В. И. Арнольд
Б. А. Хесин

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

МЦНМО

Applied Mathematical Sciences

Vladimir I. Arnold Boris A. Khesin

Topological Methods in Hydrodynamics

With 78 Illustrations

Springer

В. И. Арнольд, Б. А. Хесин

Топологические методы в гидродинамике

Перевод с английского
Дополненное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 517.958:531.32
ББК 22.253.3
А84

Арнольд В. И., Хесин Б. А.

А84 Топологические методы в гидродинамике / Перевод с англ. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-312-8

Данная книга — это первая монография, в которой топологические, теоретико-групповые и геометрические задачи идеальной гидродинамики и магнитогидродинамики рассматриваются с единой точки зрения. Необходимый подготовительный материал из гидродинамики и чистой математики излагается с большим количеством примеров и рисунков.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и специалистов по чистой или прикладной математике, работающих в таких областях, как гидродинамика, группы Ли, динамические системы и дифференциальная геометрия.

ББК 22.253.3

Translation from the English language edition:
Topological Methods in Hydrodynamics by Vladimir I. Arnold, Boris A. Khesin.
Copyright © 1998 Springer-Verlag New York, Inc.
Springer is a part of Springer Science+Business Media.
All Rights Reserved.

Научное издание

Арнольд Владимир Игоревич, Хесин Борис Аронович

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Подписано в печать 18.06.2007 г. Формат 70 × 100 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 24,5.
Тираж 1000 экз. Заказ № 2003

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Типография „Новости“»
105005, Москва, ул. Фридриха Энгельса, 46

ISBN 0-387-94947-X (англ.)
ISBN 978-5-94057-312-8

© МЦНМО, перевод на рус. яз., 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **9**

Глава I. Групповая и гамильтонова структуры динамики жидкости **13**

§ 1. Группы симметрий твердого тела и идеальной жидкости 13

§ 2. Группы Ли, алгебры Ли и присоединенное представление . . . 15

§ 3. Коприсоединенное представление группы Ли 22

3.1. Определение коприсоединенного представления (22). 3.2. Сопряженное пространство к пространству плоских бездивергентных векторных полей (23). 3.3. Алгебра Ли бездивергентных векторных полей на многообразии произвольной размерности и ее сопряженное пространство (25).

§ 4. Левоинвариантные метрики и твердое тело для произвольной группы 26

§ 5. Приложения к гидродинамике 30

§ 6. Гамильтонова структура уравнений Эйлера 36

§ 7. Идеальная гидродинамика на римановых многообразиях 42

7.1. Гидродинамическое уравнение Эйлера на многообразиях (42). 7.2. Сопряженные пространства алгебр Ли бездивергентных полей (43). 7.3. Оператор инерции n-мерной жидкости (48).

§ 8. Доказательства теорем об алгебре Ли бездивергентных векторных полей и сопряженном к ней пространстве 50

§ 9. Законы сохранения в многомерной гидродинамике 54

§ 10. Групповая структура идеальной магнитной гидродинамики . . 61

10.1. Уравнения магнитной гидродинамики и уравнения Кирхгофа (61). 10.2. Магнитное расширение группы Ли (62). 10.3. Гамильтонова формулировка уравнений Кирхгофа и магнитной гидродинамики (65).

§ 11. Конечномерная аппроксимация уравнения Эйлера 67

11.1. Аппроксимации вихревыми системами на плоскости (68). 11.2. Неинтегрируемость систем не менее четырех точечных вихрей (70). 11.3. Гамильтоновы аппроксимации вихрей в трехмерном пространстве (71). 11.4. Конечномерные аппроксимации групп диффеоморфизмов (71).

§ 12. Уравнение Навье–Стокса с групповой точки зрения 74

Глава II. Топология стационарных течений жидкости **80**

§ 1. Классификация трехмерных стационарных течений 80

1.1. Стационарные решения уравнения Эйлера и функции Бернулли (80). 1.2. Структурные теоремы (84).

§ 2. Вариационные принципы для стационарных решений и приложения к двумерным течениям 87

2.1. Минимизация энергии (87). 2.2. Задача Дирихле и стационарные течения (89). 2.3. Связь двух вариационных принципов (92). 2.4. Полугрупповой вариационный принцип для двумерных стационарных течений (93).

§ 3. Устойчивость стационарных точек на алгебрах Ли 96

§ 4. Устойчивость двумерных течений жидкости 100

4.1. Критерии устойчивости для стационарных течений (101). 4.2. Блуждающие решения уравнения Эйлера (109).

§ 5. Линейное и экспоненциальное растяжение частиц и быстро осциллирующие возмущения 111

5.1. Линеаризованное и укороченное уравнения Эйлера (111). 5.2. Переменные действие-угол (112). 5.3. Спектр укороченного уравнения (113). 5.4. Теорема Сквайра для сдвиговых течений (114). 5.5. Стационарные течения с экспоненциальным растяжением частиц (116). 5.6. Исследование линеаризованного уравнения Эйлера (117). 5.7. Устойчивы ли пространственные стационарные течения? (118).

§ 6. Свойства стационарных течений на многообразиях большей размерности 122

6.1. Обобщенные течения Бельтрами (122). 6.2. Структура четырехмерных стационарных течений (124). 6.3. Топология функции вихря (125). 6.4. Отсутствие гладких стационарных течений и точность ограничений (130).

Глава III. Топологические свойства магнитных и вихревых полей 132

§ 1. Минимальная энергия и спиральность вмороженного поля . . . 132

1.1. Вариационная задача для магнитной энергии (132). 1.2. Экстремальные поля и их топология (133). 1.3. Оценка энергии через спиральность (134). 1.4. Спиральность полей на многообразиях (137).

§ 2. Топологические препятствия к релаксации энергии 142

2.1. Модельный пример: две зацепленных трубки тока (142). 2.2. Нижняя граница энергии для нетривиального зацепления (144).

§ 3. Задача минимизации Сахарова–Зельдовича 147

§ 4. Асимптотический коэффициент зацепления 153

4.1. Асимптотический коэффициент зацепления пары траекторий (153). 4.2. Отступление о формуле Гаусса (156). 4.3. Другое определение асимптотического коэффициента зацепления (158). 4.4. Формы зацепления на многообразиях (160).

§ 5. Асимптотическое число пересечений 165

5.1. Оценки энергии снизу для типичных векторных полей (165). 5.2. Асимптотическое число пересечений для узлов и зацеплений (168). 5.3. Конформный модуль тора (172).

§ 6. Энергия узла 173

6.1. Энергия заряженного контура (173). 6.2. Обобщения энергии узла (175).

§ 7. Обобщенные спиральности и коэффициенты зацепления 178

7.1. Относительная спиральность (178). 7.2. Эргодический смысл интегралов спиральности в старших размерностях (181). 7.3. Интегралы зацепления высших порядков (187). 7.4. Инвариант Калугареану и коэффициент самозацепления (191). 7.5. Голоморфный коэффициент зацепления (192).

§ 8. Асимптотическая голономия и приложения 198

8.1. Инварианты Джонса–Виттена для векторных полей (198). 8.2. Интерпретация характеристических классов типа Годбийона–Вея (204).

Глава IV. Дифференциальная геометрия групп диффеоморфизмов 207

§ 1. Плоскость Лобачевского и предварительные сведения по дифференциальной геометрии 208

1.1. Плоскость Лобачевского как группа аффинных преобразований (208). 1.2. Кривизна и параллельный перенос (209). 1.3. Поведение геодезических на римановых многообразиях (212). 1.4. Соотношение между ковариантной производной и производной Ли (214).

§ 2. Секционные кривизны группы Ли, снабженной односторонне инвариантной метрикой 216

§ 3. Риманова геометрия группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов двумерного тора 220

3.1. Тензор кривизны группы диффеоморфизмов тора (220). 3.2. Вычисления кривизн (223).

§ 4. Группы диффеоморфизмов и недостоверные прогнозы 225

4.1. Кривизна различных групп диффеоморфизмов (225). 4.2. Недостоверность долгосрочных предсказаний погоды (229).

§ 5. Внешняя геометрия группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы 230

§ 6. Сопряженные точки в группе диффеоморфизмов 234

§ 7. Вокруг конечности диаметра группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы 236

7.1. Связь внутренней и внешней геометрии группы диффеоморфизмов (237). 7.2. Диаметр группы диффеоморфизмов (238). 7.3. Сравнение метрик и пополнение группы $\mathcal{D}(M)$ (239). 7.4. Отсутствие кратчайшего пути (240). 7.5. Дискретные течения (245). 7.6. Наброски доказательств (246). 7.7. Обобщенные течения (247). 7.8. Аппроксимация гладких течений жидкости обобщенными (250). 7.9. Существование сопряженных точек на группах диффеоморфизмов (253).

§ 8. Бесконечный диаметр группы гамильтоновых диффеоморфизмов и симплектическая гидродинамика 255

8.1. Правоинвариантные метрики на симплектоморфизмах (256). 8.2. Инвариант Калаби (258). 8.3. Биинвариантные метрики и псевдометрики на группе гамильтоновых диффеоморфизмов (264). 8.4. Биинвариантная псевдориманова метрика и функционал действия на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного многообразия (268).

Глава V. Проблема быстрого кинематического динамо 271

§ 1. Динамо и растяжение частиц 271

1.1. Быстрое и медленное кинематическое динамо (271). 1.2. Недиссипативные динамо на произвольных многообразиях (274).

§ 2. Дискретное динамо в размерности два 276

2.1. Динамо из отображения кошки на торе (276). 2.2. Подковы и многократные складки в конструкциях динамо (279). 2.3. Диссипативные динамо на поверхностях (283). 2.4. Асимптотическое число Лефшеца (285).

§ 3. Главные теоремы антидинамо 286

3.1. Теоремы Коулинга и Зельдовича (286). 3.2. Теоремы антидинамо для тензорных плотностей (286). 3.3. Отступление об уравнении Фоккера–Планка (289). 3.4. Доказательство теорем антидинамо (293). 3.5. Дискретные версии теорем антидинамо (296).

§ 4. Трехмерные модели динамо 297

4.1. Механизм «веревочного динамо» (297). 4.2. Численное наблюдение эффекта динамо (298). 4.3. Модель диссипативного динамо на трехмерном римановом многообразии (299). 4.4. Геодезические потоки и дифференциальные операции на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (305). 4.5. Сохранение энергии и особенности уравнения Эйлера (310).

§ 5. Показатели динамо в терминах топологической энтропии . . . 310

5.1. Топологическая энтропия динамических систем (310). 5.2. Границы показателей в недиссипативных моделях динамо (311). 5.3. Верхние границы для диссипативных L^1 динамо (312).

Глава VI. Динамические системы гидродинамического происхождения 314

§ 1. Уравнение Кортевега–де Фриза как уравнение Эйлера 314

1.1. Алгебра Вирасоро (314). 1.2. Принцип сдвига аргумента и интегрируемость уравнений движения многомерного твердого тела (318). 1.3. Интегрируемость уравнения КдФ (323). 1.4. Отступление о когомологиях алгебр Ли и коцикле Гельфанда–Фукса (326).

§ 2. Уравнения газовой динамики и сжимаемых жидкостей 328

2.1. Баротропные жидкости и газовая динамика (329). 2.2. Другие консервативные системы уравнений, связанные с движением жидкости (333). 2.3. Уравнение бесконечной проводимости (335).

§ 3. Кэлерова геометрия и динамические системы на пространстве узлов 336

3.1. Геометрические структуры на множестве вложенных кривых (337). 3.2. Уравнение нити, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение цепочки Гейзенберга (342). 3.3. Группы петель и общее уравнение Ландау–Лифшица (344).

§ 4. Уравнение Соболева 346

§ 5. Эллиптические координаты с гидродинамической точки зрения 351

5.1. Заряды на квадриках в трех измерениях (351). 5.2. Заряды на многомерных квадриках (353).

Литература 356

Предметный указатель 390

ВВЕДЕНИЕ

«...ad alcuno, dico, di quelli, che troppo laconiacamente vorrebbero vedere, nei piu' angusti spazii che possibil fusse, ristretti i filosofici insegnamenti, si' che sempre si usasse quella rigida e concisa maniera, spogliata di qualsivoglia vaghezza ed ornamento, che e' propria dei puri geometri, li quali ne' pure una parola proferiscono che dalla assoluta necessita' non sia loro suggerita.

Ma io, all'incontro, non ascrivo a difetto in un trattato, ancorche' indirizzato ad un solo scopo, interserire altre varie notizie, purche' non siano totalmente separate e senza veruna coerenza annesse al principale instituto»[1].

Galileo Galilei
«Lettera al Principe Leopoldo di Toscana» (1623)

Гидродинамика относится к небольшому числу фундаментальных проблем математики, успехи в которых могут служить мерилом действительного прогресса математики в целом. Много удивительных достижений в этой области основывается не столько на эксперименте, сколько на глубоких теориях, стимулировавших, в свою очередь, развитие таких областей математики как теория функций комплексного переменного, топология, теория устойчивости, теория бифуркаций, теория вполне интегрируемых динамических систем.

Несмотря на все эти успехи, гидродинамика с ее поразительными эмпирическими законами остается вызовом для математиков. Такие явления как турбулентность еще не имеют строгой математической теории, и даже вопросы существования решений основных уравнений гидродинамики трехмерной жидкости остаются открытыми.

Простейшей, но уже очень содержательной математической моделью гидродинамики является динамика идеальной (несжимаемой и невязкой) однородной жидкости. С математической точки зрения теория такой жидкости есть ни что иное, как изучение геодезических на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов области течения, где группа снабжена правоинвариантной римановой метрикой.

---

[1] «...некоторые предпочитают видеть научные тексты спресованными слишком лаконично в минимальный объем и используют для этого всегда такую строгую и краткую манеру, которой однако не хватает красоты и изящества и которая так популярна среди чистых геометров, не произнесущих и одного слова, если только оно не вызвано абсолютной необходимостью.

Я же, напротив, не считаю недостатком трактата, хотя бы и посвященного одной цели, вставлять в него всевозможные дополнительные замечания там, где они уместны и соответствуют главной цели». Галилео Галилей [Gal].

В 1765 году Л. Эйлер [Eul] опубликовал уравнения движения твердого тела, носящие его имя. Эйлеровские движения твердого тела являются геодезическими на группе вращений трехмерного евклидова пространства. Группа вращений при этом снабжена левоинвариантной римановой метрикой, и теория Эйлера, в сущности, использует только это одно обстоятельство. Уравнения Эйлера сохраняют силу для произвольной группы. Для других групп также получаются «уравнения Эйлера» — например, уравнения движения твердого тела в многомерном пространстве, уравнения Эйлера гидродинамики идеальной жидкости и т. д.

Теоремы Эйлера об устойчивости вращения вокруг большой и вокруг малой осей эллипсоида инерции твердого тела также имеют аналоги в случае произвольной группы. В случае гидродинамики эти аналоги доставляют нелинейные обобщения теоремы Рэлея об устойчивости двумерных течений без точек перегиба профиля скоростей.

Описание течений идеальной жидкости при помощи геодезических правоинвариантной римановой метрики позволяет применить к исследованию этих течений методы римановой геометрии. Для этого нет необходимости строить сколько-нибудь последовательную теорию бесконечномерных римановых многообразий (что связано со значительными аналитическими трудностями, например, из-за отсутствия теорем существования решений соответствующих дифференциальных уравнений).

Стратегия применения геометрических методов к бесконечномерным задачам состоит скорее в том, чтобы, установив какие-либо факты в конечномерной ситуации (для геодезических инвариантных метрик на конечномерных группах Ли), использовать их, чтобы *сформулировать* соответствующие факты в бесконечномерном случае групп диффеоморфизмов. Доказательства этих окончательных результатов часто можно затем сделать строгими, минуя трудные вопросы обоснования промежуточных результатов (вроде продолжимости решений на нужный отрезок времени). Получаемые на этом пути результаты носят характер *априорных* утверждений: те или иные тождества или неравенства имеют место при любом разумном понимании решений всякий раз, когда нужное решение существует, но само это существование остается под вопросом.

В частности, мы выведем формулы для римановой кривизны группы, снабженной инвариантной римановой метрикой. Применяя эти формулы к случаю бесконечномерного многообразия, геодезическими которого являются движения идеальной жидкости, мы находим, что риманова кривизна во многих случаях отрицательна. Отрицательность кривизны влечет неустойчивость движения по геодезическим (как это хорошо известно из геометрии конечномерных римановых многообразий).

Применяя этот результат к (бесконечномерному) случаю групп диффеоморфизмов, мы приходим к выводу, что движение идеальной жидкости *неустойчиво* (в том смысле, что небольшое изменение начальных условий вызывает со временем большое изменение перемещений частиц). Более того, формулы для кривизны позволяют оценить величину показателя экспо-

ненциального расхождения движений с близкими начальными условиями, а следовательно, и время, после которого движение масс жидкости становится принципиально непредсказуемым.

Например, в простейшей идеализированной модели атмосферы (рассматриваемой как двумерная идеальная жидкость на поверхности тора) отклонения возрастают за два месяца в 10^5 раз. Ясно, что уже одно это обстоятельство делает динамический прогноз погоды на такое время практически невозможным (независимо от того, насколько мощные компьютеры и сколь густая сеть данных для этого используется).

Мы попытались сделать главы книги независимыми друг от друга, насколько это возможно. Ссылки внутри одной и той же главы не содержат ее номер. Для первого знакомства с предметом мы адресуем читателя к следующим параграфам в соответствующих главах: § 1–5 и § 12 гл. I, § 1 и § 3–4 гл. II, § 1–2 и § 4 гл. III, § 1 гл. IV, § 1–2 гл. V, § 1 и § 4 гл. VI.

Некоторые утверждения в этой книге могут оказаться новыми даже для специалистов. Отметим классификацию локальных законов сохранения в идеальной гидродинамике (теорема 9.9, гл. I), решение М. Фридмана проблемы Сахарова–Зельдовича о минимизации энергии незаузленного магнитного поля (теорема 3.1, гл. III), обсуждение конструкции инвариантов многообразий, основанных на оценках энергии узлов (замечание 2.6, гл. III), обсуждение комплексной версии инвариантов Васильева для зацеплений (гл. III, п. 7.5), замечание Б. Зельдовича о медианах треугольника Лобачевского (задача 1.4, гл. IV), соотношение ковариантной производной векторного поля и оператора инерции в гидродинамике (гл. IV, п. 1.4), отступление об уравнении Фоккера–Планка (гл. V, п. 3.3) и конструкцию динамо при помощи геодезического потока на поверхности постоянной отрицательной кривизны (гл. V, п. 4.4). В русское издание мы также постарались включить ссылки на самые недавние исследования и решения ряда вопросов, поставленных в английском издании этой книги [AKh2]. К их числу относятся описание соотношения между эйлеровой и лагранжевой устойчивостью [Pre], доказательство фредгольмовости экспоненциального отображения на группе диффеоморфизмов в двумерном случае [EbM, EbMP], универсальность уравнения Монжа–Ампера в задачах гидродинамики и оптимального переноса массы [KhM2], решение «проблемы коротких путей» в определении асимптотического инварианта Хопфа [Vog], а также броуновская интерпретация многомерного аналога этого инварианта [Riv, Kh3]. Заметно расширен параграф, написанный А. Шнирельманом, где, в частности, добавлено описание слабых решений двумерного уравнения Эйлера в терминах обобщенных континуальных кос [Shn9]. Многие по-прежнему открытые вопросы гидродинамики собраны в книге [Arn26].

* * *

Мы глубоко признательны всем тем, кто помогал нам на разных этапах работы: Ф. Аикарди, М. А. Бергеру, Ж.-Л. Брылински, А. Вайнштейну, О. Я. Виро, М. М. Вишику, В. А. Владимирову, В. Л. Гинзбургу, М. Л. Громову, А. Д. Джилберту, Л. А. Дикому, В. М. Закалюкину, И. С. Захаревичу,

Я. Б. Зельдовичу, А. В. Зоричу, В. А. Зоричу, Ю. С. Ильяшенко, К. Кингу, В. В. Козлову, А. Н. Колмогорову, Е. И. Коркиной, О. А. Ладыженской, П. Лауренсу, Ж. Лере, А. М. Лукацкому, М. Ю. Любичу, Д. Мак-Дафф, С. В. Манакову, Дж. Е. Марсдену, А. С. Мищенко, Ю. Мозеру, Р. Монтгомери, Дж. Моро, Х. К. Моффату, Н. А. Некрасову, Ю. А. Неретину, С. П. Новикову, В. Ю. Овсиенко, В. И. Оселедцу, Л. В. Полтеровичу, М. Поляку, Т. С. Ратью, С. Резникову, К. Роже, А. А. Рослому, А. А. Рузмайкину, А. Д. Сахарову, Д. Серру, Я. Г. Синаю, С. Л. Соболеву, Д. Д. Соколову, С. Л. Табачникову, А. Н. Тодорову, Л. Д. Фаддееву, В. В. Фоку, М. Х. Фридману, У. Фришу, К. М. Ханину, М. Хенону, Х. Хоферу, В. Ю. Цейтлину, Е. Цендеру, Ю. В. Чеканову, С. Чилдрессу, Б. З. Шапиро, Л. Шварцу, А. И. Шнирельману, М. А. Шубину, Д. Г. Эбину, Я. М. Элиашбергу, М.-Р. Эрману, В. И. Юдовичу, Л.-С. Янг и многим другим.

Параграф 7 гл. IV был написан А. И. Шнирельманом. Начальный вариант § 5 гл. VI написан Б. З. Шапиро, а замечание 4.11 гл. II — Дж. Е. Марсденом. Мы особенно обязаны О. С. Козловскому и Г. Мисиолеку за многочисленные обсуждения различных тем этой книги и за их многочисленные полезные замечания. О. С. Козловский также сообщил нам свои недавние неопубликованные результаты для нескольких параграфов в гл. V (в частности, для п. 1.2, п. 2.3, п. 3.5).

Мы благодарны А. Мекишу за помощь с рисунками и Д. Крамеру за тщательную правку английской рукописи. Подготовка книги была частично поддержана РФФИ и NSERC.

Борис Хесин сомневается, что этот проект был бы когда-нибудь закончен без неутомимой моральной поддержки его жены Маши в течение всей работы над книгой, казавшейся бесконечной. Он также признателен за гостеприимство Институту Макса Планка в Бонне и Институтам высших исследований в Бюр-сюр-Иветте и в Принстоне.

Русское издание книги было бы невозможным без помощи Т. В. Белокриницкой, В. М. Закалюкина, О. С. Козловского, А. М. Лукацкого, П. Е. Пушкаря, а также Ю. Н. Торхова и С. А. Ботовой. Им всем мы чрезвычайно признательны.

ГЛАВА I

ГРУППОВАЯ И ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Группа, с которой мы чаще всего будем иметь дело в гидродинамике — это бесконечномерная группа диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема. Можно также связать интересные системы с другими группами, в частности, конечномерными. Например, обычная теория твердого тела с неподвижной точкой соответствует группе вращений SO(3), в то время как геометрия Лобачевского имеет дело с группой сдвигов и растяжений векторного пространства. Наши конструкции равным образом применимы и к калибровочным группам, используемым в физике. Последние занимают промежуточное положение между группой вращений твердого тела и группами диффеоморфизмов. Эти группы уже бесконечномерны, но еще слишком просты, чтобы служить моделью для гидродинамики.

В этой главе мы изучим геодезические односторонне инвариантных метрик на группах Ли. Принцип наименьшего действия утверждает, что движение таких физических систем, как твердые тела и идеальные жидкости, описывается геодезическими этих метрик, заданных кинетической энергией.

§ 1. Группы симметрий твердого тела и идеальной жидкости

Определение 1.1. Множество G гладких преобразований многообразия M в себя называется *группой*, если:

1) вместе с любыми двумя преобразованиями $g, h \in G$ композиция $g \circ h$ принадлежит G (символ $g \circ h$ означает, что первым применяется h, а затем g);

2) вместе с любым $g \in G$ обратное преобразование g^{-1} также принадлежит G.

Из 1) и 2) следует, что каждая группа содержит тождественное преобразование (единицу) e.

Группа называется *группой Ли*, если G имеет гладкую структуру и операции 1) и 2) являются гладкими.

Пример 1.2. Все вращения твердого тела вокруг начала координат образуют группу Ли SO(3).

Пример 1.3. Диффеоморфизмы некоторой области M, сохраняющие элемент объема, образуют группу Ли. Мы обозначим эту группу $S\mathrm{Diff}(M)$.

Группа $S\mathrm{Diff}(M)$ может рассматриваться как конфигурационное пространство идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей область M. Действительно, течение жидкости определяет в каждый момент времени t отоб-

ражение g^t области течения на себя (начальное положение любой частицы жидкости переносится в конечное ее положение в момент t). Все конечные положения, т. е. конфигурации системы (или «перестановки частиц»), образуют «бесконечномерное многообразие» $S\mathrm{Diff}(M)$.

Здесь и далее мы рассматриваем только диффеоморфизмы M, которые могут быть связаны непрерывным семейством диффеоморфизмов с тождественным преобразованием. Соответственно, $S\mathrm{Diff}(M)$ обозначает связную компоненту единицы группы всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих объемы.

Кинетическая энергия жидкости (в предположении, что ее плотность равна 1) является интегралом (по области течения) от половины квадрата скорости частиц. Так как жидкость несжимаема, интегрирование может производиться как по элементу объема, состоящему из начальных положений частиц, так и по элементу объема dx, занимаемому частицами в момент t:

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_M v^2\,dx,$$

где v является скоростью частицы жидкости: $v(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}g^t(y)$, $x = g^t(y)$ (y является начальной позицией той частицы, которая в момент t находится в точке x), см. рис. 1.

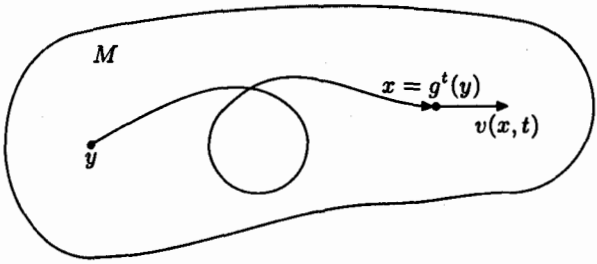


Рис. 1. Движение частицы жидкости в области M

Предположим, что конфигурация g изменяется со скоростью $\dot g$. Вектор $\dot g$ принадлежит касательному пространству T_gG группы $G = S\mathrm{Diff}(M)$ в точке g. Кинетическая энергия является квадратичной формой на векторном пространстве скоростей.

Теорема 1.4. *Кинетическая энергия несжимаемой жидкости инвариантна по отношению к правым переносам на группе $G = S\mathrm{Diff}(M)$ (т. е. по отношению к отображениям $R_h\colon G \to G$ вида $R_h(g) = gh$).*

Доказательство. Умножение всех групповых элементов на h *справа* означает, что диффеоморфизм h (сохраняющий элемент объема) действует первым, прежде диффеоморфизма g, меняющегося со скоростью $\dot g$. Такой диффеоморфизм h может рассматриваться как (сохраняющая объем) перенумерация частиц в начальном положении $y = h(z)$. Скорость частицы, занимающей определенное положение в заданный момент времени, не меняется при такой перенумерации, и, следовательно, кинетическая энергия сохраняется. □

Аналогично, кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку, является квадратичной формой на касательном пространстве к конфигурационному пространству твердого тела, т. е. к многообразию $G = \mathrm{SO}(3)$.

Теорема 1.5. *Кинетическая энергия твердого тела является инвариантной по отношению к левым сдвигам на группе $G = \mathrm{SO}(3)$, т. е. по отношению к преобразованиям $L_h\colon G \to G$, имеющим вид $L_h(g) = hg$.*

Доказательство. Умножение на групповой элемент h *слева* означает, что вращение h применяется *после* вращения g, меняющегося со скоростью $\dot{g}$. Такое вращение h может рассматриваться как поворот всего пространства вместе с вращающимся телом. Этот поворот не меняет длины вектора скорости любой точки тела, и, следовательно, не меняет суммарной кинетической энергии. □

Замечание 1.6. На группе SO(3) (или, в более общем виде, на любой компактной группе) существует двусторонне инвариантная метрика. На бесконечномерных группах, наиболее интересных для гидродинамики, такой римановой метрики не существует. Отметим, однако, что для дву- и трехмерной гидродинамики на соответствующих группах диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, существуют двусторонне инвариантные невырожденные квадратичные формы на касательных пространствах (см. гл. IV, § 8 для двумерного случая, и гл. III, § 4 и гл. IV, п. 8.4 для трехмерного, где этой квадратичной формой является «спиральность»).

§ 2. Группы Ли, алгебры Ли и присоединенное представление

В этом параграфе мы приведем основные факты из теории групп и алгебр Ли в удобной для нас форме.

Линейная замена координат C переводит матрицу линейного оператора B в матрицу CBC^{-1}. Подобная конструкция существует и для произвольной группы Ли G.

Определение 2.1. Композиция $A_g = R_g^{-1}L_g\colon G \to G$ левого и правого сдвигов, которая переводит любой элемент $h \in G$ в ghg^{-1}, называется *внутренним автоморфизмом* группы G. (Произведение $R_{g^{-1}}$ и L_g может быть взято в любом порядке: все левые сдвиги коммутируют со всеми правыми.) Это произведение действительно является автоморфизмом, так как

$$A_g(fh) = (A_g f)(A_g h).$$

Отображение, переводящее g во внутренний автоморфизм A_g, является групповым гомоморфизмом, так как $A_{gh} = A_g A_h$.

Внутренний автоморфизм A_g оставляет на месте единицу группы. Следовательно, его производная в единице переводит в себя касательное пространство к группе в единице.

Определение 2.2. Касательное пространство к группе Ли в единице называется *векторным пространством алгебры Ли*, соответствующей этой группе.

Алгебра Ли группы G обычно обозначается готической буквой $\mathfrak{g}$.

Пример 2.3. Для группы Ли $G = S\mathrm{Diff}(M)$, образованной диффеоморфизмами области течения M, сохраняющими элемент объема, соответствующая алгебра Ли состоит из бездивергентных векторных полей на M.

Пример 2.4. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ группы вращений $\mathrm{SO}(n)$ состоит из кососимметрических $n \times n$ матриц. Для $n = 3$ векторное пространство кососимметрических матриц является трехмерным. Векторы этого трехмерного пространства называются *угловыми скоростями*.

Определение 2.5. Дифференциал внутреннего автоморфизма A_g в единице группы e называется *оператором* Ad_g *присоединенного действия* (или *присоединенным оператором*) *группы*:

$$\mathrm{Ad}_g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}_g a = (A_{g*}|_e)a, \quad a \in \mathfrak{g} = T_eG.$$

(Здесь и ниже мы обозначаем через T_xM касательное пространство многообразия M в точке x, а через $F_*|_x\colon T_xM \to T_{F(x)}M$ производную отображения $F\colon M \to M$ в x. Производная F_* отображения F в x является линейным оператором.)

Операторы присоединенного действия задают представление группы в пространстве своей алгебры Ли, так как

$$\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h.$$

Пример 2.6. Присоединенные операторы группы $S\mathrm{Diff}(M)$ определяют действие диффеоморфизмов на бездивергентных векторных полях на M как действие соответствующих замен координат на многообразии.

Отображение Ad, которое сопоставляет оператор Ad_g элементу группы $g \in G$, может рассматриваться как отображение из группы в пространство линейных операторов на ее алгебре Ли.

Определение 2.7. Дифференциал ad отображения Ad в единице группы называется *присоединенным представлением алгебры Ли*:

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}, \quad \mathrm{ad}_\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{g(t)},$$

где $g(t)$ является кривой на группе G, выходящей из точки $g(0) = e$ со скоростью $\dot{g}(0) = \xi$ (рис. 2). Здесь $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является пространством линейных операторов, переводящих $\mathfrak{g}$ в себя. Символ ad_ξ обозначает образ элемента ξ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при линейном отображении ad. Этот образ $\mathrm{ad}_\xi \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является линейным оператором из $\mathfrak{g}$ в себя.

Пример 2.8. Пусть G — группа вращений пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathrm{ad}_\xi \omega = [\xi, \omega],$$

где $[\xi, \omega] = \xi\omega - \omega\xi$ является коммутатором кососимметрических матриц ξ и ω. В частности, для $n = 3$ вектор $[\xi, \omega]$ оказывается обычным векторным произведением $\xi \times \omega$ векторов угловых скоростей ξ и ω в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Пусть $t \mapsto g(t)$ — кривая, выходящая из e с начальной скоростью $\dot{g} = \xi$, и пусть $s \mapsto h(s)$ является такой же кривой с начальной скоростью $h' = \omega$. Тогда

$$g(t)h(s)g(t)^{-1} = (e + t\xi + o(t))(e + s\omega + o(s))(e + t\xi + o(t))^{-1} = \\ = e + s[\omega + t(\xi\omega - \omega\xi) + o(t)] + o(s)$$

при $t, s \to 0$. □

Пример 2.9. Пусть $G = \mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда

$$\mathrm{ad}_v w = -\{v, w\}, \tag{2.1}$$

где $\{v, w\}$ — это скобка Пуассона векторных полей v и w.

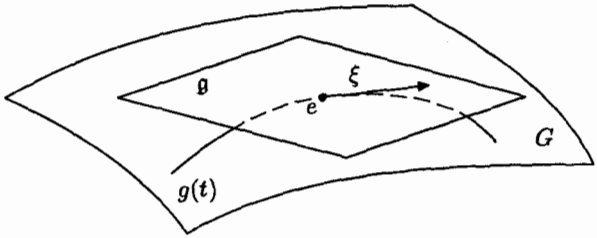


Рис. 2. Вектор ξ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является скоростью в единице e некоторого пути $g(t)$ на группе Ли G

Скобка Пуассона векторных полей определяется как коммутатор соответствующих дифференциальных операторов:

$$L_{\{v,w\}} = L_v L_w - L_w L_v. \tag{2.2}$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка L_v, связанный с векторным полем v, является производной вдоль этого поля v ($L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ для произвольной функции f и любой системы координат).

Компоненты векторного поля $\{v, w\}$ в произвольной системе координат выражаются через компоненты v и w по формуле

$$\{v, w\}_i = \sum_j v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Как следует из вышесказанного, поле $\{v, w\}$ не зависит от системы координат $(x_1, \ldots, x_n)$, используемой в этой формуле.

Оператор L_v (называемый *производной Ли*) действует также на любое тензорное поле на многообразии и определяется как «производная рыбака»: поток несет тензоры мимо рыбака, а рыбак сидит на месте и их дифференцирует. Например, функции переносятся потоком назад, и, следовательно,

$L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Подобным же образом дифференциальные формы переносятся назад, но векторные поля переносятся вперед. Таким образом, для векторных полей мы получаем $L_v w = -\{v, w\}$.

Знак минус входит в формулу (2.1), потому что по традиции знак скобки Пуассона двух векторных полей определяется согласно (2.2) подобно матричному коммутатору. Противоположность знаков в последних двух примерах является следствием тех же причин, что и различие в инвариантности кинетической энергии твердого тела и несжимаемой жидкости: она левоинвариантна для тела и правоинвариантна для жидкости.

Доказательство формулы (2.1). Диффеоморфизмы, соответствующие векторным полям v и w, могут быть записаны (в локальных координатах) в виде:

$$g(t)\colon x \mapsto x + tv(x) + o(t), \quad t \to 0,$$
$$h(s)\colon x \mapsto x + sw(x) + o(s), \quad s \to 0.$$

Тогда мы имеем $g(t)^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t)$, откуда

$$h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t) + sw(x - tv(x) + o(t)) + o(s) =$$
$$= x - tv(x) + o(t) + s\Big(w(x) - t\frac{\partial w}{\partial x}v(x) + o(t)\Big) + o(s)$$

и

$$g(t)h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x + s\Big(w(x) + t\Big(\frac{\partial v}{\partial x}w(x) - \frac{\partial w}{\partial x}v(x)\Big)\Big) + o(t) + o(s). \qquad \square$$

Пример 2.10. Пусть $G = S\mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. Формула (2.1) справедлива и в этом случае, причем все три поля v, w и $\{v, w\}$ являются бездивергентными.

Определение 2.11. *Коммутатор* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется как операция $[\,.\,,\,.\,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которая ставит в соответствие паре векторов a, b касательного пространства $\mathfrak{g}$ (в единице группы Ли G) следующий третий вектор этого пространства:

$$[a, b] = \mathrm{ad}_a b.$$

Касательное пространство в единице группы Ли, снабженное такой операцией $[\,.\,,\,.\,]$, называется *алгеброй Ли группы Ли* G.

Пример 2.12. Коммутатор кососимметрических матриц a и b — это $ab - ba$ (в трехмерном случае это векторное произведение $a \times b$ соответствующих векторов). Коммутатор двух векторных полей — это их скобка Пуассона, взятая с минусом. Коммутатор бездивергентных векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве дается формулой

$$[a, b] = \mathrm{rot}(a \times b),$$

где $a \times b$ — векторное произведение. Это следует из более общей формулы

$$\mathrm{rot}(a \times b) = [a, b] + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$$

и справедливо для произвольного трехмерного риманова многообразия M^3. Последняя формула может быть получена применением формулы гомотопии (см. п. 7.2).

Замечание 2.13. Операция коммутирования в любой алгебре Ли может быть определена следующей конструкцией. Продолжим векторы v и w левоинвариантно на всю группу Ли G. Другими словами, в любой точке $g \in G$ мы определим касательный вектор $v_g \in T_gG$, который является левым сдвигом в точку g вектора $v \in \mathfrak{g} = T_eG$. Мы получим два *левоинвариантных* векторных поля $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ на G. Возьмем их скобку Пуассона $\tilde{u} = \{\tilde{v}, \tilde{w}\}$. Операция взятия скобки Пуассона инвариантна относительно диффеоморфизмов. Следовательно, поле $\tilde{u}$ также *левоинвариантно*, и оно полностью определяется своим значением u в единице группы. Этот вектор $u \in T_eG = \mathfrak{g}$ и можно принять за определение коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$[v, w] = u.$$

Аналогичная конструкция, использующая *правоинвариантные* поля $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ на группе G, дает нам коммутатор со знаком *минус*.

Теорема 2.14. *Операция коммутирования* $[\,.\,,\,.\,]$ *является билинейной, кососимметрической и удовлетворяет тождеству Якоби*:

$$[\lambda a + \nu b, c] = \lambda[a, c] + \nu[b, c];$$
$$[a, b] = -[b, a];$$
$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Замечание 2.15. Векторное пространство, снабженное кососимметрической билинейной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби, называется *абстрактной алгеброй Ли*. Каждая (конечномерная) абстрактная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли G.

К сожалению, в бесконечномерном случае это не так. Это является источником многих трудностей в квантовой теории поля, в теории вполне интегрируемых систем и в других областях, где язык бесконечномерных алгебр Ли заменяет теорию групп Ли (см., например, гл. VI, § 1 об алгебре Вирасоро и об уравнении Кортевега–де Фриза). Можно рассматривать алгебру Ли как первую аппроксимацию к группе Ли, а тождество Якоби представлять как инфинитезимальное следствие ассоциативности группового умножения. В конечномерной ситуации (связная, односвязная) группа Ли может быть реконструирована по ее первой аппроксимации. Однако в бесконечномерном случае попытка такой реконструкции может привести к расходящимся рядам.

Легко проверяется следующая

Теорема 2.16. *Операторы присоединенного действия* $\mathrm{Ad}_g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *образуют представление группы Ли* G *автоморфизмами ее алгебры Ли* $\mathfrak{g}$:

$$[\mathrm{Ad}_g\xi, \mathrm{Ad}_g\eta] = \mathrm{Ad}_g[\xi, \eta], \quad \mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_h.$$

Определение 2.17. Множество образов элемента ξ алгебры Ли под действием всех операторов Ad_g, $g \in G$, называется *орбитой* точки ξ *при присоединенном действии группы* (короче, *присоединенной орбитой точки* ξ).

Пример 2.18. A. Присоединенная орбита матрицы, рассматриваемая как элемент алгебры Ли всех комплексных матриц, есть множество матриц с одной и той же жордановой нормальной формой.

B. Присоединенные орбиты группы вращений трехмерного евклидова пространства являются сферами всевозможных радиусов с центром в начале координат. Само начало координат (сфера нулевого радиуса) является отдельной орбитой.

C. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ вещественных матриц с определителем, равным единице, состоит из всех 2×2 матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$$

с вещественными a, b и c. Матрицы с одной и той же жордановой формой имеют одинаковую величину определителя $\Delta = -(a^2 + bc)$. Присоединенные орбиты в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ восстанавливаются по этому определителю «почти однозначно», хотя они и меньше, чем в комплексном случае. Орбитами являются связные компоненты квадрик $a^2 + bc = \mathrm{const} \neq 0$, каждая половина конуса $a^2 + bc = 0$ и начало координат $a = b = c = 0$ (см. рис. 3, a).

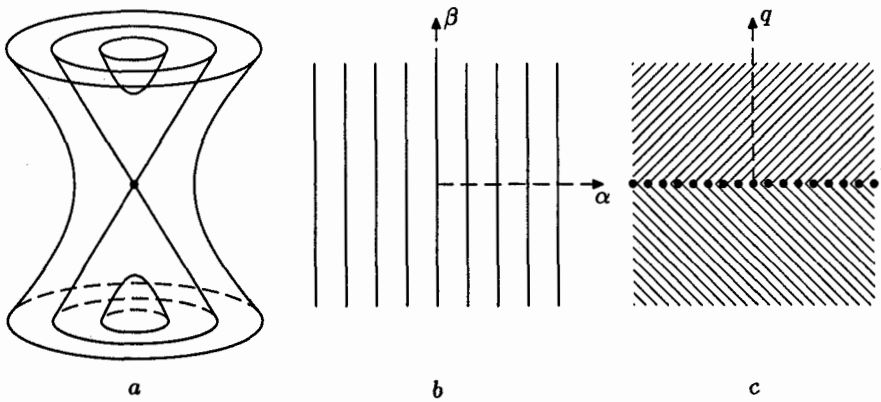


Рис. 3. (a) (Ко)присоединенные орбиты в матричной алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ являются связными компонентами квадрик. (b) Присоединенные и (c) коприсоединенные орбиты группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$

D. Присоединенные орбиты группы $G = \{x \mapsto ax + b\colon a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$ являются прямыми линиями $\{\alpha = \mathrm{const} \neq 0\}$, двумя лучами $\{\alpha = 0,\ \beta > 0\}$, $\{\alpha = 0,\ \beta < 0\}$ и началом координат $\{\alpha = 0,\ \beta = 0\}$ в плоскости $\{(\alpha, \beta)\} = \mathfrak{g}$ (рис. 3, b).

E. Пусть v является бездивергентным векторным полем на M. Присоединенная орбита поля v для группы $S\mathrm{Diff}(M)$ состоит из бездивергентных векторных полей, полученных из v естественным действием всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. В частности, все такие поля являются топологически эквивалентными. Например, они имеют равные чис-

ла неподвижных точек, периодических орбит, инвариантных поверхностей, те же собственные числа линеаризаций в неподвижных точках и т. д.

Замечание 2.19. Для односвязной ограниченной области M в плоскости (x, y) бездивергентное векторное поле, касающееся края области M, может быть задано своей *функцией тока* ψ (определяемой тем, что компоненты поля равны $-\psi_y$ и ψ_x). Функция тока определена с точностью до константы, и можно положить ее равной нулю на границе M. Алгебра Ли группы $S\mathrm{Diff}(M)$, которая состоит из диффеоморфизмов области M, сохраняющих элементы площади, естественно отождествляется с пространством всех таких функций тока ψ.

Теорема 2.20. *Все моменты*

$$I_n = \iint\limits_M \psi^n \, dx \, dy$$

постоянны вдоль присоединенных орбит группы $S\mathrm{Diff}(M)$ *в пространстве функций тока.*

Доказательство. Вдоль любой орбиты все площади $S(c)$ множеств «меньших значений» $\{(x, y)\colon \psi(x, y) < c\}$ постоянны. □

Замечание 2.21. Кроме моментов вдоль орбит сохраняются топологический тип функции ψ (в частности, число особых точек, конфигурация сепаратрис седел и т. д.), а также площади, ограниченные связными компонентами линий уровня функции тока ψ (см. рис. 4).

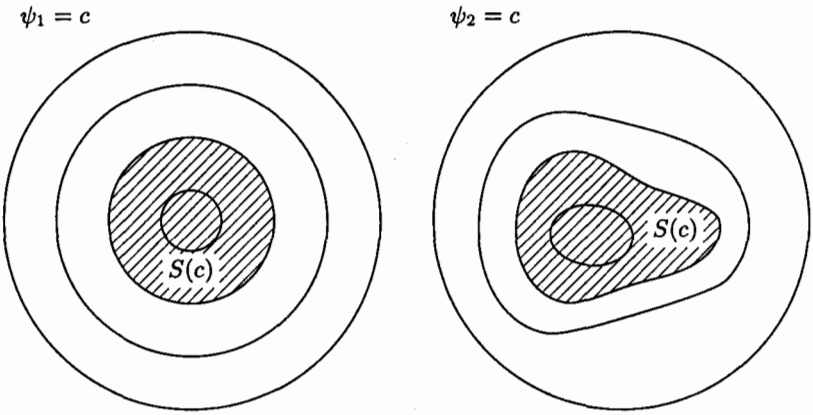


Рис. 4. Функции тока полей, принадлежащих одной и той же присоединенной орбите, имеют равные площади множеств «меньших значений»

Более того, периоды движения частиц вдоль соответствующих замкнутых траекторий также сохраняются при действии диффеоморфизмов. Однако последний инвариант может быть выражен через описанные выше. Например, период движения вдоль замкнутой траектории $\psi = c$, которая ограничивает топологический диск площади $S(c)$, дается формулой $T = \dfrac{\partial S}{\partial c}$.

§ 3. Коприсоединенное представление группы Ли

Главным объектом эйлеровой гидродинамики идеальной жидкости, также как и эйлеровой динамики твердого тела, является не алгебра Ли, а сопряженное ей пространство, пространство не присоединенного, а коприсоединенного представления соответствующей группы.

3.1. Определение коприсоединенного представления

Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{g}^*$, сопряженное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Векторы из $\mathfrak{g}^*$ являются линейными функциями на пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пространство $\mathfrak{g}^*$ в общем случае само не имеет естественной структуры алгебры Ли.

Пример 3.1. Каждая *компонента* вектора угловой скорости твердого тела является *вектором* пространства, сопряженного к алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$.

С каждым линейным оператором $A\colon X \to Y$ можно связать сопряженный оператор, действующий в обратном направлении между соответствующими сопряженными пространствами $A^*\colon Y^* \to X^*$ и определяемый формулой

$$(A^*y)(x) = y(Ax)$$

для каждого $x \in X$, $y \in Y^*$. В частности, дифференциалы левого и правого сдвигов

$$L_{g*}\colon T_hG \to T_{gh}G, \quad R_{g*}\colon T_hG \to T_{hg}G$$

определяют сопряженные операторы

$$L_g^*\colon T_{gh}^*G \to T_h^*G, \quad R_g^*\colon T_{hg}^*G \to T_h^*G.$$

Определение 3.2. *Коприсоединенное (анти)представление группы Ли* G в пространстве $\mathfrak{g}^*$, сопряженном к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, является (анти)представлением, в котором каждому элементу группы g ставится в соответствие линейное преобразование

$$\mathrm{Ad}_g^*\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*,$$

сопряженное к преобразованию $\mathrm{Ad}_g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Другими словами,

$$(\mathrm{Ad}_g^*\,\xi)(\omega) = \xi(\mathrm{Ad}_g\,\omega)$$

для любых $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $\omega \in \mathfrak{g}$. Операторы Ad_g^* образуют *антипредставление*, так как $\mathrm{Ad}_{gh}^* = \mathrm{Ad}_h^*\mathrm{Ad}_g^*$.

Орбита точки $\xi \in \mathfrak{g}^*$ при действии коприсоединенного представления группы G (сокращенно, *коприсоединенная орбита* ξ) является множеством всех точек $\mathrm{Ad}_g^*\xi$ $(g \in G)$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$, сопряженном к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Для группы $\mathrm{SO}(3)$ коприсоединенные орбиты являются сферами с центром в начале координат пространства $\mathfrak{so}(3)^*$. Они подобны присоединенным орбитам этой группы, которые являются сферами в $\mathfrak{so}(3)$.

Однако в общем случае присоединенное и коприсоединенное представления достаточно непохожи друг на друга.

Пример 3.3. Рассмотрим группу G всех аффинных преобразований прямой $G = \{x \mapsto ax + b\colon a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$. Коприсоединенное представление действует на плоскости $\mathfrak{g}^*$ линейных функций $pda + qdb$ в единице группы ($a = 1$, $b = 0$). Орбитами коприсоединенного представления являются верхняя ($q > 0$) и нижняя ($q < 0$) полуплоскости, а также каждая точка $(p, 0)$ оси $q = 0$ (см. рис. 3, *c*).

Определение 3.4. *Коприсоединенное представление* некоторого элемента v из *алгебры* Ли $\mathfrak{g}$ есть скорость изменения оператора $\mathrm{Ad}^*_{g_t}$ коприсоединенного представления, когда элемент группы g_t выходит из единицы $g_0 = e$ со скоростью $\dot{g} = v$. Оператор коприсоединенного представления элемента алгебры $v \in \mathfrak{g}$ обозначается через

$$\mathrm{ad}^*_v\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*.$$

Он является сопряженным к оператору присоединенного представления $\mathrm{ad}^*_v\omega(u) = \omega(\mathrm{ad}_v u) = \omega([v, u])$ для любых $v \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathfrak{g}$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$. При фиксированном $\omega \in \mathfrak{g}^*$ векторы $\mathrm{ad}^*_v\omega$, $v \in \mathfrak{g}$, образуют касательное пространство к коприсоединенной орбите (подобно тому как векторы $\mathrm{ad}_v u$, $v \in \mathfrak{g}$, образуют касательное пространство к присоединенной орбите точки $u \in \mathfrak{g}$).

3.2. Сопряженное пространство к пространству плоских бездивергентных векторных полей

Рассмотрим группу $G = S\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов связной и односвязной ограниченной краем ∂M области M в $\{(x, y)\}$-плоскости, сохраняющих элемент площади. Соответствующая алгебра Ли отождествляется с пространством функций тока, т. е. с пространством гладких функций на M, обращающихся в нуль на границе. Отождествление является естественным в том смысле, что оно зависит не от евклидовой структуры на плоскости, а только от элемента площади μ на M.

Определение 3.5. *Внутренним произведением* вектора v с дифференциальной k-формой ω называется $(k-1)$-форма $i_v\omega$, полученная подстановкой вектора v в форму ω как первого аргумента:

$$(i_v\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = \omega(v, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}).$$

Определение 3.6. *Векторное поле v с функцией тока ψ* на поверхности с элементом площади μ определяется условием

$$i_v\mu = -d\psi. \tag{3.1}$$

Например, предположим, что (x, y) — координаты, в которых

$$\mu = dx \wedge dy.$$

Лемма 3.7. *Поле с функцией тока ψ в этих координатах имеет компоненты*

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

(*Мы часто будем использовать обозначение* $v = \mathrm{sgrad}\psi$.)

Доказательство. Для произвольного вектора u выполняется следующее тождество (по определению $\mu = dx \wedge dy$):

$$(i_v\mu)(u) = \mu(v,u) = \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ dx(u) & dy(u) \end{bmatrix} = (v_x\,dy - v_y\,dx)(u). \qquad \square$$

Условие (3.1) определяет функцию тока с точностью до аддитивной константы. Последняя определяется требованием $\psi|_{\partial M} = 0$.

Пространство, сопряженное к пространству бездивергентных векторных полей v, может также быть описано как пространство гладких функций на M, однако уже не обязательно обращающихся в нуль на ∂M. Действительно, линейный функционал на пространстве векторных полей на M естественно интерпретировать как дифференциальную 1-форму α на M. Значением соответствующей линейной функции на векторном поле v является величина

$$(\alpha, v) := \iint\limits_M \alpha(v)\mu.$$

Легко проверяется следующая

Лемма 3.8. 1. *Если α — дифференциал функции, то $(\alpha, v) = 0$ для любого бездивергентного поля v на M, касающегося ∂M.*

2. *Обратно, если $(\alpha, v) = 0$ для любого бездивергентного поля v на M, касающегося ∂M, то α является дифференциалом некоторой функции на M.*

3. *Если для заданного v имеем $(\alpha, v) = 0$ для всякого α, являющегося дифференциалом функции на M, то векторное поле v является бездивергентным и касается края ∂M.*

Доказательство этой леммы в более общей ситуации на (необязательно односвязном) многообразии произвольной размерности дано в § 8. Эта лемма демонстрирует формальное отождествление пространства $\mathfrak{g}^*$, сопряженного к алгебре Ли бездивергентных векторных полей на M, касающихся края ∂M, с факторпространством $\Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ (всех 1-форм на M по модулю полных дифференциалов). Ниже мы используем отождествление в этом «формальном» смысле. Чтобы придать точный смысл обсуждению двойственных пространств согласно стандартам функционального анализа, было бы нужно выбрать топологию на одном из пространств и пополнить соответствующим образом другое. Здесь мы не станем фиксировать пополнение, а будем понимать под элементами как из $\mathfrak{g}$, так и из $\mathfrak{g}^*$, гладкие функции (поля, формы), если не оговорено противное.

Лемма 3.9. *Пусть M является двумерной односвязной областью с формой площади μ. Тогда отображение $\alpha \mapsto f$, задаваемое формулой*

$$d\alpha = f\mu$$

(где μ является фиксированным элементом площади, а α является 1-формой на M), определяет естественный изоморфизм пространства $\Omega^1/d\Omega^0 \approx \mathfrak{g}^*$, сопряженного к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ бездивергентных векторных полей на M (касающихся ее края ∂M), и пространства функций f на M.

Доказательство. Добавление полного дифференциала к форме α не меняет функцию f. Следовательно, мы построили отображение из $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$ в пространство функций f на M. Так как M односвязно, каждая функция f является образом 1-формы α, определяемой по модулю дифференциала некоторой функции. □

Теорема 3.10. *Коприсоединенное представление в $\mathfrak{g}^*$ группы $S\mathrm{Diff}(M)$ является естественным действием диффеоморфизмов, сохраняющих элемент площади, на функциях на M.*

Доказательство. Это следует из того, что все наши отождествления являются естественными, т. е. инвариантными по отношению к преобразованиям, принадлежащим $S\mathrm{Diff}(M)$. □

3.3. Алгебра Ли бездивергентных векторных полей на многообразии произвольной размерности и ее сопряженное пространство

Пусть $G = S\mathrm{Diff}(M^n)$ является группой диффеоморфизмов многообразия M с краем ∂M, сохраняющих элемент объема μ (в общем случае M может быть любой размерности n и многосвязным, но предполагается компактным).

Коммутатор $[v, w]$ (или $L_v w$) в соответствующей алгебре Ли бездивергентных векторных полей на M, касающихся ∂M, задается их скобкой Пуассона со знаком минус: $[v, w] = -\{v, w\}$ (см. пример 2.9).

Теорема 3.11 (см., например, [M-W]). *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G = S\mathrm{Diff}(M)$ естественно отождествляется с пространством замкнутых дифференциальных $(n-1)$-форм на M, обращающихся в нуль на ∂M. А именно, бездивергентному векторному полю v ставится в соответствие $(n-1)$-форма $\omega_v = i_v\mu$. Сопряженным пространством $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является факторпространство $\Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$. Присоединенное и коприсоединенное представления являются естественными действиями диффеоморфизмов на соответствующих дифференциальных формах.*

Доказательство дано в § 8.

Пример 3.12. Пусть M является трехмерной односвязной областью с краем. Рассмотрим группу $S\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема μ (для односвязной M эта группа совпадает с группой так называемых *точных диффеморфизмов*, см. § 8). Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из бездивергентных векторных полей на M, касающихся края ∂M. В случае односвязного M сопряженное пространство $\mathfrak{g}^* = \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ может быть отождествлено с пространством *всех замкнутых 2-форм* на M (1-форме из $\Omega^1(M)$ сопоставляется ее дифференциал).

Мы увидим ниже, что поле вихря для течения со скоростью $v \in \mathfrak{g}$ в M может рассматриваться как элемент сопряженного пространства $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Это связано с тем, что каждая 2-форма, являющаяся дифференциалом 1-формы, соответствует некоторому полю вихря.

На неодносвязном многообразии пространство $\mathfrak{g}^*$, вообще говоря, больше, чем множество вихрей. На физическом уровне в этом случае простран-

ством $\mathfrak{g}^*$, сопряженным к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, можно считать пространство циркуляций по всем замкнутым кривым. Поле вихря определяет циркуляции исходного поля скоростей по всем кривым, которые *ограничивают* двумерные поверхности, лежащие в области течения. Вектор же из $\mathfrak{g}^*$ содержит информацию относительно циркуляций вдоль всех замкнутых кривых, в частности тех, которые ничего *не ограничивают*.

§ 4. Левоинвариантные метрики и твердое тело для произвольной группы

Риманова метрика на группе Ли G является *левоинвариантной*, если она сохраняется при любом левом сдвиге L_g. Левоинвариантная метрика однозначно определяется своим ограничением на касательное пространство к группе в единице, т. е. квадратичной формой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ этой группы.

Пусть $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ — симметрический положительно определенный оператор, который определяет скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle = (A\xi, \eta) = (A\eta, \xi)$$

для любых ξ, η в $\mathfrak{g}$. (Здесь круглые скобки обозначают спаривание двойственных пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.) Положительная определенность квадратичной формы не очень существенна, но для многих приложений, таких как движение твердого тела и гидродинамика, имеет место, так как соответствующая квадратичная форма играет роль кинетической энергии.

Определение 4.1. Оператор A называется *оператором инерции*.

Определим симметрический линейный оператор $A_g\colon T_gG \to T_g^*G$ в каждой точке g группы G посредством левых сдвигов из g в единицу:

$$A_g\xi = L_g^{*-1} A L_{g^{-1}*}\xi.$$

В каждой точке g мы получаем скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = (A_g\xi, \eta) = (A_g\eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_g,$$

где $\xi, \eta \in T_gG$. Это произведение определяет левоинвариантную риманову метрику на G. Таким образом, мы получаем следующую коммутативную диаграмму (рис. 5).

Пример 4.2. Для классического твердого тела с неподвижной точкой конфигурационным пространством является группа $G = \mathrm{SO}(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства. Движение тела описывается кривой $t \mapsto g(t)$ в этой группе. Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ группы G является трехмерное пространство угловых скоростей всевозможных вращений. Коммутатором в этой алгебре Ли является обычное векторное произведение.

Скорость $\dot{g}(t)$ вращения тела является касательным вектором к группе в точке $g(t)$. После переноса ее в единицу путем левого и правого сдвигов мы получаем два элемента в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\mathrm{Ad}_g"] \arrow[dd, "A"'] & & \mathfrak{g} \\
& T_gG \arrow[ul, "L_{g^{-1}*}"] \arrow[ur, "R_{g^{-1}*}"'] \arrow[d, "A_g"] & \\
& T_g^*G \arrow[dl, "L_g^*"'] \arrow[dr, "R_g^*"] & \\
\mathfrak{g}^* & & \mathfrak{g}^* \arrow[ll, "\mathrm{Ad}_g^*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\omega_c \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & \omega_s \\
& \dot{g} \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\
& m \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
m_c & & m_s \arrow[ll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Рис. 5. Диаграмма операторов в алгебре Ли и в ее сопряженном пространстве

Определение 4.3. Результат левого сдвига называется *угловой скоростью относительно тела* и обозначается через ω_c («c» от слова «corps» = тело), в то время как результат правого сдвига называется *угловой скоростью в пространстве* и обозначается через ω_s («s» от слова «space» = пространство):

$$\omega_c = L_{g^{-1}*}\dot{g} \in \mathfrak{g}, \quad \omega_s = R_{g^{-1}*}\dot{g} \in \mathfrak{g}.$$

Заметим, что $\omega_s = \mathrm{Ad}_g\omega_c$.

Пространство $\mathfrak{g}^*$, сопряженное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, называется *пространством угловых моментов*. Симметрический оператор $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ называется *оператором* (или тензором) *инерции*. Он связан с кинетической энергией E формулой

$$E = \frac{1}{2}\langle \dot{g}, \dot{g}\rangle_g = \frac{1}{2}\langle \omega_c, \omega_c\rangle = \frac{1}{2}(A\omega_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(A_g\dot{g}, \dot{g}).$$

Образ m вектора скорости $\dot{g}$ при действии оператора A_g принадлежит пространству T_g^*G. Этот вектор может быть перенесен в касательное пространство к группе G в единице как левым, так и правым сдвигами. Векторы

$$m_c = L_g^*m \in \mathfrak{g}^*, \quad m_s = R_g^*m \in \mathfrak{g}^*$$

называются соответственно вектором *углового момента относительно тела* (m_c) и *вектором углового момента относительно пространства* (m_s). Заметим, что $m_c = \mathrm{Ad}_g^*m_s$.

Кинетическая энергия дается формулой

$$E = \frac{1}{2}(m_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(m, \dot{g})$$

в терминах момента и угловой скорости. Квадратичная форма E определяет левоинвариантную риманову метрику на группе G.

Согласно принципу наименьшего действия, движения по инерции твердого тела с неподвижной точкой являются геодезическими на группе $G = \mathrm{SO}(3)$,

снабженной этой левоинвариантной римановой метрикой. (Заметим, что в случае движения в трехмерном пространстве операторы инерции реальных твердых тел образуют открытое подмножество в пространстве всех симметрических операторов $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, т. е. должно выполняться некоторое неравенство треугольника.)

Подобным же образом в общей ситуации левоинвариантной метрики на произвольной группе Ли G мы рассматриваем четыре вектора, движущиеся в пространствах $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, соответственно:

$$\omega_c(t) \in \mathfrak{g}, \quad \omega_s(t) \in \mathfrak{g}, \quad m_c(t) \in \mathfrak{g}^*, \quad m_s(t) \in \mathfrak{g}^*.$$

Они называются векторами угловой скорости и углового момента относительно тела и относительно пространства.

Л. Эйлер [Eul] нашел дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет эволюция этих векторов во времени.

Теорема 4.4 (первая теорема Эйлера). *Вектор углового момента относительно пространства сохраняется во время движения*:

$$\frac{dm_s}{dt} = 0.$$

Теорема 4.5 (вторая теорема Эйлера). *Вектор углового момента относительно тела удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$\frac{dm_c}{dt} = \mathrm{ad}^*_{\omega_c} m_c. \tag{4.1}$$

Замечание 4.6. Вектор $\omega_c = A^{-1} m_c$ линейно выражается через m_c. Следовательно, уравнение Эйлера определяет квадратичное векторное поле в $\mathfrak{g}^*$, и его поток описывает эволюцию вектора m_c. Эта эволюция вектора момента зависит только от расположения вектора момента в теле, а не в объемлющем пространстве.

Другими словами, геодезический поток в фазовом многообразии T^*G расслаивается над потоком уравнения Эйлера в пространстве $\mathfrak{g}^*$, размерность которого равна половине размерности многообразия T^*G.

Доказательства. Эйлер доказал теорему для случая $G = \mathrm{SO}(3)$, но доказательство почти буквально применимо к общему случаю. А именно, первая теорема Эйлера является законом сохранения, отвечающим инвариантности энергии по отношению к левым сдвигам. Вторая же теорема Эйлера является непосредственным следствием первой и тождества

$$m_c(t) = \mathrm{Ad}^*_{g(t)} m_s. \tag{4.2}$$

Дифференцируя левую и правую части тождества по t при $t = 0$ (и предполагая, что $g(0) = e$), мы получаем уравнение Эйлера (4.1) для этого случая. Из левоинвариантности метрики следует, что правая часть зависит только от m_c, а не от $g(t)$, и, следовательно, уравнение удовлетворяется для любой $g(t)$. □

Замечание 4.7. Уравнение Эйлера (4.1) для твердого тела в $\mathbb{R}^3$ имеет вид $\dot{m} = m \times \omega$ для $m = A\omega$, т. е. для $A = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ имеем

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = \gamma_{23} m_2 m_3, \\ \dot{m}_2 = \gamma_{31} m_3 m_1, \\ \dot{m}_3 = \gamma_{12} m_1 m_2, \end{cases}$$

где $\gamma_{ij} = I_j^{-1} - I_i^{-1}$. Главные моменты инерции I_i удовлетворяют неравенству треугольника $|I_i - I_j| \leqslant I_k$.

Из соотношения (4.2) и первой теоремы Эйлера вытекает следующая

Теорема 4.8. *Каждое решение $m_c(t)$ уравнения Эйлера принадлежит одной и той же коприсоединенной орбите для всех t. Другими словами, коприсоединенные орбиты группы являются инвариантными подмногообразиями для потока уравнения Эйлера в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли.*

Изоморфизм $A^{-1}\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ позволяет нам переписать уравнения Эйлера на алгебре Ли как закон эволюции вектора $\omega_c = A^{-1} m_c$. Результатом является

Теорема 4.9. *Вектор угловой скорости относительно тела подчиняется следующему уравнению с квадратичной правой частью:*

$$\frac{d\omega_c}{dt} = B(\omega_c, \omega_c),$$

где билинейная (несимметрическая) форма $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ определяется формулой

$$\langle [a, b], c \rangle = \langle B(c, a), b \rangle \tag{4.3}$$

для любых a, b, c в $\mathfrak{g}$. Здесь $[\,.\,,\,.\,]$ — коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{g}$.

Замечание 4.10. Операция B является билинейной, и при фиксированном первом аргументе она кососимметрична по отношению ко второму аргументу:

$$\langle B(c, a), b \rangle + \langle B(c, b), a \rangle = 0.$$

Оператор B является образом оператора коприсоединенного представления алгебры Ли при изоморфизме $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, определяемом оператором инерции A.

Доказательство теоремы 4.9. Для каждого $b \in \mathfrak{g}$ мы имеем

$$\left\langle \frac{d\omega_c}{dt}, b \right\rangle = \left\langle A^{-1} \frac{dm_c}{dt}, b \right\rangle = \left(\frac{dm_c}{dt}, b \right),$$

где $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярное произведение в алгебре Ли, а $(\,.\,,\,.\,)$ означает спаривание элементов из $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Согласно уравнению Эйлера,

$$\left(\frac{dm_c}{dt}, b \right) = (\operatorname{ad}^*_{\omega_c} m_c, b) = (m_c, \operatorname{ad}_{\omega_c} b) = (m_c, [\omega_c, b]).$$

По определению скалярного произведения

$$(m_c, [\omega_c, b]) = (A\omega_c, [\omega_c, b]) = \langle [\omega_c, b], \omega_c \rangle.$$

Определение оператора B позволяет нам переписать это как

$$\langle [\omega_c, b], \omega_c \rangle = \langle B(\omega_c, \omega_c), b \rangle.$$

Таким образом, для каждого b мы имеем

$$\left\langle \frac{d\omega_c}{dt}, b \right\rangle = \langle B(\omega_c, \omega_c), b \rangle,$$

что и завершает доказательство теоремы 4.9. □

Замечание 4.11. Рассмотрим движение трехмерного твердого тела. Уравнение Эйлера (4.1) описывает эволюцию вектора момента в трехмерном пространстве $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$. Каждое решение $m_c(t)$ уравнения Эйлера принадлежит пересечению коприсоединенной орбиты (которая является сферой с центром в начале координат) с уровнем энергии (см. рис. 6). Кинетическая энергия является квадратичным первым интегралом на сопряженном пространстве, и ее поверхности уровня являются эллипсоидами $\langle A^{-1} m_c, m_c \rangle = \text{const}$.

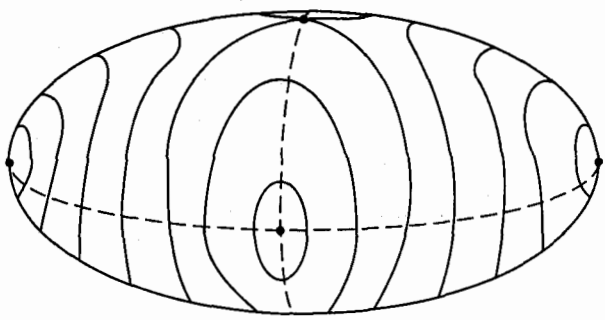


Рис. 6. Траектории уравнения Эйлера на поверхности уровня энергии

Динамика n-мерного твердого тела естественным образом связана с группой $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. Траектории соответствующего уравнения Эйлера принадлежат пересечениям коприсоединенных орбит этой группы с уровнями энергии (см. гл. VI, п. 1.3). В следующем параграфе мы применим теоремы Эйлера к бесконечномерной группе диффеоморфизмов [Arn4, Arn16]. Заметим, что аналогия между уравнениями Эйлера идеальной гидродинамики и твердого тела была отмечена Моро в [Mor1].

§ 5. Приложения к гидродинамике

Согласно принципу наименьшего действия, движения идеальной (несжимаемой, невязкой) жидкости на римановом многообразии M являются геодезическими правоинвариантной метрики на группе Ли $S\mathrm{Diff}(M)$. Такая метрика определяется квадратичной формой E (кинетической энергией) на алгебре Ли бездивергентных векторных полей:

$$E = \frac{1}{2} \iint_M v^2 \mu,$$

где μ — элемент объема на M, а v^2 — квадрат римановой длины касательных к M векторов.

Замечание 5.1. Чтобы осуществить переход от левоинвариантной метрики к правоинвариантной, достаточно изменить знак коммутатора $[\,.\,,\,.\,]$ (а также операторов, линейно зависящих от него: $\mathrm{ad}_v \cdot = [v, \cdot\,]$, ad_v^*, B) во всех формулах. Группа Ли G остается группой после изменения произведения $(g,h) \mapsto gh$ на $(g,h) \mapsto g{*}h = hg$.

Коммутатор алгебры Ли меняет знак при этом преобразовании, в то время как левоинвариантная метрика становится правоинвариантной. Левые сдвиги по отношению к старой групповой операции становятся правыми сдвигами по отношению к новой. Следовательно, для правоинвариантных метрик, полученных в результате *правого* сдвига, вектор момента в сопряженном к алгебре Ли пространстве сохраняется во времени, в то время как левый сдвиг момента подчиняется уравнению Эйлера.

В гидродинамике метрика на группе является правоинвариантной. Следовательно, из общих результатов предыдущего параграфа мы получаем уравнения (Эйлера) движения идеальной жидкости (на римановом многообразии произвольной размерности), а также законы сохранения для них. Уравнения Эйлера для *поля скоростей* течения в области M получаются в результате *правого* сдвига в *алгебру Ли* $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей на M (см. теорему 4.8 с заменой левого сдвига на правый). Правая инвариантность метрики приводит к следующей форме уравнения Эйлера:

$$\dot{v} = -B(v,v),$$

где операция B на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется формулой (4.3). Его эквивалентной формой является *уравнение Эйлера–Гельмгольца* для *поля вихря*, т. е. уравнение (4.1) с противоположным знаком для правых сдвигов *момента* в *сопряженном пространстве* $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли.

Отметим, что поля *вихря* можно считать элементами двойственного пространства к алгебре Ли бездивергентных полей, т. е. скоростей идеальной жидкости, подобно тому как угловые *моменты* двойственны угловым *скоростям* твердого тела, составляющим алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$ (ср. пример 3.12).

Пример 5.2. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей на односвязной области M, касающихся ее края ∂M, с коммутатором $[\,.\,,\,.\,] = -\{\,.\,,\,.\,\}$, являющимся скобкой Пуассона со знаком минус. Операция B для уравнения Эйлера на этой алгебре Ли имеет вид:

$$B(c,a) = (\mathrm{rot}\, c) \times a + \mathrm{grad}\, p, \tag{5.1}$$

где $\times$ — векторное произведение, а p — функция на M, определенная однозначно (по модулю аддитивной постоянной) условием $B \in \mathfrak{g}$ (т. е. условием $\mathrm{div}\, B(c,a) = 0$ и касательностью $B(c,a)$ к ∂M). Следовательно, *уравнение Эйлера трехмерной идеальной гидродинамики* является эволюционным уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \mathrm{rot}\, v - \mathrm{grad}\, p \tag{5.2}$$

для бездивергентного векторного поля v в $M \subset \mathbb{R}^3$, касающегося ∂M.

Уравнение вихря (или *Эйлера–Гельмгольца*) имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\{v, \omega\}, \quad \omega = \operatorname{rot} v. \tag{5.3}$$

Доказательство. По определению операции B

$$\langle B(c, a), b\rangle = \langle [a, b], c\rangle,$$

где $[a, b]$ — коммутатор в алгебре Ли $S\mathrm{Vect}(M)$ (равный $-\{a, b\}$ в терминах скобки Пуассона). Так как все поля являются бездивергентными, мы имеем

$$\langle [a, b], c\rangle = \langle \operatorname{rot}(a \times b), c\rangle = \langle a \times b, \operatorname{rot} c\rangle = \langle (\operatorname{rot} c) \times a, b\rangle.$$

Таким образом, $(\operatorname{rot} c) \times a$ дает явное выражение для операции B по модулю градиентного члена (так как $\operatorname{div} b = 0$).

Уравнение вихря получается из уравнения Эйлера для поля скоростей применением rot к обеим частям. □

Формула (5.1) справедлива в более общей ситуации трехмерного риманова многообразия M с краем. Более того, для многообразия произвольной размерности можно также придать смысл этой формуле при соответствующем понимании векторного произведения.

Теорема 5.3. *Операция $B(v, v)$ для бездивергентного векторного поля v на римановом многообразии M произвольной размерности есть*

$$B(v, v) = \nabla_v v + \operatorname{grad} p.$$

Здесь $\nabla_v v$ — векторное поле на M, которое является ковариантной производной поля v вдоль самого себя относительно римановой связности на M, соответствующей выбранной римановой метрике, а p определяется по модулю постоянной теми же условиями, что и выше.

Мы отложим доказательство этой теоремы до обсуждения ковариантной производной в гл. IV, § 1. Это доказательство основывается на следующем простом смысле оператора инерции в гидродинамике. Как мы видели выше, алгебра Ли бездивергентных векторных полей и сопряженное к ней пространство могут быть определены на любом многообразии, снабженном формой объема. Оператор инерции требует дополнительно введения структуры *римановой метрики на многообразии* аналогично заданию эллипсоида инерции для твердого тела.

Теорема 5.4. *Оператор инерции для идеальной жидкости на римановом многообразии превращает векторное поле скорости в 1-форму, значение которой на векторе, приложенном в некоторой точке, равно риманову скалярному произведению этого вектора с вектором скорости в этой точке. Полученная при этом 1-форма рассматривается по модулю дифференциалов функций.*

См. доказательство в § 7 (теорема 7.19).

В случае гидродинамики инвариантность коприсоединенных орбит по отношению к эйлеровой динамике (теорема 4.8) принимает форму классической теоремы Гельмгольца о сохранении вихря.

Теорема 5.5. *Циркуляция начального поля скоростей вдоль замкнутой кривой равна циркуляции этого векторного поля, изменяющегося согласно уравнению Эйлера, по кривой, перенесенной потоком жидкости.*

Доказательство. Рассмотрим элемент алгебры Ли $S\mathrm{Vect}(M)$, соответствующий «нитевидному течению» вдоль выбранной кривой, имеющему единичный поток через трансверсаль к кривой. При присоединенном представлении (т. е. при действии сохраняющего объем диффеоморфизма) этот элемент превратится в «нитевидное течение» вдоль перенесенной кривой.

Спаривание вектора сопряженного пространства алгебры Ли с выбранным элементом в самой алгебре Ли является интегралом от соответствующей 1-формы вдоль кривой (заметим, что хотя элемент из сопряженного пространства является 1-формой лишь по модулю дифференциалов функций, его интеграл по *замкнутой* кривой корректно определен).

По теореме 5.4 это спаривание является циркуляцией поля скоростей вдоль нашей кривой. □

Из приведенной выше теоремы вытекает, что поля скоростей (параметризованные временем t), которые составляют одно решение уравнения Эйлера, являются изозавихренными, т. е. мгновенный вихрь поля в любой момент времени t переносится в мгновенный вихрь в любой другой момент времени диффеоморфизмом, сохраняющим элемент объема.

Замечание 5.6. Изозавихренность, т. е. условие принадлежности одной и той же коприсоединенной орбите, накладывает ограничения, которые существенно отличаются в дву- и трехмерном случаях. Для двумерной жидкости коприсоединенные орбиты различаются величинами первых интегралов, таких как моменты поля вихря. В трехмерном случае геометрия орбит существенно более сложная.

Из-за этого различия в геометрии коприсоединенных орбит обоснование трехмерной гидродинамики наталкивается на серьезные трудности. Между тем в гидродинамике двумерной жидкости существование и единственность глобальных решений доказаны (см. [Yu1]), причем доказательство использует наличие многочисленных первых интегралов уравнений Эйлера, которые являются инвариантами коприсоединенных орбит.

Определение 5.7. Для заданного поля скоростей рассмотрим 1-форму, которая является (поточечным) римановым скалярным произведением с полем скоростей. Ее дифференциал называется 2-*формой вихря*.

Пример 5.8. A. На евклидовой плоскости (x, y) эта 2-форма есть $\omega\, dx \wedge \wedge\, dy$, где ω — некоторая функция. Функция ω, также называемая вихрем двумерного течения, связана с функцией тока ψ тождеством $\omega = \Delta\psi$.

B. В трехмерном евклидовом пространстве форма вихря есть 2-форма, соответствующая векторному полю вихря. Ее значение на паре векторов равно их смешанному произведению с $\operatorname{rot} v$.

Определение 5.9. *Векторное поле вихря* несжимаемого течения на трехмерном римановом многообразии определяется как векторное поле ξ, ассоциированное с 2-формой ω согласно формуле $\omega = i_\xi \mu$, где μ — элемент объема.

