем положении. Следовательно, зта триада локально эквивалентна триаде теоремы 5 (по теореме 8; нам не нужны надстройки, так как мы можем рассматривать в качестве нормальной формы росток стандартной триады в произвольной точке).

Для триады из теоремы 5 многообразие l состоит из многочленов с нулевым корнем кратности, превышающей a. Характеристики гиперповерхности H из теоремы 5 являются орбитами сдвигов вдоль оси x (по теореме 4). Орбиты точек из l заметают многообразие многочленов $(*)$, имеющих корень кратности, превышающей a, что и требовалось доказать.

Наконец, мы приведём явные формулы для особенностей многообразий контактных элементов, касающихся фронтов, и 1-графиков функций времени, а также для особенностей соответствующих подмного-

образий в пространствах многочленов нечётной степени,

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad n = 2k+1.$$

Естественная (SL_2-инвариантная) контактная структура на этом пространстве определена уравнением

$$\sum i!\, j!\, (-1)^i a_i\, da_j = 0, \text{ где } i + j = n,\ a_0 = 1.$$

Из теорем 10 и 8 вытекает

Следствие 11. *Многообразие 1-струй функции времени общего положения в задаче об обходе препятствия в m-пространстве локально контактоморфен особому лежандрову многообразию многочленов*

$$(x-t)^{m+2}(x^{m-1} + \ldots)$$

в пространстве многочленов степени $n = 2m+1$, снабженном естественной контактной структурой. Ограничение функции времени на это подмногообразие имеет вид $\pm a_1 + \text{const}$; точки фиксированного луча соответствуют сдвигам вдоль оси x некоторого фиксированного многочлена.

Следствие 12. *Многообразие контактных элементов типичного фронта в типичной m-мерной задаче об обходе препятствия локально контактоморфно особому лежандрову многообразию многочленов*

$$x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = (x-t)^{m+1}(x^{m-1} + \ldots)$$

в пространстве многочленов степени $2m$ с $a_{n-1} = 1$, снабжённом естественной контактной структурой

$$\sum i!\, j!\, (-1)^i (1+j) a_i\, da_j = 0 \quad (\textit{где } 0 < i < n,\ i + j = n-1).$$

Замечание. В [166] и [170] соответствующие формулы выписаны неправильно.

Структуры самих типичных фронтов и графиков функций времени в многомерных задачах об обходе препятствия не известны, даже топологически.

Например неизвестно, является ли функция минимального времени в типичной задаче об обходе препятствия топологически эквивалентной функции Морса. Это справедливо для соответствующей конечномерной задачи: топологически функции максимума и минимакса

$$f(y) = \max_x F(x,y), \quad f(z) = \min_y \max_x F(x,y,z)$$

являются функциями Морса, при условии, что семейства F являются семействами функций общего положения на компактных многообразиях (Матов [181]).

Неизвестно также, справедлив ли в задаче об обходе препятствия общий принцип "хрупкости хорошего", согласно которому в особых точках границы множества "хороших" объектов направления "плохих" деформаций образуют более половины пространства всех направлений. Ясно, тем не менее, что в задаче об обходе препятствия "хорошие" объекты — это недостижимые.

7.6. Гиперикосаэдральная особенность

Результаты этого раздела были получены О.П.Щербаком [6], чья посмертная статья [144] содержит все доказательства. *Гиперикосаэдром* называется правильный 600-гранник в евклидовом 4-пространстве. Для того чтобы описать его 120 вершин, мы начнём с группы вращений обычного икосаэдра. Эта группа, состоящая из 60 элементов, является подгруппой в $SO(3)$. Двулистное накрытие $SU(2) \to SO(3)$ сопоставляет группе вращений икосаэдра подгруппу в $SU(2)$, называемую *бинарной группой икосаэдра*. Её 120 элементов находятся в $SU(2) \approx S^3$. Их выпуклая оболочка и есть гиперикосаэдр.

Группа симметрий гиперикосаэдра порождена 4 отражениями евклидова пространства. Эта группа отражений обозначается через H_4. Соответствующая диаграмма Дынкина:

где 5 обозначает угол $\pi - \pi/5$. Группа H_4 содержит 120^2 элементов. Она действует на вершинах гиперикосаэдра как левое и правое умножение на элементы бинарной группы (следовательно, эта группа изоморфна прямому произведению бинарной группы икосаэдра на себя).

Группа Кокстера H_4 не является кристаллографической: она не сохраняет никакую решётку в евклидовом 4-пространстве. Тем не менее, она связана с решёткой E_8, из которой может быть сконструирована следующим образом.

Рассмотрим диаграмму Дынкина E_8, сложенную как на рис. 109. Каждая точка представляет зеркало, то есть отражение в евклидовом 8-пространстве. Два отражения α, β коммутируют. Их произведе-

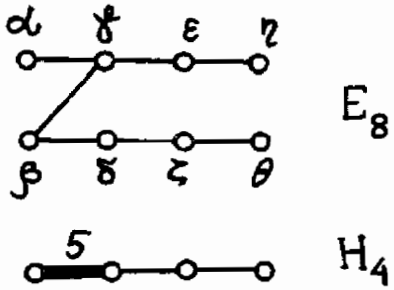


Рис. 109. Построение группы H_4 по решётке E_8

ние $\alpha\beta$ — ортогональное преобразование 8-пространства (сохраняющее решётку E_8). Четыре произведения $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, $\eta\theta$ порождают подгруппу группы ортогональных преобразований, сохраняющих решётку E_8. Нетрудно видеть, что эта подгруппа изоморфна H_4.

Таким образом, складывание, изображённое на рис. 109, определяет представление группы H_4 в евклидовом 8-пространстве (сохраняющее решётку E_8). Это представление приводимо. А именно, 8-пространство является ортогональной суммой двух 4-х мерных пространств неприводимых представлений группы H_4. Таким образом, группа отражений H_4 является группой, порождённой 4 произведениями, приведёнными выше, действующей на 4-х мерном (иррациональном) пространстве неприводимого представления.

Эта связь между H_4 и E_8 становится решающей при изучении дискриминанта H_4 (являющегося алгебраической гиперповерхностью в пространстве орбит группы H_4).

Замечание. Другие некристаллографические группы Кокстера могут быть определены подобной конструкцией сворачивания других диаграмм Дынкина, показанной на рис. 110: $A_4 \to H_2$, $D_6 \to H_3$, $A_{p-1} \to I_2(p)$.

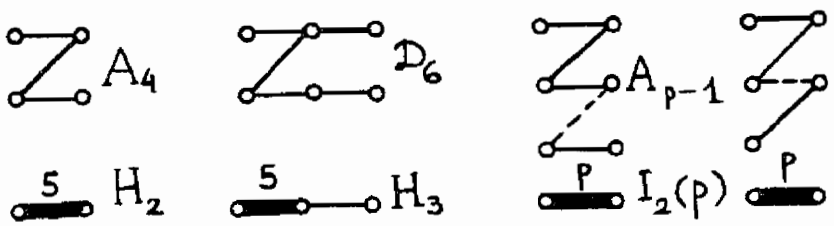


Рис. 110. Складывания диаграмм Дынкина, порождающие группы H_2, H_3, $I_2(p)$

Опишем дискриминант группы H_4.

Теорема 1 (см. [144]). *Дискриминант группы отражений H_4 допускает параметризацию*

$$\begin{aligned} t_2 &= x, \\ t_{12} &= xz + y^2/2, \\ t_{20} &= xy^3 + z^2/2, \\ t_{30} &= xy^3z + y^5/5 + z^3/3, \end{aligned}$$

где t_k — базисные инварианты (k — степень) и (x, y, z) — параметры с весами 2, 6, 10.

На рис. 111 дискриминант H_4 изображён в виде перестройки его двумерных сечений (изображены типичные сечения тремя параллельными трёхмерными пространствами).

Теорема 2 ([144]). *Бифуркационная диаграмма нулей семейства функций*

$$f(x, y) = \frac{x^5}{5} + ax^3(s_2y + s_{12}) + x(s_2y + s_{12})^2 + y^3 + s_{20}y + s_{30},$$

зависящего от четрёх параметров $(s_2, s_{12}, s_{20}, s_{30})$ $(a \neq 0)$, имеет две компоненты, каждая из которых диффеоморфна дискриминанту H_4.

Если $a = 1$ или $2/3$, то эти две гиперповерхности совпадают.

Отображение $(\mathbf{C}^4, 0) \to (\mathbf{C}^8, 0)$, индуцирующее это семейство из версальной деформации особенности E_8, является (локальным) вложением.

Если $a = 2/3$, то это отображение отправляет бифуркационную диаграмму семейства на страт $4A_2$ дискриминанта E_8 (четрые неморсовские точки), который, следовательно, диффеоморфен дискриминанту H_4.

Если $a = 1$, то это отображение отправляет бифуркационную диаграмму семейства на страт $(A_1A_1)(A_1A_1)(A_1A_1)(A_1A_1)$ дискриминанта E_8 (четыре пары одинаковых критических значений), который, следовательно, также диффеоморфен дискриминанту группы H_4.

Замечание. Подобные результаты верны и для H_2 и H_3. Соответствующие семейства

$$\frac{x^5}{5} + as_2x^3 + s_2^2x + y^2 + s_{10}, \qquad a \neq 0,$$

$$\frac{x^5}{5} + ax^3y + xy^2 + s_2y^2 + s_6y + s_{10}, \qquad a^2 \neq \frac{4}{5},$$

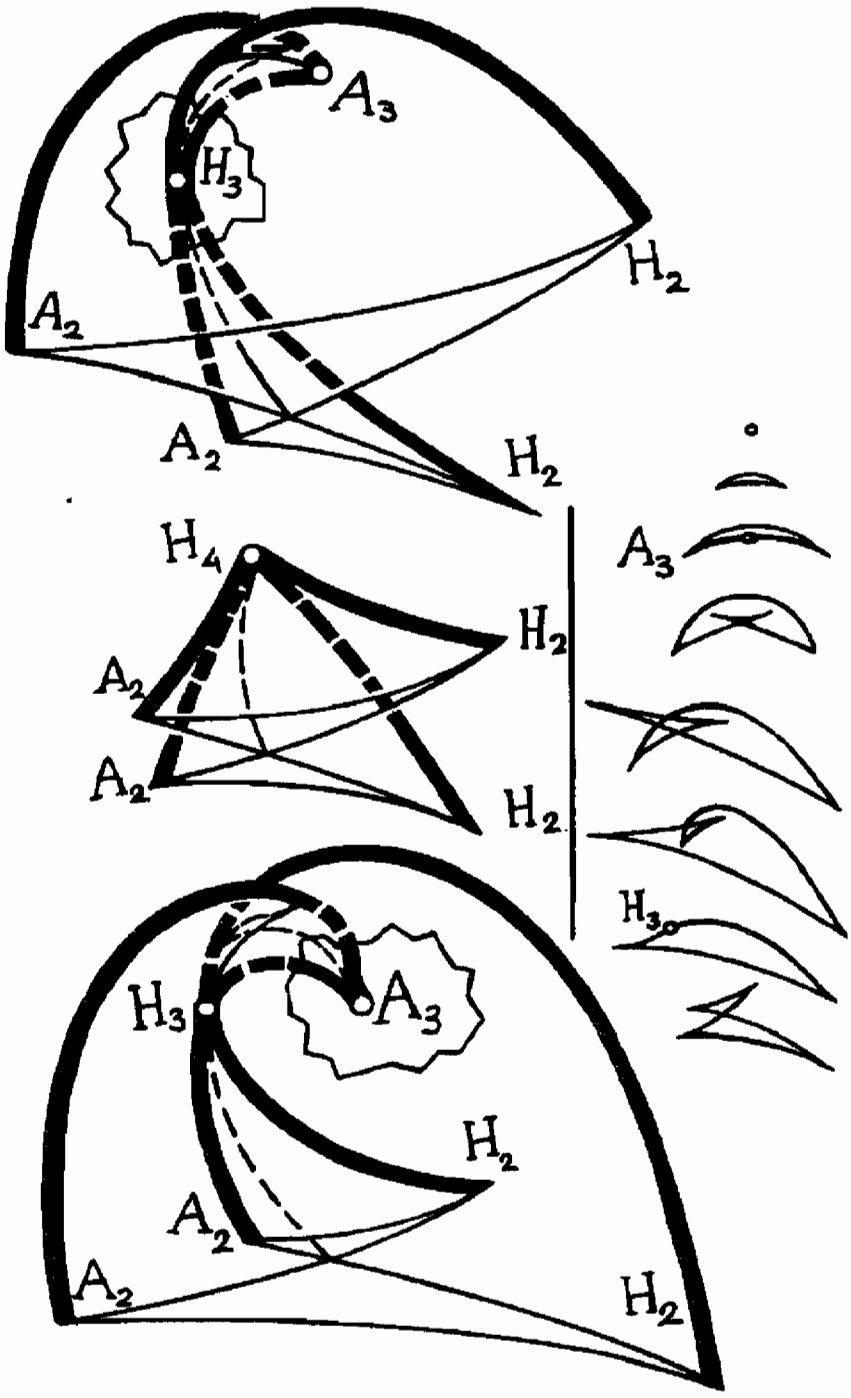


Рис. 111. Дискриминант H_4 как перестройка поверхности

индуцированны из версальных деформаций A_4 и D_6. Случай $a = 2/3$ соответствует страту $2A_2$ дискриминанта A_4 и страту $3A_2$ дискриминанта D_6. Случай $a = 1$ соответствует страту $(A_1A_1)(A_1A_1)$ дискриминанта A_4 и страту $(A_1A_1)(A_1A_1)(A_1A_1)$ дискриминанта D_6.

Дискриминанты неприводимых кристаллографических групп Кокстера являются фронтами соответствующих лежандровых особенностей (см. §3.2). Эта связь была расширена на некристаллографические группы Гивенталем [8]. Начнём со следующего обобщения теории Ляшко–Лойенги.

Рассмотрим голоморфное векторное поле на пространстве орбит $\mathbf{C}^k$ неприводимой группы Кокстера. Дискриминант является особой гиперповерхностью в этом пространстве. Его касательная плоскость в нуле определена уравнением $dt_h = 0$, где t_h — базисный инвариант наивысшей степени h. Эта степень h называется *числом Кокстера.*

Теорема 3 (О.В.Ляшко [159], А.Б.Гивенталь [8]). *Все голоморфные векторные поля, в нуле трансверсальные дискриминанту, локально голоморфно эквивалентны (т. е. могут быть преобразованы друг в друга локальным диффеоморфизмом, сохраняющим дискриминантную гиперповерхность).*

Рассмотрим теперь локальное расслоение $(\mathbf{C}^k, 0) \twoheadrightarrow (\mathbf{C}^{k-1}, 0)$ пространства орбит на траектории типичного голоморфного векторного поля (трансверсального дискриминанту). Траектории, пересекающие дискриминант нетрансверсально (пересечение состоит из менее, чем k точек), образуют гиперповерхность в пространстве траекторий $\mathbf{C}^{k-1}$. Эта гиперповерхность называется *бифуркационной диаграммой функций* (термин объяснён в §5.3).

Теорема 4 (О.В.Ляшко [159], А.Б.Гивенталь [8]). *Высшие группы гомотопий дополнения бифуркационной диаграммы функций неприводимой группы Кокстера W тривиальны, тогда как фундаментальная группа является подгруппой конечного индекса в группе кос из k нитей. Индекс этой подгруппы равен*

$$\frac{k!\,h^k}{|W|}$$

(где $|W|$ обозначает число элементов группы W).

Каустика особенности H_4 (являющаяся частью бифуркационной диаграммы функций, соответствующей ребру возврата дискриминантной гиперповерхности) изображена на рис. 112. В $\mathbf{C}^3$ эта поверхность

состоит из обычного зонтика H_2 и сложенного зонтика A_2; зонтики имеют взаимное касание порядка 3 вдоль линии H_3.

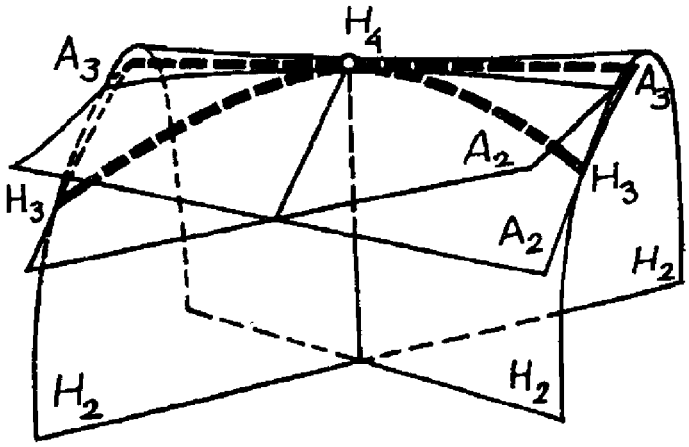


Рис. 112. Каустика H_4

Будем рассматривать дискриминант как график "многозначной функции" на $\mathbf{C}^{k-1}$. Множество локальных "дифференциалов" этой "функции" образует лагранжево многообразие в $T^*\mathbf{C}^{k-1}$. Соответствующее лежандрово многообразие образовано контактными элементами $\mathbf{C}^k$, касающимися дискриминанта.

Теорема 5 (А.Б.Гивенталь). *Лагранжева проекция лагранжева многообразия, соответствующего группе Кокстера, проста. Соответствующее лагранжево многообразие диффеоморфно произведению кривой $p^2 = q^r$ на гладкое многообразие, r определяется из следующей таблицы:*

группа	A_k, D_k, E_k	B_k, C_k, F_4	H_k	$I_2(m)$
r	1	2	3	$m-2$

И обратно, любая простая лагранжева проекция лагранжева многообразия, диффеоморфного произведению плоских кривых, локально эквивалентна проекции, порождённой группой Кокстера (или её тривиальной надстройке).

Замечание. Здесь слово "простое" значит, что лагранжево отображение $L \hookrightarrow T^*B \twoheadrightarrow B$, где L — *фиксированное* многообразие (быть может особое), не имеет модулей (т. е. все лагранжевы проекции этого многообразия, достаточно близкие рассматриваемому отображению, локально (в некоторой окрестности произвольной точки) эквивалентны проекции из некоторого конечного списка)[1].

[1] Определение термина "простой" в [8] немного отличается от данного здесь, но результат верен в обоих случаях.

Пример. Лагранжево многообразие, соответствующее H_k, имеет своей единственной особенностью обычное ребро возврата ($r = 3$). Следовательно, единственно возможной особенностью лежандрова многообразия, образованного касающимися дискриминанта H_4 контактными элементами, является полукубическое ребро возврата. Сложная особенность, изображённая на рис. 111, отражает тот факт, что проекция этого лежандрова 3-многообразия из 7-мерного пространства контактных элементов в 4-мерное пространство, содержащее дискриминант, не является типичной.

Таким образом мы пришли к задаче классификации лежандровых проекций лежандровых многообразий с полукубическим ребром возврата. Начнём с простейшего случая, в котором лежандрова кривая с полукубической точкой возврата проектируется на плоскость вдоль слоёв лежандрова расслоения.

Теорема 6. *Лежандрова кривая с полукубической точкой возврата проектируется на кривую с особенностью H_2 (имеющей точку возврата порядка $5/2$), при условии, что касательная к лежандровой кривой в точке возврата не вертикальна (т. е. не совпадает с направлением слоя). Такая проекция лежандрово эквивалентна проекции множества касающихся кривой $x^5 = y^2$ контактных элементов на саму эту кривую.*

Замечание. Таким образом, единственной особенностью лежандровой проекции типичной лежандровой кривой с полукубической точкой возврата являются точки возврата порядка $5/2$ (в образе точек возврата проектируемой лежандровой кривой) и порядка $3/2$ (в образе точек, в которых кривая гладкая, но направлена вертикально).

Из этого замечания вытекает, что кривая, проективно двойственная типичной плоской кривой с точкой возврата порядка $5/2$, имеет особенность этого же типа (автодвойственная особенность). Это неверно для некоторых нетипичных кривых; например, для "нормальной формы", определённой уравнением $y = x^{5/2}$ в аффинных координатах. Действительно, соответствующая лежандрова кривая касается слоёв второго канонического лежандрова расслоения $PT^*P^2 \twoheadrightarrow P^{2*}$.

Кривая $y = x^2 + x^{5/2}$ находится в общем положении по отношению к обоим каноническим расслоениям $PT^*P^2 \twoheadrightarrow P^2$ и $PT^*P^2 \twoheadrightarrow P^{2*}$, и двойственная ей кривая имеет особенность H_2 порядка $5/2$, диффеоморфную особенности исходной кривой в нуле.

Рассмотрим лежандровы проекции лежандровых поверхностей с полукубическими рёбрами возврата. Само ребро является гладкой интегральной кривой распределения контактных плоскостей. Типичная интегральная кривая контактной структуры нигде не вертикальна. Следовательно, её проекция является гладкой кривой, которая локально может быть преобразована в прямую диффеоморфизмом базового 3-пространства. Объемлющее контактное многообразие и его лежандрово проектирование могут быть отождествлены с расслоением контактных элементов базы. Элементы, соответствующие ребру возврата, могут быть сделаны параллельными при помощи нового диффеоморфизма, сохраняющего описанную выше прямую.

В общей точке ребра возврата касательные плоскости лежандрова многообразия не вертикальны (не пересекают касательные плоскости слоёв). Однако, в некоторых точках ребра возврата они могут стать вертикальными (для типичной лежандровой поверхности с ребром возврата такие точки изолированы и соответствующее отображение ребра в лагранжев грассманиан контактной гиперплоскости трансверсально шлейфу[2)] лагранжевой плоскости, касающейся слоя). Эта ситуация порождает особенность H_3.

Рассмотрим типичное расслоение на плоскости базового 3-пространства. Фронт нашего лежандрова многообразия пересекает эти слои вдоль плоских кривых. Контактные элементы слоя, содержащие касательные направления к любой из таких кривых, образуют лежандрово многообразие в трёхмерном контактном пространстве контактных элементов плоскости. Это лежандрово многообразие является лежандровым краем исходной лежандровой поверхности. Оно имеет полукубическую точку возврата в точке, соответствующей ребру возврата исходной поверхности.

Таким образом мы построили однопараметрическое семейство лежандровых кривых в пространствах лежандровых расслоений контактных элементов плоскости. В точке возврата любой кривой касательная прямая принадлежит контактной плоскости в этой точке. Для типичного значения параметра касательная прямая не вертикальна (не совпадает с направлением слоя). Однако, для некоторых значений параметра эта касательная становится вертикальной. В соответствующей точке появляется особенность H_3.

[2)] *Шлейфом* лагранжева векторного пространства называется многообразие не трансверсальных ему лагранжевых векторных пространств (т. е. пространств, пересечение исходного лагранжева пространства с которыми содержит ненулевой вектор).

Локально отождествим наше 3-пространство лежандрова расслоения с пространством 1-струй функций одной переменной,

$$J^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \twoheadrightarrow J^0(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad (x,y,p) \mapsto (x,y).$$

Так как вдоль лежандровых кривых $dy = p\,dx$, мы можем восстановить эти кривые по их лагранжевым проекциям (на плоскость (x,p)). Эти лагранжевы кривые имеют полукубические точки возврата в нуле. Для лежандровой кривой общего положения касательная в этих точках не вертикальна, но она становится вертикальной ($dx = 0$) при значениях параметра, соответствующих особенности H_3. Перестройка соответствующей лагранжевой кривой изображена на рис. 113.

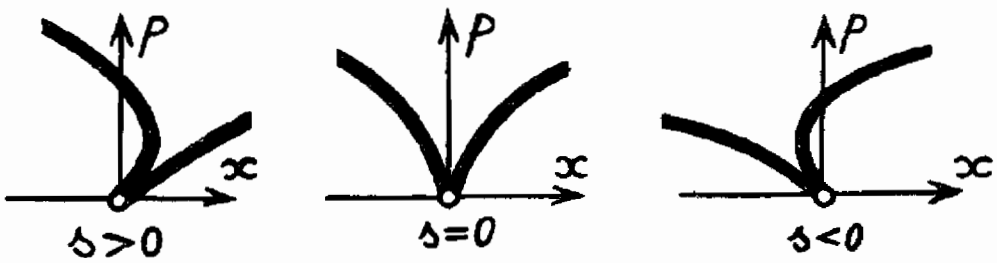


Рис. 113. Перестройка H_3 лагранжевых кривых с точками возврата

Пример. $p = t^2$, $x = t^3 + st^2$, где s — параметр. Соответствующая лежандрова кривая:

$$p = t^2, \qquad x = t^3 + st^2, \qquad y = \int p\,dx = \frac{3}{5}t^5 + \frac{2}{3}st^3.$$

Фронт является кривой в (x,y)-плоскости, параметрически заданной формулами

$$x = t^3 + st^2, \qquad y = \frac{3}{5}t^5 + \frac{2}{3}st^3.$$

Для $s = 0$ фронт в нуле имеет особенность H_2 порядка $5/2$, где лежандрова кривая имеет полукубическую точку возврата, и особенность A_2 в точках, где лежандрова кривая гладкая и вертикальная ($3t + 2s = 0$). Перестройка фронта изображена на рис. 5. Заметённая фронтами поверхность в трёхмерном "пространстве-времени" $\{(x,y,s)\}$ диффеоморфна дискриминанту H_3 (см. рис. 102). Эта поверхность является также фронтом соответствующей лежандровой поверхности с ребром возврата.