Другими словами, вектор вихря ξ определяется в каждой точке условием

$$\mu(\xi, a, b) = \omega(a, b) \tag{5.4}$$

для любой пары векторов a, b, приложенных в этой точке. Заметим, что определение поля ξ не использует каких-либо координат или метрики, а только элемент объема μ и 2-форму ω.

Замечание 5.10. На многообразии произвольной размерности n вихрь является не векторным полем, а $(n-2)$-поливекторным полем (k-*поливектор*, или k-вектор, есть полилинейная кососимметрическая функция от k кокасательных векторов, т. е. от k 1-форм в точке). Например, для $n = 2$ получаем 0-поливектор, т. е. скаляр. Такого типа скаляром является функция-вихрь ω из примера 5.8.А. Из теоремы 5.5 вытекает

Следствие 5.11. *Поле вихря вморожено в несжимаемую жидкость.*

Действительно, по теореме 5.5 2-форма вихря ω переносится потоком, так как она является дифференциалом 1-формы «скалярного произведения с v», которая переносится. Форма объема μ также переносится течением (так как жидкость несжимаемая).

В свою очередь, поле вихря ξ определяется формами ω и μ инвариантным образом (без использования римановой метрики) по формуле (5.4). Следовательно, это поле «вморожено», т. е. оно переносится частицами жидкости, как и поле стрелок, нарисованных на самих частицах, — растяжение частицы в каком-либо направлении влечет растяжение поля в том же направлении. (См. примеры, по крайней мере, линейного растяжения поля вихря в [Ser4].)

Замечание 5.12. Рассмотрим какой-нибудь диффеоморфизм, сохраняющий элементы объема (но *априорно* не связанный ни с каким течением). Если такой диффеоморфизм переводит 2-форму вихря ω_1 в 2-форму вихря ω_2, то он переводит векторное поле вихря ξ_1, соответствующее первой форме, в векторное поле вихря ξ_2, соответствующее второй.

Если, однако, начать с поля скоростей и соответствующего ему поля вихря, то при произвольном диффеоморфизме из $S\mathrm{Diff}(M)$ перенесенное поле вихря, вообще говоря, не будет совпадать с вихрем перенесенного поля скоростей. Теорема 5.5 утверждает лишь, что такое совпадение имеет место, если диффеоморфизм осуществляется эйлеровским движением несжимаемой жидкости с данным начальным полем скоростей. Другими словами, мгновенные поля скоростей, получающиеся из данного при эйлеровской эволюции, являются изозавихренными.

Следствие 5.13. *Линии вихря переносятся при эйлеровском движении жидкости на трехмерном римановом многообразии.*

В частности, каждая «вихревая трубка» (т. е. область, ограниченная поверхностью, составленной линиями вихря) переносится этим потоком. Теорема Гельмгольца близка к этому геометрическому следствию, но все же утверждает несколько больше (особенно в неодносвязном случае).

Замечание 5.14. В двумерном случае изозавихренность векторных полей означает, что функция вихря ω переносится потоком жидкости: точка, где

вихрь $\Delta\psi$ был равен ω в начальный момент, переводится в точку с той же величиной вихря в любой другой момент времени. В частности, все моменты поля вихря

$$I_k = \iint (\Delta\psi)^k \, dx \, dy$$

сохраняются, как и площади множеств меньших значений вихря

$$S(c) = \iint\limits_{\Delta\psi \leqslant c} dx \, dy$$

(см., например, [Ob]). Этот вывод верен и в неодносвязной ситуации.

Законы сохранения, даваемые теоремой Гельмгольца, несколько сильнее, чем сохранение всех моментов, даже если двумерное многообразие односвязно. А именно, согласно этой теореме сохраняется все «дерево» функции вихря $\omega = \Delta\psi$ (т. е. пространство компонент множеств уровня, см. рис. 7), а также и определенная функцией вихря ω мера на этом дереве. (Эта мера связывает с каждым отрезком дерева полную площадь объединения соответствующих множеств уровней вихря.) По-видимому, эта мера доставляет полное множество инвариантов типичных коприсоединенных орбит (скажем, для $S\mathrm{Diff}(S^2)$).

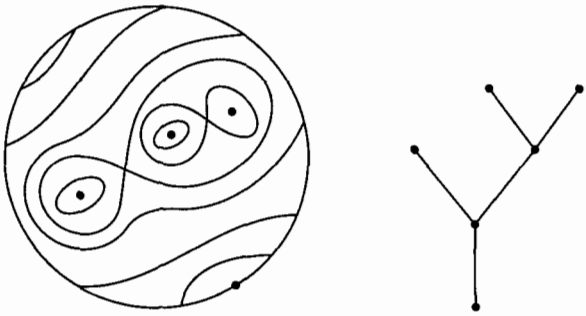


Рис. 7. «Дерево» функции вихря на сфере

Интересно было бы описать возможные графы для функций на неодносвязных многообразиях, скажем, на торе.

Применения теорем Эйлера к гидродинамике на многообразиях более высокой размерности описываются в § 7.

З а м е ч а н и е 5.15. Хотя, как было отмечено в начале, мы избегаем здесь обсуждать теоремы существования и единственности для уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, этот очень важный и глубокий вопрос вызвал заметный интерес (см., например, обзоры [Gé, Yu2]).

Локальные по времени теоремы существования и единственности классических решений основной начально-краевой задачи для двумерного уравнения Эйлера были получены в цикле статей Н. Гюнтером и Л. Лихтейнштейном.

В. Волибнер доказал глобальную разрешимость двумерной задачи для классических решений (см. в [Ka] современную форму результата и его обобщения). Глобальная теорема существования в двумерной эйлеровой гидродинамике была доказана В. Юдовичем [Yu1] для течений с вихрем из пространства L^p для любого заданного $p > 1$. По поводу теоремы единственности для течений с существенно ограниченным вихрем и ее обобщений см. [Yu1, Yu3]; неединственность слабых решений уравнений Эйлера обсуждалась в [Shn7].

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье–Стокса, являющимся уравнением Эйлера с дополнительным диффузионным членом (см. § 12). Локальные по времени результаты (существование и единственность) для классических решений уравнения Навье–Стокса были получены Лихтейнштейном, Одквистом и Осиным (см. ссылки в [Lad]). Существование глобальных по времени и «по всему», т. е. по области, начальному полю и вязкости, обобщенных решений было получено Дж. Лере (в 1930-х гг.) и Э. Хопфом (в 1950–51 гг.). Единственность для этого широкого класса решений все еще неизвестна. Теоремы глобального существования и единственности обобщенных и классических решений двумерного уравнения Навье–Стокса были получены Ладыженской и ее учениками (см. [Lad]).

§ 6. Гамильтонова структура уравнений Эйлера

Вернемся к коприсоединенному представлению произвольной группы Ли G. Оказывается, коприсоединенные орбиты всегда четномерны. Это объясняется тем, что любая такая орбита снабжена естественной симплектической структурой (т. е. некоторой невырожденной замкнутой 2-формой). Эта структура, называемая формой Кириллова (Березина, Костанта) (см. [Ki1, Ber, Kos]), была, по существу, открыта С. Ли [Lie].

Уравнения Эйлера в сопряженном пространстве алгебры Ли являются гамильтоновыми уравнениями на каждой коприсоединенной орбите [Arn5]. Кинетическая энергия играет роль соответствующей функции Гамильтона. Чтобы описать все эти объекты, мы начнем со следующего краткого напоминания.

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, т. е. многообразие M, снабженное замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой ω. Напомним, что *функция Гамильтона* H определяет гамильтоново поле v на M формулой

$$i_v\omega = -dH. \tag{6.1}$$

Другими словами, поле v является косым градиентом функции $H\colon M \to \mathbb{R}$, определяемым соотношением $-dH(\xi) = \omega(v, \xi)$ для каждого ξ (обычный градиент функции определяется условием $dH(\xi) = \langle \operatorname{grad} H, \xi\rangle$ для каждого ξ, где $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярное произведение на римановом многообразии M). Значение кососимметрической 2-формы ω на паре векторов (у нас это векторы v и ξ) называется их кососкалярным произведением. Следующая теорема хорошо известна (см., например, [Arn16]).

Теорема 6.1. *Фазовый поток гамильтонова поля v сохраняет симплектическую форму ω и функцию Гамильтона H.*

Предположим теперь, что M — коприсоединенная орбита группы Ли G. Многообразие M вкладывается в сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ соответствующей алгебры Ли. Касательное пространство к орбите M в каждой точке состоит из векторов скоростей коприсоединенного представления, соответствующих произвольным скоростям, с которыми элемент группы G выходит из *единицы*. В наших обозначениях (см. § 4) эти векторы, приложенные в точке $m \in M$ и касающиеся M, имеют вид:

$$\xi = \mathrm{ad}_a^* m, \quad m \in \mathfrak{g}^*, \quad a \in \mathfrak{g}.$$

Рассмотрим два таких вектора, соответствующих двум «угловым скоростям» (т. е. двум элементам алгебры Ли $\mathfrak{g}$):

$$\xi = \mathrm{ad}_a^* m, \quad \eta = \mathrm{ad}_b^* m, \quad a, b \in \mathfrak{g}.$$

Можно скомбинировать эти два элемента и один элемент сопряженного пространства, образовав число

$$\omega(\xi, \eta) := (m, [a, b]), \tag{6.2}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор в алгебре Ли, а круглые — естественное спаривание между сопряженными пространствами $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$. Легко доказывается следующая

Теорема 6.2. *Величина $\omega(\xi, \eta)$ зависит от векторов ξ и η, касательных к орбите M в точке m, а не от конкретного выбора «угловых скоростей» a и b, используемых в ее определении. Кососимметрическая форма ω на M замкнута и невырождена.*

Эта форма определяет симплектическую структуру на коприсоединенной орбите. Она инвариантна относительно коприсоединенного представления (что следует из ее определения).

Пример 6.3. Для $G = \mathrm{SO}(3)$ коприсоединенные орбиты являются сферами с центром в начале координат и самим началом (заметим, что все они четномерны!). Симплектические структуры являются элементами площадей, инвариантными по отношению к вращениям сфер. Площади нормализуются следующим условием: $\iint \omega$ пропорционален радиусу сферы.

Формула (6.2) определяет симплектические структуры сразу на всех коприсоединенных орбитах. Эти симплектические структуры так согласованы друг с другом, что они снабжают все сопряженное пространство алгебры Ли более общей структурой, называемой пуассоновой.

Определение 6.4. *Пуассонова структура* на многообразии есть операция $\{\,.\,,\,.\,\}$, которая ставит в соответствие двум гладким функциям на многообразии третью (их скобку Пуассона) таким образом, что эта операция является билинейной кососимметричной, удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

и тождеству Лейбница

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Многообразие, снабженное пуассоновой структурой, называется *пуассоновым многообразием.*

Тождество Лейбница означает, что при фиксированном первом аргументе операция $\{\,.\,,\,.\,\}$ является дифференцированием второго аргумента вдоль некоторого векторного поля.

Пример 6.5. Рассмотрим все гладкие функции на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ конечномерной алгебры Ли. Определим операцию на этом пространстве формулой

$$\{f,g\}(m) := (m,[df,dg]) \quad \text{для } m \in \mathfrak{g}^*,\ f,g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \tag{6.3}$$

где дифференциалы df и dg берутся в одной и той же точке m. Заметим, что дифференциал f в каждой точке $m \in \mathfrak{g}^*$ является элементом самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следовательно, коммутатор $[df,dg]$ в каждой точке также является вектором из этой алгебры Ли. Значение линейной функции m на этом векторе-коммутаторе — это скобка Пуассона пары функций f и g в точке m.

Пусть $x_1,\dots,x_n$ — координаты в сопряженном пространстве некоторой n-мерной алгебры Ли. Тогда формула (6.3) принимает вид:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}[x_i,x_j].$$

Здесь векторы x_i образуют базис самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Их коммутаторы тоже лежат в алгебре Ли, и поэтому они являются (линейными) функциями на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Определение 6.6. Эта операция называется *естественной структурой Ли–Пуассона* на сопряженном пространстве к алгебре Ли.

Легко проверяется (см., например, [We]) следующая

Теорема 6.7. *Эта операция действительно задает пуассонову структуру.*

Замечание 6.8. Пуассоновы структуры в несколько более общей ситуации были введены Якоби в «Лекциях по динамике» [Jac] при анализе структуры кольца первых интегралов заданного гамильтонова векторного поля. Теория Якоби является скорее алгебраической, чем топологической, и определяет пуассоновы структуры на более общих множествах, скорее подобных многообразиям в алгебраической геометрии, чем гладким многообразиям в топологии. Вообще говоря, эти множества не являются хаусдорфовыми. Современное определение было введено А. Вайнштейном [We] после работ Лихнеровича и Кириллова.

Определение 6.9. *Гамильтоново поле* с функцией Гамильтона H на многообразии, снабженном пуассоновой структурой, есть векторное поле ξ, определяемое соотношением

$$L_\xi f = \{H,f\}$$

для любой функции f. Здесь $L_\xi f$ — производная функции f вдоль векторного поля ξ, в координатах $L_\xi f = \sum \xi_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Пример 6.10. Гамильтоново поле ξ для линейной функции a на сопряженном пространстве алгебры Ли дается формулой

$$\xi(\cdot) = \mathrm{ad}_a^* \cdot ,$$

где a понимается как вектор из самой алгебры Ли.

Действительно, в каждой точке $m \in \mathfrak{g}^*$ и для любой функции f на $\mathfrak{g}^*$ имеем

$$\{a, f\}(m) = (m, [a, df]) = (\mathrm{ad}_a^* m, df) = (L_\xi f)(m).$$

В более общем случае гамильтоново поле ξ_H произвольной гладкой функции H на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ задается в точке $m \in \mathfrak{g}^*$ вектором $\xi_H(m) = \mathrm{ad}_{dH}^* m$, где дифференциал dH берется в точке m и рассматривается как вектор алгебры Ли.

Замечание 6.11. Гамильтоново поле $\xi_{\{F,H\}}$, функцией Гамильтона которого является скобка Пуассона двух функций F и H, есть скобка Пуассона гамильтоновых полей ξ_F и ξ_H этих функций:

$$\{\xi_F, \xi_H\} = \xi_{\{F,H\}}.$$

Это следует из определений и тождества Якоби

$$L_{\{\xi_F,\xi_H\}} f = L_{\xi_F} L_{\xi_H} f - L_{\xi_H} L_{\xi_F} f = L_{\xi_F}\{H, f\} - L_{\xi_H}\{F, f\} =$$
$$= \{F, \{H, f\}\} - \{H, \{F, f\}\} = -\{f, \{F, H\}\} = L_{\xi_{\{F,H\}}} f.$$

Определение 6.12. *Симплектическим листом* данной точки на многообразии, снабженном пуассоновой структурой, является множество всех точек многообразия, в которые можно прийти вдоль путей, исходящих из заданной точки, и таких, что соответствующие векторы скорости являются гамильтоновыми в каждый момент времени (с функцией Гамильтона, дифференцируемо зависящей от времени).

Теорема 6.13. *Симплектический лист каждой точки является гладким четномерным многообразием. Он имеет естественную симплектическую структуру, определяемую формулой $\omega(\xi, \eta) = \{f, g\}(x)$, где ξ и η являются векторами гамильтоновых полей с функциями Гамильтона f и g в точке x.*

В частности, величина $\omega(\xi, \eta)$ не зависит от конкретного выбора функций f и g.

На пуассоновом многообразии ограничение гамильтонова поля на каждый симплектический лист есть гамильтоново поле, определяемое ограничением на этот лист исходной функции Гамильтона.

Пример 6.14. Симплектические листы естественной пуассоновой структуры в сопряженном пространстве алгебры Ли являются коприсоединенными орбитами группы. Симплектические структуры листов, определяемые этой пуассоновой структурой, совпадают с естественными симплектическими структурами коприсоединенных орбит, описанными выше.

Пусть теперь $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ является невырожденным симметрическим оператором инерции. Определим *сопряженную квадратичную форму* на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли формулой

$$H(m) := \frac{1}{2}(A^{-1}m, m), \quad m \in \mathfrak{g}^*.$$

Обозначим через v вектор $A^{-1}m$ в алгебре Ли. Тогда $m = Av$, и, следовательно,

$$H(m) = \frac{1}{2}(v, Av)$$

есть просто кинетическая энергия, соответствующая «угловой скорости» v (или полю скоростей v в гидродинамике).

Теорема 6.15. *Пусть оператор инерции A определяет левоинвариантную метрику на группе Ли G. Тогда эйлерово поле скоростей в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли совпадает с гамильтоновым полем, определяемым функцией Гамильтона H по отношению к естественной пуассоновой структуре сопряженного пространства алгебры Ли. А именно, уравнение Эйлера на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ имеет вид:*

$$\dot{m} = \mathrm{ad}^*_{A^{-1}m} m, \quad m \in \mathfrak{g}^*. \tag{6.4}$$

Для правоинвариантной метрики соответствующая функция Гамильтона есть $-H$.

В частности, эйлерово поле является гамильтоновым полем на каждой коприсоединенной орбите по отношению к естественной симплектической структуре орбиты. Ее функция Гамильтона является ограничением кинетической энергии на орбиту.

Доказательство. Дифференциал квадратичной формы

$$H(m) = \frac{1}{2}(A^{-1}m, m)$$

в некоторой точке $m \in \mathfrak{g}^*$ есть вектор $v = A^{-1}m \in \mathfrak{g}$, который рассматривается как линейный функционал на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Согласно примеру 6.10 гамильтонов вектор, соответствующий этому линейному функционалу, есть вектор $\mathrm{ad}^*_{A^{-1}m} m$ из уравнения (6.4).

Тот факт, что это уравнение описывает геодезические на группе Ли G по отношению к левоинвариантной метрике, есть как раз вторая теорема Эйлера. □

Пример 6.16. Рассмотрим решение $v(t)$ уравнения Эйлера идеальной жидкости в односвязной области трехмерного евклидового пространства.

Пусть $v_1 = v + \varepsilon u_1 + \ldots$, $v_2 = v + \varepsilon u_2 + \ldots$ — два решения с изозавихренными начальными условиями, бесконечно близкими к v (ε очень мало́, точки обозначают члены порядка $o(\varepsilon)$, все поля здесь и ниже зависят от t).

Изозавихренность полей означает, что их вихри переводятся друг в друга действием диффеоморфизма, сохраняющего элемент объема. Для бесконечно малого возмущения вихрей $\xi_i = \operatorname{rot} u_i$ мы получаем в каждый момент t

$$\xi_i = [a_i, \operatorname{rot} v],$$

где a_i — бездивергентные поля из нашей алгебры Ли, $[\,.\,,\,.\,]$ — скобка Пуассона бездивергентных полей со знаком минус (так что $[a,b] = \operatorname{rot}(a \times b)$).

Поля a_i определяются неоднозначно по возмущениям u_i. Однако можно определить следующий инвариант пары возмущений, который не зависит от этой неоднозначности.

Поставим в соответствие начальному полю $v(t)$ и паре полей a_i величину

$$\omega = \int\limits_{M^3} ([a_1(t), a_2(t)], v(t))\, dx\, dy\, dz.$$

Вышеизложенная теория, примененная к этому примеру, приводит к следующему результату.

Теорема 6.17. *Величина ω является постоянной (т. е. не зависит от t), какое бы решение v уравнения Эйлера и какие бы начальные поля $a_1(0)$ и $a_2(0)$, определяющие возмущения, не были бы взяты.*

Доказательство. Из гамильтоновости уравнения Эйлера на орбитах изозавихренных полей следует, что фазовый поток уравнения Эйлера сохраняет естественную симплектическую структуру множества изозавихренных полей. Эта структура дается формулой $\omega(\xi_1, \xi_2) = (m, [a_1, a_2])$ для $\xi_i = \operatorname{ad}^*_{a_i} m$, где m — образ в сопряженном пространстве (к алгебре Ли бездивергентных полей) вектора $v(t)$ из алгебры Ли при отображении $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, являющемся оператором инерции.

Согласно теореме 5.4 об операторе инерции, элемент m можно отождествить с 1-формой, являющейся скалярным произведением с векторным полем v (само же сопряженное пространство понимается как пространство 1-форм по модулю дифференциалов функций).

Дифференциал этой 1-формы является 2-формой вихря, соответствующей векторному полю вихря $\xi = \operatorname{rot} v$. Возмущение элемента m, определяемое полем a_i, есть

$$\xi_i = [a_i, \xi],$$

и, следовательно,

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{M^3} ([a_1, a_2], v)\, dx\, dy\, dz.$$

Тот факт, что ω не зависит от t, означает инвариантность симплектической структуры относительно гамильтонова потока уравнения Эйлера на коприсоединенной орбите, образованной полями, изозавихренными с $v(0)$. □

Замечание 6.18. В двумерной односвязной области поля a_i определяются функциями тока ψ_i, и сохраняющаяся величина имеет вид

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{M^2} \xi \cdot \{\psi_1, \psi_2\}\, dx\, dy.$$

Здесь $\xi_i = \{\psi_i, \xi\}$, $\xi = \Delta\psi$ — функция вихря невозмущенного течения с функцией тока ψ, а $\{f, g\}$ — скобка Пуассона двух функций, $\{f, g\} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}$, равная якобиану отображения $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$.

Теперь свойство гамильтоновости влечет следующее. Если функции вихря ξ и $\xi + \varepsilon\{\psi_i, \xi\} + \ldots$ эволюционируют во времени согласно уравнению Эйлера–Гельмгольца, то величина ω не зависит от времени. Гамильтонов формализм можно использовать также и в обратном направлении: из известных результатов гидродинамики можно вывести некоторые свойства гамильтоновых систем (см. [Koz1]).

Более общий случай римановых многообразий, а не только областей в евклидовом пространстве, и необязательно односвязных, мы обсудим в следующем параграфе. Существует обширная литература по гамильтонову формализму уравнений Эйлера на группах Ли и различным приложениям (см., например, книги [GS2, Arn16, MaR, G-P] и статьи [M-W, AKh, Ose2]).

§ 7. Идеальная гидродинамика на римановых многообразиях

Обобщение гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости на многообразия больших размерностей (в частности, размерностей $n > 3$) является физически столь же значимым, как рассмотрение, скажем, волнового уравнения с нефизически большим числом независимых переменных.

Более общая точка зрения позволяет пролить свет как на общие свойства уравнения Эйлера, так и на геометрию группы диффеоморфизмов. В частности, в этой главе мы разберем трехмерную гидродинамику с этой более общей точки зрения.

7.1. Гидродинамическое уравнение Эйлера на многообразиях

Пусть M^n — компактное ориентируемое риманово многообразие с метрикой $(\,.\,,\,.\,)$, а μ — форма объема, т. е. необращающаяся в нуль дифференциальная форма старшей степени n. Мы не будем предполагать в общем случае какой-либо связи μ с формой объема, индуцированной метрикой.

Определение 7.1. *Уравнение Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на M* — это следующее эволюционное уравнение для поля скоростей v течения жидкости на многообразии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -(v, \nabla)v - \nabla p, \\ \operatorname{div}_\mu v = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

где второе уравнение означает, что поле v сохраняет форму объема μ. Здесь p является зависящей от времени функцией на M, которая определяется из условия $\operatorname{div}_\mu(\partial v/\partial t) = 0$ однозначно (с точностью до аддитивной константы, зависящей от времени). Выражение $(v, \nabla)v$ обозначает ковариантную производную $\nabla_v v$ поля v вдоль самого себя для стандартной римановой связности на M. В случае евклидового пространства $M = \mathbb{R}^3$ уравнение Эйлера принимает вид (5.2).

В случае многообразия M с краем поле скоростей предполагается касающимся края.

Определение ковариантной производной можно найти в гл. IV, п. 1.2. Для многих целей этого параграфа достаточно иметь в виду следующий

Пример 7.2. В случае $M = \mathbb{R}^n$, стандартной метрики и стандартной формы объема уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости является уравнение

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

для векторного поля v, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$. Ковариантная производная в этом случае задается в координатах выражением

$$((v, \nabla)v)_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Точно так же, как и для дву- и трехмерного случаев, уравнение Эйлера (7.1) на компактном n-мерном многообразии M может рассматриваться как уравнение геодезических на группе Ли $S\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих форму объема μ.

Определение 7.3. *Конфигурационное пространство* идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей многообразие M, есть *группа Ли* $G = S\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов M, сохраняющих форму объема μ (и принадлежащих связной компоненте единицы группы). В случае многообразия с краем ∂M группа $S\mathrm{Diff}(M)$ состоит из тех сохраняющих объем диффеоморфизмов, которые оставляют границу ∂M инвариантной.

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ этой группы состоит из бездивергентных векторных полей на M (касающихся границы, если $\partial M \neq \varnothing$). Скобкой Ли (коммутатором) в этой алгебре является скобка Пуассона векторных полей, взятая со знаком минус.

Применим теперь развитый выше формализм к этой алгебре Ли. Формулировки получающихся результатов приведены в п. 7.2 и п. 7.3 ниже, а доказательства — в § 8.

7.2. Сопряженные пространства алгебр Ли бездивергентных полей

Начиная с этого места все объекты предполагаются достаточно гладкими. Мы оставляем в стороне аналитические трудности подхода к бесконечномерных группам и алгебрам и отсылаем интересующегося читателя к работе [E-M], где был развит подходящий для гидродинамики формализм пространств Соболева. Напомним нужные для дальнейшего основные понятия анализа на многообразиях.

Определение 7.4. Пусть $\Omega^k(M)$ (или просто Ω^k) обозначает пространство гладких дифференциальных k-форм на компактном многообразии M (возможно, с краем ∂M). Оператор *внешней производной* d увеличивает степень формы на 1, в то время как оператор *внутреннего произведения* i_ξ, определяемого подстановкой заданного векторного поля ξ в форму в качестве первого аргумента, уменьшает степень на 1. Эти операторы являются

дифференцированиями алгебры форм в том смысле, что они удовлетворяют следующим тождествам:

$$i_\xi(\alpha \wedge \beta) = (i_\xi \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_\xi \beta), \tag{7.2}$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \tag{7.3}$$

для любых форм $\alpha \in \Omega^k$ и $\beta \in \Omega^l$.

Производная Ли дифференциальной формы ω вдоль векторного поля v (касающегося края ∂M, если $\partial M \neq \varnothing$) есть производная по времени формы ω, перенесенной (назад) такими диффеоморфизмами g_t, что $g_0 = \mathrm{Id}$ и $\dot{g}_0 = v$:

$$L_v \omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t^* \omega, \tag{7.4}$$

где $g_0(x) \equiv x$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t(x) = v(x)$. Результат $g^*\omega$ перенесения k-формы ω некоторым гладким отображением g определяется по формуле

$$(g^*\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega(g_*\xi_1, \ldots, g_*\xi_k),$$

где линейный оператор g_* является дифференциалом отображения g.

Формула гомотопии — это тождество

$$L_v = i_v d + d i_v.$$

Оно является инфинитезимальной версией формулы Лейбница: граница цилиндра есть разность верхнего и нижнего оснований, плюс боковая поверхность (ориентированная подходящим образом).

Теорема 7.5 (см., например, [M-W, Nov2, DKN]). *Пространство $\mathfrak{g}^*$, сопряженное пространству алгебры Ли $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей на M (касающихся края ∂M), естественно изоморфно факторпространству $\Omega^1/d\Omega^0$ всех дифференциальных 1-форм на M по модулю всех точных 1-форм (т. е. по модулю дифференциалов всех функций) на M.*

Коприсоединенное действие группы на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли совпадает с естественным действием диффеоморфизмов на дифференциальных 1-формах

$$\mathrm{Ad}_g^* \alpha = g^* \alpha, \tag{7.5}$$

где 1-формы α и $\mathfrak{g}^*\alpha$ на M рассматриваются по модулю дифференциалов функций.

Здесь мы понимаем под $S\mathrm{Vect}(M)$ алгебру Ли группы диффеоморфизмов M, сохраняющих фиксированную форму объема. Коммутатором $\mathrm{ad}_v w = [v, w]$ двух векторных полей является их скобка Пуассона, взятая со знаком минус. Мы докажем эту теорему в § 8.

Следствие 7.6. *Коприсоединенное действие элемента v алгебры $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$ является производной Ли 1-форм вдоль векторного поля v на M:*

$$\mathrm{ad}_v^* \alpha = L_v \alpha. \tag{7.6}$$

Здесь α и $L_v\alpha$ являются 1-формами по модулю дифференциалов функций.

Доказательство. Это следствие непосредственно вытекает из определения производной Ли (7.4). Инфинитезимальная версия (7.5) для $g \in G$ достаточно близкого к единице (т. е. для «инфинитезимальной замены переменных» $g = \mathrm{Id} + \varepsilon v + o(\varepsilon)$, заданной векторным полем v) определяет коприсоединенное действие элемента алгебры Ли $v \in \mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ как производную вдоль векторного поля. □

Определение 7.7. *Спаривание* пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ дается следующей явной формулой. Пусть $[u]$ — *класс смежности* 1-формы u в факторпространстве $\Omega^1/d\Omega^0$, т. е. класс всех 1-форм на M вида $u + df$, где f — произвольная функция. Тогда, чтобы вычислить значение класса смежности $[u] \in \mathfrak{g}^*$ на векторном поле $v \in \mathfrak{g}$, нужно взять интеграл по M от поточечного спаривания вектора v и произвольной 1-формы u из класса смежности $[u] \in \Omega^1/d\Omega^0$:

$$\langle v, [u] \rangle = \int\limits_M u(v)\mu. \tag{7.7}$$

(То, что этот интеграл не зависит от конкретного выбора u, доказано в п. 8.3.) Эквивалентным образом можно представлять себе $\Omega^1/d\Omega^0$ как сопряженное пространство к пространству всех замкнутых $(n-1)$-форм на M:

$$\langle \omega_v, [u] \rangle = \int\limits_M u \wedge \omega_v, \tag{7.8}$$

где $\omega_v = i_v\mu$ является замкнутой $(n-1)$-формой, ассоциированной с бездивергентным полем v.

Замечание 7.8. Коприсоединенное действие корректно определено формулой (7.5), так как действие диффеоморфизма коммутирует с операцией d:

$$\text{если } \alpha' = \alpha + df, \text{ то } g^*\alpha' = g^*\alpha + g^*(df) = g^*\alpha + d(g^*f),$$

т. е. 1-формы $g^*\alpha$ и $g^*\alpha'$ определяют один и тот же класс смежности в факторпространстве $\Omega^1/d\Omega^0$. Подобным же образом производная Ли действует на классах смежности 1-форм u, так как операция L_v коммутирует с оператором внешнего дифференцирования d:

$$L_v[u] = L_v(u + df) = L_v u + dL_v f = [L_v u].$$

Как мы упоминали, факторпространство $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$ является только регулярной частью настоящего сопряженного пространства к алгебре Ли $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$. Заметим, что нерегулярная часть сопряженного пространства $\mathfrak{g}^*$ включает много интересных функционалов: например, сингулярные замкнутые 2-формы с носителями на подмногообразиях коразмерности 2 (для $n = 2$ такие формы имеют носителями дискретное множество точек, а для $n = 3$ носителями могут быть замкнутые кривые, см. гл. I, § 11 и гл. VI, § 3).

Следствие 7.9. *Для односвязного многообразия M (или, в более общем случае, для многообразия с тривиальной первой группой гомологий $H_1(M, \mathbb{R}) = 0$) сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ изоморфно пространству всех точных 2-форм на M.*

Доказательство. Действительно, ядро оператора $d\colon \Omega^1 \to \Omega^2$ содержит все замкнутые 1-формы на M. Из односвязности M (или условия $H_1(M,\mathbb{R}) = 0$) следует, что первая группа когомологий обращается в нуль: $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, т. е. все замкнутые 1-формы точны. Таким образом, фактор-пространство $\Omega^1/d\Omega^0$ изоморфно образу d в Ω^2. □

Определение 7.10. Скажем, что бездивергентное векторное поле v на M^n (касающееся края ∂M) является *точным*, если соответствующая замкнутая $(n-1)$-форма $\omega_v := i_v\mu$ является дифференциалом какой-нибудь $(n-2)$-формы, обращающейся в нуль на ∂M: $\omega_v = i_v\mu = d\alpha$, $\alpha|_{\partial M} = 0$.

Пример 7.11. Бездивергентное поле на двумерной поверхности точно тогда и только тогда, когда оно обладает однозначной функцией тока, обращающейся в нуль на границе поверхности. Поток такого поля через любую замкнутую кривую на поверхности, а также через кривую, соединяющую две граничные точки, равен нулю.

На односвязном многообразии произвольной размерности n каждое бездивергентное векторное поле точно. Действительно, благодаря тождеству $H^{n-1}(M) = H^1(M) = 0$, каждая замкнутая $(n-1)$-форма ω_v точна.

Определение 7.12. Диффеоморфизм многообразия M (сохраняющий элемент объема μ и край ∂M) называется *точным*, если он может быть соединен с тождественным преобразованием такой гладкой кривой g_t (в пространстве сохраняющих форму объема диффеоморфизмов M), что поле скоростей $\dot{g}_t$ точно в каждый момент t.

Точные диффеоморфизмы образуют *группу точных диффеоморфизмов* $S_0\mathrm{Diff}(M^n)$.

Группа точных диффеоморфизмов является подгруппой группы $S\mathrm{Diff}(M^n)$ всех сохраняющих объемы диффеоморфизмов. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ группы точных диффеоморфизмов $S_0\mathrm{Diff}(M^n)$ естественно отождествляется (отображением $v \mapsto i_v\mu$) с пространством дифференциальных $(n-1)$-форм, которые являются дифференциалами $(n-2)$-форм, обращающимися в нуль на ∂M.

Теорема 7.13. *Сопряженное пространство $\mathfrak{g}_0^*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ группы $S_0\mathrm{Diff}(M)$ естественно отождествляется с пространством всех 2-форм, которые являются дифференциалами 1-форм на M. Это сопряженное пространство естественно изоморфно факторпространству $\Omega^1/\ker(d\colon \Omega^1 \to \Omega^2)$ пространства всех 1-форм на M по модулю пространства всех замкнутых 1-форм. Присоединенное и коприсоединенное представления являются естественными действиями диффеоморфизмов на $(n-1)$-формы и на 1-формы соответственно.*

Замечание 7.14. Подгруппа, порожденная коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$ группы G, называется *коммутантом* группы G. Коммутант группы $S\mathrm{Diff}(M)$ является подгруппой точных диффеоморфизмов $S_0\mathrm{Diff}(M)$ (см. [Ban]).

Касательное пространство к коммутанту группы Ли называется *коммутантом* алгебры Ли. Она порождается (как векторное пространство) коммутаторами элементов алгебры Ли. Коммутант алгебры Ли $S\mathrm{Vect}(M)$ группы $S\mathrm{Diff}(M)$ является алгеброй Ли $S_0\mathrm{Vect}(M)$ (см. [Arn7]).

Факторпространство $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по ее коммутанту $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ называется группой одномерных гомологий (с коэффициентами в числах) алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, группа одномерных гомологий алгебры Ли бездивергентных векторных полей на M^n естественно изоморфна группе когомологий де Рама

$$H^{n-1}(M) = \ker(d\colon \Omega^{n-1} \to \Omega^n)/\mathrm{Im}\ (d\colon \Omega^{n-2} \to \Omega^{n-1})$$

(для многообразия с краем $(n-1)$-формы должны обращаться в нуль на границе).

Образ бездивергентного векторного поля $v \in \mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ в группе одномерных гомологий

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \approx H^{n-1}(M,\mathbb{R}) \approx H_1(M,\mathbb{R}).$$

называется *классом вращения* векторного поля.

Класс вращения бездивергентного векторного поля, сосредоточенного вдоль некоторой замкнутой кривой γ в M, является классом гомологий этой кривой γ (при условии, что поток поля через трансверсальное сечение кривой γ равен 1).

Замечание 7.15. В пространстве $C_1(M)$ замкнутых кривых на многообразии M с краем существуют два интересных подпространства: 1) кривые, гомологичные нулю; 2) кривые в M, гомологичные кривым на ∂M. (Напомним, что две ориентированные замкнутые кривые a, b на M являются гомологичными, если существует поверхность S в M, чьим краем является $\partial S = a - b$. Здесь знак минус означает обращение ориентации.)

В пространстве $\mathfrak{g}$ всех бездивергентных векторных полей на M, касающихся ∂M, можно определить два подпространства, которые соответствуют этим подклассам кривых: 1) точные поля $v \in \mathfrak{g}_0$ (такие, что $i_v\mu = d\alpha$, $\alpha|_{\partial M} = 0$); 2) полуточные поля $v \in \mathfrak{g}_{se}$, для которых $i_v\mu = d\alpha$, $d\alpha|_{\partial M} = 0$.

Теорема 7.16. *Эти подпространства являются подалгебрами Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ бездивергентных векторных полей на M, касающихся границы. Более того, они являются идеалами этой алгебры Ли, т. е. скобка Пуассона $\{w, v\}$ произвольного поля $w \in \mathfrak{g}$ с полем v из подалгебры $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0$ или $\mathfrak{g}_{se}$) принадлежит той же подалгебре.*

Доказательство. Диффеоморфизм g из группы $S\mathrm{Diff}(M)$ действует как на поле v, так и на форму α согласованным образом, так что соотношения $i_v\mu = d\alpha$, $\alpha|_{\partial M} = 0$ и $d\alpha|_{\partial M}$ сохраняются при этом действии. Следовательно, любое преобразование Ad_g переводит каждую подалгебру $\mathfrak{a}$ в себя. Пусть g_t выходит из единицы группы e со скоростью $\dot{g}|_{t=0} = w$. Производная Ad_{g_t} по t переводит $\mathfrak{a}$ в себя. С точностью до знака этой производной является скобка Пуассона с полем w. □

Теорема 7.17. *Сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*_{se}$ (алгебры Ли $\mathfrak{g}_{se}$ полуточных бездивергентных векторных полей) естественно изоморфно факторпространству пространства всех 1-форм на M по модулю пространства замкнутых 1-форм на M, обращающихся в нуль на краю ∂M.*

7.3. Оператор инерции n-мерной жидкости

Определение 7.18. Риманова метрика $(\,.\,,\,.\,)$ и мера μ на компактном многообразии M (возможно, с краем ∂M) определяют невырожденное *скалярное произведение* $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathfrak{g}}$ (бездивергентных) векторных полей $v, w \in \mathfrak{g}$

$$\langle v, w\rangle_{\mathfrak{g}} := \int\limits_M (v(x), w(x))\mu. \tag{7.9}$$

Это скалярное произведение задает симметрический обратимый *оператор инерции* $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в сопряженное к ней пространство $\mathfrak{g}^*$. Образ Av произвольного элемента $v \in \mathfrak{g}$ является элементом сопряженного пространства $\mathfrak{g}^*$, удовлетворяющим условию

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, w\rangle_{\mathfrak{g}} \tag{7.10}$$

для любого $w \in \mathfrak{g}$, где $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ с левой стороны означает спаривание элементов сопряженных пространств. (Строго говоря, невырожденность скалярного произведения влечет обратимость A только на регулярной части $\mathfrak{g}^*$.)

Теорема 7.19. *Оператор инерции $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ для алгебры Ли $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей (касающихся границы) переводит векторное поле $v \in \mathfrak{g}$ в класс смежности $[u] \in \mathfrak{g}^*$, содержащий 1-форму u, полученную из поля v посредством риманового «поднятия индексов»: $u(\xi) = (v, \xi)$ для всех векторов $\xi \in T_xM$ в каждой точке $x \in M$.*

Доказательство. Для доказательства сравним формулы (7.7) и (7.9). В касательном пространстве T_xM в произвольной точке $x \in M$ риманово «поднятие индексов» вектора $v(x)$ есть в точности выбор такой 1-формы на T_xM, значение которой на любом векторе $w(x)$ является римановым скалярным произведением $v(x)$ и $w(x)$. □

Например, если M — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то оператор инерции переводит векторное поле $\sum\limits_i v_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ в множество 1-форм

$$\left\{\sum_i \left(v_i(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \colon f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Заметим, что в случае некомпактного многообразия M, скажем, $M = \mathbb{R}^n$, необходимо добавить условие убывания векторных полей и дифференциальных форм на бесконечности, чтобы сделать интегралы (7.7) и (7.9) сходящимися.

Определение 7.20. *Функцией энергии* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ бездивергентных векторных полей называется половина квадрата длины вектора $v \in \mathfrak{g}$ в смысле скалярного произведения $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathfrak{g}}$:

$$H(v) := \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}\int\limits_M (v, v)\mu = \frac{1}{2}\langle v, Av\rangle.$$

Сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ наследует от $\mathfrak{g}$ невырожденное скалярное произведение $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathfrak{g}^*}$. Мы определим гамильтонову функцию *энергии* на $\mathfrak{g}^*$ как половину квадрата длины элементов в $\mathfrak{g}^*$

$$H([u]) = \frac{1}{2}\langle [u], [u]\rangle_{\mathfrak{g}^*} := \frac{1}{2}\langle A^{-1}[u], [u]\rangle.$$

Здесь $v = A^{-1}[u]$ является бездивергентным векторным полем, сопоставленным классу смежности 1-форм $[u]$ посредством римановой метрики.

Напомним, что уравнения Эйлера представляют собой проекцию геодезического потока *правоинвариантной* метрики на группе, определенной квадратичной формой H на ее алгебре Ли.

Лемма-определение 7.21 (см. [Arn16, OKC]). *Обобщенное уравнение Эйлера* на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$ алгебры Ли бездивергентных векторных полей на M имеет следующий вид:

$$\frac{\partial [u]}{\partial t} = -L_v[u]. \tag{7.11}$$

Здесь векторному полю v сопоставлен класс смежности 1-форм $[u]$ с помощью поднятия индексов, заданного метрикой на M: $[u] = Av$. Переписанное для конкретной 1-формы $u \in [u]$ обобщенное уравнение Эйлера принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L_v u - df. \tag{7.12}$$

Уравнение Эйлера на $\mathfrak{g}^*$ является гамильтоновым по отношению к естественной структуре Ли–Пуассона, а его функцией Гамильтона является взятая со знаком минус энергия $-H([u])$.

Замечание 7.22. Последнее уравнение на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ является образом при отображении оператором инерции A классического уравнения Эйлера (7.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v, \nabla)v - \nabla p$$

в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ бездивергентных векторных полей ($\mathrm{div}_\mu v = 0$). Здесь 1-форма u связана с векторным полем v поднятием индексов, заданным метрикой.

Отождествление уравнений в алгебре Ли и в ее двойственном пространстве основывается на следующем факте, который мы докажем в гл. IV, § 1. Оператор инерции A переводит ковариантную производную векторного поля $(v, \nabla)v$ на римановом многообразии M в 1-форму $L_v u - \frac{1}{2}d(u(v))$. Функция давления p равна $f - \frac{1}{2}u(v)$ (по модулю аддитивной константы).

Уравнение вихря (или уравнение Гельмгольца) $\frac{\partial \omega}{\partial t} = -L_v\omega$ на пространстве всех точных 2-форм $\omega = du$ на M (см. уравнение (5.3)) получается внешним дифференцированием обеих частей уравнения (7.11). Преимуществом формулировки Гельмгольца является чисто геометрическое действие на 2-формах: форма ω «вморожена в жидкость», т. е. она сама переносится потоком жидкости, а не лишь по модулю некоторого дифференциала как это происходит с 1-формой u.

Следствие 7.23. *Если начальное векторное поле точно (соответственно полуточно), то оно будет оставаться точным (соответственно полуточным) для всех t.*

Это следует из явной формы уравнения Эйлера (7.11) и теорем 7.13 и 7.17, описывающих сопряженные пространства к алгебрам Ли $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_{se}$.

Доказательство леммы-определения. Покажем, что уравнение (7.11) является гамильтоновым уравнением на $\mathfrak{g}^*$, причем роль функции Гамильтона играет минус энергия $-H([u])$.

Действительно, квадратичная функция Гамильтона

$$-H([u]) = -\frac{1}{2}\langle A^{-1}[u], [u]\rangle$$

по отношению к стандартной линейной структуре Ли–Пуассона задает следующее уравнение на $\mathfrak{g}^*$

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} = -\mathrm{ad}^*_{A^{-1}[u]}[u],$$

см. (6.4). Подставляя сюда явные выражения для оператора инерции (теорема 7.19) и коприсоединенного оператора ad^* из (7.6), мы завершаем доказательство. □

Замечание 7.24. Для произвольной группы Ли G и произвольного (необязательно квадратичного) функционала Гамильтона F на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствующее уравнение Гамильтона по отношению к структуре Ли–Пуассона имеет вид

$$\dot{m} = \mathrm{ad}^*_{\delta F/\delta m} m.$$

Здесь *вариационная производная* $\delta F/\delta m$ функционала F в точке $m \in \mathfrak{g}^*$ понимается как элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и определяется соотношением

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(m + \varepsilon w)|_{\varepsilon=0} = \langle w, \delta F/\delta m\rangle$$

для всех $w \in \mathfrak{g}^*$, ср. пример 6.10.

Для квадратичного функционала $F = \frac{1}{2}\langle A^{-1}m, m\rangle$ вариационная производная есть $\delta F/\delta m = A^{-1}(m)$.

§ 8. Доказательства теорем об алгебре Ли бездивергентных векторных полей и сопряженном к ней пространстве

Пусть M^n — гладкое компактное многообразие с краем ∂M и элементом объема μ. Обозначим через $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ алгебру Ли всех бездивергентных векторных полей на M, которые касаются ∂M. Обозначим через $\Omega^k(M)$ пространство дифференциальных k-форм на M, а через $\Omega^k(M;\partial M)$ — пространство дифференциальных k-форм на M, ограничение которых на ∂M обращается в нуль.

Свяжем с векторным полем v на M следующую дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\omega_v = i_v\mu \in \Omega^{n-1}(M).$$

Лемма 8.1. *Отображение $v \mapsto w_v$ определяет естественный (т. е. инвариантный по отношению к $S\mathrm{Diff}(M)$-действию) изоморфизм векторного пространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и пространства всех замкнутых дифференциальных $(n-1)$-форм на M, обращающихся в нуль на ∂M:*

$$\omega_v \in \ker(d\colon \Omega^{n-1}(M, \partial M) \to \Omega^n(M)).$$

Доказательство мы начнем со следующей фундаментальной *формулы гомотопии.*

Определение 8.2. *Оператор производной Ли L_ξ* на формах не меняет их степени и измеряет мгновенную скорость изменения формы, когда она эволюционирует со средой, имеющей поле скоростей ξ. Линейный оператор L_ξ выражается через операторы i_ξ и d по «формуле гомотопии» $L_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$.

Доказательство леммы 8.1 получается теперь применением формулы гомотопии к форме объема $\mu \in \Omega^n(M)$. Мы получаем, что

$$L_v \mu = d i_v \mu = d\omega_v,$$

а значит поток поля v сохраняет μ тогда и только тогда, когда $(n-1)$-форма ω_v замкнута. Ограничение формы ω_v на ∂M является $(n-1)$-формой, которая задает поток поля v через ∂M. Обращение в нуль ω_v на ∂M эквивалентно тому, что поле v касается края ∂M. □

Утверждение о двойственности между пространствами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ из § 3 и § 7 приобретает теперь следующую точную формулировку.

Теорема 8.3 (см. теоремы 3.11, 7.5). *Для n-мерного компактного многообразия M с краем ∂M сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ (алгебры Ли $\mathfrak{g}$ бездивергентных векторных полей на M, касающихся ∂M) естественно изоморфно факторпространству $\Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ (пространства всех 1-форм на M по модулю пространства полных дифференциалов) в следующем смысле:*

1) *если α — дифференциал функции ($\alpha = df$) и $v \in \mathfrak{g}$, то*

$$\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0;$$

2) *если $\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0$ для всех $v \in \mathfrak{g}$, то 1-форма α — дифференциал функции;*

3) *если $\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0$ для всех $\alpha = df$, то $v \in \mathfrak{g}$ (т. е. v является бездивергентным полем на M, касающимся ∂M);*

4) *коприсоединенное действие группы $S\mathrm{Diff}(M)$ на пространстве $\Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ является геометрическим, т. е. сохраняющие объемы диффеоморфизмы действуют как замены координат на классах смежности 1-форм α.*

Доказательство. 1) Мы используем тождество Лейбница для внешней производной d

$$d(f \wedge \omega_v) = (df) \wedge \omega_v + f(d\omega_v). \tag{8.1}$$

Если $v \in \mathfrak{g}$, то $d\omega_v = 0$ по лемме 8.1. Следовательно,

$$\iint\limits_M (df) \wedge \omega_v = \iint\limits_M d(f \wedge \omega_v) = \int\limits_{\partial M} f \wedge \omega_v$$

согласно формуле Стокса. Поскольку $\omega_v|_{\partial M} = 0$, последний интеграл равен нулю.

2) Рассмотрим замкнутую кривую γ в M (не пересекающую ∂M). Пусть v — бездивергентное векторное поле, носителем которого является тонкое полноторие, окружающее эту кривую, и поток которого через любую трансверсаль к γ равен 1. Устремляя толщину ε полнотория к нулю, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = (-1)^{n-1} \int\limits_\gamma \alpha = 0$$

для произвольной замкнутой кривой γ. Следовательно, α является дифференциалом некоторой функции (а именно, своего интеграла по кривой, связывающей текущую точку с некоторой фиксированной).

3) Снова используем тождество (8.1). Теперь мы знаем, что интеграл $(df) \wedge \wedge \omega_v$ по M равен нулю, а следовательно,

$$\iint\limits_M f d\omega_v = \int\limits_{\partial M} f \wedge \omega_v$$

для любой функции f. Выберем δ-образную функцию f с носителем в малой окрестности некоторой внутренней точки M. Тогда интеграл с правой стороны обращается в нуль, поэтому и левый интеграл равен нулю. Отсюда следует, что $d\omega_v = 0$ в любой внутренней точке M, т. е. форма ω_v замкнута (а поле v бездивергентно).

Таким образом, и левый и правый интегралы равны нулю для произвольной функции f. В частности, можно взять функцию, ограничение которой на ∂M δ-образно. В каждой точке края мы получаем $\omega_v|_{\partial M} = 0$. Другими словами,

$$\omega_v \in \ker(d\colon \Omega^{n-1}(M, \partial M) \to \Omega^n(M)),$$

и, следовательно, по лемме 8.1 $v \in \mathfrak{g}$. Утверждение 3) доказано.

4) Из утверждений 1)–3) следует, что $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$, поскольку множество бездивергентных векторных полей на M с формой объема μ отождествляется с пространством замкнутых $(n-1)$-форм с помощью соответствия $v \mapsto \omega_v := := i_v\mu$. Если M имеет край ∂M, то поле v касается ∂M тогда и только тогда, когда форма ω_v обращается в нуль на границе.

Кроме того, что присоединенное действие группы $S\mathrm{Diff}(M)$ на векторное поле v является геометрическим действием диффеоморфизмов $g \in G$ (g действует на v как замена координат):

$$\mathrm{Ad}_g v = g_* v.$$

Следовательно, действие диффеоморфизма g на любую 1-форму α, которая спаривается с v, также является геометрическим. Более точно, коприсоединенное действие группы на классе смежности $[\alpha] \in \Omega^1/d\Omega^0 = \mathfrak{g}^*$, представляющем 1-форму α в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$, описывается следующим образом:

$$\langle v, \mathrm{Ad}_g^*[\alpha]\rangle := \langle \mathrm{Ad}_g v, [\alpha]\rangle = \int\limits_M \alpha(g_* v)\mu =$$

$$= \int\limits_M (g^*\alpha)(v) g^*\mu = \int\limits_M (g^*\alpha)(v)\mu = \langle v, [g^*\alpha]\rangle.$$

Здесь мы использовали инвариантность формы объема: $g^*\mu = \mu$. Таким образом, $\mathrm{Ad}_g^*[\alpha] = [g^*\alpha]$, и это завершает доказательство теоремы. □

Рассмотрим теперь алгебру Ли $\mathfrak{g}_0$ точных полей v, для которых $\omega_v = i_v\mu = d\beta$ для некоторой $(n-2)$-формы $\beta \in \Omega^{n-2}(M, \partial M)$, обращающейся в нуль на границе: $\beta|_{\partial M} = 0$.

Теорема 8.4. *Для n-мерного компактного многообразия M с краем:*

1) *если 1-форма α замкнута ($d\alpha = 0$), то $\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0$ для всех полей $v \in \mathfrak{g}_0$;*

2) *если $\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0$ для всех v в $\mathfrak{g}_0$, то 1-форма α замкнута в M;*

3) *если $\iint\limits_M \omega_v \wedge \alpha = 0$ для всех замкнутых 1-форм α на M, то $v \in \mathfrak{g}_0$.*

Другими словами, сопряженное пространство $\mathfrak{g}_0^*$ (алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ точных бездивергентных векторных полей) естественно изоморфно факторпространству $\Omega^1/Z^1(M)$ (пространства всех 1-форм на M по модулю подпространства всех замкнутых 1-форм на M).

Доказательство. 1) Применим тождество Лейбница

$$d(\beta \wedge \alpha) = (d\beta) \wedge \alpha + (-1)^{n-2}\beta \wedge d\alpha, \tag{8.2}$$

где $\omega_v = d\beta$. Если $d\alpha = 0$, то по формуле Стокса

$$\iint\limits_M (d\beta) \wedge \alpha = \int\limits_{\partial M} \beta \wedge \alpha = 0,$$

так как $\beta|_{\partial M} = 0$.

2) Используя (8.2), при условии, что $\iint\limits_M (d\beta) \wedge \alpha = 0$, получаем:

$$(-1)^n \iint\limits_M \beta \wedge d\alpha = \int\limits_{\partial M} \beta \wedge \alpha.$$

Последний интеграл равен нулю для любой формы β, обращающейся в нуль на ∂M. В частности,

$$\iint\limits_M \beta \wedge d\alpha = 0$$

для произвольной $(n-2)$-формы β с компактным носителем внутри M. Следовательно, $d\alpha = 0$.

3) Для замкнутой 1-формы α мы получаем из (8.2), что

$$0 = \iint\limits_M (d\beta) \wedge \alpha = \int\limits_{\partial M} \beta \wedge \alpha.$$

Следовательно, на замкнутом многообразии ∂M $(n-2)$-форма $\beta|_{\partial M}$ ортогональна каждой замкнутой 1-форме α. По двойственности Пуанкаре $(n-2)$-форма $\beta|_{\partial M}$ точна, т. е. существует $(n-3)$-форма γ на ∂M такая, что $\beta|_{\partial M} = d\gamma$. Произвольно продолжим $(n-3)$-форму γ с ∂M до $(n-3)$-формы $\tilde{\gamma}$, определенной на всем M (скажем, продолжим γ в некоторую ε-окрестность ∂M в виде поднятия $p^*\gamma$, где p — некоторая ретракция к границе ∂M, и затем умножим результат на срезающую функцию, равную 1 в ε-окрестности границы и 0 вне 2ε-окрестности). Ограничение $d\tilde{\gamma}$ на ∂M совпадает с $\beta|_{\partial M}$. Следовательно, $\tilde{\beta} = \beta - d\tilde{\gamma}$ есть требуемая $(n-2)$-форма на M, которая обращается в нуль на ∂M и чей дифференциал есть $d\beta = i_v\mu$. Таким образом, $v \in \mathfrak{g}_0$. □

Мы оставляем читателю аналогичное доказательство теоремы 7.17.

§ 9. Законы сохранения в многомерной гидродинамике

Уравнение Эйлера двумерной жидкости имеет бесконечное число законов сохранения (см. § 5). Например, для стандартной метрики на $\mathbb{R}^2$ оно имеет инварианты энстрофии

$$J_k(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot} v)^k \, d^2x = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Delta\psi)^k \, d^2x \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где ψ является функцией тока векторного поля v: $v_1 = -\partial\psi/\partial x_2$, $v_2 = \partial\psi/\partial x_1$.

Интегралом движения идеальной жидкости, заполняющей трехмерное односвязное многообразие, является спиральность (или инвариант Хопфа), измеряющая взаимное зацепление траекторий поля вихря $\operatorname{rot} v$. Мы подробно обсудим этот инвариант в гл. III. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ он имеет вид:

$$J(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (v, \operatorname{rot} v) \, d^3x.$$

На первый взгляд кажется, что при дальнейшем увеличении размерности первых интегралов вообще не должно быть (исключая, конечно, энергию: кинетическая энергия всегда инвариантна, являясь функцией Гамильтона уравнения Эйлера). Оказывается, однако, что интегралы типа энстрофии существуют для течений идеальной жидкости на любых четномерных многообразиях, и так же обстоит дело с интегралами типа спиральности для нечетномерных многообразий. Сначала мы сформулируем результат для области в евклидовом пространстве.

Теорема 9.1 (см. [Ser1, Dez] для нечетного n, [Tar] для четного n). *Уравнение Эйлера* (7.1) *идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области M в $\mathbb{R}^n$, имеет*

1) *первый интеграл*

$$\tilde{I}(v) = \int\limits_M \sum_{(i_1 \dots i_{2m+1})} \varepsilon^{i_1 \dots i_{2m+1}} v_{i_1} \omega_{i_2 i_3} \dots \omega_{i_{2m} i_{2m+1}} \, d^n x, \tag{9.1a}$$

если размерность n нечетная, т. е. $n = 2m+1$;

2) *бесконечное число независимых первых интегралов*

$$\tilde{I}_k(v) = \int\limits_M (\det \|\omega_{ij}\|)^k \, d^n x, \tag{9.1b}$$

если размерность n четная, т. е. $n = 2m$.

Здесь v — векторное поле скорости течения на M, функции $\omega_{ij} := \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ — компоненты (2-формы) вихря, $\det \|\omega_{ij}\|$ — детерминант кососимметрической матрицы $\|\omega_{ij}\|$, суммирование ведется по всем перестановкам набора $(1 \dots 2m+1)$, а $\varepsilon^{i_1 \dots i_{2m+1}}$ — символ Кронекера:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_{2m+1}} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } (i_1 \dots i_{2m+1}) \text{ набора} \\ & (1 \dots 2m+1) \text{ четная}, \\ -1, & \text{если перестановка } (i_1 \dots i_{2m+1}) \text{ набора} \\ & (1 \dots 2m+1) \text{ нечетная}. \end{cases}$$

В частности, для $n = 2$ мы получаем из (9.1b)

$$\tilde{I}_k(v) = \int\limits_M \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right)^k d^2 x = \int\limits_M ((\Delta \psi)^2)^k \, d^2 x = J_{2k}(v),$$

и для $n = 3$ инвариант $\tilde{I}(v)$ принимает вид спиральности $J(v)$:

$$\tilde{I}(v) = \int\limits_M \sum_{(i_1 i_2 i_3)} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} v_{i_1} \omega_{i_2 i_3} = J(v).$$

Заметим, что в (9.1b) параметр k необязательно целый.

Доказательство этой теоремы следует, практически без выкладок, из определения коприсоединенного действия группы диффеоморфизмов, когда она сформулирована в инвариантной, бескоординатной форме.

Определим 1-форму u как скалярное произведение со скоростью v в смысле римановой метрики на многообразии M:

$$u(\xi) = (v, \xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in T_x M.$$

Теорема 9.2 (см. [KhC, OKC]). *Уравнение Эйлера* (7.1) *идеальной несжимаемой жидкости на римановом многообразии* M^n (*возможно, с краем*) *с формой объема* μ *имеет*

1) *первый интеграл*

$$I(v) = \int\limits_M u \wedge (du)^m \tag{9.2a}$$

в случае произвольного нечетномерного многообразия M $(n = 2m + 1)$;

2) *бесконечное число функционально независимых первых интегралов*

$$I_f(v) = \int\limits_M f\Big(\frac{(du)^m}{\mu}\Big)\mu \tag{9.2b}$$

в случае произвольного четномерного многообразия M $(n = 2m)$, *где* 1-*форма* u *связана с векторным полем* v *посредством метрики на* M, *а* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *произвольная функция одной переменной.*

Дробь $(du)^m/\mu$ для $n = 2m$ есть отношение двух дифференциальных форм старшей степени n. Так как форма объема μ нигде не обращается в нуль, отношение является гладкой функцией на M (которая может зависеть от времени t). Интеграл от функции f, аргументом которой является это отношение, представляет собой обобщенный момент (т. е. взвешенный объем гиперповерхностей различных уровней) инвариантной функции $(du)^m/\mu$. Моменты $\tilde{I}_k$ соответствуют выбору $f(z) = z^{2k}$. Теорема 9.1 получена из теоремы 9.2 покоординатным переписыванием дифференциальной 2-формы du в виде матрицы $\|\omega_{ij}\|$.

Доказательство. Траектории уравнения Эйлера на $\mathfrak{g}^*$ лежат на коприсоединенных орбитах группы G. Это немедленно следует из гамильтоновой формулировки уравнения Эйлера: траектории принадлежат симплектическим листам скобки Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$, которые являются коприсоединенными орбитами G.

Теперь инвариантность функционалов I и I_f вдоль траекторий вытекает из следующего утверждения. □

Предложение 9.3. *Следующие функционалы на* $\mathfrak{g}^*$ *являются инвариантами коприсоединенного действия* (*функциями Казимира*):

1) *в случае* $n = 2m + 1$

$$I([u]) = \int\limits_M u \wedge (du)^m; \tag{9.3a}$$

2) *в случае* $n = 2m$

$$I_f([u]) = \int\limits_M f\Big(\frac{(du)^m}{\mu}\Big)\mu, \tag{9.3b}$$

где f — *произвольная функция одной переменной, а* $[u] \in \Omega^1/d\Omega^0 = \mathfrak{g}^*$ — *класс смежности дифференциальной* 1-*формы* u.

Доказательство предложения. Эти функционалы корректно определены на $\mathfrak{g}^*$, т. е. они не зависят от неопределенности в выборе представителя в классе смежности 1-формы u. Действительно, при замене u другим представителем $u + dh$ в том же классе $[u] \in \Omega^1/d\Omega^0$ форма du не изменится. Следовательно, инварианты I_f зависят только от класса смежности $[u]$ формы u. То же верно и для I, ибо $I(u + dh) - I(u) = \int dh \wedge (du)^m = 0$.

Коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов G состоит в замене переменных (см. теорему 7.5) в 1-формах u (или в соответствующих классах смежности). Интегралы I и I_f определяются независимо от координат, следовательно, они являются инвариантами коприсоединенного действия. Это завершает доказательство предложения 9.3, а с ним и двух предыдущих теорем. □

Замечание 9.4. A. На первый взгляд кажется, что можно построить больше инвариантов в нечетных размерностях, рассматривая плоско-параллельные течения на одну размерность выше и используя соответствующие четномерные инварианты. Однако редукция из четных в предшествующие нечетные размерности не дает каких-либо новых интегралов, отличных от (9.2a). Причина состоит в том, что инвариант (9.2b) для плоско-параллельного $2m$-мерного течения, полученного из $(2m-1)$-мерного, является тождественным нулем. Векторное поле v индуцирует 2-форму du ранга, меньшего чем $2m$, поскольку дополнительное направление лежит в ядре du. Поэтому $(du)^m = 0$, и соответствующие интегралы (9.2b) вырождаются.

B. При рассмотрении некомпактного многообразия M (скажем, для всего пространства $\mathbb{R}^n$), следует ограничить класс векторных полей и форм, наложив условия достаточно быстрого убывания на бесконечности, чтобы обеспечить сходимость вышеприведенных интегралов по M.

Многообразие M может быть неодносвязным. В этом случае когомологический класс 1-формы u (или класса смежности $[u]$), соответствующей векторному полю v, также является инвариантом (ср. [Arn7]). Другими примерами первых интегралов уравнения Эйлера являются числа точек или подмногообразий в M, где 2-форма du вырождается, и порядки ее вырождения там, а также инварианты периодических орбит поля скоростей в трехмерном случае (периоды, мультипликаторы Флоке и т. д.).

Обсуждение симметрий, т. е. бесконечно малых преобразований в пространстве струй, сохраняющих уравнения Эйлера для $n = 2$ и $n = 3$ можно найти в [Olv, Gur].

Еще одним следствием инвариантного подхода к многомерной гидродинамике является следующее многомерное обобщение понятия вихря.

Определение 9.5. *Вихрь* векторного поля v на n-мерном многообразии M есть 2-форма $\omega = du$, которая является дифференциалом 1-формы u, сопоставленной полю v при помощи выбранной римановой метрики. В зависимости от четности размерности M можно связать с 2-формой ω либо функцию вихря, либо векторное поле вихря.

На четномерном многообразии M^n $(n = 2m)$ отношение $\lambda = (du)^m/\mu$ называется *функцией вихря* поля v.

На нечетномерном многообразии M^n $(n = 2m+1)$ 2-форма $\omega = du$ всегда вырождена, и *векторное поле вихря* ξ является полем ядер формы вихря ω: $i_\xi \mu = \omega^m$.

Пример 9.6. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2m}$ со стандартной формой объема функция вихря векторного поля v есть

$$\lambda = \sqrt{\det \|\omega_{ij}\|},$$

и для $n = 2m = 2$ это стандартное определение функции вихря $\operatorname{rot} v = \partial v_1/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_1$.

В $\mathbb{R}^{2m+1}$ с евклидовой метрикой векторное поле ξ имеет компоненты

$$\xi_j = \sum_{(ji_1\ldots i_{2m})} \varepsilon^{ji_1\ldots i_{2m}} \omega_{i_1 i_2} \ldots \omega_{i_{2m-1} i_{2m}},$$

где $\varepsilon^{ji_1\ldots i_{2m}}$ — символ Кронекера, а суммирование ведется по всем перестановкам $(1\ldots 2m+1)$. В $\mathbb{R}^3$ это дает классическое определение поля вихря $\xi = \operatorname{rot} v$.

Предложение 9.7. *Векторное поле вихря ξ (соответственно функция вихря λ) переносится течением идеальной жидкости на нечетномерных (соответственно четномерных) многообразиях.*

Доказательство. Действительно, коприсоединенное действие является геометрическим, и оно меняет координаты в 2-форме du. Таким образом, du переносится течением, в то время как форма μ инвариантна относительно него. Следовательно, векторное поле и функция вихря, определяемые в терминах этих двух объектов, также переносятся несжимаемым течением. □

Последнее утверждение основано на уравнении эволюции Гельмгольца $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = -L_v \omega$ для 2-формы $\omega = du$. Оно означает, что материальная производная формы ω обращается в нуль, т. е. что эта 2-форма переносится течением.

Замечание 9.8. Вышеприведенные интегралы являются инвариантами коприсоединенного представления соответствующих групп Ли (так называемыми функциями Казимира). Другими словами, они являются инвариантами уравнений Гамильтона по отношению к структуре Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ для произвольно выбранной функции Гамильтона. Интегралы $I([u])$ и $I_f([u])$ не образуют полного набора непрерывных инвариантов коприсоединенных орбит. Можно построить непрерывные семейства орбит с равными величинами этих функционалов подобно тому, как это описано в § 5 для $n = 2$ и в гл. III для $n = 3$. Например, в нечетных размерностях течение сохраняет не только интеграл (9.3а) по всему многообразию M, но и интегралы

$$I_C(v) = \int_C u \wedge (du)^m$$

по каждому инвариантному множеству C векторного поля вихря для мгновенной скорости v. Это немедленно следует из формулы Стокса, примененной к такому инвариантному множеству, и из наблюдения, что ограничение $(du)^m$ на границу любого такого инвариантного множества обращается в нуль.

Точное описание коприсоединенных орбит для групп диффеоморфизмов остается по-прежнему нерешенной и интригующей проблемой. В частности, можно предположить, что замыкание коприсоединенной орбиты для $n = 3$ должно содержать открытую часть множества уровня интеграла $I(v)$ в некоторой топологии.

Физически это должно было бы означать, что в трехмерном случае сохранение вихря не влечет столь сильных ограничений на перемешивание частиц, как это имеет место в двумерном случае.

Основанием для этой гипотезы является следующий результат о локальных инвариантах коприсоединенных орбит (т. е. о локальном описании изозавихренных полей) в идеальной гидродинамике.

Теорема 9.9. 1) *Функция вихря λ является единственным локальным инвариантом коприсоединенных орбит группы диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема четномерного многообразия M^n $(n = 2m)$ в точке общего положения.*

2) *Для нечетномерного многообразия M^n $(n = 2m + 1)$ не существует локальных инвариантов коприсоединенных орбит группы $S\mathrm{Diff}(M^n)$, т. е. в окрестности типичной точки многообразия M^n смежные классы, принадлежащие различным коприсоединенным орбитам, могут быть отождествлены посредством диффеоморфизма, сохраняющего объемы.*

Например, в двумерном случае $n = 2$ множество изозавихренных полей полностью описывается их функцией вихря $\operatorname{rot} v = \partial v_1/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_1$. В трехмерном случае $n = 3$ векторное поле вихря может быть выпрямлено в окрестности любой ненулевой точки заменой координат, сохраняющей объем, и, следовательно, не имеет локальных инвариантов. Коприсоединенный инвариант из предложения 9.3 (2) для нечетномерного случая имеет глобальное происхождение: он измеряет зацепление траекторий вихря на всем многообразии (см. гл. III).

Доказательство. На инвариантном языке локальные инварианты присоединенного действия — это инварианты класса смежности $[u] \in \mathfrak{g}^*$ 1-форм в малой окрестности на многообразии, снабженном формой объема. Локальные инварианты класса смежности $[u] = \{u + df\}$ (представляющего собой 1-форму u с точностью до добавления дифференциала функции) те же, что и локальные инварианты 2-формы du, так как взятие дифференциала убивает неоднозначность, связанную с df.

Следовательно, задача сводится к описанию локальных инвариантов замкнутой 2-формы в присутствии формы объема μ, т. е. формы степени n. Если n четно, то форму du можно считать симплектической формой. Пара (du, μ) имеет инвариантную функцию, связанную с ними, — симплектический объем $\lambda = (du)^m/\mu$, где $n = 2m$. Этот объем есть не что иное, как функция вихря. Единственность же этого инварианта в точке общего положения немедленно следует из теоремы Дарбу: некоторой (не сохраняющей объем) заменой переменных 2-форма du преобразуется к виду $\sum_i dp_i \wedge dq_i$, в то время как форма объема μ превращается в $d^m p\, d^m q/\lambda(p, q)$ (см. [A-G]).

Если же n нечетно, то в точке общего положения пара (du, μ) инвариантов не имеет. Действительно, максимально невырожденная 2-форма du снова преобразуется к виду $du = \sum_{i=1}^{m} dp_i \wedge dq_i$ в $\mathbb{R}^{2m+1} = \{(p, q, z)\}$, согласно варианту теоремы Дарбу. Тогда, меняя только координату $z \to z' = h(p, q, z)$, можно привести форму объема к виду $\mu = d^m p \wedge d^m q \wedge dz$, сохраняя при этом du. Таким образом, (du, μ) имеет единственную каноническую форму. □

Из приведенной выше теоремы не следует, что не могут существовать интегральные инварианты других типов, например такие, которые являются *интегралами локальных плотностей* по области течения. (Интегральными инвариантами векторного поля v являются функционалы вида $\int_M f(v)\, d^n x$. Функция плотности f называется *локальной*, если она зависит только от конечного числа частных производных поля v в точке x.) Предложение 9.3 как раз показывает, что верно обратное: и спиральность, и энстрофия являются интегралами локальных плотностей. Гипотетически не существует других интегральных инвариантов ни для уравнения Эйлера, ни для коприсоединенных орбит групп диффеоморфизмов. Д. Серр показал (см. [Ser3]), что для трехмерного уравнения Эйлера все интегральные инварианты, плотности которых зависят только от скорости и ее первых частных производных, являются комбинациями спиральности и энергии. В недавней работе [Der2] описаны симметрии (стабилизаторы) «типичных» коприсоединенных орбит группы $S\mathrm{Diff}(M^n)$ для любого n. Можно надеяться, что изучение таких симметрий и доказательство плотности этих орбит в подходящей топологии в $\mathfrak{g}^*$ позволит показать, что описанные выше функции Казимира исчерпывают все инвариантные интегралы локальных плотностей.

З а м е ч а н и е 9.10. Функции Казимира (т. е. инварианты коприсоединенного представления) позволяют изучать вопросы нелинейной устойчивости методами типа Рута (см. гл. II). Информация об орбитах может также оказаться полезной при изучении задачи Коши в многомерной гидродинамике. Различное число инвариантов в нечетной и в четной размерностях явно указывает на то, что теорема существования в нечетно- и четномерной гидродинамике требует существенно различных подходов.

Вместо записи уравнения Эйлера как эволюции класса смежности $[u]$ можно выбрать специальную 1-форму $\overline{u}$, представляющую класс $[u]$, для которой действие течения является геометрическим. Это позволило бы записать инварианты в нечетной размерности таким же образом, что и для четного $n = 2m$. Так, скажем, отношение $\overline{u} \wedge (d\overline{u})^m/\mu$ переносилось бы течением для такой формы $\overline{u}$. Чтобы найти соответствующую эволюцию формы $\overline{u}$, нужно решить уравнение Эйлера для поля скоростей [Ose2, GmF]. Такие инварианты подобны лагранжевым координатам частиц жидкости.

Заметим, что существование бесконечной серии интегралов для течения идеальной четномерной жидкости не влечет полной интегрируемости соответствующих гидродинамических уравнений. Эти инварианты только выделяют коприсоединенные орбиты (вообще говоря, бесконечномерные), где динамика

остается по-прежнему сложной. Для исследования эволюции на самих орбитах мы располагаем только интегралом энергии, в то время как для полной интегрируемости нужно было бы найти еще бесконечное число дополнительных интегралов.

С другой стороны, гидродинамические уравнения на плоскости имеют конечномерные подсистемы произвольно большого размера, которые оказываются интегрируемыми гамильтоновыми системами [MuR]. Мы обсудим конечномерные аппроксимации классических гидродинамических уравнений в § 11. В гл. IV, § 3 мы покажем, как теория узлов может рассматриваться в качестве части классификации коприсоединенных орбит для группы $S\mathrm{Diff}(M^3)$. Узлы соответствуют орбитам сильно вырожденных дифференциальных 2-форм с носителями на кривых в трехмерном многообразии M. Инварианты узлов по отношению к изотопиям становятся инвариантами Казимира для таких вырожденных орбит.

§ 10. Групповая структура идеальной магнитной гидродинамики

Магнитные поля в идеально проводящей плазме или магме относятся к основным объектам исследований астрофизики и геофизики. В идеализированной постановке невязкая несжимаемая жидкость, подчиненная гидродинамическим законам, переносит магнитное поле. В свою очередь, сама среда подвергается обратному влиянию магнитного поля. Эволюция описывается соответствующей системой уравнений Максквелла.

10.1. Уравнения магнитной гидродинамики и уравнения Кирхгофа

Определение 10.1. Пусть электропроводящая жидкость заполняет область M евклидова трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Жидкость предполагается несжимаемой по отношению к стандартной форме объема $\mu = d^3x$ и переносящей магнитное бездивергентное поле $\boldsymbol{B}$. Эволюция поля $\boldsymbol{B}$ и поля скоростей жидкости $\boldsymbol{v}$ описывается системой *уравнений идеальной магнитной гидродинамики* (МГД):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} + (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \nabla p, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}\}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Здесь второе уравнение означает «вмороженность» магнитного поля $\boldsymbol{B}$ в среду, $\{\,.\,,\,.\,\}$ обозначает скобку Пуассона двух векторных полей. В первом уравнении градиент давления ∇p однозначно определяется условием $\operatorname{div} \partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$ аналогично уравнению Эйлера идеальной гидродинамики. Член $(\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$ представляет силу Лоренца. Сила Лоренца, действующая на единичный заряд, движущийся со скоростью $\boldsymbol{j}$ в магнитном поле $\boldsymbol{B}$, равна $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$. С другой стороны, поле электрического тока $\boldsymbol{j}$ равно $\operatorname{rot} \boldsymbol{B}/4\pi$ согласно уравнению

Максвелла [Max]. Коэффициенты в уравнении (10.1) нормализуются подходящим выбором единиц измерения.

Общая энергия E МГД-системы является суммой кинетической и магнитной энергий

$$E := \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\rangle. \tag{10.2}$$

Замечание 10.2. Уравнения Кирхгофа [Kir]

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u}, \end{cases} \tag{10.3}$$

описывающие движение твердого тела в идеальной жидкости, можно считать конечномерным аналогом уравнений магнитной гидродинамики (точно так же, как классическая динамика твердого тела с неподвижной точкой является аналогом динамики идеальной жидкости, см. [V-D]). Жидкость является идеальной, несжимаемой, неподвижной на бесконечности, а само движение жидкости предполагается потенциальным. Энергия тела в жидкости вычисляется по формуле

$$H = \frac{1}{2}\Big(\sum a_i m_i^2 + \sum b_{ij}(p_i m_j + m_i p_j) + \sum c_{ij} p_i p_j\Big). \tag{10.4}$$

Переменные $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{p}$ — это общий *угловой момент* и *вектор импульса* системы тело-жидкость в движущейся системе координат, жестко связанной с телом: $u^i = \partial H/\partial p_i$, $\omega^i = \partial H/\partial m_i$. Энергия является квадратичной формой переменных $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{p}$, предполагается положительной и определяет риманову метрику на группе $E(3)$ всех движений трехмерного евклидова пространства.

В случае магнитной гидродинамики полная энергия рассматривается в качестве римановой метрики на конфигурационном пространстве, которое топологически является *прямым произведением* группы диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(M)$ и сопряженного алгебре Ли пространства $\mathfrak{g}^*$. Эти пространство и метрика на нем определяются ниже.

10.2. Магнитное расширение группы Ли

Рассмотрим одномерную группу Ли G всех растяжений вещественной прямой $x \mapsto bx$. Композиция двух растяжений с множителями b_1 и b_2 определяет растяжение с множителем $b_1 b_2$. Мы будем называть группу всех аффинных преобразований прямой $x \mapsto a + bx$ *магнитным расширением* группы G. Композиция двух аффинных преобразований $x \mapsto a_1 + b_1 x$ и $x \mapsto a_2 + b_2 x$ переводит точку x в точку

$$a_2 + b_2(a_1 + b_1 x) = (a_2 + a_1 b_2) + (b_1 b_2)x.$$

Следовательно, групповое умножение пар, составляющих магнитное расширение, задается формулой

$$(a_2, b_2) \circ (a_1, b_1) = (a_2 + a_1 b_2, b_1 b_2)$$

(см. также гл. IV, п. 1.1). Общая конструкция магнитного расширения, приведенная ниже, может рассматриваться как групповая формализация этого примера.

Пусть G — произвольная группа Ли. Свяжем с ней новую группу, называемую *магнитным расширением* группы G, *следующим образом*. Элементы этой новой группы отождествим со всеми точками фазового пространства T^*G, отвечающего конфигурационному пространству G.

Группа G естественно действует на себе как левыми сдвигами, так и правыми. Левые и правые сдвиги коммутируют друг с другом. Следовательно, правоинвариантные векторные (или ковекторные) поля будут переводиться в правоинвариантные при левых сдвигах, в то время как левоинвариантные поля переводятся в левоинвариантные правыми сдвигами.

Каждый ковектор на G, т. е. каждый элемент α_g слоя кокасательного расслоения T^*G над произвольной точкой $g \in G$, продолжим до правоинвариантного сечения (ковекторного поля) α на группе. Определим действие этого ковектора α_g на фазовом пространстве T^*G следующим образом. Сначала добавим к каждому ковектору из T^*G, (ко)касательному к G в точке h, значение правоинвариантного сечения α в h. Затем применим левый сдвиг всего фазового пространства T^*G на g.

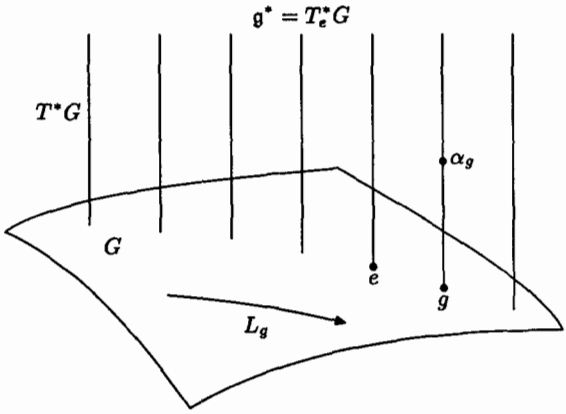


Рис. 8. Кокасательное расслоение T^*G, превращенное в группу Ли

Теорема 10.3. *Результат последовательного применения двух кокасательных векторов снова является действием кокасательного вектора. Эта композиция превращает пространство T^*G в группу Ли.*

Доказательство. Композиция двух левых сдвигов на группе является левым сдвигом. Оператор T_2 добавления второго правоинвариантного ковекторного поля после первого левого сдвига L_1 совпадает с добавлением $\widetilde{T}_2$ другого правоинвариантного ковекторного поля до первого левого сдвига L_1. А именно, новое ковекторное поле является образом второго ковекторного поля при действии сдвига L_1^{-1}, обратного первому левому сдвигу L_1:

$$L_2T_2L_1T_1 = L_2L_1\widetilde{T}_2T_1,$$

где $\widetilde{T}_2 = L_1^{-1} T_2 L_1$. Сумма этого нового поля с первым правоинвариантным полем снова является правоинвариантным ковекторным полем, которое нужно добавить к каждому ковектору из T^*G до левого сдвига, чтобы получить результат последовательного действия двух кокасательных векторов. □

Заметим, что правоинвариантное поле определяется своим значением в единице группы. Следовательно, фазовое пространство T^*G диффеоморфно прямому произведению $G \times \mathfrak{g}^*$ группы G и сопряженного пространства $\mathfrak{g}^*$ к ее алгебре Ли (кокасательное расслоение любой группы Ли является естественно тривиализуемым). Однако *группа* T^*G, построенная выше, *не является прямым произведением* группы G и коммутативной группы $\mathfrak{g}^*$.

Возьмем элемент группы $(\psi, b) \in T^*G$, т. е. композицию из добавления правоинвариантного поля, значение которого в единице группы есть ковектор $b \in \mathfrak{g}^*$, и последующего левого сдвига на $\psi \in G$, и другой подобный элемент $(\varphi, a) \in T^*G$.

Теорема 10.3′. *Композиция действия (ψ, b) и последующего действия (φ, a) является левым сдвигом на $\varphi \circ \psi$, следующим за прибавлением правоинвариантного поля, значение которого в единице является ковектором $b + \mathrm{Ad}^*_\psi a$.*

Доказательство. Левый перенос на ψ^{-1} правоинвариантного поля, порождаемого значением a в единице, является правоинвариантным полем, значение которого в единице равно

$$L^*_\psi R^*_{\psi^{-1}} a = (R_{\psi^{-1}} L_\psi)^* a = (\mathrm{Ad}_\psi)^* a. \qquad \square$$

Определение 10.4. *Магнитное расширение* $F = G \ltimes \mathfrak{g}^*$ группы G — это группа пар $\{(\varphi, a) \colon \varphi \in G,\ a \in \mathfrak{g}^*\}$ со следующим групповым умножением пар

$$(\varphi, a) \circ (\psi, b) = (\varphi \circ \psi, \mathrm{Ad}^*_\psi a + b). \tag{10.5}$$

Это определение приводит к следующему определению алгебры Ли, соответствующей магнитному расширению F.

Определение 10.5. Алгебра Ли $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$, соответствующая (магнитнорасширенной) группе $F = G \ltimes \mathfrak{g}^*$ — это векторное пространство пар $(v \in \mathfrak{g},\ a \in \mathfrak{g}^*)$, снабженное следующей скобкой Ли:

$$[(v, a), (w, b)] = ([v, w], \mathrm{ad}^*_w a - \mathrm{ad}^*_v b), \tag{10.6}$$

где $[v, w]$ — коммутатор элементов v и w в самой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а ad^*_w — коприсоединенное действие алгебры $\mathfrak{g}$ на сопряженном ей пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Магнитное расширение является частным случаем *полупрямого произведения* группы Ли G или алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на векторное пространство V, где эта группа или алгебра действует. В общей ситуации операторы Ad и ad коприсоединенного действия в (10.5)–(10.6) заменяются действием элементов соответствующей группы или алгебры на векторном пространстве V (см. гл. IV, § 2, а также [MRW]).

Пример 10.6. Группа симметрий $E(3)$ твердого тела в жидкости — это группа всех движений трехмерного евклидова пространства. Она является магнитным расширением $E(3) = \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ группы $\mathrm{SO}(3)$ всех вращений трехмерного пространства с помощью сопряженного пространства к $\mathfrak{so}(3) = \mathbb{R}^3$. Как мы увидим в следующем параграфе, уравнения Кирхгофа (10.3) описывают геодезические на этой группе $E(3)$ по отношению к *левоинвариантной* метрике, определяемой энергией E из (10.2).

Пример 10.7. Конфигурационное пространство магнитной гидродинамики является магнитным расширением $F = S\mathrm{Diff}(M) \ltimes (\Omega^1/d\Omega^0)$ группы $G = S\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих элемент объема, с помощью соответствующего сопряженного пространства $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$. Коприсоединенное действие $\mathrm{Ad}^*_\psi a = \psi^* a$ из формулы (10.5) является действием замены координат, заданной диффеоморфизмом ψ на классе смежности 1-форм a. Соответствующий оператор ad^* коприсоединенного действия алгебры Ли из формулы (10.6) действует как производная Ли на классах смежности: $\mathrm{ad}^*_w a = L_w a$.

МГД уравнения (10.1) являются уравнениями геодезических на группе F по отношению к *правоинвариантной* метрике, определяемой магнитной энергией E (10.4) (см. ниже теорему 10.9).

Замечание 10.8. Эти определения сохраняют смысл для многообразия M произвольной размерности, снабженного формой объема. Соответственно, можно определить уравнения магнитной гидродинамики на таком многообразии, фиксировав на нем риманову метрику, элементом объема которой является заданная форма. Единственной операцией, которую мы еще не определили в такой общности, является векторное произведение. Его можно задать при помощи изоморфизма $*$ между k- и $(n-k)$-векторными полями, индуцированного метрикой на многообразии M любой размерности n, [DFN]. Мы отсылаем читателя к [M-W, KhC] по поводу обобщений МГД уравнений на многообразия произвольных размерностей.

Заметим также, что для двумерного случая имеются два варианта уравнений (10.1): магнитное поле $\boldsymbol{B}$ может рассматриваться как бездивергентное векторное поле или, напротив, как замкнутая 2-форма на M. Такая форма, в сущности, то же, что и функция на двумерном многообразии M. В соответствии с этим имеются две различных системы уравнений (см., например, гамильтоновы формализмы МГД, описанные в [MoG, H-K, ZeK, Ze2]).

10.3. Гамильтонова формулировка уравнений Кирхгофа и магнитной гидродинамики

Теорема 10.9 (см. [V-D, MRW]). 1) *Уравнения магнитной гидродинамики* (10.1) *являются уравнениями Гамильтона на пространстве* $\mathfrak{f}^*$, *сопряженном к алгебре Ли* $\mathfrak{f} = S\mathrm{Vect}(M) \ltimes (\Omega^1/d\Omega^0)$, *относительно стандартной скобки Ли–Пуассона*;

2) *уравнения Кирхгофа* (10.3) *являются уравнениями Гамильтона на пространстве* $\mathfrak{e}(3)^*$, *сопряженном к алгебре Ли* $\mathfrak{e} = \mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, *относительно стандартной скобки Ли–Пуассона.*

Функции Гамильтона являются квадратичными формами на этих сопряженных пространствах, определяемыми общей энергией $-E$ *или* H (*формулы* (10.2) *и* (10.4) *соответственно*).

Доказательство. Рассмотрим МГД систему на трехмерном многообразии. Сопряженное пространство $\mathfrak{f}$ к алгебре Ли магнитного расширения F есть пространство пар $\mathfrak{f}^* = \{([u], \boldsymbol{B})\colon [u] \in \mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0,\ \boldsymbol{B} \in \mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)\}$. Явная формула для коприсоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{f}$ на ее сопряженном пространстве $\mathfrak{f}^*$ имеет вид

$$\mathrm{ad}^*_{(v,[\alpha])}([u], \boldsymbol{B}) = (L_v[u] - L_{\boldsymbol{B}}[\alpha], -L_v\boldsymbol{B}). \tag{10.7}$$

Здесь $-L_v\boldsymbol{B} = \{v, \boldsymbol{B}\}$ является скобкой Пуассона двух векторных полей.

Риманова метрика на M определяет изоморфизм $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ между пространством $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей и сопряженным пространством $\mathfrak{g}^* = \Omega^1/d\Omega^0$ (см. § 7). Этот изоморфизм индуцирует скалярное произведение на магнитном расширении алгебры $\mathfrak{f}$, а также на его сопряженном пространстве $\mathfrak{f}^*$. Соответствующая квадратичная форма энергии E на $\mathfrak{f}^*$ есть

$$E([u], \boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\langle [u], A^{-1}([u])\rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{B}, A(\boldsymbol{B})\rangle.$$

Таким образом, уравнение Эйлера на $\mathfrak{f}^*$ с функцией Гамильтона $-E$, т. е. уравнение геодезических для соответствующей правоинвариантной метрики на группе F, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial [u]}{\partial t} = -L_v[u] + L_{\boldsymbol{B}}[b], \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\{v, \boldsymbol{B}\}, \end{cases} \tag{10.8}$$

где векторное поле v и класс смежности $[b]$ связаны, соответственно, с классом смежности $[u]$ и магнитным векторным полем $\boldsymbol{B}$ посредством оператора инерции $v = A^{-1}([u])$, $[b] = A(\boldsymbol{B})$. □

Уравнения (10.1) эквивалентны их инвариантной форме (10.8), как показывает нижеследующее утверждение.

Лемма 10.10. *Оператор* A^{-1}, *отождествляющий с помощью метрики классы смежности* 1-*форм и бездивергентные векторные поля на многообразии* M, *переводит класс смежности* $L_{\boldsymbol{B}}[b]$ (*т. е.* $L_{\boldsymbol{B}}A(\boldsymbol{B})$) *в векторное поле* $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$ *при условии, что форма объема* μ *определяется римановым элементом объема на* M.

Доказательство состоит в непосредственной проверке в локальной системе координат. □

Следствие 10.11. *Скалярное произведение*

$$J(v, \boldsymbol{B}) = \int_M (v, \boldsymbol{B})\mu$$

скорости жидкости и эволюционирующего магнитного поля является первым интегралом движения, определяемого уравнением МГД (10.1).

Доказательство этого утверждения состоит в дифференцировании величины J вдоль векторного поля, заданного уравнениями (10.1) и проверке, что производная равна нулю. С другой стороны, следствие вытекает из следующего более общего наблюдения.

Следствие 10.11′ [V-D]. *Пусть G является группой Ли, а $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли. Тогда квадратичная форма*

$$J(u,\alpha) = \langle u, \alpha \rangle$$

на сопряженном пространстве $\mathfrak{f}^* = \{(u,\zeta)\colon u \in \mathfrak{g}^*,\ \zeta \in \mathfrak{g}\}$ магнитной алгебры Ли $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ является инвариантом коприсоединенного представления группы Ли $F = G \ltimes \mathfrak{g}^*$. Здесь $\langle u, \alpha \rangle$ означает спаривание элементов сопряженных пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Доказательство. Инвариантность квадратичной формы J проверяется прямым вычислением, использующим операторы коприсоединенного действия группы F.

Применяя ее к МГД группе $F = S\mathrm{Diff}(M) \ltimes \Omega^1/d\Omega^0$, получаем инвариантность $J(v, \boldsymbol{B})$ на коприсоединенных орбитах F. Сохранение $J(v, \boldsymbol{B})$ на траекториях системы (10.1) следует из гамильтоновости уравнений: траектории лежат на коприсоединенных орбитах группы F. □

Замечание 10.12. Квадратичная форма $J(v, \boldsymbol{B}) = \int\limits_M u(\boldsymbol{B})\mu$, называемая *перекрестной спиральностью*, имеет простой топологический смысл числа асимптотического зацепления траекторий магнитного поля $\boldsymbol{B}$ с траекториями поля ротора $\operatorname{rot} v$ (см. гл. III). Эта величина подобна общей спиральности идеальной жидкости, которая измеряет взаимное асимптотическое зацепление траекторий поля ротора жидкости или магнитной спиральности, измеряющей зацепление магнитных линий.

Поле ротора вморожено в идеальную жидкость, и топологические инварианты поля сохраняются во времени. Однако в отличие от случая спиральности, сохранение взаимного зацепления магнитного и вихревого полей в чем-то неожиданно, так как $\operatorname{rot} v$ в магнитной гидродинамике не вморожен (в отличие от магнитного поля $\boldsymbol{B}$). Эволюция меняет поле v (а следовательно, также $\operatorname{rot} v$), добавляя слагаемое, зависящее от $\boldsymbol{B}$, но оказывается, что взаимное зацепление вихревого поля $\operatorname{rot} v$ и магнитного поля $\boldsymbol{B}$ сохраняется (детали см. в [VMI]). Было бы особенно интересно описать функции Казимира для магнитной гидродинамики. В частности не ясно, существует ли МГД аналог полной классификации локальных инвариантов коприсоединенного действия для идеальной гидродинамики (теорема 9.9) и какие интегральные инварианты определяются локальными плотностями.

§ 11. Конечномерная аппроксимация уравнения Эйлера

Усилия получить достаточно полную конечномерную картину гидродинамических процессов имеют длинную историю: любая попытка численного моделирования уравнения Эйлера ведет к некоторому усечению непрерывной структуры уравнения в пользу дискретного аналога.

Следуя основной идее этой книги, мы сосредоточимся на методах, сохраняющих гамильтонову структуру уравнения Эйлера, и оставим вне нашего поля зрения численные (равным образом полезные) методы, связанные с разностными схемами или с разложениями решений в ряды. Мы обсудим приближения Галеркина для решений уравнения Навье–Стокса в следующем параграфе.

11.1. Аппроксимации вихревыми системами на плоскости

Для целей численного анализа используют уравнение Эйлера, записанное в форме Гельмгольца

$$\dot{\boldsymbol{w}} = -\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}, \tag{11.1}$$

которая описывает эволюцию вихревого поля $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, вмороженного в жидкость, движущуюся со скоростью $\boldsymbol{v}$. Здесь $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ означает скобку Пуассона двух бездивергентных векторных полей $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$.

Для двумерного несжимаемого течения в области $D \subset \mathbb{R}^2$ правая часть уравнения равна скобке Пуассона *функции тока* ψ и *функции ротора* $\omega = \Delta\psi$ векторного поля $\boldsymbol{v} = \operatorname{sgrad} \psi$

$$\dot{\omega} = -\{\psi, \omega\}, \tag{11.2}$$

где $v_x = -\partial\psi/\partial y$, $v_y = \partial\psi/\partial x$ и $\{\psi, \omega\} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$. Действительно, $-\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} = L_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$ для любого векторного поля $\boldsymbol{w}$. Для плоского векторного поля $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$ ротор является функцией (третьей компонентой вектора $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$), а $L_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = (0, 0, -L_{\boldsymbol{v}}\omega)$ (векторные поля переносятся вперед, а функции переносятся назад). Наконец, уравнение (11.1) приводится к уравнению (11.2), если вспомнить определение функции Гамильтона (или тока) ψ для поля $\boldsymbol{v}$: $-L_{\boldsymbol{v}}\omega = -\{\psi, \omega\}$.

Первая схема аппроксимации для этого уравнения, которую мы обсудим, восходит к Гельмгольцу. Она заменяет гладкую функцию ротора ω в $D \subset \mathbb{R}^2$ набором из дискретных *вихрей*, т. е. распределением с носителем в конечном числе точек в D. Заметим, что эта схема применима также и к полю вихря в $\mathbb{R}^3$, где гладкое поле аппроксимируется сингулярным с носителем на конечном числе кривых.

Как мы увидим, движение таких изолированных вихрей подчинено некоторой гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Функцией Гамильтона является логарифмический потенциал, т. е. некоторая линейная комбинация логарифмов расстояний между вихрями (с коэффициентами, являющимися произведениями интенсивностей вихрей).

Рассмотрим N вихрей с *циркуляциями* (соответствующего поля скорости вокруг центра вихря) k_i, $i = 1, \ldots, N$, на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда в любой момент времени ротор будет сосредоточен в N точках, а циркуляция в каждой из них всегда останется постоянной. Обозначим (декартовы) координаты вихрей на плоскости через $z_i := (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Эволюцию N вихрей запишем как динамическую систему в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ с координатами $(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N)$ и симплектической структурой $\sum k_i dy_i \wedge dx_i$.

Предложение 11.1. *Эволюция системы вихрей задается следующей системой канонических уравнений Гамильтона*

$$\begin{cases} k_i\dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ k_i\dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases} \tag{11.3}$$

где $1 \leqslant i \leqslant N$, *и функция Гамильтона* H *имеет вид*

$$H = -\frac{1}{\pi}\sum_{i<j} k_i k_j \ln|z_i - z_j|, \quad |z - z_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Доказательство. На плоскости функция ротора ω, описывающая некоторую дискретную вихревую систему, имеет вид линейной комбинации δ-функций:

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^{N} k_i \delta(z - z_i).$$

Чтобы получить уравнение эволюции вихрей, мы сначала найдем соответствующую функцию тока ψ такую, что $\Delta\psi = \omega$. Указанный вид функции ω означает, что функция тока является линейной комбинацией фундаментальных решений двумерного уравнения Лапласа

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} k_i \ln|z - z_i|$$

(плюс любая гармоническая функция, которую нужно взять нулевой ввиду нулевых граничных условий на бесконечности $\mathbb{R}^2$).

Подставив эти явные выражения для $\omega(z)$ и $\psi(z)$ в уравнение Эйлера (11.2), получим, что каждый вихрь будет эволюционировать согласно следующему закону:

$$k_j\dot{z}_j = \operatorname{sgrad}|_{z=z_j}\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1, i\neq j}^{N} k_i \operatorname{sgrad}|_{z=z_j}(\ln|z - z_i|).$$

Функция $\psi(z)$ имеет особенность в z_j , но она не влияет на движение j-го точечного вихря: записывая уравнения движения, мы можем вычесть вклад влияния этого вихря на себя.

В (x_i, y_i)-координатах получаем искомую гамильтонову систему (11.3). □

Согласно Гельмгольцу [Helm] в случае $N = 2$ два вихря будут равномерно вращаться в плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг их общего «центра масс» (или скорее, «центра завихренности») $z = (k_1 z_1 + k_2 z_2)/(k_1 + k_2)$. В частности, если циркуляции k_1 и k_2 имеют один и тот же знак, тогда «центр масс» оказывается между вихрями, а если они имеют противоположные знаки, тогда «центр масс» лежит на продолжении линии, соединяющей вихри. Если $k_1 = -k_2$, тогда вихри смещаются с одинаковыми скоростями в направлении, перпендикулярном соединяющей их линии.

Задача трех вихрей ($N = 3$) также оказывается интегрируемой (в отличие от классической задачи трех тел см., например, [Poi1, Poi3]). Это было отмечено еще Кирхгофом и освещено в диссертации Гребли, где можно найти уравнения движения сторон вихревого треугольника и точные формулы для нескольких специальных случаев. Детальное изложение истории проблемы трех вихрей можно найти в [ART]. Движение трех вихрей на сфере рассматривалось в [KiN]. По поводу статистико-механического подхода см. также [Brd, BFS], а [NewP] — по приложениям фазы Берри (гл. IV, § 1) к этой задаче.

11.2. Неинтегрируемость систем не менее четырех точечных вихрей

Для произвольных значений N гамильтоновы уравнения движения (8.2) имеют следующие четыре первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{N} k_i x_i, \quad I_3 = \sum_{i=1}^{N} k_i y_i, \quad I_4 = \sum_{i=1}^{N} k_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Однако эти интегралы не находятся в инволюции, т. е. их скобки Пуассона ненулевые, и система с четырьмя вихрями является, вообще говоря, неинтегрируемой [Zig1]. Более точно, верно следующее утверждение.

Пусть M^5 — (пятимерное) многообразие всех неособых конфигураций из четырех вихрей (т. е. $z_i \neq z_j$, если $i \neq j$). Это многообразие является фактором многообразия всех упорядоченных четверок точек на $\mathbb{R}^2$ по трехмерной группе $E(2)$ всех движений плоскости. Это факторпространство M^5 является гладким многообразием, так как группа $E(2)$ действует на множестве упорядоченных четверок без неподвижных точек.

Теорема 11.2 (см. [Zig1]). *Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ динамическая система из четырех вихрей с циркуляциями $|k_i - 1| < \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, $|k_4| < \varepsilon$, не имеет аналитического первого интеграла в M^5 функционально независимого с функциями*

$$H = -\frac{1}{\pi} \sum_{i<j} k_i k_j \ln |z_i - z_j| \quad \text{и} \quad F = \sum_{i<j} k_i k_j |z_i - z_j|^2.$$

Замечание 11.3. Хаотическое поведение систем с четырьмя вихрями было замечено еще Пуанкаре в [Poi1]. Численные подтверждения обсуждались Е. Новиковым в [NovE].

Несмотря на то, что система с четырьмя вихрями является, вообще говоря, неинтегрируемой, согласно КАМ-теории оказывается, что для любого числа вихрей существует множество положительной меры в пространстве начальных условий, для которого движение является *квазипериодическим* [Kha]. Такие конфигурации вихрей устроены следующим образом: все вихри разбиты на несколько групп так, что расстояния между группами много больше, чем между вихрями в группе. В этом случае группы вихрей взаимодействуют приблизительно как точечные вихри, обладающие суммарной циркуляцией. Реальное движение вихрей является суперпозицией движения группы и независимого движения вихрей внутри группы.

11.3. Гамильтоновы аппроксимации вихрей в трехмерном пространстве

Подобно тому, как на плоскости функция ротора может быть аппроксимирована набором точечных вихрей, для векторного поля ротора B в $\mathbb{R}^3$ можно взять приближение с носителем на (нескольких) кривых.

В этом случае соответствующая замкнутая 2-форма $\omega = i_B\mu$, являющаяся результатом подстановки поля B в форму объема μ в $\mathbb{R}^3$, предполагается дифференциальной формой δ-типа, или «потоком» в смысле де Рама [DeR]. Интеграл по любой двумерной поверхности такой δ-образной 2-формы с носителем на кривой в $\mathbb{R}^3$ равен алгебраическому числу пересечений этой поверхности с кривой-носителем.

Уравнение Эйлера (11.1) определяет закон эволюции для таких вихревых кривых. В отличие от двумерного случая, динамика таких кривых описывается все-таки бесконечномерной системой, хотя и «много меньшей размерности», чем первоначальная эволюция гладкого поля ротора. Положение каждой вихревой кривой определяется тремя функциями одной переменной, в то время как каждая компонента общего поля ротора в $\mathbb{R}^3$ является функцией трех переменных.

Динамика одной гладкой вихревой кривой в $\mathbb{R}^3$ — очень интересная математическая задача. Первое приближение вихревого движения, когда рассматривается только «локальное» взаимодействие, оказывается вполне интегрируемой системой. Она известна в различных контекстах под различными названиями: уравнение нити, уравнение ферромагнетика, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Ландау–Лифшица для группы SO(3) и т. д. (см. обсуждение связей между ними в гл. VI, § 3–4).

Включение второго, уже нелокального, члена в аппроксимацию делает динамику неинтегрируемой (см. [KlM]).

Более простую конечномерную модель трехмерного уравнения Эйлера, являющуюся дискретной аппроксимацией функций скорости и ротора в конечном числе точек, можно найти в работе [Ose2, But]. Переменные Клебша доставляют еще один способ использования канонической гамильтоновой структуры в численном анализе. Они определяются на пространстве, вдвое большем чем пространство всех бездивергентных векторных полей (см. [M-W, Zak] и гл. IV, § 2).

11.4. Конечномерные аппроксимации групп диффеоморфизмов

До сих пор мы имели дело с конечномерными моделями для гидродинамических систем. Однако в некоторых двумерных случаях вся групповая структура, отвечающая за динамику жидкости, может быть также в некотором смысле аппроксимирована.

Рассмотрим несжимаемую жидкость на двумерном торе T^2, конфигурационным пространством которой является группа $S\mathrm{Diff}(T^2)$ сохраняющих площадь (или симплектических) диффеоморфизмов T^2.

Мы покажем ниже (следуя [FZ, FFZ]), что эта группа может быть «аппроксимирована» группами $\mathrm{SU}(n)$ при $n \to \infty$. Более точно, алгебра Ли $S\mathrm{Vect}(T^2)$

допускает непрерывную деформацию, известную как семейство так называемых *синус-алгебр*. Последние являются бесконечномерными алгебрами, и для целых значений параметра соответствующие конечномерные усечения оказываются в точности алгебрами $\mathfrak{su}(n)$.

Предел соответствующих сопряженных пространств «уважает» скобки Пуассона и структуру функций Казимира и успешно используется для аппроксимации гамильтоновой структуры уравнения Эйлера (см. [Zel]).

Рассмотрим алгебру Ли $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ всех бездивергентных векторных полей на двумерном торе $T^2 = \{(x_1, x_2) \bmod 2\pi\}$, которые имеют *однозначные* функции тока. Потоки, порожденные этими полями, «не сдвигают» центр масс всей жидкости. Можно считать, что такие функции тока имеют нулевое среднее. Комплексифицируем нашу алгебру Ли, коммутатор $[\,.\,,\,.\,]$ и другие операции и выберем базис L_k в виде экспонент Фурье $e^{i(k,x)}$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$. Значение L_k в точке (x_1, x_2) равно $\exp(i(x_1k_1 + x_2k_2))$.

Коммутаторами элементов базиса L_k в алгебре Ли $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ являются функции тока

$$[L_k, L_l] = (k \times l)L_{k+l}, \tag{11.4}$$

где $k \times l = k_1l_2 - k_2l_1$ — (ориентированная) площадь параллелограмма, натянутого на векторы k и l (см. [Arn3] и гл. IV, § 3).

С другой стороны, коммутационные соотношения в алгебрах $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ стремятся к соотношениям (11.4) при $n \to \infty$ в следующем смысле (см. [FFZ]). Фиксируем нечетное n и рассмотрим следующие две матрицы в $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$:

$$F = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}) \quad \text{и} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ε является примитивным корнем n-й степени из единицы, например, $\varepsilon = \exp(-4\pi i/n)$. Эти матрицы удовлетворяют тождествам $HF = \varepsilon FH$ и $F^n = H^n = 1$.

Рассмотрим $(n^2 - 1)$ матрицу J_k, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \pmod n$, $(k_1, k_2) \neq (0, 0) \pmod n$, заданные формулой

$$J_{(k_1,k_2)} = \varepsilon^{k_1k_2/2} F^{k_1} H^{k_2}.$$

Предложение 11.4. *Матрицы J_k имеют нулевой след и порождают алгебру $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ со следующими коммутационными соотношениями:*

$$[J_k, J_l] = 2i \sin\left(\frac{2\pi(k \times l)}{n}\right) J_{k+l}. \tag{11.5}$$

Доказательство состоит в непосредственной проверке. Заметим, что множество J_k замкнуто относительно взятия произведения и обратной матрицы:

$$J_k J_l = \varepsilon^{-(k\times l)/2} J_{k+l} \quad \text{и} \quad J_k^{-1} = J_{-k},$$

причем все они имеют детерминант, равный 1. □

Когда $n \to \infty$, эта алгебра превращается в алгебру $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ бездивергентных векторных полей на торе с генераторами L_k и соотношениями (11.4) посредством отождествления $\frac{n}{4\pi i} J_k \mapsto L_k$.

Уравнение Эйлера (11.2) на торе можно аппроксимировать, используя этот предел алгебр. Запишем сначала уравнения (11.2) через компоненты Фурье ротора $\omega = \sum_m \omega_m e^{i(m,x)}$:

$$\dot{\omega}_m = \sum_k \frac{(m\times k)}{k^2} \omega_k \omega_{m-k}. \tag{11.6}$$

Напомним, что уравнение Эйлера, отвечающее алгебре Ли со структурными константами C_{ij}^k и тензору инерции a_{ik} в координатах $\{\omega_i\}$ на сопряженном пространстве к алгебре Ли, имеет вид

$$\dot{\omega}_m = \sum_{k,l,p} a^{kp} C_{mp}^l \omega_k \omega_l, \tag{11.7}$$

где a^{kp} — компоненты тензора, обратного к тензору инерции (см. § 4). Уравнение Эйлера (11.6) для идеальной жидкости на торе получается из него подстановкой

$$C_{mp}^l = (p\times m)\delta_{m+p-l,0} \quad \text{и} \quad a^{kp} = \frac{1}{k^2}\delta_{k+p,0}, \tag{11.8}$$

где все индексы принадлежат $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \setminus (0,0)$.

Конечномерные $\mathfrak{sl}(n)$-аппроксимации бездивергентных векторных полей на T^2 задают динамическую систему со структурными константами

$$C_{mp}^l = \frac{n}{2\pi} \sin\Big(\frac{2\pi(p\times m)}{n}\Big)\delta_{m+p-l,0}$$

и такой же метрикой a^{kp}, как в формулах (11.8), причем все индексы теперь рассматриваются по модулю n. Добавляя условие вещественности $\omega_{-m} = \overline{\omega}_m$, получаем аппроксимацию гидродинамического уравнения Эйлера (11.6) на торе с помощью динамических систем (11.7) на алгебрах $\mathfrak{su}(n)$ (см. [Zel]).

Замечание 11.5 (см. [Zel]). Указанный предел алгебр Ли

$$\mathfrak{sl}(n) \to S_0\mathrm{Vect}(T^2)$$

при $n \to \infty$ сохраняет структуру функций Казимира на соответствующих пространствах. Для заданного n у алгебры $\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\colon \operatorname{tr} A = 0\}$ (или у ее вещественной формы $\mathfrak{su}(n)$) существует $(n-1)$ функция Казимира, т. е. функция, инвариантная на орбитах (ко)присоединенного действия:

$$\operatorname{tr} A^2,\ \operatorname{tr} A^3,\ \ldots,\ \operatorname{tr} A^n.$$

Эти инварианты функционально независимы. При переходе к пределу $n \to \infty$ они превращаются в моменты соответствующих функций ротора

$$\int_{T^2} \omega^2 \mu, \int_{T^2} \omega^3 \mu, \ldots, \int_{T^2} \omega^n \mu, \ldots$$

(где $\mu = d^2x$ является стандартной формой объема на торе), порождая бесконечное число функций Казимира для группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов, а значит, и для двумерного уравнения Эйлера. Напротив, в трехмерной идеальной гидродинамике имеется, по существу, единственный аналитический инвариант Казимира — это спиральность, поэтому попытки построить содержательную аппроксимацию трехмерной группы движения жидкости кажутся довольно безнадежными.

Бесконечномерный аналог интегрируемых уравнений Эйлера n-мерного твердого тела (см. [Man] или гл. VI, п. 1.2) был описан в работе [War] как предел уравнений на алгебрах $\mathfrak{so}(n)$ при $n \to \infty$. Для уравнения Эйлера гидродинамики на двумерной сфере интересная модель, включающая богатую теорию представлений группы додекаэдра, построена в работе [VshS].

Замечание 11.6. Алгебра (11.5) является нерасширенной частью (также называемой «циклотомическим семейством») бесконечномерной *синус*-алгебры [Hop, FFZ, FZ] с *бесконечным* числом образующих J_k, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, и коммутационными соотношениями

$$[J_k, J_l] = 2i \cdot \sin\Big(\frac{2\pi(k \times l)}{\lambda}\Big) J_{k+l} + (ak)\delta_{k+l,0}.$$

Здесь константа λ не обязательно целая, а может быть произвольным комплексным числом, $a = (a_1, a_2)$ — фиксированный вектор на вещественной плоскости, $\delta_{k+l,0}$ равно 1, если $k = -l$, и 0 в противном случае, а $(ak) := a_1k_1 + a_2k_2$. Член $(ak)\delta_{k+l,0}$ определяет некоторое нетривиальное расширение *синус*-алгебры. Определение и обсуждение этого расширения можно найти в [FFZ, Rog, KLR]. Отметим только, что в пределе $\lambda \to \infty$ после подходящей перенормировки это расширение отвечает введению многозначных (непериодических) функций тока x_1 или x_2 на торе $T^2 = \{(x_1, x_2) \bmod 2\pi\}$. Соответствующие этим функциям течения, однако, являются однозначными периодическими векторными полями на T^2.

Интерес к *синус*-алгебрам связан не только с их гидродинамическими приложениями. Рассматриваемые как деформации пуассоновой алгебры функций на двумерном торе, они связаны с произведением Мояла функций на симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ [Moy], с алгебрами дифференциальных и псевдодифференциальных операторов одной и нескольких переменных, с алгеброй q-аналогов псевдодифференциальных операторов [KLR], а также с алгебрами с континуальными системами корней [SaV].

§ 12. Уравнение Навье–Стокса с групповой точки зрения

Уравнение Эйлера идеальной гидродинамики

$$\dot{v} = -(v, \nabla)v - \nabla p \quad (\text{или} \quad \dot{\omega} = -\{v, \omega\},\ \omega = \operatorname{rot} v)$$

соотносится с уравнением Навье–Стокса вязкой жидкости

$$\dot{v} = -(v, \nabla)v - \nabla p + f + \nu\Delta v \quad (\text{или} \quad \dot{\omega} = -\{v, \omega\} + \operatorname{rot} f + \nu\Delta\omega)$$

подобно тому, как классическое уравнение Эйлера твердого тела

$$\dot{m} = \omega \times m$$

соотносится с более общим уравнением, учитывающим трение и крутящий момент,

$$\dot{m} = \omega \times m + F - \nu m. \tag{12.1}$$

Здесь «оператор трения» ν является симметрическим и положительно определенным. Распределенная массовая сила f, входящая в уравнение Навье–Стокса, аналогична крутящему моменту F и является причиной движения. Вязкое трение $\nu\Delta v$ аналогично слагаемому $-\nu m$ в (12.1), замедляющему движение твердого тела.

Аналогия становится особенно заметной, если (следуя В. И. Юдовичу, 1962 г.) записать уравнения в компонентах собственного базиса оператора трения. Например, для уравнения Навье–Стокса с периодическими граничными условиями удобно разложить поле ротора и силу f в обычные ряды Фурье.

В обоих случаях уравнения приобретают следующую форму:

$$\dot{x}_i = \sum a_{ijk} x_j x_k + \sum f_i - \nu_i x_i. \tag{12.2}$$

На практике обычно рассматривают *галеркинское приближение*, сохраняя только конечное число членов разложения.

Первый член соответствует уравнению Эйлера и описывает движение по инерции. Из свойств уравнения Эйлера следует, что дивергенция этого члена равна нулю. Кроме того, в любой размерности уравнение Эйлера идеальной жидкости, так же как и уравнение твердого тела, имеет положительно определенный квадратичный первый интеграл — кинетическую энергию. Следовательно, для $f = \nu = 0$ векторное поле в правой части уравнения (12.2) касается некоторых эллипсоидов с центрами в начале координат. То есть при эволюции, определяемой этим уравнением, по крайней мере в конечномерной ситуации, не происходит ни роста, ни затухания решений (в энергетической метрике).

Соответствующее трению слагаемое вдали от начала координат больше, чем постоянная «накачка» f. Следовательно, там движение направлено к началу координат, и бесконечный рост решений невозможен (в предположении, что задача является конечномерной).

Поскольку «накачка» f выталкивает фазовую точку из малой окрестности начала координат, в то время как трение возвращает ее издалека, в системе, соответствующей движению твердого тела (12.1), устанавливается некоторый промежуточный режим-аттрактор. Этот аттрактор может быть, например, устойчивым положением равновесия или периодическим движением, но при не слишком малой размерности фазового пространства может оказаться и «хаотическим» движением, чувствительным к начальному условию.

Если коэффициент трения (или вязкости) ν достаточно большой, то аттрактор обязательно будет устойчивым положением равновесия. При уменьшении параметра ν (т. е. при увеличении обратной величины — числа Рейнольдса $Re := 1/\nu$) возможны бифуркации равновесия, при которых аттрактор может стать периодическим движением, а затем и «стохастическим».

Гипотеза о таком механизме появления турбулентности в жидкости для больших чисел Рейнольдса неоднократно выдвигалась многими авторами. В частности, весной 1965 г. А. Н. Колмогоров высказал ее на заседании Московского Математического общества во время обсуждения доклада Н. Н. Брушлинской о бифуркациях в уравнении (12.1) [Bru]. Также в 1965 г. первый автор, рассказывая об этой теории на семинаре Р. Тома в IHES под Парижем, сформулировал гипотезу о том, что отрицательность кривизны группы диффеоморфизмов влечет неустойчивость как для эйлеровской динамики, так и для соответствующих аттракторов уравнений Навье–Стокса.

Для нормировки аттрактора А. Н. Колмогоров предложил рассмотреть «накачку», пропорциональную тому же малому параметру ν, что и вязкость, и сформулировал для этого случая две гипотезы.

1. *Слабая гипотеза*: максимум размерности минимальных аттракторов[1] в фазовом пространстве уравнений Навье–Стокса (а также их галеркинских приближений (12.2)) растет вместе с числом Рейнольдса $Re = 1/\nu$.

2. *Сильная гипотеза*: растет не только максимальная, но и минимальная из размерностей упомянутых минимальных аттракторов.

До сих пор как в трехмерной, так и в двумерной гидродинамике, эти гипотезы не доказаны.

В 1963 г. Е. Лоренц [Lor] исследовал следующую динамическую систему в трехмерном фазовом пространстве

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -\dfrac{8}{3}z + xy \end{cases}$$

и при $r = 28$ численно обнаружил аттрактор, вдоль которого движение экспоненциально неустойчиво. Этот объект был назван *странным аттрактором* и позднее исследовался во многих численно-аналитических и теоретических работах (например, см. ссылки в [PSS]). Вышеприведенная система обладает различными интересными свойствами при разных r. Например, при уменьшении параметра r от 100,795 до 99,524 наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивой периодической орбиты, что аналогично последовательным удвоениям периода в семействе Фейгенбаума отображений отрезка.

Интересно отметить, что хотя модель Лоренца и похожа на галеркинское приближение к уравнениям Навье–Стокса (12.2), имеется и существенное различие. А именно, рассмотрим баланс энергии для того и другого случая.

[1] Аттрактор называется минимальным, если он не содержит меньших аттракторов.

Для галеркинской системы (12.2) область, где энергия растет, ограничена некоторым эллипсоидом в фазовом пространстве. Вне этого эллипсоида энергия уменьшается, и фазовая точка возвращается к началу координат.

Для системы Лоренца область, где энергия растет, уходит на бесконечность (в некотором квадратичном конусе). Эта бóльшая по сравнению с моделью Колмогорова неустойчивость в модели Лоренца и является, возможно, объяснением того, почему в модели Лоренца удается проверить чувствительную зависимость движения по аттрактору от начальных условий, а в модели Колмогорова она остается гипотезой. Доказано только, что стационарное течение, действительно, теряет устойчивость, когда число Рейнольдса растет. Случай синусоидального профиля внешней силы $(\sin y)\partial/\partial x$ на двумерном торе рассмотрен в работе [MSi]. Бифуркации в модели Колмогорова изучались Юдовичем, который доказал существование вторичного режима, а также длинноволновую неустойчивость более общих стационарных течений вида $u(y)\partial/\partial x$.

А. Н. Колмогоров всегда подчеркивал, что сохранение устойчивости стационарного течения даже при неограниченном росте числа Рейнольдса не противоречит гидродинамическим экспериментам, если предположить, что область притяжения соответствующего аттрактора сжимается достаточно быстро.

Идея о связи между теорией гидродинамической неустойчивости и изучением стохастизации в эргодической теории динамических систем явно высказывалась А. Н. Колмогоровым в течение многих лет. Например, в программе его семинара 1958/59 учебного года, которая висела на доске объявлений механико-математического факультета в Московском Государственном Университете, он перечислил следующие темы.

1. Краевые задачи для гиперболических уравнений, решения которых всюду разрывно зависят от параметра (см., например, [Sob2]).

2. Задачи классической механики, в которых собственные функции всюду разрывно зависят от параметра (обзор этих задач содержится в докладе Колмогорова на конгрессе в Амстердаме в 1954 г.).

3. Моногенные функции Бореля и квазианалитические функции Гончара (в надежде на применение к задачам типа 1 и 2).

4. Возникновение высокочастотных колебаний при стремлении коэффициентов при старших производных к нулю (статьи Волосова и Лыковой по обыкновенным дифференциальным уравнениям).

5. В математической теории уравнений в частных производных с малым параметром при старших производных до настоящего времени изучены явления типа пограничных и внутренних слоев, сходящихся к поверхностям разрыва предельных решений или их производных при «исчезновении вязкости». В реальной турбулентности решения портятся всюду плотным образом. Математическое изучение этого явления предполагается провести хотя бы на модельных уравнениях (модель Бюргерса?).

6. Вопросы устойчивости ламинарных течений. Асимптотически исчезающая устойчивость (хотя бы на модельных уравнениях).

7. Обсуждение возможностей применения к реальным механическим и физическим задачам идеологии метрической теории динамических систем. Вопросы устойчивости различных типов спектра. Грубые системы и грубые свойства (в этом последнем направлении для систем с несколькими степенями свободы почти ничего не известно!).

8. Рассмотрение (хотя бы на моделях) гипотезы, что в предположениях конца п. 5 в пределе динамическая система превращается в случайный процесс (гипотеза о практической невозможности долгосрочного прогноза погоды).

Конструкции современной теории динамических систем, такие как энтропия Колмогорова–Синая [Kol, Si1], измеряющая степень стохастичности в детерминированной динамике, были построены специально, чтобы выполнить эту программу.

В 1970 г. Рюэль и Такенс тоже сформулировали гипотезу о том, что турбулентность есть появление аттракторов, движение около которых в фазовом пространстве уравнения Навье–Стокса сильно зависит от начальных условий [R-T]. Вопреки огромной популярности этой статьи, даже существование таких аттракторов еще остается открытым вопросом (не говоря уже о более ранней гипотезе Колмогорова о росте размерности минимальных аттракторов).

Бесконечномерность фазового пространства уравнения Навье–Стокса требует обоснования для перехода к системе (12.2) и к галеркинскому приближению. Оператор трения в гидродинамических задачах является произведением вязкости ν и оператора Лапласа. Абсолютные величины его собственных чисел ν_i возрастают с порядком соответствующих гармоник. Следовательно, высокие гармоники быстро затухают при ненулевой вязкости. Итак, фазовая точка бесконечномерного пространства притягивается к конечномерному подпространству, координаты в котором суть амплитуды низших гармоник (см. [MPa, FoT, D-O]). Для фиксированной вязкости анализ приближений Галеркина позволяет, в принципе, судить о поведении точных решений (см., например, [MatS]).

Однако, если мы интересуемся поведением решения, когда вязкость (коэффициент ν при операторе Лапласа) стремится к нулю, то надо рассматривать быстро растущее с $Re = 1/\nu \to \infty$ число гармоник (в галеркинской аппроксимации). Первая доказанная оценка сверху хаусдорфовой размерности максимального аттрактора A уравнения Навье–Стокса для двумерного тора была дана в работе [Ilsh]: $\dim A \leqslant \mathrm{const} \cdot \nu^{-4}$. Ныне наилучшей оценкой этого числа является величина

$$\dim A \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{\|f\|_{L^2} \mathrm{vol}(M)}{\nu^2}$$

(где f является внешней силой, M — областью конечного объема, а граничные условия предполагаются нулевыми). Она была получена А. Ильиным [Ily], основываясь на [CFT]. Современное состояние вопроса см. в [B-V, Tem]. С ростом размерности физического пространства растет число гармоник, для которых абсолютная величина собственного числа меньше заданного значения. Следовательно, размер галеркинской аппроксимации тоже должен расти.

Наиболее важный вопрос — об оценке размерности минимального аттрактора снизу — совершенно открыт, так как претендующие на оценку размерности снизу авторы забывают о минимальности, вследствие чего их математические аттракторы не являются «устанавливающимися режимами» физиков.

Характер первого (инерциального) члена в уравнениях (12.2) разительно меняется при переходе от двумерной гидродинамики к трех- (или много-) мерной. Причина — в различии геометрий коприсоединенных орбит соответствующих групп диффеоморфизмов (или в отсутствии инвариантов типа энстрофии для многомерных уравнений Эйлера, см. § 9 и § 11). Более того, эта сложная геометрия также препятствует обоснованию соответствия между приближением Галеркина и исходным уравнением Навье–Стокса в трехмерном случае.

В шестидесятые годы большинство специалистов по уравнениям в частных производных (за счастливым исключением В. И. Юдовича) считали отсутствие глобальной теоремы существования и единственности решений уравнения Навье–Стокса объяснением турбулентности. Эта точка зрения никогда не была популярной среди физиков, но математики обосновывали ею свои попытки заменить систему уравнений Навье–Стокса другими системами, где им больше удавалось доказать.

Для трехмерного уравнения Навье–Стокса для малой или исчезающей вязкости теоремы существования и единственности решений на произвольно большом промежутке времени все еще остаются открытыми вопросами.

ГЛАВА II
ТОПОЛОГИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

Холодные и теплые океанские течения (например, Гольфстрим) оказывают колоссальное влияние на климат континентов. Сила этого влияния заключается в постоянстве и стабильности этих течений. В этой главе мы будем изучать соответствующие идеализированные модели стационарных течений несжимаемой жидкости. Такие течения являются стационарными решениями уравнения Эйлера и имеют замечательную топологию и специальные условия существования. Часто они оказываются «аттракторами» в фазовом пространстве уравнения Навье–Стокса, описывающего движение вязкой жидкости. В этом случае структура таких течений может дать «приблизительную картину» произвольного движения жидкости после большого промежутка времени.

§ 1. Классификация трехмерных стационарных течений

1.1. Стационарные решения уравнения Эйлера и функции Бернулли

В этой главе мы будем изучать не зависящие от времени решения уравнения Эйлера.

Определение 1.1. Идеальным *стационарным* несжимаемым потоком жидкости $v(x)$ в области $M \subset \mathbb{R}^n$ называется бездивергентное ($\operatorname{div} v = 0$) решение *стационарного уравнения Эйлера*

$$0 = -(v, \nabla)v - \nabla p$$

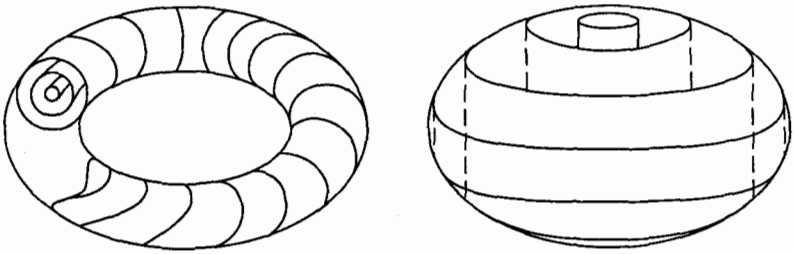
для некоторой функции p на M, которая определяет давление в жидкости.

Для произвольного n-мерного риманова многообразия M с мерой μ это уравнение можно записать в виде $-\nabla_v v - \nabla p = 0$, где поле скоростей удовлетворяет условию $L_v \mu = 0$.

В трехмерном случае ($n = 3$) следующая теорема дает, по существу, полное описание аналитических стационарных течений.

Теорема 1.2 (см. [Arn3, Arn4, Arn16]). *Предположим, что область $M \subset \mathbb{R}^3$ компактна и ограничена аналитической поверхностью, а поле скоростей аналитично и не везде коллинеарно со своим ротором. Тогда область течения разбивается аналитическими поверхностями на конечное число ячеек, в каждой из которых течение устроено стандартным образом. А именно, ячейки бывают двух типов: расслоенные на инвариантные относительно течения торы и расслоенные на инвариантные поверхности, диффеоморфные кольцу $\mathbb{R} \times S^1$ (см. рис. 9). При этом на каждом из торов*

линии тока либо все замкнуты, либо все всюду плотны, а на каждом кольце все линии тока замкнуты.



a *b*

Рис. 9. Области стационарного течения, расслоенные (*a*) на торы и (*b*) на кольца

Стационарное уравнение Эйлера $(v, \nabla)v = -\nabla p$ в $M \subset \mathbb{R}^3$ можно записать в виде

$$v \times \operatorname{rot} v = \nabla \alpha,$$

где функция α равна $-p - \dfrac{\|v\|^2}{2}$.

Определение 1.3. Функция $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$, определяемая уравнением $v \times \operatorname{rot} v = \nabla\alpha$ (по модулю аддитивной константы), называется *функцией Бернулли* стационарного потока v.

Непосредственно из определения следует, что и векторное поле v, и его ротор $\operatorname{rot} v$ касаются поверхностей уровня функции Бернулли α. В частности, α является первым интегралом поля скоростей v.

Заметим, что стационарное трехмерное уравнение Навье–Стокса (описывающее движение вязкой несжимаемой жидкости) обычно не имеет нетривиальных первых интегралов [Ko3]. Отметим также, что предел исчезающей вязкости для трехмерного уравнения Навье–Стокса в окрестности пространственной кривой приводит к структурам, связанным с двумерным стационарным уравнением Эйлера [Shf2].

Замечание 1.4. В инвариантном виде стационарное уравнение Эйлера

$$L_v u = -dp$$

эквивалентно уравнению $i_v du + d i_v u = -dp$ или

$$i_v du = d\alpha, \quad \text{где } \alpha = -p - i_v u.$$

Инвариантность α (т. е. соотношение $L_v\alpha = 0$) следует из формулы $i_v d\alpha = 0$.

Условие $v \times \operatorname{rot} v = \nabla\alpha$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ может быть переформулировано в следующем инвариантном виде, пригодном для произвольного многообразия M: векторные поля v и $\operatorname{rot} v$ коммутируют ($\{v, \operatorname{rot} v\} \equiv 0$). Чтобы проверить эту переформулировку, мы используем следующую формулу векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(\eta \times \xi) = \{\xi, \eta\} + \eta(\operatorname{div}\xi) - \xi(\operatorname{div}\eta), \tag{1.1}$$

которая верна на любом трехмерном римановом многообразии. (Здесь $(\eta \times \xi)$ обозначает векторное поле, сопряженное к 1-форме $i_\xi i_\eta \mu$ на M: $(i_\xi i_\eta \mu)\zeta = \mu(\eta, \xi, \zeta) = (\eta \times \xi, \zeta)$.) Применяя ротор к обеим частям равенства $v \times \operatorname{rot} v = \operatorname{grad} \alpha$, мы получаем $\{v, \operatorname{rot} v\} \equiv 0$.

Сформулированная выше теорема основана на следующем утверждении о структуре поверхностей уровня функции α на трехмерном многообразии M.

Предложение 1.5. *Каждая некритическая поверхность уровня функции α, не пересекающая границу многообразия M^3, диффеоморфна тору. В подходящей системе координат (φ_1, φ_2) по $\operatorname{mod} 2\pi$ и z в окрестности такого тора оба поля v и $\xi = \operatorname{rot} v$ имеют постоянные компоненты*

$$v = v_1(z)\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + v_2(z)\frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \quad \xi = \operatorname{rot} v = \xi_1(z)\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \xi_2(z)\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$$

вдоль тора с угловыми координатами (φ_1, φ_2), причем z нумерует торы.

Координаты φ_1, φ_2, z являются аналогом координат действие-угол в классической механике. В частности, из приведенной теоремы следует, что фазовые кривые обоих векторных полей v и $\operatorname{rot} v$ лежат на торах $\alpha = \text{const}$. На произвольно взятом торе эти кривые или замкнуты (если отношение частот v_2/v_1 для поля v или ξ_2/ξ_1 для поля $\xi = \operatorname{rot} v$ — рациональное число), или плотны. Доказательство этого утверждения дано в п. 1.2 (см. теорему 1.10).

Замечание 1.6. В случае, когда $\alpha \equiv \text{const}$ (все уровни критические), поля v и $\operatorname{rot} v$ коллинеарны в каждой точке ($v \times \operatorname{rot} v \equiv 0$). В магнитной гидродинамике такие поля называются *бессиловыми*.

Если бессиловое поле v нигде не обращается в нуль, то $\operatorname{rot} v = \varkappa v$, где «отношение» $\varkappa\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Функция $\varkappa$ является первым интегралом поля v (так же, как и поля $\operatorname{rot} v$). В самом деле, $0 \equiv \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{div} \varkappa v = (\operatorname{grad} \varkappa, v)$. Следовательно, каждая связная компонента неособой поверхности уровня функции $\varkappa$ есть тор, так как эта поверхность ориентируема и имеет касательное векторное поле v, нигде не обращающееся в нуль (такие же соображения используются и при доказательстве предложения 1.5, см. п 1.2). Фазовые кривые поля v наматываются на эти торы (в соответствующих координатах φ_1, φ_2, z отношение частот $\dot\varphi_1/\dot\varphi_2 = \varkappa(z)$ будет константой вдоль фазовых кривых поля v). Таким образом, даже в случае бессилового поля его фазовые кривые лежат на двумерных торах при условии, что поле не имеет нулей и функция $\varkappa$ не постоянна.

Бессиловое поле v может иметь значительно более сложную топологию, если $\operatorname{rot} v = \lambda v$, где λ — константа (т. е. если v является собственным полем оператора rot).

Определение 1.7. Собственные поля оператора rot называются полями *Бельтрами*.

Следствие 1.8. *Если стационарный аналитический поток имеет траекторию, которая не содержится ни в какой аналитической (даже сингулярной) поверхности, то этот поток задан полем Бельтрами.*

Действительно, любой поток, не являющийся потоком Бельтрами, имеет первый интеграл (либо функцию Бернулли α, либо функцию отношения $\varkappa$).

Пример 1.9. На трехмерном торе $\{(x, y, z)\colon \bmod 2\pi\}$ существует семейство полей Бельтрами, заданное так называемыми ABC-потоками

$$\begin{cases} v_x = A\sin z + C\cos y, \\ v_y = B\sin x + A\cos z, \\ v_z = C\sin y + B\cos x. \end{cases}$$

Бездивергентные векторные поля этого трехпараметрического семейства являются собственными для оператора завихренности: $\operatorname{rot} v = v$. ABC-потоки были открыты Громека в 1881 г. и переоткрыты Бельтрами в 1889 г. В данном контексте их изучение было предложено в [Arn4, Chi1] (см. также ссылки и детали в [VasO]).

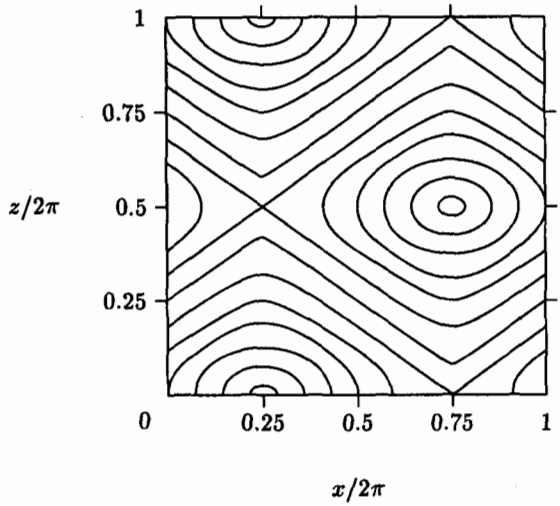


Рис. 10. Проекция линий тока на (x, z)-плоскость в интегрируемом случае $C = 0$ [Dom]. Компоненты поля не зависят от y

Если один из параметров A, B или C обращается в нуль, то поток становится интегрируемым (рис. 10). Используя теорию возмущений в почти интегрируемом случае, можно предсказать появление сильных резонансов (см. обсуждение и результаты численного моделирования в [Dom]). При таких возмущениях некоторые торы, заполненные фазовыми кривыми, сохраняются (см., например, [AKN]), в то время как другие торы разрушаются, приводя к появлению областей с хаотическим поведением траекторий. Численные исследования показывают, что некоторые траектории всюду плотно заполняют трехмерные области (рис. 11). В частности, в [Dom] было проведено исследование особенностей траекторий поля с комплексным временем и показано (численно) отсутствие интегрируемости, если $ABC \neq 0$. В случае $A = \sqrt{3}$, $B = \sqrt{2}$, $C = \sqrt{1}$ это было показано в [Hen]. Отсутствие вещественно-аналитических первых интегралов для ABC-потоков с $0 \neq A \neq B \neq 0$ и малым $C \neq 0$ для

типичных ABC-потоков с $A^2 = B^2$, а также для случая $A^2 = B^2 = C^2$ было доказано Зиглиным [Zig2].

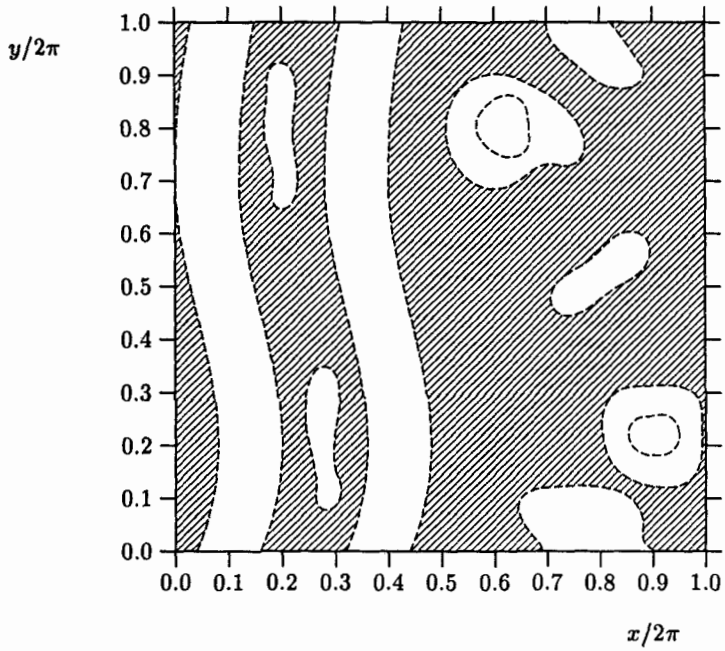


Рис. 11. Типичное сечение Пуанкаре для ABC-потоков ($A^2 = 1$, $B^2 = 2/3$, $C^2 = 1/3$). Некоторые линии поля, как кажется, заполняют трехмерные области ([Hen] или [Dom])

Подобное изучение симметрий поля и расположения особых точек для аналога ABC-потока в трехмерном шаре можно найти в работе [Zhel].

Заметим, что если поле v, удовлетворяющее условию $\operatorname{rot} v = \varkappa v$, имеет ненулевую дивергенцию, то топологические свойства его траекторий отличаются от свойств полей, обсуждаемых здесь: такие потоки обычно неинтегрируемы, даже если функция $\varkappa\colon M \to \mathbb{R}$ не постоянна (см. [MYZ]).

1.2. Структурные теоремы

Мы начнем доказательство (вещественно-аналитической) теоремы 1.2 с ее гладкого аналога для замкнутого многообразия. Пусть α — функция Бернулли стационарного потока v на ориентируемом трехмерном многообразии M без края, и пусть $\Gamma \subset M$ — прообраз критических значений функции α.

Теорема 1.10 (см. = 1.5′). *Каждая связная компонента множества $M \setminus \Gamma$ расслаивается на двумерные торы, инвариантные относительно потока v. Движение на каждом торе квазипериодично (фазовые кривые либо все замкнуты, либо всюду плотны).*

Доказательство. Функция α является первым интегралом для векторных полей v и $\xi := \operatorname{rot} v$. Так как эти поля коммутируют, то определяемые ими потоки задают $\mathbb{R}^2$-действие на каждой поверхности уровня функции α. Каждый некритический уровень является гладкой замкнутой поверхностью, и, следовательно, это либо тор, либо бутылка Клейна. (Другими словами, эйлерова характеристика некритической поверхности уровня равняется нулю: если $\nabla\alpha \neq 0$, то поле скоростей v служит примером касательного векторного поля, нигде на поверхности не обращающегося в нуль.) Кроме того, $\nabla\alpha$ коориентирует эту поверхность, следовательно, это тор.

На каждой поверхности уровня поток ξ действует транзитивно на фазовые кривые поля v, поэтому последние либо все замкнуты, либо всюду плотны на поверхности уровня. Если взять такие координаты на торе, в которых $\mathbb{R}^2$-действие задается линейными сдвигами, то поля v и $\xi = \operatorname{rot} v$ станут векторными полями с постоянными коэффициентами. □

Теперь мы перейдем к вещественно-аналитической теореме (следуя в изложении работе [GK2]).

Определение 1.11. Подмножество вещественного аналитического многообразия называется полуаналитическим, если оно локально определяется конечным числом вещественно-аналитических уравнений и неравенств.

Нам понадобятся некоторые свойства таких множеств, сформулированные в следующей лемме.

Лемма 1.12. *Пусть M и N — компактные связные вещественно-аналитические многообразия (возможно с краем); $f\colon M \to N$ — вещественно-аналитическое отображение. Тогда:*

1) *любое полуаналитическое подмножество X многообразия M разделяет M на конечное число связных компонент;*

2) *образ $f(X)$ — полуаналитическое подмножество многообразия N при условии, что $\dim N \leqslant 2$;*

3) *пусть ранг f равен $\dim N$, по крайней мере в одной точке многообразия M, и Y является нигде не плотным полуаналитическим подмножеством многообразия N. Тогда прообраз $f^{-1}(Y)$ полуаналитичен и нигде не плотен в M.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) — классические результаты, принадлежащие Лоясевичу [Loj]. Для доказательства 3) рассмотрим множество K критических точек функции f. Множество $f^{-1}(Y) \cap (M \setminus K)$ нигде не плотно, поскольку сужение f на $M \setminus K$ является субмерсией. Так как $\operatorname{rank} f = \dim N$ в некоторой точке M, множество K, в свою очередь, нигде не плотно в M. Таким образом, $f^{-1}(Y)$ нигде не плотно как объединение двух нигде не плотных множеств. Полуаналитичность множества $f^{-1}(Y)$ следует непосредственно из определения. □

Доказательство теоремы 1.2. Предположим сначала, что M — связное многообразие, не имеющее границы ($\partial M = \varnothing$). Допустим также, что все данные (элемент объема, метрика и поле скоростей v) вещественно-аналитические. В этом случае утверждается, что $U = M \setminus \Gamma$ состоит из конечного числа связных компонент, каждая из которых расслаивается на инвариант-

ные относительно течения двумерные торы. (Напомним, что $\Gamma \subset M$ обозначает прообраз критических значений функции Бернулли α для стационарного поля v.)

Действительно, в предположениях теоремы отображение $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$ аналитично, и можно положить $f = \alpha$. Пусть, как и ранее, K — множество критических точек функции α, тогда $\alpha(K)$ полуаналитично в силу 2) и по лемме Сарда нигде не плотно. Поэтому, согласно 3), $\Gamma = \alpha^{-1}(\alpha(K))$ полуаналитично и нигде не плотно в M. Применяя утверждение 1) к $X = \Gamma$, убеждаемся в том, что U плотно в M и состоит из конечного числа связных компонент.

Для завершения доказательства в случае, когда M не имеет границы, достаточно применить теорему 1.10.

Рассмотрим теперь случай, когда M имеет границу ($\partial M \neq \varnothing$). Снова обозначим через K множество критических точек функции α, а через C — множество критических точек функции $\alpha|_{\partial M}$. Рассуждая как и прежде, легко показать, что объединение множеств $\alpha(K)$ и $\alpha(C)$ — это полуаналитическое множество Y, нигде не плотное в $\mathbb{R}^2$. Поэтому $\Gamma = \alpha^{-1}(Y)$ нигде не плотно, полуаналитично и инвариантно относительно течения.

Хотя теперь, возможно, у нас нет глобального $\mathbb{R}^2$-действия, поскольку M — многообразие с границей, мы имеем локальное $\mathbb{R}^2$-действие на $M \setminus \partial M$. Далее, отображения $\alpha|_U$ и $\alpha|_{\partial M \cap U}$ — по-прежнему собственные субмерсии на свои образы. Рассмотрим орбиту $\mathcal{O}_x$ локального $\mathbb{R}^2$-действия, проходящую через точку $x \in U$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.10, можно показать, что $\mathcal{O}_x$ — тор или кольцо. В первом случае все интегральные кривые v замкнуты либо плотны на $\mathcal{O}_x$.

Отметим, что множество $L = \mathcal{O}_x \cap \partial M$ инвариантно относительно течения v, и, следовательно, орбита $\mathcal{O}_x$ является кольцом тогда и только тогда, когда она пересекается с ∂M. Согласно определению множества U поле ξ трансверсально краю ∂M вдоль L. Значит, L есть объединение двух замкнутых интегральных кривых поля v. Поскольку мы имеем корректно определенное локальное $\mathbb{R}^2$-действие, все линии тока поля v на $\mathcal{O}_x$ должны быть замкнуты.

Пусть U_0 — связная компонента U. Орбиты $\mathcal{O}_x$, $x \in U_0$, либо все являются торами, либо кольцами. Действительно, для всех $x \in U$ поверхности уровня $F_x = \alpha^{-1}(\alpha(x))$ трансверсальны ∂M и поэтому связные компоненты $\mathcal{O}_x$ поверхности F_x диффеоморфны друг другу для любого $x \in U_0$. Теорема 1.2 доказана. □

З а м е ч а н и е 1.13. В работах [E-G] доказано, что любое аналитическое стационарное течение без особых точек в трехмерном полнотории имеет замкнутую траекторию. Авторы устанавливают эквивалентность между полями Риба (векторными полями, сохраняющими трансверсальное, нигде не интегрируемое поле плоскостей) и бессиловыми полями без особых точек, что позволяет им применить методы контактной топологии. В частности, оказывается, что гладкие стационарные решения уравнения Эйлера без особых точек существуют на произвольных замкнутых трехмерных многообразиях и в областях с торическими границами.

§ 2. Вариационные принципы для стационарных решений и приложения к двумерным течениям

2.1. Минимизация энергии

Рассмотрим следующую вариационную задачу (a priori не связанную со стационарными решениями уравнения Эйлера).

Пусть M — трехмерное замкнутое риманово многообразие, снабженное формой объема μ, а ξ — бездивергентное векторное поле на M. *Энергией* поля ξ назовем интеграл

$$E = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2}\int\limits_M (\xi, \xi)\mu.$$

Задача 2.1. Найти минимум энергии и экстремали среди всех полей, получаемых из данного поля ξ с помощью сохраняющих объемы диффеоморфизмов многообразия M.

Здесь сохраняющий объемы диффеоморфизм $g\colon M \to M$ ставит в соответствие бездивергентному полю ξ на M другое бездивергентное поле $g_*\xi$ такое, что поток поля ξ через любую поверхность σ равен потоку поля $g_*\xi$ через $g(\sigma)$. Иными словами, поле ξ вморожено в несжимаемую жидкость, заполняющую M: можно считать, что это векторное поле «нарисовано» на частицах жидкости и растягивается вместе с ними.

В случае, когда многообразие M имеет край ∂M, мы предполагаем, что поле ξ касается ∂M и диффеоморфизм переводит край ∂M в себя.

В следующей главе мы рассмотрим минимум энергии и его явные оценки в терминах топологии поля. Здесь же мы изучаем только топологию экстремальных полей.

Теорема 2.2 (см., например, [Arn9]). *Экстремали сформулированной выше задачи — это бездивергентные векторные поля, коммутирующие со своими роторами. В частности, они совпадают со стационарными решениями уравнения Эйлера на многообразии M.*

Доказательство. Пусть η — произвольное бездивергентное поле на M. Вариация $\delta\xi$ поля ξ при бесконечно малом диффеоморфизме, определенном полем η, дается скобкой Ли $\delta\xi = [\eta, \xi] = \{\xi, \eta\}$ (в координатной форме скобка Пуассона векторных полей ξ и η равна $\{\xi, \eta\} = (\xi, \nabla)\eta - (\eta, \nabla)\xi$).

Следовательно, вариация энергии равна $\delta E = \langle \xi, \delta\xi \rangle = \langle \xi, \{\xi, \eta\} \rangle$. Допустим, векторное поле ξ является экстремалью для функционала энергии.

Воспользовавшись формулой (1.1), которая имеет место на любом трехмерном римановом многообразии, и используя бездивергентность полей ξ и η, можно переписать вариацию энергии экстремального поля ξ в виде

$$0 = \delta E = \langle \xi, \operatorname{rot}(\eta \times \xi) \rangle = \langle \operatorname{rot}\xi, (\eta \times \xi) \rangle = \langle \eta, (\xi \times \operatorname{rot}\xi) \rangle.$$

Поскольку поле η бездивергентно, векторное произведение $\xi \times \operatorname{rot}\xi$ ортогонально ко всем бездивергентным полям. Поэтому оно является градиентом: $\xi \times \operatorname{rot}\xi = \operatorname{grad}\alpha$. Отсюда, применяя оператор rot к обеим частям, получаем $\{\xi, \operatorname{rot}\xi\} \equiv 0$, что и требовалось доказать. □

Замечание 2.3. В случае двумерного многообразия M мы получим уравнение

$$\nabla u \times \nabla \Delta u \equiv 0$$

для функции тока u экстремального поля $\xi = \operatorname{grad} u$. Из этого уравнения видно, что градиент экстремальной функции коллинеарен градиенту ее лапласиана (см. п. 2.3).

Этот результат справедлив не только для гладких векторных полей ξ. Он также выполняется в более слабой форме интегрального тождества $\langle \eta, (\xi \times \operatorname{rot} \xi) \rangle = 0$ при условии, что экстремаль ξ существует. Заметим, что существование гладких и негладких экстремалей в этой задаче является весьма тонким вопросом. Мы отсылаем к [Bur, ATL] (см. также § 2 и § 6 ниже) по поводу теорем существования (вообще говоря, негладких экстремалей) в двумерном случае. Для размерности большей двух нет доказательства, что экстремали существуют, за исключением некоторых частных случаев (ср. [L-A, LS4, Vai, GK2]).

Замечание 2.4. Аналогичные выкладки приводят к следующему выражению для второй вариации энергии:

$$\delta^2 E = \langle \{\xi, \eta\}, \{\xi, \eta\} \rangle + \langle \{\xi, \eta\}, ((\operatorname{rot} \xi) \times \eta) \rangle,$$

где ξ — экстремальное поле. Соответствующий вывод использует первую и вторую вариации поля ξ, которые в направлении бездивергентного векторного поля η можно найти по формуле Тейлора

$$\xi(\varepsilon) = \xi + \varepsilon\{\xi, \eta\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\{\xi, \eta\}, \eta\} + \ldots, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.1}$$

Замечание 2.5. Ряд Тейлора (2.1) для поля $\xi(\varepsilon)$ получается при отыскании решения $\xi(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \{\xi(t), \eta\}$$

в виде ряда

$$\xi(t) = \xi + t\xi_1 + \frac{t^2}{2}\xi_2 + \ldots$$

Поле $\xi(\varepsilon)$ получается из ξ в результате действия фазового потока поля η, соответствующего малому интервалу времени ε.

Все поля, получаемые из ξ в результате действия сохраняющих объемы диффеоморфизмов, образуют подмногообразие в векторном пространстве всех бездивергентных векторных полей — орбиту точки ξ. Касательное аффинное подпространство к этому «гладкому» подмногообразию в точке ξ образовано векторами $\xi + \{\xi, \eta\}$ с произвольными бездивергентными полями η.

Для вычисления второго дифференциала функции в точке на подмногообразии векторного пространства *недостаточно* вычислить второй дифференциал сужения этой функции на аффинное подпространство, касательное

к данному подмногообразию в этой точке. В самом деле, второй дифференциал сужения функции на *подмногообразие* и второй дифференциал сужения той же функции на *касательное аффинное пространство* в критической точке (сужения функции на это подмногообразие) — две *различные* квадратичные формы на касательном пространстве. (Здесь под касательным пространством мы понимаем векторное пространство с началом в этой критической точке.)

Формула (2.1) определяет отображение области «малых» векторных полей $\varepsilon\eta$ на орбиту поля ξ. Энергия образа, рассматриваемая как функция поля $\varepsilon\eta$, является функционалом на векторном пространстве бездивергентных полей $\{\varepsilon\eta\}$.

Первая вариация этого функционала обращается в нуль, если ξ — критическая точка сужения энергии на траекторию. Вторая его вариация $\delta^2 E$ определяется по приведенной выше формуле (как квадратичная форма от $\varepsilon\eta$).

Предложение 2.6. *Если ξ — критическая точка сужения энергии на подмногообразие, то значение квадратичной формы второй вариации зависит только от касательного вектора $\zeta = \{\xi, \varepsilon\eta\}$ и не зависит от конкретного выбора поля η.*

Доказательство. Мы можем заменить η только на $\eta + u$, где $\{\xi, u\} = 0$ (иначе ζ изменится). Тогда вклад u в квадратичный член в ряде (2.1) будет равен $\frac{\varepsilon^2}{2}w$, где $w = \{\{\xi, \eta\}, u\}$. Поскольку $\{\xi, u\} = 0$, мы получаем из тождества Якоби, что $w = -\{\{\eta, u\}, \xi\}$. Этот вектор является касательным к орбите в точке ξ. Поэтому первая вариация энергии обращается в нуль на векторе w. Прибавляя вектор $\frac{\varepsilon^2}{2}w$ к вектору $\xi(\varepsilon)$ (определяемому формулой (2.1) и находящемуся на расстоянии порядка ε от ξ), мы изменяем значение энергии на величину порядка ε^3. Поэтому прибавление u к η не дает вклада в квадратичный член ряда Тейлора сужения энергии на орбиту ξ (при условии, что векторное поле ξ является критической точкой). □

2.2. Задача Дирихле и стационарные течения

В двумерном случае задача 2.1 минимизации энергии принимает вид следующей задачи Дирихле. Пусть M — двумерное риманово многообразие (возможно, имеющее границу) с римановой формой площади μ.

Задача 2.1′. Найти точную нижнюю грань и минимизирующую функцию *интеграла Дирихле*

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_M (\nabla u, \nabla u)\mu$$

среди всех гладких функций u (на многообразии M), получаемых из данной функции u_0 действием сохраняющих площадь диффеоморфизмов M.

Чтобы убедиться в том, что это — двумерный случай задачи 2.1, можно рассмотреть (косой) градиент $\operatorname{sgrad} u$ вместо обычного градиента ∇u (при этом функционал E принимает, разумеется, то же самое значение). Тогда u

является функцией Гамильтона, определение которой инвариантно: любая сохраняющая площадь замена координат для функции u индуцирует действие соответствующего диффеоморфизма на поле $\operatorname{sgrad} u$.

Например, пусть M — диск $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а функция u_0 обращается в нуль на его границе и имеет единственную критическую точку — максимум — в диске (рис. 12, a).

Предложение 2.7 (см. [Arn9, Arn20]). *Минимум функционала Дирихле достигается на функции u, зависящей только от расстояния до центра диска, множества меньших значений которой $\{(x,y)\colon u(x,y) \leqslant c\}$ имеют те же площади, что и соответствующие множества исходной функции u_0* (рис. 12, b).

Доказательство, по сути, состоит в применении изопериметрического неравенства и неравенства Шварца.