Этот пример доставляет нормальные формы типичных лежандровых проекций поверхности с ребром возврата, особенностей её фронта, его разложения на линии уровня типичной функции и типичных перестроек лежандровых проекций лежандровых кривых с полукубическими точками возврата.

Предупреждение. Этот пример *не* даёт нормальной формы перестроек проекций *лагранжевых* кривых, это только пример. В самом деле, рассмотрим два слоя $x = \text{const}$, не трансверсальных лагранжевой кривой. Вместе с кривой они ограничивают две площади, $((u(s), v(s)))$. Соответствующая кривая в (u, v)-пространстве инвариантным образом связана с лагранжевой перестройкой. Она меняется, однако, от одного семейства к другому. Таким образом, лагранжева перестройка H_3 имеет функциональный модуль.

Замечание 1. Дискриминант H_3 локально диффеоморфен объединению касательных к пространственной кривой

$$x = s, \quad y = s^3, \quad z = s^5$$

(Ляшко [4]) или любой кривой

$$x = s + \ldots, \qquad y = s^3 + \ldots, \qquad z = s^5 + \ldots,$$

где точки обозначают слагаемые более высоких порядков (Щербак [5]).

Замечание 2. В проективном пространстве рассмотрим поверхность с особенностью H_3. Для такой поверхности общего положения двойственная поверхность имеет особенность H_2. Однако, она может иметь особенность H_3. Это событие имеет коразмерность 1 (в проективном пространстве оно случается в типичных однопараметрических семействах поверхностей с особенностью H_3 для некоторых отдельных значений параметра).

Дискриминант H_4, так же, как и дискриминанты H_2 и H_3, может быть описан как особенность типичного фронта лежандрова многообразия с полукубическим ребром возврата (размерности 2 в случае H_4).

Ребро возврата является двумерной интегральной поверхностью контактной структуры 7-мерного объемлющего многообразия. Для особого лежандрова многообразия общего положения, в изолированных точках такая поверхность является вертикальной (касается слоя некоторого фиксированного лежандрова расслоения).

В самом деле, проекция ребра возврата в соответствующее симплектическое 6-многообразие (вдоль интегральных кривых поля ядер дифференциала контактной формы) является изотропной 2-поверхностью. Грассманово многообразие изотропных 2-плоскостей в симплектическом 6-пространстве имеет размерность 7. Шлейф фиксированного лагранжева подпространства (образованного теми изотропными 2-плоскостями, которые не трансверсальны исходной 2-плоскости) имеет размерность 5. Коразмерность шлейфа равна двум. Касательные плоскости ребра возврата параметризованы двумя параметрами. Следовательно плоскость становится (трансверсально) вертикальной в некоторых изолированных точках ребра возврата (здесь мы используем теорему трансверсальности, основанную на сюръективности "отображения Гаусса", отправляющего изотропное подмногообразие с выделенной точкой в касательное пространство в этой точке, сдвинутое в начало координат объемлющего евклидова симплектического пространства).

Таким образом, ребро возврата типичного трёхмерного лежандрова подмногообразия вертикально в некоторых изолированных особых (H_4) точках.

Лежандрова проекция ребра возврата в этих точках имеет особенность. Эта 2-поверхность в 4-пространстве может быть параметризована следующим образом:

$$t_2 = a, \qquad t_{12} = ac, \qquad t_{20} = \frac{1}{2}c^2, \qquad t_{30} = \frac{1}{3}c^3.$$

Вдоль этой поверхности фронт имеет ребро возврата (H_2) порядка 5/2. Таким образом, особенность страта H_2 фронта H_4 — раскрытый зонтик (см. §5.6).

Замечание. Таким образом, страт H_2 в четырёхмерном пространстве орбит группы отражений H_4 диффеоморфен конормальному расслоению полукубической параболы. Было бы интересным понять происхождение соответствующей симплектической структуры на пространстве орбит особенности H_4 (связан ли тот факт, что открытые зонтики вкладываются в пространства, размерность которых кратна четырём, с гиперкэлеровыми структурами?).

Вернёмся к лежандрову многообразию размерности 3 с двумерным ребром возврата H_2. Касательные плоскости к этому многообразию в точках ребра возврата могут быть вертикальными (касающимися слоя). Для особого лежандрова многообразия общего положения это случается в точках некоторой кривой. Соответствующая особенность

фронта — H_3 (фронт локально диффеоморфен произведению дискриминанта H_3 на прямую). Эта H_3-кривая на ребре возврата содержит особую точку типа H_4 и является гладкой в этой точке. Проекция этой гладкой кривой остаётся гладкой: эта проекция есть H_3-страт дискриминанта H_4 (она совпадает с осью t_{12} введённых выше координат).

Дискриминант H_4 может быть описан как перестройка в однопараметрическом семействе особенностей H_3 (подобно тому как дискриминант H_3 был описан в виде перестройки в однопараметрическом семействе особенностей H_2). Это описание оставляется читателю.

Замечание. Другое описание дискриминанта H_4 было получено О.П.Щербаком: рассмотрим семейство кривых

$$x^5 + y^3 + u_2x^3y + u_{12}x^3 + u_{20}y + u_{30} = 0.$$

Значения параметров u, соответствующие особым кривым, образуют гиперповерхность в 4-пространстве. Эта гиперповерхность имеет две неприводимые компоненты, одна из которых диффеоморфна дискриминанту H_4.

Приведённые формулы описывают вложение локальной алгебры D_4 в локальную алгебру E_8, индуцирующее на первой такую же градуировку, как и та, которая задаётся сворачиванием инвариантов группы H_4. Это замечание (см. [98], §9, замечание 7) было отправной точкой исследований Щербаком особенности H_4.

7.7. Нормальные формы особенностей в задаче об обходе препятствия

Определим семейство "функций длины", заданных на поверхности препятствия. Параметром этого семейства будет служить точка объемлющего многообразия. Значение функции равно сумме расстояния от начального многообразия "источника" (вдоль геодезической на поверхности препятствия) и расстояния до конечной точки объемлющего многообразия (вдоль геодезической этого многообразия; мы предполагаем, что эти слагаемые гладкие). Основным наблюдением теории Щербака об обходе препятствия является

Лемма. *Кратности критических точек функции длины чётны.*

Доказательство нетрудно усмотреть из рис. 114: простейшей особенностью функции длины от 1 переменной является кубическая (A_2) особенность, так как функция монотонна.

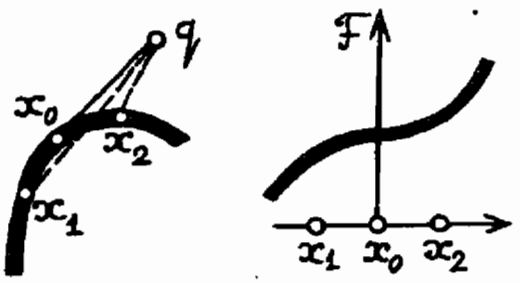


Рис. 114. График функции длины F

Кратности более сложных особенностей функции длины равны удвоенному числу простейших (A_2) особенностей, на которые исходная особенность рассыпается после небольшого шевеления (считая, разумеется, и комплексные особенности).

В пространствах версальных деформаций функций с простыми критическими точками О.П.Щербак нашёл (максимальные) страты функций, критические точки которых имеют чётные кратности.

Теорема 1 ([144]). *Любое максимальное неособое подсемейство R^+-версальной деформации ростка простой функции R^+-эквивалентно одному из семейств списка Щербака:*

$\Xi_k(\subset A_{2k})$ $\int_0^x (u^k + q_1 u^{k-2} + \ldots + q_{k-1})^2\, du$,

$\Omega_k(\subset D_{2k})$ $\int_0^y (u^{k-1} + q_1 u^{k-3} + \ldots + q_{k-3}u + x)^2\, du + q_{k-2}x^2 + q_{k-1}x$,

$A_3(\subset E_6)$ $x^3 + y^4 + q_1 y^2 + q_2 y$,

$A_4(\subset E_8)$ $x^3 + y^5 + q_1 y^3 + q_2 y^2 + q_3 y$,

$H_4(\subset E_8)$ $x^3 + \int_0^y (u^2 + q_1 x + q_2)^2\, du + q_3 x$.

Замечание. Деформация D_{2k} содержит ещё одно максимальное подсемейство (эквивалентное подсемейству, указанному в списке). Деформации E_6 и E_8 содержат также и особые подсемейства (отсутствующие в других случаях).

Рассмотрим лагранжевы отображения, соответствующие приведённым семействам. Семейство $F(x;q)$ определяет лагранжево подмногообразие

$$\left\{(p,q) \mid \exists x : \frac{\partial F}{\partial x} = 0, p = \frac{\partial F}{\partial q}\right\}$$

в пространстве кокасательного расслоения $T^*\mathbf{R}^{k-1} \twoheadrightarrow \mathbf{R}^{k-1}$, $(p, q) \mapsto q$.

Теорема 2 (А.Б.Гивенталь [8]). *Следующие семейства из списка Щербака порождают простые лагранжевы отображения:*

$$\Xi_k\ (k \geq 3), \qquad \Omega_k\ (k \geq 4), \qquad H_k\ (k = 2, 3, 4;\ H_2 = \Xi_2,\ H_3 = \Omega_3).$$

Соответствующие лагранжевы многообразия являются произведениями d-мерных раскрытых ласточкиных хвостов и гладких многообразий, где d определяются из таблицы:

семейство	Ξ_k	Ω	H_k
d	$k-1$	$k-2$	*1*

Простое лагранжево отображение произведения раскрытого ласточкина хвоста произвольной размерности на гладкое многообразие локально эквивалентно одному из отображений Ξ_k, Ω_k, H_k (или тривиальной надстройке одного из них).

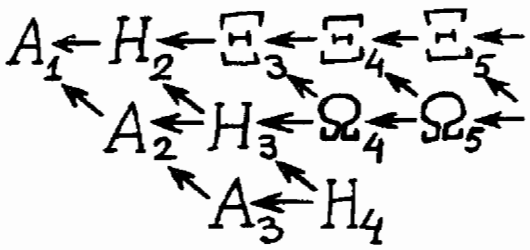


Рис. 115. Примыкания простых лагранжевых проекций раскрытых ласточкиных хвостов

Замечание. Примыкания этих особенностей изображены на рис. 115. Последовательность (H_2, H_3, H_4) соответствует одномерному раскрытому ласточкину хвосту, то есть полукубической параболе. Соответствующее лагранжево многообразие имеет полукубическое ребро возврата. Следующая последовательность (Ξ_3, Ω_4) соответствует двумерному раскрытому ласточкину хвосту. Левая последовательность (A_1, A_2, A_3) соответствует нульмерному раскрытому ласточкину хвосту, то есть гладким лагранжевым многообразиям. Эти проектирования имеют обычные лагранжевы особенности, рассмотренные в §1.3.

Используя естественные симплектическую и контактную структуры пространств многочленов, мы можем представить нормальные формы Ξ и Ω теоремы 2 в несколько изменённом виде.

Случай Ξ_{n+1}. Начнём с симплектического пространства многочленов (§1.1)

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n}.$$

Многочлены, имеющие корень кратности, превышающей n, образуют лагранжево многообразие — раскрытый ласточкин хвост размерности n.

Рассмотрим лагранжево расслоение

$$(a_1, \ldots, a_{2n}) \mapsto (a_1, \ldots, a_n).$$

Проектирование раскрытого ласточкина хвоста вдоль слоёв этого расслоения является лагранжевым отображением.

Теорема 3. *Любое типичное лагранжево проектирование локально приводимо к указанному выше виду локальным симплектоморфизмом, сохраняющим раскрытый ласточкин хвост (в некоторой окрестности его вершины).*

Например, проектирование Ξ_{n+1} из теоремы 2 приводимо к этой нормальной форме.

Соответствующая каустика (образованная проекцией особых точек раскрытого ласточкина хвоста, так как в этом случае лагранжево многообразие нигде не касается слоёв) является обычным ласточкиным хвостом размерности $n-1$ (это проектирование эквивалентно кратному дифференцированию многочленов).

Случай Ω_{n+1}. Для описания особенности Ω_{n+1} рассмотрим произведение раскрытого ласточкина хвоста размерности n_1 на прямую. Мы будем называть это произведение *цилиндром*. Этот n-мерный цилиндр является лагранжевым подмногообразием пространства многочленов

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n}, \tag{1}$$

снабжённого естественной симплектической структурой §1.1. Рассматриваемое лагранжево подмногообразие образовано многочленами с корнем кратности, превышающей n.

Рассмотрим лагранжево расслоение

$$(a_1, \ldots, a_{2n}) \mapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}).$$

Проектирование нашего цилиндра вдоль слоёв этого расслоения — лагранжево отображение.

Теорема 4. *Любое типичное лагранжево расслоение, слой которого имеет общее касательное направление с цилиндром в точке линии вершин, локально приводимо к указанному выше виду сохраняющим цилиндр симплектоморфизмом.*

Например, проектирование Ω_{n+1} из теоремы 2 может быть приведено к этой нормальной форме.

Каустика этого лагранжева отображения цилиндра имеет две компоненты. Одна из них является образом множества особых точек лагранжева многообразия, другая — множеством критических значений проектирования. Из предыдущих теорем вытекает

Следствие. *Каустика особенности Ω_{n+1} диффеоморфна бифуркационной диаграмме проектирования C_{n+1}.*

Бифуркационная диаграмма проектирования C_{n+1} была описана в §6.3 (см. рис. 92 и теорему 10). Эта диаграмма является гиперповерхностью в n-мерном пространстве, определяемой как множество тех прямых, параллельных оси b_n в $(n+1)$-мерном пространстве многочленов

$$x^{n+1} + b_1 x^n + \ldots + b_{n+1}, \tag{2}$$

которые пересекают многообразие многочленов с кратными корнями не трансверсально.

Пример. При $n = 2$ в 3-пространстве кубических многочленов с единичным старшим коэффициентом мы начинаем с поверхности из многочленов, имеющих кратные корни. Она может быть спроектирована на горизонтальную плоскость вдоль семейства вертикальных прямых (см. рис. 92). Касательная плоскость к цилиндру в некоторых точках его ребра возврата вертикальна. Бифуркационной диаграммой проектирования C_3 является кривая на горизонтальной плоскости, состоящая из проекции ребра возврата цилиндра и проекции касательной плоскости к цилиндру (в точке, где эта плоскость вертикальна).

При любом n бифуркационная диаграмма проектирования C_{n+1} есть множество $\{(b_1, \ldots, b_{n-1}, b_{n+1}) \mid$ существует b_n такое, что многочлен (2) либо имеет корень, кратность которого больше 2, либо нулевой корень $(b_{n+1} = 0)\}$.

Для доказательства следствия достаточно $n-1$ раз продифференцировать многочлены (1) и разделить их на подходящую константу. Лагранжево многообразие многочленов (1), имеющих корень кратности превышающей n, может быть спроектировано на цилиндр, состоящий из многочленов (2), имеющих кратный корень. Лагранжево отображение из теоремы 4 при этом принимает вид

$$(b_1, \ldots, b_{n+1}) \mapsto (b_1, \ldots, b_{n-1}, b_{n+1})$$

("забываем b_n"), что и требовалось доказать.

Для изучения лежандровых проектирований и фронтов, соответствующих приведённым выше лагранжевым отображениям, контактизируем симплектическое пространство, лагранжево расслоение и лагранжево подмногообразие. Выберем кокасательное расслоение $(p, q) \mapsto q$ в качестве локальной нормальной формы лагранжева расслоения. Контактизированным пространством является тогда пространство $\{(p, q; z)\}$ 1-струй функций, снабжённое контактной структурой $dz = p\,dq$. Лежандровым многообразием, соответствующим данному лагранжеву, является многообразие 1-струй (многозначной) производящей функции

$$z = \int p\,dq \text{ (интегралы вдоль лагранжева многообразия).}$$

Фронт лежандрова многообразия, задаваемого семейством функций (как в теореме 1), является бифуркационной диаграммой нулей семейства (или, что эквивалентно, графиком многозначной функции параметров семейства, значения которой равны критическим значениям функций семейства, соответствующим данным значениям параметров).

Теорема 5 ([8]). *Любые два голоморфных векторных поля, трансверсальных бифуркационной диаграмме нулей любого из семейств Ξ, Ω, H (см. теоремы 1, 2), приводимы друг к другу локальным голоморфным диффеоморфизмом объемлющего пространства, сохраняющим бифуркационную диаграмму.*

Замечание. Эта теорема справедлива также в вещественно-аналитическом и в гладком случае.

Следствие 1 ([8]). *В задаче об обходе препятствия единственными простыми особенностями функции времени являются особенности производящих функций лагранжевых отображений A_k, D_k, E_k, Ξ_k, Ω_k, H_k или их надстройки (надстройки всегда присутствуют в случае Ξ).*

Следствие 2 ([8]). *Дополнения комплексных бифуркационных диаграмм функций семейств Ξ_k, Ω_k, H_k являются пространствами Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$, где π есть подгруппа конечного индекса в группе кос из k нитей.*

Пример 1. График многозначной функции времени, имеющей особенность A_3, изображён на рис. 66.

Пример 2. Явная параметризация фронта Ξ_{n+1} может быть получена из приведённой выше нормальной формы лагранжевой особенности следующим образом. Для контактной структуры

$$dz = p\,dq - q\,dp$$

отображение

$$(p, q, z) \mapsto (q, w = z + pq)$$

является лежандровым расслоением. Итак, мы сначала рассмотрим контактное пространство многочленов

$$e_{2n+3} + q_1 e_{2n+1} + \ldots + q_n e_{n+2} - p_n e_{n+1} + \ldots + (-1)^n (p_1 e_2 - p_0 e_1 + z),$$

где $e_j = x^j/j!$ и

$$p_0 = -\left(q_1 p_2 + q_2 p_3 + \ldots + q_{n-1} p_n + \frac{q_n^2}{2}\right), \qquad dz = p\,dq - q\,dp.$$

Многочлены

$$\left(x - \frac{a_1}{n+3}\right)^{n+3} \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{(2n+3)!},$$

имеющие корень кратности большей $n+2$, образуют лежандрово многообразие Ξ_{n+1} (которое диффеоморфно n-мерному раскрытому ласточкину хвосту и квазиоднородно параметризовано координатами $(a_1, \ldots, a_n)$ с весами $(1, \ldots, n)$).

Рассмотрим лежандрово расслоение

$$(p, q, z) \mapsto (q, w = z + pq).$$

Теорема 6. *Любое типичное лежандрово расслоение пространства, содержащего лежандров раскрытый ласточкин хвост, локальным контактоморфизмом, приводящим раскрытый ласточкин хвост к указанной выше нормальной форме, приводится к указанному выше виду.*

Например, лежандрово проектирование, порождённое лагранжевым проектированием теоремы 2, *может быть приведено к такой нормальной форме.*

Фронт лежандрова проектирования Ξ_{n+1}, во введённых выше обозначениях, является проекцией соответствующего лежандрова многообразия. Следовательно, он может быть квазиоднородно параметризован функциями

$$(q_1(a), \ldots, q_n(a); w(a) = z(a) + p(a)q(a)),$$

с весами $(2, \ldots, n+1; 2n+3)$.

Мы получили явную, но достаточно неприятную параметризацию.

Пример. Путём (длинных) вычислений можно получить, например, (ср. с [23]) такое

Следствие. *Фронт Ξ_3 диффеоморфен поверхности в (A, B, C)-пространстве, параметрически заданной формулами*

$$A = s, \qquad B = t(s + 7t^2), \qquad C = t^3(10s^2 + 189st^2 + 945t^4).$$

На рис. 116 эта поверхность изображена как график многозначной функции $C(A, B)$ (любое векторное поле, трансверсальное этой поверхности в нуле, может быть приведено к нормальной форме $\partial/\partial C$ локальным диффеоморфизмом, сохраняющим эту поверхность). Линия самопересечения фронта Ξ_3 является комплексной (это — полукубическая парабола, символически обозначенная пунктиром на рис. 116).

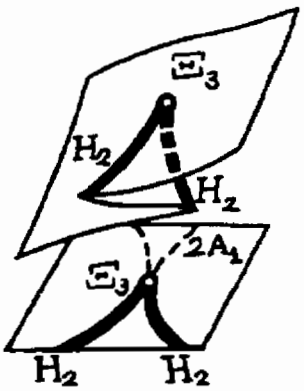


Рис. 116. Каустика фронта Ξ_3

Фронт Ω_4 изображён на рис. 117, полученном О.П.Щербаком в [144].

Предупреждение. На рис. 117 сечения задаются уравнениями вида $q_1 = \text{const}$. Однако, при $n > 1$ типичная функция в окрестности вершины фронта Ω_{n+1} не может быть приведена к q_1 диффеоморфизмом, сохраняющим фронт. Задача нахождения нормальной формы, к которой приводится типичная функция в некоторой окрестности фронта Ω, насколько мне известно, до сих пор не решена.

Явная параметризация фронта Ω_{n+1} использует лежандрово расслоение

$$(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; z) \mapsto (q_1, \ldots, q_{n-1}; p_n; w),$$

где $w = z + p_1 q_1 + \ldots + p_{n-1} q_{n-1} - p_n q_n$ и контактная структура имеет вид: $dz = p\,dq - q\,dp$.

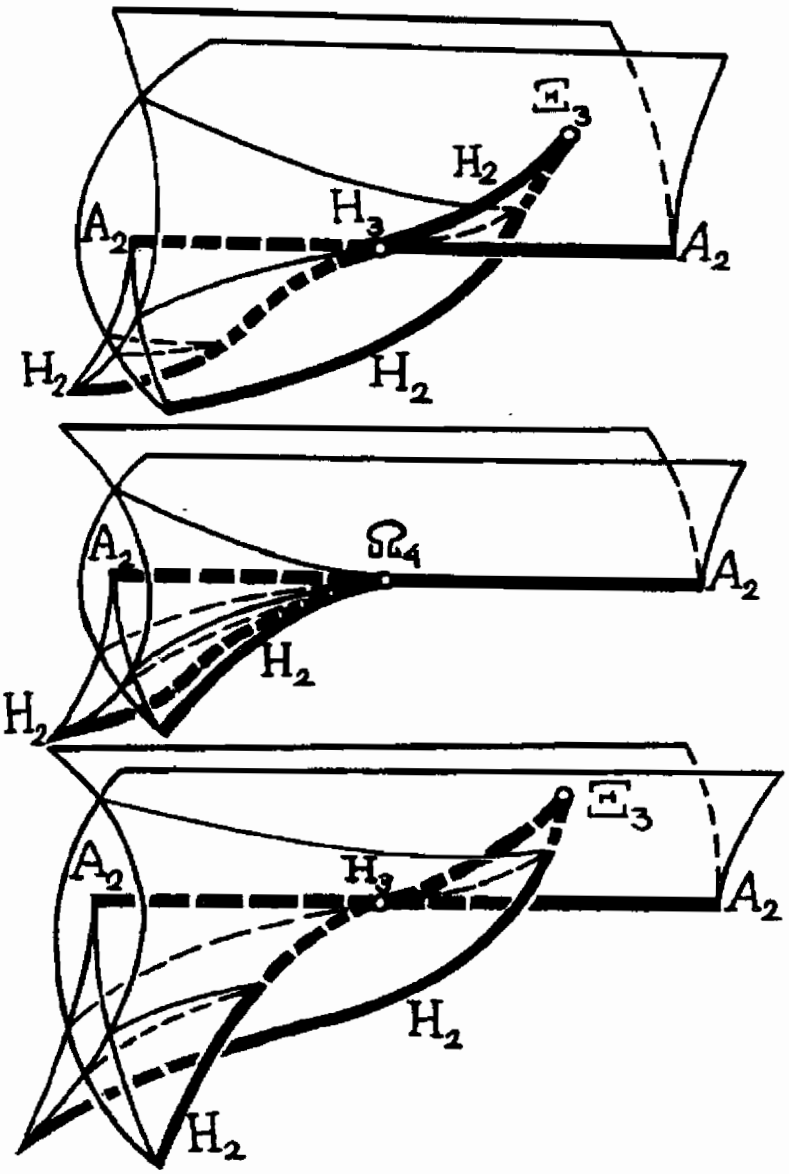


Рис. 117. Фронт Ω_4 в виде перестроек его сечений

Рассмотрим пространство многочленов

$$e_{2n+1} + q_1 e_{2n} + \ldots + q_n e_{n+1} - p_n e_n + \ldots + (-1)^n (p_1 e_1 - z),$$

где $e_j = x^j/j!$, $j = 1, \ldots, 2n+1$, снабжённое обычной контактной структурой $dz = p\,dq - q\,dp$. Многочлены, имеющие корень кратности, превышающей $n+1$, образуют лежандрово многообразие Ω_{n+1}. Это многообразие диффеоморфно произведению раскрытого ласточкина хвоста

на прямую. Записывая многочлены в виде

$$(x+b_1)^{n+2}\frac{x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}}{(2n+1)!},$$

получим квазиоднородную параметризацию этого лежандрова многообразия (веса переменных a_i, b_i равны i).