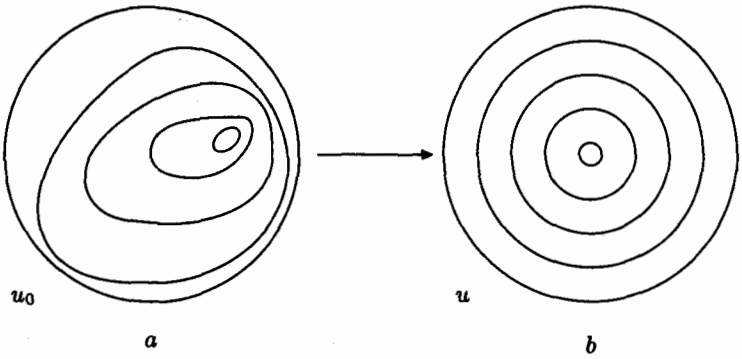


Рис. 12. Уровни (a) функции u_0, имеющей единственную критическую точку (максимум) внутри диска, и (b) центрально-симметричной функции, реализующей минимум функционала Дирихле среди функций, полученных применением к исходной функции u_0 сохраняющих площадь диффеоморфизмов

Если исходная функция имеет несколько критических точек (рис. 13), ситуация сильно осложняется. Численные эксперименты в [Mof4, Baj] показывают наличие минимизирующих функций различных типов в зависимости от крутизны исходной функции u_0, причем все они имеют особые линии уровня. Например, если исходная функция, подобно горе Эльбрус или горе Юнгфрау, имеет два максимума, с перевалом между ними, то для минимизирующей функции в экспериментах наблюдаются особенности вдоль некоторой кривой типа «рва», как у функции $f(x) = |x|$, между обоими максимумами. Но этот ров представляет собой конечный отрезок, в концах которого особенность, видимо, уплощается некоторым универсальным, не зависящим от деталей начальной функции образом. Но, к сожалению, описания специальной функции, задающей это уплощение, пока неизвестно не только на уровне математических теорем, но и на уровне физических гипотез. Вопросы образования особенностей у поля в гидродинамике при релаксации к экстремальному состоянию обсуждаются в обширных обзорах [Mof2, Mof4, MoT] (см. также ссылки в этих

работах). Препятствия к возникновению такого рода релаксации в трехмерном случае описаны в гл. III.

Если вместо самой исходной функции u_0 фиксировать только соответствующие граничные условия, то можно получить бесконечно много C^∞-стационарных решений (или минимизирующих функций) для задачи в прямоугольной области и единственное решение в аналитическом случае [Tro].

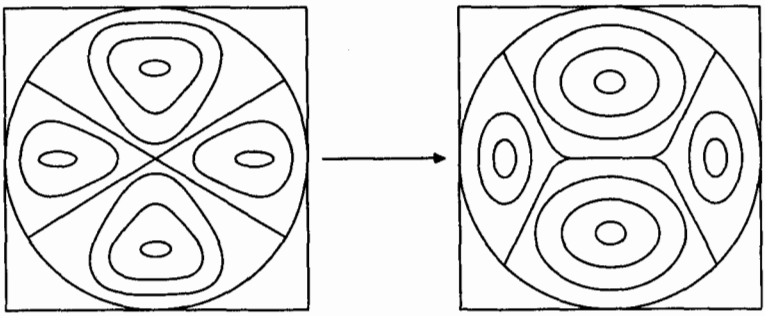


Рис. 13. Минимизирующая функция задачи Дирихле для функции с несколькими максимумами имеет сингулярный отрезок — «ров» (см. [Baj])

Теорема 2.8. *Гладкая минимизирующая функция u задачи Дирихле 2.1′ на римановом многообразии M удовлетворяет следующему условию: градиенты функций u и Δu коллинеарны в каждой точке M.*

Иными словами, экстремальные функции u имеют «те же» кривые уровня, что и их лапласианы: локально определена функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\Delta u = F(u)$. Это всего лишь переформулировка теоремы 2.2 для двумерного случая. Можно показать, что теорема 2.8 справедлива и в n-мерном случае. (Указание: надо адаптировать доказательство теоремы 2.2.)

Заметим, что осесимметричная функция с единственной критической точкой на диске (рис. 12) не только доставляет минимум энергии среди всех диффеоморфных полей, но также и максимум энергии среди всех изозавихренных полей [KLe].

Задача Дирихле 2.1′ для старших размерностей возникает в приложениях к теории скалярного динамо [Bay2], фазовых переходах в управляемых динамических системах [Arn25] и в теории равновесия плазмы в ограниченном объеме [LS1].

Замечание 2.9. Как обсуждалось выше, функции, минимизирующие энергию (т. е. интеграл Дирихле) среди всех гладких сохраняющих площадь замен переменной в заданной функции, соответствуют стационарным течениям. Проблема существования *гладких* минимизирующих функций все еще остается открытой в любой разумной степени общности.

Эта проблема имеет естественное обобщение на широкий класс функций (например, из L^p или из соболевских пространств), на все сохраняющие меру преобразования таких функций на пространствах с мерой и на общие вариационные функционалы. Существует обширная литература о существовании

(обычно негладких) экстремумов вариационных задач в этих постановках, когда минимизируется (или максимизируется) функционал энергии среди таких преобразований, и об их связи с двумерной гидродинамикой (см. [Bej, ATL, Bur]). В п. 2.4 мы обсуждаем другой вариационный принцип, предложенный в [Shn3] для двумерных течений, где фиксируется уровень энергии и строится частичный порядок на «изоэнергетических» функциях. Минимальные элементы в этом частичном порядке соответствуют стационарным течениям.

Слабое замыкание (в H_0^1) множества функций, полученных из данной функции композицией с диффеоморфизмами (необязательно сохраняющими объем) области, описано в работах [LS3, LS5]. Элементы этого слабого замыкания наследуют (в слабом пределе) грубые топологические свойства множеств уровня. Существование слабых решений с предписанной топологией в несжимаемом случае доказано в [LS5]. Последнее, в частности, означает, что в двумерном случае задача о магнитном равновесии несжимаемой идеально проводящей жидкости всегда имеет обобщенное решение (ср. с трехмерным случаем, задачей Сахарова–Зельдовича, в гл. III).

2.3. Связь двух вариационных принципов

Мы уже отмечали, что гладкие экстремали функционала энергии среди векторных полей, диффеоморфных заданному, коммутируют со своими вихрями и, следовательно, совпадают с описанием идеальных стационарных течений (ср. замечание 1.4 и теорему 2.2). Это совпадение решений в двух задачах является проявлением двойственности двух вариационных принципов: идеальной гидродинамики и магнитной гидродинамики. Стационарные решения в идеальной гидродинамике соответствуют критическим точкам энергии $\int \|v\|^2/2$ среди всех *изозавихренных полей*, т. е. среди полей, роторы которых отличаются на действие сохраняющего объемы диффеоморфизма. На языке алгебр Ли стационарные течения соответствуют критическим точкам функционала энергии на *коприсоединенных орбитах* группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(M^n)$ (см. гл. I). С другой стороны, в рассмотренной выше задаче мы ищем минимизирующее энергию поле в классе *диффеоморфных полей*, т. е. на *орбитах присоединенного действия* той же группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов. Отметим, что последний принцип минимизации энергии в классе диффеоморфных полей встречается в теории МГД (см. гл. III, или, например, [Arn9, Arn20, Bej, Ser2, Mof2, Mof4]).

Теорему 2.2 можно теперь переформулировать следующим образом: *для обоих вариационных принципов экстремумы совпадают*. Это утверждение является проявлением общего факта, справедливого для любой невырожденной квадратичной формы E на произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть E^* — квадратичная форма на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$, соответствующая форме E на $\mathfrak{g}$. Если форма $E(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ определена с помощью (обратимого) оператора инерции $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, то E^* определяется как $E^*(y) = \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle$ для любого $y \in \mathfrak{g}^*$.

Теорема 2.10. *Условные экстремумы квадратичного функционала E на орбитах присоединенного действия на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ переводятся оператором инерции $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ в условные экстремумы квадратичной формы E^* на коприсоединенных орбитах в $\mathfrak{g}^*$.*

Доказательство. Пусть x_0 — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathcal{O}$ — присоединенная орбита точки x_0. Произвольный вектор ζ касательного пространства $T_{x_0}\mathcal{O}$ может быть представлен, по определению, как вариация x_0, т. е. в виде $\zeta = \mathrm{ad}_\eta x_0$ для некоторого элемента $\eta \in \mathfrak{g}$.

Поэтому имеем следующее выражение для вариации функционала энергии $E(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ вдоль вектора ζ:

$$dE(\zeta) = \langle \zeta, Ax_0\rangle = \langle \mathrm{ad}_\eta x_0, Ax_0\rangle = \langle x_0, \mathrm{ad}^*_\eta(Ax_0)\rangle = \\ = \langle A^{-1}y_0, \mathrm{ad}^*_\eta y_0\rangle = \langle A^{-1}y_0, \zeta^*\rangle = dE^*(\zeta^*),$$

где через $y_0 \in \mathfrak{g}^*$ обозначен образ x_0 относительно оператора инерции ($y_0 = Ax_0$), а $\zeta^* = \mathrm{ad}^*_\eta y_0$ представляет собой произвольный вектор, касательный к коприсоединенной орбите $\mathcal{O}^*$ точки y_0.

Предположим теперь, что $x_0 \in \mathfrak{g}$ — критическая точка сужения функции $E(x)$ на присоединенную орбиту $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда дифференциал функции E равен нулю на касательном пространстве $T_{x_0}\mathcal{O}$, как и дифференциал сужения E^* на касательное пространство к орбите $\mathcal{O}^*$ точки y_0. Следовательно, y_0 — критическая точка сужения E^* на коприсоединенную орбиту $\mathcal{O}^*$. □

2.4. Полугрупповой вариационный принцип для двумерных стационарных течений

В [Shn3] Шнирельман предложил другой вариационный принцип для двумерного случая, позволяющий получить некоторые стационарные решения уравнения Эйлера. Грубо говоря, вместо минимизации энергии среди всех изозавихренных полей можно рассматривать поля с одинаковой энергией и построить частичный порядок на множестве их роторов. Оказывается, экстремальные поля имеют в некотором смысле наиболее перемешанные функции вихря.

Рассмотрим ограниченную связную двумерную область $M \subset \mathbb{R}^2$ с мерой μ и краем $\Gamma = \partial M$. Наша задача — описать обобщенные сохраняющие площадь отображения M в себя, не обязательно взаимно однозначные. Естественно определить эти отображения с помощью действия на функции, заданные на M.

Определение 2.11. Назовем *полиморфизмом* ограниченный оператор $\widetilde{K}$ в $L^2(M, \mathbb{R})$ следующего вида:

$$\widetilde{K}u(x) = \int\limits_M K(x,y)u(y)\mu_y,$$

где ядро $K(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $K(x,y) \geqslant 0$, т. е. $K(x,y)$ — неотрицательная мера на $M \times M$;
2) $\int\limits_M K(x,y)\mu_x \equiv 1$ для любого $y \in M$;
3) $\int\limits_M K(x,y)\mu_y \equiv 1$ для любого $x \in M$.

Пример 2.12. Приведем два простых, но важных примера таких операторов:

a) пусть $\varphi \in S\mathrm{Diff}(M)$ — сохраняющий площадь диффеоморфизм M. Положим $K_\varphi(x,y) = \delta(y - \varphi^{-1}(x))$, где через $\delta(*)$ обозначена двумерная δ-функция. Тогда оператор $\widetilde{K}_\varphi$ с ядром $K_\varphi(x,y)$ переводит функцию $u(x)$ в функцию $u(\varphi^{-1}(x))$ и является унитарным в $L^2(M)$;

b) если $K_0(x,y) \equiv 1/\mu(M)$, где $\mu(M)$ — полная мера M, то оператор $\widetilde{K}_0$ отображает функцию $u(x)$ в постоянную, равную ее среднему значению на M.

Можно сказать, что произвольный оператор $\widetilde{K}$ занимает промежуточное место между этими двумя крайними случаями. Ядра $K(x,y)$ называются стохастическими ядрами.

Условия 1) и 2) обобщают свойство диффеоморфизмов сохранять объем: вероятностные меры «образа» элемента dy и «прообраза» элемента dx относительно оператора $\widetilde{K}$ равны, соответственно, мерам элементов dy и dx.

Все полиморфизмы образуют (слабо компактную) полугруппу $\mathcal{P}$ (сжимающих или, точнее, нерасширяющих) операторов в $L^2(M)$. Операторы $\widetilde{K}_\varphi$, соответствующие диффеоморфизмам, образуют слабо плотное подмножество $\mathcal{P}$. Представления группы диффеоморфизмов часто можно продолжить на полугруппу полиморфизмов [Ner2].

Определение 2.13. Действие полугруппы $\mathcal{P}$ на пространстве $L^2(M)$ определяет *частичный порядок* в этом пространстве. А именно, скажем, что $f \prec g$, если существует такой оператор $\widetilde{K} \in \mathcal{P}$, что $f = \widetilde{K}g$. Если же $f \prec g$ и $g \prec f$, будем называть f и g эквивалентными: $f \sim g$.

Одно полезное в дальнейшем свойство соотношения $\prec$ сформулировано в следующем утверждении.

Предложение 2.14 (см. [Shn3]). *Если $f, g \in L^2(M)$ и $f \prec g$, то $\|f\|_{L^2} \leqslant \|g\|_{L^2}$. При $f \prec g$ равенство норм $\|f\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$ возможно тогда и только тогда, когда $g \prec f$.*

Пусть $L^{2,2}(M)$ — пространство Соболева, состоящее из функций φ, удовлетворяющих условию

$$\sum_{|k| \leqslant 2} \|D^k\varphi\|^2_{L^2(M)} < \infty, \quad \varphi|_{\partial M} = \mathrm{const}.$$

Определение 2.15. Пусть задана функция $\varphi \in L^{2,2}(M)$; обозначим через $\overline{\Omega}_\varphi$ множество таких функций $\psi \in L^{2,2}(M)$, что

$$\Delta\psi \prec \Delta\varphi. \tag{2.2a}$$

Если рассматривать φ как функцию тока для течения жидкости, то множество $\overline{\Omega}_\varphi$ содержит поля, изозавихренные с φ, т. е. поля с функциями тока ψ,

для которых существует такой диффеоморфизм $g\colon M \to M$, что $\Delta\psi(x) = \Delta\varphi(g(x))$. Эти поля образуют коприсоединенную орбиту $\mathcal{O}_\varphi$ поля φ.

Пусть $\Omega_\varphi \subset \overline{\Omega}_\varphi$ — множество функций тока ψ, удовлетворяющих дополнительному условию сохранения энергии

$$E(\psi) = E(\varphi), \tag{2.2b}$$

где $E(\psi) = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|^2_{L^2}$ — кинетическая энергия течения с функцией тока ψ.

Элемент $\nu \in \Omega_\varphi$ называется *минимальным* относительно частичного порядка в Ω_φ, если $\Delta\nu' \sim \Delta\nu$ для всех $\nu' \in \Omega_\varphi$ таких, что $\Delta\nu' \prec \Delta\nu$.

Теорема 2.16 (см. [Shn3]). *Для любой функции $\varphi \in L^{2,2}(M)$ во множестве Ω_φ существует минимальный элемент $\nu \in \Omega_\varphi$.*

Минимальный элемент не обязательно единственен. Суть доказательства состоит в использовании леммы Цорна (утверждающей, что если для каждой линейно упорядоченной убывающей цепочки элементов частично упорядоченного множества существует нижняя грань, то в этом множестве существует минимальный элемент) в сочетании с относительной слабой компактностью множества мер $\{K(x,y)\}$.

Теорема 2.17 (см. [Shn3]). *Пусть u — минимальный элемент Ω_φ. Тогда u — функция тока стационарного течения, и кроме того, существует такая однозначная монотонная функция F, что $\Delta u = F(u)$ почти всюду в M.*

Приведем эквивалентное данной теореме утверждение: если u — минимальный элемент Ω_φ, то для почти всех точек $x, y \in M$ произведение $(u(x) - u(y))(\omega(x) - \omega(y))$, где $\omega := \Delta u$, имеет один и тот же знак. Доказательство этого факта и подробности см. в [Shn3].

Замечание 2.18. Хотя классические решения уравнения Эйлера отвечают произвольным траекториям, принадлежащим коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\varphi$ какой-нибудь функции φ, при больших значениях времени преобразование потока становится аналогичным перемешиванию, описываемому полиморфизмами.

Это эвристическое соображение объясняет соотношение между минимальными элементами и стационарными решениями уравнения Эйлера.

Замечание 2.19. Для неодносвязного многообразия M граничные условия на функции в пространстве $L^{2,2}(M)$ имеют вид: $\varphi|_{\Gamma_i} \equiv \mathrm{const}_i$, где Γ_i — связная компонента ∂M. В этом случае множество $\overline{\Omega}_\varphi$ состоит из функций ψ, которые, кроме условия (2.2a), удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds \quad \text{для любых } i. \tag{2.2c}$$

Свойство (2.2c) является следствием (2.2a) для односвязного M.

Минимальные элементы «орбиты» Ω_φ можно классифицировать, сравнивая их энергию с энергией других элементов множества $\overline{\Omega}_\varphi \supset \Omega_\varphi$, состоящего из функций тока, удовлетворяющих условиям (2.2a) и (2.2c) без ограничения (2.2b), налагаемого на энергию.

Теорема 2.20 (см. [Shn3]). *Любой минимальный элемент $u \in \Omega_\varphi$ принадлежит одному из следующих трех классов:*

a) *с избыточной энергией, т. е. $E(u) \geqslant E(\psi)$;*

b) *с недостаточной энергией, т. е. $E(u) \leqslant E(\psi)$;*

c) *нейтральный, т. е. $E(u) = E(\psi)$*

для любого $\psi \in \overline{\Omega}_\varphi$. Все минимальные элементы данного множества Ω_φ принадлежат одному и тому же классу.

Задача 2.21. Интересно установить связь указанных классов минимальных элементов и упомянутого вариационного принципа с различными видами релаксации энергии, обсуждаемыми в п. 2.2 (см. результаты численного моделирования в [Mof4, Baj]), а также со слабыми решениями уравнения Эйлера, рассеивающими энергию (см. [Shn6, Shn7, Shn8]).

Этот вариационный принцип может послужить основой для формулировки *полугруппового* аналога (геодезического) вариационного принципа для групп (гл. I). В гл. IV, п. 7.7 обсуждается естественный переход от геодезических на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов многообразия к экстремалям принципа наименьшего действия для так называемых обобщенных течений (которые являются аналогом полугруппы полиморфизмов), т. е. переход от классического движения жидкости к обобщенным решениям уравнения Эйлера (см. [Bre1, Shn5]).

§ 3. Устойчивость стационарных точек на алгебрах Ли

Для изучения устойчивости стационарных течений жидкости в следующем параграфе мы сначала выведем критерий устойчивости для уравнения Эйлера на произвольной алгебре Ли.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Точка x_0, в которой $f(x_0) = 0$, называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ для всех $t > 0$ как только $|x(0) - x_0| < \delta$.

Предположим, что задано также слоение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка x_0 называется *регулярной* точкой слоения, если разбиение окрестности x_0 на слои слоения диффеоморфно разбиению евклидова пространства на параллельные плоскости (в частности, все слои вблизи точки x_0 имеют одинаковую размерность).

Пример 3.2. Для алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ орбиты образуют разбиение трехмерного пространства $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ на сферы с центром в точке 0 и саму точку 0. Тогда все точки пространства $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат являются регулярными точками разбиения на орбиты.

Допустим теперь, что слоение инвариантно относительно системы (3.1) и E — первый интеграл этой системы, причем:

1) x_0 — критическая точка сужения E на слой, содержащий x_0;

2) x_0 — регулярная точка слоения;

3) второй дифференциал сужения E на слой, содержащий x_0, есть невырожденная квадратичная форма.

Следующее утверждение является, по существу, переформулировкой теоремы Лагранжа.

Теорема 3.3. *Точка x_0, удовлетворяющая условиям* 1)-3), *является стационарной точкой системы* (3.1). *Если, кроме того, второй дифференциал сужения E на слой, содержащий x_0, положительно или отрицательно определен, то точка x_0 устойчива (по Ляпунову).*

Доказательство. Если y — такая координата на слое, что $y(x_0) = 0$, то сужение функции E на слой можно представить в виде $E(y) = E_0 + \frac{1}{2}(E_2 y, y) + \mathcal{O}(y^3)$ при $y \to 0$, где E_2 — симметрическая матрица: $(E_2 y, z) = (y, E_2 z)$. Поэтому производная по времени вдоль траекторий нашей системы равна

$$\dot{E} = (E_2 y, \dot{y}) + \mathcal{O}(y^2)\dot{y} \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

Если $\dot{y} \neq 0$ в начале координат $y = 0$, то точку y можно выбрать сколь угодно близко к началу координат так, что $(E_2 y, \dot{y}) \neq 0$. Последнее соотношение противоречит инвариантности E. Поэтому $\dot{y} = 0$, и x_0 — стационарная точка.

Регулярность слоев около x_0 означает, что на каждом соседнем слое вблизи x_0 существует точка, которая является условным максимумом или минимумом E. Часть утверждения, касающаяся устойчивости, очевидна (Лагранж, Дирихле и др.): знакоопределенность E означает, что на каждом слое вблизи x_0 E-уровни образуют семейство эллипсоидальных гиперповерхностей. Каждая траектория системы (3.1), начинающаяся внутри такого эллипсоида, не выходит из него вследствие инвариантности E и расслоения (см. рис. 14). □

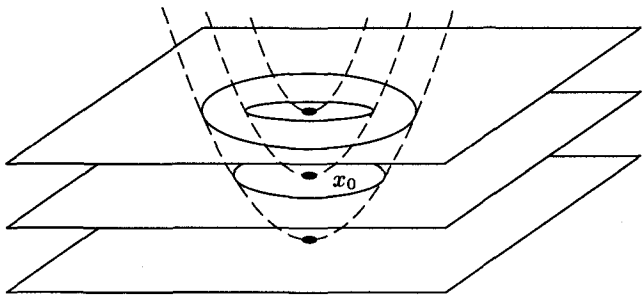


Рис. 14. Траектории, заключенные в эллипсоидальные пересечения слоев расслоения (горизонтальные плоскости) и уровней энергии (параболоиды) остаются вблизи стационарной точки

Пусть ν — стационарная точка уравнения Эйлера на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. гл. I). Пространство $\mathfrak{g}$ расслаивается на образы коприсоединенных орбит в алгебре, и мы будем считать, что ν — регулярная точка расслоения.

Теорема 3.4 (см. [Arn4, Arn16]). *Второй дифференциал сужения кинетической энергии на образ орбиты коприсоединенного представления алгеб-*

ры $\mathfrak{g}$ в критической точке $\nu \in \mathfrak{g}$ вычисляется по формуле

$$2\delta^2 E|_\nu(\xi) = \langle B(\nu, f), B(\nu, f)\rangle + \langle [f, \nu], B(\nu, f)\rangle, \tag{3.2}$$

где ξ — касательный вектор к этому образу, выражаемый через элемент алгебры $f \in \mathfrak{g}$ по формуле $\xi = B(\nu, f)$, а $B(\,.\,,\,.\,)$ — операция на $\mathfrak{g}$, определенная в теореме 4.9 (*гл.* I, *формула* (4.3)).

Следствие 3.5. *Если вышеупомянутая квадратичная форма положительно или отрицательно определена, то стационарная точка ν является устойчивым решением уравнения Эйлера.*

Пример 3.6. В случае твердого тела ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$) коприсоединенные орбиты суть сферы с центрами в нуле, а уровни кинетической энергии образуют семейство эллипсоидов. Сужение энергии на каждую орбиту имеет шесть критических точек (которые являются точками касания сферы и эллипсоидов): два максимума, два минимума и две седловых точки (см. рис. 15). Максимумы и минимумы соответствуют устойчивым вращениям твердого тела вокруг минимальной и максимальной осей эллипсоида инерции. Седловые точки отвечают неустойчивым вращениям вокруг его средней оси.

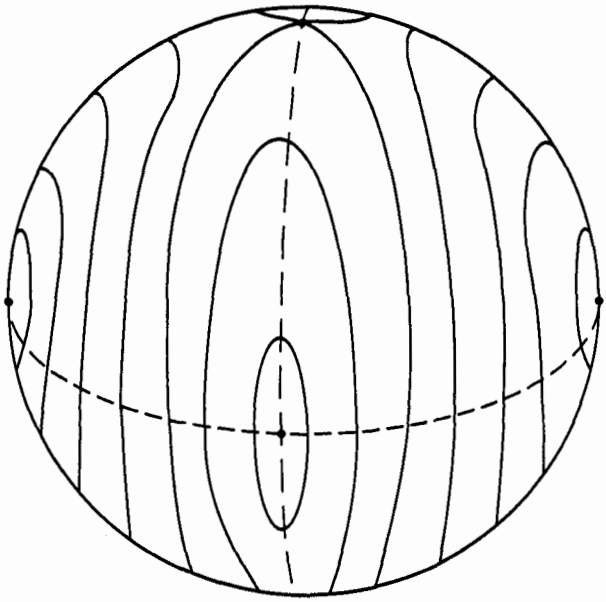


Рис. 15. Уровни энергии на коприсоединенной орбите алгебры Ли $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ твердого тела

Подчеркнем, что мы обсуждаем не устойчивость «в линейном приближении», а настоящую устойчивость по Ляпунову (т. е. устойчивость относительно конечных возмущений в нелинейной задаче). В данном случае разница между этими двумя формами устойчивости существенна, поскольку наша задача

является гамильтоновой. Для гамильтоновых систем асимптотическая устойчивость невозможна, поэтому устойчивость в линейном приближении всегда нейтральна и не определяет устойчивость положения равновесия нелинейной задачи.

Замечание 3.7. Вообще говоря, знаконеопределенная квадратичная форма $\delta^2 E$ не означает неустойчивости соответствующей точки. Положение равновесия гамильтоновой системы может быть устойчивым, даже если гамильтониан не имеет в этом положении ни максимума, ни минимума. Квадратичный гамильтониан

$$E = \omega_1 \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} - \omega_2 \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}$$

является простейшим примером такого рода. Отметим, что поведение соответствующих собственных значений при включении малой вязкости оказывается различным: $\pm i\omega_1$ движутся в левую (устойчивую) гиперплоскость, в то время как $\pm i\omega_2$ сдвигаются в правую (неустойчивую).

Доказательство теоремы 3.4. Действие элемента $\varepsilon f \in \mathfrak{g}$ на точку ν определяется рядом Тейлора для движения вдоль коприсоединенной орбиты (ср. с формулой (2.1))

$$\nu \mapsto \overline{\nu} = \nu + \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2}{2}\zeta + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\xi = B(\nu, f)$, $\zeta = B(B(\nu, f), f)$. Подставим $\overline{\nu}$ в выражение для энергии $E(\overline{\nu}) = \frac{1}{2}\langle \overline{\nu}, \overline{\nu} \rangle$:

$$E(\overline{\nu}) = E(\nu) + \varepsilon \cdot \delta E + \varepsilon^2 \cdot \delta^2 E + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\delta E = \langle \nu, \xi \rangle$ и $2\delta^2 E = \langle \xi, \xi \rangle + \langle \nu, \zeta \rangle$.

Первая вариация энергии обращается в нуль

$$\delta E = \langle \nu, B(\nu, f) \rangle = -\langle B(\nu, \nu), f \rangle = 0,$$

так как ν стационарна, и, следовательно, $B(\nu, \nu) = 0$.

Требуемое выражение (3.2) для $\delta^2 E$ получается из тождества

$$\langle \nu, B(B(\nu, f), f) \rangle = \langle [f, \nu], B(\nu, f) \rangle.$$

Покажем теперь, что квадратичная форма $\delta^2 E$ зависит от $\xi = B(\nu, f)$, а не от самой f, так что она действительно является формой на касательном пространстве к образу коприсоединенной орбиты в $\mathfrak{g}$.

Проверим сначала, что вспомогательная билинейная форма $C(x, y) := \langle [x, \nu], B(\nu, y) \rangle$ симметрична: $C(x, y) = C(y, x)$. Из определения оператора B, тождества Якоби в $\mathfrak{g}$ и условия стационарности $B(\nu, \nu) = 0$ нетрудно вывести

$$\begin{aligned}\langle [x, \nu], B(\nu, y) \rangle = \langle B(\nu, [\nu, x]), y \rangle = \langle [[\nu, x], y], \nu \rangle = \langle [\nu, [x, y]], \nu \rangle + \langle [x, [y, \nu]], \nu \rangle = \\ = \langle B(\nu, \nu), [x, y] \rangle + \langle B(\nu, x), [y, \nu] \rangle = \langle [y, \nu], B(\nu, x) \rangle.\end{aligned}$$

Наконец, предположим, что $B(\nu, f_1) = B(\nu, f_2)$, и покажем, что соответствующие значения $\delta^2 E$ совпадают. Положим $x = f_1 - f_2$, $y = f_1$ и заметим, что $B(\nu, x) = 0$. Учитывая выражение (3.2) для $\delta^2 E$, а также симметричность $C(x, y)$, получим требуемое тождество:

$$2(\delta^2 E(f_1) - \delta^2 E(f_2)) = \langle [x, \nu], B(\nu, y)\rangle = \langle [y, \nu], B(\nu, x)\rangle = 0.$$

Таким образом, квадратичная форма $\delta^2 E$ действительно зависит лишь от $\xi = B(\nu, f)$, и тем самым теорема 3.4 доказана. □

Замечание 3.8. Для уравнения Эйлера на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ рассмотрим *уравнение в вариациях* в стационарной точке ν

$$\dot{\xi} = B(\nu, \xi) + B(\xi, \nu). \tag{3.3}$$

Предложение 3.9. *Квадратичная форма $d^2 E$ есть первый интеграл уравнения в вариациях* (3.3).

Доказательство. Этот факт можно проверить следующими непосредственными выкладками. Из (3.2) следует, что

$$\frac{d}{dt}\delta^2 E = \langle \xi, \dot{\xi}\rangle + \langle [f, \nu], \dot{\xi}\rangle.$$

Поэтому подстановка $\dot{\xi}$ из уравнения в вариациях (3.3) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta^2 E &= \langle \xi, B(\nu, \xi)\rangle + \langle \xi, B(\xi, \nu)\rangle + \langle [f, \nu], B(\nu, \xi)\rangle + \langle [f, \nu], B(\xi, \nu)\rangle = \\ &= \langle \xi, B(\xi, \nu)\rangle + \langle [\xi, \nu], \xi\rangle + \langle [\nu, [f, \nu]], \xi\rangle = \\ &= \langle [\nu, [f, \nu]], B(\nu, f)\rangle = -\langle [f, \nu], B(\nu, [f, \nu])\rangle = 0. \quad \square\end{aligned}$$

§ 4. Устойчивость двумерных течений жидкости

Аналогия между уравнениями движения твердого тела и несжимаемой жидкости позволяет изучать устойчивость стационарных течений путем рассмотрения критических точек функции энергии на множествах изозавихренных векторных полей (т. е. на коприсоединенных орбитах группы диффеоморфизмов).

Этот подход был развит в работе [Arn4]. Отметим также предшествующую работу Фьортофта [Fj] и дальнейшие приложения в [HMRW], где приводится ряд примеров, демонстрирующих продуктивность метода для различных динамических систем. В этом параграфе мы остановимся выборочно на нескольких фактах.

Как было отмечено в § 3, при вариационном подходе к изучению стационарных решений уравнения Эйлера несжимаемой жидкости предполагалось, что:

1) стационарное течение жидкости отличается от остальных изозавихренных полей тем, что это (условная) критическая точка кинетической энергии;

2) если указанная критическая точка действительно является экстремумом, т. е. локальным условным максимумом или минимумом, и этот экстремум невырожден (второй дифференциал d^2E положительно или отрицательно определен), то (при выполнении некоторых условий регулярности) стационарное течение устойчиво по Ляпунову.

Хотя эти утверждения формально не вытекают из теорем § 3 вследствие бесконечномерности ситуации, окончательное заключение относительно устойчивости можно проверить, не проводя промежуточных выкладок.

4.1. Критерии устойчивости для стационарных течений

Пусть M — двумерная область, например кольцо, со стационарным течением в ней (рис. 16). Ниже мы покажем, в частности, что стационарное течение в M устойчиво, если его функция тока ψ удовлетворяет следующим условиям на профиль скоростей:

$$0 < c \leqslant \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C < \infty \tag{4.1}$$

при некоторых постоянных c и C.

Для произвольного стационарного двумерного течения градиенты функции тока и ее лапласиана коллинеарны. Поэтому имеет смысл отношение $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$. Далее, в окрестности каждой точки, не являющейся критической для функции вихря $\Delta\psi$, функция тока ψ может быть представлена как функция от значения вихря.

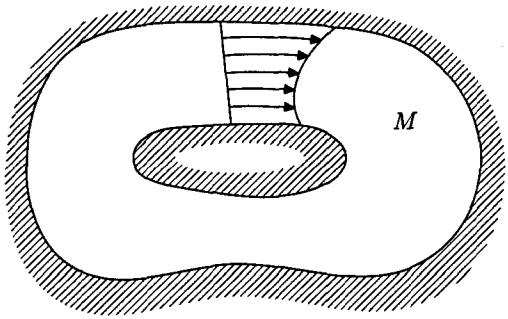


Рис. 16. Профиль устойчивого стационарного течения в кольце

Изучение двумерного случая начнем с вывода следующей явной формулы для второй вариации энергии.

Теорема 4.1 (см. [Arn6, Arn16]). *Вторая вариация энергии E на множестве полей, изозавихренных с данным стационарным полем v с функцией тока ψ, равна*

$$\delta^2 E|_v = \frac{1}{2}\iint\limits_M \left((\delta v)^2 + \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}(\delta\omega)^2\right) dx\,dy,$$

где δv — вариация поля скоростей, $\delta\omega$ — соответствующая вариация функции вихря $\omega = \operatorname{rot} v = \Delta\psi$, а $dx\,dy$ — элемент площади на M.

Замечание 4.2. Условие (4.1), которое налагается на отношение $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ означает, что квадратичная форма $\delta^2 E$ от δv положительно определена.

В случае, когда отношение $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ отрицательно и удовлетворяет условию

$$0 < c \leqslant -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C < \infty,$$

форма $\delta^2 E$ отрицательно определена, если неравенство

$$\|\nabla\varphi\|^2_{L^2} \leqslant \alpha\|\Delta\varphi\|^2_{L^2}$$

справедливо для всех $\varphi \in C^2(M)$ при $0 < \alpha < c$. Последнее неравенство есть, по сути, оценка ближайшего к нулю собственного значения оператора Лапласа в области M и зависит от формы и размера области.

Доказательство. Из формулы (3.2) для второй вариации энергии $E = \frac{1}{2}\iint\limits_M (v, v)\,dx\,dy$ следует, что

$$2\delta^2 E = \iint\limits_M ((\delta v)^2 + (\delta v, [f, v]))\,dx\,dy, \tag{4.2}$$

где $\delta v = B(v, f)$.

Интегрируя второй член по частям, получаем

$$\iint\limits_M (\delta v, [f, v])\,dx\,dy = \iint\limits_M (\delta v, \operatorname{rot}(f \times v))\,dx\,dy = \iint\limits_M (\delta\omega)(f \times v)\,dx\,dy, \tag{4.3}$$

с естественным обозначением $f \times v$ для функции на M, значение которой в каждой точке равно площади ориентированного параллелограмма, натянутого на f и v, и где $\operatorname{rot}(f \times v) = \operatorname{sgrad}(f \times v)$. Из формулы $v = \operatorname{sgrad}\psi = (-\psi_y, \psi_x)$ получаем, что

$$f \times v = f \times (\operatorname{sgrad}\psi) = (f, \nabla\psi).$$

С другой стороны, для $\omega = \Delta\psi$ вариация $\delta\omega$ есть производная ω вдоль поля f:

$$\delta\omega = L_f\omega = (f, \nabla\Delta\psi).$$

Сравнивая две предыдущие формулы, получаем

$$f \times v = \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}\delta\omega,$$

откуда с учетом (4.2)–(4.3) и следует утверждение теоремы. □

Приведенное выше эвристическое рассмотрение устойчивости, основанное на знакоопределенности второго дифференциала кинетической энергии $\delta^2 E$, можно обосновать и получить критерий настоящей устойчивости со следующими априорными оценками.

Теорема 4.3 (теорема устойчивости, [Arn6, Arn16]). *Предположим, что функция тока стационарного течения $\psi = \psi(x, y)$ в области M является функцией от функции вихря (т. е. функции $\Delta\psi$) не только локально, но и в целом. Пусть производная функции тока по вихрю удовлетворяет неравенству*

$$c \leqslant \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C, \quad \text{где } 0 < c \leqslant C < \infty.$$

Пусть $\psi + \varphi(x, y, t)$ — функция тока другого течения, не обязательно стационарного. Предположим, что в начальный момент циркуляция поля скоростей возмущенного течения (с функцией тока $\psi + \varphi$) вокруг каждой компоненты границы области M равна циркуляции исходного течения (с функцией тока ψ). Тогда возмущение $\varphi = \varphi(x, y, t)$ в каждый момент времени оценивается через начальное возмущение $\varphi_0 = \varphi(x, y, 0)$ по формуле

$$\iint\limits_M ((\nabla\varphi)^2 + c(\Delta\varphi)^2)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_M ((\nabla\varphi_0)^2 + C(\Delta\varphi_0)^2)\, dx\, dy.$$

Теорема 4.3′ (вторая теорема устойчивости, [Arn6, Arn16]). *Если стационарное течение удовлетворяет условию*

$$c \leqslant -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C, \quad \text{где } 0 < c \leqslant C < \infty$$

(а также другим предположениям предыдущей теоремы), то возмущение φ оценивается через φ_0 по формуле

$$\iint\limits_M (c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_M (C(\Delta\varphi_0)^2 - (\nabla\varphi_0)^2)\, dx\, dy. \tag{4.4}$$

Замечание 4.4. Если для некоторого α $(0 < \alpha < c)$ неравенство $\|\nabla\varphi\|^2_{L^2} \leqslant \alpha\|\Delta\varphi\|^2_{L^2}$ справедливо для всех $\varphi \in C^2(M)$, то квадратичная форма $\iint\limits_M c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2)\, dx\, dy$ положительно определена:

$$\iint\limits_M (c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2)\, dx\, dy \geqslant (c - \alpha) \iint\limits_M (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy.$$

Поэтому из (4.4) следует, что

$$\iint\limits_M (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy \leqslant \frac{C}{c - \alpha} \iint\limits_M (\Delta\varphi_0)^2\, dx\, dy,$$

что и означает устойчивость стационарного течения ψ.

Эвристическая идея, лежащая в основе доказательства теоремы устойчивости, такова. Подходящий первый интеграл $H(\varphi)$, имеющий невырожденный минимум или максимум в стационарной точке ψ, можно считать квадратом «нормы» (полагая $H(\psi) = 0$). Это позволяет оценить траекторию φ_t по норме, которая является положительной в проколотой окрестности точки ψ на множестве изозавихренных полей.

Пример 4.5. Рассмотрим круговое движение с функцией тока $\psi = \psi(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, в кольце $M = \{R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2\}$. Переходя к выражению для лапласиана в полярных координатах, получаем следующее достаточное условие устойчивости: если отношение $\psi' / \left(\psi'' + \frac{1}{\rho}\psi'\right)'$ не меняет знак при $\rho \in [R_1, R_2]$, то течение устойчиво (см. [Arn16]).

Пример 4.6. Рассмотрим плоскопараллельное течение в полосе $0 \leqslant y \leqslant \leqslant 2\pi$ в плоскости (x, y) с профилем скоростей $v(y)$ (т. е. с полем скоростей $(v(y), 0)$, рис. 17). Такое течение стационарно для каждого профиля скоростей.

Форма $\delta^2 E$ положительно или отрицательно определена, если профиль скоростей не имеет нулей и точек перегиба (т. е. $v \neq 0$ и $v_{yy} \neq 0$). Утверждение об устойчивости плоскопараллельного течения, если профиль скоростей не имеет точек перегиба, есть нелинейный аналог так называемой теоремы Рэлея. Профили, для которых отношение v/v_{yy} строго положительно или строго отрицательно, изображены, соответственно, на рис. 17, *a* и 17, *b*.

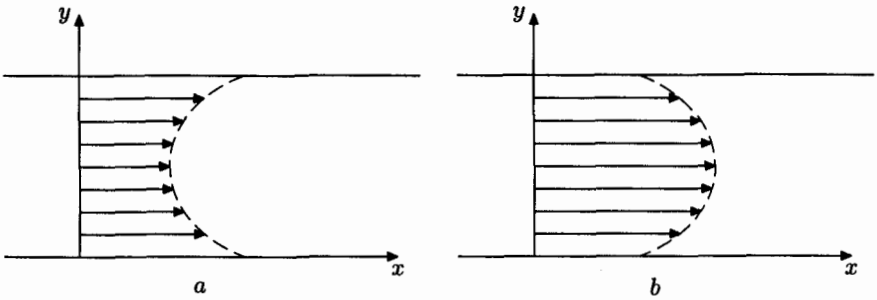


Рис. 17. Устойчивое по Ляпунову течение жидкости в полосе. Профили с отношением (*a*) $v/v_{yy} > 0$ и (*b*) $v/v_{yy} < 0$

Чтобы обеспечить компактность области течения, мы наложим условие периодичности $x \pmod X$ вдоль координаты x и получим тор

$$\{(x, y) \colon x \bmod X, y \bmod 2\pi\}.$$

Зафиксируем поле скоростей $v = (\sin y, 0)$, определяемое функцией тока $\psi = -\cos y$. Его ротор $\omega = -\cos y$. Хотя профиль скоростей имеет две точки перегиба, функцию тока можно записать как функцию ротора. Отношение $\nabla\psi / \nabla\Delta\psi$ равно минус единице. Применяя вторую теорему устойчивости, убеждаемся в устойчивости нашего стационарного течения в том случае, когда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^X (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy \geqslant \int_0^{2\pi}\int_0^X (\nabla\varphi)^2\, dx\, dy$$

для всех функций φ с периодами X по x и 2π по y. Несложно показать, что последнее неравенство выполняется при $X \leqslant 2\pi$ и нарушается при $X > 2\pi$.

Таким образом, из второй теоремы устойчивости следует устойчивость синусоидального стационарного течения на коротком торе, когда период в направлении основного течения (X) меньше ширины потока (2π). С другой стороны, можно непосредственно убедиться в том, что на длинном торе (при $X > 2\pi$) данное синусоидальное течение неустойчиво [MSi]. Поэтому в рассматриваемом примере достаточное условие устойчивости, получаемое из второй теоремы устойчивости, оказывается также необходимым.

Устойчивость некоторых плоскопараллельных течений и двумерных сферических течений рассматривалась в [Dik].

Доказательство теоремы устойчивости. Пусть функция тока ψ и функция вихря $\omega = \Delta\psi$ связаны соотношением $\psi = \Psi(\Delta\psi)$, и обозначим через $\Phi(\tau) := \int^{\tau} \Psi(\theta)\, d\theta$ первообразную функции $\Psi(\theta)$. Тогда вторая производная Φ'', вычисленная на функции $\Delta\psi$, равна $\Phi''(\Delta\psi) = \nabla\psi/\nabla\Delta\psi$, и поэтому для τ, меняющегося в пределах $\min\Delta\psi \leqslant \tau \leqslant \max\Delta\psi$, мы имеем

$$c \leqslant \Phi''(\tau) \leqslant C. \tag{4.5}$$

Доопределим определение $\Phi(\tau)$ на всей оси τ так, чтобы это неравенство было по-прежнему выполнено, и будем в дальнейшем обозначать через Φ функцию, расширенную таким образом. Составим функционал

$$H_2(\varphi) = \iint\limits_M \Big(\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + [\Phi(\Delta\psi + \Delta\varphi) - \Phi(\Delta\psi) - \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi]\Big)\, dx\, dy.$$

Лемма 4.7. *Функционал H_2 является первым интегралом уравнения Эйлера:*

$$H_2(\varphi(x,y,t)) \equiv H_2(\varphi(x,y,0))$$

для функции тока $\varphi(x,y,t)$ поля скоростей, удовлетворяющего уравнению Эйлера.

Доказательство леммы. Рассмотрим функционал

$$H(u) = \iint\limits_M \Big(\frac{(\nabla u)^2}{2} + \Phi(\Delta u)\Big)\, dx\, dy.$$

Он постоянен вдоль любого решения уравнения Эйлера вследствие законов сохранения энергии и вихря. Поэтому функционал $\widehat{H}(\varphi) := H(\psi + \varphi) - H(\psi)$ также сохраняется для данного стационарного течения ψ:

$$\widehat{H}(\varphi(x,y,t)) \equiv \widehat{H}(\varphi(x,y,0)). \tag{4.6}$$

Разложим $\widehat{H}(\varphi)$ в сумму $\widehat{H}(\varphi) = H_1(\varphi) + H_2(\varphi)$, где

$$H_1(\varphi) = \iint\limits_M ((\nabla\varphi, \nabla\psi) + \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi)\, dx\, dy,$$

$$H_2(\varphi) = \iint\limits_M \Big(\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + [\Phi(\Delta\psi + \Delta\varphi) - \Phi(\Delta\psi) - \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi]\Big)\, dx\, dy.$$

Член $H_1(\varphi)$ равен нулю как первая вариация инвариантного функционала $H(u)$ на стационарном течении ψ. Действительно, после интегрирования по частям получим

$$H_1(\varphi) = \iint\limits_M (-\psi\Delta\varphi + \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi)\, dx\, dy + \oint\limits_{\partial M} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\ell.$$

Напомним, что $\Phi' = \Psi$ и $\Psi(\Delta\psi) = \psi$. Кроме того, по сделанному предположению функция тока ψ постоянна на компонентах Γ_i края $\partial M = \bigcup\limits_i^n \Gamma_i$, и возмущенные поля имеют одинаковую циркуляцию вокруг каждой граничной компоненты: $\oint\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\ell = 0$. Поэтому $H_1(\varphi) \equiv 0$. Следовательно, $\widehat{H}(\varphi) = H_2(\varphi)$, и, согласно (4.6), функционал $H_2(\varphi)$ не меняется. Этим завершается доказательство леммы 4.7. □

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что из (4.5) следует, что для любого h справедливо

$$c\frac{h^2}{2} \leqslant \Phi(\tau + h) - \Phi(\tau) - \Phi'(\tau)h \leqslant C\frac{h^2}{2}.$$

Поэтому

$$H_2(\varphi(t)) \geqslant \iint\limits_M \left(\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + c\frac{(\Delta\varphi)^2}{2}\right) dx\, dy,$$

$$H_2(\varphi(0)) \leqslant \iint\limits_M \left(\frac{(\nabla\varphi_0)^2}{2} + C\frac{(\Delta\varphi_0)^2}{2}\right) dx\, dy.$$

Эти неравенства в сочетании с инвариантностью $H_2(\varphi)$ завершают доказательство теоремы устойчивости. □

Мы оставляем читателю самостоятельно закончить доказательство теоремы устойчивости для случая отрицательного отношения (вторая теорема устойчивости)

$$c \leqslant -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C, \quad 0 < c \leqslant C < \infty.$$

Замечание 4.8 (см. [M-P]). Отметим, что условие $0 < c \leqslant \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C$ не может выполняться в областях, не имеющих границы. Действительно, из существования функции Ψ, удовлетворяющей условию $0 < c \leqslant \Psi'(\tau) \leqslant C$, и такой, что $\psi = \Psi(\Delta\psi)$, следует существование обратной функции F, для которой $\Delta\psi = F(\psi)$, и кроме того, $0 < c' \leqslant F'(\psi) \leqslant C'$.

С другой стороны, из равенства $\Delta\psi = F(\psi)$ получаем $\partial_{x_1}\Delta\psi = F'(\psi)\partial_{x_1}\psi$, а значит,

$$\iint\limits_M \partial_{x_1}\psi(\Delta\partial_{x_1}\psi)\, dx\, dy = \iint\limits_M F'(\psi)(\partial_{x_1}\psi)^2\, dx\, dy.$$

Интегрируя по частям, приходим к следующему соотношению:

$$\int\limits_{\partial M} \partial_{x_1}\psi \frac{\partial(\partial_{x_1}\psi)}{\partial n}\, d\ell - \iint\limits_{M} (\nabla\partial_{x_1}\psi)^2\, dx\, dy = \iint\limits_{M} F'(\psi)(\partial_{x_1}\psi)^2\, dx\, dy.$$

Отсюда видно, что отсутствие граничного члена приводит к противоречию: левая и правая части равенства имеют разные знаки, если ψ не константа (в тривиальном случае, когда $\partial_{x_1}\psi \equiv 0$, ∂_{x_1} надо заменить на ∂_{x_2}). В частности, это исключает из рассмотрения неограниченные области без границ (как, например, $M = \mathbb{R}^2$, играющую важную роль при моделировании в метеорологии и океанографии) при применении теоремы устойчивости. Чтобы преодолеть эту сложность, можно использовать симметрию областей наряду с описанным выше критерием устойчивости.

Теорема 4.9 (см. [M-P]). *В предположениях теоремы устойчивости* 4.3 *стационарное течение устойчиво, если условие*

$$c \leqslant \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leqslant C$$

выполнено лишь для $c \geqslant 0$.

Доказательство основано на использовании семейства функций Ляпунова $H^\varepsilon(\varphi)$, для которых первая вариация на стационарном течении ψ равна $H_1^\varepsilon(\varphi) = \varepsilon \iint (\nabla\varphi, \nabla\Delta\psi)\, dx\, dy$.

Замечание 4.10. Оказывается, критерий устойчивости стационарных течений, основанный на второй вариации, не дает результатов, когда размерность больше двух: вторая вариация кинетической энергии в этом случае никогда не является знакоопределенной (см. п. 5.7).

Инварианты изозавихренных полей (т. е. функции Казимира группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов) играют роль множителей Лагранжа при изучении условного экстремума. В обзоре [HMRW] читатель сможет найти исследование устойчивости ряда физически интересных бесконечномерных систем путем комбинирования функции энергии с функциями Казимира. Различные модификации и обобщения метода *Рута* (называемого также методом *энергии Казимира*) можно найти, например, в [MaR, MaS, Vla1, Vla2, W-G].

Замечание 4.11. (Дж. Марсден.) Краткий путеводитель по методу энергии-момента. (Более полный обзор литературы, см. страницу Интернета http://www.cds.caltech.edu/.marsden/.)

Метод энергии-момента (ЭМ) расширяет метод Арнольда (или энергии Казимира), который был развит для систем Ли–Пуассона на сопряженных пространствах к алгебрам Ли (особенно связанных с гидродинамикой). Он имеет три достоинства.

Во-первых, он применим к системам Ли–Пуассона, не обладающим достаточным количеством функций Казимира. Такие системы включают в себя уравнения трехмерного течения идеальной жидкости, а также ряд задач в теории упругости. В работе [A-H] используется ЭМ метод, чтобы доказать формальную неустойчивость равновесия для трехмерной идеальной жидкости, ввиду растяжения поля вихря. Другие модели жидкости и плазмы, такие

как ABC-потоки, а также течения с несколькими максимумами в динамике плазмы, тоже приводят к системам Ли-Пуассона.

Второе преимущество — применимость метода к системам, не обязательно являющимся системами Ли–Пуассона. Твердые тела с упругими антеннами (см. [KrM]) доставляют примеры таких систем. Наконец, метод дает более точные выводы об устойчивости (например, устойчивость по модулю *подгруппы* группы симметрий), а также проясняет связи с геометрическими фазами (фазами Бэрри), см. [Pat, MMR]. Это преимущество заметно уже в задачах динамики твердого тела.

Метод энергии-момента применяется к механическим системам с симметрией в следующей ситуации. Пусть Q — конфигурационное пространство, T^*Q — фазовое пространство с действующей на нем группой симметрий G и стандартным отображением момента $\boldsymbol{J}\colon T^*Q \mapsto \mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное пространство к алгебре Ли группы G. Случай Ли–Пуассона отвечает ситуации, когда $Q = G$.

Рассмотрим сначала задачу на всем пространстве T^*Q. Здесь относительными равновесиями, связанными с элементом ξ алгебры Ли, служат критические точки *расширенного гамильтониана* $H_\xi = H - \langle \boldsymbol{J}, \xi \rangle$. Вычислим теперь вторую вариацию $\delta^2 H_\xi(z_e)$ в точке относительного равновесия z_e с величиной момента μ_e, при ограничении $\boldsymbol{J} = \mu_e$ и взятую на пространстве, трансверсальном действию G_{μ_e}. Хотя расширенный гамильтониан и играет роль функции E + *Казимир* в методе Арнольда, сами функции Казимира в явной форме не нужны.

Подходящее разложение, использующее механическую связность, позволяет записать вторую вариацию $\delta^2 H_\xi(z_e)$ в блочно-диагональной форме. В *этих же* координатах симплектическая структура имеет простую блочную структуру, и таким образом, линеаризованные уравнения также имеют каноническую форму. Даже в постановке Ли–Пуассона удается упростить выражения для второй вариации. Именно эта блочно-диагональная структура придает методу вычислительную силу. Изложение теории ЭМ-метода можно найти в [Mas, SPM, SLM] (см. также изложение в [Mar]). Лагранжева версия имеется в работе [Lew].

Существуют также обратные результаты, основанные на классических работах Томпсона и Тэйта, Четаева и других. Оказывается, что если имеется седловая точка для $\delta^2 H_\xi(z_e)$, то добавление диссипации дестабилизирует относительное равновесие по линейному приближению (а следовательно, и нелинейно) см. [BKMR].

Метод энергии-момента оказался эффективным во многих конкретных случаях. Например, в работе [LeS] рассмотрена задача движения псевдотвердых тел, которая ранее считалась аналитически трудно разрешимой. Динамика тяжелого волчка изложена в [LRSM], приложения к динамике подводных аппаратов см. [LMa], и для ABC-течений см. [CMa]. Этот метод был также использован в контексте свободной границы и гамильтоновых бифуркаций [LMMR, LMR]. Наконец, метод также был распространен на неголономные системы (системы со связями типа качения), см. [ZBM].

4.2. Блуждающие решения уравнения Эйлера

Теорема Пуанкаре о возвращении утверждает, что при итерациях любого сохраняющего объемы непрерывного отображения ограниченной области на себя почти все движущиеся точки многократно возвращаются в окрестность своего начального положения.

В частности, фазовый поток уравнения Эйлера на любой *конечномерной* алгебре Ли обладает этим свойством. Действительно, поверхности уровня кинетической энергии (т. е. положительно определенной квадратичной формы) E компактны. Каждая траектория уравнения Эйлера принадлежит пересечению некоторого энергетического уровня с определенной коприсоединенной орбитой алгебры Ли.

Предложение 4.12. *На пересечениях произвольной коприсоединенной орбиты с некритическими уровнями энергии можно ввести естественным образом объем, инвариантный относительно уравнения Эйлера.*

Доказательство. Если ω — симплектическая структура на $2m$-мерной коприсоединенной орбите $\mathcal{O}$, то симплектический объем $\mu = \omega^m$ сохраняется для любого гамильтонова потока на орбите. Поток с гамильтоновой функцией E сохраняет дифференциальную $(2m-1)$-форму $\mu_E := \omega^m/dE$ на пересечениях орбиты $\mathcal{O}$ с E-уровнями. □

Эти пересечения орбит и уровней энергии компактны вследствие положительной определенности формы E.

Следствие 4.13. *В конечномерном случае применима теорема Пуанкаре о возвращении: почти все траектории уравнения Эйлера со временем возвращаются в окрестность исходной точки.*

Замечание 4.14. Уравнение Эйлера с невырожденным оператором инерции имеет инвариантную C^1-меру на всем сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли (а не только на коприсоединенных орбитах $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ группы) тогда и только тогда, когда группа G *унимодулярна*, т. е. операторы ad_η имеют нулевые следы для всех $\eta \in \mathfrak{g}$ [Ko2].

Тем не менее, уравнение Эйлера идеальной жидкости не обладает свойством возвращения: переход к бесконечномерному случаю не безобиден (см. [Shn6], где рассмотрены и другие специфические особенности динамики двумерной жидкости). Возьмем, например, кольцевую область

$$M = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2 \colon x \in \mathbb{R}^2\}$$

и рассмотрим пространство $\mathcal{V}$ бездивергентных C^1-гладких векторных полей в M, касательных к краю $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, см. рис. 18.

Теорема 4.15 (см. [Nad]). *Существует гладкое бездивергентное векторное поле ξ на M (касательное к краю ∂M) такое, что для любого начального условия, близкого к ξ по C^1-норме, соответствующее решение уравнения Эйлера в M не возвращается в окрестность точки ξ после определенного момента времени (т. е. существуют такие $\varepsilon, T > 0$, что для любого начального условия $v(0) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющего $\|v(0) - \xi\|_{C^1} < \varepsilon$, соответствующее решение $v(t)$ удовлетворяет неравенству $\|v(t) - \xi\|_{C^1} > \varepsilon$ при всех $t > T$).*

Доказательство. Рассмотрим стационарное течение v^* с функцией тока $\ln|x|$: $v^* = \operatorname{sgrad}(\ln|x|)$. Пусть $v^* + h$ — малое в смысле C^1-нормы (бездивергентное) возмущение поля v^*, $\|h\|_{C^1} < \delta$. □

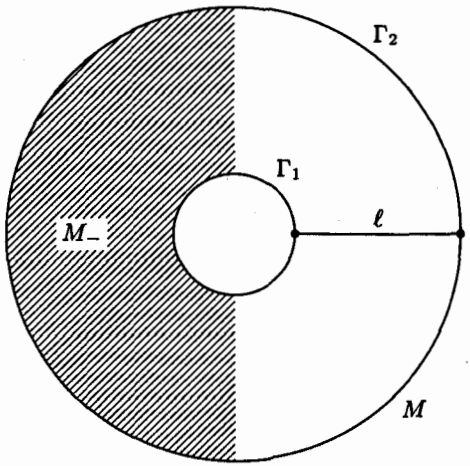


Рис. 18. Выберем гладкое поле на кольце M, которое обращается в нуль на полукольце M_- и ротор которого больше чем $\delta/4$ на отрезке l

Лемма 4.16. *Существует такое $\delta > 0$, что для любого возмущения h, такого что $\|h\|_{C^1} < \delta$, решение $v(t)$ с начальным условием $v(0) = v^* + h$ удовлетворяет неравенству $\|v(t) - v^*\|_{C^0} < 1/4$ для любого $t \geqslant 0$.*

Доказательство леммы. Функция вихря $\operatorname{rot} v(t)$ решения $v(t)$ переносится потоком. То же верно для функции $\operatorname{rot}(v(t) - v^*) = \operatorname{rot} v(t)$, поскольку $\operatorname{rot} v^* \equiv 0$. Следовательно, C^0-норма функции $\operatorname{rot}(v(t) - v^*)$ сохраняется, так же как и циркуляция поля $v(t) - v^*$ вдоль окружностей Γ_1 и Γ_2. Поэтому утверждение леммы есть, по существу, принцип максимума для функции тока $\psi(t)$ поля $v(t)$, которая удовлетворяет уравнению $\Delta\psi(t) = \operatorname{rot}(v(t) - v^*)$.

Обозначим через $M_- = \{x \in M, x_1 < 0\}$ и $\ell = \{x \in M,\ x_2 = 0,\ x_1 > 0\}$, соответственно, полукольцо и отрезок (рис. 18). Возьмем какое-либо гладкое бездивергентное поле u, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\|u\|_{C^1} < \frac{\delta}{2}, \quad u|_{M_-} \equiv 0, \quad \operatorname{rot} u|_\ell > \frac{\delta}{4}.$$

Наконец, положим $\xi = v^* + u$ и заметим, что $\operatorname{rot}\xi|_{M_-} \equiv 0$.

Пусть $v(0) \in \mathcal{V}$ — начальное условие, достаточно близкое к ξ, $\|v(0) - \xi\|_{C^1} < \varepsilon$, а $v(t)$ — соответствующее решение уравнения Эйлера на M. Это решение определяет для любого $t \in \mathbb{R}$ сохраняющий площадь диффеоморфизм g^t кольца M. Окружности Γ_1 и Γ_2 отображаются в себя при действии g^t.

Кроме того, если выбрать $\varepsilon = \delta/4$, то решение $v(t)$ будет достаточно близко к v^*. Согласно лемме линейная скорость каждой точки внутренней окружности Γ_1 больше $3/4$, в то время как скорость каждой точки внешней окружно-

сти Γ_2 меньше $3/8$. Соответствующие угловые скорости больше чем $3/4$ на Γ_1 и меньше чем $3/8$ на Γ_2, соответственно.

Образ $\ell_t := g^t(\ell)$ отрезка ℓ под действием преобразования g^t соединяет точки разных окружностей. Угловые координаты соединенных точек расходятся со скоростью $3/8$, т. е. угол между ними растет как $3t/8$. Следовательно, для $t > 8\pi/3$ кривая ℓ_t обязательно пересекает M_-, т. е. $\ell_t \cap M_- \neq 0$. С другой стороны, $\operatorname{rot} v(t)$ переносится течением g^t, и его сужение на ℓ_t больше, чем $\delta/4 = \varepsilon$. Поэтому для $t > 8\pi/3$ мы имеем $\|\xi - v(t)\|_{C^1} > \varepsilon$. □

§ 5. Линейное и экспоненциальное растяжение частиц и быстро осциллирующие возмущения

В этом параграфе мы будем изучать коротковолновые асимптотики возмущений стационарного движения идеальной жидкости (следуя работе [Arn8]).

5.1. Линеаризованное и укороченное уравнения Эйлера

Определение 5.1. Трехмерное уравнение Эйлера в *вихревой* форме (или форме *Гельмгольца*)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = [v, w], \quad \text{где } w = \operatorname{rot} v,$$

может быть *линеаризовано* в окрестности стационарного течения v:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = [v, s] + [\operatorname{rot}^{-1} s, w]. \tag{5.1}$$

Здесь через $[\,.\,,\,.\,] = -\{\,.\,,\,.\,\}$ обозначена скобка Ли (т. е. величина, равная скобке Пуассона со знаком минус) двух векторных полей, s — возмущение поля ротора: $\operatorname{rot}(v + u) = w + s$, где u — малое возмущение стационарного течения v. Под оператором rot^{-1} понимается восстановление бездивергентного векторного поля по его ротору (и по циркуляциям на компонентах границы, если $\partial M \neq \varnothing$).

Будем изучать поведение решений этого уравнения, линейного по s. Отметим, что первый член в правой части (5.1) — доминирующий по сравнению со вторым линейный оператор, действующий на функции s. Это значит, что величина $[v, s]$ на быстро осциллирующих функциях вида $s = e^{ikx}$ будет содержать более высокие степени волнового числа k, чем те, которые возникают в $[\operatorname{rot}^{-1} s, w]$. Поэтому для поля s с быстро осциллирующим возмущением второй член в (5.1) можно рассматривать как возмущение первого. Таким образом, мы получаем *укороченное уравнение*

$$\frac{\partial s}{\partial t} = [v, s]. \tag{5.2}$$

Если стационарное течение потенциально ($w = 0$), второй член в уравнении (5.1) равен нулю, и в таком случае укороченное уравнение (5.2) совпадает

с линеаризованным уравнением Эйлера (5.1). В соответствии с теорией возмущений [Fad] естественно полагать, что укороченное уравнение определяет непрерывную часть спектра линеаризованного уравнения (5.1).

Из укороченного уравнения (5.2) следует, что вектор s переносится стационарным течением. Если известна геометрия стационарного течения v, это уравнение можно решить явно. Пусть g^t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная полем v. Тогда решение укороченного уравнения выражается через его начальные условия по формуле

$$s(t,x) = g^t_* s(0, g^{-1}(x)), \tag{5.3}$$

где g^t_* — производная отображения g^t.

5.2. Переменные действие-угол

Ниже мы опишем два различных подхода к обоснованию следующего утверждения.

Предложение 5.2. *Для стационарного поля, не являющегося полем Бельтрами (т. е. для стационарного поля, которое не коллинеарно своему ротору ни в какой области), на замкнутом трехмерном многообразии M почти все решения укороченного уравнения являются линейно неустойчивыми.*

Доказательство. Если поля v и w не коллинеарны тождественно ни в какой области, то многообразие без границы распадается на ячейки, в каждой из которых течение и вихревые линии лежат на двумерных торах (см. теоремы 1.2, 1.8 § 1 или [Arn3, Arn4]). Можно ввести угловые координаты $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ вдоль этих торов и «переменную действия» z, нумерующую торы, так что при этом элемент объема определяется как $d\varphi_1\, d\varphi_2\, dz$, а поля v и w выражаются формулами:

$$v(\varphi, z) = v_1(z)\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + v_2(z)\frac{\partial}{\partial\varphi_2}, \quad w(\varphi, z) = w_1(z)\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + w_2(z)\frac{\partial}{\partial\varphi_2}.$$

Эти уравнения интегрируемы в системе координат $(\varphi_1, \varphi_2, z)$. Для компонент поля

$$s(t;\varphi,z) = s_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + s_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + s_3\frac{\partial}{\partial z},$$

используя (5.3), получаем выражения:

$$\begin{aligned} &s_k(t;\varphi,z) = s_k(0;\varphi_0,z) + tv_k'(z)s_3(0;\varphi_0,z), \quad k = 1,2, \\ &s_3(t;\varphi,z) = s_3(0;\varphi_0,z), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\varphi_0 = \varphi - vt$, а штрих означает производную по z. Из формул (5.4) следует, что решения укороченного уравнения (5.2) (при $v' \neq 0$) обычно возрастают линейно по времени. □

Поэтому обычная (экспоненциальная) неустойчивость линеаризованного уравнения Эйлера для течений, не являющихся течениями Бельтрами, может

быть обусловлена только вторым членом в формуле (5.1). Согласно теории возмущений естественно ожидать возникновения конечного числа неустойчивых дискретных собственных значений. Вопрос сохранения (обнаруженной выше) медленной неустойчивости при переходе от укороченного уравнения (5.2) к полному линеаризованному уравнению (5.1) обсуждается ниже в п. 5.4. Другая возможность для экспоненциальной неустойчивости может быть связана с коллинеарностью v и w, когда нельзя ввести переменные действие-угол и геометрия стационарного течения отличается от описанной выше (см. [Hen]). Эта форма неустойчивости изучается в п. 5.5.

Замечание 5.3. Интегрируемое стационарное течение (не являющееся течением Бельтрами) можно считать гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, суженной на трехмерный уровень энергии. Теория КАМ для сохраняющих объем течений на трехмерных многообразиях гарантирует, что при определенных условиях невырожденности все течения, достаточно близкие к интегрируемому, сохраняют много двумерных инвариантных торов (см., например, обзор по теории КАМ гамильтоновых систем [AKN] или [C-S, D-L, B-L], где рассмотрен случай сохранения объема).

Сказанное означает, что для нестационарного решения уравнения Эйлера, достаточно близкого к стационарному полю, не являющемуся полем Бельтрами, поле *ротора* имеет много инвариантных торов. Действительно, это поле ротора решения сохраняет элемент объема и приближает интегрируемое поле ротора стационарного течения. (Вихревая форма уравнения Эйлера более удобна для данного исследования, так как ротор, в отличие от скорости, вморожен в жидкость.) Аналогично, для уравнения Навье–Стокса нестационарные течения, близкие к стационарным течениям Бельтрами, имеют много инвариантных торов.

5.3. Спектр укороченного уравнения

Для более подробного анализа решений уравнения (5.2) (и другой точки зрения на предложение 5.2) разложим поле s в ряд Фурье по переменным φ, используя следующие обозначения. Назовем *волновым вектором* m пару целых чисел m_1 и m_2. Обозначим $m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2$ через (m, φ), число $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ через $|m|$, а пару $n_1 = -m_2$ и $n_2 = m_1$ через n.

Для каждого волнового вектора определим «продольное», «поперечное» и «нормальное» векторные поля:

$$e_m = \frac{m_1}{|m|}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{m_2}{|m|}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}, \quad e_n = -\frac{m_2}{|m|}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{m_1}{|m|}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}, \quad e_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

(При $m = 0$ мы полагаем, например, $e_m = \partial/\partial\varphi_1$ и $e_n = \partial/\partial\varphi_2$.)

Разложение Фурье поля s можно теперь записать в виде

$$s = \sum_m (A_m e_m + B_m e_n + C_m e_z) e^{i(m,\varphi)},$$

где A_m, B_m и C_m суть функции от z.

Легко видеть, что векторные поля e_m, e_n и e_z имеют нулевую дивергенцию по отношению к элементу объема $d\varphi_1\, d\varphi_2\, dz$. Следовательно,

$$\operatorname{div} s = \sum_m (i|m|A_m + \partial_z C_m) e^{i(m,\varphi)} \quad \left(\partial_z := \frac{d}{dz}\right).$$

Поэтому бездивергентные поля определяются условием

$$i|m|A_m + \partial_z C_m = 0,$$

которое должно быть выполнено для всех m.

В силу этого условия множество функций B_m и C_m (при $m = 0$ имеем $C_0 = \mathrm{const}$, но надо еще добавить функцию A_0) можно взять в качестве «координат» в пространстве всех полей. В этой системе координат уравнение (5.2) распадается на ряд треугольных систем:

$$\begin{cases} \dot{B}_m = -i|m|v_m B_m + v_n' C_m, \\ \dot{C}_m = -i|m|v_m C_m, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $v = v_m e_m + v_n e_n$ — поле скоростей стационарного течения (при $m = 0$ добавляется $\dot{A}_0 = v_0' C_0$), штрих и точка означают дифференцирование по z и t, соответственно.

Формула (5.5) опять влечет неэкспоненциальную неустойчивость уравнения (5.2) (и доказывает предложение 5.2). Кроме того, она определяет спектр последнего уравнения: каждому волновому вектору m ставится в соответствие отрезок непрерывного спектра, лежащий на мнимой оси. Соответствующие «частоты» $|m|v_m$ равны всевозможным частотам (m, v) стационарного течения на торах, соответствующих различным значениям координаты z. Кратность каждого отрезка не меньше двух (B- и C-компоненты имеют одинаковые частоты).

5.4. Теорема Сквайра для сдвиговых течений

Хотя введенные выше координаты удобны для изучения уравнения (5.2), анализ полного уравнения (5.1) обычно труден, поскольку в криволинейных координатах оператор rot^{-1} имеет сложный вид. Частный случай, когда этот анализ можно свести к одномерной задаче, — случай течений с прямыми линиями тока. К этому классу относятся все плоско-параллельные течения, а также и более общие *сдвиговые течения*, в которых частицы жидкости движутся в параллельных плоскостях с постоянной скоростью, меняющейся по абсолютной величине и направлению при переходе от одной плоскости к другой. Изучение такого класса можно рассматривать как приближенное исследование общего течения, имеющего тороидальную геометрию, когда кривизной тора пренебрегают, а сдвиг (т. е. изменение направления линий тока от одного тора к другому) учитывают.

Пусть φ_1, φ_2 и z — декартовы координаты, и пусть $d\ell^2 = d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + dz^2$ — элемент длины. Пусть $v = v_m e_m + v_n e_n$ — поле скоростей сдвигового

течения в трехмерном пространстве (или в трехмерном торе пренебрежимо малой кривизны).

Предложение 5.4. *Сдвиговое трехмерное течение является экспоненциально неустойчивым тогда и только тогда, когда хотя бы одно из двумерных течений идеальной жидкости, полученных заменой вектора скорости v на его продольную составляющую v_m с различными волновыми векторами m, экспоненциально неустойчиво.*

Таким образом, проблема экспоненциальной неустойчивости рассматриваемого класса трехмерных течений идеальной жидкости сводится к аналогичной проблеме для множества двумерных течений, соответствующих различным значениям волнового вектора m. В частном случае течения с постоянной по направлению скоростью v все профили скоростей пропорциональны друг другу, и полученный результат согласуется с теоремой Сквайра для идеальной жидкости [Squ].

Доказательство. В данном случае целесообразно рассмотреть периодические течения, не обязательно 2π-периодические (например, можно считать периоды φ_1 и φ_2 равными соответственно $2\pi X_1$ и $2\pi X_2$). Единственное изменение, которое нужно внести в формулы из п. 5.3, состоит в том, что теперь волновой вектор m пробегает значения не из целочисленной решетки, а из решетки $\{(m_1/X_1, m_2/X_2)\}$.

При сделанных предположениях разложение поля вихря w по единичным векторам e_m, e_n и e_z имеет вид $w = -v_n' e_m + v_m' e_n$. Матрицы оператора rot в координатах B_m, C_m и оператора, отвечающего скобке Пуассона, содержащей w, имеют вид:

$$i|m|\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} + |m|^{-2}\partial_z^2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -\begin{pmatrix} i|m|v_n' & v_m'' \\ 0 & i|m|v_n' \end{pmatrix},$$

где id — тождественное преобразование. Поэтому в наших координатах линеаризованное уравнение Эйлера (5.1) распадается в систему уравнений для различных m. После несложных выкладок, получаем для $m \neq 0$ треугольную систему

$$\begin{cases} \dot{B}_m = \left(i|m|v_m + \dfrac{v_m''}{i|m|}(\mathrm{id} - |m|^{-2}\partial_z^2)^{-1}\right)B_m, \\ \dot{C}_m = i|m|v_m C_m + v_n'(\mathrm{id} - |m|^{-2}\partial_z^2)^{-1}B_m, \end{cases} \tag{5.6}$$

а для $m = 0$ — систему $A_0 = B_0 = C_0 = 0$. Первое уравнение отщепляется, и если B-компонента не обладает экспоненциальной неустойчивостью, то же верно и для C-компоненты (это следует из неоднородного линейного уравнения для C_m). Отметим, наконец, что уравнение для B_m содержит только продольную составляющую v_m скорости v.

Заметим также, что уравнение (5.6) совпадает с уравнением, полученным при изучении двумерного течения идеальной жидкости, профиль скоростей которого есть компонента $v_m(z)$ скоростей трехмерного течения в направлении волнового вектора m. □

Треугольная форма системы (5.6) показывает, что для трехмерных несжимаемых течений, в отличие от двумерных, характерен линейный рост возмущений ротора по времени даже в отсутствие экспоненциальной неустойчивости.

5.5. Стационарные течения с экспоненциальным растяжением частиц

В этом параграфе мы определим стационарное течение несжимаемой жидкости с полем скоростей типа Бельтрами, т. е. полем, пропорциональным своему ротору и не имеющим семейства инвариантных поверхностей, как упоминалось в п. 5.2. Этот простой пример играет ключевую роль во многих других конструкциях идеальной гидродинамики и теории динамо, которые будут обсуждаться в дальнейшем (см., например, гл. V, § 4).

Рассмотрим идеальную жидкость, заполняющую трехмерное компактное многообразие M, построенное следующим образом. Рассмотрим сначала евклидово трехмерное пространство с координатами x, y, z и определим следующие три диффеоморфизма этого пространства:

$$T_1(x,y,z) = (x+1, y, z), \quad T_2(x,y,z) = (x, y+1, z),$$
$$T_3(x,y,z) = (2x+y, x+y, z+1).$$

Каждое из этих преобразований отображает целочисленную решетку в пространстве x, y, z на себя. Отождествим все точки xyz-пространства, которые получаются друг из друга последовательным применением T_i и T_i^{-1} (в любом порядке). Полученное компактное аналитическое многообразие M можно считать произведением двумерного тора $\{(x,y) \bmod 1\}$ на отрезок $0 \leqslant z \leqslant 1$, где граничные торы отождествлены по формуле $(x,y,0) \equiv (2x+y, x+y, 1)$.

Чтобы снабдить многообразие M римановой метрикой, мы определим в xyz-пространстве метрику, инвариантную относительно всех T_i. Рассмотрим сначала линейное преобразование xy-плоскости, заданное матрицей A (отображение, которое «из кошки приготовляет окрошку», рис. 19):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Оператор A имеет собственные значения $\chi_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Отметим, что $\chi_1 > 1 > \chi_2 > 0$, $\chi_1\chi_2 = 1$, а собственные векторы ортогональны друг другу. Пусть (p,q) — декартова система координат в xy-плоскости с осями p и q, направленными вдоль собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\chi_1 > 1$ и $\chi_2 < 1$ соответственно.

Положим метрику равной

$$d\ell^2 = e^{-2\beta z}dp^2 + e^{2\beta z}dq^2 + dz^2, \quad \text{где } \beta = \ln\chi_1. \tag{5.7}$$

Метрика $d\ell^2$ инвариантна относительно преобразований T_i и поэтому определяет аналитическую риманову структуру на трехмерном компактном многообразии M.

Рассмотрим теперь векторное поле $\operatorname{grad} z = \partial/\partial z$ в xyz-пространстве. В силу инвариантности относительно преобразований T_i оно задает векторное поле v на римановом многообразии M. Поле v является гармоническим на M: $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{rot} v = 0$. Поэтому v можно считать полем скоростей стационарного потенциального течения идеальной жидкости. Каждая частица жидкости, движущаяся вдоль этого поля, экспоненциально растягивается в q-направлении и сжимается в p-направлении, как следует из формулы (5.7).

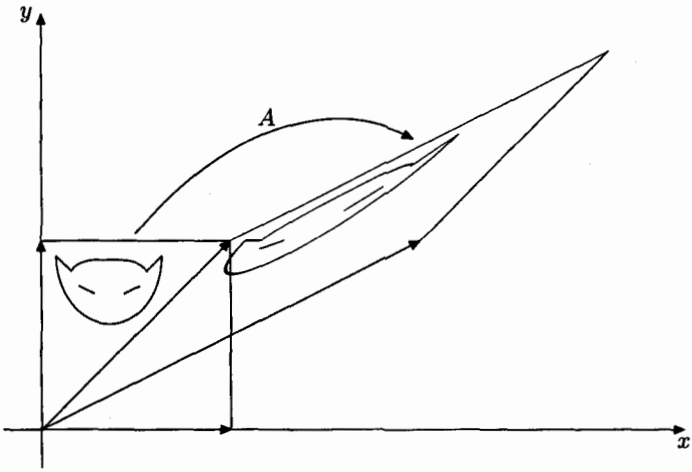


Рис. 19. Отображение A тора на себя

5.6. Исследование линеаризованного уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера (5.1), линеаризованное на поле v, эквивалентно укороченному уравнению (5.2), поскольку рассматриваемое течение потенциально. Простая геометрия течения v позволяет решить укороченное уравнение с помощью формулы (5.3). Удобно представить решение в следующем виде. Рассмотрим векторные поля

$$e_p = e^{\beta z}\frac{\partial}{\partial p}, \quad e_q = e^{-\beta z}\frac{\partial}{\partial q}, \quad e_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

в pqz-пространстве. Эти поля инвариантны относительно всех преобразований T_i и поэтому могут рассматриваться как векторные поля на многообразии M. Направления полей e_p, e_q и e_z инвариантны относительно фазового потока g^t поля e_z (в координатной форме $g^t(p,q,z) := (p,q,z+t)$), причем сами поля преобразуются следующим образом:

$$g^t_* e_p = e^{-\beta z} e_p, \quad g^t_* e_q = e^{\beta z} e_q, \quad g^t_* e_z = e_z$$

(этим объясняются названия: *растягивающее направление* e_q, *сжимающее направление* e_p и *нейтральное направление* e_z). Каждое векторное поле u

на M можно разложить по этим направлениям:

$$u = u_p e_p + u_q e_q + u_z e_z,$$

где u_p, u_q и u_z суть функции на многообразии M.

Формула (5.3), примененная к стационарному течению $v = e_z$, имеет вид:

$$s_p(t) = e^{-\beta t} U^t s_p(0), \quad s_q(t) = e^{\beta t} U^t s_q(0), \quad s_z(t) = U^t s_z(0), \tag{5.8}$$

где U^t — линейный оператор, действующий на функции на многообразии M по формуле $(U^t f)(a) = f(g^{-t}a)$ в произвольной точке $a \in M$. Отметим, что оператор U^t унитарен, поскольку течение g^t сохраняет элемент объема. Формула (5.8) позволяет ответить на различные вопросы, связанные с ростом возмущений стационарного течения v. Во-первых, формула показывает, что q-компонента любого возмущения ротора экспоненциально возрастает со временем, в то время как p-компонента экспоненциально затухает.

Далее, спектр оператора U^t легко исследовать с помощью разложения в ряд Фурье по (x, y) при фиксированном z, а для не зависящих от x и y функций — с помощью разложения по z. Этот спектр имеет счетно-кратную непрерывную (лебегову) составляющую вдоль единичной окружности в $\mathbb{C}$, а также дискретное множество собственных значений, соответствующих собственным функциям $\varphi_k = e^{2\pi i k z}$ (k целые). Это значит, что уравнение Эйлера (5.1), линеаризованное в окрестности стационарного течения $v = e_z$, имеет счетное число (неустойчивых) собственных значений $\alpha - 2\pi i k$, соответствующих счетному множеству возрастающих возмущений вихря $s = \varphi_k(z) e_q$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Сложность предсказания поведения решений линеаризованного уравнения Эйлера (5.1) для течений с экспоненциальным растяжением частиц также видна из формулы (5.8): для нахождения приближенного решения необходимо знать с достаточно высокой точностью сколько-то гармоник высокого порядка начального возмущения $s(0)$, а они быстро возрастают по t. Из формул (5.8) и (5.4) видно, что экспоненциальное растяжение частиц резко увеличивает сложность предсказания роста возмущения по сравнению с течениями, определяемыми «общими» стационарными решениями уравнения Эйлера с линейным растяжением частиц (см. п. 5.2–5.4).

Явления, аналогичные описанным в этом примере, встречаются также в других течениях с экспоненциальным растяжением частиц, например, в ABC-течениях

$$v_x = A \sin z + C \cos y, \quad v_y = B \sin x + A \cos z, \quad v_z = C \sin y + B \cos x$$

(см. гл. II, п. 1.1, гл. V, п. 4.2 и работы [Hen, Dom], где изучаются симметрии и приведены результаты численного моделирования) и в геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны (см. гл. V, п. 4.4).

5.7. Устойчивы ли пространственные стационарные течения?

В п. 4.1 было приведено достаточное условие устойчивости плоских стационарных течений жидкости. В отличие от двумерного случая вторая вариация

кинетической энергии стационарного течения среди изозавихренных полей не является знакоопределенной для высших размерностей. Следовательно, достаточное условие устойчивости, основанное на исследовании второй вариации, неприменимо (см. замечание 3.7): квадратичные гамильтонианы седлового типа могут соответствовать как устойчивым, так и неустойчивым течениям. Изучение второй вариации обсуждаемое ниже основано на рассмотрении быстро осциллирующих возмущений стационарного течения.

Теорема 5.5. *Пусть M — трехмерное замкнутое многообразие, а v — стационарное течение уравнения Эйлера. Если* $\operatorname{rot} v$ *не равен нулю тождественно, то спектр квадратичной формы $\delta^2 E$ (т. е. соответствующего самосопряженного оператора) на касательном пространстве к коприсоединенной орбите поля v неограничен как снизу, так и сверху.*

Замечание 5.6. Данная теорема, наряду с ее обобщением на случай более высоких размерностей, которое будет сформулировано ниже, была доказана в [S-V]. Неопределенность второй вариации $\delta^2 E$ в трехмерном случае была установлена ранее в [Rou1] (и уже встречалась в [Arn4], см. также [A-H], где рассматривались общие положения равновесия в трехмерном случае). Основная идея, лежащая в основе всех доказательств, состоит в том, что форма $\delta^2 E$ является суммой двух членов, один из которых всегда положителен, но имеет меньший порядок, чем другой. Задавая быстро осциллирующую вариацию ξ, можно получить явное асимптотическое выражение для $\delta^2 E$ и, таким образом, получить произвольный знак второй вариации в направлении ξ.

Неограниченность спектра второй вариации имеет место для обобщения уравнения Эйлера на случай высших размерностей, определенного в § 7 гл. I. А именно, пусть M — n-мерное гладкое риманово многообразие ($n \geqslant 3$), снабженное формой объема μ, пусть $v^\flat$ — 1-форма на M, полученная из μ-бездивергентного векторного поля v по формуле $v^\flat(w) = (v, w)$, где $(\,.\,,\,.\,)$ — риманова метрика. Кинетическая энергия равна

$$E(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_M (v, v)\, d\mu.$$

Теорема 5.5′ [S-V]. *Пусть v — гладкое стационарное решение уравнения Эйлера в M. Вторая вариация $\delta^2 E$ энергии для всех изозавихренных полей тождественно равна нулю при условии, что 1-форма $v^\flat$ замкнута: $dv^\flat \equiv 0$. В противном случае спектр самосопряженного оператора, соответствующего квадратичной форме $\delta^2 E$ на пространстве изозавихренных полей, неограничен как снизу, так и сверху.*

Замечание 5.7. В действительности уравнение Эйлера определено на факторпространстве 1-форм на M: $[v^\flat] \in \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ (см. гл. I). Это значит, что смежных классов, удовлетворяющих условию $d[v^\flat] = 0$, существует столько же, сколько элементов в $H^1(M)$, т. е. конечномерное пространство. Поэтому среди всех стационарных течений на многообразии M существует в точности $b_1(M) := \dim H^1(M)$ линейно независимых, для которых вторая вариация кинетической энергии равна нулю. Для всех остальных стационарных течений эта вариация не является знакоопределенной.

Лемма 5.8. *Вторая вариация энергии* $E(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle = \frac{1}{2}\langle v^\flat, v^\flat\rangle$ *на коприсоединенной орбите «изозавихренных полей» (точнее, на ее образе в алгебре Ли) определяется квадратичной формой*

$$\delta^2 E(\xi) = \frac{1}{2}\langle i_\xi\, dv^\flat + dp, i_\xi\, dv^\flat + dp\rangle + \frac{1}{2}\langle i_\xi\, dv^\flat + dp, L_\xi(v^\flat)\rangle, \tag{5.9}$$

где функция p выбрана так, чтобы 1-форма $i_\xi\, dv^\flat + dp$ соответствовала бездивергентному полю после риманова отождествления.

Доказательство леммы. Доказательство заключается в непосредственном применении формулы (3.2) к коприсоединенному оператору $B(v,\xi) = i_\xi(dv^\flat) + dp$. Предполагается, что все поля квадратично интегрируемы. Формальное касательное пространство к коприсоединенной орбите 1-формы $v^\flat$ есть образ оператора B. □

Для трехмерного многообразия M эта формула принимает вид:

$$\delta^2 E(\xi) = \frac{1}{2}\langle(\nabla\times v)\times\xi + \nabla p, (\nabla\times v)\times\xi + \nabla p\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle(\nabla\times v)\times\xi + \nabla p, \nabla\times(\xi\times v)\rangle.$$

Оператор $B(v,\xi)$ в этом случае принимает вид $B(v,\xi) = (\nabla\times v)\times\xi + \nabla p$, где функция давления p выбирается так, чтобы векторное поле $(\nabla\times v)\times\xi + \nabla p$ было бездивергентным.

Доказательство теоремы 5.5′. Легко видеть, что из $dv^\flat \equiv 0$ следует $dp = 0$, и поэтому $\delta^2 E(\xi) \equiv 0$.

Предположим теперь, что ни 2-форма $dv^\flat$, ни векторное поле v не равны нулю в точке $x_0 \in M$. Зафиксируем некоторую функцию $\varphi(x)$, для которой $(v, \nabla\varphi)$ и $d\varphi\wedge dv^\flat$ не обращаются в нуль в окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Возьмем гладкие векторные поля a_R и a_I, которые всюду ортогональны $\nabla\varphi$, равны нулю вне $\mathcal{U}$ и всюду удовлетворяют неравенству $dv^\flat(a_R, a_I) \geqslant 0$, причем $dv^\flat(a_R, a_I) > 0$ в малой окрестности $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Определим, наконец, комплексное векторное поле $a = a_R + \sqrt{-1}a_I$ (здесь мы обозначаем мнимую единицу $\sqrt{-1}$, чтобы отличить ее от оператора i_v).

Нашей целью является построение деформаций ξ_ε (равномерно ограниченных по ε), для которых величина $\delta^2 E(\xi_\varepsilon)$ (положительная или отрицательная) сколь угодно велика по модулю. Отметим, что достаточно выбрать в качестве ξ_ε комплексный вектор, если мы расширим область определения и оператора $\delta^2 E$, и эрмитова скалярного произведения на комплексификацию пространства векторных полей на многообразии M. Действительно, рассмотрим эрмитово скалярное произведение $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathbb{C}}$, линейное по первому аргументу и антилинейное по второму, которое является комплексификацией вещественного скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ на векторных полях. Тогда из ограниченности спектра $\delta^2 E$ следует, что *вещественная часть* величины $\langle(\delta^2 E)\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon\rangle_{\mathbb{C}}$ ограничена снизу и сверху, когда ξ_ε принадлежит некоторому фиксированному шару в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых комплексных векторных полей.

Для того чтобы построить такие деформации ξ_ε, рассмотрим для простоты случай, когда μ — риманова форма объема на многообразии. Тогда 1-форма $v^\flat$ соответствует бездивергентному векторному полю v, если (и только если) $d^*v^\flat \equiv 0$ (здесь оператор $d^*\colon \Omega^k(M,\mathbb{C}) \to \Omega^{k-1}(M,\mathbb{C})$ является сопряженным к оператору внешнего дифференцирования $d\colon \Omega^k(M,\mathbb{C}) \to \Omega^{k+1}(M,\mathbb{C})$ при отождествлении $\Omega^k(M^n,\mathbb{C})$ и $\Omega^{n-k}(M^n,\mathbb{C})$, заданном метрикой).

Рассмотрим следующее быстро осциллирующее векторное поле ξ_ε, являющееся такой $O(\varepsilon)$-поправкой к полю $a\exp(\sqrt{-1}\varphi/\varepsilon)$, чтобы оно было бездивергентным. А именно, пусть ξ_ε — поле, соответствующее 1-форме

$$\xi_\varepsilon^\flat = \varepsilon\sqrt{-1}\, d^*\Big(\frac{d\varphi\wedge a^\flat}{\|d\varphi\|^2}\exp(\sqrt{-1}\,\varphi/\varepsilon)\Big) = a^\flat\exp(\sqrt{-1}\varphi/\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Тогда главный член $\delta^2E(\xi_\varepsilon)$ в ε-разложении при $\varepsilon > 0$ равен

$$\begin{aligned}\delta^2E(\xi_\varepsilon) &= \frac{1}{2\varepsilon}\langle i_{\xi_\varepsilon}dv^\flat + dp, \sqrt{-1}(v,\nabla\varphi)a^\flat\exp(\sqrt{-1}\,\varphi/\varepsilon)\rangle_{\mathbb{C}} + O(1) = \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\varepsilon}\int\limits_M (v,\nabla\varphi)\,dv^\flat(a,\overline{a})\mu + O(1) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_M (v,\nabla\varphi)\,dv^\flat(a_R,a_I)\mu + O(1),\end{aligned}$$

где $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathbb{C}}$ — эрмитово скалярное произведение, являющееся расширением вещественного скалярного произведения $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$.

По сделанному предположению, скалярное произведение $(v,\nabla\varphi)$ не равно нулю на $\mathcal{U}$, в то время как $dv^\flat(a_R,a_I)$ положительно в $\mathcal{U}'$ и всюду на M неотрицательно. Поэтому интеграл не равен нулю. Следовательно, мы можем сделать вещественную часть $\delta^2E(\xi_\varepsilon)$ сколь угодно большой положительной или отрицательной величиной, выбирая значение ε определенного знака и достаточно близко к нулю.

Таким образом, форма δ^2E не является знакоопределенной и имеет неограниченный снизу и сверху спектр. □

З а м е ч а н и е 5.9 (см. [S-V]). Этот вывод верен и для многообразия с краем. Можно взять ξ_ε, обращающимся в нуль вблизи края и получить произвольно большие положительные или отрицательные значения $\delta^2E(\xi_\varepsilon)$. Область определения соответствующего самосопряженного оператора δ^2E содержит все гладкие бездивергентные поля с компактным носителем внутри M.

З а м е ч а н и е 5.10. Можно предположить, что неопределенность второй вариации является показателем неустойчивости (см., например, [A-H]). Хотя достаточные условия, обсуждаемые выше, не позволяют сделать никакого заключения, для некоторых течений можно получить ответ другими методами (см. в [Yu5] интересное обсуждение связи устойчивости и гладкости решений уравнения Эйлера для идеальной жидкости, также см. [Vla2] по поводу прямого метода Ляпунова и [FGV, FV1], где даны критерии неустойчивости для специальных трехмерных течений).

Например, доказано, что жидкость, обладающая поверхностным натяжением и заполняющая (частично или полностью) перевернутый цилиндрический стакан, является неустойчивой [VlB, Vla2]. Насколько нам известно, для сосудов более сложной (нецилиндрической) формы нелинейная неустойчивость не доказана.

Ситуация несколько меняется для систем уравнений МГД. В отличие от идеальной гидродинамики можно получить трехмерные примеры МГД равновесий, для которых вторая вариация полной энергии знакоопределена [FV2]. Класс течений, устойчивость которых можно установить с помощью достаточного условия, рассматриваемого в этом и предыдущем параграфах, очень узок. В частности, вторая вариация энергии оказывается знаконеопределенной для течений, имеющих точку, в которой векторы скорости v и вихря $\operatorname{rot} v$ ненулевые и не параллельны вектору магнитного поля B. То же утверждение справедливо для полей с параллельными магнитным полем и полем скоростей, если магнитное поле достаточно слабое: $\|v\| > \|B\|$ в некоторой точке [FV2].

Другие приложения критериев устойчивости к МГД можно найти в [Vla2, VlM]. Устойчивость стационарных дву- и трехмерных течений идеальной жидкости со свободной границей изучалась в [SYu]; по поводу анализа устойчивости идеальной, стратифицированной, баротропной и других жидкостей см. [Dik, A-H, HMRW, Gri, Vla3]. Отметим также работы [Arn14, DoS, FV1, Lif, Shf], в которых приведены различные результаты по устойчивости и асимптотикам возмущений стационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса.

§ 6. Свойства стационарных течений на многообразиях большей размерности

Существование функции Бернулли для стационарного течения жидкости — это общее явление, имеющее место в любой размерности (см. п. 1.1). В этом параграфе мы обсудим (следуя [GK1, GK2]) как этот дополнительный первый интеграл влияет на свойства стационарных решений уравнения Эйлера идеальной жидкости для высших размерностей.

6.1. Обобщенные течения Бельтрами

Пусть v — аналитическое бездивергентное поле стационарного течения на компактном многообразии нечетной размерности M^{2n+1}, снабженном формой объема μ.

Определение 6.1. Траектория поля v называется *хаотической*, если она не содержится ни в одной аналитической гиперповерхности в M^{2n+1}.

Например, типичная траектория эргодического течения является хаотической.

Предложение 6.2 (ср. 1.8′ [GK2]). *Аналитическое стационарное поле v, имеющее хотя бы одну хаотическую траекторию, пропорционально своему вихрю ξ, т. е. $\xi = Cv$, где $C \in \mathbb{R}$.*

Замечание 6.3. Напомним, что в нечетномерном случае поле вихря определяется соотношением $i_\xi \mu = \omega^n$, где 2-форма $\omega = du$ есть дифференциал

1-формы u, двойственной векторному полю v, $u(\,.\,) = (v, \,.\,)$ (см. гл. I). Таким образом, согласно предложению 6.2, поле v с хаотической траекторией есть «собственный вектор» оператора rot: $v \mapsto \xi$, хотя при $n > 1$ этот оператор нелинейный! Естественно назвать такое поле v *обобщенным течением Бельтрами*. Утверждается, что течения Бельтрами высших размерностей, как и трехмерные, имеют довольно сложную структуру. В частности, перемешивание в стационарном течении может возникнуть, только если существует хотя бы одна хаотическая траектория, т. е. только в обобщенном течении Бельтрами. Стационарное течение, не являющееся течением Бельтрами, напротив, расслаивается на семейство гиперповерхностей, инвариантных относительно течения, и значит, настоящее перемешивание в нем невозможно. Предложение доказывается рассуждениями, аналогичными трехмерному случаю [Arn3, Arn4] (см. п. 1.1).

Доказательство. Вихревое поле ξ коммутирует с полем скоростей v для любого стационарного течения (см. замечание 1.4). Оба поля ξ и v являются касательными к «поверхностям Бернулли», т. е. к гиперповерхностям уровня аналитической функции Бернулли $\alpha = p + i_v u$, определяемой стационарным уравнением Эйлера $i_v\, du = -d\alpha$.

Если функция Бернулли α не постоянна, то траектории v лежат на гиперповерхностях уровня α, что противоречит сделанному предположению. (Отметим, что, как и в трехмерном случае, неособые поверхности Бернулли ($d\alpha \neq 0$) имеют нулевую эйлерову характеристику, так как касательное поле v не имеет на них особых точек.) Если функция α постоянна, то поля ξ и v коллинеарны (замечание 1.6).

Рассмотрим функцию $\kappa := v^2/\xi^2$ (или иначе, $(\xi, \xi) = \kappa(v, v)$). В силу коммутативности ξ и v функция κ инвариантна относительно течения v. Поэтому поле v касается поверхностей уровня κ. Поскольку v имеет хаотическую траекторию, остается единственная возможность: $\kappa \equiv \mathrm{const}$. (Заметим, что функция Бернулли α аналитична, а функция κ есть отношение двух аналитических функций.) Поэтому обе функции α и κ постоянны и поля ξ и v локально пропорциональны: $\xi = Cv$, где $C = \pm 1/\kappa = \mathrm{const}$. □

Пример 6.4. Векторное поле Хопфа $(x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2n+2}, -x_{2n+1})$ является примером собственного векторного поля для оператора rot на $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ без хаотических траекторий. Приведенная выше теорема утверждает, что существование такой траектории у стационарного потока гарантировало бы, что такое векторное поле является «собственным вектором» оператора rot.

Было бы интересно найти нетривиальный пример ABC-течения в более высокой размерности и сравнить его эргодические свойства с аналогичными свойствами в трехмерном случае (см., например, [Hen]). В частности, интересно, существует ли аналог аналитической неинтегрируемости ABC-течения, доказанной в [Zig2], для высших размерностей. В работе [Gh] (см. также [E-G]) предложена конструкция поля Бельтрами с хаотическими траекториями на нечетномерном многообразии M^{2n+1}, где метрика определяется в процессе построения.

6.2. Структура четырехмерных стационарных течений

Основной результат этого параграфа состоит в том, что стационарные течения четырехмерной жидкости весьма похожи на интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы.

Здесь и далее мы изучаем четномерное ориентируемое риманово многообразие M^{2n}, снабженное формой объема μ. В этом случае достаточно общее стационарное решение v порождает замкнутую 2-форму $\omega = du$, являющуюся симплектической (невырожденной) почти всюду на M. В частности, это позволяет определить еще одну (в дополнение к α) инвариантную функцию на многообразии: $\lambda(x) = \omega^n/\mu$, называемую функцией вихря (или элементом «симплектического объема»). Функция λ инвариантна, так как $L_v\omega = 0$ и $L_v\mu = 0$. Это означает, что функция вихря λ и функция Бернулли α суть первые интегралы течения v на M.

Пусть $\rho = (\alpha, \lambda)\colon M \to \mathbb{R}^2$, и Γ — множество, образованное всеми такими $x \in M$, что либо $\lambda(x) = 0$, либо $\rho(x)$ — критическое значение отображения ρ. Иными словами, Γ — объединение нулевого λ-уровня Λ и прообраза множества критических значений отображения ρ.

Теорема 6.5 (см. [GK1, GK2]). *Пусть M — замкнутое ориентируемое четырехмерное многообразие. Тогда*:

1) *открытое множество $U = M \setminus \Gamma$ инвариантно относительно течения v*;

2) *каждая связная компонента множества U расслаивается на двумерные торы, инвариантные относительно течения*;

3) *на каждом из этих торов линии тока либо все замкнуты, либо все плотны.*

Доказательство. Форма ω является симплектической на дополнении множества $\Lambda = \{\lambda = 0\}$. Векторное поле v гамильтоново (относительно этой симплектической формы) с гамильтонианом α: действительно, по определению $i_v\omega = -d\alpha$. Пусть ξ — гамильтоново векторное поле на $M \setminus \Lambda$ с гамильтонианом λ. Заметим, что скобка Пуассона функций α и λ тождественно равна нулю на $M \setminus \Lambda$, так как $\{\alpha, \lambda\} = L_v\lambda = 0$. Поэтому поля v и ξ коммутируют, а их течения вместе задают $\mathbb{R}^2$-действие на $M \setminus \Lambda$. Отображение ρ фактически является отображением момента для этого действия. Отображение ρ инвариантно относительно этого действия, а его орбиты совпадают со связными компонентами ρ-уровней.

Проекция $\rho|_U\colon U \to \rho(U)$ — собственная субмерсия, поскольку, определяя U, мы исключили из M все критические точки отображения ρ. Следовательно, каждая орбита в U — гладкая замкнутая поверхность, а значит, это либо тор, либо бутылка Клейна. Кроме того, эта поверхность кориентирована посредством формы $d\alpha \wedge d\lambda$. Следовательно, поверхность ориентируема, т. е. является тором. Поэтому ρ расслаивает каждую связную компоненту U на торы.

На каждой орбите течение ξ действует транзитивно на интегральные кривые v. К тому же поле ξ не имеет нулей на U, так как его гамильтониан λ

не имеет там критических точек. Таким образом, интегральные кривые v, на которые действует ξ, либо все замкнуты, либо все плотны на каждом торе. □

Отметим, что для «типичной» пары α и λ множество U открыто и плотно в M. Таким образом, теорема дает практически полное описание течения v.

Вещественно-аналитический вариант этой теоремы для многообразия без границы выглядит следующим образом.

Теорема 6.6 (см. [GK2]). *Пусть M — замкнутое ориентируемое четырехмерное многообразие. Предположим кроме того, что все данные (т. е. M, μ и метрика, а также ω) являются вещественно-аналитическими, а $d\alpha \wedge \wedge d\lambda$ не обращается тождественно в нуль на M. Тогда Γ — полуаналитическое подмножество, нигде не плотное в M, а $U = M \setminus \Gamma$ имеет конечное число связных компонент. Каждая связная компонента расслаивается на двумерные торы, инвариантные относительно течения. На каждом из этих торов линии тока либо все замкнуты, либо все плотны.*

Аналог этой теоремы справедлив и для многообразия M с границей (см. подробности в [GK2]).

Замечание 6.7. А. Для произвольного четномерного многообразия M^{2n} можно утверждать, что M есть объединение подмногообразий размерности не выше $(2n-2)$ таких, что стационарное векторное поле v касательно к ним. Эти подмногообразия получаются в результате пересечения уровней $\alpha = \mathrm{const}$ и $\lambda = \mathrm{const}$ и имеют нулевую эйлерову характеристику.

В. Для произвольного нечетномерного многообразия M^{2n+1} вместо функции $\lambda = \omega^n/\mu$ (и ковекторного поля $d\lambda$) мы определяем векторное поле вихря ξ соотношением $i_\xi \mu = \omega^n$. Поля ξ и v коммутируют и, следовательно, задают $\mathbb{R}^2$-действие на M^{2n+1} (см. п. 6.1). Поэтому в нечетномерном случае стационарное течение задает слоение *размерности* 2, в отличие от слоения *коразмерности* 2 в четномерном случае.

6.3. Топология функции вихря

Пусть ω — 2-форма, соответствующая стационарному бездивергентному полю v на M^{2n} (т. е. $\omega = du$, где u — дифференциальная 1-форма $u(\,.\,) = (v, \,.\,)$, определенная римановой метрикой $(\,.\,,\,.\,)$ на M). В этом параграфе мы изучим топологию функции вихря $\lambda = \omega^n/\mu$ стационарного течения v. Мы опишем некоторые свойства таких λ, что пара (λ, ω) (при не сильных ограничениях) не имеет «слишком большого числа симметрий».

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех бездивергентных векторных полей на M. Стационарные течения являются критическими точками энергии на коприсоединенной орбите $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$, которая состоит из 2-форм ω, соответствующих полям, изозавихренным с полем v на M. Ясно, что топологические инварианты функции λ, такие как число ее критических точек, их индексы и т. д., зависят только от орбиты $\mathcal{O}$. Это простое наблюдение позволит нам найти орбиты, совсем не имеющие стационарных решений (см. п. 6.4).

Определение 6.8. Функция f на компактном симплектическом многообразии (P, ω) *не допускает дополнительных симметрий*, если произволь-

ная функция g, удовлетворяющая $\{f, g\} = 0$, постоянна на связных компонентах множеств уровня функции f (т. е. из $\{f, g\} = 0$ следует, что дифференциал dg пропорционален df с коэффициентом, зависящим от точки на P).

Замечание 6.9. На двумерном симплектическом многообразии никакие функции не допускают дополнительных симметрий. Гипотетически функция общего положения на компактном симплектическом многообразии любой размерности не допускает дополнительных симметрий [GK2]. Это верно для $\dim M = 4$ (ср. [MMe]). Оказывается, данный вопрос тесно связан с некоторыми тонкими вопросами гамильтоновой динамики. Общую гипотезу можно рассматривать как гамильтонов вариант следующей проблемы общей неинтегрируемости.

Замечание 6.10. Отступление о свойстве неинтегрируемости. Со времен Пуанкаре принято использовать термин «неинтегрируемая динамическая система» в значении «динамическая система, не имеющая аналитических первых интегралов». Существует, однако, ряд других возможностей. Например:

1) отсутствие инвариантных гиперповерхностей (или главных идеалов);

2) отсутствие инвариантных замкнутых 1-форм (или многозначных первых интегралов);

3) отсутствие инвариантных распределений касательных подпространств (или инвариантных пфаффовых модулей);

4) отсутствие инвариантных расслоений (или инвариантных вполне интегрируемых пфаффовых систем).

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем (диффеоморфизм компактного многообразия) и объект одного из указанных выше типов (функция, идеал, замкнутая 1-форма и т. д.). Образы этого объекта при многократном применении диффеоморфизма могут образовывать конечное множество (если они периодически повторяются) или бесконечную последовательность и могут порождать конечно- или бесконечномерное пространство. Эти свойства отражают «степень хаотичности» динамической системы.

Задача 6.11. Образуют ли неинтегрируемые (в смысле каждого из четырех приведенных определений) системы открытое множество в пространстве динамических систем на многообразиях достаточно высокой размерности? Гипотетически это имеет место в пространстве гамильтоновых систем вблизи эллиптической точки равновесия.

Даже отдельные примеры систем, неинтегрируемых в строгом смысле [1), 2), 3) или 4)] представляют интерес. Следующий пример хаотического поведения принадлежит О. Козловскому [Koz1]. Рассмотрим росток аналитического отображения

$$z \mapsto e^{i\theta} z + z^2$$

комплексной прямой $z \in \mathbb{C}$ на себя в окрестности неподвижной (эллиптической) точки 0. Пусть иррациональное число θ необычно хорошо аппроксимируется рациональными числами. Тогда существует бесконечно много периодических орбит в любой окрестности начала координат. Такие отображения неинтегрируемы в смысле 1)–4).

Еще одно обобщение понятия интегрируемости было предложено В. Юдовичем [Yu2], который ввел понятие косимметрии векторного поля. *Косимметрией* называется поле гиперплоскостей в касательных пространствах, содержащих данное векторное поле (их можно назвать неголономными связями). Это поле гиперплоскостей может быть вырожденным в некоторых точках многообразия и определяется 1-формой (возможно с нулями), аннулирующей заданное векторное поле в каждой точке.

Каждое ненулевое векторное поле локально обладает некоторыми тривиальными косимметриями. Существование глобальной косимметрии влечет некоторые ограничения на топологические свойства поля. Пример: если поле с неподвижной точкой имеет нетривиальную косимметрию, то эта неподвижная точка неизолированная (и, вообще говоря, принадлежит кривой неподвижных точек). Если векторное поле допускает 2 косимметрии, оно, вообще говоря, имеет поверхность положений равновесия и т. д. Это явление описывается «косимметрической версией» теоремы о неявной функции [Yu2]. Кроме того, для динамических систем с косимметриями типичны бифуркации, в которых из точки равновесия рождается семейство таких точек (явление бесконечной коразмерности среди всех динамических систем). Бифуркация Хопфа рождения цикла в системах с косимметриями описана в [KuY].

Юдович обнаружил нетривиальные косимметрии в некоторых физических системах гидродинамической природы (теории просачивания) и механики Ньютона. Например, если векторное поле имеет первый интеграл φ, то дифференциал $d\varphi$ является (голономной) косимметрией. (Пример: для второго закона Ньютона $\ddot{x} = F(x)$ с потенциальной силой $F(x)$ сумма потенциальной и кинетической энергий есть первый интеграл уравнения.) Понятие косимметрии придает естественную формулировку теореме Нётер о существовании первых интегралов, аналогичных моментам, для уравнения Ньютона $\ddot{x} = F(x)$ с *непотенциальной силой* $F(x)$ [Yu2]. Неголономные косимметрии этого уравнения свидетельствуют (в общем положении) о существовании непрерывных семейств равновесий даже для этой классической ситуации.

Возвращаясь к стационарным течениям жидкости на многообразиях четной размерности, дадим следующее

Определение 6.12. Коприсоединенная орбита $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ *не допускает дополнительных симметрий*, если для любой (или, что эквивалентно, для какой-либо) 2-формы $\omega \in \mathcal{O}$ соответствующая функция вихря λ не допускает дополнительных симметрий на $\lambda^{-1}([a, b])$ для любой пары ее регулярных значений $0 < a < b$ или $a < b < 0$. (Отметим, что форма ω является симплектической только на дополнении к нулевому уровню функции $\lambda = \omega^n/\mu$.)

Определения 6.8 и 6.12 согласованы: функция f на компактном симплектическом многообразии не допускает дополнительных симметрий, если и только если их не допускает ее сужение на прообраз любого отрезка с регулярными концами.

Определение 6.13. Функцию на компактном многообразии назовем *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, т. е. если матрица вторых частных производных функции (*гессиан*) невырождена в каждой

критической точке. Количество отрицательных собственных значений гессиана называется *индексом Морса* критической точки.

Орбита $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ имеет *морсовский тип*, если для любой (или, что эквивалентно, для какой-либо) $\omega \in \mathcal{O}$ функция λ есть функция Морса на M, постоянная на каждой связной компоненте ∂M. Орбита называется *положительной*, если $\lambda(x)$ положительна при всех $x \in M \setminus \partial M$.

Теорема 6.14 (см. [GK2]). *Пусть* $\dim M = 2n \geqslant 4$, *и* $\mathcal{O}$ — *орбита морсовского типа без дополнительных симметрий. Допустим, что* $\mathcal{O}$ *содержит стационарное решение. Тогда для любой* $\omega \in \mathcal{O}$ *критические точки функции вихря* λ *имеют индексы либо все не меньшие* n, *либо все не большие* n *на каждой связной компоненте* $M \setminus \{\lambda = 0\}$.

Пример 6.15. Если $\mathcal{O}$ — та же, что и выше, а $\lambda > 0$ на $M \setminus \partial M$, то λ не может иметь одновременно и локальный максимум (индекс $2n$), и локальный минимум (индекс 0) на $M \setminus \partial M$.

Доказательство теоремы. Предположим для простоты, что $\mathcal{O}$ — положительная орбита, т. е. $\lambda > 0$ на M. Для доказательства общего случая требуется лишь незначительная модификация. Пусть $\omega \in \mathcal{O}$ — стационарное решение ($L_v\omega = 0$), а α — соответствующая функция Бернулли такая, что $d\alpha = -i_v\omega$.

Поскольку $\lambda = \omega^n/\mu$ не допускает дополнительных симметрий и $\{\alpha, \lambda\} = 0$, функция α должна быть постоянна на связных компонентах λ-уровней.

Лемма 6.16. *Функции* λ *и* α *имеют одинаковые критические точки. В частности, критические точки функции* α *изолированы.*

Доказательство леммы. Так как λ не допускает дополнительных симметрий, из $d\lambda(x) = 0$ следует, что $d\alpha(x) = 0$. Оставшаяся часть критического множества функции α может быть лишь объединением нескольких связных компонент λ-уровней. Для векторного поля v и соответствующей двойственной 1-формы $u(\,.\,) = (v, \,.\,)$ имеем

$$u(v) = (v, v) \geqslant 0.$$

Рассмотрим векторное поле η на M, определенное формулой $i_\eta\omega = u$. Поле η растягивает форму $\omega = du$: $L_\eta\omega = \omega$. Более того, оно является градиентноподобным для функции Бернулли α:

$$L_\eta\alpha = i_\eta d\alpha = -i_\eta i_v\omega = i_v u = u(v) \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$L_\eta\alpha = 0 \Leftrightarrow u(v) = 0 \Leftrightarrow u = 0. \tag{6.1}$$

Если критическое множество функции α содержит связную компоненту Γ λ-уровня, то $L_{\eta_x}\alpha = 0$ при всех $x \in \Gamma$ и, как следствие эквивалентности (6.1), $u|_\Gamma = 0$. Поэтому $\omega|_\Gamma = du|_\Gamma = 0$. Но это невозможно, поскольку Γ является гиперповерхностью в симплектическом многообразии (M, ω) и $2n = \dim M \geqslant 4$. Лемма доказана. □

Теперь заметим, что все нули векторного поля η невырождены, как следует из $L_\eta\omega = \omega$. Следовательно, поле η имеет гладкие растягивающее и сжимающее многообразия дополнительных размерностей в окрестности каждой своей

особой точки. Кроме того, размерность растягивающего многообразия в каждой точке не меньше n. Действительно, сужение симплектической формы ω на сжимающее многообразие η должно равняться нулю в силу того, что поле η растягивает ω, и поэтому все сжимающие многообразия имеют размерности не выше n.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Поле η является градиентноподобным для функции α. Поэтому η либо градиентноподобное, либо антиградиентноподобное для λ на всем M, поскольку λ- и α-уровни совпадают в окрестности каждой критической точки и λ — функция Морса. Таким образом, во всех критических точках функции вихря λ размерности всех ее растягивающих или всех сжимающих многообразий одновременно ограничены числом n снизу. Отсюда и вытекает искомое неравенство для индексов Морса критических точек функции λ. □

Можно показать, что все критические точки функции α невырождены, за исключением, возможно, ее максимумов и минимумов.

Теорема 6.17 (см. [GK2]). *Пусть M диффеоморфно двумерному диску B^2. Если орбита морсовского типа $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ содержит стационарное решение, то для любой $\omega \in \mathcal{O}$ функция вихря λ не может иметь одновременно локальный максимум и локальный минимум в M при условии, что $\lambda > 0$ на $M \setminus \partial M$.*

Заметим, что, поскольку $\dim M = 2$, орбита $\mathcal{O}$ автоматически не допускает дополнительных симметрий. Приведенное ниже доказательство основано на следующем рассуждении, очевидном с физической точки зрения. Минимумы и максимумы функции вихря соответствуют вращениям жидкости в противоположных направлениях. С другой стороны, *априори* положительность λ означает закручивание жидкости против часовой стрелки.

Доказательство. Во-первых, напомним, что функция α не может иметь максимумов. Действительно, в окрестности максимума градиентноподобное (для α) поле η сжимало бы площадь, что противоречило бы уравнению $L_\eta \omega = \omega$. Пусть Γ — критическое множество функции α. Заметим, что поскольку α постоянна на ∂M, множество Γ либо содержит край ∂M, либо не пересекает его.

Покажем, что множество $M \setminus \Gamma$ связно. Допустим противное, тогда существует такое открытое множество $U \subset M \setminus \Gamma$, что $\partial U \subset \Gamma$. Множество U инвариантно относительно течения поля η, так как $d\alpha$ (а значит, и η) обращается в нуль на Γ. С другой стороны, как сказано выше, существование такого множества U противоречит увеличению площади.

Отметим, что поле η является градиентноподобным для λ в окрестности каждого локального минимума λ. Действительно, каждый локальный минимум функции λ одновременно локальный минимум функции α, а поле η градиентноподобно для α. В то же время, вблизи локального максимума функции λ поле η должно быть антиградиентноподобным для λ. Переход от градиентности к антиградиентноподобности (и наоборот) может иметь место только на Γ. Но Γ не разделяет M. Поэтому η является либо градиентноподобным, либо антиградиентноподобным на всем M. Это и доказывает теорему. □

6.4. Отсутствие гладких стационарных течений и точность ограничений

Применяя теоремы 6.14 и 6.17, можно легко найти коприсоединенную орбиту, которая не содержит стационарного решения.

Особенно прост случай, когда область M двумерна. Рассмотрим диск $M = B^2 \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ с $\mu = dx \wedge dy$ и $\omega = \lambda\mu$, где λ — положительная функция Морса на B такая, что $\lambda|_{\partial B} = \mathrm{const}$. Предположим также, что λ имеет и локальный максимум, и локальный минимум внутри B (см., например, рис. 20).

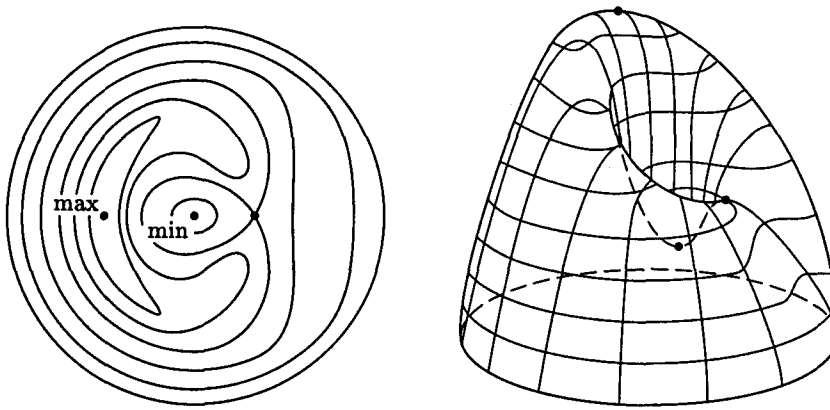


Рис. 20. Кривые уровня и профиль функции вихря, не имеющей гладкого стационарного течения

Следствие 6.18 (теоремы 6.17). *Не существует такого гладкого стационарного решения на B^2, функция вихря которого получается из функции λ применением сохраняющего площадь диффеоморфизма.*

Следует отметить, что «обобщенное стационарное решение» с разрывной функцией вихря все же может существовать и представлять определенный интерес для приложений [Mof4].

Замечание 6.19 (см. [GK2]). Оказывается, теоремы 6.8 и 6.10 представляют собой точные результаты, если не принимать во внимание метрику. А именно, не существует общих ограничений на топологию функции вихря за исключением тех, которые даны в теоремах.

В двумерном случае можно, например, рассмотреть положительную гладкую субгармоническую функцию λ на $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, постоянную на единичной окружности. Тогда на единичном диске B^2 существуют метрика $(\,.\,,\,.\,)$ и площадь μ такие, что λ является функцией вихря некоторого стационарного решения. В частности, функция вихря может иметь седловые критические точки, по крайней мере для некоторого выбора метрики и объема.

Аналог следствия 6.18 для высших размерностей вытекает из теоремы 6.14. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ — орбита морсовского типа, положительная (т. е. $\lambda > 0$) и не имеющая дополнительных симметрий.

Следствие 6.20 (теоремы 6.14). *Предположим, что в некоторой точке $\omega \in \mathcal{O}$ функция вихря λ имеет критическую точку индекса $k_1 < n$ и кри-*

тическую точку индекса $k_2 > n$, где $2n = \dim M$. Тогда коприсоединенная орбита $\mathcal{O}$ не содержит стационарных решений.

Следствие 6.21. *Предположим, что*

$$H^{k_1}(M, \mathbb{R}) \neq 0 \quad \text{и} \quad H^{k_2}(M, \mathbb{R}) \neq 0$$

для некоторых $k_1 < n$ и $k_2 > n$, тогда $\mathcal{O}$ не содержит стационарных решений.

Доказательство. Достаточно применить неравенства Морса. □

Теперь утверждение о точности ограничений выглядит следующим образом.

Теорема 6.22 (см. [GK2]). *Пусть M — компактное многообразие с краем, $\dim M = 2n \geqslant 6$, и λ — гладкая положительная функция на M такая, что f постоянна на связных компонентах границы ∂M и индексы всех критических точек функции λ не выше n. Предположим также, что M допускает почти комплексную структуру. Тогда существуют такие метрика и форма объема на M, что λ — функция вихря некоторого стационарного решения.*

Доказательство использует результат Я. Элиашберга [El2] о том, что многообразие M допускает комплексную структуру такую, что замкнутая 2-форма $\omega = -2\,\mathrm{Im}\,\partial\bar{\partial}\lambda$ является симплектической формой на M.

Различные связи между стационарными решениями и комплексными структурами, а также другие детали и более тонкие ограничения на пары (ω, λ), наложенные существованием стационарных решений, обсуждаются в [GK2].

ГЛАВА III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНИТНЫХ И ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ

Звезды и планеты часто состоят из почти идеальных проводников и обладают магнитными полями. Эти поля называют «вмороженными» в среду (например, в плазму или магму), несмотря на температуру порядка миллиона градусов. Математически это означает, что любое движение среды действует на эти поля как диффеоморфизм, сохраняя взаимное расположение силовых линий. Такое преобразование, вообще говоря, может уменьшить магнитную энергию поля. В то же время топологическая структура поля препятствует полной диссипации магнитной энергии звезды или планеты.

С другой стороны, неоднородность движения среды приводит к растяжению частиц и может поэтому увеличивать магнитную энергию (преобразуя часть кинетической энергии движения в магнитную энергию). Этот двойной механизм, очевидно, и производит эффект динамо, порождая сильное магнитное поле из очень малых магнитных «зерен» (см. гл. V).

§ 1. Минимальная энергия и спиральность вмороженного поля

1.1. Вариационная задача для магнитной энергии

Эта глава посвящена отысканию минимума энергии среди полей, полученных из данного бездивергентного векторного поля действием сохраняющих объем диффеоморфизмов.

Энергия векторного поля ξ, определенного в области M трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяется интегралом $E = \int\limits_M (\xi, \xi)\mu$. (Этот интеграл равен удвоенной энергии, изучавшейся в предыдущих главах, что заметно упрощает дальнейшие оценки. В этой главе пространство $\mathbb{R}^3$ всегда оснащено стандартной метрикой, а μ — форма объема.)

В более общей постановке предполагается, что M — риманово многообразие (возможно с краем), а поля бездивергентны по отношению к риманову объему. На поля накладываются некоторые граничные условия, например, предполагается, что поле касается границы ∂M многообразия M или что нормальная компонента поля равна заданной функции на границе. Энергия $E = \langle \xi, \xi \rangle = \int\limits_M (\xi, \xi)\mu$ есть *геометрическая* характеристика поля, зависящая от выбора римановой метрики $(\,.\,,\,.\,)$.

Нашей целью является оценить энергию посредством топологических характеристик поля. Свойство поля называется *топологическим*, если оно сохраняется под действием диффеоморфизмов, сохраняющих объем (и, возможно, меняющих метрику).

Замечание 1.1. В магнитной гидродинамике, где естественным образом возникает эта вариационная задача, роль ξ играет магнитное поле $\boldsymbol{B}$, вмороженное в идеально проводящую (но имеющую конечную вязкость ν) жидкость, которая заполняет «звезду» M.

При соответствующем выборе единиц измерения поле скоростей $\boldsymbol{v}$ и магнитное поле $\boldsymbol{B}$ удовлетворяют системе уравнений (ср. гл. I, § 10):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + (\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}\} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \end{cases}$$

где $\{\,.\,,\,.\,\}$ — скобка Пуассона двух векторных полей. Ковариантное дифференцирование $(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v}$, оператор Лапласа Δ, $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ и векторное произведение $\times$, стандартные для $\mathbb{R}^3$, имеют естественные обобщения на случай произвольного риманова многообразия M. В начальный момент заданы магнитное поле $\boldsymbol{B}$ и поле скоростей $\boldsymbol{v}$. Член $(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$ представляет собой силу Лоренца $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$, действующую на ток $\boldsymbol{j}$, совпадающий (с точностью до множителя 4π) с $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ согласно уравнению Максвелла.

Физики полагают, что в процессе эволюции кинетическая энергия рассеивается благодаря слагаемому $\nu\Delta\boldsymbol{v}$, содержащему вязкость, и «в конце концов» движение прекращается, причем каждая частица достигает некоторого конечного положения. Если это так, то вмороженное магнитное поле должно достигнуть некоторой конечной конфигурации. Энергия этого конечного поля должна быть локальным минимумом энергии, иначе магнитная энергия превращалась бы в кинетическую, и, вследствие силы Лоренца, жидкость двигалась бы и дальше до тех пор, пока под действием гидродинамической вязкости не рассеется избыток магнитной энергии над минимальным значением.

1.2. Экстремальные поля и их топология

Вариационный принцип для магнитных полей является двойственным к изучавшемуся в гл. II вариационному принципу для стационарных течений жидкости в следующем смысле.

Функционал энергии, который подвергается минимизации, одинаков в обеих задачах. Область определения этого функционала в случае магнитного поля состоит из всех полей, диффеоморфных данному, в то время как для идеальной жидкости область определения есть класс изозавихренных полей, т. е. полей с диффеоморфными роторами. (Термин «двойственный», употребленный выше, указывает на то, что область диффеоморфных полей — это присоединенная орбита в алгебре Ли всех бездивергентных векторных полей, тогда как изозавихренные поля образуют коприсоединенную орбиту этой алгебры, см. гл. I.)

Экстремальные поля в обеих вариационных задачах совпадают ([Arn9], доказательство см. в гл. II, § 2). Эти поля имеют особую топологию (ср. с гл. II, § 1). А именно, экстремалями являются бездивергентные поля, коммутирующие со своими роторами. Это либо течения Бельтрами (т. е. поля, пропорциональные своим роторам), либо «интегрируемые» течения, линии тока которых заполняют почти всюду торы и кольца (см. рис. 9 в гл. II).

Такой анализ топологии экстремальных полей не дает оснований надеяться, что идеализированная физическая модель затухания магнитного поля, описанная выше, верна для достаточно общих начальных условий. Действительно, можно выбрать начальное магнитное поле $\boldsymbol{B}$, не имеющее инвариантных магнитных поверхностей. Тогда конечное поле, если такое существует, не может иметь инвариантных торов или колец и должно быть соленоидальным полем весьма специального (Бельтрами) типа (см. работу [Hen], в которой впервые был численно обнаружен хаос в течениях Бельтрами). Но такие поля слишком редко встречаются, и среди них вряд ли найдется поле с заданной топологией магнитных линий.

Для адекватного описания физического процесса необходимо принять во внимание магнитную вязкость, нарушающую предположение о том, что поле вморожено, и вызывающую «переключение» магнитных линий. Такой процесс не учитывался в нашей первоначальной системе уравнений (следует добавить член $\mu\Delta\boldsymbol{B}$ в правую часть второго уравнения, чтобы отразить это явление).

Вопрос 1.2. В какой степени экстремальные поля могут быть использованы для изучения поведения $\boldsymbol{B}$ на больших интервалах времени? Какие явления возникнут, когда движение жидкости затухнет вследствие обычной вязкости, но магнитная вязкость еще не погасит магнитное поле $\boldsymbol{B}$?

1.3. Оценка энергии через спиральность

Пусть ξ — бездивергентное векторное поле, определенное в односвязной области $M \subset \mathbb{R}^3$ и касательное к краю области.

Определение 1.3. *Спиральностью* (или *инвариантом Хопфа*) поля ξ в области $M \subset \mathbb{R}^3$ называется величина

$$\mathcal{H}(\xi) = \int\limits_M (\xi, \operatorname{rot}^{-1}\xi)\, dV,$$

где $(\,.\,,\,.\,)$ — евклидово скалярное произведение, а $A = \operatorname{rot}^{-1}\xi$ — бездивергентный вектор-потенциал поля ξ, т. е. $\nabla \times A = \xi$, $\operatorname{div} A = 0$.

Этот интеграл не зависит от конкретного выбора вектор-потенциала A (который определяется с точностью до слагаемого — градиента ∇f гармонической функции, поскольку область M односвязна). Действительно, интегрируя по частям, получим следующее выражение для разности значений спиральности, соответствующих двум разным потенциалам A:

$$\int\limits_M (\xi, A_1)\mu - \int\limits_M (\xi, A_2)\mu = \int\limits_M (\xi, \nabla f)\mu = \int\limits_M (f \operatorname{div}\xi)\mu + \int\limits_{\partial M} f(\xi, dS) = 0,$$

где последний член равен нулю, так как ξ касается края ∂M. Отметим, что такое поле $A = \mathrm{rot}^{-1}\xi$ существует и определено единственным образом в односвязной области M при фиксировании некоторых граничных условий, например, когда поле A касается границы M (или, в более общей формулировке, когда нормальная к краю ∂M компонента (A, n) векторного поля A фиксирована). Если M неограничена (например, $M = \mathbb{R}^3$), предполагают, что поле ξ затухает на бесконечности достаточно быстро, так что указанный интеграл сходится.

Спиральность поля является мерой среднего зацепления линий поля (подробности см. ниже в п. 1.4).

Хотя понятие спиральности восходит к Гельмгольцу и Кельвину (см. [Kel]), своим вторым рождением в магнитной гидродинамике это понятие обязано Волтьеру [Wol], а в идеальной гидродинамике — Моффату [Mof1], который обнаружил его топологический характер (см. также [Mor2]). Слово «спиральность» было впервые введено в [Mof1] и с тех пор широко использовалось в механике жидкости и магнитной гидродинамике. Интересные обзоры по истории вопроса можно найти в [Mof2, MoT].

Важнейшее свойство этой величины состоит в следующем.

Теорема 1.4 (об инвариантности спиральности). *Спиральность $\mathcal{H}(\xi)$ сохраняется при действии на ξ сохраняющего объем диффеоморфизма области M.*

В этом смысле $\mathcal{H}(\xi)$ является топологическим инвариантом: хотя эта величина определена выше с помощью метрики, любой сохраняющий объем диффеоморфизм переводит поле ξ в поле с такой же спиральностью. Мы докажем данную теорему в немного более общей формулировке в конце этого параграфа, дав определение инварианта без использования метрики. Сейчас же мы получим непосредственное важное следствие.

Теорема 1.5 (см. [Arn9]). *Энергия и спиральность бездивергентного векторного поля ξ связаны следующим соотношением:*

$$E(\xi) \geqslant C|\mathcal{H}(\xi)|,$$

где C — положительная константа, зависящая от формы и размера компактной области M.

Доказательство состоит в применении неравенства Шварца

$$\mathcal{H}^2(\xi) = \langle \xi, A\rangle \leqslant \langle \xi, \xi\rangle\langle A, A\rangle$$

и неравенства Пуанкаре к векторному полю A (касательному к краю области M, если $\partial M \neq \varnothing$):

$$\langle A, A\rangle = \int\limits_M (A, A)\mu \leqslant \frac{1}{C^2}\int\limits_M (\xi, \xi)\mu = \frac{1}{C^2}\langle \xi, \xi\rangle$$

для $A = \mathrm{rot}^{-1}\xi$, $E(\xi) = \langle \xi, \xi\rangle$. □

Различные приложения этой теоремы можно найти в [MoT, L-A, CDG].

Замечание 1.6. Обратный (нелокальный) оператор rot^{-1} переводит пространство бездивергентных векторных полей (касательных к границе) на односвязном многообразии в себя. Этот оператор самосопряжен и его спектр накапливается к нулю с обеих сторон. Сужение оператора $-\mathrm{rot}^2$ на пространство бездивергентных векторных полей называется оператором Лапласа–Бельтрами на бездивергентных полях. Его компоненты в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ суть лапласианы компонент поля. Его спектр — последовательность вещественных чисел, стремящаяся к минус бесконечности. Данный лапласиан $-\mathrm{rot}^2$ отличается знаком от сужения оператора Лапласа $d\delta + \delta d$ (см. ниже п. 1.4 и гл. V, п. 3.2) на пространство замкнутых 2-форм. Здесь бездивергентное векторное поле ξ на трехмерном римановом многообразии рассматривается как соответствующая замкнутая 2-форма $i_\xi \mu$.

Следствие 1.7. *Собственное поле оператора* rot^{-1}, *соответствующее максимальному по абсолютной величине собственному значению* λ, *имеет минимальную энергию в классе бездивергентных полей, полученных из данного собственного поля с помощью сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов.*

Действительно, для любого поля ξ энергию $E(\xi)$ можно оценить снизу следующим образом:

$$E(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle \geqslant \frac{1}{\lambda} \langle \mathrm{rot}^{-1}\xi, \xi \rangle,$$

причем равенство имеет место для собственного поля с собственным значением λ. В общем случае константа C, фигурирующая в предыдущей теореме, может быть выбрана равной $|\lambda|$. Явные оценки константы C для областей в $\mathbb{R}^3$, а также обсуждение геометрии экстремальных векторных полей могут быть найдены в [CDG].

Замечание 1.8. Приведенные теоремы, как и многие дальнейшие результаты, имеют место для более общего случая многообразий M, первая группа гомологий у которых равна нулю, $H_1(M, \mathbb{R}) = 0$.

Эти утверждения также справедливы для произвольного замкнутого трехмерного риманова многообразия, если ограничиться случаем «гомологичных нулю» бездивергентных полей (т. е. полей, имеющих однозначный бездивергентный потенциал).

Пример 1.9. Стандартное *векторное поле Хопфа* на сфере

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \right\},$$

определенное соотношением

$$\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3),$$

соответствует максимальному собственному значению (равному $1/2$) оператора rot^{-1} на S^3 с канонической индуцированной метрикой и ориентацией, заданной внутренней нормалью. Траектории этого поля суть большие круги, по которым $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ пересекает комплексные линии $\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2$ (см. рис. 21, где

изображены v-траектории при стереографической проекции $S^3 \to \mathbb{R}^3$). Эти траектории попарно зацеплены. Поле Хопфа на S^3 имеет минимальную энергию среди всех диффеоморфных ему полей, т. е. полей, получаемых с помощью сохраняющего объем диффеоморфизма.

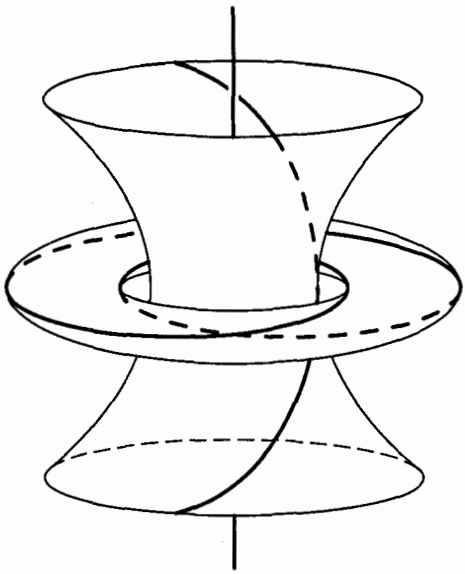


Рис. 21. Поле Хопфа в $\mathbb{R}^3$ (стереографическая проекция из S^3). Одна окружность переходит в вертикальную ось. Любые две траектории зацеплены

1.4. Спиральность полей на многообразиях

В этом разделе мы рассмотрим определение интеграла спиральности на многообразиях [Arn9], установим его простейшие свойства (в частности, топологическую инвариантность) и сравним результат с приведенным выше определением 1.3. Этот инвариант имеет интересный топологический смысл, который будет обсуждаться в следующих двух параграфах.

Пусть M — трехмерное многообразие, замкнутое (компактное, без края), ориентированное и связное, и пусть μ — элемент объема (т. е. не обращающаяся в нуль дифференциальная 3-форма, определяющая ориентацию) на M. Отметим, что мы фиксируем элемент объема на M, но не выбираем никакой римановой метрики.

Определение 1.10. Каждое векторное поле ξ на M определяет дифференциальную 2-форму ω_ξ согласно формуле

$$\omega_\xi(\eta, \zeta) = \mu(\xi, \eta, \zeta)$$

для любых векторных полей η и ζ. Соответствие $\xi \mapsto \omega_\xi = i_\xi \mu$ есть изоморфизм линейных пространств полей и 2-форм. Дифференциал формы ω_ξ, будучи

3-формой, может быть выражен через объем

$$d\omega_\xi = \varphi\mu,$$

где $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Функция φ называется *дивергенцией* поля ξ: $\varphi = \operatorname{div}\xi$. Поле скоростей течения, сохраняющего элемент объема на M, бездивергентно; и наоборот, каждое поле на M с равной нулю дивергенцией есть поле скоростей несжимаемого течения.

Замечание 1.11. Происхождение дивергенции объясняется гомотопической формулой для производной Ли $L_\xi = i_\xi d + d i_\xi$. Производная Ли L_ξ есть производная произвольной дифференциальной формы f вдоль векторного поля ξ, определенная как производная формы $g^{t*}f$, переносимой потоком g^t векторного поля ξ, вычисленная в начальный момент $t = 0$:

$$L_\xi f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g^{t*}f).$$

Здесь операция i_ξ — подстановка векторного поля ξ в дифференциальную форму в качестве первого аргумента, а d обозначает внешнюю производную. Вычисляя производную Ли формы объема μ, имеем $L_\xi\mu = i_\xi d\mu + d i_\xi\mu = d\omega_\xi = \varphi\mu$. Таким образом, функция φ есть коэффициент увеличения (или уменьшения) формы объема под действием поля ξ.

Определение 1.12. Бездивергентное векторное поле ξ на M называется *полем, гомологичным нулю*, если соответствующая 2-форма ω_ξ является дифференциалом глобально определенной 1-формы α на M,

$$\omega_\xi = d\alpha.$$

Будем называть 1-форму α *формой-потенциалом*. Поле гомологично нулю тогда и только тогда, когда его поток через каждую замкнутую поверхность равен нулю. Для односвязного замкнутого M любое бездивергентное векторное поле гомологично нулю.

Замечание 1.13. Если M оснащено римановой метрикой $(.,.)$, то 1-форму α можно отождествить с векторным полем A, для которого

$$\alpha(\eta) = (A, \eta) \quad \text{для любого поля } \eta.$$

Здесь $\xi = \operatorname{rot} A$ (в евклидовом случае $\xi = \nabla \times A$), а векторное поле A называется *вектор-потенциалом* поля ξ. Следует заметить, что формы ω и α (в отличие от поля A) не зависят от римановой метрики, а только от выбора формы объема μ.

Определение 1.14. *Спиральностью* (или *инвариантом Хопфа*) $\mathcal{H}(\xi)$ гомологичного нулю поля ξ на трехмерном многообразии M (возможно, имеющем край), снабженном формой объема μ, называется интеграл внешнего произведения формы ω_ξ и ее формы-потенциала:

$$\mathcal{H}(\xi) = \int\limits_M \alpha \wedge d\alpha = \int\limits_M d\alpha \wedge \alpha, \quad \text{где } d\alpha = \omega_\xi.$$

Теорема 1.15. *Значение $\mathcal{H}$ корректно определено, т. е. зависит не от конкретного выбора формы-потенциала α, а только от поля ξ:*

1) *для многообразия M без края или*

2) *для односвязного многообразия M с краем при условии, что поле ξ касательно к ∂M.*

Доказательство. 1) Предположим сначала, что M не имеет границы. Если $\beta = \alpha + \theta$ — какая-либо другая форма-потенциал для той же 2-формы ω_ξ, то $d\theta = 0$, и поэтому

$$\int\limits_M \alpha \wedge d\alpha - \int\limits_M \beta \wedge d\beta = \int\limits_M \theta \wedge d\alpha = \int\limits_M d(\theta \wedge \alpha) = \int\limits_{\partial M = \varnothing} \theta \wedge \alpha = 0.$$

2) Пусть теперь $\partial M \neq \varnothing$. В односвязном случае вариация θ формы-потенциала точна ($\theta = df$ для некоторой функции f на M), а вариация величины $\mathcal{H}$ равна

$$\int\limits_M \theta \wedge d\alpha = \int\limits_M df \wedge d\alpha = \int\limits_M d(f \wedge d\alpha) = \int\limits_{\partial M} f \wedge d\alpha = 0,$$

где $d\alpha$ обращается в нуль на ∂M благодаря условию $\xi \parallel \partial M$. □

Замечание 1.16. При наличии римановой метрики на M спиральность можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{H}(\xi) = \int\limits_M \alpha \wedge \omega_\xi = \int\limits_M \alpha \wedge i_\xi \mu = \int\limits_M \alpha(\xi) \wedge \mu = \int\limits_M (A, \xi)\mu = \langle \mathrm{rot}^{-1}\xi, \xi \rangle,$$

где A — какой-либо вектор-потенциал поля ξ. (Перенос оператора подстановки от μ к α допустим потому, что i_ξ — (внутреннее) дифференцирование: $i_\xi(\alpha \wedge \mu) = i_\xi \alpha \wedge \mu - \alpha \wedge i_\xi \mu$.) Поэтому в соответствии с определением 1.3 спиральность $\mathcal{H}$ равна скалярному произведению поля и его вектор-потенциала.

Изложенный выше подход, в котором не используются координаты, приводит к следующему утверждению.

Следствие 1.17. *Спиральность гомологичного нулю векторного поля ξ сохраняется при произвольном сохраняющем объем диффеоморфизме многообразия M. Для односвязного многообразия M с краем спиральность бездивергентного векторного поля, касательного к краю, не меняется при всех сохраняющих объем диффеоморфизмах многообразия M, которые переводят край ∂M в себя.*

В частности, на римановом многообразии скалярное произведение бездивергентного поля и его вектор-потенциала сохраняется, когда на поле действует сохраняющий объем диффеоморфизм.

Доказательство. Инвариантность $\mathcal{H}$ относительно диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, следует из одного лишь того факта, что $\mathcal{H}$ можно определить, не используя других структур, кроме гладкой структуры M и элемента объема μ. □

Это рассуждение и составляет доказательство теоремы 1.4 об инвариантности спиральности.

Пример 1.18 (ср. 1.9). Спиральность векторного поля Хопфа на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ (определенного в примере 1.9, рис. 21) равна π^2. Действительно,

$$\mathcal{H}(v) = \int\limits_{S^3} (v, \operatorname{rot}^{-1} v)\mu = \frac{1}{2}\int\limits_{S^3} (v, v)\mu = \frac{1}{2}\int\limits_{S^3} \mu = \frac{\operatorname{vol}(S^3)}{2} = \frac{2\pi^2}{2} = \pi^2,$$

поскольку собственное значение оператора rot^{-1} для поля Хопфа v на S^3 равно $1/2$, а объем S^3 равен $2\pi^2$.

Пример 1.19. Любому гладкому отображению $\pi\colon S^3 \to S^2$ можно поставить в соответствие следующее целое число, называемое *инвариантом Хопфа* отображения π. Зафиксируем на сфере S^2 произвольную форму площади ν, нормированную условием $\operatorname{area}(S^2) := \int\limits_{S^2} \nu = 1$. Такая форма замкнута на сфере S^2, и поэтому ее прообраз $\pi^*\nu$ является замкнутым, а значит и точным на S^3 (так как $H^2(S^3) = 0$). То есть существует такая 1-форма α на S^3, что $d\alpha = \pi^*\nu$. Тогда инвариант Хопфа отображения π есть $\mathcal{H}(\pi) = \int\limits_{S^3} \alpha \wedge \pi^*\nu$.

Предложение 1.20. *$\mathcal{H}(\pi)$ является целочисленной величиной.*

Идея доказательства. Выберем в качестве ν форму типа δ-функции на S^2 с носителем, состоящим из одной точки. Сравним результат с топологическим определением инварианта Хопфа, которое приводится ниже. □

Если на S^3 задана форма объема, то число $\mathcal{H}(\pi)$ равно спиральности бездивергентного векторного поля ξ, определенного условием $i_\xi\mu = \pi^*\nu$. Траектории этого поля замкнуты, будучи прообразами точек S^2 относительно отображения π. Приведенное выше определение спиральности есть обобщение инварианта Хопфа на случай, когда точная 2-форма на S^3 (или на M^3) не обязательно является прообразом формы площади на S^2 для какого-либо отображения π.

Вот эквивалентное топологическое определение инварианта Хопфа. Инвариант Хопфа для отображения $S^3 \to S^2$ — это коэффициент зацепления в S^3 прообразов двух точек общего положения в S^2, см. рис. 22. Эквивалентность топологического и интегрального определений этого инварианта будет играть основную роль в настоящей главе.

Теорема 1.5 утверждает, что для отображения $\pi\colon S^3 \to S^2$ с ненулевым инвариантом Хопфа $\mathcal{H}(\pi)$ абсолютная величина этого инварианта ограничивает (с точностью до множителя) снизу энергию соответствующего векторного поля. Это поле направлено вдоль слоев отображения. Длина вектора поля определяется формой объема на S^3 и поднятием элемента площади с S^2.

Замечание 1.21. Л. Д. Фаддеев предложил другую, но близкую вариационную задачу для отображений π из $\mathbb{R}^3$ в S^2. На пространстве таких отображений рассмотрим функционал, который является (взвешенной) суммой двух членов. Первый член является интегралом Дирихле (от квадрата производной) отображения π. Второй член является энергией векторного поля, направленного вдоль слоев отображения. Тогда этот функционал ограничивается снизу (с точностью до множителя) величиной $|\mathcal{H}(\pi)|^{3/4}$, где $\mathcal{H}(\pi)$ — инвариант Хопфа отображения $\pi\colon S^3 \to S^2$ [V-K]. Доказательство использует

одну из разновидностей неравенства Соболева [Sob1], ср. с теоремой 5.3 ниже и ее доказательством, которое использует это же неравенство.

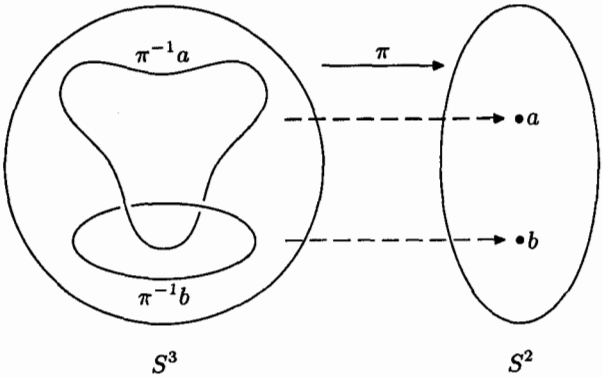


Рис. 22. Инвариант Хопфа для отображения $S^3 \to S^2$

Кроме того, недавние компьютерные эксперименты для релаксационных процессов с начальным отображением, имеющим ненулевой инвариант Хопфа, продемонстрировали следующее явление. В эквивариантном случае (когда S^1 действует вращениями на S^2 и $\mathbb{R}^3$) наблюдаются «энергетические дыры» над полюсами, где ось вращения пересекает сферу. Было бы очень интересно найти объяснение этим особенностям.

Добавление интеграла Дирихле к энергии подобно добавлению множителя Лагранжа в задаче минимизации энергии. Мы могли бы начать с действия всех диффеоморфизмов и затем рассмотреть условный минимум для действия подгруппы диффеоморфизмов, сохраняющих объем.

Замечание 1.22. Инвариант Хопфа позволяет ввести на алгебре Ли бездивергентных векторных полей на замкнутом односвязном трехмерном многообразии *билинейную форму*

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \langle \xi, \operatorname{rot}^{-1}\eta \rangle,$$

где $\operatorname{rot}^{-1}\eta$ — вектор-потенциал поля η.

Эта форма инвариантна относительно естественного действия сохраняющих объем диффеоморфизмов на векторных полях (т. е. относительно присоединенного действия группы $S\mathrm{Diff}(M)$ на своей алгебре Ли, см. гл. I).

Кроме того, форма $\mathcal{H}$ *симметрична*, так как

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \int_M i_\xi \mu \wedge d^{-1}(i_\eta \mu) = \int_M d^{-1}(i_\xi \mu) \wedge i_\eta \mu = \int_M i_\eta \mu \wedge d^{-1}(i_\xi \mu) = \mathcal{H}(\eta, \xi).$$

Как положительное, так и отрицательное подпространства формы $\mathcal{H}$ бесконечномерны (см. [Arn9, Smo1]). Таким образом, $\mathcal{H}$ порождает *биинвариантную псевдоевклидову* (знаконеопределенную) метрику на соответствую-

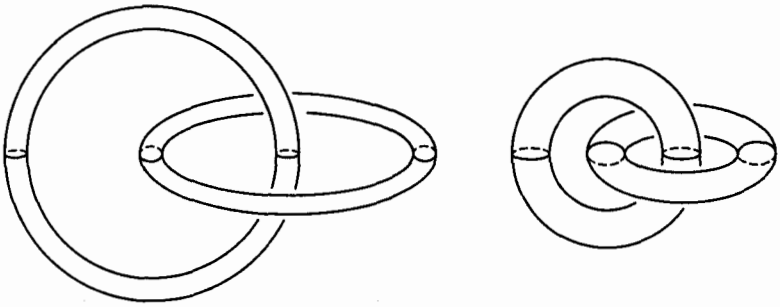
щей группе $S\mathrm{Diff}(M)$. В случае неодносвязного M следует ограничиться подалгеброй всех гомологичных нулю векторных полей в алгебре Ли всех бездивергентных векторных полей на M (подробности см. гл. IV, п. 8.4).

В этом случае также можно надеяться построить обобщение инвариантов Хопфа со значениями в модулях над фундаментальной группой, но такой подход еще недостаточно исследован.

§ 2. Топологические препятствия к релаксации энергии

2.1. Модельный пример: две зацепленных трубки тока

На примере магнитного поля, заключенного в двух зацепленных полноториях (рис. 23, *a*, *b*) легко увидеть, как спиральность препятствует релаксации энергии. Предположим, что поле обращается в нуль вне этих трубок, а внутри них все траектории поля замкнуты и направлены вдоль осей трубок.



a *b*

Рис. 23. (*a*) Магнитное поле внутри двух зацепленных полноторий. (*b*) Релаксация расширяет торы и сжимает траектории поля

Чтобы минимизировать энергию векторного поля с замкнутыми траекториями при помощи действия на поле сохраняющего объем диффеоморфизма, следует уменьшить длину большинства траекторий. (Действительно, периоды траекторий сохраняются при диффеоморфизме, поэтому уменьшение длин траекторий сжимает векторы скорости вдоль траекторий.) В свою очередь, укорачивание траекторий означает расширение полнотория (поскольку при диффеоморфизме сохраняется объем).

Для зацепления, изображенного на рис. 23, *b*, полнотории мешают друг другу неограниченно утолщаться и значит препятствуют неограниченному укорачиванию траекторий. Поэтому, на уровне эвристических соображений, в процессе релаксации, сохраняющей объем, магнитная энергия поля, заключенного в паре зацепленных трубок, ограничена снизу и не может достигать слишком малых значений [Sakh].

Ниже мы покажем, что спиральность поля является мерой скорости взаимного наматывания траекторий поля друг на друга (или «спиралеподобности» поля). Чтобы лучше понять это замечание (и идею предыдущего параграфа

«спиральность как нижняя граница энергии»), мы еще раз сосредоточимся на рассмотренной выше вырожденной ситуации (см. [Mof1]).

Пусть магнитное (т. е. бездивергентное) поле ξ тождественно равно нулю везде, за исключением двух узких зацепленных трубок тока, осями которых являются замкнутые кривые C_1 и C_2. Пусть магнитные потоки поля в трубках равны Q_1 и Q_2 (рис. 24).

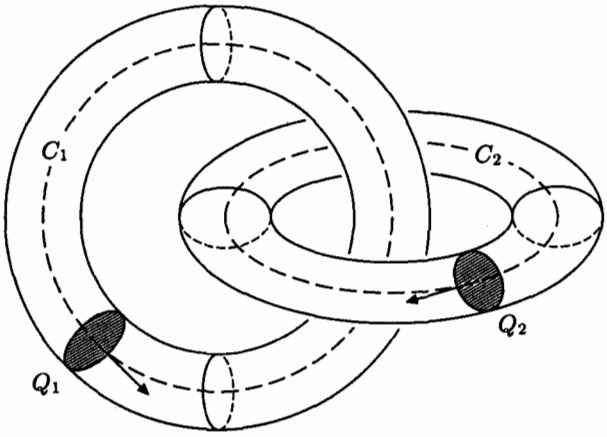


Рис. 24. C_1, C_2 — оси трубок, Q_1, Q_2 — соответствующие потоки

Будем считать, что внутри каждой трубки нет перекручивания, или точнее, что траектории поля расслаивают каждую трубку на попарно незацепленные окружности.

Лемма 2.1. *Спиральность такого поля равна*

$$\mathcal{H}(\xi) = 2\mathrm{lk}(C_1, C_2)Q_1Q_2, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{lk}(C_1, C_2)$ — *коэффициент зацепления кривых* C_1 *и* C_2.

Определение 2.2. (Гауссов) *коэффициент зацепления* $\mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ двух ориентированных замкнутых кривых Γ_1, Γ_2 в $\mathbb{R}^3$ есть взятое с учетом знаков число точек пересечения одной кривой с произвольной (ориентированной) поверхностью, ограниченной другой кривой (см. рис. 25). Знак каждой точки пересечения определяется ориентацией трехмерного репера, который образован в этой точке вектором скорости кривой и двумерным репером, задающим ориентацию поверхности.

Коэффициент зацепления двух ориентированных замкнутых кривых симметричен: $\mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \mathrm{lk}(\Gamma_2, \Gamma_1)$.

Доказательство леммы. Объемный интеграл спиральности $\mathcal{H}(\xi) = \langle \mathrm{rot}^{-1}\xi, \xi\rangle = \int (A, \xi)\mu$ по трубкам (здесь $A = \mathrm{rot}^{-1}\xi$) распадается в сумму соответствующих одномерных интегралов:

$$\mathcal{H}(\xi) = Q_1 \int\limits_{C_1} (A, dC_1) + Q_2 \int\limits_{C_2} (A, dC_2).$$

Действительно, элемент объема μ в каждой трубке равен произведению элемента длины dC_i и элемента площади dS_i поперечного сечения трубки. В свою очередь, интеграл от ξdS_i по соответствующему поперечному сечению равен потоку Q_i. Поэтому

$$\int\limits_{i\text{-я трубка}} (A,\xi)\, dS_i\, dC_i = \int\limits_{C_i}\int\limits_{S_i} (A, (\xi dS_i) dC_i) = Q_i \int\limits_{C_i} (A, dC_i).$$

Кроме того, циркуляция $\int\limits_{C_1} (A, dC_1)$ поля A по кривой C_1 есть полный поток поля $\operatorname{rot} A = \xi$ через поверхность, ограниченную осевой кривой C_1. Этот поток равен $Q_2 \operatorname{lk}(C_1, C_2)$, так как каждое пересечение поверхности второй трубкой дает вклад в $\pm Q_2$ в зависимости от знака пересечения. Отметим, что первая трубка сама не дает вклада в поток через ее ось C_1 в силу сделанного предположения про отсутствие перекручивания траекторий внутри трубок.

Применение того же рассуждения ко второму интегралу циркуляции удваивает результат: $\mathcal{H}(\xi) = 2\operatorname{lk}(C_1, C_2) Q_1 Q_2$. □

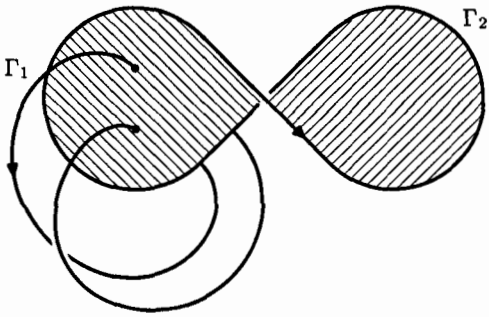


Рис. 25. Коэффициент зацепления для Γ_1 и Γ_2 — количество пересечений (с учетом их знаков) Γ_1 с поверхностью, ограниченной Γ_2

Обобщение этого примера на случай произвольного бездивергентного векторного поля ξ описано в § 4.