Рассмотрим лежандрово расслоение

$$(p,q,z)\mapsto(q_1,\ldots,q_{n-1};p_n;w=z+p_1q_1+\ldots+p_{n-1}q_{n-1}-p_nq_n).$$

Теорема 7. *Любое лежандрово расслоение общего положения в пространстве, содержащем лежандрово многообразие, диффеоморфное произведению раскрытого ласточкина хвоста на прямую, локально приводится к указанному выше виду с помощью локального контактоморфизма, приводящего произведение к указанной выше нормальной форме в некоторой окрестности точки линии вершин, в которой касательное пространство этого лежандрова многообразия вертикально (т. е. имеет общую прямую с касательным пространством слоя).*

Фронт лежандрова проектирования Ω_{n+1} с использованием введённых выше обозначений может быть параметризован квазиоднородными функциями

$$q_1(a,b),\ldots,q_{n-1}(a,b);p_n(a,b);w(a,b))$$

веса которых равны $(1,\ldots,n-1;n+1;2n+1)$.

Пример. С помощью некоторых (длинных) вычислений можно получить, например, такое

Следствие. *Фронт $\Omega_3=H_3$ диффеоморфен поверхности в (A,B,C)-пространстве, задаваемой параметризацией*

$$A=s,\quad B=10t^3-3st^2,\quad C=60t^5-45st^4+8s^2t^3.$$

Фронт Ω_3 изображён на рис. 118. Он диффеоморфен дискриминанту группы симметрий икосаэдра (см. рис. 102).

Любое векторное поле, трансверсальное касательной плоскости к этой поверхности в её вершине ($\dot{C}\neq0$), локально приводимо к нормальной форме $\partial/\partial C$ диффеоморфизмом, сохраняющим эту поверхность. Следовательно, особенность многозначной функции $C(A,B)$, графиком которой является наша поверхность, не зависит от выбора векторного поля.

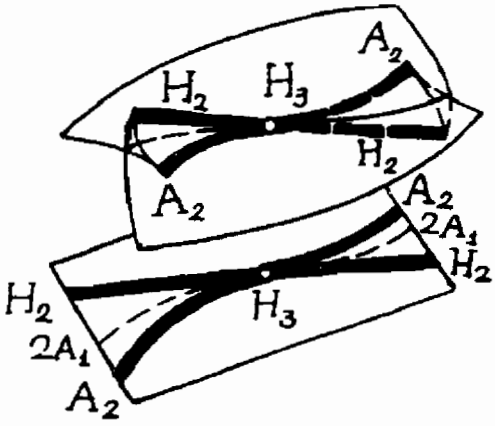


Рис. 118. Фронт H_3 и его каустика

Соответствующая каустика состоит из 2-х гладких кривых, имеющих касание третьего порядка. (Каустика совпадает с бифуркационной диаграммой проектирования C_3, см. рис. 92.)

Типичная функция в трёхмерном пространстве, содержащем фронт H_3, может быть приведена к виду $A + \text{const}$ локальным диффеоморфизмом, сохраняющим поверхность фронта (что следует из обычной теории сворачивания инвариантов групп отражений).

Следовательно, разложение графика многозначной функции времени на мгновенные фронты (множества уровня функции времени) в некоторой окрестности особенности H_3 приведено к нормальной форме. Наше 3-пространство может рассматриваться как пространство-время (время $= A$), и заметание поверхности фронта кривыми $A = \text{const}$ диффеоморфно перестройке H_3 мгновенных фронтов, движущихся на плоскости, содержащей препятствие.

Связь фронта Ω_3 с группой симметрий икосаэдра позволяет нам выписать нормальные формы перестроек Ω_3 в бóльших размерностях. Добавим новые координаты $D, E, \ldots$ и цилиндрически продолжим дискриминант. Нормальные формы функции "времени" таковы:

$$T = D \quad \text{или} \quad T = A \pm D^2 \pm E^2 \pm \ldots$$

(типичная функция в пространстве, содержащем цилиндр, может быть приведена к одной из этих нормальных форм диффеоморфизмом, сохраняющим цилиндр, и прибавлением подходящей константы).

К сожалению, не существует групп отражений, соответствующих Ξ_n, $n > 2$ или Ω_n, $n > 3$. Следовательно, мы не знаем локальных нормальных форм для функций на пространствах, содержащих соответствующие фронты. В этих случаях мы знаем нормальные формы многозначной функции времени, в отличие от нормальных форм мгновенных фронтов и их перестроек. Первый нерешённый случай — Ξ_3.

Изложенная выше теория описывает большинство особенностей, встречающихся в задаче об обходе препятствия, но не все из них (даже

в случае препятствия, ограниченного гладкой поверхностью, в евклидовом 3-пространстве), так как мы пренебрегли особенностями семейств геодезических на поверхности препятствия, и так как мы предположили, что расстояние до многообразия "источника" является гладким.

Наиболее сложная особенность (H_4) встречается в точке прямой, касающейся поверхности препятствия в параболической точке и имеющей асимптотическое направление. (В типичной задаче об обходе препятствия направление геодезической исходного семейства экстремалей на поверхности препятствия и асимптотическое направление совпадают в некоторых изолированных параболических точках.)

График многозначной функции времени диффеоморфен дискриминанту H_4 в некоторой окрестности "фокальной" точки на прямой, срывающейся в асимптотическом направлении с упомянутой выше параболической точки — это окончательный вывод теории Щербака [144].

Особенность Ω_4 появляется в точках биасимптотической линии на поверхности препятствия, касающейся некоторой геодезической нашего семейства геодезических на поверхности препятствия. (Для типичной задачи об обходе препятствия в 3-пространстве касательные биасимптотичны в некоторых изолированных точках поверхности; разумеется, эти точки не определяются поверхностью, а зависят от начальных условий.)

7.8. Примечание

Некоторые из оставшихся неизученными типов особенностей в (богатой на них) задаче об обходе препятствия недавно исследовал О.М.Мясниченко [189], [190]. Оказалось, что раскрытые ласточкины хвосты возникают также в типичных системах лучей на крае препятствия, порождённых падающей на край системой лучей общего вида в объемлющем пространстве.

Прямые произведения таких особенностей появляются в нормальных формах систем лучей, срывающихся с края, если соответствующая система лучей на крае особа.

Аналитическое описание устойчивых простых лагранжевых особенностей, обобщающих раскрытые ласточкины хвосты и раскрытые зонтики Уитни, приведено в [188].

8 Трансформации волн, определённых гиперболическими вариационными принципами

В этой главе мы рассмотрим геометрическую оптику волн, задаваемых линейными дифференциальными уравнениями или системами таких уравнений. В линейной теории волны различного типа (скажем, продольные и поперечные) обычно распространяются независимо. Однако, в неоднородных средах трансформация, т. е. преобразование (или конверсия, т. е. "превращение") волн различного вида типично в некоторых внутренних точках области, где распространяются эти волны. Это "внутреннее рассеяние" волн встречается также в однородных средах (гамильтоново коническое преломление в кристаллах). Однако, геометрия внутреннего рассеяния в типичных неоднородных средах существенно отличается от геометрии гамильтонова конического преломления, как мы ниже увидим[1)].

Хорошо известно, что глобальные качественные свойства гамильтоновых дифференциальных уравнений сильно отличаются от свойств обыкновенных дифференциальных уравнений, задаваемых типичными векторными полями (например, аттракторы, чрезвычайно важные в общей теории, в гамильтоновом случае отсутствуют). Тем не менее, локально гамильтоново поле так же про́сто, как и типичное векторное поле: оба могут быть приведены диффеоморфизмами к одной тривиальной нормальной форме в некоторой окрестности любой неособой точки.

Подобное же различие должно существовать между общими дифференциальными уравнениями с частными производными и уравнениями с частными производными, определяемыми вариационными принципами (загадочным образом, последний класс содержит большинство систем дифференциальных уравнений с частными производными, представляющих физический интерес).

В теории гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными математики никогда не различали вариационные и

[1)] Строго говоря, *однородные* среды соответствуют *нетипичным* контактным структурам, а типичные *неоднородные* среды соответствуют *типичным* контактным структурам на пространствах, содержащих *ту же самую* квадратичную коническую особенность световой гиперповерхности.

в случае препятствия, ограниченного гладкой поверхностью, в евклидовом 3-пространстве), так как мы пренебрегли особенностями семейств геодезических на поверхности препятствия, и так как мы предположили, что расстояние до многообразия "источника" является гладким.

Наиболее сложная особенность (H_4) встречается в точке прямой, касающейся поверхности препятствия в параболической точке и имеющей асимптотическое направление. (В типичной задаче об обходе препятствия направление геодезической исходного семейства экстремалей на поверхности препятствия и асимптотическое направление совпадают в некоторых изолированных параболических точках.)

График многозначной функции времени диффеоморфен дискриминанту H_4 в некоторой окрестности "фокальной" точки на прямой, срывающейся в асимптотическом направлении с упомянутой выше параболической точки — это окончательный вывод теории Щербака [144].

Особенность Ω_4 появляется в точках биасимптотической линии на поверхности препятствия, касающейся некоторой геодезической нашего семейства геодезических на поверхности препятствия. (Для типичной задачи об обходе препятствия в 3-пространстве касательные биасимптотичны в некоторых изолированных точках поверхности; разумеется, эти точки не определяются поверхностью, а зависят от начальных условий.)

7.8. Примечание

Некоторые из оставшихся неизученными типов особенностей в (богатой на них) задаче об обходе препятствия недавно исследовал О.М.Мясниченко [189], [190]. Оказалось, что раскрытые ласточкины хвосты возникают также в типичных системах лучей на крае препятствия, порождённых падающей на край системой лучей общего вида в объемлющем пространстве.

Прямые произведения таких особенностей появляются в нормальных формах систем лучей, срывающихся с края, если соответствующая система лучей на крае особа.

Аналитическое описание устойчивых простых лагранжевых особенностей, обобщающих раскрытые ласточкины хвосты и раскрытые зонтики Уитни, приведено в [188].

8 Трансформации волн, определённых гиперболическими вариационными принципами

В этой главе мы рассмотрим геометрическую оптику волн, задаваемых линейными дифференциальными уравнениями или системами таких уравнений. В линейной теории волны различного типа (скажем, продольные и поперечные) обычно распространяются независимо. Однако, в неоднородных средах трансформация, т. е. преобразование (или конверсия, т. е. "превращение") волн различного вида типично в некоторых внутренних точках области, где распространяются эти волны. Это "внутреннее рассеяние" волн встречается также в однородных средах (гамильтоново коническое преломление в кристаллах). Однако, геометрия внутреннего рассеяния в типичных неоднородных средах существенно отличается от геометрии гамильтонова конического преломления, как мы ниже увидим[1)].

Хорошо известно, что глобальные качественные свойства гамильтоновых дифференциальных уравнений сильно отличаются от свойств обыкновенных дифференциальных уравнений, задаваемых типичными векторными полями (например, аттракторы, чрезвычайно важные в общей теории, в гамильтоновом случае отсутствуют). Тем не менее, локально гамильтоново поле так же про́сто, как и типичное векторное поле: оба могут быть приведены диффеоморфизмами к одной тривиальной нормальной форме в некоторой окрестности любой неособой точки.

Подобное же различие должно существовать между общими дифференциальными уравнениями с частными производными и уравнениями с частными производными, определяемыми вариационными принципами (загадочным образом, последний класс содержит большинство систем дифференциальных уравнений с частными производными, представляющих физический интерес).

В теории гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными математики никогда не различали вариационные и

[1)] Строго говоря, *однородные* среды соответствуют *нетипичным* контактным структурам, а типичные *неоднородные* среды соответствуют *типичным* контактным структурам на пространствах, содержащих *ту же самую* квадратичную коническую особенность световой гиперповерхности.

общие системы. Действительно, симметризация приводит общую систему к вариационной в точке строгой гиперболичности. Типичная общая система строго гиперболична в типичных точках, следовательно в таких точках нет существенного различия между вариационными и общими системами.

Однако, в целом точки нестрогой гиперболичности становятся неизбежными (в точности так же как неизбежны особые точки векторного поля).

Глобальное различие в поведении общей и гамильтоновой динамической системы проявляет себя локально в особых точках. Аналогично, в теории гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными поведение лучей и волновых фронтов в общих и в вариационных системах существенно различны в окрестностях "особых" точек нестрогой гиперболичности, в то время как в остальных точках распространение волн в обоих случаях одинаково.

Главные результаты этой главы приведены в §§8.3–8.4, в которых мы приводим нормальные формы особенности световых гиперповерхностей, систем лучей и лежандровых многообразий[2)]. Для простоты обсуждается только случай линейных гиперболических по Петровскому систем дифференциальных уравнений с частными производными, выводящихся из вариационных принципов.

Читатель сможет распространить большинство результатов на случай внутреннего рассеяния коротких волн, определяемых вариационными принципами, содержащими малые параметры, подобно уравнению Шрёдингера.

Математически, главные результаты этой главы описывают нормальные формы особенностей гиперповерхностей в контактных многообразиях. Так как эти объекты встречаются также в других областях математики и физики, эти результаты имеют применение и вне теории распространения волн (например, в теории неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и в теории бифуркаций релаксационных систем с одной быстрой и двумя медленными переменными).

[2)] В §8.5, написанном И.А.Богаевским, приведены его недавние результаты, дополняющие изложение исследованием соответствующих волновых фронтов.

8.1. Гиперболические системы и их световые гиперповерхности

Геометрическая оптика лучей и фронтов, задаваемых системой гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными, является геометрией гиперповерхности в контактном пространстве проективизованного кокасательного расслоения пространства-времени. Эта гиперповерхность, называемая световой гиперповерхностью, есть множество нулей (главного) символа. В теории дифференциальных уравнений с частными производными характеристики этой гиперповерхности в контактном многообразии контактных элементов странным образом называются "бихарактеристиками".

Эти кривые (и их проекции на пространство-время и физическое пространство) называются физическими лучами. Лежандровы подмногообразия световой гиперповерхности, спроектированные в пространство-время, определяют в пространстве-времени гиперповерхность "большого фронта". Эта гиперповерхность описывает распространение волн: его сечения изохронами являются мгновенными фронтами.

Чтобы зафиксировать обозначения, напомню известные определения световой гиперповерхности и гиперболической системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Начнём с системы линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами:

$$P(D)u(q) = 0.$$

Зафиксируем 3 числа:

$m = \dim u$, число уравнений (и неизвестных функций);

$d = \operatorname{ord} P$, порядок дифференциального оператора P;

$n = \dim q$, число аргументов.

В координатах, P есть квадратная m-матрица, элементами которой являются однородные многочлены степени d от $(\partial/\partial q_1, \dots, \partial/\partial q_n)$. Другими словами, аргумент q является точкой *базового пространства* $\mathbf{R}^n$, вектор $u(q)$ принадлежит *слою* $\mathbf{R}^m$, неизвестная вектор-функция u является сечением (тривиального) векторного расслоения (и P отображает его в другое векторное расслоение той же размерности).

Так как оператор P инвариантен относительно сдвигов, рассмотрим собственные функции трансляций, являющиеся гармоническими волнами $u = e^{i(p,q)}w$, где $p \in \mathbf{R}^{n*}$ называется *волновым вектором* и

$w \in \mathbf{R}^m$ называется *вектором амплитуды*. Применение P к гармонической волне даёт

$$P(D)u = \boldsymbol{\sigma}(ip)u,$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — квадратная m-матрица, элементами которой являются однородные многочлены степени d от $(p_1, \ldots, p_n)$. Этот матричный многочлен называется *матричным символом* системы. Используя $\boldsymbol{\sigma}$, можем выразить оператор нашей системы

$$P(D) = \boldsymbol{\sigma}\left(\frac{D}{i}\right) = \boldsymbol{\sigma}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_n}\right).$$

Матричный символ является однородным полиномиальным отображением из пространства волновых векторов в пространство линейных операторов на слое.

Определение 1. *Символом* системы $P(D)u = 0$ называется определитель матричного символа,

$$\sigma = \det \boldsymbol{\sigma}.$$

Таким образом, символ является однородным многочленом степени md, определённым на пространстве волновых векторов $\mathbf{R}^{n*}$.

Определение 2. *Конусом Френеля* называется множество нулей символа. Это множество является алгебраическим конусом в пространстве волновых векторов, и оно инвариантно связано с исходной системой (не меняется при линейных заменах координат в базе и в слое).

Замечание. Уравнение $\sigma = 0$ называется также *дисперсионным соотношением*, или *характеристическим уравнением*. Конус Френеля называется также *характеристическим конусом*.

Определение 3. *Гиперповерхностью Френеля* называется множество нулей символа в проективном пространстве

$$\mathbf{R}P^{n-1} = (\mathbf{R}^{n*} \setminus 0)/(\mathbf{R} \setminus 0)$$

контактных элементов. Это — проективная алгебраическая гиперповерхность степени md.

Замечание. Иногда полезно рассматривать сферу, состоящую из (ко)ориентированных контактных элементов, и принадлежащую ей гиперповерхность Френеля.

Определение 4. Вещественная алгебраическая гиперповерхность степени N называется *гиперболической по отношению к некоторой точке*, если все её пересечения с вещественными прямыми, проходящими через эту точку, вещественны.

Гиперповерхность называется *строго гиперболической по отношению к точке*, если все точки этих пересечений различны.

Точка, по отношению к которой гиперповерхность гиперболична, называется *времениоподобной точкой.*

Гиперболическая гиперповерхность общего положения гиперболична по отношению ко многим временноподобным точкам.

В линейном пространстве, отвечающем проективному, гиперболическая гиперповерхность представляется конусом, который также гиперболичен. Временноподобные точки представляются прямыми, называемыми *временноподобными направлениями.*

Определение 5. Система дифференциальных уравнений с частными производными называется *гиперболической* (по отношению к временноподобному направлению), если её гиперповерхность Френеля гиперболична (по отношению к соответствующей временноподобной точке).

Замечание. Временноподобная точка есть контактный элемент на базовом пространстве. Следовательно, система гиперболична по отношению к *функции* (*времени*), а не по отношению к прямой в базовом пространстве.

Теперь мы рассмотрим систему с переменными коэффициентами. Выраженные в локальных координатах $(q_1, \ldots, q_n)$ на базовом многообразии, элементы матрицы $P = P(D, q)$ являются неоднородными многочленами степени d от $(\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial q_n)$ с коэффициентами — гладкими функциями от q. Эта матрица зависит также от (локальных) тривиализаций векторных расслоений, задающих координаты $(u_1, \ldots, u_m)$ и $(P_1, \ldots, P_m)$ на слоях. Фиксация точки q называется *замораживанием* системы.

Определение 6. *Главным* (*матричным*) *символом* линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных называется (матричный) символ системы с постоянными коэффициентами, полученной фиксацией точки на базовом пространстве и отбрасыванием членов оператора, содержащих производные меньшего порядка.

Замечание. Таким образом, главный (матричный) символ является однородной полиномиальной функцией (оператором) степени $md\,(d)$,

определённой на кокасательном пространстве $T^*_q B$ базового многообразия (оператор действует на соответствующем слое). Эта функция (оператор) не зависит ни от выбора локальных координат на базовом многообразии, ни от тривиализации расслоений. Таким образом мы получили *отображение главного символа*

$$\boldsymbol{\sigma} : T^*B \to \mathrm{Hom}(\text{слой},\text{слой}')$$

и *функцию главного символа*

$$\sigma : T^*B \to \mathbf{R}, \quad \sigma(p,q) = \det \boldsymbol{\sigma}(p,q),$$

являющуюся однородным многочленом от импульсов p (значения σ принадлежат линейному детерминантному расслоению над B).

Определение 7. *Световым конусом* (системы с переменными коэффициентами) называется объединение конусов Френеля главных частей замороженных систем во всех точках базового многообразия; он определяется уравнением $\sigma(p,q) = 0$. Это же уравнение задаёт *световую гиперповерхность* в пространстве проективизованного кокасательного расслоения базового многообразия; эта гиперповерхность есть объединение гиперповерхностей Френеля главных частей замороженных систем.

Световая гиперповерхность

$$H \subset PT^*B$$

состоит из направлений волновых фронтов в различных точках базового многообразия, которые соответствуют гармоническим волновым решениям главных частей замороженных систем.

Определение 8. Система линейных дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами называется *гиперболической по отношению к функции времени*, определённой на базовом многообразии, если её световая гиперповерхность гиперболична по отношению к дифференциалу этой функции во всех точках базового многообразия.

Замечание. Гиперболичность может быть определена также по отношению к слоению коразмерности 1 или даже по отношению к распределению контактных элементов на базовом многообразии (интегрируемому или нет).

Световая гиперповерхность есть объединение алгебраических проективных гиперповерхностей, принадлежащих различным слоям расслоения контактных элементов базового пространства. Для системы и точки общего положения эти алгебраические гиперповерхности неособы (в этом случае они строго гиперболичны). Но в некоторых точках базового многообразия эти гиперповерхности могут становиться особыми. Изучение этих особенностей для типичных вариационных гиперболических систем и есть главная цель настоящей главы.

Пример. Рассмотрим поле $u(t,x)$ со значениями в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$, заданное на пространстве-времени $\{(t,x)\} = \mathbf{R}^n$, $n = 1 + D$, вариационным принципом с лагранжианом $L = T - U$, где $T = \int (\partial u/\partial t)^2\, dx$ — кинетическая энергия, а потенциальная энергия есть интеграл от некоторой положительно определённой квадратичной формы от первых производных поля по (пространственным) координатам x. Коэффициенты этой формы в общем случае являются функциями от t и x, но мы для начала рассмотрим случай постоянных коэффициентов.

Уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$Pu = 0, \qquad P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A,$$

где A — некоторая симметрическая матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы второго порядка по переменным x, $A = \boldsymbol{a}(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_D)$.

Лемма. *Система Эйлера–Лагранжа гиперболична, если потенциальная энергия положительно определена.*

Доказательство. Обозначим через $q = (t,x)$ точки пространства-времени $\mathbf{R}^n$ и через $p = (\omega, k) \in \mathbf{R}^{n*}$ соответствующие волновые векторы. Символ системы равен

$$\sigma(p) = \det(\boldsymbol{a}(ik) - \omega^2 E).$$

Матрица $\boldsymbol{a}(ik)$ положительно определена для любого $k \neq 0$ (так как потенциальная энергия положительно определена).

Рассмотрим функцию времени как вектор $p_0 = (1,0) \in \mathbf{R}^{n*}$. Гиперболичность (по отношению к функции времени) означает, что все $2m$ корней λ характеристического уравнения $\sigma(p + \lambda p_0) = 0$ вещественны (для любого p). Но корни характеристического уравнения

$$\det(\boldsymbol{a}(ik) - (\omega + \lambda)^2 E) = 0$$

равны $\lambda = -\omega \pm \sqrt{\alpha_j(k)}$, где $\alpha_j(k)$ — собственные значения матрицы $\boldsymbol{a}(ik)$. Так как эта матрица положительно определена (или равна нулю), все $2m$ корня λ вещественны.