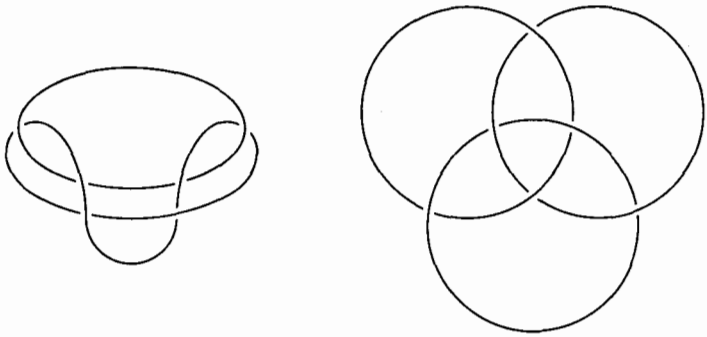
2.2. Нижняя граница энергии для нетривиального зацепления

Коэффициент зацепления является довольно грубым инвариантом зацепления. Входящее в определение lk число пересечений с учетом знаков может оказаться равным нулю для существенно зацепленных конфигураций кривых (см., например, так называемое зацепление Уайтхеда на рис. 26, *а*). Тем не менее, эвристические рассуждения о положительности нижней границы энергии, приведенные в начале п. 2.1, по-прежнему справедливы.

Эти эвристические соображения подтверждаются следующим результатом М. Фридмана [Fr1]: произвольное существенное зацепление между трубками ξ-интегральных кривых влечет отграниченность E от нуля.

Определение 2.3. Зацепление L, т. е. гладкое вложение n окружностей в трехмерное многообразие, называется *тривиальным*, если оно ограничивает n гладко вложенных попарно непересекающихся дисков. В противном случае зацепление называется *существенным*.

Векторное поле ξ на M называется *смоделированным по* L, если существует некоторая ξ-инвариантная трубчатая окрестность зацепления L, расслоенная интегральными кривыми поля ξ и диффеоморфная объединению $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i^2 \times S^1$, расслоенному на окружности {точка} $\times S^1$ (здесь D^2 — двумерный диск).



a *b*

Рис. 26. Нетривиальные зацепления с попарно равными нулю коэффициентами зацепления: (*a*) зацепление Уайтхеда, (*b*) кольца Борромео

Теорема 2.4 (см. [Fr1]). *Если ξ — бездивергентное векторное поле на замкнутом трехмерном многообразии M, смоделированное по существенному зацеплению или узлу L, то существует положительная нижняя грань энергии полей, получаемых из ξ с помощью сохраняющих объем диффеоморфизмов M.*

При дополнительном предположении, что поле сильно смоделировано по зацеплению, нижняя грань энергии поля в $\mathbb{R}^3$ была получена в [FH1] явным образом. Бездивергентное поле ξ *сильно смоделировано по* L, если существует сохраняющее объем вложение, которое переводит поле $\partial/\partial\theta$, направленное вдоль окружностей в $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (D_i^2 \times S^1)_i$, в поле ξ внутри трубчатой окрестности L. Пусть эта окрестность состоит из нескольких полноториев равного объема, который обозначим через V.

Теорема 2.5 (см. [FH1]). *Энергия векторного поля ξ, сильно смоделированного по существенному зацеплению L в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяет неравенству*

$$E(\xi) > \left(\frac{\sqrt{6/125}}{\pi^2}\right)^{4/3} V^{5/3} \approx 0{,}00624 V^{5/3}.$$

Отметим, что если задано какое-нибудь зацепление, то всегда можно построить поле, смоделированное (и даже сильно смоделированное) по нему.

Показатель степени 5/3 в неравенстве имеет следующее происхождение. При евклидовом расширении с коэффициентом l поле в образе увеличивается в l раз, а элемент объема в l^3 раз. Таким образом, полная энергия увеличивается в l^5 раз, в то время как объем — в l^3 раз. Поэтому отношение $E/V^{5/3}$ имеет чисто геометрический смысл и не зависит от выбора масштаба в евклидовом случае.

Замечание 2.6. Теорему 2.5 можно использовать для построения множества инвариантов топологических или гладких трехмерных многообразий. Инварианты параметризуются изотопическими классами узлов и зацеплений в данном многообразии. Их можно также считать инвариантами вложений одномерных многообразий в трехмерные.

Рассмотрим отношение $E/V^{5/3}$ для векторного поля, сильно смоделированного по узлу или зацеплению данного изотопического класса в римановом многообразии. Возьмем нижнюю грань по всем таким полям и по всем римановым метрикам. Результат будет инвариантом гладкого (возможно, даже топологического) изотопического класса такой пары (зацепление, трехмерное многообразие). Далее, можно взять точную нижнюю грань по всем компактным трехмерным многообразиям для данного зацепления гомотопически тривиального в каждом из них, чтобы получить инвариант классического зацепления или узла. (Будет ли эта нижняя грань равна нижней грани указанного отношения для трехмерного евклидова пространства или трехмерной сферы? Будет ли верхняя грань по всем трехмерным многообразиям конечной?)

Можно рассмотреть сначала компактное риманово многообразие с единичным объемом и с зацеплением k полноториев, каждое из которых имеет объем V. Если kV меньше единицы, то нижняя грань $E/V^{5/3}$ по метрикам с общим объемом равным единице есть функция от V, по-прежнему, являющаяся инвариантом вложения. Мы не знаем, являются ли эти инварианты нетривиальными, т. е. различают ли они какие-либо трехмерные многообразия или вложения (см. замечание 6.7.2).

Фридман и Хе сообщили нам, что теорему 2.5 можно обобщить на случай произвольного риманова многообразия. Предельное значение коэффициента $C(V)$ для малых объемов V есть та же константа, что и в евклидовом случае, определяемая теоремой 2.5: $C = \left(\frac{\sqrt{6/125}}{\pi^2}\right)^{4/3}$.

Структура сильно смоделированных полей очень проста вблизи зацепления, и эти поля сильно отличаются от полей общего положения в пространстве бездивергентных векторных полей. Было бы интересно попытаться полностью избавиться от условия существования особой цилиндрической окрестности.

Задача 2.7. Положительна ли нижняя грань энергии для поля, имеющего множество замкнутых траекторий, которые образуют существенное зацепление на римановом многообразии (без каких-либо предположений об окрестности замкнутых траекторий)?

Замечание 2.8. По-видимому самый сильный результат в этом направлении был получен в [FH2] (см. § 5), где условие того, что поле смоделировано по зацеплению, было ослаблено и заменено требованием, чтобы поле в $\mathbb{R}^3$

имело инвариантные торы, ограничивающие компоненты зацепления. Такие поля образуют достаточно обширное множество вблизи интегрируемых бездивергентных течений. Это следует из КАМ-теории гамильтоновых возмущений интегрируемых гамильтоновых систем.

В частности, если замкнутая траектория поля *эллиптическая* (и общего положения), т. е. ее отображение Пуанкаре имеет два собственных значения, равных единице по модулю, то эта траектория лежит внутри системы вложенных торов, инвариантных относительно поля (см., например, [AKN]). Таким образом, *каждая такая траектория, образующая существенный узел, гарантирует положительную нижнюю грань энергии соответствующего поля.* Действительно, энергия каждого из инвариантных полноториев, ограничивающих эту заузленную траекторию, не может обратиться в нуль, как показано в [FH2]. С другой стороны, по-видимому, векторное поле с заузленной *гиперболической* замкнутой траекторией (отображение Пуанкаре которой имеет вещественные собственные значения с отличными от единицы модулями) может и не иметь положительную нижнюю грань энергии (ср. следующий параграф).

Замечание 2.9. Различные оценки магнитной энергии для тривиальных и нетривиальных зацеплений инвариантных полноториев имеют замечательный аналог в теории броуновского движения.

Пусть K — узел в S^3, $\{z(t)\colon t > 0\}$ — стандартное броуновское движение на S^3 с началом в некоторой точке $O \notin K$, находящейся на расстоянии $d(O, K) = \tau > 0$ от K. Если K не заузлен, то почти наверняка существует такая последовательность $t_1 < t_2 < \dots$, что $t_n \to \infty$ и для которой $d(z(t_n), O) \leqslant \tau/2$. Кроме того, петля, которую мы получаем, двигаясь вдоль броуновской траектории до точки $z(t_n)$, а затем соединяя точки $z(t_n)$ и O коротким путем $\Delta(z(t_n), O)$, гомотопна O в $S^3 \setminus K$ [Var]. Иными словами, (почти наверняка) броуновская траектория бесконечно много раз возвращается в окрестность своей начальной точки, и при этом сама траектория не зацеплена с K.

Ситуация становится прямо противоположной, когда K заузлен: почти наверняка существует такое $T > 0$, что при любом достаточно малом расстоянии $d(z(t), O) \leqslant \tau/2$ и любом $t > T$ гомотопический класс указанной петли нетривиален [Var]. В этом смысле броуновское движение показывает, является ли K существенным узлом или нет. На эвристическом уровне это значит, что броуновское движение характеризует существование гиперболической метрики на универсальном накрытии $S^3 \setminus K$ (см. теорему Терстона о гиперболической структуре на дополнении к нетривиальному узлу или зацеплению [Th2]). О броуновском движении вокруг узлов и о различных топологических проблемах, связанных с полимерами, см. также в [KhV].

§ 3. Задача минимизации Сахарова–Зельдовича

Предположим теперь, что бездивергентное поле имеет тривиальную топологию: все траектории поля замкнуты и попарно незацеплены. Примером такого поля является поле вращения в трехмерном шаре, см. рис. 27. Оцен-

ки снизу для энергии, рассмотренные в § 2, справедливы для существенных зацеплений и неприменимы здесь. В этом случае, напротив, энергию поля можно уменьшить почти до нуля путем подходящего выбора сохраняющих объем диффеоморфизмов [Zel2, Sakh, Arn9, Fr2].

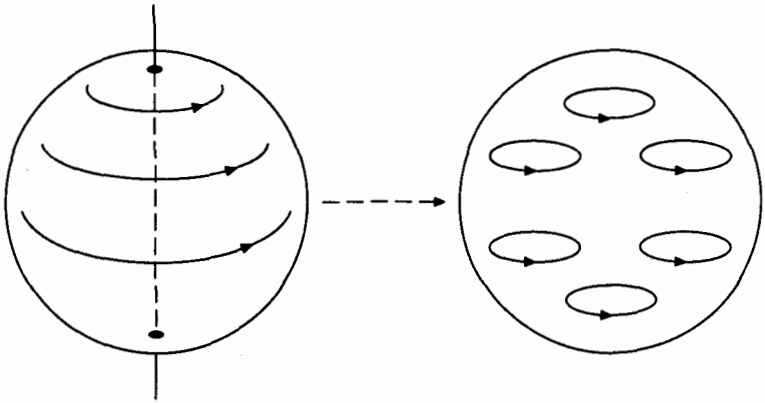


Рис. 27. Энергия поля вращения в трехмерном шаре может почти полностью рассеиться

Теорема 3.1. *Энергия поля вращения в трехмерном шаре может принимать сколь угодно малые значения при соответствующем выборе диффеоморфизма, сохраняющего элемент объема и оставляющего неподвижными точки в окрестности границы шара.*

Замечание 3.2. Этот результат, сформулированный А. Сахаровым и Я. Зельдовичем [Sakh, Zel2], основан на следующих рассуждениях. Разобьем весь шар на ряд тонких полноториев, образованных траекториями поля, и пусть оставшаяся часть имеет малый объем. Затем будем деформировать каждое полноторие (сохраняя его объем) так, чтобы сделать его толстым и коротким, сужая отверстие почти до нулевого. (Такие деформации должны нарушать осевую симметрию поля, поскольку любой осесимметричный диффеоморфизм переводит поле вращения в себя, а значит, сохраняет полную энергию.) Тогда энергия поля в полноториях уменьшится (так как линии поля укоротятся). Вся эта конструкция может быть реализована таким образом, чтобы энергия поля в оставшемся малом объеме не слишком возросла. В результате полная энергия станет произвольно малой.

Эти соображения были строго обоснованы М. Фридманом. Ниже мы вкратце приведем основные идеи его доказательства.

Пусть B^3 — шар в трехмерном евклидовом пространстве, а ξ — векторное поле, порожденное бесконечно малым вращением вокруг вертикальной оси. Траектории этого поля — горизонтальные попарно незацепленные окружности (и их центры — точки, лежащие на вертикальной оси).

Теорема 3.3 (см. [Fr2]). *Существует семейство сохраняющих объем диффеоморфизмов $\varphi_t\colon B^3 \to B^3$, $1 \leqslant t \leqslant \infty$, начинающееся с тождественного диффеоморфизма ($\varphi_1 = \mathrm{Id}$), стационарное на границе ($\varphi_t|_{\partial B^3} = \mathrm{Id}$) при всех t,*

такое что семейство преобразованных векторных полей $\xi_t := \varphi_{t*}\xi$ *(которое является образом поля вращения* ξ *при действии* φ_t*) удовлетворяет следующим условиям при* $t \to \infty$:

1) *энергия поля* ξ_t *убывает как* $E(\xi_t) := \|\xi_t\|^2_{L^2} = \mathcal{O}(1/t)$,

2) L^∞*-норма неограничена,* $\|\xi_t\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(t)$, *однако*

3) *при всех* $k, p < \infty$ *соболевские нормы стремятся к нулю* $\|\xi_t\|_{L^{k,p}} \to 0$ *(здесь* $\|\eta\|_{L^{k,p}}$ *—* L^p*-норма в пространстве производных порядков* $0, \ldots, k$*).*

Замечание 3.4 (см. [Fr2]). Для этого семейства диффеоморфизмов предел $\xi_t = \varphi_{t*}\xi$ при $t \to \infty$ не существует, но для больших t область больших значений нормы $\|\xi_t\|$ образует «топологическую пену» $\mathcal{F}_t$ с тривиальной относительной топологией. Множество $\mathcal{F}_t$ имеет фрактальную структуру (размер грани уменьшается скачками в ходе ряда бифуркаций при увеличении t) и плотно при $t \to \infty$.

Идея доказательства. Следующая лемма является модификацией результата Мозера [Mos1] о существовании сохраняющих объем диффеоморфизмов между диффеоморфными многообразиями равного объема.

Лемма 3.5. *Пусть* D *и* D' *— области равного объема в* $\mathbb{R}^m$, *а* $f\colon D \to D'$ *— диффеоморфизм. Тогда* f *изотопичен сохраняющему объем диффеоморфизму* f_0 *между этими областями.*

Кроме того, если f *сохраняет ориентацию, а функция* ρ *есть «избыточная плотность»,* $\rho = 1 - \det(f_*)$, *то существуют такие константы* $C_{k,p}$, *зависящие только от области* D, *что*

$$\|f - f_0\|_{L^{k+1,p}} \leqslant C_{k,p}\|\rho\|_{L^{k,p}} \quad \text{для любых } k, p < \infty.$$

Доказательство леммы 3.5. Рассмотрим прообраз элемента объема $\mu_{D'}$ в D. Функция плотности ρ характеризует избыток объема $f^*(\mu_{D'})$ по сравнению с μ_D. Среднее значение ρ равно нулю вследствие условия равенства объемов.

Пусть ψ — решение задачи Неймана на D для ρ, т. е. $\Delta\psi = \rho$ на D и $\dfrac{\partial}{\partial n}\psi = 0$ на крае ∂D (где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование в направлении внешней нормали, см. ниже лемму 3.7 о разрешимости задачи Неймана).

Перепишем эту систему в виде $\operatorname{div}(\nabla\psi) = \rho$, $\nabla\psi \parallel \partial D$. Тогда градиентное векторное поле $\nabla\psi$ касается границы ∂D и инфинитезимально определяет изотопию D, переводящую элемент объема μ_D в $f^*(\mu_{D'})$. Сама изотопия теперь есть фазовый поток динамической системы на D, определенный полем $\nabla\psi$.

Наконец, требуемая оценка следует из неравенства $|\lambda_1|\|\psi\|_{L^2} \leqslant \|\rho\|_{L^2}$, где λ_1 есть ближайшее к нулю (слева) собственное значение задачи Неймана. Взяв градиент $\nabla\psi$, мы потеряли один порядок в соболевской норме. □

Замечание 3.6. Для применения результата к случаю, когда D — сферическая оболочка, отметим, что константы $C_{k,p}$ могут быть выбраны не зависящими от ее толщины. Это следует из того, что ближайшее к нулю собственное значение λ_1 задачи Неймана на такой оболочке стремится к наименьшему собственному значению оператора Лапласа–Бельтрами на сфере S^2 при стремлении толщины оболочки к нулю.

Действительно, собственные значения оператора Лапласа на такой оболочке суть суммы его собственных значений на сфере и собственных значений его радиальной компоненты

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Отсюда непосредственно видно, что все, кроме первой, собственные функции радиального оператора с граничными условиями Неймана сильно осциллируют на коротком отрезке. Поэтому все соответствующие им собственные значения стремятся к бесконечности, в то время как первое стремится к нулю при стягивании отрезка в точку. Только это минимальное собственное значение и дает вклад в собственное значение λ_1 задачи Неймана на оболочке, причем этот вклад обращается в нуль при стремлении к нулю толщины оболочки.

Лемма 3.7. *Задача Неймана $\Delta\psi = \rho$ на D и $\frac{\partial}{\partial n}\psi = 0$ на крае ∂D имеет решение для любой функции ρ с нулевым средним значением (т. е. для любой функции ρ, ортогональной константам на D в смысле L^2).*

Доказательство леммы 3.7. Образом оператора является ортогональное дополнение к ядру соответствующего сопряженного оператора. Чтобы применить этот факт к оператору Неймана, найдем сначала множество функций h, ортогональных ко всем $\Delta\psi$, для которых $\frac{\partial}{\partial n}\psi = 0$:

$$0 = \int\limits_D (\Delta\psi)h = -\int\limits_D \nabla\psi\nabla h + \int\limits_{\partial D}\Big(\frac{\partial}{\partial n}\psi\Big)h = \int\limits_D \psi\Delta h - \int\limits_{\partial D}\psi\Big(\frac{\partial}{\partial n}h\Big).$$

Взяв сначала в качестве пробных функций те ψ, которые обращаются в нуль на границе ∂D, получим, что $\Delta h = 0$. Тогда для произвольных ψ граничный член равен нулю, и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial n}h = 0$ на ∂D. Таким образом, только постоянные функции h ортогональны образу оператора Неймана $\Delta\psi$ (с граничным условием $\frac{\partial}{\partial n}\psi = 0$), и любая функция, ортогональная константам, принадлежит образу этого оператора. □

Основная конструкция. Сначала разрежем шар B на две части, отделив сферическую оболочку Sh толщины s от подшара B_s (рис. 28). Позже мы зафиксируем s. Внутренний подшар можно растянуть в вертикальном направлении и сжать в тонкую «змею» с помощью сохраняющего объем диффеоморфизма.

Такое преобразование растяжения сужает все ξ-траектории (расположенные в горизонтальных плоскостях во внутреннем подшаре B_s) с произвольно большим заданным коэффициентом и, следовательно, уменьшает энергию поля в (преобразованном) подшаре до произвольно малого положительного уровня.

Затем мы помещаем «змею» в первоначальный шар, не изменяя объема. Пусть отображение подшара B_s в «змею» внутри шара B сопровождается отображением оболочки Sh на дополнение «змеи». Этого можно добиться сначала не контролируя изменение элементов объема, но обеспечивая гладкость

преобразования $(B_s \cup Sh) \to B$ (см. рис. 29). Затем сопровождающее отображение оболочки Sh можно превратить в сохраняющее объем, применив изотопию из леммы 3.5.

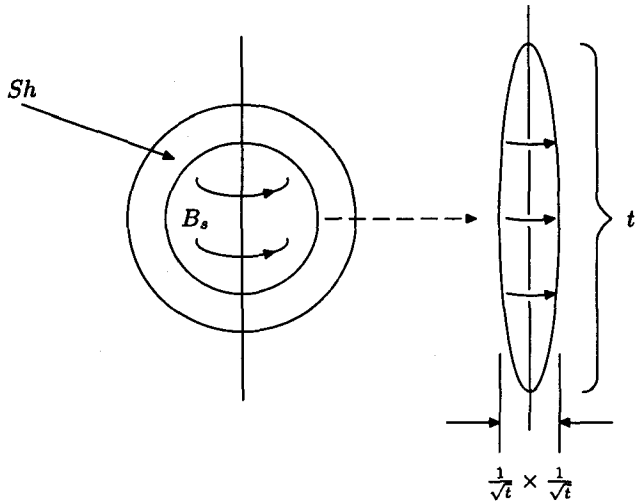


Рис. 28. Растяжение подшара в «змею» уменьшает его энергию

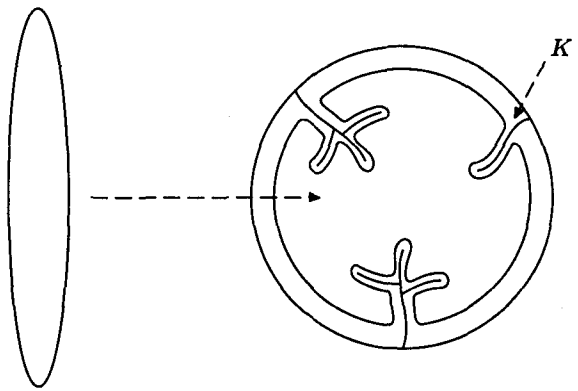


Рис. 29. Дополнение «змеи» в шаре есть окрестность 2-комплекса K

Полная энергия поля ξ после действия диффеоморфизма является суммой энергий в образе подшара и в образе оболочки $E = E_{\text{подшар}} + E_{\text{оболочка}}$. Указанное растяжение позволяет менять первый член: при заданном положительном ε энергия $E_{\text{подшар}}$ может быть уменьшена до уровня $E_{\text{подшар}} \approx \varepsilon$, если выбрать достаточно длинную «змею». Вложение «змеи» в первоначальный шар не меняет его энергию существенным образом, поскольку изгиб возникает в направлениях, ортогональных к траекториям магнитного поля, и, следовательно, не растягивает векторы.

Теперь мы должны оценить энергию поля в образе оболочки. Отметим, что образ сосредоточен вблизи 2-комплекса K, «дополнительного» к «змее» в B.

Используя лемму 3.5 и замечание 3.6 для контроля максимального растяжения траекторий в оболочке, достаточно обеспечить ограниченность растяжения элемента объема для произвольной тонкой оболочки. Последнее достигается путем применения однопараметрического семейства диффеоморфизмов (изображенного на рис. 30):

а) сначала расширим тонкую оболочку (толщины s) до оболочки фиксированной толщины;

б) затем отобразим ее на окрестность K, определенную данным вложением «змеи»;

в) наконец, сожмем эту окрестность к K.

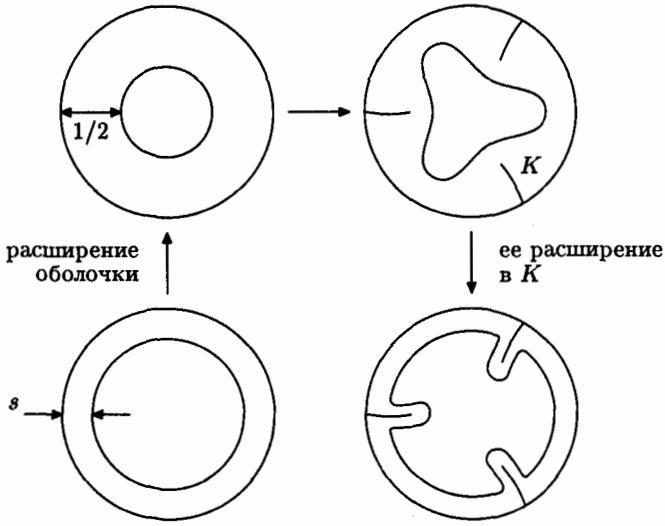


Рис. 30. Семейство отображений оболочки на окрестность K

Теперь энергия $E_{\text{оболочка}}$ стремится к нулю, когда толщина $s \to 0$, так как подынтегральное выражение в формуле для энергии ограничено равномерно по s, в то время как объем области интегрирования, т. е. объем оболочки, стремится к нулю. Таким образом, выбрав s достаточно малым, можно добиться того, чтобы $E_{\text{оболочка}} \approx \varepsilon$.

Оценка коэффициента сжатия. Чтобы получить семейство диффеоморфизмов φ_t, определим начальное растяжение подшара в «змею» длины t. Тогда площадь каждого горизонтального сечения сжимается с коэффициентом t, а сами векторы — с коэффициентом $\sqrt{t}$ (см. рис. 28).

При этом полная L^2-энергия уменьшается до $E(\varphi_t^*\xi) \approx 1/t$. Тем не менее, некоторые траектории в оболочке растягиваются до «полной длины» $\approx t$. Значит, L^∞-норма $\|\varphi_t^*\xi\|_{L^\infty} = \max \|\xi_t\| = \mathcal{O}(t)$.

После выбора масштаба длины ℓ, энергию нельзя сделать меньше, чем $1/\ell$, используя гладкое однопараметрическое семейство. Чтобы еще уменьшить энергию, следует обновить первоначальное растяжение подшара в «змею».

Это приводит к следующему скачку коэффициента сжатия и еще меньшим масштабам. Соответствующий 2-комплекс (пена) $K = \mathcal{F}_t$ «цветет и ветвится» [Fr2]. При этом топология K остается тривиальной (пена стягивается к границе ∂B), так как дополнение к K гомеоморфно шару.

§ 4. Асимптотический коэффициент зацепления

Классический инвариант Хопфа для отображений $S^3 \to S^2$ можно определить двумя способами: топологическим (как коэффициент зацепления прообразов двух произвольных точек на S^2) и интегральным (как значение $\int \omega \wedge \wedge\, d^{-1}\omega$ для любой 2-формы ω на S^3, которая является прообразом нормированной формы площади на S^2) (см. пример 1.19).

Определение спиральности произвольного бездивергентного векторного поля на трехмерном односвязном многообразии есть непосредственное обобщение интегрального определения инварианта Хопфа. Топологический аналог является более сложным и приводит к понятиям асимптотического и среднего коэффициентов зацепления траекторий поля вместо зацепления замкнутых кривых в классическом определении [Arn9].

В этом параграфе рассматривается такая эргодическая интерпретация спиральности.

4.1. Асимптотический коэффициент зацепления пары траекторий

Пусть M — трехмерное замкнутое односвязное многообразие с элементом объема μ. Пусть ξ — бездивергентное поле на M, а $\{g^t\colon M \to M\}$ — его фазовый поток.

Рассмотрим пару точек x_1, x_2 в M. Этой паре мы поставим в соответствие число, характеризующее «асимптотическое зацепление» траекторий потока $\{g^t\}$, выходящих из этих точек. Для этого сначала свяжем любые две точки x и y многообразия M «коротким путем» $\Delta(x, y)$. Условия, налагаемые на систему коротких путей, будут описаны ниже и выполняются «для почти любого» выбора системы.

Выберем большие числа T_1 и T_2 и возьмем отрезки $g^t x_1$, $0 \leqslant t \leqslant T_1$, и $g^t x_2$, $0 \leqslant t \leqslant T_2$, траекторий, выходящих из x_1 и x_2. Замкнем их короткими путями $\Delta(g^{T_k} x_k, x_k)$ $(k = 1, 2)$. Получим две замкнутые кривые $\Gamma_1 = \Gamma_{T_1}(x_1)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_{T_2}(x_2)$ (см. рис. 31). Допустим, что эти кривые не пересекаются (что верно для почти всех пар x_1, x_2 и для почти всех T_1, T_2). Тогда коэффициент зацепления $\mathrm{lk}_\xi(x_1, x_2; T_1, T_2) := \mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ кривых Γ_1 и Γ_2 корректно определен.

Определение 4.1. *Асимптотический коэффициент зацепления* пары траекторий $g^t x_1$ и $g^t x_2$ $(x_1, x_2 \in M)$ поля ξ определяется как предел

$$\lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{\mathrm{lk}_\xi(x_1, x_2; T_1, T_2)}{T_1 T_2},$$

где T_1 и T_2 меняются так, чтобы Γ_1 и Γ_2 не пересекались.

Ниже мы увидим, что этот предел почти всюду существует и не зависит от системы «коротких» путей Δ (как элемент пространства $L^1(M \times M)$ функций, интегрируемых по Лебегу на $M \times M$).

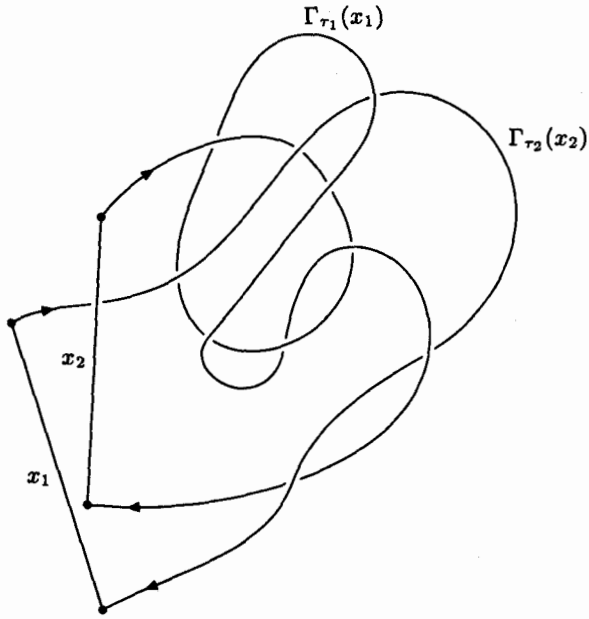


Рис. 31. Длинные отрезки траекторий замкнуты «короткими» путями

Определение 4.2. *Средним коэффициентом самозацепления* поля ξ называется интеграл по $M \times M$ асимптотического коэффициента зацепления $\lambda_\xi(x_1, x_2)$ траекторий поля:

$$\lambda_\xi = \int\limits_M \int\limits_M \lambda_\xi(x_1, x_2)\mu_1\mu_2. \tag{4.1}$$

Замечание 4.3. Средний коэффициент самозацепления можно определить и другим способом, определив сначала асимптотическое зацепление линий поля с замкнутыми кривыми, а затем заменив кривую другой траекторией (этот подход используется в § 5 для определения среднего коэффициента скрещивания).

Теорема 4.4 (теорема спиральности, [Arn9]). *Средний коэффициент самозацепления бездивергентного векторного поля ξ на односвязном многообразии M с элементом объема μ совпадает со спиральностью поля*:

$$\lambda_\xi = \mathcal{H}(\xi). \tag{4.2}$$

Пример 4.5. Для векторного поля Хопфа

$$v(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ коэффициент зацепления любых двух траекторий (больших кругов) равен 1. Все траектории периодичны с одинаковым периодом 2π. Поэтому значение $\lambda_v(x_1, x_2)$, или асимптотического зацепления двух траекторий за единицу времени, есть $1/4\pi^2$. Средний коэффициент самозацепления поля Хопфа равен

$$\lambda_v = \int\limits_{S^3}\int\limits_{S^3} \lambda_v(x_1, x_2)\mu_1\mu_2 = \int\limits_{S^3}\int\limits_{S^3} \frac{1}{4\pi^2}\mu_1\mu_2 = \frac{(\mathrm{vol}(S^3))^2}{4\pi^2} = \frac{(2\pi^2)^2}{4\pi^2} = \pi^2,$$

что совпадает со средней спиральностью $\mathcal{H}(v)$ поля v (см. пример 1.19).

Замечание 4.6. Данный результат без каких-либо изменений можно перенести на случай двух различных бездивергентных полей ξ и η на односвязном многообразии M. Коэффициент зацепления $\lambda_{\xi,\eta}(x, y)$ в этом случае есть мера асимптотического зацепления траекторий $g^t_\xi x$ и $g^t_\eta y$, выходящих соответственно из x и y. Спиральность здесь следует заменить на билинейную форму $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ (см. замечание 1.22). Теорема спиральности в этом случае утверждает, что

$$\int\limits_M\int\limits_M \lambda_{\xi,\eta}(x, y)\mu_x\mu_y = \int\limits_M \omega_\xi \wedge (d^{-1}\omega_\eta),$$

где 2-формы определены соотношениями $\omega_\xi = i_\xi\mu$, $\omega_\eta = i_\eta\mu$, а через $d^{-1}\omega_\eta$ обозначена произвольная потенциальная 1-форма α такая, что $d\alpha = \omega_\eta$.

В случае многообразия M с краем предполагается, что все рассматриваемые векторные поля касательны к границе.

Замечание 4.7. Совпадение двух классических определений инварианта Хопфа (являясь «неэргодическим» вариантом теоремы спиральности, см. пример 1.19) есть проявление двойственности Пуанкаре.

Предположим, что мы имеем дело с сингулярными формами (δ-типа), носители которых суть компактные подмногообразия. Перейдем от дифференциальных форм к их носителям. Тогда операции d^{-1} и $\wedge$ соответствуют переходу от подмногообразий носителей к ограниченным ими пленкам и к их пересечениям соответственно. Наконец, интегрирование $\int\limits_M$ есть суммирование точек пересечения с соответствующими знаками. Пересечение подмногообразия с пленкой, ограниченной другим подмногообразием, и есть коэффициент зацепления этих двух подмногообразий.

Если рассматривать гладкие дифференциальные формы вместо сингулярных, это приведет к усреднению соответствующих характеристик зацепления. Асимптотический вариант коэффициента зацепления можно определить и в контексте асимптотических циклов [SchS, DeR, GPS, Sul].

Аналог гомотопической инвариантности классического инварианта Хопфа для асимптотического коэффициента зацепления пока неизвестен. В связи с этим возникает

Задача 4.8. Является ли средний коэффициент самозацепления бездивергентного векторного поля инвариантным относительно гомеоморфизмов, сохраняющих меру на многообразии? Здесь предполагается, что сохраняю-

щий меру гомеоморфизм преобразует поток одного гладкого бездивергентного векторного поля в поток другого, при этом оба поля имеют корректно определенные усредненные коэффициенты зацепления.

Частичный (утвердительный) ответ на этот вопрос был дан в [G-G], где средний коэффициент зацепления для поля в полнотории был связан с топологическими инвариантами Рюэля [Rue] и Калаби для диффеоморфизмов дисков (см. также гл. III, п. 7.1 и гл. IV, п. 8.2).

Мы приведем два варианта доказательства теоремы спиральности. В первом явно используется формула зацепления Гаусса и интеграл Био–Савара в $\mathbb{R}^3$. Второе, бескоординатное доказательство проясняет причину совпадения спиральности и зацепления на произвольном односвязном многообразии.

Различные обобщения асимптотического зацепления обсуждаются в последующих параграфах.

4.2. Отступление о формуле Гаусса

Чтобы сформулировать теорему Гаусса о коэффициенте зацепления двух замкнутых кривых в трехмерном евклидовом пространстве введем следующие обозначения.

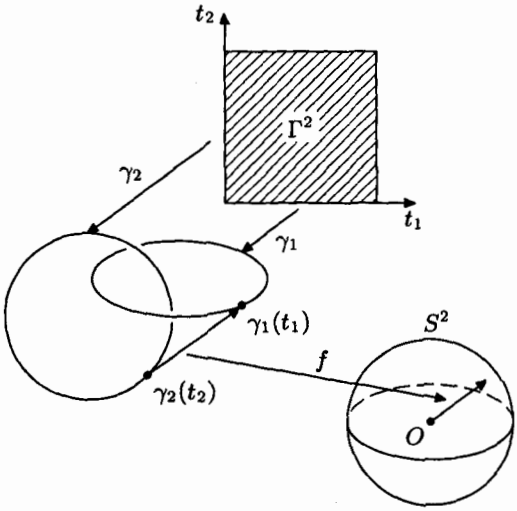


Рис. 32. Две параметризованные зацепленные кривые в пространстве определяют отображение Гаусса $T^2 \to S^2$

Пусть $\gamma_1 \colon S_1^1 \to \mathbb{R}^3$ и $\gamma_2 \colon S_2^1 \to \mathbb{R}^3$ — гладкие отображения двух окружностей в $\mathbb{R}^3$ с непересекающимися образами. Пусть $t_1 (\mathrm{mod}\, T_1)$ и $t_2 (\mathrm{mod}\, T_2)$ — координаты на первой и второй окружностях. Обозначим через $\dot\gamma_i = \dot\gamma_i(t_i)$, $i = 1, 2$, соответствующие векторы скорости в образах (рис. 32).

Пусть эти окружности ориентированы с помощью выбора параметров t_1 и t_2, и пусть фиксирована ориентация $\mathbb{R}^3$. Тогда можно определить векторное произведение и тройное (смешанное) произведение в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 4.9 (теорема Гаусса). *Коэффициент зацепления замкнутых кривых* $\gamma_1(S_1)$ *и* $\gamma_2(S^1)$ *в* $\mathbb{R}^3$ *равен*

$$\mathrm{lk}(\gamma_1,\gamma_2)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2}\frac{(\dot\gamma_1,\dot\gamma_2,\gamma_1-\gamma_2)}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^3}\,dt_1\,dt_2.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$f\colon T^2\to S^2$$

тора в сферу, переводящее пару точек на наших окружностях в вектор единичной длины, направленный от $\gamma_2(t_2)$ к $\gamma_1(t_1)$, $f=F/\|F\|$, где $F(t_1,t_2)=$ $=\gamma_1(t_1)-\gamma_2(t_2)$ (см. рис. 32).

Ориентируем сферу внутренней нормалью, а тор — координатами t_1, t_2.

Лемма 4.10. *Степень отображения* f *равна коэффициенту зацепления* $\mathrm{lk}(\gamma_1,\gamma_2)$.

Действительно, это верно для малых окружностей, расположенных далеко друг от друга: и коэффициент зацепления, и степень отображения f равны 0 (рис. 32). Обе эти величины не меняются при деформациях, при которых кривые остаются непересекающимися. Кроме того, легко проверить, что при любой деформации пары кривых, при которой одна кривая пересекает другую, как коэффициент зацепления, так и степень отображения изменяются на единицу, причем с одинаковым знаком. Поэтому равенство $\mathrm{lk}(\gamma_1,\gamma_2)=\deg f$ следует из связности множества гладких отображений $S^1\to\mathbb{R}^3$. Тем самым теорема Гаусса является следствием приводимой ниже леммы.

Лемма 4.11. *Степень отображения* $f\colon T^2\to S^2$ *дается интегральной формулой Гаусса.*

Доказательство леммы 4.11. По определению степени имеем

$$\deg f=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{T^2}f^*\nu^2,$$

где 2-форма ν^2 — форма площади на единичной сфере. Далее, по определению f форма $f^*\nu^2$ принимает на паре векторов a_1, a_2, касательных к тору в точке $t=(t_1,t_2)\in T^2$, значение, равное смешанному произведению этих векторов и вектора $-f:=-f(t)$ (сфера ориентирована с помощью *внутренней* нормали):

$$f^*\nu^2(a_1,a_2)=\nu^2(f_*a_1,f_*a_2)=(f_*a_1,f_*a_2,-f).$$

Дифференцируя f, получаем $f_*a=F_*a/\|F\|+c(a,f)f$ (здесь $c(a,f)$ — скалярный множитель), и поэтому

$$\nu^2(f_*a_1,f_*a_2)=(F_*a_1,F_*a_2,-F)/\|F\|^3.$$

Напомним, что $F=x_1-x_2$, откуда получаем выражение

$$f^*\nu^2=(\dot x_1,\dot x_2,x_1-x_2)\|x_1-x_2\|^{-3}dt_1\wedge dt_2$$

для элемента площади сферического образа тора. □

Обобщение формулы Гаусса для зацеплений высших размерностей, полученное в [Pol, Wh], основано на тех же рассуждениях об эквивалентности зацепления и степени отображения Гаусса.

4.3. Другое определение асимптотического коэффициента зацепления

Пусть $\{g^t\}$ — фазовый поток, определенный бездивергентным полем ξ в трехмерной компактной евклидовой области $M \subset \mathbb{R}^3$. Как обычно считаем, что поле касательно к границе ∂M.

Определим гауссово зацепление траекторий поля ξ следующим образом:

$$\Lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{4\pi T_1 T_2} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \frac{(\dot{x}_1(t_1), \dot{x}_2(t_2), x_1(t_1) - x_2(t_2))}{\|x_1(t_1) - x_2(t_2)\|^3}\, dt_1\, dt_2,$$

где $x_i(t_i) = g^{t_i}(x_i)$ — траектория точки x_i, а $\dot{x}_i(t_i) = \dfrac{d}{dt_i} g^{t_i} x_i$ — соответствующие векторы скорости.

Лемма 4.12. 1) *Предел $\Lambda_\xi(x_1, x_2)$ существует почти всюду на $M \times M$.*

2) *Величина $\Lambda_\xi(x_1, x_2)$ совпадает с определенным выше числом $\lambda_\xi(x_1, x_2)$ для почти всех x_1, x_2.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что Λ есть «временное среднее» интегрируемой функции на многообразии $M \times M$, на котором действует абелева группа $\{g^{t_1}\} \times \{g^{t_2}\}$. Подынтегральная функция равна

$$G(x_1, x_2) = \frac{(a_1, a_2, x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3},$$

где $a_k = \left.\dfrac{d}{dt_k}\right|_{t_k=0} g^{t_k} x_k = \xi(x_k)$. Функция G имеет особенность на диагонали многообразия $M \times M$: она растет не быстрее, чем r^{-2}, где r — расстояние до диагонали. Поскольку коразмерность диагонали равна 3, функция G принадлежит пространству $L_1(M \times M)$, что и требуется.

Чтобы сравнить Λ_ξ с λ_ξ, представим коэффициент зацепления кривых $\Gamma_1 = \Gamma_{T_1}(x_1)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_{T_2}(x_2)$ в виде гауссова интеграла при $0 \leqslant t_1 \leqslant T_1 + 1$, $0 \leqslant t_2 \leqslant T_2 + 1$, используя значения параметра t_k от T_k до $T_k + 1$ для параметризации «короткого пути» $\Delta(g^{T_k} x_k, x_k)$, соединяющего $g^{T_k} x_k$ с x_k.

Определение 4.13. *Системой коротких путей*, соединяющих любые две точки в M, назовем систему путей, зависящих измеримым образом от точек x и y в M и удовлетворяющих следующим условиям: существует единая константа C такая, что интегралы гауссова типа меньше этой константы C:

а) для любой пары непересекающихся путей этой системы;

б) для любой пары, состоящей из непересекающихся между собой пути из этой системы и отрезка фазовой кривой $g^t x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Замечание 4.14. Можно убедиться в существовании систем коротких путей для нигде не обращающихся в нуль векторных полей и даже для общих векторных полей (с изолированными нулями). Полезно помнить, что интеграл гауссова типа для пары отрезков прямых остается ограниченным при

приближении этих отрезков друг к другу. Отметим, что наматывание траектории вокруг пути системы повлекло бы неограниченность интеграла. Однако малое возмущение такой системы как раз и приводит к системе коротких путей, удовлетворяющей указанному условию.

Действительно, явление наматывания не возникает в системах, для которых найдется такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что в любой точке многообразия M хотя бы одна из производных Δ (вдоль путей) порядка меньше N не совпадает с аналогичной производной g^t (вдоль потока). Если задано векторное поле ξ (или, что эквивалентно, задан поток g^t), то системы коротких путей Δ, удовлетворяющие этому последнему условию, образуют обильное множество (см. теорему о строгой трансверсальности, [AVG]).

Поля с неизолированными нулями образуют множество бесконечной коразмерности в пространстве всех векторных полей. Для таких полей вопрос о существовании коротких путей — более тонкий, и там имеются все еще нерешенные вопросы[1]. Было бы весьма интересно получить доказательство существования для приведенного определения в полной общности. В [Vog] Т. Вогель предложил использовать в определении систем коротких путей L_1-сходимость вместо поточечной и доказал, что в L_1-случае можно использовать систему кратчайших геодезических для любого векторного поля. Таким образом, его подход разрешил вопрос существования для систем коротких путей универсальным образом.

Возвращаясь теперь к доказательству леммы 4.12, заметим, что разность $\int\limits_0^{T_2+1}\int\limits_0^{T_1+1} - \int\limits_0^{T_2}\int\limits_0^{T_1}$ интегралов гауссова типа можно оценить суммой не более чем $[T_1] + [T_2] + 1$ членов, каждый из которых не превосходит C. Следовательно,

$$\lambda_\xi(x_1, x_2) - \Lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{4\pi T_1 T_2} \left(\int\limits_0^{T_2+1}\int\limits_0^{T_1+1} - \int\limits_0^{T_2}\int\limits_0^{T_1} \right) = 0$$

(где T_1 и T_2 стремятся к бесконечности по любой последовательности, для которой кривые $\Gamma_1 = \Gamma_{T_1}(x_1)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_{T_2}(x_2)$ не пересекаются). □

Завершим доказательство теоремы об эквивалентности эргодического и интегрального определений спиральности бездивергентного векторного поля, определенного в области $M \subset \mathbb{R}^3$ (и касательного к границе ∂M).

Рассмотрим интеграл Био–Савара

$$A(x_2) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_M \frac{\xi(x_1) \times (x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} \mu(x_1)$$

(где $\times$ обозначает векторное произведение), определяющий векторный потенциал $A = \mathrm{rot}^{-1}\xi$ в $\mathbb{R}^3$. Этот интеграл позволяет получить интегральное пред-

[1] Авторы благодарны П. Лоуренсу, отметившему, что доказательство существования потребовало бы «глобального подхода», рассматривающего поля на всем многообразии, в то время как теорема трансверсальности, по существу, локальна.

ставление спиральности

$$\mathcal{H}(\xi) = \langle \xi, \mathrm{rot}^{-1}\xi \rangle = \langle \xi, A \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{M\times M} \frac{(\xi(x_1), \xi(x_2), x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3}\, \mu(x_1)\, \mu(x_2).$$

Теорема спиральности теперь следует из этой формулы и из эргодической теоремы Биркгофа, примененной к подынтегральной функции $(\xi(x_1), \xi(x_2), x_1 - x_2)/(4\pi\|x_1 - x_2\|^3)$ на $M \times M$. Пространственное среднее

$$\frac{\iint\limits_{M\times M} \Lambda_\xi(x_1, x_2)\, \mu(x_1)\, \mu(x_2)}{(\mathrm{vol}(M))^2} = \frac{\lambda_\xi}{(\mathrm{vol}(M))^2}$$

от временного среднего Λ_ξ вдоль траекторий потока поля ξ, сохраняющего меру, равно пространственному среднему $\mathcal{H}(\xi)/(\mathrm{vol}(M))^2$ данной функции. □

Замечание 4.15. Отметим, что для эргодического поля (ξ, ξ) на $M \times M$ функция $\Lambda_\xi(x_1, x_2)$ почти всюду постоянна: асимптотические коэффициенты зацепления для почти всех пар траекторий поля ξ равны друг другу.

4.4. Формы зацепления на многообразиях

Покажем теперь, как изложенные выше рассуждения можно применить к случаю произвольного односвязного многообразия, где, в отличие от $\mathbb{R}^3$, интеграл гауссова типа для «двойной формы» де Рама [DeR] нельзя выписать столь явно (см. [KhC]).

Теорема 4.16 (ср. 4.6). *Средний коэффициент зацепления двух бездивергентных векторных полей ξ и η совпадает с $\mathcal{H}(\xi, \eta)$:*

$$\iint\limits_{M\times M} \lambda_{\xi,\eta}(x, y)\, \mu_x\, \mu_y = \int\limits_M i_\xi \mu \wedge d^{-1}(i_\eta \mu).$$

Доказательство. Сначала напомним некоторые факты о двойных расслоениях и формах зацеплений. Обозначим через $\Omega^k(M)$ пространство дифференциальных k-форм на многообразии M.

Определение 4.17. Дифференциальная 2-форма $G \in \Omega^2(M \times M)$ называется *формой зацепления Гаусса–де Рама* на односвязном многообразии M, если для произвольной пары непересекающихся замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2 интеграл этой формы по $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ равен соответствующему коэффициенту зацепления

$$\iint\limits_{\Gamma_1\times\Gamma_2 \subset M\times M} G = \mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2).$$

Здесь $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \{(x, y) \in M \times M : x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2\}$. Существование такой формы будет доказано ниже.

Определение 4.18. Каждая дифференциальная форма $K(x,y) \in \Omega^*(M \times M)$ определяет *оператор* $\widetilde{K}\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ на пространстве дифференциальных форм $\Omega^*(M)$ на M, который отображает дифференциальную форму $\varphi(y)$ в дифференциальную форму

$$(\widetilde{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\pi^{-1}(x)} K(x,y) \wedge \varphi(y),$$

где $\pi\colon M \times M \to M$ — проекция на первую компоненту, а интегрирование ведется по слоям этой проекции (см. рис. 33). Значение формы $\widetilde{K}\varphi$ в точке $x \in M$ есть интеграл по слою $\pi^{-1}(x) \subset M \times M$ внешнего произведения $K(x,y) \wedge \varphi(y)$. Если в произведении $K(x,y) \wedge \varphi(y)$ не содержатся n-формы по y, то по определению $(\widetilde{K}\varphi)(x) = 0$.

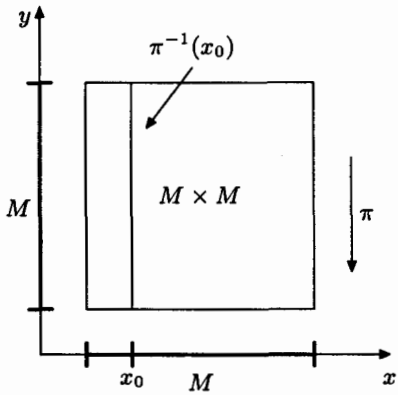


Рис. 33. Любая форма на $M \times M$ определяет оператор на $\Omega^*(M)$

Предложение 4.19. *Оператор $\widetilde{G}$, соответствующий форме зацепления, есть оператор Грина, обратный к внешней производной 1-форм, т. е. если $\psi = d\varphi$ и $\varphi \in \Omega^1(M)$, то*

$$\varphi = \widetilde{G}(\psi) + dh$$

для некоторой функции h.

Наличие члена dh отражает тот факт, что потенциальную 1-форму φ можно восстановить по точной 2-форме ψ лишь с точностью до полного дифференциала.

Доказательство предложения. Пусть $\boldsymbol{d} = d_x + d_y$ — оператор внешнего дифференцирования на $\Omega^*(M \times M)$.

Лемма 4.20. $\widetilde{d_x K} = d \circ \widetilde{K}$.

Действительно, $[d_x K(x,y)] \wedge \varphi(y) = d_x[K(x,y) \wedge \varphi(y)]$, а значит,

$$\int\limits_{\pi^{-1}(x)} [d_x K(x,y)] \wedge \varphi(y) = d\left(\int\limits_{\pi^{-1}(x)} K(x,y) \wedge \varphi(y)\right).$$

Лемма 4.21. *Если K является 1-формой по переменной y, то $\widetilde{d_y K} = \widetilde{K} \circ d$.*

Это следует из тождества

$$\int\limits_{\pi^{-1}(x)} [d_y K(x,y)] \wedge \varphi(y) = \int\limits_{\pi^{-1}(x)} K(x,y) \wedge d\varphi(y).$$

Лемма 4.22. *Внешняя производная формы Гаусса-де Рама G на $M \times M$ равна сумме $dG = \delta + \beta$ следующих форм:*

— δ-формы на диагонали $\Delta \subset M \times M$ (интеграл δ-формы по любой трехмерной цепи в $M \times M$ равен алгебраическому числу точек пересечения цепи с диагональю Δ), и

— некоторой формы $\beta \in \Omega^3(M \times M)$, которая является линейной комбинацией форм из множества $\Omega^k(M) \otimes \Omega^{3-k}(M)$, у которых каждый множитель замкнут.

Доказательство.

$$\mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \iint\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} G = \iiint\limits_{\partial^{-1}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)} dG = \iiint\limits_{(\partial^{-1}\Gamma_1) \times \Gamma_2} dG.$$

С другой стороны, поскольку коэффициент зацепления есть число пересечений цикла Γ_2 с поверхностью $\partial^{-1}\Gamma_1$ (граница которой есть Γ_1), он может быть представлен в виде интеграла δ-формы по цепи $(\partial^{-1}\Gamma_1) \times \Gamma_2$:

$$\mathrm{lk}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \iiint\limits_{(\partial^{-1}\Gamma_1) \times \Gamma_2} \delta.$$

Теперь утверждение следует из того, что все такие β замкнуты и характеризуются условиями

$$\iiint\limits_{(\partial^{-1}\Gamma_1) \times \Gamma_2} \beta = 0 \quad \text{и} \quad \iiint\limits_{\Gamma_1 \times (\partial^{-1}\Gamma_2)} \beta = 0. \qquad \square$$

Замечание 4.23. Форма β может быть выбрана так, чтобы класс когомологий $\delta + \beta$ в $H^3(M \times M)$ был тривиальным. Действительно, хотя класс δ в $H^3(M \times M) = \sum\limits_k H^k(M) \otimes H^{3-k}(M)$ нетривиален (диагональ в $M \times M$ не является границей), прибавляя соответствующую форму β, мы можем избавиться от $H^0(M)$- и $H^3(M)$-членов. Поэтому класс $\delta + \beta$ равен нулю вследствие односвязности M ($H^1(M) = H^2(M) = 0$).

Эти соображения доказывают существование формы зацепления Гаусса–де Рама G как решения уравнения $[dG] = 0 \in H^3(M \times M)$, где скобки $[*]$ обозначают класс когомологий дифференциальной формы.

Для завершения доказательства предложения 4.19 перейдем в уравнении $[dG] = \delta + \beta$ от форм к операторам $\widetilde{dG} = \tilde{\delta} + \tilde{\beta}$ или

$$\widetilde{d_x G} + \widetilde{d_y G} = \tilde{\delta} + \tilde{\beta}.$$

Здесь следует отметить, что:

а) δ-форма соответствует тождественному оператору $\tilde{\delta} = \mathrm{id}$ на формах, и

б) образ оператора $\tilde{\beta}$ в $\Omega^*(M)$ принадлежит подпространству замкнутых форм (см. лемму 4.22). В частности, в пространстве $\Omega^1(M)$ образ состоит из точных форм.

Сочетая эти факты с леммами 4.20–4.21, приходим к соотношению

$$d \circ \widetilde{G} + \widetilde{G} \circ d = \mathrm{id} + d \circ \tilde{\gamma}$$

для операторов на 1-формах в M. Применив операторы из обеих частей этого соотношения к форме φ и перегруппировав члены, получаем

$$d \circ (\widetilde{G}(\varphi) - \tilde{\gamma}(\varphi)) + \widetilde{G}(d\varphi) = \varphi.$$

Наконец, для $\psi = d\varphi$ получим

$$\varphi = \widetilde{G}(\psi) + dh$$

для некоторой функции h. □

Лемма 4.24. *Существует форма зацепления Гаусса–де Рама $G(x, y)$ с полюсом порядка 2 на диагонали многообразия $M \times M$.*

Доказательство. Коэффициент зацепления Γ_1 и Γ_2 в M по определению совпадает с коэффициентом зацепления $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ и диагонали Δ в $M \times M$. Отождествим окрестность диагонали в $M \times M$ с окрестностью нулевого сечения в нормальном расслоении $T^{\perp}\Delta$ к диагонали с помощью геодезического экспоненциального отображения (рис. 34).

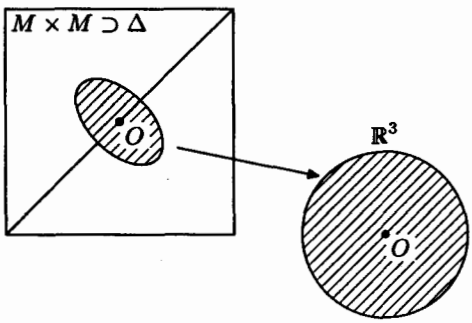


Рис. 34. Для любой точки диагонали $\Delta \subset M \times M$ окрестность в поперечном к Δ направлении можно отождествить с окрестностью в $\mathbb{R}^3$

Тогда в любом слое (являющемся окрестностью точки $O \in \mathbb{R}^3$) рассмотрим стандартную гауссову форму зацепления, имеющую особенность в начале координат. Последняя есть 2-форма, полученная подстановкой радиального векторного поля $\nabla(1/r)$ в стандартный элемент объема в $\mathbb{R}^3$. Она имеет полюс второго порядка в начале координат. Распространим эту форму с одного слоя на целую окрестность Δ в $M \times M$ таким образом, чтобы она обращалась в нуль на векторах, параллельных $\Delta \subset T^{\perp}\Delta$. Получим форму зацепления в $M \times M$, имеющую полюс нужного порядка 2 на диагонали. □

Следствие 4.25. *Форма зацепления G интегрируема: $G \in L^1(M \times M)$, т. е. значение G, вычисленное на любых двух гладких векторных полях, есть интегрируемая функция на $M \times M$.*

Действительно, коразмерность диагонали в $M \times M$ равна 3, а порядок роста G вблизи диагонали равен 2.

Замечание 4.26. Все приведенные выше рассуждения относительно форм зацепления Гаусса–де Рама справедливы (с некоторыми очевидными модификациями) для многообразий произвольной размерности. Дальнейшее же изложение в этом параграфе существенно использует трехмерность.

Пусть ξ и η — бездивергентные поля на многообразии M, оснащенном формой объема μ. Пусть $g_\xi^t x$ и $g_\eta^s y$ — отрезки траекторий этих полей с началом в x и y, где время меняется в пределах $0 \leqslant t \leqslant T$ и $0 \leqslant s \leqslant S$. Обозначим через Δ_x и Δ_y соответствующие «короткие пути», замыкающие эти отрезки траекторий и превращающие их в две кусочно-гладкие замкнутые кривые.

Асимптотический коэффициент зацепления для пары траекторий равен

$$\lambda_{\xi,\eta}(x,y) = \lim_{T,S\to\infty} \frac{1}{TS} \iint\limits_{(g_\xi^t x \cup \Delta_x)\times(g_\eta^s y \cup \Delta_y)} G = \lim_{T,S\to\infty} \frac{1}{TS} \iint\limits_{g_\xi^t x \times g_\eta^s y} G.$$

Последнее равенство пределов следует из ограниченности интегралов по коротким путям (см. определение 4.13 системы коротких путей).

Следовательно,

$$\lambda_{\xi,\eta} = \iint\limits_{M\times M} \lambda_{\xi,\eta}(x,y)\,\mu_x\,\mu_y = \int\limits_M \mu_x \int\limits_M \mu_y \left(\lim_{T,S\to\infty} \frac{1}{TS} \iint\limits_{g_\xi^t x \times g_\eta^s y} G \right) =$$

$$= \int\limits_M \mu_x \int\limits_M \mu_y \left(\lim_{T,S\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_0^S (i_\xi i_\eta G)\, ds\, dt \right),$$

где $i_\xi i_\eta G$ рассматривается как функция на $M \times M$, а через $\int\limits_0^T \int\limits_0^S$ обозначен интеграл этой функции по произведению (кусков) траекторий $g_\xi^t x$ и $g_\eta^s y$.

Пользуясь эргодической теоремой Биркгофа, примененной к интегрируемой функции $i_\xi i_\eta G$, мы можем перейти от средних по времени к пространственным средним:

$$\lambda_{\xi,\eta} = \iint\limits_{M\times M} \lambda_{\xi,\eta}(x,y)\,\mu_x\,\mu_y = \int\limits_M \mu_x \int\limits_M \mu_y (i_\xi i_\eta G).$$

Наконец, перенесем операторы подстановки i_ξ и i_η с формы G на формы μ_x и μ_y (операция i_ξ есть внутреннее произведение, см. § 1):

$$\lambda_{\xi,\eta} = \iint\limits_{M\times M} \lambda_{\xi,\eta}(x,y)\,\mu_x\,\mu_y = \int\limits_M \mu_x \int\limits_M \mu_y (i_\xi i_\eta G) =$$

$$= \int\limits_M i_\xi \mu_x \wedge \left(\int\limits_M i_\eta \mu_y \wedge G \right) = \int\limits_M i_\xi \mu \wedge \widetilde{G}(i_\eta \mu).$$

По предложению 4.19 $\widetilde{G}$ — оператор, обратный к внешнему дифференцированию: $\widetilde{G}(i_\eta\mu) = d^{-1}(i_\eta\mu)$ с точностью до прибавления точной формы. Этим завершается доказательство теоремы 4.16:

$$\lambda_{\xi,\eta} = \int\limits_M i_\xi\mu \wedge d^{-1}(i_\eta\mu) = \mathcal{H}(\xi,\eta). \qquad \square$$

§ 5. Асимптотическое число пересечений

Использование понятия спиральности для оценок снизу магнитной энергии в терминах топологии магнитных линий было обобщено Фридманом и Хе [FH1, FH2], которые ввели понятие асимптотического числа пересечений. Они измеряли сложность заузленной траектории «минимальным числом пересечений» ее проекций. Если подсчитывать пересечения с учетом знака, эта величина является аналогом коэффициента зацепления. В дальнейшем изложении мы в основном будем следовать работе [FH2].

5.1. Оценки энергии снизу для типичных векторных полей

Определение 5.1. Для двух замкнутых кривых γ_1 и γ_2 в $\mathbb{R}^3$ *число пересечений* $c(\gamma_1,\gamma_2)$ равно интегралу абсолютной величины гауссовой подынтегральной функции, определяющей их коэффициент зацепления:

$$c(\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2} \frac{|(\dot\gamma_1,\dot\gamma_2,\gamma_1-\gamma_2)|}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^3}\,dt_1\,dt_2. \tag{5.1}$$

Эта величина уже не является инвариантной относительно изотопии кривых. Однако все понятия и определения, возникающие для соответствующего асимптотического случая, могут быть дословно использованы в данной ситуации.

Для векторного поля ξ, определенного в области $M \subset \mathbb{R}^3$ (и касательного к краю ∂M), мы используем то же определение «системы коротких путей», что и выше (см. определение 4.13 и последующее замечание). Обозначим через $\Gamma_T(x)$ кусок ξ-траектории точки $x \in M$, пробегаемый за период времени $[0,T]$ и замкнутый коротким путем.

Определение 5.2. *Асимптотическим числом пересечений* траектории бездивергентного векторного поля ξ, выходящей из точки x, с замкнутой кривой γ в односвязном многообразии M^3 называется предел

$$c_\xi(x,\gamma) = \lim\sup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,c(\Gamma_T(x),\gamma).$$

Этот предел существует, принадлежит $L^1(M)$ и корректно определен в $L^1(M)$, несмотря на неоднозначный выбор системы коротких путей.

Аналогично, *среднее число пересечений* всех траекторий поля ξ с кривой γ равно интегралу

$$c_\xi(\gamma) = \int\limits_M c_\xi(x,\gamma)\,\mu_x,$$

где μ — элемент объема на M.

Наконец, если заданы два бездивергентных векторных поля ξ и η, их *асимптотическое число пересечений* $Cr(\xi,\eta)$ определяется как пространственный интеграл числа пересечений одного из полей с траекториями другого:

$$Cr(\xi,\eta) = \int\limits_M \Big(\lim\sup_{T\to\infty} \frac{1}{T} c_\xi(\Gamma_T(y))\Big)\,\mu_y,$$

где $\Gamma_T(y)$ — кусок $0 \leqslant t \leqslant T$ траектории поля ξ, выходящей из точки y и замкнутой коротким путем. Это число пересечений допускает интегральное представление

$$Cr(\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{M\times M} \frac{|(\xi(x),\eta(y),x-y)|}{\|x-y\|^3}\,\mu_x\,\mu_y. \tag{5.2}$$

Асимптотическое число пересечений определяет следующую нижнюю грань для *$E_{3/2}$-энергии* $E_{3/2}(\xi) := \int\limits_M \|\xi\|^{3/2}\,\mu$.

Теорема 5.3 (см. [FH2]). *Для любого бездивергентного векторного поля ξ в M*

$$E_{3/2}(\xi) \geqslant \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/4} Cr(\xi,\xi)^{3/4}. \tag{5.3}$$

Замечание 5.4 (см. [FH2]). А. $L^{3/2}$-норма, используемая в определении $E_{3/2}$-энергии, обусловлена «конформной природой» задачи. Любая нижняя грань $E_{3/2}$-энергии обеспечивает нижнюю грань стандартной E_2-энергии $E_2(\xi) := \int\limits_M \|\xi\|^2\,\mu$, что непосредственно следует из неравенства Гельдера:

$$E_2(\xi) \geqslant \frac{(E_{3/2}(\xi))^{4/3}}{(\mathrm{vol}(M))^{1/3}} \geqslant \left(\frac{16}{\pi\mathrm{vol}(M)}\right)^{1/3} Cr(\xi,\xi) \tag{5.4}$$

или, в более привычной форме,

$$\int (\|\xi\|^{3/2}\cdot 1) \leqslant \left(\int \|\xi\|^2\right)^{3/4} (\mathrm{vol}(M))^{1/4}.$$

Комбинируя неравенство (5.4) с оценками для асимптотического числа пересечений $Cr(\xi,\xi)$, обсуждаемыми ниже (см. теоремы 5.9 и 5.12), можно получить явные оценки для энергии E_2 векторного поля с инвариантным тором.

В. Аналогично для любых двух бездивергентных векторных полей ξ и η на многообразии M

$$Cr(\xi,\eta) \leqslant \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/4} (E_{3/2}(\xi))^{2/3} (E_{3/2}(\eta))^{2/3}.$$

C. Обе части неравенства имеют геометрическую природу (они зависят от выбора метрики) и не являются топологическими инвариантами. Напротив, оценка энергии в терминах спиральности дает топологическую оценку для геометрической величины.

Можно насильственным образом превратить правую часть неравенства (5.3) в топологическую величину, определив *топологическое число пересечений*

$$Cr_{\mathrm{top}}(\xi,\eta) = \inf_{h\in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)} Cr(h_*\xi, h_*\eta).$$

Тогда

$$E_{3/2}(h_*\xi) \geqslant \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/4} Cr_{\mathrm{top}}(\xi,\xi)^{3/4}$$

для любого $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$.

D. Теорема 5.3 имеет место для векторных полей с произвольной дивергенцией при условии, что $Cr(\xi,\xi)$ определяется по интегральной формуле (5.2), а не эргодическим способом. Используя также интегральное определение спиральности (см. определение 1.1), получим

$$E_{3/2}(h_*\xi) \geqslant \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/4} |\mathcal{H}(\xi)|^{3/4} \quad \text{для любого } h \in \mathrm{Diff}(M \subset \mathbb{R}^3)$$

вследствие очевидного неравенства $Cr(\xi,\xi) \geqslant |\mathcal{H}(\xi)|$.

Замечание 5.5. В двумерном случае асимптотическое число пересечений было исследовано и применено к оценкам энергии переплетенных магнитных трубок в [Be2]. В этом случае нижняя грань энергии, как выяснилось, квадратично зависит от полного числа пересечений переплетенного поля, в то время как энергия заузленного поля в трехмерном пространстве ограничена линейным по Cr выражением (см. выше оценку (5.4) для E_2-энергии).

Доказательство теоремы 5.3. Интегральная форма асимптотического числа пересечений дает следующую верхнюю грань:

$$Cr(\xi,\xi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_M\int\limits_M \frac{|(\xi(x),\xi(y),x-y)|}{\|x-y\|^3}\,\mu_x\,\mu_y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_M\int\limits_M \|\xi(y)\|\left(\frac{\|\xi(x)\|}{\|x-y\|^2}\right)\mu_x\,\mu_y = \int\limits_M \|\xi(y)\|\rho(y)\,\mu_y,$$

где плотность $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ определена как

$$\rho(y) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_M \frac{\|\xi(x)\|}{\|x-y\|^2}\,\mu_x.$$

Используя неравенство Харди–Литтлвуда–Соболева [Sob1, Lieb] из теории потенциала, получим

$$\|\rho\|_{L^3} = \left(\int\limits_M \rho^3\,\mu\right)^{1/3} \leqslant \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/3}\left(\int\limits_M \|\xi\|^{3/2}\,\mu\right)^{2/3}.$$

Применив также неравенство Гельдера, видим, что

$$Cr(\xi,\xi) \leqslant \int\limits_M \|\xi(y)\|\rho(y)\,\mu_y \leqslant \|\xi\|_{L^{3/2}} \cdot \|\rho\|_{L^3} \leqslant \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/3} (\|\xi\|_{L^{3/2}})^2,$$

откуда следует утверждение теоремы. □

5.2. Асимптотическое число пересечений для узлов и зацеплений

По-видимому, сколько-нибудь точных оценок Cr для достаточно общих полей ξ получить невозможно. Однако можно добиться некоторых результатов при (уже использовавшемся) предположении о том, что у векторного поля есть зацепленные или заузленные инвариантные торы.

Определение 5.6. *Число пересечений* $\mathrm{cn}(K)$ (или $\mathrm{cn}(L)$) узла K (или зацепления L) в $\mathbb{R}^3$ есть минимальное число точек пересечения во всех плоских диаграммах, представляющих узел (или зацепление).

Рассмотрим некоторую трубчатую окрестность $\boldsymbol{T}$ (ориентированного) узла K. Говорят, что произвольная замкнутая ориентированная кривая, содержащаяся в этой окрестности, имеет *степень* p, если ее можно изотопически продеформировать внутри $\boldsymbol{T}$ в кривую, которая покрывает K p раз.

Двухкомпонентное зацепление (P,Q) в $\mathbb{R}^3$ называется *сателлитным зацеплением степени* (p,q) узла K (p и q натуральные), если (P,Q) можно (одновременно) изотопно отобразить в пару кривых $(P',Q') \subset \boldsymbol{T}$ таких, что степень (P') равна p, а (Q') равна q. *Число над-пересечений* $\mathrm{cn}(P,Q)$ зацепления (P,Q) определяется как минимальное число прохождений кривой P над Q среди всех плоских узловых диаграмм, представляющих (P,Q) (см. рис. 35).

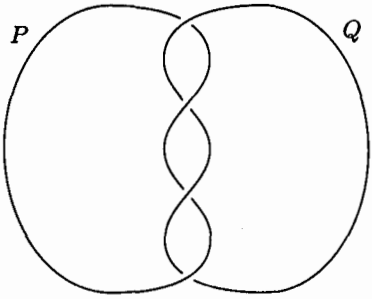


Рис. 35. Число пересечений зацепления $L = P \cup Q$ равно $\mathrm{cn}(L) = 4$. Число над-пересечений равно $\mathrm{cn}(P,Q) = 2$

Пусть $\mathrm{cn}_{p,q}(K)$ — минимум $\mathrm{cn}(P,Q)$ по всем сателлитным зацеплениям (P,Q) узла K степени (p,q). Определим *асимптотическое число пересечений* узла K следующим образом:

$$\mathrm{ac}(K) = \lim\inf_{p,q\to\infty} \mathrm{cn}_{p,q}(K)/pq = \inf\{\mathrm{cn}_{p,q}(K)/pq\colon p,q \geqslant 1\}. \tag{5.5}$$

Замечание 5.7. Эквивалентность двух определений $\mathrm{ac}(K)$ следует из построения аналога k-кратной альтернированной диаграммы для сателлита степени (p,q), представляющей (kp,kq) сателлит. Число пересечений сателлита степени (kp,kq) (выбранного нужным образом) и сателлита степени (p,q) отличаются друг от друга множителем k^2 (см. [FH2]).

Очевидно, $\mathrm{ac}(K)\leqslant \mathrm{cn}(K)$, поскольку $\mathrm{cn}(P,Q)\leqslant \mathrm{cn}(K)$ для P и Q, являющихся копиями минимальной диаграммы узла.

Гипотеза 5.8 (см. [FH2]). $\mathrm{ac}(K)=\mathrm{cn}(K)$.

Теорема 5.9 (см. [FH2]). *Для бездивергентного поля ξ, определенного в полнотории $\boldsymbol{T}$ узлового типа K и параллельного границе $\partial\boldsymbol{T}$, имеет место неравенство*

$$Cr(\xi,\xi)\geqslant |\mathrm{Flux}(\xi)|^2\,\mathrm{ac}(K).$$

Следствие 5.10. $Cr_{\mathrm{top}}(\xi,\xi)\geqslant |\mathrm{Flux}(\xi)|^2\,\mathrm{ac}(K)$.

Следствие 5.11. *$E_{3/2}$-энергия такого поля ξ обладает следующей нижней гранью*

$$E_{3/2}(\xi)\geqslant \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/4}|\mathrm{Flux}(\xi)|^{3/2}(\mathrm{ac}(K))^{3/4}.$$

Доказательство: см. вышеизложенные факты и теорему 5.3.

Отметим, что теперь правая часть энергетического неравенства топологически инвариантна.

Эту оценку можно еще уточнить в терминах инвариантов узлов следующим образом (см. подробности и доказательства в [FH2]). *Поверхностью Зейферта* узла $K\in\mathbb{R}^3$ называется произвольная ориентированная поверхность, вложенная в $\mathbb{R}^3$, границей которой является узел K. *Родом* (genus) узла называется минимальный род (т. е. число приклеенных к диску ручек) поверхности Зейферта. По определению род не меньше единицы для нетривиального узла (тривиальный узел ограничивает настоящий вложенный диск).

Теорема 5.12 (см. [FH2]). *Для любого узла K асимптотическое число пересечений $\mathrm{ac}(K)$ удовлетворяет неравенству $\mathrm{ac}(K)\geqslant 2\,\mathrm{genus}(K)-1$. В частности, $\mathrm{ac}(K)\geqslant 1$ для любого нетривиального узла.*

Определение 5.13. Для зацепления $L=(L_1,\dots,L_k)$ выберем сначала окрестность, состоящую из k попарно непересекающихся полноториев $\boldsymbol{T}_1,\dots,\boldsymbol{T}_k$, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathrm{cn}_{p,q}(L_i;L)$, $i\in\{1,\dots,k\}$, минимальное число прохождений кривой степени p в $\boldsymbol{T}_i$ (спроектированной на плоскость) над k-компонентным зацеплением, образованным кривыми степени 1 в $\boldsymbol{T}_1,\dots,\boldsymbol{T}_k$. Аналогичным образом определим *асимптотический коэффициент пересечения* $\mathrm{ac}(L_i,L)$ кривой L_i с L по формуле (5.5), заменив в ней $\mathrm{cn}_{p,q}(K)$ на $\mathrm{cn}_{p,q}(L_i;L)$.

Тогда для бездивергентного поля ξ, имеющего зацепление инвариантных полноториев, имеет место неравенство

$$Cr_{\mathrm{top}}(\xi,\xi)\geqslant \left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{ac}(L_i,L)|\mathrm{Flux}(\xi|_{\boldsymbol{T}_i})|\right)\min_{1\leqslant j\leqslant k}\{|\mathrm{Flux}(\xi|_{\boldsymbol{T}_j})|\}.$$

В частности, для двухкомпонентного зацепления полноториев $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)$ можно получить, что

$$Cr_{\mathrm{top}}(\xi,\xi) \geqslant 2\left|\mathrm{lk}(L_1, L_2)\,\mathrm{Flux}(\xi|_{\boldsymbol{T}_1})\,\mathrm{Flux}(\xi|_{\boldsymbol{T}_2})\right|.$$

Итак, оценки энергии можно получить из решения чисто топологической задачи вычисления величин $\mathrm{ac}(K)$ и $\mathrm{ac}(L_i, L)$ для заданных типов узлов и зацеплений вихревых трубок [FH2].

Замечание 5.14. Эти инварианты чувствительнее, чем коэффициенты зацепления, что непосредственно вытекает из вычисления коэффициентов зацепления посредством проектирования на плоскость:

$$\mathrm{ac}(L_i, L) \geqslant \sum_{i\neq j} |\mathrm{lk}(L_i, L_j)|, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Данная оценка бесполезна для конфигураций с нулевыми коэффициентами зацепления (таких, как кольца Борромео, рис. 26, *b*). Утверждение, аналогичное теореме 5.12, дает нижнюю грань для $\mathrm{ac}(L_i, L)$ в терминах так называемой нормы Терстона для некоторых поверхностей, связанных с зацеплением L (см. [FH2]). В частности, если L_i не является тривиальной компонентой, отделяемой от зацепления L (например, L_i — одна из компонент колец Борромео), то асимптотическое число пересечений $\mathrm{ac}(L_i, L)$ не меньше единицы.

Доказательство теоремы 5.9. Определим *степень* (многозначной) функции $f\colon \boldsymbol{T} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ как ее гомологическую степень, т. е. число оборотов образа функции, заданной на полнотории.

Лемма 5.15. *Для векторного поля ξ, параллельного границе $\partial\boldsymbol{T}$ полнотория $\boldsymbol{T}$,*

$$\mathrm{Flux}(\xi) = \int_{\boldsymbol{T}} (\xi, \nabla f)\,\mu \tag{5.6}$$

для любой функции $f\colon \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ единичной степени.

Доказательство. Разрежем полноторие $\boldsymbol{T}$ вдоль любой поверхности Σ (представляющей образующую группы $H_2(\boldsymbol{T}, \partial\boldsymbol{T})$, рис. 36) так, чтобы получился цилиндр F.

Функция f на $\boldsymbol{T}$ порождает функцию $\tilde{f}\colon F \to \mathbb{R}$ на цилиндре. Значения $\tilde{f}$ в соответствующих точках верхнего и нижнего оснований цилиндра ∂_+F и ∂_-F отличаются на единицу. Обозначим через dA элемент площади на сечении Σ. Тогда

$$\int_{\boldsymbol{T}} (\xi, \nabla f)\,\mu = \int_F (\xi, \nabla \tilde{f})\,\mu = \int_F \mathrm{div}(\tilde{f}\xi)\,\mu = \int_{\partial_+F} (\tilde{f}\xi, n)\,dA +$$
$$+ \int_{\partial_-F} (\tilde{f}\xi, n)\,dA = \int_\Sigma \left([\tilde{f}(\text{верх }(x)) - \tilde{f}(\text{низ }(x))]\xi, n\right) dA(x) = \int_\Sigma (\xi, n)\,dA.$$

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы.

Предположим теперь, что $\mathrm{Flux}(\xi) = 1$, а g^t — фазовый поток поля ξ. Тогда для фиксированного C^1-отображения $f\colon \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ степени 1 и его поднятия $\tilde{f}\colon \widetilde{\boldsymbol{T}} \to \mathbb{R}$ имеем

$$\int\limits_{\boldsymbol{T}} (\tilde{f}(g^\tau(x)) - \tilde{f}(x))\,\mu = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\boldsymbol{T}} \big(\nabla f(g^t(x)), \xi(g^t(x))\big)\,\mu_x\,dt = \int\limits_0^\tau \mathrm{Flux}(\xi)\,dt = \tau. \quad (5.7)$$

Напомним, что $\Gamma_\tau(x)$ — это кривая $g^t(x)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, присоединенная к «короткой кривой» $\Delta(g^\tau(x), x)$ для любого $x \in \boldsymbol{T}$. Тогда

$$\big|\mathrm{degree}(\Gamma_\tau(x)) - (\tilde{f}(g^\tau(x)) - \tilde{f}(x))\big| \leqslant C,$$

поскольку длины коротких путей равномерно ограничены, а функция $\tilde{f}$ непрерывно дифференцируема.

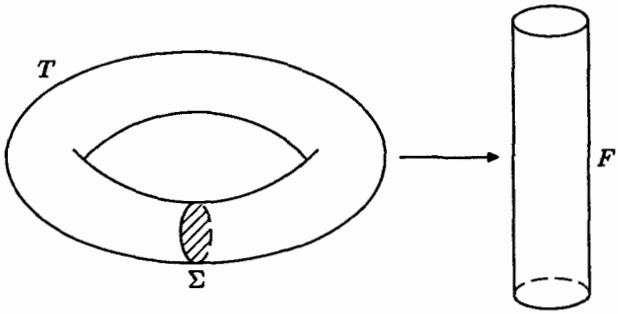


Рис. 36. Разрезав полноторие вдоль Σ, получим цилиндр

С другой стороны, по определению асимптотического числа пересечения

$$c(\Gamma_\tau(x), \gamma) \geqslant \mathrm{ac}(K)\,\mathrm{degree}(\Gamma_\tau(x))\,\mathrm{degree}(\gamma) \quad (5.8)$$

для любой замкнутой кривой γ в полнотории $\boldsymbol{T}$. Поэтому

$$c(\Gamma_\tau(x), \gamma) \geqslant \mathrm{ac}(K)\,\mathrm{degree}(\gamma)[(\tilde{f}(g^\tau(x)) - \tilde{f}(x)) - C].$$

Из этого неравенства и формулы (5.7) получим

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{\boldsymbol{T}} c(\Gamma_\tau(x), \gamma)\,\mu_x \geqslant \mathrm{ac}(K)\,\mathrm{degree}(\gamma)\Big(1 - \frac{C \cdot \mathrm{vol}(\boldsymbol{T})}{\tau}\Big).$$

Откуда при $\tau \to \infty$ получаем оценку снизу для среднего числа пересечений $c_\xi(\gamma)$:

$$c_\xi(\gamma) \geqslant \mathrm{ac}(K)\,\mathrm{degree}(\gamma).$$

Аналогично, полагая $\gamma = \Gamma_\tau(y)$, $y \in \boldsymbol{T}$ и используя формулу (5.8) и определение асимптотического числа пересечений, получаем требуемое неравенство

$$Cr(\xi, \xi) \geqslant \mathrm{ac}(K). \qquad \square$$

5.3. Конформный модуль тора

Некоторые оценки энергии для векторных полей, обладающих инвариантными торами, можно сформулировать в терминах конформного модуля полнотория.

Пусть $\boldsymbol{T}$ — полноторие, снабженное некоторой римановой метрикой. Гомотопически $\boldsymbol{T}$ эквивалентно окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Определение 5.16. *Конформный модуль* полнотория $\boldsymbol{T}$ с метрикой на нем определяется формулой

$$m(\boldsymbol{T}) = \inf_f \int_{\boldsymbol{T}} \|\nabla f\|^3 \mu,$$

где $f\colon \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — любая C^1-функция степени 1.

Замечание 5.17. Модуль можно рассматривать как меру «электропроводимости» для токов вдоль $\boldsymbol{T}$: «толстый» тор обладает большим модулем, а очень тонкий — модулем, близким к нулю. Модуль $m(\boldsymbol{T})$ является конформным инвариантом: он сохраняется при конформном изменении метрики, так как масштаб ∇ обратно пропорционален масштабу длины.

Теорема 5.18 (см. [FH2]). *Для любого бездивергентного векторного поля ξ с инвариантным полноторием $\boldsymbol{T}$ имеет место соотношение*

$$E_{3/2}(\xi) = \inf_{\boldsymbol{T}} \|\xi\|^{3/2} \mu \geqslant \frac{|\mathrm{Flux}(\xi)|^{3/2}}{m(\boldsymbol{T})^{1/2}},$$

где $\mathrm{Flux}(\xi)$ — *поток поля ξ через любую поверхность Σ, представляющую образующую группы $H_2(\boldsymbol{T}, \partial\boldsymbol{T})$* (см. рис. 36).

Доказательство. Теорема непосредственно следует из леммы 5.15. Действительно, применяя неравенство Гельдера к (5.6), получаем

$$|\mathrm{Flux}(\xi)| \leqslant \|\xi\|_{L^{3/2}} \|\nabla f\|_{L^3},$$

поэтому

$$E_{3/2}(\xi) = (\|\xi\|_{L^{3/2}})^{3/2} \geqslant \frac{|\mathrm{Flux}(\xi)|^{3/2}}{(\|\nabla f\|_{L^3})^{3/2}}.$$

Минимизация по функциям f степени 1 превращает стоящую в знаменателе L^3-норму в конформный модуль. □

Замечание 5.19. Сохраняющий объем диффеоморфизм не изменяет $\mathrm{Flux}(\xi)$ и, следовательно, оставляет энергию поля $h_*\xi$ ограниченной снизу, если модуль тора ограничен сверху. В свою очередь, модуль $m(\boldsymbol{T})$ можно оценить чисто топологическими величинами, связанными с типом узла (или зацепления) тора (или совокупности торов).

Теорема 5.20 (см. [FH2]). *Для любого полнотория $\boldsymbol{T}$ узлового типа K, вложенного в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, выполняется неравенство*

$$m(\boldsymbol{T}) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4(\mathrm{ac}(K))^{3/2}}.$$

Доказательства этого и других интересных неравенств для энергии, зацеплений и модулей полноториев можно найти в [FH2]. Предположительно, для нетривиального зацепления полноториев величина $\min\{m(\boldsymbol{T}_1), \ldots, m(\boldsymbol{T}_k)\}$ мажорируется универсальной константой, не зависящей от k (верхняя оценка, полученная в [FH2], равна $\sqrt{\pi}k^{1/2}/4$).

§ 6. Энергия узла

Процесс релаксации магнитных трубок к состоянию с минимальной энергией поднимает вопрос об оптимальных вложениях кривых или более общих подмногообразий в пространство. Возможно ли естественным образом связать «энергию» с подмногообразием так, чтобы энергия была бесконечна для погружений, не являющихся вложениями, и так, чтобы градиентный поток энергии сохранял тип изотопии и приводил подмногообразие в «оптимальное» состояние?

6.1. Энергия заряженного контура

Представим себе бесконечно тонкий аналог магнитной трубки — заряженный контур. Среди возможных различных определений потенциальной энергии контура в трехмерном пространстве особый интерес представляет предложенное недавно О'Хара [OH1] определение, обладающее замечательными свойствами инвариантности (см. [BFHW, FHW]).

Пусть $\gamma = \gamma(u)$ — спрямляемая кривая, вложенная в $\mathbb{R}^3$, где u принадлежит окружности S^1. Для любой пары точек $\gamma(u)$, $\gamma(v)$ обозначим через $\operatorname{dist}(\gamma(u), \gamma(v))$ расстояние между ними вдоль кривой, т. е. минимум длин двух дуг кривой γ с концами в точках $\gamma(u)$ и $\gamma(v)$.

Определение 6.1 (см. [OH1]). *Энергией кривой* γ называется следующий интеграл:

$$E(\gamma) = \iint\limits_{S^1 \times S^1} \left\{ \frac{1}{\|\gamma(v) - \gamma(u)\|^2} - \frac{1}{|\operatorname{dist}(\gamma(v), \gamma(u))|^2} \right\} \|\dot\gamma(u)\| \|\dot\gamma(v)\| \, du \, dv.$$

Инвариантность этой энергии относительно изменения параметризации и растяжений пространства очевидна.

Замечание 6.2. Энергия E определена на пространстве вложений $S^1 \to \mathbb{R}^3$. Она стремится к бесконечности, когда вложение становится сингулярным. Отметим, что это — регуляризация $1/r^2$-потенциальной энергии заряженной кривой, в то время как потенциал Ньютона–Кулона в $\mathbb{R}^3$ равен $1/r$. Энергии, соответствующие показателям, меньшим или равным -2 (в частности, рассматриваемому сейчас), стремятся к бесконечности по мере приближения двух различных дуг кривой друг к другу и появлении у кривой двойной точки. Такая энергия создает бесконечный барьер против изменения топологии узла. Действительно, нерегуляризованная энергия двух трансверсально пересекающихся прямолинейных отрезков (например, отрезков осей

координат) есть интеграл

$$\int_y \int_x \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \int_\theta \int_r \frac{r}{r^2}\,dr\,d\theta,$$

который расходится в начале координат.

Замечательным свойством $E(\gamma)$ является ее инвариантность при преобразованиях Мёбиуса. Напомним, что *преобразованием Мёбиуса* в $\mathbb{R}^3$ называется композиция евклидова движения, растяжения и инверсии относительно сферы. Добавление бесконечно удаленной точки превращает преобразования Мёбиуса в биекции трехмерной сферы $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

Теорема 6.3 (см. [BFHW, FHW]). *Пусть γ — простая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, и пусть MT — преобразование Мёбиуса в $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Имеют место следующие утверждения:*

1) *если $MT \circ \gamma \subset \mathbb{R}^3$, то $E(MT \circ \gamma) = E(\gamma)$;*

2) *если $MT \circ \gamma$ проходит через ∞, то $E((MT \circ \gamma) \cap \mathbb{R}^3) = E(\gamma) - 4$.*

О'Хара [OH1] доказал, что существует лишь конечное число типов узлов среди кривых с заданными ограничениями сверху на энергию, длину и L^2-норму кривизны. Условия на длину и L^2-норму кривизны можно опустить, как показывает следующая теорема.

Теорема 6.4 (см. [FHW]). *Пусть γ — простая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, и пусть через $\mathrm{cn}(\gamma)$ (соответственно $c(\gamma,\gamma)$) обозначено топологическое число пересечений (соответственно среднее число самопересечений) узла, реализуемого кривой γ (соответственно самой кривой γ). Тогда*

$$2\pi \mathrm{cn}(\gamma) + 4 \leqslant E(\gamma),$$
$$12\pi c(\gamma,\gamma) \leqslant 11E(\gamma) + 12.$$

Отметим, что среднее число самопересечений $c(\gamma,\gamma)$, определяемое интегралом гауссова типа (5.1), ограниченно, так как числитель имеет двойное вырождение на диагонали $S^1 \times S^1$.

Энергия E любой окружности равна 4, являясь минимумом энергии среди замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$. Из сформулированной теоремы следует, что если замкнутая кривая удовлетворяет неравенству $E(\gamma) < 6\pi + 4 \approx 22{,}849$, то γ не заузлена (число пересечений $\mathrm{cn}(\gamma) \geqslant 3$ для любого существенного узла γ).

Используя экспоненциальную верхнюю оценку числа различных узлов с заданным ограничением на число пересечений, получим

Следствие 6.5 (см. [FHW]). *Количество (классов изоморфизмов) узлов, которые могут быть представлены кривыми с энергией E, не превосходящей N, ограничено величиной*

$$2(24^{-4/2\pi}) \cdot (24^{1/2\pi})^N \approx (0{,}264)(1{,}658)^N.$$

Милнор [Mil1] показал, что для *полной кривизны*

$$TK(\gamma) = \int \left| \left(\frac{\dot\gamma(u)}{\|\dot\gamma(u)\|} \right)' \right| du$$

(здесь $'$ и $\dot{}$ обозначают производную по u) из неравенства $TK(\gamma) \leqslant 4\pi$ следует, что γ незаузлена (TK (окружности) равна 2π). Тем не менее, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много типов узлов, имеющих представителей с полной кривизной $TK \leqslant 4\pi + \varepsilon$.

Замечание 6.6. Полную энергию можно аналогичным образом приписать зацеплению $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, состоящему из k непересекающихся вложений S^1 в $\mathbb{R}^3$,

$$TE(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = \sum_{i=1}^{k} E(\gamma_i, \gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\, i \neq j}^{k} E(\gamma_i, \gamma_j),$$

где $E(\gamma_i, \gamma_i) = E(\gamma_i)$, а при $i \neq j$

$$E(\gamma_i, \gamma_j) = \iint\limits_{S^1 \times S^1} \frac{\|\dot{\gamma}_i(u)\| \, \|\dot{\gamma}_j(u)\|}{\|\gamma_i(u) - \gamma_j(u)\|^2} \, du \, dv.$$

Для любого $N > 0$ существует конечное число типов зацеплений, имеющих представителей с $TE \leqslant N$ (см. [FHW]).

Замечание 6.7. Для бездивергентного поля, заключенного в нетривиально заузленных или зацепленных трубках, существует нижняя грань магнитной энергии, как обсуждалось в п. 4.2. Моффат [Mof5] предложил использовать эти оценки энергии снизу в качестве инвариантов (трубчатых окрестностей) узлов и зацеплений.

А именно, для каждого узла рассмотрим сателлитную трубку тока объема vol, несущую «неперекрученное» векторное поле ξ с потоком Flux (через любое меридиональное сечение трубки) и исследуем соответствующую энергию этого векторного поля. Эту энергию можно уменьшить с помощью диффеоморфизма, сохраняющего как vol, так и Flux, до топологически достижимого минимума. Из соображений размерности эта минимальная энергия $E(\xi) = m(\mathrm{Flux})^2(\mathrm{vol})^{-1/3}$, где $m = m(\mathrm{Flux}, \mathrm{vol})$ — положительное вещественное число, зависящее от топологии узла. Если для данного узла существуют различные локальные минимумы энергии, то последовательность $\{m_0, m_1, \ldots, m_r\}$ таких возможных значений естественно назвать спектром энергии окрестности данного узла. Наименьшее число m_0 является возможной естественной мерой сложности узла (см. также [C-M]).

Представляется интересной задача установить связь между окончательными положениями вихревых магнитных трубок при релаксации E_2-энергии и формой кривых, реализующих минимум соответствующей функции энергии на кривых. Критические точки этой энергии соответствовали бы положениям равновесия, описываемым спектром Моффата.

6.2. Обобщения энергии узла

Существует множество обобщений энергии узла, инвариантных по отношению к преобразованиям Мёбиуса (см., например, [D-S, AuS, KuS]). Представим себе равномерно заряженное k-мерное подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 6.8. Для заданной функции f определим *f-энергию* как

$$E_f(M) = \iint\limits_{M\times M} \frac{f(x,y)}{\|x-y\|^{2k}}\, d\,\mathrm{vol}_M(x)\, d\,\mathrm{vol}_M(y).$$

Будем считать функцию f на $M \times M$ функцией трех аргументов, $f = f(M,x,y)$.

Определение 6.9. Функция $f(M,x,y)$ называется *g-инвариантной* относительно отображения $g\colon M \to M$, если $f(g_*M, g(x), g(y)) = f(M,x,y)$.

Теорема 6.10 (см. [D-S, AuS, KuS]). *Любая масштабно-инвариантная и инвариантная по отношению к преобразованиям Мёбиуса функция f порождает энергию E_f, инвариантную относительно преобразований Мёбиуса в $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.*

Масштабная инвариантность подынтегральной функции объясняет выбор степени $2k$ в знаменателе выражения для энергии в $\mathbb{R}^n$, а не физически обусловленной $(n-2)$. Подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ можно рассматривать как подмногообразие в $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, если использовать стереографическую проекцию. Эта проекция продолжается до преобразования Мёбиуса пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, в то время как формула для энергии не зависит от размерности объемлющего пространства.

Доказательство. Утверждение следует из инвариантности по отношению к преобразованиям Мёбиуса подынтегральной функции с $f \equiv 1$. В последнем случае масштабная инвариантность очевидна, в то время как инвариантность относительно инверсии $r \mapsto \tilde{r} := r/\|r\|^2$ следует из рис. 37.

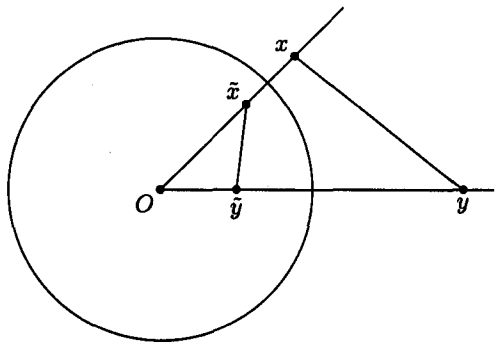


Рис. 37. Треугольники Oxy и $O\tilde{x}\tilde{y}$ подобны (здесь $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — образы x, y при инверсии)

Из подобия треугольников Oxy и $O\tilde{x}\tilde{y}$ следует тождество

$$\frac{\|\tilde{x}\|\cdot\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2} = \frac{\|x\|\cdot\|y\|}{\|x-y\|^2}.$$

С другой стороны, инверсия, преобразующая M в $\widetilde{M}$ конформно увеличивает длины в точке x с коэффициентом $\|\tilde{x}\|/\|x\|$. Соответствующее изменение

элемента объема равно

$$d\mathrm{vol}_{\widetilde{M}}(\tilde{x}) = (\|\tilde{x}\|/\|x\|)^k d\mathrm{vol}_M(x).$$

Это значит, что подынтегральное выражение в целом инвариантно относительно инверсии, а следовательно, и относительно произвольного преобразования Мёбиуса. □

Если $f \equiv 1$, подынтегральное выражение возрастает по мере приближения x к y, и поэтому энергия бесконечна для любого M. Регуляризующий множитель f нужен, чтобы компенсировать сингулярность, и поэтому он должен обращаться в нуль при $x \to y$.

От конкретной регуляризации обычно требуются такие свойства: бесконечный барьер, препятствующий самопересечениям, мёбиусова инвариантность и ограниченность энергии снизу. Более ограничительными являются свойство приближенной аддитивности для связной суммы двух отдаленных узлов, а также требование, чтобы вклад любых двух непересекающихся дуг в энергию не зависел от того, принадлежат они или нет одной и той же компоненте зацепления (см. обсуждение этих свойств в [AuS]).

Чтобы рассмотреть пример, вернемся к случаю узла $\gamma \in \mathbb{R}^3$. Определим специальную регуляризацию $f_0\colon \gamma \times \gamma \to \mathbb{R}$ с помощью следующей конструкции.

Определение 6.11 (см. [D-S]). Для заданной точки $x \in \gamma$ и любой другой точки $p \in \mathbb{R}^3$ существует единственная окружность (или прямая) $S_x(p)$, касательная в точке x к γ и проходящая через p. Таким образом, для двух данных точек x и y узла γ имеем две ориентированные окружности $S_x(y)$ и $S_y(x)$, пересекающиеся под равными углами в x и y. Пусть α — *угол*, под которым эти две окружности пересекаются в $\mathbb{R}^3$. Эти окружности и, в частности, угол α определены инвариантно относительно преобразований Мёбиуса. Назовем *особым весом* функцию $f_0 := 1 - \cos\alpha$. (Угол α может быть также определен в случае произвольного k-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, если заменить окружности $S_x(y)$ k-сферами [KuS].)

Предложение 6.12 (см. [D-S]). *Энергия узла E_{f_0}, определяемая особым весом f_0, эквивалентна энергии О'Хара E с точностью до константы: если γ — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, то*

$$E_{f_0}(\gamma) = E(\gamma) - 4.$$

В [FHW] было показано, что для неприводимого узла существует представитель, имеющий минимальную энергию среди всех простых петель того же узлового типа. Критерий, описывающий «оптимальные» состояния (с минимальной энергией), был получен в [OH2]. Сошлемся также на [KuS], где приведены интересные примеры стереопар оптимальных зацеплений (с числом пересечений $\mathrm{cn} \leqslant 8$), позволяющие представить себе трехмерную картину.

Замечание 6.13. Отметим, что число критических точек функции на пространстве вложений $S^1 \to \mathbb{R}^3$ можно оценить снизу, пользуясь теорией Морса и результатом Васильева для чисел Бетти пространства вложений [VasV].

В отличие от узлов, плоские кривые (погружения $S^1 \to \mathbb{R}^2$) в общем случае имеют точки самопересечения. Простейшие сингулярные плоские кривые (образующие дискриминантную гиперповерхность в пространстве отображений $S^1 \to \mathbb{R}^2$) имеют либо тройную точку, либо точку самокасания (см. рис. 38). Трактовку соответствующей теории инвариантов Васильева для плоских и лежандровых кривых читатель найдет в [Arn21, Aic, L-W, Vir, Pl1, Pl2, PlV, Shm, Tab2, Gor, FuT].

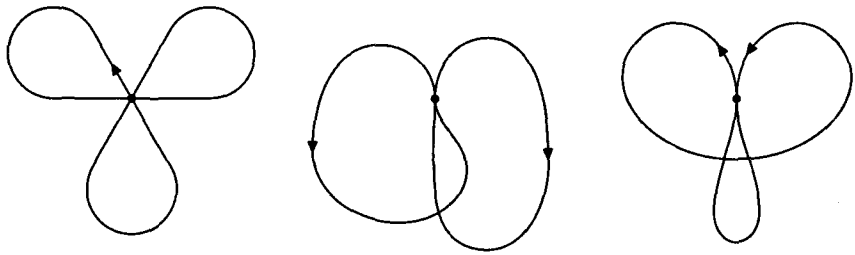


Рис. 38. Плоские кривые с тройными точками и самокасаниями

Задача 6.14. A. Существует ли функционал энергии на пространстве погружений, бесконечный на дискриминанте и обладающий свойством инвариантности относительно преобразований Мёбиуса (и/или другими свойствами, обсуждавшимися выше)? Предположительно существует лишь конечное число гомотопических классов погруженных кривых с ограниченной сверху «энергией».

B. Существуют ли асимптотические обобщения инвариантов плоских кривых, аналогичные рассмотренным ранее для зацепления пространственных кривых? В [Aic, L-W] даны весьма обнадеживающие в данном смысле интегральные формулы таких инвариантов.

Замечание 6.15 (Д. Каждан). Скорость роста количества типов погружений в плоскость с ростом числа пересечений позволяет предположить наличие метрики отрицательной кривизны в соответствующих пространствах погружений.

§ 7. Обобщенные спиральности и коэффициенты зацепления

В этом параграфе описаны различные обобщения спиральности на многообразия с краем, на неодносвязные многообразия, на случай бóльших размерностей, а также на магнитные трубки, образующие зацепления, которые можно обнаружить с помощью инвариантов зацепления более высокого порядка.

7.1. Относительная спиральность

Спиральность векторного поля в односвязном многообразии с краем (например, в области в $\mathbb{R}^3$) корректно определена при условии, что поле касательно к краю. Векторное поле, пересекающее край, не обладает ни эргодическим

вариантом спиральности (некоторые его траектории выходят из области, поэтому их асимптотическое зацепление нельзя определить), ни интегральным (формула должна включать граничный член). Тем не менее, векторные поля, совпадающие вне области, можно сравнивать, изучая *относительное зацепление* их траекторий внутри области [Ful, B-F].

Определение коэффициента относительного зацепления незамкнутых кривых основывается на введении «опорных дуг» с совпадающими концами и замыкающих кривые, рис. 39 (см. [Ful], где эта конструкция была применена к изучению заузленности ДНК).

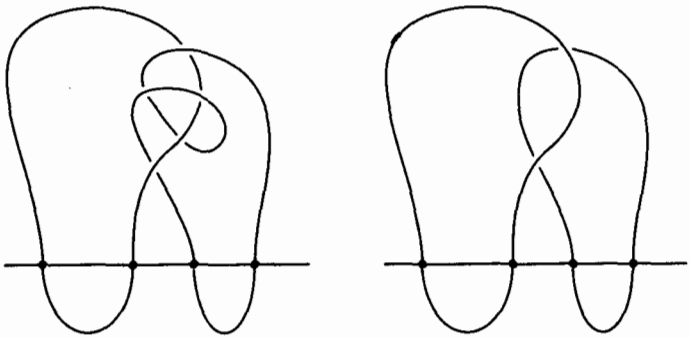


Рис. 39. Относительное зацепление незамкнутых кривых с дугами вне области

Непрерывный аналог этой ситуации заключается в следующем (см. [B-F]). Предположим, что область в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или замкнутое односвязное многообразие M^3) разделена на две односвязных области A и B, разделенных граничной поверхностью S. Предположим далее, что два бездивергентных векторных поля ξ и η, заданные в A, совпадают на границе S и имеют одинаковое продолжение ζ в область B. Обозначим расширенные поля в M, соответственно, через $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. Мы позволим себе определенную вольность в обозначениях, записывая их как суммы $\tilde{\xi} = \xi + \zeta$ и $\tilde{\eta} = \eta + \zeta$ (где ξ, η, ζ рассматриваются как (разрывные) векторные поля во всем многообразии M с носителями $\operatorname{supp}\xi$, $\operatorname{supp}\eta \subset A$ и $\operatorname{supp}\zeta \subset B$).

Лемма-определение 7.1. *Разность спиральностей полей $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$*

$$\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}(\tilde{\xi}) - \mathcal{H}(\tilde{\eta})$$

не зависит от их общего продолжения ζ в область B, а значит, может служить мерой относительной спиральности полей ξ и η в A.

Доказательство. Определим (замкнутые) 2-формы α, β и ω (соответственно подставляя векторные поля ξ, η и ζ в элемент объема μ на M: $i_\xi\mu = \alpha$, и т. д.). Тогда надо показать, что разность

$$\mathcal{H}(\tilde{\xi}) - \mathcal{H}(\tilde{\eta}) := \int_M (\alpha + \omega) \wedge d^{-1}(\alpha + \omega) - \int_M (\beta + \omega) \wedge d^{-1}(\beta + \omega)$$

не зависит от ω. Легко видеть, что

$$\Delta\mathcal{H} = \int\limits_M \alpha \wedge d^{-1}\alpha - \int\limits_M \beta \wedge d^{-1}\beta + \int\limits_M (\alpha - \beta) \wedge d^{-1}\omega + \int\limits_M \omega \wedge d^{-1}(\alpha - \beta).$$

Здесь результат применения d^{-1} к разрывной 2-форме есть непрерывная 1-форма («форма-потенциал»). Входящие в $\Delta\mathcal{H}$ члены, содержащие ω, суть $\int\limits_M (\alpha - \beta) \wedge d^{-1}\omega + \int\limits_M \omega \wedge d^{-1}(\alpha - \beta)$; нам нужно показать, что их вклад равен нулю.

Интегрируя по частям одно из этих слагаемых, мы получаем, что их сумма равна

$$2\int\limits_M (\alpha - \beta) \wedge d^{-1}\omega,$$

что, в свою очередь, равно $2\int\limits_A (\alpha - \beta) \wedge d^{-1}\omega$, так как $\operatorname{supp}(\alpha - \beta) \subset A$.

С другой стороны, 1-форма $d^{-1}\omega$ в A есть дифференциал некоторой функции $d^{-1}\omega = dh$. Действительно, эта форма замкнута (дифференциал $d(d^{-1}\omega) = \omega$ равен нулю в A вследствие условия $\operatorname{supp}\zeta = \operatorname{supp}\omega \subset B$), а значит, точна в односвязной области. Поэтому

$$2\int\limits_A (\alpha - \beta) \wedge d^{-1}\omega = 2\int\limits_A (\alpha - \beta) \wedge dh = 2\int\limits_S h(\alpha - \beta) = 0,$$

где последнее равенство верно в силу совпадения полей ξ и η на границе S. Отсюда следует, что на $\Delta\mathcal{H}$ не влияет выбор продолжения ζ. □

Относительная спиральность пары полей, совпадающих на краю M и где-либо трансверсальных к нему, инвариантна относительно сохраняющих объем диффеоморфизмов M.

Замечание 7.2. Явление подобного типа возникает для бездивергентных векторных полей на неодносвязных многообразиях. Настоящий коэффициент зацепления в этом случае не определен, но два «гомологически эквивалентных» поля можно сравнить друг с другом. Интересное приложение к *коэффициентам зацепления для каскадов* можно найти в [GST].

Возьмем неособое C^1-векторное поле внутри полнотория такое, что линии тока трансверсальны к его двумерным дискам, см. рис. 40, *а*. При таком выборе можно определить следующий аналог коэффициента зацепления. Зафиксируем структуру прямого произведения $S^1 \times D^2$ в полнотории, тривиализующую его как расслоение над S^1.

Топологическим зацеплением двух длинных участков траекторий называется алгебраическое число наматываний одной траектории на другую. А именно, проекции траекторий на диск образуют движущуюся пару точек в том же двумерном диске. Коэффициент зацепления есть число вращения одной точки вокруг другой. Это определение можно расширить на случай каскадов периодических траекторий в полнотории. Поток, задающий каскад в полнотории,

циклически переставляет меньшие инвариантные диски в поперечном сечении и повторяется внутри этих дисков (рис. 40, b).

С другой стороны, с участком $0 \leqslant t \leqslant T$ отдельной траектории C^1-потока можно связать (*инфинитезимальный*) *коэффициент самозацепления*, подсчитав, сколько раз касательный к диску вектор повернулся вокруг траектории. Почти для всех точек инфинитезимальный коэффициент самозацепления имеет предел при $T \to \infty$, который определяется пространственным интегралом соответствующей производной [Rue].

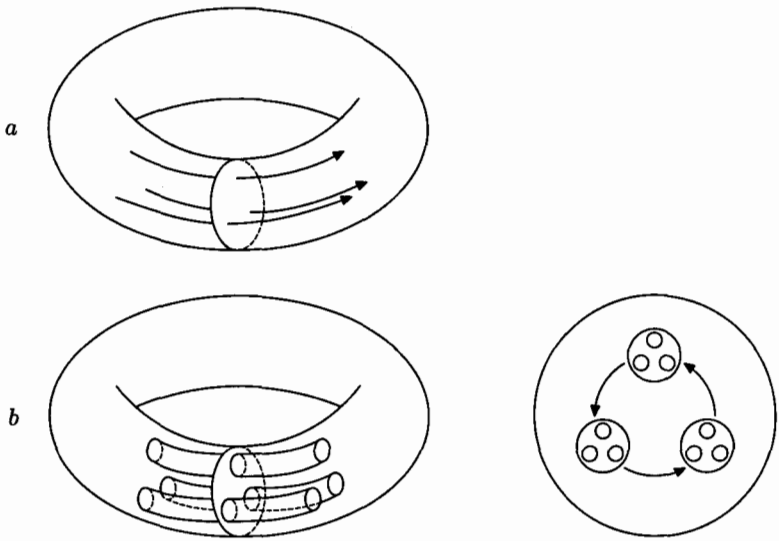


Рис. 40. (a) Полноторие с векторным полем, поперечным к двумерному диску D^2. (b) Каскад вложенных полноторий

Гамбаудо, Сулливан и Трессер показали в [GST], что последовательность топологически определенных средних коэффициентов зацепления для последовательности орбит в каскаде сходится к среднему коэффициенту самозацепления инвариантного множества. Они также описали последовательности рациональных чисел (в некотором смысле, аналоги чисел вращения для отображений окружности в себя), которые возникают как средние коэффициенты зацепления в каскаде итерируемых тороидальных узлов.

7.2. Эргодический смысл интегралов спиральности в старших размерностях

В высших размерностях инварианты, являющиеся обобщением спиральности векторного поля в $\mathbb{R}^3$, были введены Новиковым [Nov1]. Его идея состояла в том, чтобы распространить на замкнутые дифференциальные формы на сферах высших размерностей (не обязательно являющиеся прообразами форм со сфер меньших размерностей) операцию Уайтхеда в гомотопических группах сфер (подобно тому, как инвариант Хопфа на гомотопической

группе $\pi_3(S^2)$ обобщается в спиральность бездивергентных векторных полей на S^3).

При эргодической интерпретации конструкций Новикова возникает следующая сложность. В отличие от трехмерного случая, когда асимптотический коэффициент зацепления определен для почти каждой пары траекторий, траектории поля не могут быть зацеплены, если размерность объемлющего многообразия больше трех. Таким образом, вместо кривых следует рассматривать подмногообразия бóльших размерностей. Но для незамкнутых подмногообразий размерности $\geqslant 2$ нам недостает подходящего обобщения системы коротких путей.

Рассмотрим геометрический смысл инвариантов замкнутых 2-форм на многообразиях произвольной размерности. Для нечетномерных многообразий величины типа $\int d^{-1}\alpha \wedge \beta \wedge \ldots \wedge \omega$ возникают в качестве первых интегралов в теории идеальной баротропной жидкости (гл. I, § 9, гл. VI, § 2) или в теории Черна–Саймонса (п. 8.1). Здесь асимптотический коэффициент зацепления каждой пары траекторий поля заменяется зацеплением одной траектории с расслоением коразмерности 2. Для четномерных многообразий инварианты Новикова можно описать как усредненные *вырожденные* зацепления [Kh1]. Предложенная здесь интерпретация — эргодический аналог двойственности Пуанкаре, позволяющий трактовать свойства дифференциальных форм в терминах пересечений расслоений их ядер, см. замечание 4.7.

Пусть M^n — связное компактное многообразие без края и $H_1(M,\mathbb{R}) = H_2(M,\mathbb{R}) = 0$. Обозначим замкнутые (а значит, и точные) 2-формы на M через α, β, $\ldots \in \Omega^2(M)$, где $d^{-1}\alpha$, $d^{-1}\beta$, $\ldots$ — произвольные первообразные 1-формы (формы-потенциалы) для соответствующих 2-форм. Начнем со следующих простых наблюдений.

Предложение 7.3. 1) *Для нечетномерных многообразий M^{2m+1} и произвольных $m+1$ замкнутых 2-форм α, β, $\ldots$, ω интеграл типа Хопфа $I(\alpha,\beta,\ldots,\omega) = \int\limits_M d^{-1}\alpha \wedge \beta \wedge \ldots \wedge \omega$ симметричен относительно перестановок α, $\ldots$, ω и не зависит от выбора первообразной $d^{-1}\alpha$.*

2) [Nov1] *На четырехмерном многообразии M^4 для любых двух 2-форм α и β, удовлетворяющих условиям $\alpha \wedge \alpha = \beta \wedge \beta = \alpha \wedge \beta = 0$, интегралы*

$$J_1(\alpha,\beta) = \int\limits_M d^{-1}\alpha \wedge \alpha \wedge d^{-1}\beta$$

и

$$J_2(\alpha,\beta) = \int\limits_M d^{-1}\alpha \wedge \beta \wedge d^{-1}\beta$$

не зависят от выбора $d^{-1}\alpha$ и $d^{-1}\beta$.

В [Nov1] Новиков определил множество инвариантов на многообразиях произвольной размерности, и случай M^4 мы рассматриваем для иллюстрации. Мы собираемся представить эти интегралы как обобщенные коэффициенты зацепления некоторых слоений, связанных с дифференциальными формами.

Определение 7.4. Замкнутая 2-форма α ранга $\leqslant 2$ на многообразии M^n определяет (сингулярное) слоение (называемое *слоением ядер*) коразмерности 2 в M; касательная к этому слоению плоскость в любой точке M порождена $(n-2)$-вектором, лежащим в ядре формы α в этой точке.

Если многообразие снабжено формой объема μ, то это слоение порождено полем $(n-2)$-векторов $\mathcal{A}$, подстановка которых в эту форму объема дает α (т. е. $i_{\mathcal{A}}\mu = \alpha$).

Предложение 7.5. *Поле ядер замкнутой 2-формы вполне интегрируемо. В частности, для формы ранга $\leqslant 2$ оно порождает слоение коразмерности $\geqslant 2$.*

Доказательство состоит в применении критерия интегрируемости Фробениуса. □

Замечание 7.6. Без ограничения на ранг 2-формы α соответствующее $(n-2)$-векторное поле $\mathcal{A}$, вообще говоря, неразложимо. Условия $\alpha \wedge \alpha = \beta \wedge \beta = 0$ на пару α, β в п. 2 сформулированного предложения являются как раз ограничениями на ранги: $\mathrm{rk}(\alpha), \mathrm{rk}(\beta) \leqslant 2$. Третье условие $\alpha \wedge \beta = 0$ гарантирует, что слоения ядер (размерности 2 в M^4), определенные формами α и β (вблизи точки, где $\mathrm{rk}(\alpha) = \mathrm{rk}(\beta) = 2$), расположены следующим особым образом. Пересечения их слоев образуют одномерное слоение, при условии что α и β не пропорциональны. Кроме того, распределение, заданное как сумма ядер α и β, определяет в этом случае трехмерное слоение [Arn9].

Определение 7.7. *Среднее зацепление* кривой Γ со слоением $\mathcal{A}$ есть поток 2-формы $\alpha = i_{\mathcal{A}}\mu$ через произвольную поверхность $\partial^{-1}\Gamma$, ограниченную кривой Γ

$$\mathrm{lk}(\Gamma, \mathcal{A}) = \int\limits_{\partial^{-1}\Gamma} \alpha = \int\limits_{\Gamma} d^{-1}\alpha.$$

Следующее предложение мотивирует определение $\mathrm{lk}(\Gamma, \mathcal{A})$.

Предложение 7.8. *Число $\mathrm{lk}(\Gamma, \mathcal{A})$ совпадает со средним коэффициентом зацепления (вычисленным с использованием формы зацепления $G \in \Omega^{n-2}(M) \times \Omega^1(M)$) слоев слоения $\mathcal{A}$ с кривой Γ.*

Доказательство. По определению формы G коэффициент зацепления двух подмногообразий P и Q в M равен интегралу $\iint\limits_{P\times Q \subset M \times M} G$, см. § 4. Поэтому

$$\iint\limits_{\mathcal{A}\times\Gamma} G = \iint\limits_{M\times\Gamma} i_{\mathcal{A}} G \wedge \mu = \iint\limits_{M\times\Gamma} G \wedge i_{\mathcal{A}}\mu = \iint\limits_{M\times\Gamma} G \wedge \alpha = \int\limits_{\Gamma} d^{-1}\alpha.$$

Здесь первое тождество есть определение $\iint\limits_{\mathcal{A}\times\Gamma} G$, последнее — основное свойство формы G: оператор, соответствующий форме зацепления, на точных дифференциальных 2-формах действует как оператор d^{-1} (см. § 4). □

По аналогии с трехмерным случаем определим *асимптотическое зацепление* $\mathrm{lk}_\xi(x, \mathcal{A})$ траектории векторного поля ξ, проходящей через точку $x \in M$, со слоением $\mathcal{A}$. Это усредненный по времени коэффициент зацепления $\mathcal{A}$

с кривой $\Gamma_T(x)$, состоящей из длинного участка ξ-траектории $g_\xi^t x$ с началом в $x \in M$ (здесь $0 \leqslant t \leqslant T$) и короткого замыкающего пути:

$$\mathrm{lk}_\xi(x, \mathcal{A}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{lk}(\Gamma_T(x), \mathcal{A}).$$

Определение 7.9. *Средний коэффициент зацепления* векторного поля ξ с слоением $\mathcal{A}$, определенный на многообразии M, оснащенном элементом объема μ, равен

$$\mathrm{lk}_\xi(\mathcal{A}) = \int\limits_M \mathrm{lk}_\xi(x, \mathcal{A})\, \mu.$$

Теорема 7.10. *Пусть $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ — множество $m+1$ замкнутых 2-форм на M^{2m+1}. Предположим, что ранг одной из форм (например, α) не превосходит 2. Тогда интеграл типа Хопфа $I(\alpha, \beta, \ldots, \omega) = \int\limits_M d^{-1}\alpha \wedge \ldots \wedge \omega$ равен среднему коэффициенту зацепления векторного поля ξ с слоением $\mathcal{A}$:*

$$I(\alpha, \ldots, \omega) = \mathrm{lk}_\xi(\mathcal{A}),$$

где поля ξ и $\mathcal{A}$ определены соотношениями $i_\xi \mu = \beta \wedge \ldots \wedge \omega$ и $i_{\mathcal{A}} \mu = \alpha$.

Доказательство состоит в непосредственном применении эргодической теоремы Биркгофа. □

Ранг α играет существенную роль в определении слоения $\mathcal{A}$. Вообще говоря, можно было бы рассмотреть зацепление с абстрактным $(n-2)$-поливекторным полем вместо $(n-2)$-мерного слоения.

Если все эти формы имеют ранг $\leqslant 2$ (конечно, это достаточно ограничительное условие), то можно интерпретировать число $I(\alpha, \ldots, \omega)$ как мультизацепление всех соответствующих слоений. (См. также в [KoV] детальное изучение зацепления поля и слоения коразмерности 2 с трансверсальной инвариантной мерой, которое может быть обобщено на случай нескольких слоений.)

Точнее, обычный коэффициент зацепления есть билинейная форма на пространстве попарно непересекающихся подмногообразий соответствующих размерностей. Он определен для пары подмногообразий P^k и Q^l в M^n, подчиняющихся условиям $k + l = n - 1$ и $P \cap Q = \varnothing$. Аналогично определим коэффициент мультизацепления как мультилинейную форму на пространстве, состоящем из наборов r подмногообразий $(P_1, \ldots, P_r)$ в M^n таких, что

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{codim} P_i = n + 1 \tag{7.1}$$

и

$$\bigcap_{i=1}^{r} P_i = \varnothing. \tag{7.2}$$

Определение 7.11. *Коэффициентом мультизацепления* ориентированных замкнутых подмногообразий $P_1, \ldots, P_r$ в $M = \mathbb{R}^n$ (или S^n), удовлетворяющих указанным условиям, называется число (с учетом знака) точек

пересечения многообразия $F \subset M$, ограниченного одной из этих поверхностей $P_i = \partial F$, с пересечением всех остальных подмногообразий.

Поскольку эти подмногообразия снабжены трансверсальными ориентациями, то и все ограниченные ими многообразия, и все их пересечения также получают трансверсальную ориентацию, а значит, знаки точек пересечения определены однозначно. Например, три окружности на плоскости или две сферы и окружность в трехмерном пространстве могут быть зацеплены так, как показано на рис. 41.

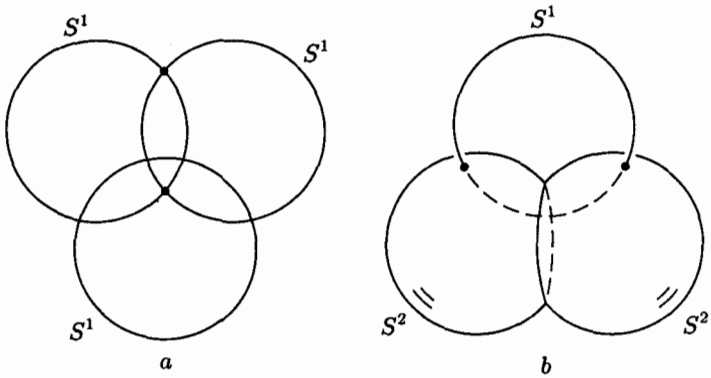


Рис. 41. (a) Зацепления трех окружностей на плоскости, (b) двух сфер и окружности в пространстве

Отметим, что коэффициент мультизацепления набора подмногообразий $P_1, \ldots, P_r$ в M равен обычному коэффициенту зацепления подмногообразия $P_1 \times \ldots \times P_r \subset M \times \ldots \times M$ с диагональю $\Delta = \{(x, \ldots, x) \colon x \in M\} \subset \subset M \times \ldots \times M$.

Напомним, что любая замкнутая 2-форма ранга $\leqslant 2$ определяет слоение коразмерности 2. Если бы слои были компактны, мы могли бы рассматривать взаимное зацепление этих слоев для $(m+1)$ 2-формы в M^{2m+1}, поскольку

$$\sum_{i=1}^{m+1} (\text{коразмерность слоев}) = 2m + 2 = \dim M + 1.$$

Итак, в этих терминах вышеприведенная теорема 7.10 принимает следующий вид.

Теорема 7.10′. *Инвариант типа Хопфа равен среднему асимптотическому коэффициенту мультизацепления слоев расслоений, определенных данными 2-формами.*

Чтобы описать эргодический смысл интегралов Новикова J_1 и J_2, нам нужно расширить понятие мультизацепления. Мы собираемся отказаться от условия (7.1) на коразмерность, заменив его в (7.2) предположением о необщности пересечения подмногообразий. Например, две окружности S^1 и сфера S^2 не могут быть зацеплены в $\mathbb{R}^3$ (любую их конфигурацию можно расцепить, не проходя через тройную точку (рис. 42, a)). Тем не менее, если эти

две окружности суть два меридиана одного шара (и тем самым их пересечение есть S^0 и состоит из двух точек), зацепление может быть нетривиальным (рис. 42, *b*). Именно, нельзя развести S^2 и два меридиана, не проходя через точку пересечения этих двух меридианов.

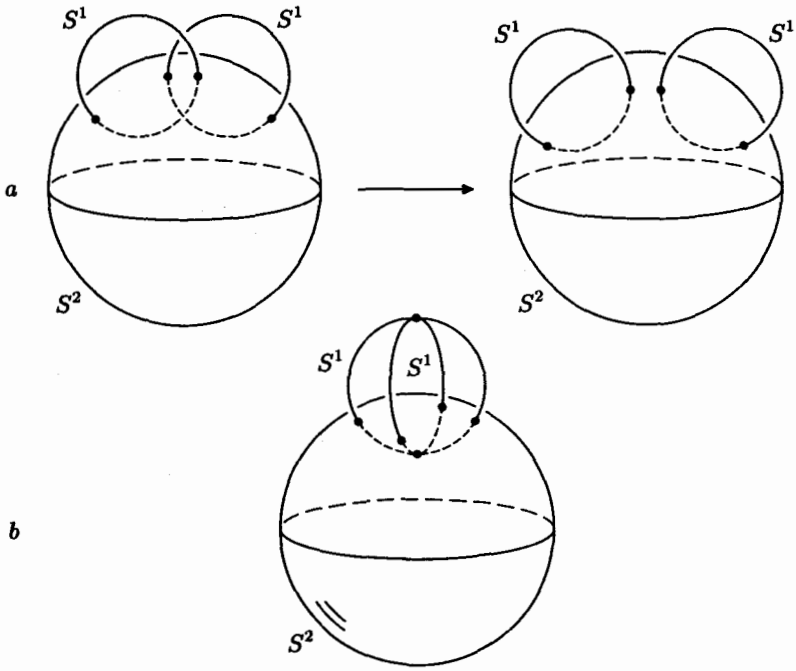


Рис. 42. (*a*) Невырожденное и (*b*) вырожденное зацепления двух окружностей и сферы

В определении инвариантов J_i условия типа $\alpha \wedge \beta = 0$ обеспечивают вырожденность пересечений соответствующих слоев.

Теорема 7.12. *Инвариант $J_1(\alpha, \beta)$ (соответственно $J_2(\alpha, \beta)$) совпадает со средним коэффициентом зацепления слоения $\mathcal{A}$ для 2-формы α (соответственно слоения $\mathcal{B}$ для 2-формы β) с векторным полем ξ, удовлетворяющим условию $i_\xi \mu = d(d^{-1}\alpha \wedge d^{-1}\beta)$.*

Грубо говоря, каждая из этих двух величин равна среднему коэффициенту зацепления одномерного слоения, образованного пересечениями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, со слоением $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ (определенным соответственно формой α или β).

Можно также дать эргодическую интерпретацию инвариантов Новикова как чисел зацепления соответствующих слоений, используя броуновскую эргодическую теорему [Gar]. Последняя позволяет усреднять высшие зацепления соответствующих листов с помощью гармонической меры на многообразии со слоением [Riv, Kh3].

Замечание 7.13. Инварианты типа Хопфа встречаются в [Nov1] в связи с квантовыми аномалиями. Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ гладких отображе-

ний $f\colon S^q \to M^n$, гомотопных нулю. С замкнутой $(q+1)$-формой θ на M естественно связать многозначную функцию $F_\theta(f)$ (или замкнутую 1-форму δF_θ) на пространстве $\mathcal{L}$

$$F_\theta(f) = \int\limits_{f(D^{q+1})} \theta.$$

Здесь отображение $f\colon S^q \to M^n$ продолжается до отображения $D^{q+1} \to M^n$ шара D^{q+1}, ограниченного сферой. Замкнутость $(q+1)$-формы θ означает, что δF зависит только от ограничения $f|_{\partial D^{q+1}=S^q}$.

Дифференциал δF многозначных функционалов $F(f)$ на пространстве $\mathcal{L}$ называют *локальным*, если он зависит от отображения f и от конечного числа его производных. При $n \geqslant q+1$ все многозначные функционалы $F(f)$ с локальными дифференциалами суть суммы локальных однозначных функционалов и $F_\theta(f)$ [Nov2]. Построение многозначных функционалов для $n \leqslant q+1$, которое предположительно дает все функционалы с локальными дифференциалами, приведено в [Nov1].

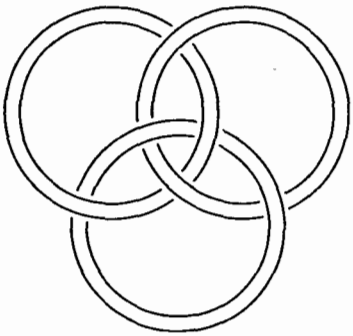


Рис. 43. Три полнотория образуют кольца Борромео

Существует целочисленная решетка внутри пространства форм θ, состоящего из гомотопически инвариантных элементов. Роль этой решетки в точности эквивалентна роли обычного целочисленного инварианта Хопфа отображения $S^3 \to S^2$ среди всех асимптотических инвариантов зацепления для произвольных бездивергентных векторных полей на S^3. Естественно назвать возникновение целочисленной решетки условием квантования [Nov1].

7.3. Интегралы зацепления высших порядков

Гауссов интеграл не различает разные зацепления кривых в $\mathbb{R}^3$ с одинаковым числом «пересечений противоположного знака». Зацепление Уайтхеда и кольца Борромео являются примерами такого рода (см. рис. 43). В этом параграфе мы рассмотрим инварианты высших порядков, называемые коэффициентами Масси (см. [Mas]), которые являются обобщениями понятия коэффициента зацепления двух кривых и позволяют распознавать более общие конфигурации кривых.

Формализм дифференциальных форм для иерархии инвариантов зацепления высших порядков был разработан в [Mas] (см. также [MRe]). Это понятие было введено в магнитную гидродинамику в статье [MSa] и переоткрыто в работах [Be1, E-B], куда мы отсылаем за всевозможными деталями. Описание топологических препятствий для зацеплений в жидких кристаллах можно найти в [MRe].

Спиральность трубок поля квадратично зависит от магнитных потоков (см. формулу (2.1)) и, следовательно, определяет инвариант *второго порядка*. Для колец Борромео гауссов интеграл по любым двум кольцам равен нулю, как и спиральность всей конфигурации трубок. Эти кольца можно отличить от трех полностью незацепленных колец с помощью инварианта зацепления *третьего порядка*.

Начнем с трех замкнутых кривых, образующих кольца Борромео и заключенных в тороидальные объемы $\boldsymbol{T}_k$, $k = 1, 2, 3$. Поле ξ_k сосредоточено в трубке $\boldsymbol{T}_k$ и равно нулю вне трубки. Обозначим через A_k вектор-потенциал для ξ_k, а через φ_k — соответствующую 1-форму-потенциал. (В бескоординатных терминах, сначала нужно найти замкнутую 2-форму $\alpha_k = i_{\xi_k}\mu$ — результат подстановки поля ξ_k в элемент объема μ, а затем ее произвольную первообразную $\varphi_k = d^{-1}\alpha_k$, т. е. такую 1-форму, что $d\varphi_k = \alpha_k$.)

Определив 2-формы $\omega_{ij} = \varphi_i \wedge \varphi_j = -\varphi_j \wedge \varphi_i$ для $i \neq j$, заметим, что $d\omega_{ij} = 0$ вне $\boldsymbol{T}_i \cup \boldsymbol{T}_j$.

Получим следующее выражение для интеграла спиральности

$$\mathcal{H}_{ij} := \mathcal{H}(\xi_i, \xi_j) = \int\limits_{\boldsymbol{T}_i \cup \boldsymbol{T}_j} \alpha_i \wedge d^{-1}\alpha_j = \int\limits_{\boldsymbol{T}_i} \alpha_i \wedge \varphi_j = \int\limits_{\boldsymbol{T}_i} d\omega_{ij},$$

так как $\operatorname{supp} \alpha_i \subset \boldsymbol{T}_i$. Согласно формуле Стокса последний интеграл равен $\mathcal{H}_{ij} = \int\limits_{\partial \boldsymbol{T}_i} \omega_{ij}$. Величины $\mathcal{H}_{12}$, $\mathcal{H}_{23}$, $\mathcal{H}_{31}$ равны нулю для колец Борромео.

Форму ω_{ij} можно подправить внутри трубок, чтобы превратить в замкнутую повсюду. А именно, следует прибавить 2-форму $h_{(j)i}\alpha_j$ к ω_{ij} внутри $\boldsymbol{T}_j$ и вычесть $h_{(i)j}\alpha_i$ из ω_{ij} внутри $\boldsymbol{T}_i$, где $h_{(i)j}$ — скалярный потенциал, удовлетворяющий условию $\varphi_j = dh_{(i)j}$. Функция $h_{(i)j}$ определена в трубке $\boldsymbol{T}_i$ (но не глобально), поскольку магнитное поле ξ_j (и соответствующая 2-форма $\alpha_j = d\varphi_j$) там равно нулю, и потому что $\boldsymbol{T}_i$ не зацеплено с $\boldsymbol{T}_j$. Лемма Пуанкаре, примененная к полученной форме ω_{ij}, гарантирует существование такой 1-формы θ_{ij}, что $\omega_{ij} = d\theta_{ij}$.

Определение 7.14. *Интегралом зацепления третьего порядка* называется величина

$$\mathcal{H}_{ijk} = \int\limits_{\partial \boldsymbol{T}_i} \omega_{ijk} = \int\limits_{\boldsymbol{T}_i} d\omega_{ijk} = -\int\limits_{\partial \boldsymbol{T}_k} \omega_{ijk}$$

при различных i, j, k, где ω_{ijk} — *тройное произведение Масси*

$$\omega_{ijk} = \varphi_i \wedge \theta_{jk} + \theta_{ij} \wedge \varphi_k.$$

Произведение Масси по сути есть отображение, определенное на классах когомологий, откуда следует и калибровочная инвариантность интеграла зацепления третьего порядка $\mathcal{H}_{ijk}$, и его инвариантность относительно деформаций трех кривых. Это произведение обращается в нуль для трех незацепленных окружностей, но равно ± 1 для колец Борромео.

Замечание 7.15. На языке векторного исчисления произведение Масси можно записать в виде

$$\Omega_{ijk} = A_i \times \mathrm{rot}^{-1}\Omega_{jk} + \mathrm{rot}^{-1}\Omega_{ij} \times A_k,$$

где поле Ω_{ij} есть векторное поле $A_i \times A_j$, превращенное в бездивергентное внутри трубок, что обеспечивает существование потенциала $\mathrm{rot}^{-1}\Omega_{ij}$ (см. [E-B]).

Чисто когомологическое описание величин $\mathcal{H}_{ijk}$ можно дать следующим образом (см., например, [MRe]). Пусть кривые Γ_k, $k = 1, 2, 3$ образуют «оси» колец Борромео $\boldsymbol{T}_k$ в S^3. Замкнутая 1-форма φ_k двойственна по Александеру к окружности Γ_k. Она определена в $S^3 \setminus \Gamma_k$ и может считаться формой зацепления, так как для любой замкнутой кривой γ в этом дополнении $\int\limits_\gamma \varphi_k = \mathrm{lk}(\Gamma_k, \gamma)$.

Условие $\mathrm{lk}(\Gamma_i, \Gamma_j) = 0$ позволяет найти такую 1-форму ω_{ij} на $S^3 \setminus (\Gamma_i \cup \Gamma_j)$, что $d\omega_{ij} = \varphi_i \wedge \varphi_j$. Теперь 2-форма $\omega_{123} = \omega_{12} \wedge \varphi_3 + \varphi_1 \wedge \omega_{23}$ определена на S^3, из которой удалены три окружности, и может быть проинтегрирована по границе $\partial \boldsymbol{T}_1$.

Замечание 7.16. Это отправной пункт для построения иерархии инвариантов. Инварианты порядка n можно определить для конфигураций, чьи инварианты всех порядков $\leqslant n - 1$ равны нулю.

Инвариант зацепления четвертого порядка, охватывающий случай зацепления Уайтхеда, был предложен в [A-R]. Рассмотрим поверхности Зейферта, соответствующие двум замкнутым непересекающимся кривым. Для каждой из кривых можно выбрать такую поверхность, не пересекающую другую кривую, если коэффициент зацепления пары равен нулю. Тогда, вообще говоря, пересечение двух поверхностей Зейферта есть замкнутая кривая, оснащенная реперами. Коэффициент самозацепления этой оснащенной кривой является топологическим инвариантом и не зависит от выбора поверхностей [Sat]. Превратив кривые в тонкие полнотория, можно получить интегральную форму инварианта [A-R].

Замечание 7.17. Другой способ обобщения коэффициента зацепления на более сложные случаи был предложен Милнором [Mil2]. Определения *коэффициентов Милнора высших порядков* и их связь с коэффициентами зацепления Масси высших порядков можно найти в [Mil2, Tu1, Por, MRe].

Замечание 7.18. Во всех конструкциях этого параграфа магнитное поле предполагается сильно вырожденным: оно сосредоточено в тороидальных трубках, причем все траектории внутри трубок замкнуты. Такие поля образуют множество бесконечной коразмерности в пространстве всех бездивергентных векторных полей. Несколько менее вырожденная версия была пред-

ложена в [HoM], где инвариант зацепления третьего порядка определен для тройки векторных полей ξ_k, которые допускают потенциальные 1-формы φ_k, чьи попарные произведения обращаются в нуль: $\varphi_k \wedge \varphi_l = 0$ (это — аналог обращения в нуль попарных зацеплений у колец Борромео), см. также обзор [Kh3].

Хотелось бы получить такую иерархию инвариантов для векторных полей общего положения, что если все инварианты порядка $\leqslant k$ равны нулю для данного поля, то первый ненулевой инвариант порядка $k+1$ дает нижнюю грань энергии поля.

Замечание 7.19. Возвращаясь к связи энергии и спиральности, следует отметить, что полная спиральность приближенно сохраняется, даже если магнитное поле не вморожено в среду, но подвержено турбулентности малого масштаба [Tay]. В этом случае быстрые пересоединения траекторий поля резко изменяют локальные топологические характеристики поля. Тем не менее, будучи усредненной по всей области, спиральность приближенно сохраняется для больших временны́х интервалов.

Это явление основано на том факте, что мелкомасштабные компоненты поля (компоненты с волновыми векторами большой длины k) дают вклад в полную спиральность порядка (амплитуда)$^2/k$, в то время как их вклад в энергию порядка (амплитуда)^2. Поэтому изменение высших гармоник поля влияет на спиральность примерно в k раз слабее, чем на энергию.

Аналитически эволюция магнитного поля $\boldsymbol{B}$ ($\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$) при наличии диффузии описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\{v, \boldsymbol{B}\} + \eta \Delta \boldsymbol{B}.$$

Диссипация спиральности за фиксированное время δt равна

$$\delta \mathcal{H} = 2 \int\limits_M (\operatorname{rot}^{-1}(\eta \Delta \boldsymbol{B}), \boldsymbol{B})\, \mu = -2\eta \int\limits_M (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B})\, \mu,$$

в то время как энергия $E = \int\limits_M (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})\, \mu$ рассеивается согласно формуле

$$\delta E = 2 \int\limits_M (\eta \Delta \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})\, \mu = 2\eta \int\limits_M (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j})\, \mu$$

(здесь $\boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$ — плотность тока). Неравенство Шварца дает оценку сверху для $\delta \mathcal{H}$ порядка $\eta^{1/2}$: $|\delta \mathcal{H}| \leqslant |\eta(\delta E) E|^{1/2}$.

Комбинаторные рассуждения в работе [FrB] показывают, что существуют «пути пересоединения», которые хотя и разрушают другие инварианты, изменяют спиральность лишь со скоростью η^2. Никакие инварианты зацепления высших порядков ($\geqslant 3$), определенные выше для трубок замкнутых траекторий, не сохраняются при таких пересоединениях [MSa, FrB]. Пересоединения магнитных линий при магнитной диффузии подобны переключениям вихря в вязкой несжимаемой жидкости. Сошлемся на обзор вихревых

переключений, данный в [KiT], и на работу [Ryl], где приведены другие топологические свойства различных вихревых течений.

7.4. Инвариант Калугареану и коэффициент самозацепления

Пусть узкая трубка вокруг кривой γ в $\mathbb{R}^3$ заполнена траекториями векторного поля ξ. Предположим, что все ξ-траектории в трубке замкнуты и одной из них является сама кривая γ.

Спиральность поля внутри трубки пропорциональна коэффициенту зацепления lk любых двух траекторий пучка: $\mathcal{H}(\xi) = \mathrm{lk} \cdot Q^2$, где Q — поток поля ξ через любое сечение трубки. Это непосредственное следствие применения формул спиральности (4.1)–(4.2), верных для поля, заполняющего произвольный объем, можно также получить, представив трубку как совокупность тонких полноториев и подсчитав их взаимную спиральность (см. формулу (2.1)).

С другой стороны, коэффициент зацепления lk кривой γ и соседней кривой γ' есть величина, соответствующая ленте, ограниченной кривыми γ и γ'. Точнее, коэффициент зацепления равен сумме

$$\mathrm{lk} = \mathrm{Wr} + \mathrm{Tw}$$

коэффициента верчения Wr и полного коэффициента скручивания Tw, которые определим ниже.

Определение 7.20. *Коэффициент верчения* равен алгебраическому числу самопересечений диаграммы кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, усредненному по всем направлениям проекций. Он имеет следующее интегральное представление:

$$\mathrm{Wr} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^1} \int\limits_{S^1} \frac{(\dot\gamma(t_1), \dot\gamma(t_2), \gamma(t_1) - \gamma(t_2))}{\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|^3}\, dt_1\, dt_2,$$

где на кривой $\gamma = \gamma(t)$ введен параметр $t \in S^1$ (см., например, [Ful]). Как и для среднего числа самопересечений $c(\gamma, \gamma)$ (см. теорему 6.4), данный интеграл ограничен. Его значение, вообще говоря, не целое число и не является топологическим инвариантом. Например, для плоской (или сферической) кривой коэффициент верчения равен нулю.

Коэффициент скручивания не определен для кривой, но его можно определить для ленты. Он характеризует полное число вращения края γ' вокруг «осевой» кривой γ:

$$\mathrm{Tw} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} \left(\frac{dn(t)}{dt}, n(t), \gamma(t) \right) dt,$$

где $\gamma(t)$ — натуральная параметризация кривой γ, а семейство $n(t)$ состоит из единичных нормалей вдоль γ, указывающих в направлении γ'.

Иллюстрацией к формуле $\mathrm{lk} = \mathrm{Wr} + \mathrm{Tw}$ служит рис. 44. Это соотношение, принадлежащее Калугареану [Cal], наряду с его многочисленными приложениями (например, к спиральной структуре ДНК) широко изучалось

Фуллером [Ful], Полем [Poh], Уайтом [Wh], а также рассматривалось в гидродинамическом контексте Бергером и Филдом [B-F], Моффатом и Риккой [MoR, RiM]. В работе [MoR] инвариант Калугареану выводится из основных гидродинамических принципов, там же приводятся сведения по истории инварианта и широкий библиографический обзор. Разложение $\mathrm{lk} = \mathrm{Wr} + \mathrm{Tw}$ соответствует вкладам верчения и скручивания в спиральность траекторий поля, где слоение на траектории является аналогом ленты в гидродинамической постановке.

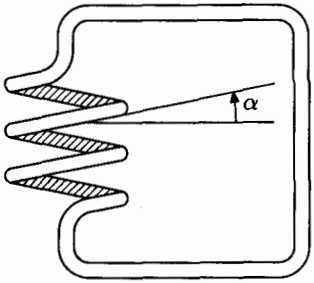


Рис. 44. Формула $\mathrm{lk} = \mathrm{Wr} + \mathrm{Tw}$ для спиральной ленты (см. [Ful]). Здесь $\mathrm{lk} = n$, $\mathrm{Tw} = n \sin\alpha$, $\mathrm{Wr} = n(1 - \sin\alpha)$, где α — угол шага спирали, а n — число оборотов

Сошлемся также на работу Ботта и Таубса [B-T], где использовано чисто топологическое понятие коэффициента самозацепления узла, возникшее в контексте топологической квантовой теории поля Черна–Саймонса и «освобожденное» от групповой структуры (см. там же ссылки на более ранние работы Д. Бар-Натана, А. Гвадагуини, М. Мартинелли и М. Минчева, М. Концевича). В следующем параграфе будет рассмотрена связь коэффициентов зацепления с функционалом Черна–Саймонса.

7.5. Голоморфный коэффициент зацепления

Многие вещественные понятия в математике имеют комплексные аналоги. Эти аналоги могут быть либо непосредственными, как соответствие между вещественными и комплексными многообразиями или группами ортогональных и унитарных матриц $(O(n), U(n))$, либо более опосредованными, как, например, характеристические классы векторных расслоений Штифеля–Уитни и Черна. Другим нетривиальным примером является соответствие гомотопических групп π_0 (в вещественной постановке) и π_1 (в комплексной постановке). Имеется в виду следующее: число связных компонент (π_0) есть мера сложности дополнения к гиперповерхности в вещественном многообразии. Напротив, комплексная гиперповерхность не разделяет комплексное многообразие, и ее можно обойти. В последнем случае мерой сложности дополнения является фундаментальная группа (π_1). Другие примеры неформального перехода к комплексным аналогам читатель найдет в [Arn23, Kh2].

Обратимся к обсуждению комплексного аналога понятия коэффициента зацепления (следуя идеям [At], см. [KhR, FrT, Ger, F-K]). Вместо зацеп-

ления двух гладких замкнутых кривых в вещественном трехмерном односвязном многообразии будем рассматривать инвариант, соответствующий паре замкнутых комплексных кривых (римановых поверхностей) в комплексном трехмерном многообразии (т. е. имеющем вещественную размерность 6). В дальнейшем изложении мы будем всюду считать, что описанные многообразия и формы существуют, вкратце упомянув необходимые для этого условия.

Замечание 7.21. Классический коэффициент зацепления lk есть целочисленный топологический инвариант, равный алгебраическому числу пересечений одной кривой в $\mathbb{R}^3$ с двумерной ориентированной поверхностью, ограниченной другой кривой (рис. 25). Топологическая инвариантность lk и свойство независимости от выбора поверхности следует из того, что алгебраическое число пересечений замкнутой кривой и замкнутой поверхности равно нулю.

Инвариантность в последнем случае можно также рассматривать как проявление формулы Стокса для форм δ-типа с носителями, являющимися замкнутыми кривыми и поверхностями (см. замечание 4.7). Формула Стокса и, в более общем случае, теория де Рама гладких дифференциальных форм носит по сути вещественный характер: рассматриваются вещественные многообразия с краем и соответствующей ориентацией, представляющей собой $\mathbb{Z}_2$-значный инвариант.

С другой стороны, в [F-K, Kh2] неформальной комплексификацией теории де Рама предлагается считать теорию мероморфных форм на комплексных многообразиях. Формула вычетов Пуанкаре является «заменой» формулы Стокса при комплексификации. Вместо сужения формы на край берется вычет мероморфной формы на множестве полюсов.

Формула вычетов Пуанкаре является обобщением на случай высших размерностей формулы Коши, выражающей значение контурного интеграла мероморфной 1-формы через вычет формы в полюсе. Определим вычет Пуанкаре. Пусть ω — замкнутая мероморфная k-форма на компактном комплексном n-мерном многообразии M с полюсами на неособой комплексной гиперповерхности $N \subset M$. Здесь и далее считаем, что все полюса имеют первый порядок. Пусть ψ — функция, определяющая N в окрестности некоторой точки $p \in N$. Тогда k-форма ω в некоторой окрестности $U(p)$ локально может быть представлена в виде суммы

$$\omega = \frac{d\psi}{\psi} \wedge \alpha + \beta, \tag{7.3}$$

где α и β голоморфны в $U(p)$. Можно показать, что сужение $\alpha|_N$ — корректно определенная (т. е. не зависящая от ψ) голоморфная $(k-1)$-форма, см. [Ler].

Определение 7.22. *Формой-вычетом* $\operatorname{res}\omega$ замкнутой мероморфной k-формы ω называется такая голоморфная $(k-1)$-форма на N, которая в любой окрестности $U(p)$ произвольной точки $p \in N$ совпадает с формой $\alpha|_N$ из разложения (7.3), $\operatorname{res}\omega = \alpha|_N$.

Аналогично определяется вычет в случае, когда множество полюсов состоит из нескольких комплексных гиперповерхностей в общем положении в M.

Замечание 7.23. Для комплексного многообразия M с нулевым числом Ходжа $h^{n,1}(M,\mathbb{C}) = \dim H^1(M,\Omega^n) = 0$ (это условие можно рассматривать как аналог односвязности вещественного многообразия) любая мероморфная n-форма на M с полюсами первого порядка на N определяется своим вычетом на N однозначно с точностью до голоморфной n-формы на M (см., например, [Chr]).

Пусть теперь $C_1, C_2 \subset M$ — две комплексные замкнутые непересекающиеся кривые в комплексном замкнутом трехмерном многообразии M: $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Зафиксируем какие-нибудь голоморфные дифференциалы α_1 и α_2 на кривых C_1 и C_2 соответственно и мероморфную 3-форму η на M, удовлетворяющую следующему условию: дивизор нулей η не пересекает ни одну из кривых C_1 и C_2 (например, если M — многообразие Калаби–Яо, то оно имеет единственную с точностью до множителя голоморфную 3-форму η, которая не обращается в ноль). Этой паре кривых мы поставим в соответствие величину, линейно зависящую от α_1, α_2 и η^{-1}.

Пусть S_1 — комплексная поверхность в M, содержащая комплексную кривую C_1. Обозначим через β_1 какую-нибудь мероморфную 2-форму на S_1, чье множество полюсов совпадает с на кривой C_1 и такую, что вычет этой 2-формы β_1 равен α_1, $\operatorname{res}\beta_1|_{C_1} = \alpha_1$. Согласно приведенному выше замечанию такая 2-форма β_1 существует, когда существует односвязная комплексная поверхность $S_1 \subset M$, содержащая кривую C_1, и такая, что $H^1(S^2,\Omega^2) = 0$.

Определение 7.24 (см. [KhR]). *Голоморфный коэффициент зацепления* $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ пары комплексных кривых C_j с выбранными голоморфными дифференциалами α_j на них (лежащими в многообразии M с мероморфной формой η) определяется как следующая сумма по всем точкам пересечения поверхности S_1 и кривой C_2:

$$\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}((C_1,\alpha_1),(C_2,\alpha_2)) := \sum_{S_1\cap C_2} \frac{\beta_1\wedge\alpha_2}{\eta}. \tag{7.4}$$

Отметим, что 3-форма $\beta_1 \wedge \alpha_2$ определена только в точках пересечения $S_1 \cap C_2$, причем входящее в правую часть отношение — коэффициент пропорциональности этой формы и 3-формы η в этих точках пересечения.

В отличие от вещественного случая голоморфный коэффициент зацепления — не целочисленная величина и он не является изотопическим инвариантом. Он может принимать любые комплексные значения и зависит от взаимного расположения комплексных кривых C_1 и C_2 в M, а также от входящих в данное выражение дифференциальных форм α_1, α_2 и η. Однако голоморфный коэффициент зацепления определен корректно по отношению к любому другому дополнительному выбору.

Предложение 7.25. 1) *Голоморфный коэффициент зацепления* $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ *корректно определен, т. е. не зависит от выбора комплексной поверхности* $S_1 \supset C_1$ *и от мероморфной 2-формы* β_1 *на ней, если* $\operatorname{res}\beta_1|_{C_1} = \alpha_1$ (*см. рис.* 45).

2) *Величина* $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ *есть симметричная функция своих аргументов: вложив кривую* C_2 *в комплексную поверхность* S_2, *взяв такую мероморфную фор-*

му β_2, *что* $\operatorname{res}\beta_2|_{C_2} = \alpha_2$, *и составив сумму*

$$\operatorname{lk}_{\mathbb{C}}((C_2,\alpha_2),(C_1,\alpha_1)) = \sum_{C_1\cap S_2} \frac{\alpha_1\wedge\beta_2}{\eta} = \operatorname{lk}_{\mathbb{C}}((C_1,\alpha_1),(C_2,\alpha_2)),$$

получим тот же коэффициент зацепления.

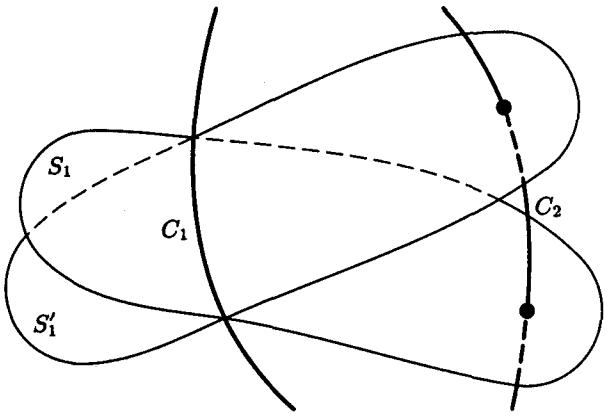


Рис. 45. В голоморфный коэффициент зацепления комплексных кривых C_1 и C_2 вносят вклад пересечения кривой C_2 с поверхностью $S_1 \supset C_1$ или, что эквивалентно, с другой поверхностью $S_1' \supset C_1$

Доказательство. Предположим, что комплексная кривая C_1 есть трансверсальное пересечение двух комплексных поверхностей S_1 и S_1', каждая из которых снабжена мероморфной 2-формой (β_1 и β_1' соответственно); вычеты этих форм на C_1 равны α_1. Определим мероморфную 3-форму γ_1 на M с полюсами (первого порядка) на S_1 и S_1' и вычетами β_1 и $-\beta_1'$ соответственно. Эти условия на форму являются согласованными.

Действительно, на пересечении двух поверхностей повторный вычет формы зависит от порядка, в котором применяется взятие вычетов, а именно, возникает отличие в знаке. Например, в зависимости от порядка, форма $dx \wedge \wedge\, dy/xy$ имеет в начале координат второй вычет, равный единице или минус единице, так как

$$\operatorname{res}|_{y=0}\operatorname{res}|_{x=0}\frac{dx\wedge dy}{xy} = \operatorname{res}|_{y=0}\frac{dy}{y} = 1,$$

а

$$\operatorname{res}|_{x=0}\operatorname{res}|_{y=0}\frac{dx\wedge dy}{xy} = -\operatorname{res}|_{x=0}\frac{dx}{x} = -1.$$

Аналогично, второй вычет 3-формы γ_1 на кривой $C_1 = S_1 \cap S_1'$ есть 1-форма α_1 или $-\alpha_1$. Например,

$$\operatorname{res}|_{C_1}\operatorname{res}|_{S_1}\gamma_1 = \operatorname{res}|_{C_1}\beta_1 = \alpha_1.$$

Тогда по определению голоморфного коэффициента зацепления (7.4) имеем

$$\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}((C_1,\alpha_1),(C_2,\alpha_2)) = \sum_{S_1\cap C_2} \frac{(\operatorname{res}\gamma_1)\wedge\alpha_2}{\eta},$$

поскольку $\operatorname{res}\gamma_1|_{S_1} = \beta_1$. Последнее отношение в каждой точке $S_1\cap C_2$ равно $\operatorname{res}\Big(\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2\Big)$, где $\dfrac{\gamma_1}{\eta}$ — мероморфная функция на M, а $\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2$ — мероморфная 1-форма, определенная на C_2. Действительно, легко видеть, что равенство $\dfrac{(\operatorname{res}\gamma_1)\wedge\alpha_2}{\eta} = \operatorname{res}\Big(\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2\Big)$ выполнено в каждой точке пересечения $S_1\cap C_2$, если записать эти выражения в локальных координатах.

Тогда $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ равен сумме вычетов мероморфной 1-формы $\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2$ на комплексной кривой C_2 в полюсах $S_1\cap C_2$. Подставив поверхность S_1' вместо S_1 в то же выражение, получим минус сумму вычетов той же 1-формы $\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2$ на C_2 в полюсах $S_1'\cap C_2$, так как $\operatorname{res}\gamma_1|_{S_1'} = -\beta_1'$. Теорема Коши, примененная к мероморфной 1-форме $\dfrac{\gamma_1}{\eta}\wedge\alpha_2$ на комплексной кривой C_2, утверждает, что сумма вычетов во всех полюсах (т. е. в точках пересечения C_2 с S_1 и с S_1') на кривой равна нулю. Это значит, что $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ не зависит от того, используем ли мы поверхность S_1 или S_1' (утверждение 1).

Симметричность $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ можно непосредственно получить, если представить C_2 как трансверсальное пересечение двух поверхностей S_2 и S_2' и поставить ей в соответствие (как это делалось выше) мероморфную 3-форму γ_2. Тогда

$$\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}((C_1,\alpha_1),(C_2,\alpha_2)) = \sum_{S_1\cap S_2'\cap S_2} \operatorname{res}^3\Big(\frac{\gamma_1\wedge\gamma_2}{\eta}\Big),$$

где res^3 — вычет мероморфной 3-формы $\dfrac{\gamma_1\wedge\gamma_2}{\eta}$ в тройных пересечениях $S_1\cap$ $\cap\, S_2'\cap S_2$. Учитывая кососимметричность внешнего произведения и изменение знака при переходе к пересечениям $S_1\cap S_1'\cap S_2$, получим утверждение 2. □

Замечание 7.26. Основной мотивировкой введения комплексного коэффициента зацепления является то, что он возникает как «первое приближение» комплексного аналога функционала Черна–Саймонса (см. [FrT, KhR] и замечание 8.10). Стандартный коэффициент зацепления отвечает асимптотикам классического функционала Черна–Саймонса ([Pol, Wit2], § 8 ниже).