По существу то же самое доказательство работает и в случае вариационного принципа с переменными коэффициентами: для того чтобы выписать символ, достаточно начать с вариационного принципа с замороженными коэффициентами.

Вариационный принцип определяет отображение пространства кокасательного расслоения базового многообразия (в предыдущем примере — это пространство-время) в пространство *симметрических* $(m \times m)$-матриц (более точно, в симметрический тензорный квадрат пространства, двойственного слою). Это отображение однородно (элементы матрицы являются однородными многочленами степени $d = 2r$, если вариационный принцип содержит производные порядка r). Обратно, любая симметрическая матрица с такими свойствами является главным матричным символом системы Эйлера–Лагранжа некоторого вариационного принципа с квадратичным лагранжианом, включающим r-е производные.

Определение. Вариационный принцип называется *гиперболическим*, если гиперболична его система Эйлера–Лагранжа (гиперболичны поверхности Френеля) по отношению к некоторой функции "времени".

8.2. Особенности световых гиперповерхностей вариационных систем

Гиперповерхности Френеля типичных гиперболических вариационных принципов являются особыми в некоторых точках базового многообразия (в которых гиперболичность не строгая). Сейчас мы будем изучать особенности гиперповерхностей Френеля и световых гиперповерхностей, встречающихся при рассмотрении типичных гиперболических вариационных принципов.

Зафиксируем "сигнатуру" (m, d, n): m — число неизвестных, d — порядок дифференциального оператора, n — число независимых переменных (если рассмотрения глобальны, то вдобавок фиксируем векторное расслоение). Квадратичные вариационные принципы с фиксированной сигнатурой образуют линейное функциональное пространство. Гиперболические вариационные принципы образуют замкнутое множе-

ство в этом пространстве. Мы будем изучать внутренние точки этого множества.

Внутренние точки пространства гиперболических многочленов являются строго гиперболическими многочленами. Для гиперболических систем, задаваемых вариационными принципами, и, в частности, для гиперболических систем Эйлера–Лагранжа зто утверждение не верно (см. [182]–[186]).

Пример. Квадратичный лагранжиан из §8.1, равный разности между положительно определённой "кинетической энергией" и положительно определённой "потенциальной энергией", является внутренней точкой области гиперболических вариационных принципов сигнатуры $(m, 2, n)$. При $m > 2$ этот лагранжиан может определять не строго гиперболичную систему, так как положительно определённая симметрическая матрица a может иметь кратные собственные значения.

Чтобы избежать ненужных сложностей, мы будем рассматривать локальную ситуацию, в которой координаты на слоях фиксированы (расслоение тривиализовано). В этом случае главный матричный символ является однородным отображением

$$\boldsymbol{\sigma} : T^*B \to S^2\mathbf{R}^m \approx \mathbf{R}^{m(m+1)/2},$$

где $S^2\mathbf{R}^m$ — пространство симметрических m-матриц, а компоненты $\boldsymbol{\sigma}$ — однородные многочлены степени d на каждом кокасательном пространстве.

Определение. Полиномиальное отображение степени d вещественной прямой в пространство квадратичных форм от m переменных,

$$f : \mathbf{R} \to F = S^2\mathbf{R}^m \approx \mathbf{R}^{m(m+1)/2},$$

называется *гиперболическим отображением*, если уравнение $\det f(s) = 0$ имеет md вещественных корней (подсчитанных с кратностями).

Все такие отображения образуют (полуалгебраическое) пространство

$$\mathrm{Hyp}(m, d).$$

Вариационная гиперболическая система над пространством-временем B размерности $n = D+1$ задаёт (в каждой точке из B) отображение сферы:

$$F : S^{D-1} \to \mathrm{Hyp}(m, d).$$

Эта сфера принадлежит D-мерной гиперплоскости в T^*B, трансверсальной в нуле вектору $v = dt$ (где t — функция времени).

Для определения значения F в точке p этой единичной сферы рассмотрим главный символ в точке $p + sv$ как многочлен от s,

$$(F(p))(s) = \det \boldsymbol{\sigma}(p + sv).$$

Таким образом, возникают следующие задачи:

1) вычислить гомотопические группы

$$\pi_i(\mathrm{Hyp}(m, d));$$

2) понять, какие элементы этих групп могут быть представлены гиперболическими (псевдо)дифференциальными системами;

3) найти связные компоненты пространства гиперболических вариационных систем фиксированной сигнатуры (m, d, n).

Если эти задачи имеют нетривиальные ответы, то подобные проблемы интересны для расслоений над B. Можно предположить, что наличие точек нестрогой гиперболичности необходимо для реализации некоторых классов, и что можно использовать особенности световой гиперповерхности для определения характеристических классов гиперболических вариационных принципов.

Световая гиперповерхность есть прообраз в PT^*B многообразия вырожденных матриц относительно отображения, заданного главным матричным символом.

Для иэучения особенностей световых гиперповерхностей мы, во-первых, опишем особенности соответствующего универсального объекта: многообразия вырожденных симметрических матриц.

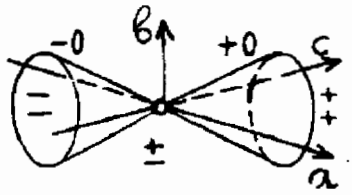
Эта гиперповерхность является особым конусом, стратифицируемым по рангу и сигнатуре. Пусть $N \approx \mathbf{R}P^{m(m+1)/2-1}$ обозначает проективное пространство ненулевых квадратичных форм от m переменных, рассматриваемых с точностью до ненулевого скалярного множителя. Хорошо иэвестен следующий реэультат:

Теорема. *Проективное пространство N имеет алгебраическую фильтрацию $N \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, где N_r есть многообразие классов форм, коранг которых не меньше чем r. Коразмерность N_r в N равна $r(r+1)/2$. След многообразия N_1 на любом многообразии размерно-*

сти $r(r+1)/2$, трансверсальном в N гладкому многообразию $N_r \setminus N_{r+1}$, в точке многообразия N_r локально диффеоморфен многообразию вырожденных квадратичных форм в линейном пространстве квадратичных форм от r переменных.

Пример. Коразмерность N_2 равна 3. След многообразия вырожденных форм на любом 3-многообразии, трансверсальном многообразию форм коранга 2, локально диффеоморфен квадратичному конусу $b^2 = ac$ (рис. 119).

Рис. 119. Стратификация пространства бинарных квадратичных форм



Действительно, это уравнение является уравнением конуса вырожденных квадратичных форм $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Рассмотрим теперь гладкие отображения $f : X \to N$ многообразия X коразмерности k в многообразие классов квадратичных форм. Отображение f общего положения трансверсально описанной выше фильтрации. Следовательно из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. *Существует открытое всюду плотное множество "типичных" отображений f, трансверсальных всем многообразиям $N_r \setminus N_{r+1}$ таких, что:*

1) *формы коранга r встречаются в образе f только при $r(r+1)/2 \leq k$;*

2) *прообраз $f^{-1}(N_1)$ множества вырожденных форм есть гиперповерхность в X, особые точки которой образуют подмногообразие коразмерности 2 в этой гиперповерхности;*

3) *эта гиперповерхность в своей типичной особой точке локально диффеоморфна произведению двумерного квадратичного конуса на гладкое многообразие, тогда как нетипичные особые точки образуют подмногообразие коразмерности 5 в этой гиперповерхности.*

Действительно, типичные особые точки принадлежат множеству $f^{-1}(N_2 \setminus N_3)$, а нетипичные особые точки принадлежат множеству $f^{-1}(N_3)$, коразмерность которого в X равна 6.

Световая гиперповерхность является прообразом многообразия N_1 вырожденных форм под действием (проективизированного) отображения, задаваемого главным матричным символом. Таким образом, следствие доставляет информацию об особенностях световых гиперповерхностей, задаваемых типичными вариационными принципами.

Замечание. Отображение, задаваемое главным матричным символом дифференциального уравнения, не может быть произвольным, так как главный матричный символ есть однородный многочлен от кокасательного вектора. Тем не менее, предыдущие соображения общности положения работают и в этой ситуации, поскольку существуют деформации вариационного принципа такие, что образ производной главного матричного символа по параметрам накрывает всё касательное пространство к N (для любой точки пространства кокасательного расслоения, не принадлежащей нулевому сечению).

Пример. Рассмотрим гиперболические вариационные принципы в пространстве-времени размерности $n = D + 1 = 2$ (размерность физического пространства равна 1).

Из предыдущей теории вытекает

Теорема. *Типичные особенности световых гиперповерхностей гиперболических вариационных принципов с одномерным физическим пространством диффеоморфны квадратичным конусам (с локальной нормальной формой $x^2 + y^2 = z^2$, где (x, y, z) — локальные координаты на многообразии контактных элементов пространственно-временной плоскости).*

Следовательно, особенности — это изолированные точки, и соответствующее "внутреннее рассеяние" происходит в некоторые моменты времени в некоторых особых точках.

Эта же нормальная форма $x^2 + y^2 = z^2$ описывает (с точностью до диффеоморфизмов) простейшую особенность световой гиперповерхности в многообразии контактных элементов пространства-времени бóльшей размерности (с локальными координатами $x, y, z, u, v, \ldots$).

При $D = 2$ (две пространственные переменные) эти особые точки образуют двумерное "многообразие вершин" на четырёхмерной световой гиперповерхности в пятимерном пространстве контактных элементов. В этой размерности других особенностей нет. Проекция многообразия вершин на трёхмерное пространство-время есть двумерное многообразие. Следовательно, рассеяние возможно в любой момент в точках зависящей от времени кривой в физическом 2-пространстве

(эквивалентно, в любой точке физического 2-пространства в некоторый момент времени, зависящий от этой точки).

При $D = 3$ (три пространственные переменные) размерность световой гиперповерхности равна 6, следовательно размерность "многообразия вершин" типичного вариационного принципа равна 4. Кроме этих простых особенностей (типа квадратичного конуса вдоль многообразия вершин), может существовать кривая особенностей типа N_3. Проекция многообразия вершин на четырёхмерное пространство-время может его накрывать. Таким образом, рассеяние возможно в любой точке и в любой момент времени (при этом, разумеется, направление особой волны специально, так же, как это было в мéньших размерностях).

Особенность световой гиперповерхности говорит о том, что с распространением волн творится что-то необычное. Чтобы понять особенности соответствующих систем лучей и фронтов, нам необходима информация об особенности световой гиперповерхности как поверхности в контактном пространстве. Таким образом, мы пришли к следующей задаче: в контактном пространстве контактоморфизмами привести к локальной нормальной форме особую поверхность, диффеоморфную квадратичному конусу.

8.3. Контактные нормальные формы особенностей квадратичных конусов

Рассмотрим гиперповерхность, диффеоморфную квадратичному конусу $x^2 + y^2 = z^2$ в контактном пространстве размерности $2n + 1$.

Теорема. *Пара, образованная конусом и типичной контактной структурой, приводится (в некоторой окрестности вершины конуса) к нормальной форме конуса*

$$p_1^2 \pm q_1^2 = z^2 + cz^3 \quad (n = 1), \qquad p_1^2 \pm q_1^2 = q_2^2 \quad (n > 1),$$

и нормальной форме Дарбу

$$dz + \frac{p\,dq - q\,dp}{2} = 0$$

контактной структуры.

Замечание. Эта теорема была доказана на уровне формальных рядов в [182] для $n = 1$ и в [183] для $n > 1$. В аналитическом (или голоморфном) случае ряды, определяющие приводящий диффеоморфизм, в общем случае расходятся.

Возможно, существует C^∞-диффеоморфизм, приводящий коническую особенность к предыдущей нормальной форме (набросок доказательства для $n = 1$ может быть найден в [182]; однако, детали не опубликованы).

Существует интересная связь между между редукцией к нормальной форме контактных структур на трёхмерной окрестности вершины квадратичного конуса и теорией нормальных форм эквивариантных плоских векторных полей в особых точках.

Во-первых, достаточно привести к нормальной форме ограничение контактной структуры на конус (детали см. в [182] или в [8]). Для приведения к нормальной форме 1-формы на поверхности конуса рассмотрим двулистное "накрытие" конуса $x^2 + y^2 = z^2\,(z \geq 0)$ (u, v)-плоскостью:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2.$$

Лемма 1. *Дифференциальная* 1*-форма на* 3*-пространстве индуцирует на плоскости форму* $P\,du + Q\,dv$*, коэффициентами которой являются нечётные функции и дифференциал которой в начале координат равен нулю. И обратно, любая плоская форма с этими свойствами индуцируется из некоторой* 1*-формы на пространстве.*

Будем называть диффеоморфизм (u, v)-плоскости *нечётным*, если он коммутирует с центральной симметрией $(u, v) \mapsto (-u, -v)$.

Лемма 2. *Любой нечётный (локальный) диффеоморфизм* (u, v)*-плоскости индуцирован диффеоморфизмом объемлющего* 3*-пространства, сохраняющим конус.*

Эти леммы сводят нашу задачу к локальной орбитальной классификации нечётных векторных полей с нулевым следом (суммой собственных значений в начале координат) по отношению к группе нечётных диффеоморфизмов.

Из стандартной теории нормальных форм векторных полей (см., например, [17]) вытекает

Лемма 3. *Формальный (или* C^∞*) нечётный диффеоморфизм и умножение на чётную функцию приводят типичное нечётное векторное*

поле с нулевым следом либо к гиперболической нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 + uv + c(uv)^2), \\ \dot{v} = v(-1 + uv + c(uv)^2), \end{cases}$$

либо к эллиптической нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{u} = v + u(u^2 + v^2) + cu(u^2 + v^2)^2, \\ \dot{v} = -u + v(u^2 + v^2) + cv(u^2 + v^2)^2. \end{cases}$$

Возвращаясь от векторных полей к 1-формам на конусе, а затем к 1-формам на 3-пространстве, можно получить из этих формул утверждение теоремы. Эта редукция объясняет также присутствие в теореме модуля c: он инвариантно связан с особенностью соответствующего плоского нечётного векторного поля.

Замечание. Приведённая выше редукция полезна также для понимания поведения характеристик на поверхности конуса: они соответствуют траекториям описанных выше векторных полей.

Эллиптический случай соответствует знаку "+" в теореме. В линейной аппроксимации, траектории на (u, v)-плоскости являются окружностями. Характеристики на конусе являются спиралями, близкими круговым "горизонтальным" сечениям $z = \text{const}$. Изменение высоты z монотонно вдоль характеристик (на одной полé конуса характеристики медленно приближаются к вершине, на другой — медленно удаляются от неё).

Гиперболический случай соответствует знаку "−" в теореме. В этом случае характеристики на поверхности конуса очень похожи на вертикальные сечения $z = \text{const}$. Две из них являются гладкими кривыми (аналитическими в аналитическом случае), содержащими вершину. Эти "сепаратрисы" на поверхности конуса соответствуют координатным осям $u = 0$ и $v = 0$ на плоскости. Их существование следует из теоремы Адамара–Перрона (см., например, [17]).

В предыдущих следствиях теоремы о нормальных формах не требуется сходимость рядов, задающих приводящие диффеоморфизмы, так как используется приведение только нескольких первых членов ряда Тейлора. Таким образом, для получения топологической информации о поведении характеристик, нет необходимости полностью доказывать теорему о нормальных формах: достаточно нормализовать несколько

первых членов ряда Тейлора. Эта нормализация требует небольших вычислений, которые здесь я опускаю (см. [182]).

Замечание. Нормальные формы конуса в контактном 3-пространстве могут быть интерпретированы как описание типичной особенности неявного дифференциального уравнения, зависящего от параметра.

Поверхность $F(x, y, p) = 0$, задаваемая типичным неявным уравнением в контактном пространстве 1-струй функций от одной переменной (снабжённом естественной контактной структурой $dy = p\,dx$) не особа.

Однако, если уравнение зависит от параметра, то при некоторых значениях параметра эта поверхность может становиться особой. В простейших однопараметрических семействах встречаются только простейшие особенности, а именно морсовские конические точки.

Таким образом, в контексте теории неявных обыкновенных дифференциальных уравнений коническая особенность возникает только в момент перестройки. Возникает естественная задача изучения бифуркаций: мы должны исследовать также уравнения, соответствующие одно и двуполостному гиперболоидам, близким поверхности конуса. Это также может быть сделано методами работы [182] (см. в ней §2, замечание 3).

В теории релаксационных колебаний наша задача встречается в момент перестройки типичных семейств систем с одной быстрой и двумя медленными переменными, зависящих от одного параметра. Контактная структура в трёхмерном фазовом пространстве есть поле плоскостей, порождённых (вертикальным) направлением быстрого движения и (произвольным) направлением малого возмущающего поля. Быстрая релаксация отправляет фазовую точку вдоль вертикальной прямой на медленную поверхность, на которой отсутствует движение с быстрой скоростью. Медленная эволюция по этой поверхности протекает вдоль характеристик медленной поверхности нашего контактного пространства.

В системе общего положения медленная поверхность является гладкой. Однако, если система зависит от одного параметра, то при некоторых значениях параметра эта медленная поверхность приобретает морсовскую особенность (квадратичный конус). Как и в случае неявных обыкновенных дифференциальных уравнений, естественной задачей является изучение полных перестроек. Приведённая выше нормальная форма конуса составляет ядро решения этой задачи.

8.4. Особенности систем лучей и волновых фронтов в точках нестрогой гиперболичности

Здесь мы применяем полученную выше нормальную форму особенностей световых гиперповерхностей к изучению распространений волн, задаваемых гиперболическими вариационными принципами.

Во-первых, рассмотрим случай $D = 1$ одномерного физического пространства. Световая поверхность в 3-пространстве контактных элементов двумерного пространства-времени для гиперболического вариационного принципа общего положения имеет особенности типа квадратичного конуса, которые приводятся контактоморфизмами к нормальным формам, приведённым в §8.3.

Теорема. *Для гиперболических систем эллиптический случай (знак "+" в нормальной форме* §8.3) *невозможен.*

Доказательство. Световая гиперповерхность находится в пространстве проективизованного кокасательного расслоения $PT^*\mathbf{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbf{R}^2$ над плоскостью пространства-времени. Слои этого расслоения являются лежандровыми подмногообразиями. Касательная прямая к слою в вершине конуса принадлежит контактной плоскости. В эллиптическом случае эта контактная плоскость ($dz = 0$) пересекается с вещественным конусом только в вершине. Следовательно, некоторые из близлежащих слоёв не пересекают световую гиперповерхность в некоторой окрестности особой точки, тогда как другие слои пересекают её дважды. Таким образом, характеристическое уравнение должно иметь комплексные корни в некоторых точках пространства-времени, то есть система не гиперболична.

Рассмотрим гиперболический случай (знак "−" в нормальной форме §8.3).

Теорема. *Проекция объединения характеристик — сепаратрис из световой поверхности конуса на плоскость пространства-времени (вдоль слоёв кокасательного расслоения) состоит из 2-х гладких (аналитических) квадратично касающихся кривых* (1–2) *и* (3–4). *Проекции характеристик первого (второго) семейства — кривые* (1–4) (*соответственно* (2–3)) (рис. 120).

Это следует из того, что касательное прямые к сепаратрисам в вершине принадлежат контактной плоскости и, следовательно, компланарны вертикальному направлению (касающемуся слоя).

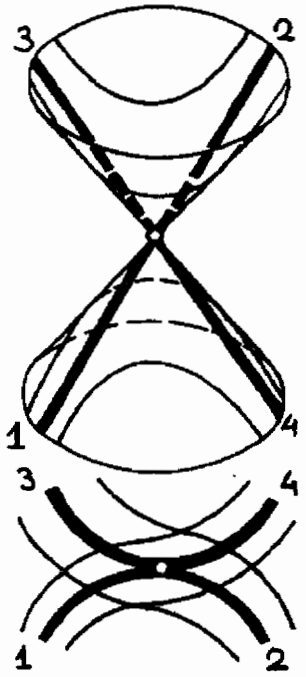


Рис. 120. Характеристики световой поверхности и их проекции в пространство-время

Квадратичное отклонение одной спроектированной кривой от другой есть проявление невырожденности контактной структуры.

Будем называть проекции в пространство-время (би)характеристик *лучами* (в этой размерности они являются также большими фронтами). Два семейства лучей, соответствующих полам конуса, касаются друг друга в особой точке (образе вершины конуса) и гладки (аналитичны) вне её.

Рассмотрим однопараметрическое семейство лучей, содержащих особый луч, проходящий через особую точку. Особый луч является ломаной линией: он состоит из двух гладких (аналитических) частей, имеющих общую касательную в особой точке и разные кривизны. Близлежащие лучи гладки, но, разумеется, присутствие особенности проявляет себя в виде рассеяния семейства в особой точке.

Рассмотрим гладкую (аналитическую) линию, трансверсальную в некоторой точке (на конечном расстоянии от особой точки) "приходящей" части особого луча из первого семейства. Рассмотрим аналогичную линию, пересекающую "уходящую" часть особого луча (рис. 121).

Лучи первого семейства трансверсально пересекают обе линии и, следовательно, определяют непрерывное "отображение рассеяния", отображающее точку пересечения (приходящего) луча с первой линией в точку пересечения того же (уходящего) луча со второй линией. Наше семейство лучей имеет вид семейства параллельных прямых. В некоторой окрестности точки на приходящем особом луче оно может быть

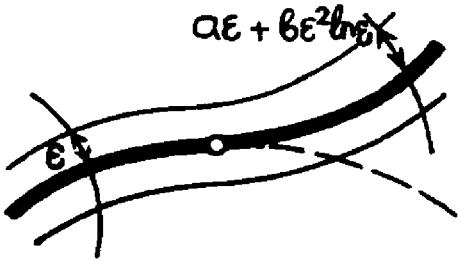


Рис. 121. Рассеяние лучей на плоскости пространства-времени

преобразовано в семейство параллельных прямых при помощи некоторого диффеоморфизма (в сущности, это достигается с помощью первой трансверсальной линии). Это же семейство лучей так же может быть преобразовано в семейство параллельных прямых в некоторой окрестности точки на уходящем луче. Однако, эти диффеоморфизмы не согласованы. *Отображение рассеяния* измеряет степень несогласованности этих двух параметризаций одного и того же множества лучей.

Пусть w обозначает расстояние от точки входящего луча до особого луча, измеренное вдоль трансверсальной линии точек входа. Если бы семейство было гладким, то расстояние w' от точки выхода этого же луча до особого луча, измеренное вдоль трансверсальной линии точек выхода, являлось бы гладкой функцией от w, и её ряд Тейлора имел бы вид $w' = aw + bw^2 + \ldots$. Нормальные формы из §8.3 вызывают особенность в асимптотическом разложении, а именно $w' = aw + bw^2 \ln w + \ldots$. Этот логарифм является проявлением рассеяния.

Разумеется, с физической точки зрения этот эффект слабого рассеяния не так важен, как возможность обмена энергией между волнами обоих семейств в особых точках.

Рассмотрим теперь случай $D = 2$ (двумерное физическое пространство). Мне не известно, возможен ли эллиптический случай ("+" в нормальной форме особенности световой гиперповерхности) для типичных гиперболических вариационных систем[3)]. Мы рассмотрим гиперболический случай ("−" в нормальной форме), который, очевидно, возможен.

После естественной замены переменных, нормальная форма может быть записана в виде

$$H = p_1 q_1 + p_2^2, \qquad dz = \frac{p_1\,dq_1 - q_1\,dp_1 + p_2\,dq_2 - q_2\,dp_2}{2}. \tag{1}$$

[3)] Возможность эллиптического случая недавно доказана П.Браамом и Г.Дейстермаатом.

Уравнения характеристик гиперповерхности $H = 0$ таковы:

$$\dot{p}_1 = -p_1, \qquad \dot{q}_1 = q_1, \qquad \dot{p}_2 = 0, \qquad \dot{q}_2 = 2p_2, \qquad \dot{z} = 0 \tag{2}$$

(где точка обозначает производную по вспомогательной переменной t вдоль характеристик; эта переменная t не совпадает с функцией времени $T(p, q, z)$ по отношению к которой система гиперболична).

Мгновенный волновой фронт на физической плоскости представляется в контактном 5-многообразии некоторой интегральной кривой контактной структуры, принадлежащей световой гиперповерхности $H = 0$. Коразмерность входящей сепаратрисы $q_1 = 0$ в световой гиперповерхности равна 1. Следовательно, типичный волновой фронт проходит через особенность в изолированные моменты времени в изолированных точках.

Предположим, что интегральная кривая, представляющая мгновенный фронт, трансверсально пересекает входящую сепаратрису в точке с координатами $p_1 = 1$, $p_2 = q_1 = q_2 = z = 0$ (общий случай может быть сведён к этому очевидной заменой переменных). Рассмотрим характеристики световой гиперповерхности, выходящие из точек нашей кривой. Эти характеристики образуют двумерное лежандрово подмногообразие в световой гиперповерхности (эта лежандрова поверхность образована контактными элементами, касающимися большого фронта, порождённого нашим мгновенным фронтом в пространстве-времени; большой фронт есть поверхность в трёхмерном пространстве-времени, заметённая мгновенными фронтами).

Лемма. *Описанная выше лежандрова поверхность приводится к нормальной форме*

$$p_1 = e^{-t}, \quad p_2 = u, \quad q_1 = -u^2 e^t, \quad q_2 = 2ut, \quad z = -\frac{u^2}{2} \tag{3}$$

контактоморфизмом, сохраняющим световую гиперповерхность $H = 0$ (u, t — *параметры на поверхности*).

Доказательство. Рассмотрим пересечение этой лежандровой поверхности с гиперповерхностью $p_1 = 1$. Эта кривая трансверсальна входящей сепаратрисе. В некоторой окрестности нашей точки локальными координатами на гиперповерхности (1) являются (p_1, p_2, q_2, z). В этих координатах входящая сепаратриса задаётся уравнением $p_2 = 0$. Следовательно, вдоль кривой $dp_2 \neq 0$. Таким образом, ограничение p_2 на эту кривую может быть выбрано в качестве параметра u вдоль этой

кривой:

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = u, \qquad q_1 = -u^2, \qquad q_2 = f(u), \qquad z = g(u).$$

Симплектоморфизм $(p_1, p_2, q_1, q_2) \mapsto (p_1, p_2, q_1, q_2 - f(p_2))$ убивает f, сохраняя H. Соответствующий контактоморфизм приводит g к виду $-u^2/2$, так как вдоль нашей интегральной кривой контактной структуры $dz = p_1\, dq_1/2 = -u\, du$. Таким образом, наша параметризованная кривая приведена к виду

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = u, \qquad q_1 = -u^2, \qquad q_2 = 0, \qquad z = -\frac{u^2}{2}.$$

Характеристики нашей гиперповерхности $H = 0$, выходящие из точек этой кривой, заметают лежандрову поверхность, описанную в лемме (мы использовали уравнения (2) характеристик).

Используем нормальную форму (3) для описания особенности большого фронта в пространстве-времени и перестройки моментальных фронтов. Большой фронт есть проекция лежандровой поверхности (3) из 5-пространства в 3-пространство вдоль слоёв проективизованного кокасательного расслоения. В отличие от случая одной пространственной переменной, в случае двух пространственных переменных, по-видимому, нет отличий между типичными проекциями и типичными лежандровыми проекциями[4]. Ниже я опишу особенности типичных проекций поверхности (3) в трёхмерное пространство-время.

Окончательным результатом является следующее описание типичных перестроек типичных нележандровых проекций (рис. 122), которые мы будем называть *квазифронтами*, для отличия от истинных фронтов, являющихся лежандровыми проекциями, описанных в §8.5.

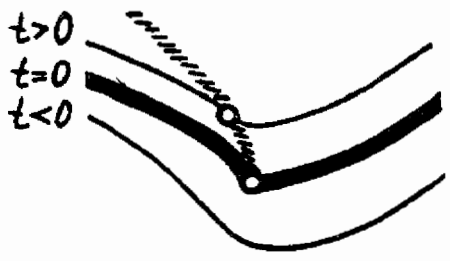


Рис. 122. Перестройка мгновенных квазифронтов, движущихся в плоскости

Мгновенный квазифронт, бывший гладкой кривой до момента перестройки, приобретает особую точку. В момент перестройки квазифронт образует угол. Обе ветви этого ломанного квазифронта имеют касательные в особой точке (отличающиеся друг от друга), но

[4] На самом деле такие отличия есть: они описаны в §8.5.

кривизны бесконечны. Уравнение каждой ветви в особой точке имеет вид $y = x/\ln x^2 + o(x/\ln x^2)$.

После момента перестройки квазифронт имеет непрерывные касательные в каждой точке. Однако, он имеет особые точки, в которых кривизна бесконечна. Уравнение квазифронта в некоторой окрестности особой точки может быть записано в виде $y = x/\ln x^2 + o(x/\ln x^2)$.

Для вывода этих результатов, введём новые параметры (A, B) на поверхности (3), определяя их при помощи двулистного "накрытия" полы конуса плоскостью:

$$p_1 = A^2, \quad -q_1 = B^2, \quad p_2 = AB. \tag{4}$$

Тогда $u = AB$ и $t = -\ln A^2$. Следовательно поверхность (3) параметризуется следующим образом:

$$p_1 = A^2,\ p_2 = AB,\ q_1 = -B^2,\ q_2 = -2AB\ln A^2,\ z = -\frac{A^2B^2}{2}. \tag{5}$$

Координаты проекции этой поверхности в 3-пространство являются чётными функциями переменных (A, B) и могут быть получены как результат подстановки пяти функций (5) в некоторые гладкие функции $F_i(p_1, p_2, q_1, q_2, z)$.

Выберем начало координат пространства-времени в особой точке. Функции F_i в этой точке равны нулю.

Рассмотрим ряды Тейлора функций F_i в начале координат. Подставляя (5), мы получим квази-тейлоровы ряды, квазимономы которых имеют вид $A^kB^l(\ln A^2)^m$, $m \le k$. В естественной иерархии квазимономов по их порядку в нуле, квазимономы такого вида пренебрежимы по сравнению с квазимономами с меньшими значениями $k + l$, в свою очередь квазимономы с бóльшими $k + l$ пренебрежимы по сравнению с этими мономами. Из двух квазимономов с равными $k + l$ квазимоном, имеющий большее m, является бóльшим (его порядок стремления к нулю меньше).

Принимая это во внимание, получаем, что главные части функций F_i в начале координат пропорциональны $AB\ln A^2$. Коэффициент при этом квазимономе есть вектор в нашем 3-пространстве. Выберем координаты в этом 3-пространстве таким образом, что первая координатная ось содержит этот вектор. Эта замена приводит нашу проек-

цию к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= AB\ln A^2 + \ldots, \\ x_2 &= P(A,B) + \ldots, \\ x_3 &= Q(A,B) + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

где P и Q — квадратичные формы, а точки обозначают члены бóльших порядков.

Квадратичные формы P и Q задают квадратичное отображение (A,B)-плоскости в (x_1,x_2)-плоскость. Типичное квадратичное отображение из плоскости в плоскость приводится к одной из двух нормальных форм

$$\begin{aligned} &y_2 = C^2 - D^2, \quad y_3 = 2CD \ \text{(эллиптический случай)}, \\ &y_2 = C^2, \qquad\quad y_3 = D^2 \quad \text{(гиперболический случай)} \end{aligned} \tag{7}$$

некоторой линейной заменой координат

$$(A,B) \mapsto (C,D), \quad (x_2,x_3) \mapsto (y_2,y_3).$$

Пренебрегая членами более высоких порядков в (6), в эллиптическом случае получим представление проекции в виде графика функции $AB\ln A^2$ от переменных y_2, y_3 (рис. 123). Эта функция гладка везде, кроме луча, соответствующего прямой $A=0$, на которой касательная плоскость вертикальна и кривизна (логарифмически) бесконечна.

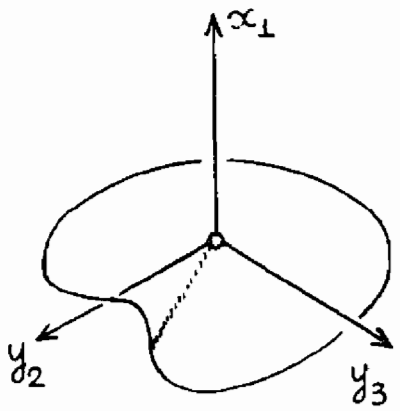


Рис. 123. Особый луч на большом квазифронте в пространстве-времени (эллиптический случай)

В гиперболическом случае "функция" $AB\ln A^2$ переменных y_2, y_3 определена только на положительном квадранте $(y_2 \geq 0, y_3 \geq 0)$ и принимает два значения для каждой внутренней точки. Тем не менее,

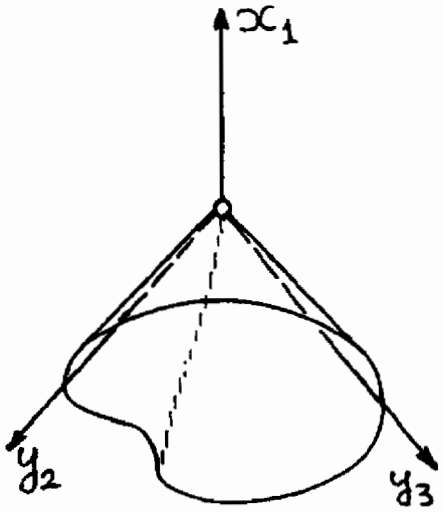


Рис. 124. Особый луч на большом квазифронте в пространстве-времени (гиперболический случай)

график имеет один особый луч (с особенностью того же, логарифмического, типа как и в эллиптическом случае, рис. 124).

Принимая во внимание отброшенные ранее члены, получим, что топологическая картинка не изменяется: спроектированная поверхность остаётся гомеоморфной плоскости и имеет особый луч, вдоль которого касательная плоскость непрерывна, но кривизна трансверсального сечения бесконечна.

Для того чтобы изучить характер перестройки квазифронтов, рассмотрим типичную гладкую функцию времени, равную нулю в начале координат нашего 3-пространства.

Первые члены в квази-тейлоровском разложении этой функции в начале координат таковы:

$$T = aAB\ln A^2 + bA^2 + cAB + dB^2 + \dots.$$

Кривые нулевого уровня на (A, B)-плоскости имеют асимптотики

$$\begin{aligned} B &= -\frac{b}{a}\frac{A}{\ln A^2} + \dots, \\ A &= -\frac{d}{a}\frac{B}{\ln B^2} + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, кривые уровня функции квазивремени на (A, B)-плоскости подобны линиям уровня функции AB, однако две сепаратрисы, соответствующие нулевому уровню, слегка деформированы (рис. 125).

Замечание. Характеристики световой гиперповерхности, принадлежащие нашей лежандровой поверхности, на (A, B)-плоскости представлены кривыми $AB = \text{const}$.

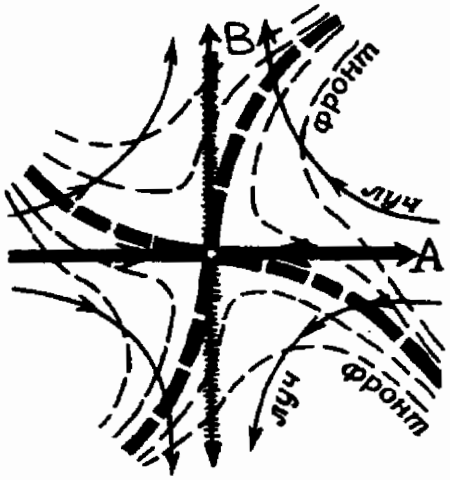


Рис. 125. Квазилучи и мгновенные квазифронты на (A, B)-плоскости

Для системы дифференциальных уравнений с частными производными, гиперболичной по отношению к данной функции времени T, характеристики световой гиперповерхности трансверсальны изохронам. Следовательно, для лежандровой поверхности и функции квазивремени, описывающих распространение квазифронтов для гиперболической системы дифференциальных уравнений с частными производными, кривые $T(A, B) = \text{const}$ не должны касаться гипербол $AB = \text{const}$. Это условие причинности налагает ограничения на коэффициенты в формуле (8). В общей задаче контактной геометрии, не связанной с теорией дифференциальных уравнений с частными производными, возможен и случай, изображённый на рис. 126.

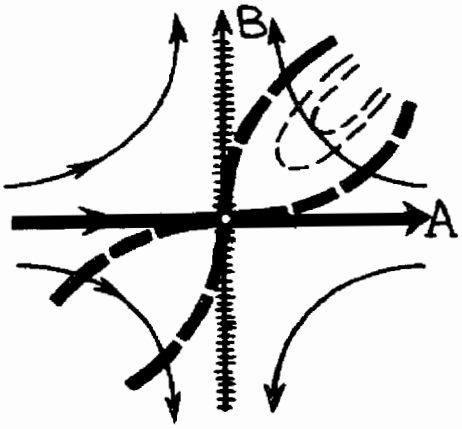


Рис. 126. Невозможная конфигурация квазилучей и квазифронтов для гиперболических систем

Наконец, для того чтобы получить нормальные формы заметания большого квазифронта мгновенными, спроектируем (A, B)-плоскость, с её характеристиками $AB = \text{const}$ и изохронами $T(A, B) = \text{const}$, на большой квазифронт при помощи проектирования, задаваемого формулами (6) и (7). Нетрудное вычисление приводит к следующему результату.

Лемма. *Квадратичные отображения* (7) *переводят центральные коники* (*задаваемые уравнениями* $fC^2 + gCD + hD^2 = \text{const}$) *в коники.*

Следовательно семейства проекций характеристик из (A, B)-плоскости в (y_2, y_3)-плоскость являются семействами коник, изображёнными на рис. 127.

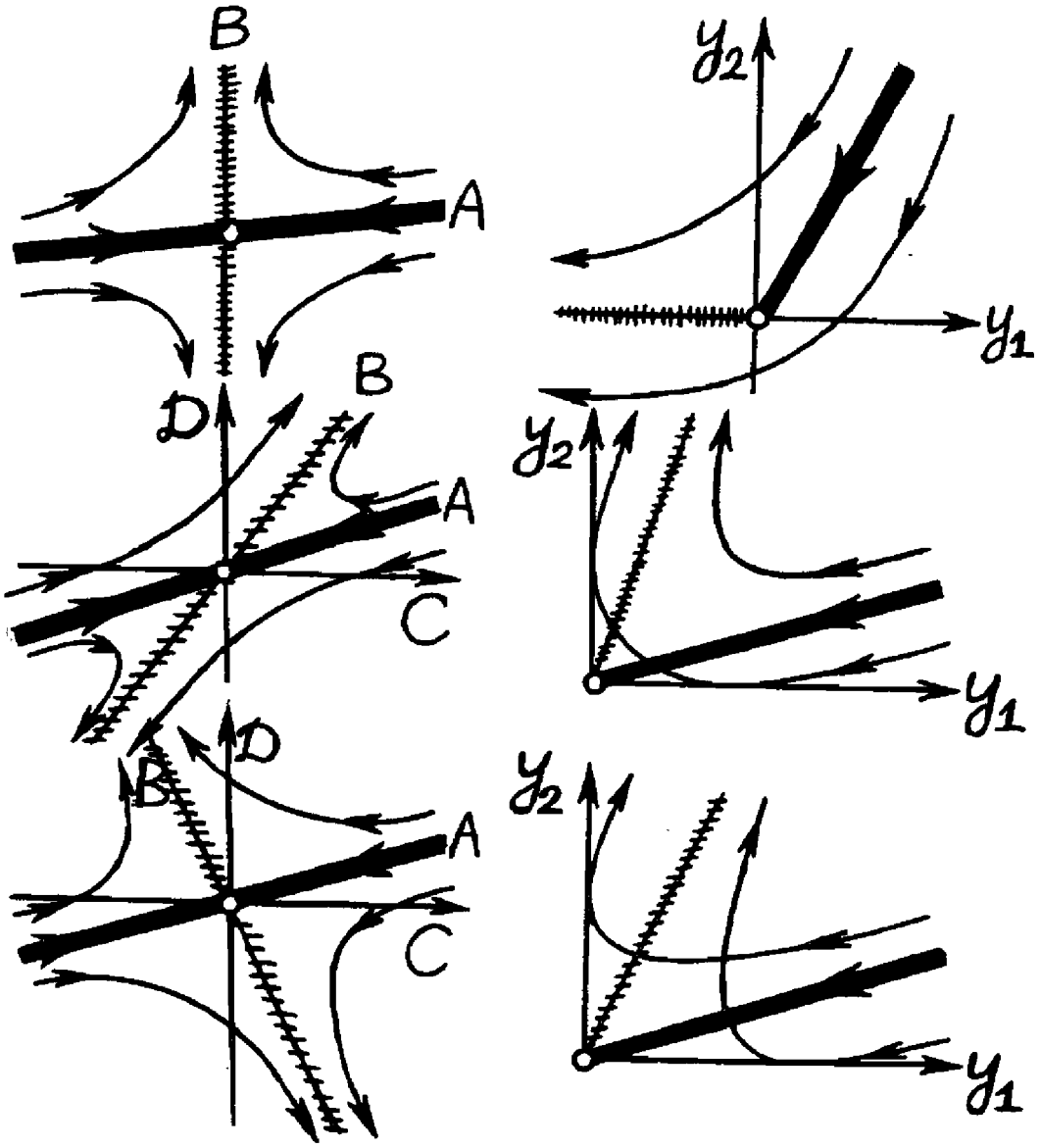


Рис. 127. Проекция характеристик на (y_2, y_3)-плоскость

Замечание. Гиперболический случай разделяется на два подслучая, так как прямые $A = 0$, $B = 0$ могут быть разделены или не разделены прямыми $C = 0$, $D = 0$ на проективной прямой.

Наконец, мы поднимаем следы квазифронтов и лучей из (y_1, y_2)-плоскости на большой квазифронт (рис. 128) и получаем следы перестроек, указанные на рис. 122.

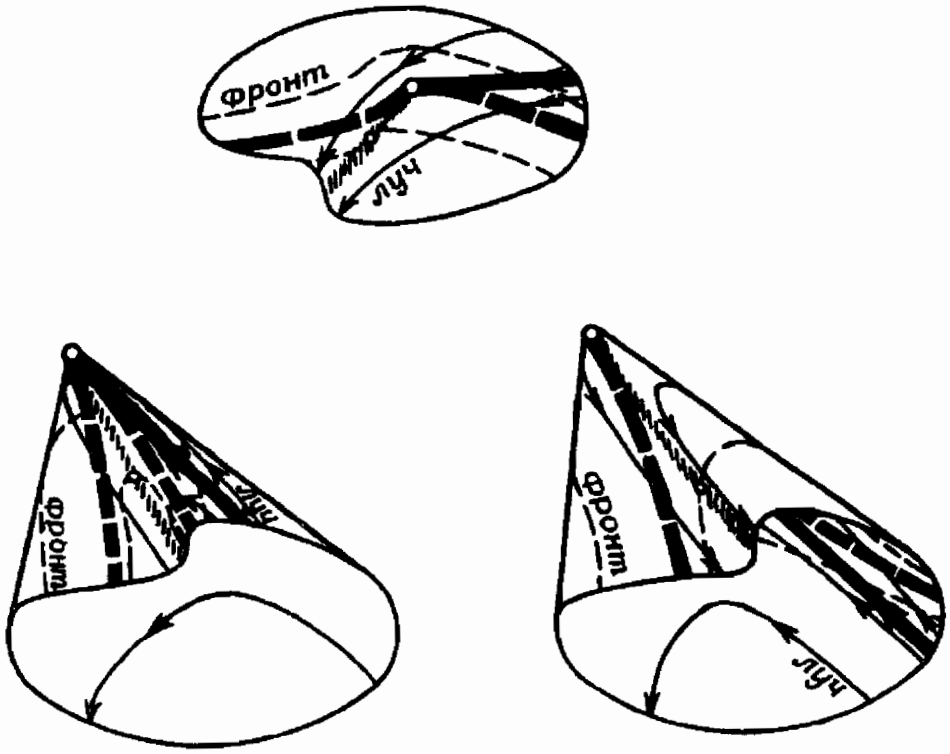


Рис. 128. Квазилучи и квазифронты на большом фронте

Замечание. Типичная особенность большого фронта в трёхмерном пространстве-времени вероятно диффеоморфна типичной особенности мгновенного фронта в физическом 3-пространстве. В этом случае такой мгновенный фронт должен иметь (в типичный момент времени) особые точки, в которых заканчиваются (логарифмические) особые кривые.

Типичный гладкий начальный фронт, движущийся в неоднородном 3-пространстве, в некоторые моменты времени приобретает особенности. В момент, следующий за моментом рождения особенности, фронт должен иметь 2 изолированные особые точки нестрогой гиперболичности, в которых имеет место преобразование волн. Эти точки соединены особой кривой (представляющей те лучи, что претерпели трансформацию в предыдущие моменты времени).

8.5. Внутреннее рассеяние лучей и волновых фронтов на плоскости[5)]

Линейные короткие волны разных типов обычно распространяются с разными фазовыми скоростями. Однако иногда их скорости могут и совпадать. Например, встречаются поперечные и продольные плоские волны, бегущие в однородной анизотропной упругой среде с одной и той же фазовой скоростью в одном и том же направлении. Точнее, колебания среды в таких волнах имеют более одной степени свободы, а их разделение на продольные и поперечные в анизотропной среде условно. Другой аналогичный пример — световые волны различной поляризации в анизотропном кристалле, распространяющиеся с одинаковой скоростью в одном и том же направлении. Преломление таких волн необычно и называется в физике конической рефракцией Гамильтона. Математическое объяснение этого явления состоит в том, что направление распространения лучей в такой волне определено неоднозначно — всевозможные лучи, выходящие из данной точки, заметают конус.

В этом параграфе мы, следуя результатам предыдущих параграфов главы 8, изучаем на уровне геометрической оптики внутреннее рассеяние коротких волн в двумерной среде, свойства которой общим образом зависят не только от направления (как в примерах выше), но и от точки. Оказывается, что неоднородность приводит к новым явлениям внутреннего преломления и внутреннего отражения волн, не наблюдающимся в описанных только что примерах.

Внутреннее преломление лучей. Фронт типичной волны, распространяющейся в среде с общими оптическими свойствами, в отдельные моменты времени может испытывать перестройки, вызванные преломлением лучей рассматриваемой волны в некоторых внутренних точках среды. Падающий в каждую такую точку луч преломляется, а фронт волны приобретает слабую особенность, распространяющуюся вдоль преломленного луча. Лучи, близкие к падающему, искривляются и проходят вблизи преломленного луча. В однородной же среде только что описаиное внутреннее преломление невозможно, поскольку все лучи — прямые.

Подчеркнём, что точки, в которых фронт волны испытывает внутреннее преломление, зависят от начальных условий и, вообще говоря,

[5)] Результаты этого параграфа опубликованы в [20].

различны для разных волн. В среде, оптические свойства которой общим образом зависят от точки и направления, внутреннее преломление волн возможно в точках некоторых линий. Обычно через такую точку проходят два луча, фазовые скорости которых совпадают в ней по величине и направлению. Именно эти лучи и способны преломляться в рассматриваемой точке, как показано на рис. 129. Остальные лучи в ней не преломляются. Хотя всевозможные точки внутреннего преломления и располагаются на линиях, но в типичной волне преломляются лишь отдельные лучи, а остальные проходят через точки внутреннего преломления без изменения направления.

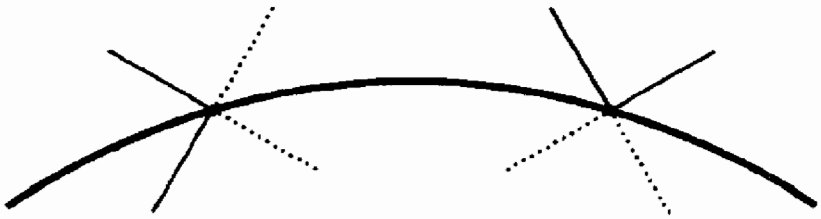


Рис. 129. Внутреннее преломление и внутреннее отражение лучей

Эти результаты и приводящая к ним математическая техника изложены в параграфах 8.1–8.4. Однако перестройки фронта волны, испытывающей внутреннее преломление, там не описаны. В §8.4 рассматриваются квазифронты — общие (а не лежандровы) проекции соответствующих лежандровых подмногообразий.

Внутреннее отражение лучей. Кроме того, согласно нашим результатам, в среде, оптические свойства которой общим образом зависят от точки и направления, помимо точек внутреннего преломления волн бывают ещё точки их внутреннего отражения. Последние отличаются от первых расположением пары лучей, преломляющихся в каждой из них, и линией, на которой они сами располагаются. Рассматриваемые лучи не преломляются, а, скорее, отражаются от этой линии, как показано на рис. 129.

Фронт типичной волны, распространяющейся в среде с общими оптическими свойствами, в отдельные моменты времени может испытывать перестройки, вызванные внутренним отражением лучей рассматриваемой волны. Неожиданно оказывается, что такие перестройки всегда происходят в точках возврата перестраивающегося фронта, а прохождение точки возврата фронта волны через точку её внутрен-

него отражения — явление общего положения. Иначе говоря, точки внутреннего отражения лучей притягивают точки возврата фронтов.

В п. 8.5.1 описываются перестройки фронтов, каустика и рассеяние лучей при внутреннем преломлении и внутреннем отражении типичных волн в средах, оптические свойства которых общим образом зависят от точки и направления. Допускается их зависимость и от времени. Но описанные явления не наблюдаются ни в однородных, ни в изотропных средах.

Известно, что распространение коротких волн на уровне геометрической оптики описывается световой гиперповерхностью — множеством точек, в которых вырождается главный символ системы линейных уравнений Эйлера–Лагранжа. На такой гиперповерхности встречаются конические особые точки, среди которых выделены гиперболические особенности, которые и оказываются ответственными за внутреннее преломление и внутреннее отражение волн. В п. 8.5.2 обсуждается деление общих гиперболических особенностей световой гиперповерхности на точки преломления, отражения и псевдоотражения характеристик.

Особенности волн в пространстве-времени при проходе через точки преломления, отражения и псевдоотражения характеристик описывает теорема 1 из п. 8.5.3. Она справедлива лишь для типичных волн, выделенных из всех некоторым явно сформулированным ограничением на их начальные условия. Оказывается, что псевдоотражение характеристик запрещено эволюционностью системы уравнений Эйлера–Лагранжа (вдоль лучей время возрастает). Комбинация этого наблюдения с теоремой 1 даёт теорему 2, утверждающую, что при проходе через точки преломления и отражения характеристик наблюдаются соответственно явления внутреннего преломления и внутреннего отражения волн, свойства которых описаны в п. 8.5.1. Отметим, что её формулировка не содержит неконструктивных требований общности оптических свойств среды и типичности волны. Все они заменены вполне проверяемыми в каждом конкретном случае явными условиями, которым должны удовлетворять сама волна, а также точки преломления и отражения характеристик, лежащие на её пути. Например, наличие точек преломления или отражения уже запрещает и однородность, и изотропность — в таких средах эти точки просто не встречаются.

8.5.1. Перестройки фронтов, рассеяние лучей и особенность каустики

Перестройки фронтов при внутреннем преломлении лучей. Здесь показано, что гладкий фронт типичной волны в момент внутреннего преломления испытывает перестройку, после которой на нём появляется разрыв третьей (а не второй) производной, распространяющийся вдоль преломленного луча. Вторая же производная оказывается непрерывной, но не удовлетворяющей условию Гёльдера ни с каким положительным показателем. В окрестности же точки разрыва третьей производной локальное уравнение фронта в подходящих гладких координатах имеет вид $y = x^2/\ln|x| + o(x^2/\ln|x|)$ при $x \to 0$.

В сам момент перестройки на фронте возникает разрыв второй производной, расположенный в точке внутреннего преломления и исчезающий сразу после перестройки. Ветви перестраивающегося фронта, выходящие из точки внутреннего преломления, имеют различные конечные кривизны, а локальное уравнение каждой из них в подходящих гладких координатах записывается в виде $y = x^2/\ln x + o(x^2/\ln x)$ при $x \to 0$.

На рис. 130 показаны два варианта описанной перестройки в зависимости от того, совпадают (а) или нет (б) знаки кривизн ветвей фронта в момент внутреннего преломления. В близкие моменты времени точка пересечения с падающим и преломленным лучом разбивает фронт на две ветви. Проследим за кривизнами этих ветвей в точке пересечения. Как описывалось выше, они различны в момент прохождения фронта через точку внутреннего преломления и совпадают до и после этого момента. Кроме того, оказывается, что обе они полунепрерывно зависят от времени: одна из них непрерывна вплоть до момента перестройки, а другая — начиная с этого момента.

Рассеяние лучей при внутреннем преломлении. Типичная картина распространения лучей при внутреннем преломлении волны также изображена на рис. 130. Падающий и преломленный лучи представляют собой ветви двух гладких кривых, не имеющих общей касательной в точке внутреннего преломления. Остальные лучи искривляются и рассеиваются. Луч, проходивший вблизи падающего на расстоянии ε (на конечном расстоянии от точки внутреннего преломления), окажется (снова на конечном расстоянии по другую сторону от рассматриваемой точки) смещённым относительно преломленного луча на расстояние $\mu\varepsilon\ln|\varepsilon| + o(\varepsilon\ln|\varepsilon|)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\mu < 0$.

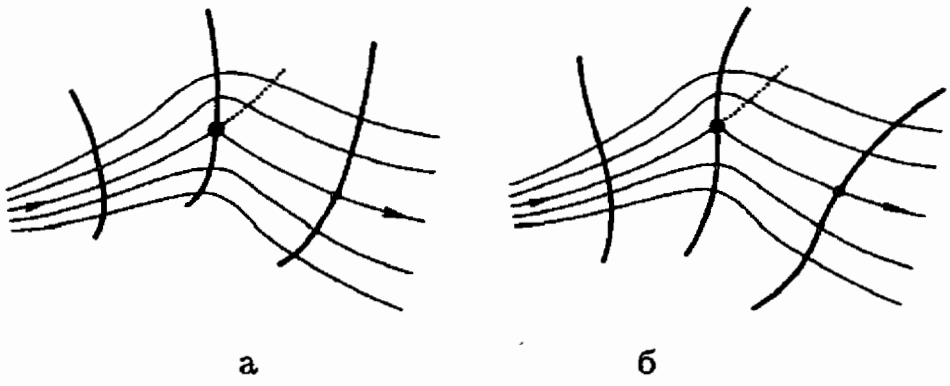


Рис. 130. Перестройки фронта и рассеяние лучей при внутреннем преломлении волны

Перестройки фронтов при внутреннем отражении лучей. Как и раньше, в момент внутреннего отражения типичной волны её фронт испытывает перестройку, после которой на нём появляется (помимо точки возврата) слабая особенность — разрыв третьей производной, распространяющийся вдоль отражённого луча. В окрестности возникшей слабо особенности вторая производная снова оказывается непрерывной, но не удовлетворяющей условию Гёльдера ни с каким положительным показателем, а локальное уравнение фронта в подходящих гладких координатах представляется в прежнем виде $y = x^2/\ln|x| + o(x^2/\ln|x|)$ при $x \to 0$.

В сам момент перестройки фронт состоит из двух касающихся ветвей различной кривизны, выходящих из точки внутреннего отражения. Как и раньше, локальное уравнение каждой из них в подходящих гладких координатах записывается в прежнем виде $y = x^2/\ln x + o(x^2/\ln x)$ при $x \to 0$.

На рис. 131 показаны два варианта описанной только что перестройки в зависимости от того, совпадают (а) или нет (б) знаки кривизн ветвей фронта в момент внутреннего отражения. Снова, две кривизны фронта, определённые в точке, которая распространяется сначала вдоль падающего луча, а затем вдоль отражённого, различны в момент прохождения фронта через точку внутреннего отражения и совпадают до и после этого момента. Кроме того, снова оказывается, что обе они полунепрерывно зависят от времени: одна из них непрерывна вплоть до момента перестройки, а другая — начиная с этого момента.

Точка возврата фронта скользит по *каустике*, изображённой на рис. 131 двойной линией и имеющей в точке внутреннего отражения особенность — разрыв второй производной. Кривизна каустики в этой

а б

Рис. 131. Перестройки фронта, каустика и рассеяние лучей при внутреннем отражении волны

точке меняет знак, а при приближении к ней стремится к бесконечности. Уравнение каустики в окрестности точки внутреннего отражения в подходящих гладких координатах записывается в виде $y = (\lambda - \operatorname{sgn} x)x/\ln|x| + o(x^2/\ln|x|)$ при $x \to 0$, где $\lambda > 1$. До перестройки фронта каустика обращена к нему своей выпуклостью, а после перестройки — вогнутостью. Если оптические свойства среды не зависят от времени, то в самой точке перестройки фронта каустика касается линии точек внутреннего отражения. В неавтономном же случае точки возврата фронта заметают в пространстве-времени линию, касающуюся поверхности точек внутреннего отражения.

Рассеяние лучей при внутреннем отражении. Типичная картина распространения лучей при внутреннем отражении волны также изображена на рис. 131. Падающий и отражённый лучи представляют собой ветви двух гладких кривых, не имеющих общей касательной в точке внутреннего отражения. Остальные лучи искривляются, отражаясь от каустики и рассеиваются. Как и прежде, луч, проходивший вблизи падающего на расстоянии ε (на конечном расстоянии от точки внутреннего отражения), окажется (снова на конечном расстоянии по другую сторону от рассматриваемой точки) смещённым относительно отражённого луча на расстояние $\mu\varepsilon\ln|\varepsilon| + o(\varepsilon\ln|\varepsilon|)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\mu < 0$.

Парадоксальные лучи. Лучи, являющиеся гладкими продолжениями преломляющихся и отражающихся лучей, изображены на рис. 130 и 131 пунктиром. По сравнению с остальными они являются лучами другого типа и называются *парадоксальными*. Возможно, на уровне волновой

оптики им соответствует частичное превращение преломляющихся и отражающихся волн в волны другого типа по сравнению с падающими.

Двойственность перестроек фронтов. Перестройки фронтов, изображённых на рис. 130,*б* и 131,*б*, двойственны друг другу. Перестройки же фронтов, изображённых на рис. 130,*а* и 131,*а*, двойственны сами себе. Чтобы объяснить это явление, рассмотрим, например, эволюцию кривой, двойственной к фронту волны, которая преломляется в среде с общими оптическими свойствами. Наша кривая оказывается фронтом, испытывающим либо внутреннее преломление, либо внутреннее отражение. Эти же два варианта возникают и в случае, если рассматривается эволюция кривой, двойственной к фронту отражающейся волны.

8.5.2. Преломление, отражение и псевдоотражение характеристик

Математическое объяснение возникновения внутреннего отражения и внутреннего преломления волн состоит в наличии у каждой гиперболической особенности световой гиперповерхности пары проходящих через неё характеристик, отсутствующих у эллиптических точек.

Преломление, отражение и псевдоотражение характеристик. Многообразие контактных элементов пространства-времени естественно проектируется на само пространство-время:

$$\pi : PT^*\mathbf{R}^{1+D} \to \mathbf{R}^{1+D}.$$

Если пространство-время трёхмерно ($D = 2$), то по отношению к проектированию π типичные гиперболические особенности общей световой гиперповерхности делятся на точки преломления, отражения и псевдоотражения характеристик, которые определяются следующим образом.

Пусть Σ^4 — световая гиперповерхность (верхний индекс — размерность многообразия), H^2 — многообразие её гиперболических особенностей, а $\widetilde{H}^3$ — продолжение этого многообразия с помощью проходящих через него характеристик световой гиперповерхности. Точнее, для построения $\widetilde{H}^3$ на таких характеристиках берутся лишь достаточно малые окрестности лежащих на них гиперболических особенностей

световой гиперповерхности. Локально $\tilde{H}^3$ состоит из двух ветвей $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$, пересекающихся по H^2. В координатах (p, q, z), введённых в §8.4, световая гиперповерхность и только что указанные подмногообразия пространства-времени задаются следующими уравнениями:

$$p_1 q_1 + p_2^2 = 0 \ (\Sigma^4),$$
$$p_1 = p_2 = q_1 = 0 \ (H^2),$$
$$p_1 = p_2 = 0 \ (\tilde{H}^3_P) \quad \text{и} \quad p_2 = q_1 = 0 \ (\tilde{H}^3_Q).$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь гиперболическую особенность световой гиперповерхности, в которой проектирование самой поверхности H^2 на пространство-время имеет полный ранг. В окрестности такой особенности локально определено многообразие N^4, состоящее из слоёв проектирования π, проходящих через H^2. Точнее, для построения N^4 на таких слоях берутся лишь достаточно малые окрестности лежащих на них гиперболических особенностей световой гиперповерхности. Заметим, что в изотропных средах гиперболические особенности, удовлетворяющие приведённому выше условию полноты ранга, не встречаются.

Световая гиперповерхность Σ^4 и многообразия N^4, $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$ все содержат поверхность H^2. Однако, их взаимное расположение может быть различным. А именно, поверхность H^2 делит световую гиперповерхность Σ^4 и каждое из многообразий $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$ на две ветви. Рассмотрим какие-нибудь полуветви многообразий $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$, лежащие на одной и той же полуветви световой гиперповерхности Σ^4. Многообразие же N^4 может касаться световой гиперповерхности Σ^4, а может пересекать её либо по трёхмерному многообразию, локально состоящему из двух ветвей, либо лишь по H^2.

Определение. Гиперболическая особенность световой гиперповерхности, удовлетворяющая приведённому выше условию полноты ранга, называется

а) *точкой преломления характеристик*, если полуветви многообразий $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$ не касаются гиперповерхности N^4 и лежат от неё по разные стороны;

б) *точкой отражения характеристик*, если полуветви многообразий $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$ не касаются гиперповерхности N^4 и лежат от неё по одну сторону, а она сама не касается световой гиперповерхности Σ^4 и пересекает её по трёхмерному многообразию;

в) *точкой псевдоотражения характеристик*, если многообразие N^4 не касается световой гиперповерхности Σ^4 и пересекает её по H^2.

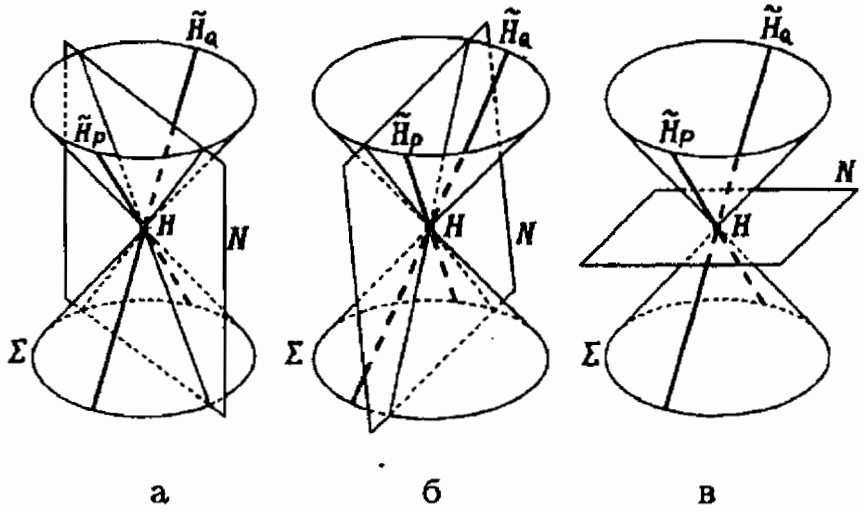


Рис. 132. Точки преломления (а), отражения (б) и псевдоотражения (в) характеристик

Все эти случаи взаимного расположения следов световой гиперповерхности Σ^4 и многообразий N^4, $\tilde{H}^3_P$ и $\tilde{H}^3_Q$ на трансверсали к поверхности H^2 показаны на рис. 132.

8.5.3. Большие и мгновенные фронты

Бегущая волна описывается лежандровым подмногообразием

$$\tilde{L}^D \subset \Sigma^{2D} \subset PT^*\mathbf{R}^{1+D},$$

лежащим на световой гиперповерхности (верхний индекс — размерность многообразия). А именно, его образ $\pi(\tilde{L}^D)$ при естественном проектировании

$$\pi : PT^*\mathbf{R}^{1+D} \to \mathbf{R}^{1+D}$$

представляет собой *большой* фронт рассматриваемой бегущей волны — гиперповерхность в пространстве-времени. Сечение большого фронта изохроной — *мгновенный* фронт в соответствующий момент времени. Мгновенный фронт в выделенный момент времени называется *начальным*. Он является образом $\pi(L^{D-1})$ подмногообразия $L^{D-1} \subset \tilde{L}^D$, которое касается естественной контактной структуры на $PT^*\mathbf{R}^{1+D}$ и называется *начальным условием*. Само лежандрово подмногообразие $\tilde{L}^D$

получается из начального условия L^{D-1} продолжением вдоль характеристик. Они проектируются в *лучи*, из которых соткан большой фронт.

С течением времени мгновенный фронт может испытывать перестройки, которые полностью исследованы в случае, когда световая гиперповерхность — гладкая, начальное условие — общего положения, а $D \leq 5$. Если же световая гиперповерхность негладкая, то появляются новые типичные перестройки мгновенных фронтов, вызванные прохождением характеристик через её особые точки.

Особенности лежандровых подмногообразий. Гладкое начальное условие называется *регулярным*, если оно не содержит особенностей световой гиперповерхности.

Если световая гиперповерхность имеет конические особенности, то продолжение даже регулярного начального условия вдоль её характеристик может оказаться негладким. В интересующем нас случае $D = 2$ попадание отдельных характеристик, начинающихся на одномерном начальном условии, в гиперболические особенности световой гиперповерхности — явление общего положения. В самом деле, такие характеристики начинаются на пересечении $L^1 \cap \widetilde{H}^3$ двух подмногообразий световой гиперповерхности дополнительных размерностей — начального условия и объединения всех характеристик, проходящих через гиперболические особенности.

Пусть $D = 2$, а регулярное начальное условие трансверсально многообразию, составленному из всех характеристик, проходящих через гиперболические особые точки световой гиперповерхности. Рассмотрим какую-нибудь характеристику, начинающуюся на нашем начальном условии и заканчивающуюся в гиперболической особенности световой гиперповерхности. Продолжение начального условия вдоль характеристик, достаточно близких к рассматриваемой, является лежандровым подмногообразием, которое в окрестности её конца приводится, как показано в §8.4, к параметрической нормальной форме

$$p_1 = A^2, \quad p_2 = AB, \quad q_1 = -B^2, \quad q_2 = -2AB \ln A^2, \quad z = -A^2B^2/2.$$

Кроме того, уравнения характеристик на плоскости параметров A и B записываются в виде

$$AB = \text{const},$$

причём $B = 0$ — уравнение нашей заканчивающейся в данной особенности характеристике, а $A = 0$ – начинающейся в ней. Диффеоморфизм,

приводящий к указанной нормальной форме лежандрово подмногообразие, сохраняет уже имеющиеся в нашем распоряжении нормальные формы контактной структуры и световой гиперповерхности.

Парадоксальные характеристики. Характеристика, гладко продолжающая ту, которая заканчивается в данной гиперболической особенности, называется *парадоксальной*. Рассматриваемое лежандрово подмногообразие и его парадоксальная характеристика локально лежат в разных частях световой гиперповерхности — их разделяет поверхность гиперболических особенностей. Парадоксальные характеристики проектируются в парадоксальные лучи.

Особенности больших фронтов. Пусть в интересующем нас случае $D = 2$ регулярное начальное условие L^1 трансверсально многообразию, составленному из всех характеристик, проходящих через гиперболические особенности световой гиперповерхности. Рассмотрим какую-нибудь характеристику, начинающуюся на L^1 и заканчивающуюся в точке M преломления, отражения или псевдоотражения характеристик. Обозначим через $\tilde{L}^2$ продолжение начального условия вдоль характеристик, достаточно близких к рассматриваемой.

Теорема 1. *При подходящем выборе гладких координат (x, y) на пространстве-времени большой фронт $\pi(\tilde{L}^2)$ в окрестности точки $\pi(M)$ записывается в параметрической форме*

$$x_1 = \pm A^2 + bAB + B^2 + \dots,$$
$$x_2 = bA^2 + 2AB\ln A^2 + \dots,$$
$$y = \pm A^4/2 + bA^3B + A^2B^2 + A^2B^2\ln A^2 + \dots,$$

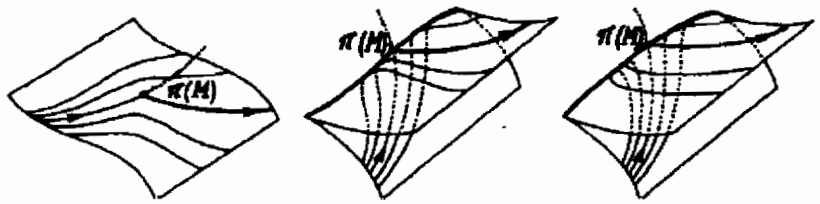
где многоточия обозначают члены более высокой степени (степень члена $A^iB^j(\ln A^2)^k$ равна $i + j$).

Кроме того, знаки "$-$" и неравенство $b \geq 0$ имеют место при преломлении характеристик в точке M, знаки "$+$" и неравенство $b > 2$ — при их отражении, а знаки "$+$" и неравенство $2 > b \geq 0$ — при их псевдоотражении.

Равенство $b = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда два направления характеристик в точке M проектируются в одно.

Замечание. При $b \neq 0$ в зависимости от типа поведения характеристик в точке M большой фронт $\pi(\tilde{L}^2)$ имеет в точке $\pi(M)$ одну из

особенностей, показанных на рис. 133. Там же изображены картины рассеяния лучей, а парадоксальные лучи обозначены точками.



а б в

Рис. 133. Особенности большого фронта и рассеяние лучей при преломлении (а), отражении (б) и псевдоотражении (в) характеристик

Доказательство теоремы 1. Приведём лежандрово подмногообразие $\widetilde{L}^2$ в окрестности точки M к параметрической нормальной форме (см. §8.4)

$$p_1 = A^2, \quad p_2 = AB, \quad q_1 = -B^2, \quad q_2 = -2AB\ln A^2, \quad z = -A^2B^2/2$$

диффеоморфизмом, сохраняющим световую гиперповерхность $p_1q_1 + p_2^2 = 0$ и контактную структуру $dz = (p\,dq - q\,dp)/2$. Утверждение теоремы следует теперь из доказанной ниже леммы 1. С её помощью приведённые в п. 8.5.2 формулы позволяют непосредственно проверить все утверждения теоремы в координатах. Например, явное уравнение $dq_1 = \pm dp_1 + b\,dp_2$ гиперплоскости T_MN, касающейся в точке M гиперповерхности N^4, вместе с явными уравнениями многообразий Σ^4, $\widetilde{H}^3_P$ и $\widetilde{H}^3_Q$ влечёт нужные неравенства. Теорема 1 доказана.

Лемма 1. *Лежандрово проектирование $\pi : PT^*\mathbf{R}^{1+2} \to \mathbf{R}^{1+2}$ в окрестности точки M может быть приведено к нормальной форме $\pi : (p, q, z) \mapsto (x, y)$, где*

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm p_1 + bp_2 - q_1 + \ldots, \\ x_2 &= bp_1 - q_2 + \ldots, \\ y &= p_1x_1/2 + p_2x_2/2 - z + \ldots \end{aligned}$$

и $b \geq 0$, а многоточия обозначают члены более высокой степени, если положить $\deg p_1 = \deg p_2 = 1$ *и* $\deg z = 2$.

Приведение осуществляется выбором подходящих гладких координат (x, y) в пространстве-времени и диффеоморфизмом $PT^*\mathbf{R}^{1+2}$, сохраняющим контактную структуру, световую гиперповерхность и уже имеющуюся в нашем распоряжении нормальную форму лежандрова подмногообразия $\widetilde{L}^2$.

Для доказательства леммы 1 нам понадобится лемма 2.

Лемма 2. *Плоскость* $\ker d\pi$, *касательная в точке* M *к слою проектирования* π, *в координатах* (p, q, z) *задаётся уравнениями*

$$\begin{aligned} dq_1 &= a\,dp_1 + b\,dp_2, \text{ где } a \neq 0, \\ dq_2 &= b\,dp_1 + c\,dp_2, \\ dz &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2. Первое уравнение — это уравнение гиперплоскости $T_M N$, содержащей плоскость $\ker d\pi$. Его можно записать в нужном виде, так как гиперплоскость $T_M N$ касается поверхности H^2, уравнение которой — $p_1 = p_2 = q_1 = 0$, и трансверсально поверхности $\widetilde{H}^3_P$ и $\widetilde{H}^3_Q$, уравнения которых — $p_1 = p_2 = 0$ и $p_2 = q_1 = 0$ соответственно.

Требуемый вид второго уравнения получается, если учесть что (p_1, p_2) — локальные координаты в слое, проходящем через M. Действительно, (p_1, p_2, q_2, z) — локальные координаты на N^4 в силу первого уравнения, а рассматриваемый слой и поверхность H^2 трансверсально пересекаются в N^4. Совпадение же коэффициентов, обозначенных через b, следует из обращения в нуль на слоях π дифференциала $dp \wedge dq$ контактной формы.

Третье уравнение — это уравнение контактной плоскости в точке M, тоже содержащее $\ker d\pi$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Лежандрово подмногообразие $\widetilde{L}^2$ задаётся уравнениями

$$p_1 q_1 + p_2^2 = 0, \quad q_2 + 2p_2 \ln p_1 = 0, \quad z + p_2^2/2 = 0,$$

которые вытекают из его параметрической нормальной формы.

Векторные поля с производящими функциями $p_1 q_1 + p_2^2 = 0$ и $z + p_2^2/2 = 0$ сохраняют контактную структуру, световую гиперповерхность и лежандрово подмногообразие $\widetilde{L}^2$. Действуя ими на плоскость $\ker d\pi$, касательную в точке M к слою π, можно добиться равенств

$a = \pm 1$, $c = 0$ в её уравнениях, полученных в лемме 2. Условие же $b \geq 0$ достигается одновременной сменой знаков у p_2 и q_2.

Осталось только выбрать соответствующие координаты (x, y) в пространстве-времени. Лемма 1 доказана.

Перестройки мгновенных фронтов. Предположим теперь, что световая гиперповерхность определяется вариационным принципом, а регулярное начальное условие L^1 трансверсально многообразию, состоящему из характеристик, проходящих через гиперболические особенности световой гиперповерхности. Снова рассмотрим какую-нибудь характеристику, начинающуюся на L^1 и заканчивающуюся в точке M преломления, отражения или псевдоотражения характеристик. Обозначим через $\widetilde{L}^2$ продолжение начального условия вдоль характеристик, достаточно близких к рассматриваемой. Приведённая ниже теорема 2 описывает перестройки мгновенных фронтов в окрестности точки $\pi(M)$ при некоторых дополнительных условиях регулярности, накладываемых на точку M.

А именно, в пространстве-времени локально определена гладкая поверхность $\pi(H^2)$ — проекция некоторой окрестности точки M на поверхности гиперболических особенностей. (Это следует из условия полноты ранга, накладываемого на точки преломления, отражения и псевдоотражения характеристик.) Сама же точка M является приложенным в точке $\pi(M)$ и касающимся большого фронта $\pi(\widetilde{L}^2)$ контактным элементом пространства-времени

$$\omega\, dt + k\, dx = 0,$$

на котором выделено направление, касательное к изохроне, проходящей через точку $\pi(M)$. (В самом деле, наша изохрона трансверсальна рассматриваемому контактному элементу, поскольку $k \neq 0$ на световой гиперповерхности.) Это направление касается также и мгновенного фронта в момент перестройки. Требуется, чтобы оно было трансверсально поверхности $\pi(H^2)$, а сам контактный элемент M был трансверсален оси времени. Кроме того, направления характеристик, проходящих через точку M, должны проектироваться в различные направления пространства-времени.

Теорема 2. *Точка M не может быть точкой псевдоотражения характеристик. В зависимости же от того, является ли она точкой их преломления или отражения, в окрестности точки $\pi(M)$ мгновенный фронт испытывает одну из перестроек, описанных в п.* 8.5.1.

Доказательство. Теорема 2 следует из теоремы 1.

1) Лучи и фронты на плоскости параметров (A, B) представляются в виде

$$AB = \text{const} \ \text{(лучи)},$$

$$\tau(A, B) = \text{const} \ \text{(фронты)},$$

где τ — ограничение сдвинутого времени $t(x, y) - t(0)$ на параметризацию большого фронта, асимптотика которой даётся теоремой 1. Справедливо асимптотическое разложение

$$\tau(A, B) = \beta_1(\pm A^2 + bAB + B^2) + \beta_2(bA^2 + 2AB\ln A^2) + \ldots, \text{ где } \beta = t_x(0).$$

Если в вариационном принципе плотность T кинетической энергии положительно определена, а плотность U потенциальной энергии неотрицательно определена, то лучи трансверсальны изохронам и, следовательно, не касаются фронтов. Поэтому

$$\begin{vmatrix} \partial\tau/\partial A & \partial\tau/\partial B \\ B & A \end{vmatrix} = 2(\pm\beta_1 A^2 + b\beta_2 A^2 + 2\beta_2 AB - \beta_1 B^2) + \ldots \neq 0$$

при $(A, B) \neq 0$.

Это неравенство справедливо только тогда, когда

$$\pm\beta_1^2 + b\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 \leq 0.$$

В частности, псевдоотражение характеристик в точке M невозможно.

2) Мгновенный фронт в момент перестройки представляет собой сечение большого фронта изохроной $t(x, y) = t(0)$, на которой за координаты можно принять x_1 и y. В самом деле, на контактном элементе $dy = 0$, приложенном в точке $\pi(M)$, рассматриваемая изохрона $t(x, y) = t(0)$ высекает направление $\beta\, dx = 0$. По условию теоремы оно трансверсально поверхности $\pi(H^2)$, касательная плоскость к которой задаётся уравнением $dx_1 = 0$ (следует из леммы 1). Поэтому $\beta_2 \neq 0$.

Кроме того, из двух последних неравенств вытекает, что $\beta_1 \neq 0$ и $\gamma = \pm\beta_1 + b\beta_2 \neq 0$.

Наш мгновенный фронт задаётся уравнением

$$\tau(A, B) = 0$$

и состоит из двух ветвей, асимптотики которых на плоскости (A, B) удовлетворяют уравнению

$$\gamma A^2 + 2\beta_2 AB \ln A^2 + \beta_1 B^2 = 0,$$

которое получается из предыдущего отбрасыванием несущественных членов. На одной ветви

$$B \sim -\frac{\gamma}{2\beta_2}\frac{A}{\ln A^2} \quad \text{при } A \to 0,$$

а на другой —

$$A \sim -\frac{\beta_1}{2\beta_2}\frac{B}{\ln B^2} \quad \text{и} \quad \ln A^2 \sim \ln B^2 \quad \text{при } B \to 0.$$

Теперь из теоремы 1 вытекает, что на первой ветви

$$x_1 \sim \pm A^2 \quad \text{и} \quad y \mp \frac{x_1^2}{2} \sim \left(\frac{\gamma}{2\beta_2}\right)^2 \frac{A^4}{\ln A^2} \sim \left(\frac{\gamma}{2\beta_2}\right)^2 \frac{x_1^2}{\ln(\mp x_1)} \quad \text{при } A \to 0,$$

а на второй —

$$x_1 \sim B^2 \quad \text{и} \quad y \sim \left(\frac{\beta_1}{2\beta_2}\right)^2 \frac{B^4}{\ln B^2} \sim \left(\frac{\beta_1}{2\beta_2}\right)^2 \frac{x_1^2}{\ln x_1} \quad \text{при } B \to 0.$$

Итак, мгновенный фронт в момент перестройки состоит из двух касающихся полуветвей, имеющих различные кривизны в точке касания и указанные в теореме асимптотики.

3) Чтобы исследовать рассеяние лучей, заметим, что на изохроне, проходящей через точку $\pi(M)$, x_1 и x_2 являются локальными координатами. Действительно, контактный элемент $dy = 0$, приложенный в точке $\pi(M)$, трансверсален оси времени по условию теоремы.

Отождествим теперь нашу изохрону с физическим пространством и введём на нём координаты x_1 и x_2. Тогда по теореме 1, картина распространения лучей

$$AB = \text{const}$$

в физическом пространстве описывается асимптотическими формулами

$$x_1 = \pm A^2 + bAB + B^2 + \ldots \quad \text{и} \quad x_2 = bA^2 + 2AB \ln A^2 + \ldots,$$

из которых и следует асимптотическая формула для рассеяния лучей.

4) Каустика описывается уравнением

$$\begin{vmatrix} \partial x_1/\partial A & \partial x_1/\partial B \\ \partial x_2/\partial A & \partial x_2/\partial B \end{vmatrix} = 4\ln A^2(\pm A^2 - B^2) - 2(bA + 2B)^2 + \ldots = 0,$$

откуда следует, что она бывает только при отражении или псевдоотражении характеристик, а асимптотики её ветвей на плоскости параметров в этом случае таковы:

$$B \sim \pm A \text{ при } A \to 0.$$

Они дают асимптотические формулы для ветвей каустики в координатах x_1 и x_2. А именно,

$$\begin{aligned} &x_1 \sim (b+2)A^2, \quad x_2 \sim 2A^2 \ln A^2 \quad \text{при} \quad A \to 0 \quad \text{и} \quad B \sim A, \\ &x_1 \sim -(b-2)A^2, \quad x_2 \sim -2A^2 \ln A^2 \quad \text{при} \quad A \to 0 \quad \text{и} \quad B \sim -A. \end{aligned}$$

Исключая A, получаем, что $x_1 \sim (b/2 - \operatorname{sgn} x_2)x_2/\ln|x_2|$ при $x_2 \to 0$. Асимптотическое уравнение каустики теперь следует из неравенства $b > 2$. Теорема 2 доказана.

Литература

[1] A r n o l ' d V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.* 1976, **29** (6), 557–582.

[2] А р н о л ь д В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности. *Функцион. анализ и его прил.* 1972, **6** (4), 3–25.

[3] А р н о л ь д В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. *Успехи мат. наук* 1978, **33** (5), 91–105.

[4] Л я ш к о О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (3), 28–36.

[5] Щ е р б а к О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порождённая отражениями. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (4), 70–72.

[6] Щ е р б а к О. П. H_4 в задаче об обходе препятствия. *Успехи мат. наук* 1984, **39** (4), 114.

[7] А р н о л ь д В. И. Особенности в вариационном исчислении. *Успехи мат. наук* 1984, **39** (5), 256.

[8] Г и в е н т а л ь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 55–112.

[9] П л а т о н о в а О. А. Проектирования гладких поверхностей. *Тр. Семинара им. Петровского* 1984, **10**, 135–149.

[10] H i l b e r t D. Ueber die vollen Invariantensysteme. *Math. Ann.* 1893, **42**, 313–373.

[11] Г и в е н т а л ь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кократности, и обобщенное уравнение Ньютона. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (1), 13–18.

[12] Г и в е н т а л ь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2-модули. *Успехи мат. наук* 1983, **38** (6), 109–110.

[13] А р н о л ь д В. И. Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 126 с.

[14] А р н о л ь д В. И., Г и в е н т а л ь А. Б. Симплектическая геометрия. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* (Итоги науки и техн.). Т. 4. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985, 5–139.

[15] W e i n s t e i n A. Lectures on symplectic manifolds. Providence: Amer. Math. Soc., 1977. 48 p. (Regional conference series in mathematics; 29).

[16] M a r t i n e t J. Sur les singularités des formes différentielles. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) 1970, **20** (1), 95–178.

4) Каустика описывается уравнением

$$\begin{vmatrix} \partial x_1/\partial A & \partial x_1/\partial B \\ \partial x_2/\partial A & \partial x_2/\partial B \end{vmatrix} = 4\ln A^2(\pm A^2 - B^2) - 2(bA + 2B)^2 + \ldots = 0,$$

откуда следует, что она бывает только при отражении или псевдоотражении характеристик, а асимптотики её ветвей на плоскости параметров в этом случае таковы:

$$B \sim \pm A \text{ при } A \to 0.$$

Они дают асимптотические формулы для ветвей каустики в координатах x_1 и x_2. А именно,

$$\begin{aligned} &x_1 \sim (b+2)A^2, \quad x_2 \sim 2A^2 \ln A^2 \quad \text{при} \quad A \to 0 \quad \text{и} \quad B \sim A, \\ &x_1 \sim -(b-2)A^2, \quad x_2 \sim -2A^2 \ln A^2 \quad \text{при} \quad A \to 0 \quad \text{и} \quad B \sim -A. \end{aligned}$$

Исключая A, получаем, что $x_1 \sim (b/2 - \operatorname{sgn} x_2)x_2/\ln|x_2|$ при $x_2 \to 0$. Асимптотическое уравнение каустики теперь следует из неравенства $b > 2$. Теорема 2 доказана.

Литература

[1] A r n o l ' d V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.* 1976, **29** (6), 557–582.

[2] А р н о л ь д В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности. *Функцион. анализ и его прил.* 1972, **6** (4), 3–25.

[3] А р н о л ь д В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. *Успехи мат. наук* 1978, **33** (5), 91–105.

[4] Л я ш к о О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (3), 28–36.

[5] Щ е р б а к О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порождённая отражениями. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (4), 70–72.

[6] Щ е р б а к О. П. H_4 в задаче об обходе препятствия. *Успехи мат. наук* 1984, **39** (4), 114.

[7] А р н о л ь д В. И. Особенности в вариационном исчислении. *Успехи мат. наук* 1984, **39** (5), 256.

[8] Г и в е н т а л ь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 55–112.

[9] П л а т о н о в а О. А. Проектирования гладких поверхностей. *Тр. Семинара им. Петровского* 1984, **10**, 135–149.

[10] H i l b e r t D. Ueber die vollen Invariantensysteme. *Math. Ann.* 1893, **42**, 313–373.

[11] Г и в е н т а л ь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кократности, и обобщенное уравнение Ньютона. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (1), 13–18.

[12] Г и в е н т а л ь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2-модули. *Успехи мат. наук* 1983, **38** (6), 109–110.

[13] А р н о л ь д В. И. Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 126 с.

[14] А р н о л ь д В. И., Г и в е н т а л ь А. Б. Симплектическая геометрия. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* (Итоги науки и техн.). Т. 4. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985, 5–139.

[15] W e i n s t e i n A. Lectures on symplectic manifolds. Providence: Amer. Math. Soc., 1977. 48 p. (Regional conference series in mathematics; 29).

[16] M a r t i n e t J. Sur les singularités des formes différentielles. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) 1970, **20** (1), 95–178.

[17] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

[18] Melrose R. Equivalence of glancing hypersurfaces. *Invent. Math.* 1976, **37** (3), 165–191.

[19] Kashiwara M, Kawai T. Hidden boundary conditions. *Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku* 1975, **227**, 39–41. (In Japanese).

[20a] Oshima T. On analytic equivalence of glancing hypersurfaces. *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo* 1978, **28** (1), 51–57.

[20б] Local equivalence of differential forms and their deformations. Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku 1976, **266**, 108–129. (In Japanese).

[21] Кириллов А. А. Геометрическое квантование. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* (Итоги науки и техн.). Т. 4. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985, 141–178.

[22] Thom R. Topological models in biology. *Topology* 1969, **8** (3), 313–335.

[23] Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (4), 1–14.

[24] Платонова О. А. Особенности в задаче о скорейшем обходе препятствия. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (2), 86–87.

[25] Ландис Е. Е. Тангенциальные особенности. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (2), 36–49.

[26] McCrory C., Shifrin T. Cusps of the projective Gauss map. *J. Differential Geom.* 1984, **19** (1), 257–276.

[27] Закалюкин В. М. О лагранжевых и лежандровых особенностях. *Функцион. анализ и его прил.* 1976, **10** (1), 26–36.

[28] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. [1]. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.

[29] Закалюкин В. М. Перестройки фронтов, каустик, зависящих от параметра, версальность отображений. *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 56–93.

[30] Варченко А. Н. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1972, **36** (5), 957–1019.

[31] Gibson C. G., Wirtmüller K., du Plessis A. A., Looijenga E. J. N. Topological stability of smooth mappings. Berlin etc.: Springer, 1976. 155p. (Lecture notes in mathematics; 552).

[32] Colin de Verdière Y. Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbf{R}^n$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér.* 4 1977, **10** (4), 559–575.

[33] Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. *Функцион. анализ и его прил.* 1976, **10** (3), 13–38.

[34] Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейника и смешанные структуры Ходжа. *Функцион. анализ и его прил.* 1978, **12** (1), 1–14.

[35] Arnol'd V. I., Varchenko A. N., Givental' A. B., Khovanskii A. G. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. *Soviet scientific reviews. Sec. C: Mathematical physics reviews*. Ed. by S.P.Novikov. Transl. from the Russian. Vol. 4. Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1–92.

[36] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей). *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 207–239.

[37] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1980. 144 с.

[38] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов в $\mathbf{R}^2$. *Докл. АН СССР* 1980, **254** (1), 28–31.

[39] Карпушкин В. Н. Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных. *Тр. Семинара им. Петровского* 1984, **10**, 150–169.

[40] Pham F. Caustics and microfunctions. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1976/77, **12** (Suppl.), 357–366.

[41] Васильев В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов в комплексной области. *Функцион. анализ и его прил.* 1979, **13** (4), 1–12.

[42] Varchenko A. N. Gauss–Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. *Bull. Sci. Math. Sér.* 2 1980, **104** (2), 205–223.

[43] Варченко А. Н. Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1981, **45** (3), 540–591.

[44] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. [2]. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. 335 с.

[45] Steenbrink J. H. M. Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. *Real and complex singularities.* Proceedings of the Nordic summer school / NAVF Symposium in mathematics, Oslo, 1976. Alpen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1977, 525–563.

[46] Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности. *Докл. АН СССР* 1983, **270** (6), 1294–1297.

[47] Steenbrink J. H. M. Semicontinuity of the singularity spectrum. *Invent. Math.* 1985, **79** (3), 557–565.

[48] Варченко А. Н. Комплексный показатель особости не меняется вдоль страта $\mu = \text{const}$. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (1), 1–12.

[49] Варченко А. Н. Оценка соразмерности страта $\mu = \text{const}$ снизу через смешанную структуру Ходжа. *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1, *Математика, механика* 1982, №6, 28–31.

[50] Арнольд В. И. Некоторые нерешённые задачи теории особенностей. *Тр. семинара С.Л.Соболева* 1976, №1, 5–15.

[51] Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий. *Успехи мат. наук* 1974, **29** (4), 3–79.

[52] Харламов В. М. Топология действительных алгебраических многообразий. В кн.: *Петровский И.Г. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия: Избр. тр.* М.: Наука, 1986, 465–493.

[53] Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет. *Успехи мат. наук* 1986, **41** (3), 45–67.

[54] Чеканов Ю. В. Асимптотика числа максимумов произведения линейных функций двух переменных. *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1, *Математика, механика* 1986, №3, 93–94.

[55] Füredi Z., Palásti I. Arrangements of lines with a large number of triangles. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1984, **92** (4), 561–566.

[56] Grünbaum B. Arrangements and spreads. Providence: Amer. Math. Soc., 1972. 114 p. (Regional conference series in mathematics; 10).

[57] Durfee A., Kronenfeld N., Munson H., Roy J., Westby I. Counting critical points of real polynomials in two variables. *Amer. Math. Monthly* 1993, **100** (3), 255–271.

[58] Miyaoka Y. The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.* 1984, **268** (2), 159–171.

[59] Варченко А. Н. Асимптотики интегралов и структуры Ходжа. *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 130–166.

[60] Варченко А. Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbf{R}^n$. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (2), 1–6.

[61] Randol B. On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969, **139**, 279–285.

[62] Andrews G. E. A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1963, **106** (2), 270–279.

[63] Конягин С. В., Севастьянов К. А. Оценка числа вершин выпуклого целочисленного многогранника через его объём. *Функцион. анализ и его прил.* 1984, **18** (1), 13–15.

[64] Арнольд В. И. Статистика целочисленных выпуклых многоугольников. *Функцион. анализ и его прил.* 1980, **14** (2), 1–3.

[65] Пяртли А. С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства. *Функцион. анализ и его прил.* 1969, **3** (4), 59–62.

[66] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967. 181 с.

[67] Ильяшенко Ю. С. Признак крутизны для аналитических функций. *Успехи мат. наук* 1986, **41** (1), 193–194.

[68] Ландис Е. Е. Равномерные показатели крутизны. *Успехи мат. наук* 1986, **41** (4), 179.

[69] Zeldovich Ya. B. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.* 1970, **5** (1), 84–89.

[70] Арнольд В. И. О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц. *Успехи мат. наук* 1982, **37** (4), 125.

[71] Ройтварф А. А. О двузначном поле скоростей с коренной особенностью. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика* 1988, №3, 41–44.

[72] Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трёхмерном пространстве. *Тр. Семинара им. Петровского* 1982, **8**, 21–57.

[73] Арнольд В. И. Теория катастроф. *Природа* 1979, №10, 54–63.

[74] Arnold V. I., Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. The large-scale structure of the Universe I. General properties. One- and two-dimensional models. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1982, **20** (1–2), 111–130.

[75] Шандарин С. Ф. Теория протекания и ячеисто-сетчатая структура Вселенной. М.: ИПМ, 1982. 15 с. (Препринт. Ин-т прикл. математики им. М.В.Келдыша АН СССР; 137).

[76] Шандарин С. Ф., Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б. Крупномасштабная структура вселенной. *Успехи физ. наук* 1983, **139** (1), 83–134.

[77] Nye J. F., Hannay J. H. The orientations and distortions of caustics in geometrical optics. *Opt. Acta* 1984, **31** (1), 115–130.

[78] Чеканов Ю. В. Каустики геометрической оптики. *Функцион. анализ и его прил.* 1986, **20** (3), 66–69.

[79] Guckenheimer J. Caustics and non-degenerate hamiltonians. *Topology* 1974, **13** (2), 127–133.

[80] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложение. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1989. 255 с. (Итоги науки и техн. Сер. „Современные проблемы математики. Фундаментальные направления“; 39).

[81] Арнольд В. И. Теория катастроф. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* (Итоги науки и техн.). Т. 5. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986, 219–277.

[82] Богаевский И. А. Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью. *Алгебра и анализ* 1989, **1** (4), 1–16.

[83] Forsyth A. R. Theory of differential equations. Pt. IV: Partial differential equations. Vol. 6, Chapt. XII (207). Cambridge: University Press, 1906, 100–102.

[84] Флорин В. А. Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды. *Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук* 1948, №9, 1389–1402.

[85] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии. *Успехи физ. наук* 1983, **141** (2), 221–255.

[86] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии. *Успехи мат. наук* 1986, **41** (6), 3–18.

[87] Бялый М. Л., Полтерович Л. В. Геодезические потоки на двумерном торе и фазовые переходы „соизмеримость – несоизмеримость". *Функцион. анализ и его прил.* 1986, **20** (4), 9–16.

[88] Bialy M. L., Polterovich L. V. Lagrangian singularities of invariant tori of hamiltonian systems with two degrees of freedom. *Invent. Math.* 1989, **97** (2), 291–303.

[89] Полтерович Л. В. Сильно оптические лагранжевы многообразия. *Мат. заметки* 1989, **45** (2), 95–104.

[90] Якоби К. Г. Я. Лекции по динамике. Пер. с нем. Л.–М.: Онти, 1936. 271 с.

[91] Арнольд В. И. Разветвлённое накрытие $CP^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология. *Сиб. мат. журн.* 1988, **29** (5), 36–47.

[92] Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функцион. анализ и его прил.* 1989, **23** (3), 1–10.

[93] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 472 с.

[94] Арнольд В. И. Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов. *Успехи мат. наук* 1974, **29** (4), 153–154.

[95] Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра. *Функцион. анализ и его прил.* 1976, **10** (2), 69–70.

[96] Бахтин В. И. Топологические нормальные формы перестроек каустик серии D_μ. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика* 1987, №4, 58–61.

[97] Arnol'd V. I. Critical points of smooth functions. *Proceedings of the International congress of mathematicians*, Vancouver, 1974. Vol. 1. [Vancouver]: Canad. Math. Congress, 1975, 19–39.

[98] Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порождённых отражениями, и особые проекции гладких поверхностей. *Успехи мат. наук* 1979, **34** (2), 3–38.

[99] Solomon L. Invariants of finite reflection groups. *Nagoya Math. J.* 1963, **22**, 57–64.

[100] Гивенталь А. Б. Сворачивание инвариантов групп, порождённых отражениями и связанных с простыми особенностями функций. *Функцион. анализ и его прил.* 1980, **14** (2), 4–14.

[101] Yano T. Flat coordinate system for the deformation of type E_6. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 1981, **57** (8), 412–414.

[102] Saito K. On the periods of primitive integrals. 1. Kyoto: RIMS, 1982, 1-92. Preprint Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.

[103] Eisenbud D., Levine H. I. An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. *Ann. Math.* 1977, **106** (1), 19–38.

[104] Варченко А. Н., Гивенталь А. Б. Отображение периодов и форма пересечений. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (2), 7–20.

[105] Looijenga E. Homogeneous spaces associated to certain semi-universal deformations. *Proceedings of the International congress of mathematicians*, Helsinki, 1978. Vol. 2. Helsinki: ICM, 1980, 529–536.

[106] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I. *Функцион. анализ и его прил.* 1980, **14** (3), 1–13.

[107] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II. *Функцион. анализ и его прил.* 1980, **14** (4), 8–17.

[108] Wells R. O. Compact real submanifolds of a complex manifold with nondegenerate holomorphic tangent bundles. *Math. Ann.* 1969, **179** (2), 123–129.

[109] Gromov M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.* 1985, **82** (2), 307–347.

[110] Творогов В. Б. Парный интегральный оператор Фурье в задаче о распространении разрывов. М.: МГУ, 1979. 42 с. (Деп. в ВИНИТИ, №2872-79).

[111] Творогов В. Б. Резкий фронт и особенности решений одного класса гиперболических уравнений. *Докл. АН СССР* 1979, **244** (6), 1327–1331.

[112] Eliashberg J. Cobordisme des solutions de relations différentielles. *Séminaire sud-rhodanien de géométrie.* 1. *Géométrie symplectique et de contact.* Journées lyonnaises de la Société mathématique de France, 1983. Éd. P.Dazord, N.Desolneux-Moulis. Paris: Hermann, 1984, 17–31.

[113] Audin M. Quelques calculs en cobordisme lagrangien. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) 1985, **35** (3), 159–194.

[114] Audin M. Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes. Paris: Hermann, 1987. 198 p. (Travaux en cours; 20).

[115] Vassilyev V. A. Lagrange and Legendre characteristic classes. Transl. from the Russian. New York: Gordon & Breach, 1988. 268 p. (Advanced studies in contemporary mathematics; 3).

[116] Васильев В. А. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные к особенностям каустик и волновых фронтов. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (3), 10–22.

[117] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 553 с.

[118] Васильев В. А. Самопересечения волновых фронтов и лежандровы (лагранжевы) характеристические числа. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (2), 68–89.

[119] Фукс Д. Б. О характеристических классах Маслова–Арнольда. *Докл. АН СССР* 1968, **178** (2), 303–306.

[120] Petrowsky I. On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. *Мат. сб.* 1945, **17** (3), 289–370.

[121] Васильев В. А. Резкость и локальное условие Петровского для строго гиперболических операторов с постоянными коэффициентами. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1986, **50** (2), 242–283.

[122] Варченко А. Н. О нормальных формах негладкости решений гиперболических уравнений. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1987, **51** (3), 652–665.

[123] Гивенталь А. Б. Скрученные формулы Пикара–Лифшица. *Функцион. анализ и его прил.* 1988, **22** (1), 12–22.

[124] Гивенталь А. Б., Шехтман В. В. Группы монодромии и алгебры Гекке. *Успехи мат. наук* 1987, **42** (4), 138–139.

[125] Cartier P. Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre. *Séminaire Bourbaki* 1989/90. Exp. 716. Paris: Soc. Math. France, 1990, 17–67. (Astérisque; 189–190).

[126] Brieskorn E. Sur les groupes de tresses (d'après V.I.Arnol'd). *Séminaire Bourbaki* 1971/72. Exp. 401. Berlin etc.: Springer, 1973, 21–44. (Lecture notes in mathematics, 317).

[127] Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик. *Успехи мат. наук* 1974, **29** (3), 243–244.

[128] Looijenga E. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.* 1974, **23** (2), 105–116.

[129] Knörrer H. Zum $K(\pi,1)$-Problem für isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. *Compositio Math.* 1982, **45** (3), 333–340.

[130] Горюнов В. В. Проектирования 0-мерных полных пересечений на прямую и $k(\pi,1)$-гипотеза. *Успехи мат. наук* 1982, **37** (3), 179–180.

[131] Горюнов В. В. Геометрия бифуркационных диаграмм простых проектирований на прямую. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (2), 1–8.

[132] Горюнов В. В. Бифуркационные диаграммы некоторых простых и квазиоднородных особенностей. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (2), 23–37.

[133] Горюнов В. В. Особенности проектирования полных пересечений. *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 167–206.

[134] Фукс Д. Б. Когомологии группы кос mod 2. *Функцион. анализ и его прил.* 1970, **4** (2), 62–73.

[135] S e g a l G. Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Invent. Math.* 1973, **21** (3), 213–221.

[136] C o h e n F. R., L a d a T. J., M a y J. P. The homology of iterated loop spaces. Berlin etc.: Springer, 1976. 490 p. (Lecture notes in mathematics; 553).

[137] В а с и л ь е в В. А. Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам деформаций особенностей гладких функций. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 3–29.

[138] V a s s i l i e v V. A. Topology of complements to discriminants and loop spaces. *Theory of singularities and its applications.* Ed. by V.I.Arnol'd. Transl. from the Russian. Providence: Amer. Math. Soc., 1990, 9–21. (Advances in soviet mathematics; 1.)

[139] Г р о м о в М. Л., Э л и а ш б е р г Я. М. Построение гладкого отображения с заданным якобианом. I. *Функцион. анализ и его прил.* 1973, **7** (1), 33–40.

[140] Э л и а ш б е р г Я. М. Об особенностях типа складки. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1970, **34** (5), 1110–1126.

[141] Г и в е н т а л ь А. Б. Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни. *Функцион. анализ и его прил.* 1986, **20** (3), 35–41.

[142] А р н о л ь д В. И. Заметание каустики ребром возврата движущегося фронта. *Успехи мат. наук* 1981, **36** (4), 233.

[143] Щ е р б а к О. П. Проективно двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности. *Тр. Тбил. ун-та* 1982, **232–233**, 280–336.

[144] Щ е р б а к О. П. Волновые фронты и группы отражений. *Успехи мат. наук* 1988, **43** (3), 125–160.

[145] Д а в ы д о в А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной, в окрестности его особой точки. *Функцион. анализ и его прил.* 1985, **19** (2), 1–10.

[146] Д а в ы д о в А. А. Нормальная форма медленных движений уравнения релаксационного типа и расслоения биномиальных поверхностей. *Мат. сб.* 1987, **132** (1), 131–139.

[147] А р н о л ь д В. И. Неявные дифференциальные уравнения, контактные структуры и релаксационные колебания. *Успехи мат. наук* 1985, **40** (5), 188.

[148] А р н о л ь д В. И. Особенности систем лучей. *Успехи мат. наук* 1983, **38** (2), 77–147.

[149] К у л и к о в В. С. Исчисления особенностей вложения общей алгебраической поверхности в проективное пространство $\mathbf{P}^3$. *Функцион. анализ и его прил.* 1983, **17** (3), 15–27.

[150] S a l m o n G. A treatise on the analytic geometry of three dimensions. Vol. 2. New York: Chelsea Pub. Co., 1965. 334 p.

[151] M c C r o r y C., S h i f r i n T., V a r l e y R. The Gauss map of a generic hypersurface in $\mathbf{R}^4$. *J. Differential Geom.* 1989, **30** (3), 689–759.

[152] Choudary A. D. R., Dimca A. On the dual and hessian mappings of projective hypersurfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1987, **101** (3), 461–468.

[153] Banchoff T., Gaffney T., McCrory C. Cups of Gauss mapings. Boston: Pitman, 1982. 88 p. (Research notes in mathematics; 55).

[154] Giusti M: Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes. *Singularities.* Proceedings of the Summer research institute on singularities, Arcata, Calif., 1981. Ed. by P.Orlik. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1983, 457–494. (Proceedings of symposia in pure mathematics; 40).

[155] Матов В. И. Особенности функции максимума на многообразии с краем. *Тр. Семинара им. Петровского* 1981, **6**, 195–222.

[156] Матов В. И. Унимодальные и бимодальные ростки функций на многообразии с краем. *Тр. Семинара им. Петровского* 1981, **7**, 174–189.

[157] Щербак И. Г. Двойственность краевых особенностей. *Успехи мат. наук* 1984, **39** (2), 207–208.

[158] Васильев В. А. Топология пространств функций без сложных особенностей. *Функцион. анализ и его прил.* 1989, **23** (4), 24–36.

[159] Ляшко О. В. Геометрия бифуркационных диаграмм. *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 94–129.

[160] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988. 256 с. (Итоги науки и техн. Сер. „Современные проблемы математики. Фундаментальные направления"; 6).

[161] Горюнов В. В. Векторные поля и функции на дискриминантах полных пересечений и бифуркационных диаграммах проектирований. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 31–54.

[162] Siersma D. Isolated line singularities. *Singularities.* Proceedings of the summer research institute on singularities, Arcata, Calif., 1981. Ed. by P.Orlik. Part 2. Providence: Amer. Math. Soc., 1983, 485–496. (Proceedings of symposia in pure mathematics; 40).

[163] Melrose R. B. Equivalence of glancing hypersurfaces. II. *Math. Ann.* 1981, **255** (2), 159–198.

[164] Ландис Е. Е. Тангенциальные особенности в контактной геометрии. *Успехи мат. наук* 1982, **37** (4), 96.

[165] Ландис Е. Е. Световые элементы в пространстве-времени, проходящие через гиперповерхность в конфигурационном пространстве. *Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу* 1985, **22**, 60–68.

[166] Arnol'd V. I. Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 1982, **2** (3–4), 301–309.

[167] Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения. *Функцион. анализ и его прил.* 1982, **16** (2), 21–29.

[168] Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbf{C},0) \to (\mathbf{C},0)$ с тождественной линейной частью. *Функцион. анализ и его прил.* 1981, **15** (1), 1–17.

[169] Ecalle J. Théorie itérative: introduction à la théorie des invariants holomorphes. *J. Math. Pures Appl. Sér. 9* 1975, **54** (2), 183–258.

[170] Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. *Современные проблемы математики.* (Итоги науки и техн.). Т. 22. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, 3–55.

[171] Гаспарян А. Г. Приложение многомерных матриц к исследованию многочленов. *Докл. АН Арм. ССР* 1980, **70** (3), 133–141.

[172] Щербак О. П. Особенности фронтальных отображений подмногообразий проективного пространства. *Успехи мат. наук* 1982, **37** (4), 95–96.

[173] Казарян М. Е. Особенности границы фундаментальных систем, уплощения проективных кривых и клетки Шуберта. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 215–234.

[174] Kazarian M.E Bifurcations of flattenings and Schubert cells. *Theory of dingularities and its applications.* Ed. by V.I.Arnol'd. Transl. from the Russian. Providence: Amer. Math. Soc., 1990, 145–156. (Advances in soviet mathematics; 1.).

[175] Арнольд В. И. Замечания о пуассоновых структурах на плоскости и других степенях форм объёма. *Тр. Семинара им. Петровского* 1987, **12**, 37–46.

[176] Костов В. П. Версальные деформации дифференциальных форм степени α на прямой. *Функцион. анализ и его прил.* 1984, **18** (4), 81–82.

[177] Ландо С. К. Нормальные формы степеней форм объёма. *Функцион. анализ и его прил.* 1985, **19** (2), 78–79.

[178] Варченко А. Н. О локальной классификации форм объёма в присутствии гиперповерхности. *Функцион. анализ и его прил.* 1985, **19** (4), 23–31.

[179] Костов В. П. Версальные деформации дифференциальных форм вещественной степени на вещественной прямой. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1990, 54 (6), 1168–1180.

[180] Françoise J. - P. Modèle local simultané d'une fonction et d'une forme de volume. *Journées singulières de Dijon*, 1978. Paris: Soc. Math. France, 1978, 119–130. (Asterisque; 59–60).

[181] Матов В. И. топологическая классификация ростков функций максимума и минимакса семейств функций общего положения. *Успехи мат. наук* 1982, **37** (4), 167–168.

[182] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Мат. заметки* 1988, 44 (1), 3–18.

[183] Arnol'd V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.* 1988, **5** (3), 305–315.

[184] K h e s i n B. A. Singularities of light hypersurfaces and structure of hyperbolicity sets for systems of partial differential equations. *Theory of singularities and its applications.* Ed. by V.I.Arnol'd. Transl. from the Russian. Providence: Amer. Math. Soc., 1990, 105–118. (Advances in soviet mathematics; 1.).

[185] В а й н ш т е й н А. Д., Ш а п и р о Б. З. Особенности границы области гиперболичности. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения.* (Итоги науки и техн.). Т. 33. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, 193–214.

[186] T o h n F. Algebraic conditions for hyperbolicity of systems of partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1978, **31** (1), 89–106; **31** (6), 787–793.

[187] К а з а р я н М. Э. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей. *Успехи мат. наук* 1995, **50** (4), 45–70.

[188] З а к а л ю к и н В. М., Р о б е р т с Р. М. Об устойчивых лагранжевых многообразиях с особенностями. *Функцион. анализ и его прил.* 1992, **26** (3), 28–34.

[189] М я с н и ч е н к о О. М. Геодезические на границе в задаче об обходе препятствия и раскрытые ласточкины хвосты. *Функцион. анализ и его прил.* 1995, **29** (2), 82–84.

[190] М я с н и ч е н к о О. М. Прямое произведение раскрытых ласточкиных хвостов в задаче об обходе препятствия. Функцион. анализ и его прил. 1996, **30** (4).

[191] K a z a r i a n M. E. Umbilical characteristic number of lagrangian mappings of 3-dimensional pseudooptical manifolds. Bochum, 1994. 12p. (Preprint Ruhr-Universität, 172).

[192] A r n o l d V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. *Singularities and bifurcations.* Ed. by V.I.Arnol'd. Transl. from the Russian. Providence: Amer. math. soc., 1994. (Advances in soviet mathematics, 21), 33–92.

[193] А р н о л ь д В. И. Инварианты и перестройки фронтов на плоскости. *Тр. Мат. ин-та им. Стеклова* 1995, **209**, 14–64.

[194] А р н о л ь д В. И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернинов. *Успехи мат. наук* 1995, **50** (1), 3–68.

[195] A r n o l ' d V. I. Topological invariants of plane curves and caustics. Providence: Amer. math. soc., 1994. 60 p. (University lecture series, 5).

[196] А р н о л ь д В. И. Топологические проблемы теории распространения волн. *Успехи мат. наук* 1996, **51** (1), 1–48.

[197] К а з а р я н М. Э. Относительная теория Морса однородных расслоений и циклические гомологии. Функцион. анализ и его прил. 1996 (в печати).

[198] А р н о л ь д В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функцион. анализ и его прил.* 1996, **30** (1), 1–17.

[199] W a s s e r m a n n G. Stability of caustics. *Math. Ann.* 1975, **216** (1), 43–50.

[200] Богаевский И. А. Перестройки фронтов в эволюционных семействах. *Тр. Мат. ин-та им. Стеклова* 1995, **209**, 65–83.

[201] Богаевский И. А. Особенности распространения коротких волн на плоскости. *Мат. сб.* 1995, **186** (11), 35–52.

Предметный указатель

$K(\pi,1)$-свойство 133
R^+-эквивалентность 29
ADE-семейства 27

Автодвойственная особенность 256
Алгебраическая гиперповерхность, гиперболическая по отношению к точке 277
— —, строго гиперболическая по отношению к точке 277
Алгебра 86
Амплитуда 31
Асимптотические направления 160
Асимптотические прямые 160
Асимптотический краевой вектор 199
Ассоциированное отображение периодов 99

Бантик 117
База проектирования 159
Базисные поля V_λ 83
Бернулли числа 55
Биасимптотический краевой вектор 199
Бикаустика 155, 220
Бинарные формы 10
Биркгофа бильярдное преобразование 202
Биуплощение кривой 231
Бифуркационная диаграмма краевой особенности 89
— — нулей краевой особенности 184
— — нулей проектирования 191
— — проектирования 191
— — семейства функций 134
— — функций (для краевой особенности) 185
— — функций 254
Бифуркационная точка 97
Блюдце, особенность 47
Богаевского список 55
Большая каустика 45
Большой фронт 75
Брискорна особенность 36
Бюргерса уравнение 53

Васильева комплекс 127
Вейнстейна теорема 13
Вектор амплитуды 276
Версальная деформация 178
— — краевой особенности 88, 170
Версальное семейство 30
Верхние геодезические 205
Видимый контур 189
Виета отображение 71, 82
Власова уравнения 107
Волновой вектор 275
Волновой фронт 69
Вооружённый контактный элемент 115
Временноподобная точка 277
Временноподобные направления 277
Вторая каноническая проекция 199

Гамильтона функция 107
Гамильтоново векторное поле 107
Гаусса отображение 26
Гаусса–Манина связности 95
Геодезические 205
Гивенталя башня 224
Гивенталя теорема 13
Гиперболическая система дифференциальных уравнений с частными производными 277
Гиперболический вариационный принцип 280
Гиперболическое отображение 281
Гиперикосаэдр 250

Гиперповерхность вырождения 17
Главные отображения периодов 109
Гомологическое уравнение 14
Горюнова список 171
Градиентное отображение 25
Группа кос 133, 254, 266
Группа отражений 71, 81
Группы Лагранжевых кобордизмов 116
Группы Лежандровых кобордизмов 117
Губы, особенность 47, 219

Дарбу базис 21
Дарбу координаты контактного пространства 60
— — симплектического пространства 6
Дарбу теорема 6
Двойственные гиперповерхности 66
Двойственные проективные кривые 230
Дефект корневого дерева 149
Дефект функции 148
Деформации скорости 178
Деформация 178
Джусти список кривых 170
Дискриминант особенности 97
Дискриминантная гиперповерхность 72
Дискриминантное многообразие 72, 82
Дисперсионное соотношение 276
Дифференцирование коммутативной алгебры 91
Длинный корень 177
Длинный элемент 177
Допустимое отображение 101
Допустимые отождествления 89, 91
Дынкина диаграмма 72

Естественная контактная структура 61

Зельдовича блин 47
Зеркало 71, 82

Идеал 86
Иерархия гладких кривых 231
Иерархия критических точек 30
Изотопия 101
Изотропные отображения 150
Икосаэдра бинарная группа 250
Инвариантов сворачивание 82
Инварианты 82
Инволюция 201
Индекс β многогранника Ньютона 33
Индекс γ многогранника Ньютона 34
Индекс кривой, не имеющей горизонтальных касательных в точках перегиба 141
Индекс поверхности 145
Индекс проективной кривой 122
Инфинитезимально невырожденное отображение периодов 100
Источник света 26
Исчезающий цикл 177

Каноническая проекция 199
Касательный краевой вектор 199
Каустика 1, 25, 134
Кноррера пример 194
Кокасательные векторы края 202
Кократность 224
Кокстера число 254, 135
Контактная гиперплоскость 59
Контактная структура 59
Контактная структура (пространства многочленов) 244, 245, 247, 249, 269
Контактная триада 242
Контактная форма 59
Контактный элемент 61
Контактоморфизм 60
Кориентируемый класс 125
Короткие корни 177
Короткий элемент 177
Косоортогональность 6
Кошелёк, особенность 28
Краевая локальная алгебра 183
Краевой орт 199

Краевые особенности 183, 88
Кратность μ краевой особенности 183
Кривая параболических точек $П_{3,2}$ 160
Кривая перегибов асимптотических линий $П_{4,1}$ 161
Критическое значение 184

Лагранжа двойственность 175
Лагранжа множители 175
Лагранжев (цилиндрический) кобордизм 116
Лагранжев идеал 207
Лагранжев край 115
Лагранжева особенность 26
Лагранжева эквивалентность 25
Лагранжево включение 150
Лагранжево двойственная функция 175
Лагранжево многообразие 22
— — (особое) 207
— —, порождённое триадой 235
Лагранжево отображение 25
Лагранжево подмногообразие 22
Лагранжево расслоение 62
Лагранжевы характеристические классы когомологий 127
Ласточкин хвост, особенность 27
— —, поверхность 2
Лежандра двойственность 64
Лежандра преобразование 66
Лежандров кобордизм 116
Лежандров край 115
Лежандрово многообразие, порождённое триадой 243
Лежандрово отображение 64
Лежандрово подмногообразие 62
Лежандрово расслоение 62
Лежандровы особенности 73
Лейбница тождество 82, 106
Линеаризованное сворачивание инвариантов 87
Локальная алгебра 86

Луч 198, 290
Ляшко теорема 185
Ляшко–Лойенги отображение 136
Ляшко–Лойенги теорема 135

Максвелла множество 53, 135
Максимальный идеал 86
Мартине модели 18
Мартине особенности 18
Маслова индекс 123
Маслова канонический оператор 40
Маслова класс 124
Матричный символ 276
Мгновенный фронт 75
Мельроза инволюции 202
Милнора слой 176
Минковского задача 147
Многообразие 1-струй 60
Многообразие наблюдения 26
Многообразие орбит 81
Многообразие ориентированных прямых 10
Многообразие уровня 97
Морсовская критическая точка 32

Надстройка контактной триады 247
Надстройка проектирования 169
Надстройка симплектической триады 237
Невырожденное отображение периодов 96
Нейтральная гиперповерхность контактного потока 244
Нерегулярные орбиты 72, 81
Нормальное отображение 26
Носитель ряда 33
Ньютона многогранник 33

Область гиперболических точек $П_{3,1}$ 160
Область эллиптических точек $П_2$ 160
Обобщённый ласточкин хвост 72, 82

Обратная форма 103
Обратная форма пересечений 103
Огибающая 68
Омбилическая особенность 28
Оптические лагранжевы особенности 49
Оптические перестройки 50
Оптическое лагранжево подмногообразие 49
Особенности притягивают особенности 74
Отмеченные циклы 180
Отображение главного символа 278
Отображение периодов 95
Отображение периодов дифференциальной формы 95
Отображение периодов формы 98
Отображение рассеяния 291
Отображение складывания 155
Отражение 70, 81

Педальная гиперповерхность 67
Перестройка "клюв-к-клюву" 219
Перестройка 2
Перестройка рождения блюдца 50
Перестройки каустик 43
Пирамида, особенность 28
Платоновой иерархия проектирований 159
Поверхность краевых векторов 198
Поверхность ортов 198
Положительные точки возврата 122, 149
Положительные точки перегиба 122
Порядок кривой 231
Потенциальное поле V_a 83
Потенциальное поле с потенциалом a 83
Почка 142
Примыкания особенностей 37
Принцип стационарной фазы 26
Проективизация кокасательного расслоения 61
Проектирование 159
Проектирование "на" 169
Производящее семейство 26, 146
Простые краевые особенности 88
Простые особенности 73
Пуанкаре индекс 93
Пуассона скобка 106
Пуассонова структура 105, 239
Пуассоново многообразие 106
Пуассоновой структуры лист 108
Пфаффова структура 61
Пфаффа уравиение 61

Развёртывающаяся поверхность 155
Раскрытый зонтик 150, 260
Раскрытый ласточкин хвост 12, 104, 152, 216, 228
Расслоение контактных элементов 61
Релаксациоиные системы 155

Световая гиперповерхность 278
Световой конус 278
Сворачивание инвариантов 82
Символ 276
Симплектическая структура 6
Симплектическая триада 234
Симплектическая форма 6
Симплектоморфизм 8
Система дифференциальных уравнений с частными производными, гиперболическая в точке 278
Складка, особенность 28
След многочлена 11
Сложенный зонтик 154
Спектр особенности 33
Список лагранжевых особенностей 27
Стабильная R^+-эквивалентность 29
Стабильная эквивалентность проектирований 169

Стандартная контактная триада 245
Стандартное особое лежандрово многообразие 245
Струя 60

Типичное дерево 148
Точка возврата 28
Точки $П_{4,2}$ 161
Точки биперегиба $П_5$ 161
Точки самопересечения $П_{4,3}$ 161
Точки типа $П_{3,3}$ 161
Точки уплощения 155
Точное лагранжево подмногообразие 119
Триада 234, 242

Ударные волны 56
Уитни–Кэли зонтик 150
Уплощение кривой 231
Усечённая база 183
Усечённая версальная деформация 183

Фаза 31
Фама–Брискорна особенность 36
Фазовое пространство 7
Флаг постоянного ранга 22
Флаг 21
Флаг подмногообразий 22
Форма пересечений невырожденного отображения периодов 102
Френеля гиперповерхность 276
Френеля интеграл 32
Френеля конус 276
Фронт 64
Фронт проективной пространственной кривой 231
Фронтальное отображение 233
Функция времени 218, 235
Функция главного символа 278

Характеристика 7
Характеристический конус 276
Характеристическое направление 7, 205
Характеристическое уравнение 276
Хрупкости принцип 250

Цилиндр 264

Шестиугольная диаграмма 208
Шлейф 257

Щербака список 262

Эвольвенты 195
Эйленберга–Маклейна пространство 133, 266
Эйлера числа 55
Эйлерово дифференцирование 91
Эквидистантные гиперповерхности 66

Якоби тождество 106