Замечание 7.27. В вещественном трехмерном многообразии M инвариант узла (или зацепления) есть локально постоянная функция на пространстве вложений окружности (соответственно объединения окружностей) в многообразие M. В. Васильев в работе [VasV] определил скачок инварианта как функцию, приписываемую погружениям окружности с одной точкой самопересечения, значение которой равно разности значений инварианта узла на вложениях «до» и «после» самопересечения (где смысл «до» и «после» определяется ориентацией окружности и объемлющего многообразия M). Итерируя скачки, можно определить функцию на погружениях с любым конечным числом точек самопересечения.

По определению инвариантом Васильева порядка k называется инвариант узла или зацепления, функция скачков которого равна нулю на всех погружениях, имеющих по меньшей мере $(k+1)$ точку самопересечения. Имеет место, в частности, следующее

Предложение 7.28. *Коэффициент зацепления двух кривых в* $\mathbb{R}^3$ *является инвариантом порядка* 1.

Замечание 7.29. Голоморфный коэффициент зацепления $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ не определен для двух комплексных кривых C_1 и C_2, пересекающихся в M, и стремится к бесконечности по мере приближения кривых друг к другу. Мы предлагаем следующий «мероморфный» аналог теории Васильева.

Пусть M — комплексное трехмерное многообразие с голоморфной формой η, которая не обращается в нуль. Обозначим через $\mathcal{M}_j$ пространство модулей всех вложенных голоморфных кривых C_j данного рода g_j $(j=1,2)$ в комплексном многообразии M. Пространство $\mathcal{M}_j$ само по себе есть конечномерное комплексное многообразие (и предположим также, что его размерность ненулевая). Произведение $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2$ может рассматриваться как комплексный аналог пространства (вещественных) узлов или зацеплений.

Как и в вещественном случае, естественно назвать дискриминантом $\Delta\subset\mathcal{M}$ подмножество всех таких конфигураций в пространстве модулей $\mathcal{M}$, что кривые C_1 и C_2 пересекаются. Дискриминант Δ есть (сингулярная) комплексная гиперповерхность в $\mathcal{M}$, регулярные точки которой Δ_0 образованы простыми пересечениями кривых C_1 и C_2. Дальнейшие вырождения дискриминантного множества $\Delta_0\subset\Delta_1\subset\ldots\subset\Delta$ стратифицируются числом и кратностью пересечений.

Интересно было бы определить голоморфное число зацеплений $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ как замкнутую дифференциальную форму на пространстве модулей $\mathcal{M}$ или на некотором расслоении над ним. Так как $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ стремится к бесконечности, когда две кривые приближаются одна к другой, эта дифференциальная форма зацепления $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ имеет полюс первого порядка вдоль (регулярной части Δ_0) дискриминанта Δ. В частности, форма-вычет для 2-формы зацепления $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ корректно определена вдоль Δ_0.

В более общем случае, можно назвать *комплексным инвариантом зацепления* комплексных кривых родов $g_1,g_2,\ldots,g_m$ в трехмерном многообразии M любую замкнутую мероморфную k-форму на соответствующем пространстве модулей $\mathcal{M}:=\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2\times\ldots\times\mathcal{M}_m$ голоморфных вложений кривых в M.

Определение 7.30. *Комплексным инвариантом зацепления порядка* k называется замкнутая мероморфная форма на пространстве модулей $\mathcal{M}$, $(k+1)$-й вычет которой равен нулю на всех стратах $\Delta_k\setminus\Delta_{k-1}$ дискриминанта $\Delta\subset\mathcal{M}$, соответствующего вложениям комплексных кривых, имеющих k *точек попарных пересечений.*

Задача 7.31. А. Показать, что комплексная 2-форма зацепления $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}$ есть комплексный инвариант зацепления первого порядка. Можно попытаться аналогичным образом определить комплексные аналоги произведений Масси и других когомологических операций на узлах и зацеплениях.

B. Какова эргодическая интерпретация голоморфного аналога коэффициента зацепления (в стиле § 4)?

§ 8. Асимптотическая голономия и приложения

8.1. Инварианты Джонса–Виттена для векторных полей

Существует множество инвариантов узлов и зацеплений. Например, можно рассмотреть полиномы узлов (Александера, Кауффмана, Джонса, Хомфли, Решетихина и Тураева и др.) или инварианты Васильева конечного порядка (см., например, [Tu2, VasV]). Очень интересной задачей является расширение области определения таких инвариантов на случай (бездивергентных) векторных полей, что позволило бы «размазывать узлы» в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. С этой точки зрения регулярный узел понимается как векторное поле с носителем на одной замкнутой кривой.

Классический (комбинаторный) подход к введению инвариантов узлов основан на некоторых рекуррентных соотношениях: можно начать с рассмотрения тривиального узла и определить точное правило изменения инварианта при элементарных перестройках (например, связная сумма). Такой способ кажется неприменимым к случаю векторных полей.

Ситуация изменилась после того, как Виттену удалось обобщить в [Wit2] полиномы Джонса на случай произвольного замкнутого трехмерного многообразия в терминах асимптотик функционала Черна–Саймонса на пространстве связностей на многообразии. Структурная группа связности добавляет еще один параметр к задаче, а сами полиномы Джонса соответствуют SU(2)-связностям. Обобщение подхода Виттена для зацеплений на случай «размазанных узлов» было начато Верховским и Фрейером в [V-F]; ниже мы приведем основное содержание этой работы. В абелевом случае U(1)- (или GL(1)-) связностей рассматриваемые асимптотики, по существу, определяются инвариантом спиральности соответствующего бездивергентного векторного поля. GL(n)-аналог асимптотической монодромии вдоль незамкнутой траектории векторного поля дает принадлежащая Оселедецу мультипликативная эргодическая теорема [Ose1]. Тем не менее, расширение инвариантов на неабелев случай представляется весьма трудным вследствие отсутствия неабелевого варианта эргодической теоремы Биркгофа о равенстве усредненных по времени и пространству величин.

Пусть M — замкнутое компактное вещественное трехмерное многообразие, а $L \subset M$ — зацепление (несвязное объединение $L = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ гладко вложенных окружностей C_i). Далее, пусть $P = M \times G$ есть главное G-расслоение над M, где структурная группа G может быть, например, группой U(1) или SU(2).

Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство всех связностей в (тривиальном) расслоении P. Его можно отождествить с аффинным пространством $\Lambda^1(M, \mathfrak{g})$ 1-форм на M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Пусть, наконец, $\widetilde{G} = C^\infty(M, G)$ — группа сохраняющих слои автоморфизмов расслоения P.

Определение 8.1. *Инвариантом Джонса–Виттена* зацепления $L \subset M$ называется следующая функция параметра k:

$$W_L(k) = \int\limits_{\mathcal{A}/\tilde{G}} \left\{ \exp\left(ik \int\limits_M \operatorname{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right) \prod_{C_i \subset L} \operatorname{tr}\left(P \exp \int\limits_{C_i} A \right) \right\} \cdot DA,$$

где $P\exp$ — «упорядоченная экспонента» (т. е. непрерывное произведение) вдоль пути, а DA — «подходящая мера на пространстве модулей связностей». С математической точки зрения ни DA, ни W не имеют четкого определения.

Виттен показал в [Wit2], что для $M = S^3$ и $G = \mathrm{SU}(2)$ этот инвариант соответствует полиному Джонса (по k) для зацепления L. Хотя полностью формализовать смысл данного интеграла пока не удалось, он имеет гораздо более простой вид для абелевой группы G, например, для $\mathrm{U}(1)$:

$$W_L(k) = \int\limits_{\mathcal{A}/\tilde{G}} \left\{ \exp\left(ik \int\limits_M A \wedge dA \right) \prod_{C_i \subset L} \left(\exp \int\limits_{C_i} A \right) \right\} \cdot DA. \tag{8.1}$$

Интеграл $\int\limits_M A \wedge dA$ можно трактовать как квадратичную форму $Q(A)$ на пространстве 1-форм $\mathcal{A}$, в то время как криволинейный интеграл $\int\limits_{C_i} A$ рассматривается как линейный функционал (так называемый *поток де Рама*) $I_{C_i}(A)$, вычисленный на 1-форме A.

Для абелева случая (см. [SchA, Pol]) этот континуальный интеграл с точностью до фазового множителя, отвечающего выбору регуляризации, равен

$$W_L(k) = \exp\left\{ \frac{i}{2k} \sum_{i,j} \langle I_{C_i}, d^{-1} I_{C_j} \rangle \right\} = \mathrm{const} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{2k} \sum_{i,j} \mathrm{lk}(C_i, C_j) \right\}. \tag{8.2}$$

Регуляризация необходима при придании смысла числу зацепления каждой кривой C_i с собой (ср. с определением самозацепления в п. 7.4). Топологический множитель, являющийся величиной $W_L(k)$ в случае без какого-либо зацепления ($L = \varnothing$) есть кручение Рэя–Зингера многообразия M [SchA].

Замечание 8.2. Если исходить из эвристических соображений, здесь вычисляется квадратичный гауссов интеграл вида

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{ik\langle x, Qx \rangle} e^{i\langle b, x \rangle} (\pi^{-n/2})\, dx,$$

который после выделения полного квадрата равен

$$e^{(i/2k)\langle b, Q^{-1} b \rangle} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{ik\langle x + Q^{-1} b, Q(x + Q^{-1} b) \rangle} (\pi^{-n/2})\, dx = \\ = e^{(i/2k)\langle b, Q^{-1} b \rangle} (\det Q)^{-1/2} (e^{((i\pi/4)\, \mathrm{sign}\, Q)}).$$

Применим эту формулу к пополнению бесконечномерного пространства $\mathcal{A} = \Lambda^1(M, \mathfrak{g})$ в случае квадратичной формы $Q(A) = \int\limits_M A \wedge dA$. Так

как форма Q вырождена, интегрирование проводится по подпространству, трансверсальному к ядру Q. Это соответствует интегрированию по $\widetilde{G}$-факторизации пространства $\mathcal{A}$, см. [Wit2, V-F]. Хотя это и отличается от случая невырожденной формы выше, нам здесь интересен только множитель $e^{(i/2k)\langle b, Q^{-1}b\rangle}$, который имеет прямой аналог.

А именно, этот множитель приобретает смысл зацепления:

$$e^{(i/2k)\langle b, Q^{-1}b\rangle} = \exp\left\{\frac{i}{2k}\sum_{i,j}\langle I_{C_i}, d^{-1}I_{C_j}\rangle\right\}.$$

Эргодический («размазанный») аналог этого подхода должен иметь отношение к понятиям асимптотической и средней голономии. (Размазывание узла можно рассматривать как способ его регуляризации: соседние траектории определяют оснащение узла. В частности, это позволяет определить самозацепление узла как коэффициент зацепления узла с его сдвигом в направлении нормали.)

Определение 8.3. *Асимптотической голономией* связности A вдоль траектории $\Gamma_\xi(p) = \{g_\xi^t : t \geqslant 0\}$ векторного поля ξ, выходящей из точки $p \in M$, называется следующий элемент группы Ли G:

$$P\exp\int\limits_{\Gamma_\xi(p)} A := \lim_{T\to\infty} P\exp\int\limits_{\{g_\xi^t\,:\,0\leqslant t\leqslant T\}}\left(\frac{1}{T}A\right).$$

Последний интеграл определен с помощью перехода к пределу $T \to \infty$ благодаря тривиализации расслоения $P = M \times G$ (или с помощью системы коротких путей, использованной при введении асимптотического коэффициента зацепления, см. определение 4.13).

Возможна также следующая трактовка. Несобственное интегрирование

$$P\exp\int\limits_{\{g_\xi^t\,:\,t\geqslant 0\}} A$$

вдоль траектории $\Gamma_\xi(p)$ определяет кривую в группе Ли G. Возьмем однопараметрическую подгруппу в G, аппроксимирующую эту кривую при $t \to \infty$. Тогда асимптотической голономией будет точка $t = 1$ на этой подгруппе. Существование предела для почти всех начальных точек $p \in M$ гарантирует *мультипликативная эргодическая теорема* [Ose1].

Хотя в неабелевом случае простой ответ для средней по пространству асимптотической голономии неизвестен (нет матричного аналога эргодической теоремы Биркгофа о равенстве временных и пространственных средних), приведем определение, претендующее на «полную» общность (см. [V-F]).

Определение 8.4. *Средней голономией* $\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A)$ связности A на бездивергентном поле ξ, сохраняющем меру μ на M, называется экспонента (из группы) элемента алгебры Ли $\int\limits_M A(\xi)\,\mu$.

Замечание 8.5. Заметим, что ни средняя голономия $\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A)$, ни ее сопряженный класс в группе G не являются калибровочными инвариантами (т. е. величинами, сохраняющимися при изменении связности A на $A+\varepsilon([A,f]+df)$ при произвольной $f\in C^\infty(M,\mathfrak{g})$).

В случае абелевой (например, GL(1)) связности форма A есть вещественнозначная 1-форма на M, а упорядоченная экспонента $P\exp$ превращается в обычную экспоненту. Тогда голономия $\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A)$ есть калибровочный инвариант, и приведенные определения в точности соответствуют эргодической интерпретации функционала (спиральности) Хопфа в терминах среднего коэффициента зацепления, рассмотренного выше.

Теорема 8.6 (ср. теорема спиральности 4.4). *Для абелевой группы G мультипликативное среднее асимптотической голономии по всему многообразию M совпадает со средней голономией, вычисленной с помощью полного интегрирования «бесконечно малых преобразований» $A(\xi)$,*

$$\exp\int\limits_M\left(\int\limits_{\Gamma_\xi(p)}A\right)\mu_p=\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A).$$

Это равенство двух инвариантов приводит к следующему определению.

Определение 8.7. *Функционалом Джонса–Виттена для* бездивергентного *векторного поля* ξ на замкнутом трехмерном многообразии M, снабженном мерой μ, называется выражение

$$W_{\xi,\mu}(k)=\int\limits_{\mathcal{A}/\tilde{G}}\left\{\exp\left(ik\int\limits_M\mathrm{tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)\right)\mathrm{tr}(\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A))\right\}\cdot DA,$$

где средняя голономия $\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A)$ определена выше.

Замечание 8.8. Отметим, что случай настоящего узла или зацепления $L=\bigcup\limits_{i=1}^n C_i$ можно понимать как частный случай этого определения для меры μ «δ-типа» с носителем, состоящим из конечного числа кривых $\{C_i\}$.

Предположим теперь, что M — замкнутое трехмерное многообразие, μ — гладкая форма объема на M, а ξ — гомологичное нулю бездивергентное векторное поле на M, т. е. 2-форма $i_\xi\mu$ является точной, $i_\xi\mu=d\theta$ для некоторой 1-формы θ. Случай абелевой связности полностью описывается следующей теоремой.

Теорема 8.9 (см. [V-F]). *Для топологически тривиального линейного расслоения над M (где $G=\mathrm{U}(1)$ или $\mathrm{GL}(1)$) функционал Джонса–Виттена для векторного поля ξ сводится к его инварианту спиральности*

$$W_{\xi,\mu}(k)=\mathrm{const}\cdot\exp\left(\frac{i}{2k}\int\limits_M d\theta\wedge\theta\right).$$

Схема доказательства. Средняя голономия в абелевом случае равна

$$\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A)=\exp\int\limits_M A(\xi)\wedge\mu=\exp\int\limits_M A\wedge d\theta=\exp(I_\xi(A)),$$

где I_ξ — поток де Рама, соответствующий полю ξ. («Диффузионный» член

$$\mathrm{hol}_{\xi,\mu}(A) = \exp \int\limits_M A(\xi) \wedge \mu = \exp \int\limits_M \int\limits_{\Gamma_\xi(p)} A \wedge \mu_p$$

заменяет «дискретный» аналог

$$\prod_{C_i \subset L} \left(\exp \int\limits_{C_i} A \right) = \exp \left(\sum_{C_i \subset L} \int\limits_{C_i} A \right)$$

в (8.1).) Тогда выражение (8.2) для абелева случая имеет вид

$$W_{\xi,\mu}(k) = \mathrm{const} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{2k} \langle I_\xi, d^{-1} I_\xi \rangle \right\} = \mathrm{const} \cdot \exp\left(\frac{i}{2k} \int\limits_M d\theta \wedge \theta \right). \qquad \square$$

Замечание 8.10 (функционал Черна–Саймонса).

$$CS(A) = \int\limits_M \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

на G-связностях $\{A\}$ над вещественными трехмерными многообразиями M имеет *комплексный аналог* для многообразий Калаби–Яо, или, в более общем случае, для любого трехмерного комплексного многообразия N (см. [Wit3]):

$$CS_{\mathbb{C}}(A) = \int\limits_N \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \wedge \eta,$$

где η — голоморфная (или мероморфная) 3-форма на N без нулей. В случае абелевой группы $G = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ и комплексного зацепления L, являющегося несвязным объединением комплексных кривых C_i с голоморфными дифференциалами α_i на них, асимптотика соответствующего комплексного аналога W_L есть голоморфный коэффициент зацепления $\mathrm{lk}_{\mathbb{C}}((C_i, \alpha_i), (C_j, \alpha_j))$, определенный в п. 7.5 [FrT, KhR, Ger].

Замечание 8.11. Коэффициенты зацепления высших порядков, введенные в п. 7.2, возникают при вычислении корреляторов в теории Черна–Саймонса для размерностей выше трех (см. [FNRS]).

Многомерный континуальный интеграл типа Черна–Саймонса можно рассматривать как неабелев аналог соответствующего гидродинамического интеграла (9.2а) из части I. Являясь примером так называемой топологической теории поля, он, по самому своему определению, не требует понятия метрики для определения функционала действия. Поэтому все *калибровочно-инвариантные* наблюдаемые в этой теории топологически инвариантны, если мера в континуальном интеграле не нарушает инвариантность относительно диффеоморфизмов.

Пусть $\{A\}$ — пространство $U(1)$-связностей на многообразии M^{2m+1}, а DA — инвариантная относительно сдвигов мера интегрирования. Для

совокупности циклов $C_1, \ldots, C_r$ размерностей $\dim C_i = 2d_i + 1$, $i = 1, \ldots, r$, определим калибровочно-инвариантный функционал

$$\Phi_{\{C_1,\ldots,C_r\}}(A) := \prod_{i=1}^{r} \exp\left(\int\limits_{C_i} A \wedge (dA)^{d_i}\right).$$

Предположим, что циклы удовлетворяют условию зацепления (7.1) $\sum\limits_{i=1}^{r}(m - d_i) = m + 1$. Тогда асимптотически при больших k среднее ожидаемое значение функционала Φ, т. е.

$$\langle \Phi_{\{C_1,\ldots,C_r\}}(A)\rangle = \int \Phi_{\{C_1,\ldots,C_r\}}(A) \exp\left(\frac{ik}{2m+1}\int\limits_M A \wedge (dA)^m\right) DA,$$

определяется экспонентой взаимного коэффициента зацепления для совокупности циклов: $\exp(\mathrm{lk}(C_1, \ldots, C_r)/k^{r-1})$, где число $\mathrm{lk}(C_1, \ldots, C_r)$ есть коэффициент зацепления, например C_r, с пересечением всех остальных циклов (см. п. 7.2). (Чтобы самозацепления циклов не давали вклада в интеграл, предполагают, что имеет место так называемое *нормальное упорядочение* рассматриваемых операторов.) Если условие зацепления не выполнено, но существуют подзацепления, удовлетворяющие данному условию, то главный член асимптотики определяется взаимными коэффициентами зацепления этих подзацеплений.

Замечание 8.12. Обсуждаемый выше функционал голономии можно считать аналогом преобразования Радона: для данной группы Ли G он переводит класс калибровочной эквивалентности G-связностей на M в G-значные функционалы на пространстве петель в M.

Значение *функционала голономии* на петле Γ есть голономия связности A вокруг Γ. В абелевом случае ($G = \mathbb{R}$) преобразование Радона ставит в соответствие 1-форме θ на M следующий функционал I_θ на пространстве свободных петель $\mathcal{LM}$ (пространстве гладких отображений $S^1 \to M$):

$$I_\theta(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \theta.$$

В [Bry2] Брылинский характеризует множество значений преобразования Радона как множество функционалов на $\mathcal{LM}$, удовлетворяющих определенной системе линейных уравнений в частных производных второго порядка (называемой системой Радона–Джона). Необходимые и достаточные условия на эти функционалы суть ограничения на частные производные $\partial^2 I_\theta / \partial x^i_k \partial x^j_l$, где координаты $\{x^i_k\}$ — компоненты Фурье малых вариаций кривой Γ. В размерности 2 эта система порождает гипергеометрические системы в смысле [GGZ]. Неабелев аналог уравнений Радона–Джона включает упорядоченные интегралы (см. [Bry2]).

Отметим, что для размерности 3 преобразование Радона определяет такую разновидность функционалов на векторных полях, которые могут быть

определены как потоки полей через поверхности, ограниченные вложенными кривыми (или, что эквивалентно, как средний коэффициент зацепления полей и кривых). Действительно, вложенные непараметризованные кривые в $\mathbb{R}^3$ образуют подмножество в пространстве $S\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)^*$, двойственном к алгебре Ли бездивергентных векторных полей в пространстве (см. § 3 гл. 6). Кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ определяет функционал, значение которого на бездивергентном поле ξ равно потоку ξ через Γ.

Зафиксируем векторное поле ξ и предположим, что μ — форма объема в пространстве. Пусть θ — такая 1-форма, что $i_\xi \mu = d\theta$ (ξ — поле вихря для θ). Тогда $I_\theta(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \theta = \{\text{поток } \xi \text{ через } \Gamma\}$ можно рассматривать как функционал на таких кривых Γ. Регулярный элемент двойственного пространства $S\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)^*$ есть «размазанная» петля Γ, т. е. бездивергентное векторное поле η (см. § 3 гл. I), в то время как спаривание задается формулой

$$I_\theta(\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(\eta)\, \mu = \mathcal{H}(\xi, \eta).$$

8.2. Интерпретация характеристических классов типа Годбийона–Вея

Пусть $\mathcal{F}$ — коориентированное слоение коразмерности 1 на ориентированном замкнутом многообразии M, а θ — 1-форма, определяющая это слоение. Тогда $d\theta = \theta \wedge w$ для некоторой 1-формы w.

Предложение 8.13 (см., например, [Fuks]). *Форма $w \wedge dw$ замкнута, и ее класс когомологий не зависит от выбора θ и w.*

Определение 8.14. Класс когомологий формы $w \wedge dw$ в $H^3(M, \mathbb{R})$ называется *классом Годбийона–Вея* слоения $\mathcal{F}$.

На трехмерном многообразии M этот класс определяется своим значением на фундаментальном 3-цикле:

$$GV(\mathcal{F}) = \int\limits_M w \wedge dw.$$

Пусть $\boldsymbol{v}$ — произвольное векторное поле на M с единственным условием $\theta(\boldsymbol{v}) = 1$, и пусть через $L_{\boldsymbol{v}}^k$ обозначена k-я производная Ли вдоль $\boldsymbol{v}$.

Теорема 8.15 (см. [Sul, Th1]). $GV(\mathcal{F}) = -\int\limits_M L_{\boldsymbol{v}}^2 \theta \wedge d\theta$.

Если M^3 — многообразие, оснащенное формой объема μ, то класс GV допускает эргодическую интерпретацию в терминах асимптотического инварианта Хопфа некоторого векторного поля.

Определим векторное поле ζ на M с помощью соотношения

$$i_\zeta \mu = L_{\boldsymbol{v}}^2 \theta \wedge \theta.$$

Следствие 8.16 (см. [Tab1]). *Векторное поле ζ гомологично нулю, и его асимптотический инвариант Хопфа равен инварианту Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Согласно гомотопической формуле Картана (гл. I, п. 7.2)

$$L_v\theta = di_v\theta + i_v d\theta = i_v\theta \wedge w = w - f\theta,$$

где функция f есть $f = w(v)$. Это значит, что $(L_v\theta) \wedge \theta = w \wedge \theta = -d\theta$, и, кроме того,

$$(L_v^2\theta) \wedge \theta = L_v((L_v\theta) \wedge \theta) = L_v(-d\theta) = -dL_v\theta = -d(w - f\theta).$$

Поэтому можно взять $w' = w - f\theta$ в качестве новой 1-формы w в определении класса Годбийона–Вея. Отсюда легко следует утверждение теоремы 8.15

$$\int\limits_M L_v^2\theta \wedge d\theta = \int\limits_M L_v^2\theta \wedge \theta \wedge w' = -\int\limits_M dw' \wedge w' = -GV(\mathcal{F}).$$

Свойство гомологичности нулю для поля ζ также следует из того факта, что 2-форма $(L_v^2\theta) \wedge \theta = i_\zeta\mu$ является полным дифференциалом. Кроме того, асимптотический инвариант Хопфа для ζ равен

$$\mathcal{H}(\zeta) = \int\limits_M i_\zeta\mu \wedge d^{-1}(i_\zeta\mu) = \int\limits_M dw' \wedge w' = GV(\mathcal{F}). \qquad \square$$

Замечание 8.17 (см. [Sul, Th1, Tab1]). Определив вспомогательное векторное поле ξ (касательное к слоям $\mathcal{F}$) с помощью соотношения

$$i_\xi\mu = L_v\theta \wedge \theta,$$

можно считать, что оно является мерой вращения касательных к расслоению плоскостей в поперечном направлении v. А именно, направление ξ есть ось вращения, а модуль ξ — угловая скорость вращения. Тогда можно сказать, что ζ есть мера ускорения вращения, а приведенное выше утверждение звучит следующим образом: $GV(\mathcal{F})$ есть асимптотический инвариант Хопфа для поля ускорения вращения.

Как элемент группы $H^3(M, \mathbb{R})$, класс Годбийона–Вея на многообразиях высших размерностей определяется своими значениями на 3-циклах. Любое такое значение совпадает с асимптотическим инвариантом Хопфа соответствующего поля ζ, построенного для индуцированного слоения на этом 3-цикле.

Аналогичным образом можно определить асимптотический и интегральный инварианты Беннекэна для гомологичного нулю векторного поля на контактном трехмерном односвязном многообразии (см. [Tab1]). Эти инварианты обобщают классическое определение коэффициента самозацепления кривой, трансверсальной контактной структуре [Ben]. Интересные полиномиальные инварианты лежандровых кривых (и, в более общем случае, узлов с фиксированной тривиализацией нормального расслоения) в полнотории, обобщающие инвариант Беннекэна, были введены Аикарди [Aic] (см. также [FuT, Fer, Pl2]).

В заключение сошлемся на глубокие работы [DeR, SchL, SchS, Sul] (см. также ссылки в этих работах), где рассмотрены различные вопросы, касающиеся

структурных циклов, асимптотических циклов, аппроксимации циклов потоками и расслоениями, а также обсуждаются соответствующие условия гладкости.

Задача 8.18. A. Дать эргодическую интерпретацию глобального вещественнозначного инварианта трехмерных CR-многообразий, который можно найти в [B-E].

Грубо говоря, CR-структура на $(2n+1)$-мерных многообразиях определяется выбором n-мерного интегрируемого подрасслоения $T^{1,0}M$ комплексифицированного касательного расслоения многообразия M. В частности, это подрасслоение определяет распределение соответствующих контактных элементов на M. CR-структура порождает вещественнозначную 3-форму (типа Черна–Саймонса), которая определена с точностью до прибавления точной формы на этом многообразии.

B. Было бы интересно выяснить, применимы ли аналогичные методы для распространения инварианта Кассона и гомологий Флоера гомологических трехмерных сфер на асферические $(4k-1)$-многообразия с дополнительной структурой (скажем, на контактные многообразия) (см. [CLM, Arn24]).

ГЛАВА IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГРУПП ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В 1963 г. И. Н. Лоренц предположил, что двухнедельный прогноз следовало бы считать теоретической границей для предсказания будущего состояния атмосферы, используя широкомасштабные численные модели [Lor]. Современная метеорология достигла в настоящее время хорошей согласованности наблюдаемой и предсказанной погоды на срок приблизительно до семи дней в северном полушарии, в то время как этот период сокращается наполовину в южном полушарии и до двух-трех дней в тропиках для того же уровня корреляции [Kri]. Различия в длительности успешного предсказания в разных полушариях объясняются просто плотностью данных.

Математическая причина имеющейся ненадежности долгосрочных прогнозов погоды состоит в экспоненциальной расходимости течений идеальной жидкости (или атмосферы) с близкими начальными условиями, которая, в свою очередь, связана с отрицательными кривизнами соответствующих групп диффеоморфизмов как римановых многообразий. Мы увидим, что конфигурационное пространство идеальной несжимаемой жидкости является довольно «неплоским» и имеет весьма сложную «внутреннюю» и «внешнюю» дифференциальную геометрию.

«Внутренними» (или «присущими») характеристиками некоторого риманова многообразия являются те, которые сохраняются при изометрии многообразия. Например, можно согнуть (т. е. отобразить изометрично) лист бумаги в конус или в цилиндр, но в кусок сферы — нельзя (без растягивания или разрезания). Инвариант, который различает римановы метрики, называется римановой кривизной. Риманова кривизна плоскости равна нулю, а кривизна сферы радиуса R равна R^{-2}. Если одно риманово многообразие может быть изометрично отображено в другое, то риманова кривизна в соответствующих точках одинакова.

Риманова кривизна многообразия сильно влияет на поведение геодезических на нем. Если риманова кривизна многообразия положительна (как для сферы или эллипсоида), то близкие геодезические чаще всего колеблются одна около другой, а если кривизна отрицательна (как на поверхности однополостного гиперболоида), геодезические быстро удаляются друг от друга.

Оказывается, что группы диффеоморфизмов, снабженные односторонне инвариантными метриками, выглядят очень похоже на многообразия отрицательной кривизны. В лагранжевой механике движение натуральной механи-

ческой системы является геодезической линией на многообразии — конфигурационном пространстве в метрике, заданной разностью кинетической и потенциальной энергий. В нашем случае геодезические являются движениями идеальной жидкости. Следовательно, вычисление кривизны группы диффеоморфизмов доставляет существенную информацию о неустойчивости течений идеальной жидкости.

В этой главе мы детально обсудим свойства кривизны и метрик на группах сохраняющих объем и симплектических диффеоморфизмов и рассмотрим приложения вычислений кривизны к оценкам реалистичности прогнозов погоды.

§ 1. Плоскость Лобачевского и предварительные сведения по дифференциальной геометрии

1.1. Плоскость Лобачевского как группа аффинных преобразований

Начнем с сильно упрощенной модели группы диффеоморфизмов — с двумерной группы G аффинных преобразований $x \mapsto a + bx$ вещественной прямой (или, в более общем случае, рассмотрим $(n+1)$-мерную группу G всех растяжений и сдвигов n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$: $x, a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}_+$).

Отождествим элементы группы G с парами (a, b), где $b > 0$, т. е. с точками верхней полуплоскости (соответственно, полупространства). Композиция аффинных преобразований прямой определяет групповое умножение соответствующих пар:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 + a_2 b_1, b_1 b_2).$$

Чтобы определить односторонне (скажем, лево-) инвариантную метрику на G (и соответствующее уравнение Эйлера геодезического потока на G, см. гл. I), достаточно задать некоторую квадратичную форму на касательном пространстве к G в единице.

Зафиксируем квадратичную форму $da^2 + db^2$ на касательном пространстве к G в единице $(a, b) = (0, 1)$ и разнесем ее на касательные пространства в других точках G левыми сдвигами.

Предложение 1.1. *Левоинвариантная метрика на G, полученная таким способом, имеет вид*

$$ds^2 = \frac{da^2 + db^2}{b^2}.$$

Доказательство. Левый сдвиг на элемент (a, b) в G имеет матрицу Якоби $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Следовательно, квадратичная форма $da^2 + db^2$ в касательном пространстве $T_{(0,1)}G$ в единице группы является прообразом квадратичной формы $(da^2 + db^2)/b^2$ на $T_{(a,b)}G$. □

Заметим, что начиная с *любой* положительно определенной квадратичной формы, мы получим изометричное многообразие (с точностью до скалярного множителя в метрике).

Определение 1.2. Риманово многообразие G, снабженное метрикой $ds^2 = (da^2 + db^2)/b^2$, называется *плоскостью Лобачевского* Λ^2 (соответственно, пространством Лобачевского Λ^{n+1} при $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}_+$).

Предложение 1.3. *Геодезические линии (т. е. экстремали функционала длины) в Λ^2 являются вертикальными полупрямыми ($a = \mathrm{const}$, $b > 0$) или полуокружностями, ортогональными к оси a (или к гиперплоскости a в случае Λ^{n+1}, соответственно).*

Вертикальная прямая может рассматриваться как полуокружность бесконечного радиуса (см. рис. 46).

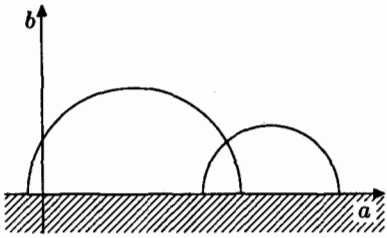


Рис. 46. Плоскость Лобачевского Λ^2 и геодезические на ней

Доказательство. Отражение плоскости Λ^2 относительно вертикальной прямой или окружности с центром на оси a есть изометрия. □

Заметим, что две геодезические с близкими начальными условиями экспоненциально расходятся друг от друга (в метрике Лобачевского). На пути в несколько единиц длины отклонение в начальных условиях может вырасти и в сотни раз. Причиной практической неопределенности геодезических является отрицательная кривизна плоскости Лобачевского (она постоянна и равна -1 в выше определенной метрике).

Напомним, что кривизна обычной сферы радиуса R равна R^{-2}. Плоскость Лобачевского можно было бы рассматривать как сферу мнимого радиуса $R = \sqrt{-1}$.

Задача 1.4 (Б. Я. Зельдович). Докажите, что медианы геодезического треугольника в плоскости Лобачевского пересекаются в одной точке. (Подсказка: докажите это для сферы, а затем рассмотрите плоскость Лобачевского как аналитическое продолжение сферы на мнимые величины радиуса.)

1.2. Кривизна и параллельный перенос

В этом параграфе собраны основные понятия дифференциальной геометрии, необходимые в дальнейшем. Более подробное изложение см. в [Mil3, Arn16, DFN].

Пусть M — риманово многообразие (в качестве примера можно представлять евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, сферу S^n или пространство Лобачевского Λ^n из предыдущего параграфа), x — точка M, а ξ — вектор, касательный к M в точке x, $\xi \in T_xM$.

Будем обозначать через $\{\gamma(x,\xi,t)\} = \{\gamma(\xi,t)\} = \{\gamma(t)\} = \gamma$ *геодезическую линию* (т. е. экстремаль «принципа наименьшего действия» $\delta \int \dot{\gamma}^2\, dt = 0$) на M с начальным вектором скорости $\xi = \dot{\gamma}(0)$ в точке $x = \gamma(0)$.

Параллельным переносом вдоль некоторого отрезка геодезической является специальное отображение изометрии из касательного пространства в начальной точке в касательное пространство в конечной точке, которое гладко зависит от отрезка геодезической и обладает следующими свойствами.

1. Перенос вдоль двух последовательных отрезков геодезической совпадает с композицией переносов вдоль первого и второго отрезков.

2. Параллельный перенос вдоль отрезка длины нуль является тождественным отображением.

3. Единичный касательный вектор геодезической линии в начальной точке переводится в единичный касательный вектор геодезической в конечной точке.

Пример 1.5. Обычный параллельный перенос в евклидовой плоскости обладает свойствами 1–3.

Из изометричности параллельного переноса и свойства 3 следует, что угол, образованный переносимым вектором с геодезической, сохраняется при переносе. Это однозначно определяет параллельный перенос в двумерном случае, т. е. на поверхности (см. рис. 47).

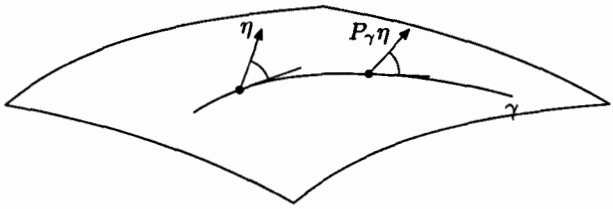


Рис. 47. Параллельный перенос вдоль геодезической линии γ

В случае большей размерности параллельный перенос не определяется однозначно условием сохранения угла: нужно также указать плоскость, содержащую перенесенный вектор.

Определение 1.6. *Римановым параллельным переносом* вдоль геодезической называется семейство изометрий, обладающее свойствами 1–3, приведенными выше, для которых перенос вектора η вдоль короткого отрезка геодезической длины t оставляет его касательным (с точностью до $O(t^2)$-малой поправки при $t \to 0$) к следующей двумерной поверхности. Эта поверхность образована геодезическими, выпущенными из начальной точки отрезка со скоростями в плоскости, образованной вектором η и вектором начальной скорости геодезической.

Замечание 1.7. Физическое описание параллельного переноса на римановом многообразии может быть достигнуто адиабатическим (медленным) переносом маятника вдоль пути на многообразии (Радон, см. [Kl]). Плоскость колебаний переносится параллельно.

Подобное явление в оптике называется инерцией плоскости поляризации вдоль искривленного луча (см. [Ryt, Vld]). Оно связано с дополнительным вращением оси гироскопа, переносимого вдоль замкнутого пути на поверхности (или по океанам) Земли, и пропорционально заметаемой площади [Ish]. Современная версия этих связей между адиабатическими процессами и связностями проясняет, среди прочих, эффект Ааронова–Бома в квантовой механике. Эта версия называется также фазой Берри (см. [Ber, Arn23]).

Определение 1.8. *Ковариантной производной* $\nabla_\xi \overline{\eta}$ векторного поля $\overline{\eta}$ в направлении $\xi \in T_xM$ называется скорость изменения векторного поля $\overline{\eta}$, параллельно перенесенного в точку $x \in M$ по геодезической линии γ, выпущенной из этой точки со скоростью ξ (вектор, наблюдаемый в x во время t, должен переноситься из точки $\gamma(\xi, t)$).

Отметим, что векторное поле $\dot\gamma$ вдоль геодезической линии γ подчинено уравнению $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.

Замечание 1.9. Для вычисления параллельных переносов в дальнейшем нам понадобятся следующие явные формулы. Пусть $\gamma(x, \xi, t)$ — геодезическая линия на многообразии M, а $P_{\gamma(t)}\colon T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ — отображение, переводящее вектор $\eta \in T_{\gamma(0)}M$ в вектор

$$P_{\gamma(\xi,t)}\eta := \frac{1}{t}\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma(x, \xi + \eta\tau, t) \in T_{\gamma(t)}M. \tag{1.1}$$

Отображение $P_{\gamma(t)}$ аппроксимирует параллельный перенос вдоль кривой γ в следующем смысле. *Ковариантная производная* $\nabla_\xi\overline{\eta}$ поля $\overline{\eta}$ в направлении вектора $\xi \in T_xM$ равна

$$\nabla_\xi\overline{\eta} := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P^{-1}_{\gamma(t)}\overline{\eta}(\gamma(\xi, t)) \in T_xM. \tag{1.2}$$

Замечание 1.10. Следующие свойства однозначно определяют ковариантную производную на римановом многообразии и могут быть взяты в качестве ее аксиоматического определения (см., например, [Mil3, K-N]):

1) $\nabla_\xi v$ является билинейной функцией вектора ξ и поля v;

2) $\nabla_\xi fv = (L_\xi f)v + f(\nabla_\xi v)$, где f — гладкая функция, а $L_\xi f$ — производная функции f вдоль вектора ξ;

3) $L_\xi\langle v, w\rangle = \langle\nabla_\xi v, w(x)\rangle + \langle v(x), \nabla_\xi w\rangle$;

4) $\nabla_{v(x)}w - \nabla_{w(x)}v = \{v, w\}(x)$.

Здесь $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — это скалярное произведение, определяемое римановой метрикой на M, а $\{v, w\}$ — скобка Пуассона векторных полей v и w. В локальных координатах $\{x_i\}$ на M скобка Пуассона задается формулой

$$\{v, w\}_j = \sum_{i=1}^{n}\Big(v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big).$$

Параллельный перенос вдоль произвольной кривой определяется как предел параллельных переносов вдоль ломаной из геодезических линий, аппроксимирующих эту кривую. Приращение вектора после переноса вдоль границы малого куска гладкой поверхности пропорционально (в первом приближении) площади области.

Определение 1.11. *Тензор кривизны* Ω описывает инфинитезимальное преобразование касательного пространства, получаемое параллельным переносом вокруг бесконечно малого параллелограмма. Для данных векторов $\xi, \eta \in T_xM$ рассмотрим криволинейный параллелограмм, натянутый на ξ и η. Главная (билинейная по ξ, η) часть приращения вектора ζ в касательном пространстве T_xM после параллельного переноса этого вектора вокруг параллелограмма, натянутого на ξ и η, может быть выражена в терминах ковариантного дифференцирования следующим образом:

$$\Omega(\xi,\eta)\zeta = (-\nabla_{\overline{\xi}}\nabla_{\overline{\eta}}\overline{\zeta} + \nabla_{\overline{\eta}}\nabla_{\overline{\xi}}\overline{\zeta} + \nabla_{\{\overline{\xi},\overline{\eta}\}}\overline{\zeta})|_{x=x_0}, \tag{1.3}$$

где $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ — векторные поля, величины которых в точке x равны ξ, η и ζ. Величина правой части не зависит от продолжений $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ векторов ξ, η и ζ.

Секционной кривизной M в направлении двумерной плоскости, натянутой на два ортогональных единичных вектора $\xi, \eta \in T_xM$ в касательном пространстве к M в точке x, называется величина

$$C_{\xi\eta} = \langle \Omega(\xi,\eta)\xi, \eta\rangle. \tag{1.4}$$

Для пары произвольных (необязательно ортонормальных) векторов секционная кривизна $C_{\xi\eta}$ определяется как

$$C_{\xi\eta} = \frac{\langle \Omega(\xi,\eta)\xi, \eta\rangle}{\langle \xi,\xi\rangle\langle \eta,\eta\rangle - \langle \xi,\eta\rangle^2}. \tag{1.5}$$

Пример 1.12. Секционная кривизна в любой точке плоскости Лобачевского (п. 1.1) равна -1. (Подсказка: используйте явное описание геодезических на плоскости Лобачевского. См. также в § 2 общие формулы для секционной кривизны на группе Ли.)

Определение 1.13. *Нормализованной кривизной Риччи* в точке x в направлении единичного вектора ξ называется среднее от секционных кривизн по всем двумерным касательным плоскостям, содержащим ξ. Она равна $r(\xi)/(n-1)$, где *кривизной Риччи* $r(\xi)$ называется величина $r(\xi) = \sum_i C_{\xi e_i} = \sum_i \langle \Omega(\xi, e_i)\xi, e_i\rangle$, вычисленная в произвольном ортонормальном базисе $e_1, \ldots, e_n$ касательного пространства T_xM.

Нормализованная скалярная кривизна в точке x — это среднее от всех величин секционных кривизн в этой точке. Она равна $\rho/(n(n-1))$, где *скалярная кривизна* ρ — это сумма $\rho = r(e_i) + \ldots + r(e_n) = 2\sum_{i<j} C_{e_ie_j}$ (см., например, [Mil4]).

1.3. Поведение геодезических на римановых многообразиях

Из определения кривизны легко вывести следующее

Предложение 1.14. *Расстояние $y(t)$ между двумя бесконечно близкими геодезическими на поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\ddot{y} + Cy = 0, \tag{1.6}$$

где $C = C(t)$ — риманова кривизна поверхности вдоль геодезической; t — параметр длины на возмущаемой геодезической.

Чтобы в общем виде описать, как тензор кривизны связан с поведением геодезических, рассмотрим вариацию $\gamma_\alpha(t)$ геодезической $\gamma = \gamma_0(t)$. Пусть кривая γ_α для любого α, достаточно близкого к нулю, является геодезической. Векторное поле $\xi(t) = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \gamma_\alpha(t)$ (определяемое вдоль γ) называется *векторным полем вариации геодезической γ.*

Лемма-определение 1.15. *Векторное поле вариации геодезической удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, называемому уравнением Якоби:*

$$\nabla^2_{\dot\gamma}\xi + \Omega(\dot\gamma, \xi)\dot\gamma = 0. \tag{1.7}$$

Доказательство. Определим вариацию геодезической $\xi(t, \alpha)$ для всех геодезических семейства $\gamma_\alpha(t)$ (с малым α) как производную $\xi(t, \alpha) = \frac{d}{d\alpha}\gamma_\alpha(t)$. Тогда поля ξ и $\dot\gamma$ коммутируют ($\{\xi, \dot\gamma\} \equiv 0$) как частные производные отображения $(t, \alpha) \mapsto \gamma_\alpha(t)$. Используя вышеперечисленные свойства ковариантного дифференцирования и определение тензора кривизны, мы получаем

$$\nabla^2_{\dot\gamma}\xi = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\xi = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\xi}\dot\gamma = -\Omega(\dot\gamma, \xi)\dot\gamma. \qquad \square$$

Предположим, что кривизна положительна по всем двумерным направлениям, содержащим вектор скорости геодезической. Подробный анализ уравнения Якоби (или аналогия со стандартным маятником, см. предложение 1.14) показывает, что нормальная компонента векторного поля вариации геодезической осциллирует по t. Это значит, что геодезические с близкими начальными скоростями на многообразии положительной кривизны колеблются одна вокруг другой (см. рис. 48, *a*). Напротив, отрицательность секционных кривизн влечет экспоненциальную расходимость изначально близких геодезических, аналогично поведению перевернутого маятника (см. рис. 48, *b*).

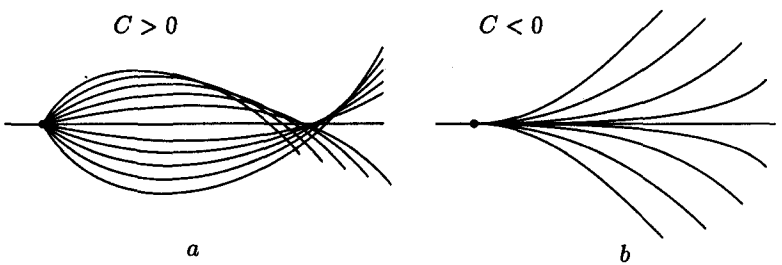


Рис. 48. Геодезические на многообразиях: (*a*) положительной и (*b*) отрицательной кривизны

Замечание 1.16. Для численной оценки неустойчивости геодезических полезно определить *длину характерного пути* как среднюю длину

пути, на котором малые ошибки в начальных условиях увеличиваются в e раз. Если кривизна нашего многообразия по всем двумерным направлениям отделена от нуля числом $-b^2$, то длина характерного пути не больше чем $1/b$ (ср. предложение 1.14). Ввиду экспоненциального характера роста ошибки ход геодезической линии на многообразии отрицательной кривизны практически невозможно предсказать.

1.4. Соотношение между ковариантной производной и производной Ли

Всякое векторное поле на римановом многообразии определяет дифференциальную 1-форму. Значение этой формы на касательном пространстве к многообразию в каждой точке равно скалярному произведению на вектор этого поля в той же точке многообразия. Для вектора v мы обозначим через $v^\flat$ 1-форму, которая на касательном векторе в точке x равна скалярному произведению касательного вектора и вектора $v(x)$.

Векторное поле также определяет поток, который переносит дифференциальные формы. Например, можно перенести 1-форму, соответствующую некоторому векторному полю, посредством потока этого поля и получить новую дифференциальную форму. Инфинитезимально этот перенос описывается производной Ли 1-формы (соответствующей полю) вдоль этого поля, а результат опять-таки является 1-формой. Эта естественная производная 1-формы связана с ковариантной производной соответствующего векторного поля вдоль самого себя следующей замечательной формулой.

Теорема 1.17. *Производная Ли 1-формы, соответствующей векторному полю v на римановом многообразии M, отличается от ковариантной производной этого векторного поля вдоль самого себя на полный дифференциал:*

$$L_v(v^\flat) = (\nabla_v v)^\flat + \frac{1}{2} d\langle v, v\rangle, \tag{1.8}$$

где $\langle v, v\rangle$ — функция на M, равная риманову квадрату вектора $v(x)$ в любой точке x.

Заметим, что в этом утверждении не требуется, чтобы векторное поле было бездивергентным.

Доказательство. Пусть w — векторное поле, коммутирующее с полем v (т. е. $\{v, w\} = 0$).

Во-первых, так как параллельный перенос изометричен, то

$$L_a\langle b, c\rangle = \langle \nabla_a b, c\rangle + \langle b, \nabla_a c\rangle \tag{1.9}$$

для любых полей a, b и c. Применение этого к полям $a = w$, $b = c = v$ дает $L_w\langle v, v\rangle = \langle \nabla_w v, v\rangle + \langle v, \nabla_w v\rangle$. Отсюда

$$\langle \nabla_w v, v\rangle = \frac{1}{2}(d\langle v, v\rangle)(w). \tag{1.10}$$

Применив тождество (1.9) еще раз к $a = c = v$, $b = w$, получаем

$$L_v\langle w, v\rangle = \langle \nabla_v w, v\rangle + \langle w, \nabla_v v\rangle. \tag{1.11}$$

С другой стороны, для коммутирующих полей v и w из свойства 4) замечания 1.10 имеем

$$\langle \nabla_v w, v\rangle = \langle \nabla_w v, v\rangle. \tag{1.12}$$

Подставив это в (1.11), получаем

$$L_v\langle w, v\rangle = \langle \nabla_w v, v\rangle + \langle w, \nabla_v v\rangle.$$

Используя (1.10), перепишем последнее равенство в виде

$$L_v\langle w, v\rangle = \langle \nabla_v v, w\rangle + \frac{1}{2}(d\langle v, v\rangle)(w). \tag{1.13}$$

Далее, мы используем тождество

$$L_\xi(v^\flat(w)) = (L_\xi(v^\flat))(w) + v^\flat(L_\xi w), \tag{1.14}$$

которое выражает естественность производной Ли: поток ξ переносит 1-форму $v^\flat$, вектор w и значение этой 1-формы на этом векторе. (Этот факт объясняет, почему векторные поля переносятся в противоположном направлении в определении производной Ли.)

Применив (1.14) к $\xi = v$, получаем

$$L_v(v^\flat(w)) = (L_v(v^\flat))(w), \tag{1.15}$$

так как $L_v w = -\{v, w\} = 0$. (Здесь мы снова используем то, что поля v и w коммутируют.)

Из определения отображения $A\colon v \mapsto v^\flat$ следует

$$L_v(v^\flat(w)) = L_v\langle v, w\rangle.$$

Комбинируя последнее с (1.15) и (1.13), находим, что для любого вектора из поля w, коммутирующего с полем v,

$$(L_v(v^\flat))(w) = (\nabla_v v)^\flat(w) + \frac{1}{2}(d\langle v, v\rangle)(w). \tag{1.16}$$

В любой точке $x \in M$, где векторное поле v ненулевое, легко построить поле w, коммутирующее с v и имеющее в этой точке любое заданное значение. Следовательно, из тождества (1.16) получаем

$$L_v(v^\flat) = (\nabla_v v)^\flat + \frac{1}{2}d\langle v, v\rangle,$$

что доказывает теорему.

В особых точках $v(x) = 0$ и доказывать нечего, так как обе части соотношения (1.8) равны нулю. □

Замечание 1.18. Можно взять произвольное поле w вместо коммутирующего с v. Тогда формулы несколько удлинятся. Два коммутатора появляются в тех местах, где использовалась коммутативность, и дополнительный член $\langle\{w, v\}, v\rangle$ в правой части (1.12) сократится с членом $\langle v, -\{v, w\}\rangle$ в правой части (1.15).

Эта теорема объясняет вид уравнения Эйлера несжимаемой жидкости на произвольном римановом многообразии из гл. I, § 5 и § 7.

Следствие 1.19. *Уравнение Эйлера*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla_v v - \nabla p$$

на алгебре Ли бездивергентных векторных полей $\mathfrak{g} = S\mathrm{Vect}(M)$ *переводится оператором инерции* $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ *в уравнение Эйлера*

$$\frac{\partial [u]}{\partial t} = -L_v[u] \tag{1.17}$$

на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^* = \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ *этой алгебры Ли. Здесь поле* v *и* 1*-форма* u *связаны римановой метрикой* $u = v^\flat$, *а* $[u] \in \Omega^1/d\Omega^0$ *является классом эквивалентности формы* u.

Доказательство. Оператор инерции $A\colon S\mathrm{Vect}(M) \to \Omega^1/d\Omega^0$ переводит бездивергентное векторное поле v в 1-форму $u = v^\flat$, рассматриваемую по модулю дифференциала функции. По вышеприведенной теореме он переводит ковариантную производную $\nabla_v v$ в производную Ли $L_v u$ по модулю дифференциала некоторой функции. Следовательно, уравнение Эйлера для 1-формы u принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L_v u - df,$$

где функция $f = p - \frac{1}{2}\langle v, v\rangle$. Оно эквивалентно уравнению (1.17) для класса смежности $[u]$. □

§ 2. Секционные кривизны группы Ли, снабженной односторонне инвариантной метрикой

Рассмотрим группу Ли G с левоинвариантной метрикой, заданной скалярным произведением $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ в алгебре Ли. Секционная кривизна группы G в любой точке определяется кривизной в единице (так как по определению отображение группы на себя левыми сдвигами изометрично). Следовательно, достаточно описать кривизны для двумерных плоскостей, лежащих в алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$.

Теорема 2.1 (см. [Arn4]). *Кривизна группы Ли* G *по направлению, определенному ортонормальной парой векторов* ξ, η *в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$, *дается формулой*

$$C_{\xi\eta} = \langle\delta,\delta\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle - 3\langle\alpha,\alpha\rangle - 4\langle B_\xi, B_\eta\rangle, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} 2\delta = B(\xi,\eta) + B(\eta,\xi), \quad 2\beta = B(\xi,\eta) - B(\eta,\xi), \\ 2\alpha = [\xi,\eta], \quad 2B_\xi = B(\xi,\xi), \quad 2B_\eta = B(\eta,\eta) \end{gathered} \tag{2.2}$$

и где $[\,.\,,\,.\,]$ — *это коммутатор в* $\mathfrak{g}$, *а* B *является билинейной операцией на* $\mathfrak{g}$, *определенной соотношением* $\langle B(u,v), w\rangle = \langle u, [v,w]\rangle$ (*см. гл.* I).

Замечание 2.2. Для двусторонне-инвариантной метрики формула для кривизны имеет особенно простой вид:

$$C_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\langle[\xi,\eta],[\xi,\eta]\rangle. \tag{2.3}$$

В частности, в этом случае секционная кривизна неотрицательна по всем двумерным направлениям.

Замечание 2.3. Формула для кривизны группы с правоинвариантной римановой метрикой совпадает с формулой в левоинвариантном случае. Действительно, правоинвариантная метрика на группе является левоинвариантной метрикой на группе с обращенным законом умножения ($g_1 \star g_2 = g_2 g_1$). Переход к обращенной группе изменяет знаки как коммутаторов, так и операции B на алгебре. Но каждый член формулы кривизны есть произведение двух операций, меняющих знак. Следовательно, формула для кривизны останется такой же в правоинвариантном случае. Правая же часть уравнения Эйлера меняет знак в правоинвариантном случае.

Отображение группы G в себя, переводящее каждый элемент g в обратный элемент g^{-1}, является инволюцией, сохраняющей единицу. Оно переводит левоинвариантную метрику на группе в правоинвариантную метрику (определяемую на алгебре Ли той же квадратичной формой). Следовательно, группа с левоинвариантной метрикой изометрична той же группе с соответствующей правоинвариантной метрикой.

Чтобы получить координатное выражение для кривизны, выберем ортонормальный базис $e_1,\dots,e_n$ левоинвариантных векторных полей. Структура алгебры Ли может быть описана набором $n\times n\times n$ структурных констант α_{ijk}, где $[e_i,e_j]=\sum\limits_k \alpha_{ijk}e_k$, или, эквивалентно, $\alpha_{ijk}=\langle[e_i,e_j],e_k\rangle$. Этот набор кососимметричен по первым двум индексам. В этих обозначениях теорема 2.1 утверждает следующее.

Теорема 2.1′ (см. [Mil4]). *Секционная кривизна $C_{e_1e_2}$ дается следующей формулой*:

$$C_{e_1e_2} = \sum_k \Big(\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12}) - \\ - \frac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}\Big). \tag{2.4}$$

Замечание 2.4. Прежде чем доказывать теорему, мы упомянем несколько полезных фактов о левоинвариантных метриках на группах Ли, которые могут быть сформулированы в бескоординатной форме (и некоторые из которых имеют бесконечномерные аналоги). За деталями мы отсылаем к [Mil4].

1. Если ξ принадлежит центру алгебры Ли, то для любой левоинвариантной метрики справедливо неравенство $C_{\xi\eta}\geqslant 0$ при всех η (ср. гл. VI, п. 1.1 об алгебре Вирасоро).

2. Если связная группа Ли G допускает левоинвариантную метрику с неположительными секционными кривизнами $C\leqslant 0$, то она является разрешимой (пример: аффинные преобразования прямой, см. п. 1.1).

3. Если G унимодулярна (т. е. операторы ad_u имеют нулевой след при всех $u \in \mathfrak{g}$), то любая метрика с $C \leqslant 0$ должна быть плоской ($C \equiv 0$) (ср. с замечанием гл. II, п. 4.14).

4. Каждая компактная группа Ли допускает левоинвариантную (а в действительности, биинвариантную) метрику такую, что все секционные кривизны неотрицательны, $C \geqslant 0$ (ср. замечание 2.2 выше).

5. Если алгебра Ли G содержит линейно независимые векторы ξ, η, ζ такие, что $[\xi, \eta] = \zeta$, то существует левоинвариантная метрика такая, что кривизна Риччи $r(\xi)$ строго отрицательна, а кривизна Риччи $r(\zeta)$ строго положительна. Например, можно определить такую метрику на конфигурационном пространстве SO(3) твердого тела, что некоторая кривизна Риччи будет отрицательной!

6 (Валах). Если связная группа Ли G некоммутативна, то она обладает левоинвариантной метрикой строго отрицательной скалярной кривизны.

7. Если связная группа G содержит компактную некоммутативную подгруппу, то G допускает левоинвариантную метрику строго положительной скалярной кривизны [Mil4].

Доказательство теоремы 2.1. Чтобы получить явные формулы для секционных кривизн группы, мы начнем с выражения ковариантной производной в терминах операции B (или α_{ijk}).

Лемма 2.5. *Пусть ξ и η — два левоинвариантных векторных поля на группе G. Тогда векторное поле $\nabla_\xi \eta$ также левоинвариантно и дается следующей формулой в точке $e \in G$:*

$$\nabla_\xi \eta|_e = \frac{1}{2}([\xi, \eta] - B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi)), \tag{2.5}$$

где в правой части ξ и η являются векторами из $\mathfrak{g} = T_e G$, определенными соответствующими левоинвариантными полями на G.

В координатах получаем выражение

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) e_k. \tag{2.5'}$$

Доказательство леммы 2.5. Параллельный перенос на римановом многообразии сохраняет скалярное произведение $\langle a, b \rangle$. С другой стороны, левоинвариантное произведение $\langle a, b \rangle$ левоинвариантных полей постоянно. Следовательно, для любого c оператор ∇_c антисимметричен на левоинвариантных полях:

$$\langle \nabla_c a, b \rangle + \langle \nabla_c b, a \rangle = 0.$$

Кроме того, для ковариантной производной на римановом многообразии справедливо следующее условие «симметрии» (см. замечание 1.6):

$$\nabla_c a - \nabla_a c = \{c, a\}.$$

Напомним, что на группе Ли скобка Пуассона $\{\,.\,,\,.\,\}$ двух левоинвариантных векторных полей совпадает в точке $e \in G$ с коммутатором $[\,.\,,\,.\,]_{\mathfrak{g}}$ в алгебре Ли

$$\{a, c\}|_e = [a, c]_{\mathfrak{g}}. \tag{2.6}$$

Коммутатор правоинвариантных векторных полей a и c имеет противоположный знак (см. гл. I, замечание 2.13 или [Arn4]).

Комбинируя эти тождества, получаем формулу

$$\langle \nabla_\xi \eta, \zeta \rangle = \frac{1}{2}(\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle - \langle [\eta, \zeta], \xi \rangle + \langle [\zeta, \xi], \eta \rangle),$$

как легко видеть, эквивалентную (2.5). Отсюда для ортонормального базиса $e_1, \ldots, e_n$ немедленно вытекает, что

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}).$$

Это завершает доказательство леммы 2.5. □

Теперь координатное выражение (2.4) для секционной кривизны является прямым следствием формул (1.4), (2.5′) и (2.6). Теорема 2.1′ доказана.

Замечание 2.6. Лемма 2.5 выводится в [Arn4] из уравнения Эйлера $\dot{\xi} = B(\xi, \xi)$ (см. гл. I).

Рассмотрим окрестность точки 0 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ как карту окрестности единичного элемента e в группе G, используя экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$. Оно переводит $t\xi$ в элемент $\exp(t\xi)$ однопараметрической группы, начинающейся при $t = 0$ в e с начальной скоростью ξ. Экспоненциальное отображение отождествляет касательные пространства группы T_gG с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. (Мы оставим в стороне трудности этого подхода в бесконечномерном случае, где образ экспоненциального отображения не содержит окрестность единичного элемента группы.)

Из уравнения Эйлера вытекает, что геодезическая линия на группе выражается в наших координатах следующим образом:

$$\gamma(0, \xi, t) = t\xi + \frac{t^2}{2} B(\xi, \xi) + \mathcal{O}(t^3), \quad t \to 0.$$

Тогда аппроксимация переноса $P_{\gamma(\xi,t)}\eta = \frac{1}{t}\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \gamma(0, \xi + \eta\tau, t) \in T_{\gamma(t)}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ вектора $\eta \in T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ имеет вид

$$P_{\gamma(\xi,t)}\eta = \eta + \frac{t}{2}(B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi)) + O(t^2). \tag{2.7}$$

По определению ковариантная производная левоинвариантного векторного поля на группе G, задаваемого вектором $\eta \in \mathfrak{g}$, в направлении $\xi \in \mathfrak{g}$ имеет вид

$$\nabla_\xi \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{\gamma^{-1}(\xi,t)} L_{\gamma(\xi,t)} \eta, \tag{2.8}$$

где в левой части η обозначает соответствующее левоинвариантное векторное поле.

Заметим, что для любой группы Ли G операторы левого сдвига групповыми элементами $\exp a$, близкими к тождественному (т. е. при $|a| \to 0$), действуют на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемой как карта на группе, следующим образом:

$$L_a \xi = \xi + \frac{1}{2}[a, \xi] + O(a^2). \tag{2.9}$$

Действительно, достаточно провести вычисления для матричных групп

$$\exp a \cdot \exp b = \exp\Big(a + b + \frac{1}{2}[a,b] + O(a^2) + O(b^2)\Big)$$

для элементов алгебры Ли $a, b \to 0$. Полагая $b = \xi t$, $t \to 0$, $|a| \to 0$, мы получаем

$$\exp a \cdot \exp \xi t = \exp\Big[a + \Big(\xi t + \frac{1}{2}[a,\xi] + O(a^2)\Big)t + O(t^2)\Big],$$

что равносильно (2.9).

Теперь подставляя в (2.8) выражения (2.7) для P_γ и (2.9) для левого сдвига $L_\gamma\eta$, получаем

$$\nabla_\xi\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{\gamma^{-1}(\xi,t)}\Big(\eta + \frac{t}{2}[\xi,\eta] + \mathcal{O}(t^2)\Big) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\eta + \frac{t}{2}[\xi,\eta] - B(\xi,\eta) - B(\eta,\xi)\Big) + \mathcal{O}(t^2). \ \square$$

Теперь докажем теорему 2.1 следующим бескоординатным способом (см. [Arn4]).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть ξ, η — левоинвариантные векторные поля на группе G. Тогда поля $\{\xi,\eta\}$, $\nabla_\xi\eta$ и $\nabla_\eta\xi$ также левоинвариантны. Формула (2.5) в обозначениях (2.2) дает следующие значения полей в единице $\mathrm{Id} \in G$:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi\xi &= -2B_\xi, \quad \nabla_\xi\eta = \alpha - \delta, \\ \nabla_\eta\eta &= -2B_\eta, \quad \nabla_\eta\xi = -(\alpha+\delta). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Используем эти выражения и кососимметричность ∇, чтобы оценить члены в (1.4), и получаем

$$\begin{aligned} \langle -\nabla_\xi\nabla_\eta\xi, \eta\rangle &= \langle \nabla_\xi\eta, \nabla_\eta\xi\rangle = -\langle \alpha-\delta, \alpha+\delta\rangle, \\ \langle \nabla_\eta\nabla_\xi\xi, \eta\rangle &= \langle \nabla_\xi\xi, \nabla_\eta\eta\rangle = -4\langle B_\xi, B_\eta\rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Далее, используя (2.6), находим

$$\langle \nabla_{\{\xi,\eta\}}\xi, \eta\rangle = \langle \nabla_{[\xi,\eta]}\xi, \eta\rangle = \frac{1}{2}\langle [[\xi,\eta],\xi], \eta\rangle - \frac{1}{2}\langle B([\xi,\eta],\xi), \eta\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\langle B(\xi,[\xi,\eta]), \eta\rangle = -2\langle \alpha,\alpha\rangle + 2\langle \alpha,\beta\rangle. \tag{2.12}$$

Наконец, подставляя (2.10)–(2.12) в определение секционной кривизны (см. формулы (1.3)–(1.4)), получаем

$$C_{\xi\eta} = -\langle \alpha-\delta, \alpha+\delta\rangle - 4\langle B_\xi, B_\eta\rangle - 2\langle \alpha,\alpha\rangle + 2\langle \alpha,\beta\rangle,$$

что равносильно (2.1). $\square$

§ 3. Риманова геометрия группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов двумерного тора

3.1. Тензор кривизны группы диффеоморфизмов тора

Бескоординатные формулы для секционной кривизны можно применить к бесконечномерному случаю групп диффеоморфизмов. Числа, которые мы

получим, применив формулу для кривизны группы Ли к этим бесконечномерным группам, естественно назвать кривизнами групп диффеоморфизмов. Мы подробно опишем случай группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов двумерного тора и дадим обзор результатов для двумерной сферы (случай S^2 представляет особый интерес из-за его связи с атмосферными потоками и предсказаниями погоды), для n-мерного тора T^n (случай T^3 ответственен за анализ устойчивости ABC-потоков), для компактной двумерной поверхности и для любого плоского многообразия.

Начнем с двумерного тора T^2, снабженного евклидовой метрикой $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, где Γ — решетка (дискретная подгруппа) на плоскости, например, множество точек с целыми координатами.

Рассмотрим алгебру Ли бездивергентных векторных полей на торе с *однозначной функцией тока* (или однозначной функцией Гамильтона по отношению к стандартной симплектической структуре на T^2, заданной формой площади). Соответствующая группа $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ состоит из тех сохраняющих площадь диффеоморфизмов, изотопных тождественному, которые оставляют неподвижным «центр тяжести» тора.

Замечание 3.1. Подгруппа $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ является *вполне геодезическим подмногообразием* группы $S\mathrm{Diff}(T^2)$ всех сохраняющих площадь диффеоморфизмов, т. е. каждая геодезическая $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ является геодезической в объемлющей группе. Это следует из закона сохранения момента: если в начальный момент поле скоростей идеальной жидкости имеет однозначную функцию тока, то во все другие моменты времени функция тока также будет однозначной.

В более общем случае, группа *точных* сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов замкнутого риманова многообразия M является вполне геодезическим подмногообразием в группе *всех* сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов тогда и только тогда, когда это многообразие M есть скрученное произведение плоского тора на риманово многообразие с нулевым первым числом Бетти b_1, см. [HTV].

Правоинвариантная метрика на группе $S\mathrm{Diff}(T^2)$ определяется (удвоенной) кинетической энергией: ее значение в единице группы бездивергентных векторных полей $v \in S\mathrm{Vect}(T^2)$ равно $\langle v, v\rangle = \int\limits_{T^2} (v, v)\, d^2x$. Мы опишем секционные кривизны группы $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ по различным двумерным направлениям, проходящим через единицу группы. Кривизны $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ и $S\mathrm{Diff}(T^2)$ по этим направлениям одинаковы, так как подмногообразие $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ вполне геодезическое.

Бездивергентные векторные поля, образующие алгебру Ли $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ группы $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$, могут быть описаны своими функциями тока (т. е. функциями Гамильтона H) с нулевым средним ($v = -H_y\partial/\partial x + H_x\partial/\partial y$). Таким образом, в дальнейшем множество $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ будет отождествлено с пространством вещественнозначных функций на торе, имеющих нулевое среднее. Удобно описывать такие функции их коэффициентами Фурье и проводить вычисления в комплексной области.

Мы комплексифицируем нашу алгебру Ли, скалярное произведение $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, коммутатор $[\,.\,,\,.\,]$ и операцию B в алгебре, а также риманову связность и тензор кривизны Ω так, что все эти операции становятся (мульти)линейными в комплексном векторном пространстве комплексифицированной алгебры Ли.

Чтобы построить базис этого векторного пространства, мы через e_k (где k, называемое *волновым вектором*, является точкой евклидовой плоскости) обозначим функцию, величина которой в точке x плоскости равна $e^{i(k,x)}$.

Если скалярное произведение (k,x) кратно 2π для всех $x\in\Gamma$, получается функция на торе. Все такие векторы k принадлежат решетке $\Gamma^*\subset\mathbb{R}^2$, а функции $\{e_k\colon k\in\Gamma^*,\ k\neq 0\}$ образуют базис комплексифицированной алгебры Ли.

Теорема 3.2 (см. [Arn4, Arn16]). *Явные формулы для скалярного произведения, коммутатора, операции B, связности и кривизны правоинвариантной метрики на группе $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ имеют следующий вид:*

$$\langle e_k,e_l\rangle=0\quad \textit{для}\ \ k+l\neq 0, \tag{3.1a}$$

$$\langle e_k,e_{-k}\rangle=k^2S,$$

$$[e_k,e_l]=(k\times l)e_{k+l},\quad \textit{где}\ \ k\times l=k_1l_2-k_2l_1, \tag{3.1b}$$

$$B(e_k,e_l)=b_{k,l}e_{k+l},\quad \textit{где}\ \ b_{k,l}=(k\times l)\frac{k^2}{(k+l)}, \tag{3.1c}$$

$$\nabla_{e_k}e_l=d_{l,k+l}e_{k+l},\quad \textit{где}\ \ d_{u,v}=\frac{(v\times u)(u,v)}{v^2}, \tag{3.1d}$$

$$\Omega_{k,l,m,n}:=\langle\Omega(e_k,e_l)e_m,e_n\rangle=0,\quad \textit{если}\ \ k+l+m+n\neq 0, \tag{3.1e}$$

$$\Omega_{k,l,m,n}=(a_{ln}a_{km}-a_{lm}a_{kn})S,\quad \textit{если}\ \ k+l+m+n=0,$$

$$\textit{где}\ \ a_{uv}=\frac{(u\times v)^2}{|u+v|}. \tag{3.1f}$$

В этих формулах S — это площадь тора, а $u\times v$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на u и v. Скобки (u,v) обозначают евклидово скалярное произведение на плоскости, а угловые скобки обозначают скалярное произведение в алгебре Ли.

Отложим до следующего параграфа доказательство этой теоремы, а также приведенных ниже следствий. Обсуждаемые формулы позволяют вычислить секционную кривизну по любому двумерному направлению.

Пример 3.3. Рассмотрим параллельное синусоидальное стационарное течение жидкости, заданное функцией тока $\xi=\cos(k,x)=(e_k+e_{-k})/2$. Пусть η — любой другой вещественный вектор из алгебры $S_0\mathrm{Vect}(T^2)$ (т. е. $\eta=\sum x_le_l$ и $x_{-l}=\overline{x}_l$).

Теорема 3.4. *Кривизна группы $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ по любой двумерной плоскости, содержащей направление ξ, равна*

$$C_{\xi\eta}=-\frac{S}{4}\sum_l a_{kl}^2|x_l+x_{l+2k}|^2 \tag{3.2}$$

и, следовательно, неположительна.

Следствие 3.5. *Кривизна равна нулю только для тех двумерных плоскостей, которые состоят из параллельных течений того же направления, что и ξ, так что $[\xi, \eta] = 0$.*

Следствие 3.6. *Кривизна в плоскости, определенной функциями тока $\xi = \cos(k, x)$ и $\eta = \cos(l, x)$, есть*

$$C_{\xi\eta} = -(k^2 + l^2)\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta/4S, \tag{3.3}$$

где S — площадь тора, α — угол между k и l, а β — угол между $k + l$ и $k - l$.

Следствие 3.7. *Кривизна группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов тора $\{(x, y) \bmod 2\pi\}$ по двумерным направлениям, натянутым на поля скоростей $(\sin y, 0)$ и $(0, \sin x)$, равна $C = -1/(8\pi^2)$.*

Замечание 3.8. Эти вычисления показывают, что по многим направлениям секционная кривизна отрицательна, но по некоторым — положительна. Устойчивость геодезической определяется кривизнами по направлениям *всех* возможных двумерных плоскостей, проходящих через вектор скорости геодезической в каждой из этих точек (уравнение Якоби).

Любое течение жидкости на торе является геодезической нашей группы. Однако, вычисления заметно упрощаются для стационарного течения. В таком случае геодезическая является однопараметрической подгруппой нашей группы. Тогда кривизны по направлениям всех плоскостей, проходящих через вектор скорости геодезической в каждой из ее точек, равны кривизнам по соответствующим плоскостям, проходящим через вектор скорости этой геодезической в начальный момент времени. Чтобы доказать это, (правым сдвигом) перенесем плоскость в единичный элемент группы. Таким образом, устойчивость стационарного течения зависит только от кривизны по тем двумерным плоскостям в алгебре Ли, которые содержат поле скоростей этого стационарного течения.

3.2. Вычисления кривизн

Доказательство теоремы 3.2. Формула (3.1a) непосредственно следует из определения, а утверждение (3.1b) следует из формулы (2.6) для правоинвариантных векторных полей: $\{a, c\}|_e = -[a, c]_{\mathfrak{g}}$. Формула (3.1b) и определение B приводят к соотношению

$$\langle B(e_k, e_l), e_m\rangle = (l \times m)\langle e_{l+m}, e_k\rangle. \tag{3.4}$$

Применение формулы (3.1a) показывает, что $B(e_k, e_l)$ ортогонально к e_m при $k + l + m \neq 0$. Таким образом, $B(e_k, e_l) = b_{k,l}e_{k+l}$. Выражение (3.1c) следует из (3.1a) и (3.4) при $m = -k - l$.

Теперь из формул (3.1b), (3.1c) вместе с выражением (2.5) для ковариантной производной вытекает, что

$$\nabla_{e_k} e_l = \frac{1}{2}(k \times l)\Big(1 - \frac{k^2 - l^2}{(k + l)^2}\Big)e_{k+l}.$$

Отсюда после очевидного упрощения

$$\frac{1}{2}\Big(1-\frac{k^2-l^2}{(k+l)^2}\Big)=\frac{(l,k+l)}{(k+l)^2}$$

следует (3.1d).

Чтобы найти тензор кривизны (1.3), сначала вычислим из (3.1d)

$$\nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_m=d_{l+m,k+l+m}d_{m,l+m}e_{k+l+m},$$
$$\nabla_{[e_k,e_l]}e_m=(k\times l)d_{m,k+l+m}e_{k+l+m}.$$

С учетом (3.1a) отсюда следует, что $\Omega_{k,l,m,n}=0$ при $k+l+m+n\neq 0$ и

$$\Omega_{k,l,m,n}=(d_{k+m,n}d_{n,k+n}-d_{l+m,n}d_{m,l+n}+(k\times l)d_{m,n})n^2S$$

для $k+l+m+n=0$ (заметим, что $d_{u,v}$ симметрично по u и v согласно (3.1d)). Мы оставляем читателю приведение этого равенства к виду (3.1e). □

Доказательство теоремы 3.4. Чтобы получить формулу (3.2), подставим $\xi=\dfrac{e_k+e_{-k}}{2}$ и $\eta=\sum\limits_l x_le_l$ в

$$C_{\xi\eta}=\langle\Omega(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle=\frac{1}{4}\sum_l(\Omega_{k,l,k,-2k-l}x_lx_{-2k-l}+\Omega_{-k,l,-k,2k-l}x_lx_{2k-l}+$$
$$+\Omega_{k,l,-k,-l}x_lx_{-l}+\Omega_{-k,l,k,-l}x_lx_{-l}).$$

Учитывая соотношения (3.1e)–(3.1f) теоремы 3.2, получаем следующие коэффициенты этих квадратичных форм:

$$\Omega_{k,l,k,-2k-l}=\Omega_{-k,l,k,-l}=-a^2_{k,l}S,$$
$$\Omega_{k,l,-k,-l}=\Omega_{-k,l,-k,2k-l}=-a^2_{k,-l}S.$$

Тогда $C_{\xi\eta}$ для ортонормальных векторов ξ и η приобретает вид

$$\langle\Omega(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle=-\frac{S}{4}\sum_l[a^2_{k,l}(x_lx_{-2k-l}+x_lx_{-l})+a^2_{k,-l}(x_lx_{2k-l}+x_lx_{-l})]=$$
$$=-\frac{S}{4}\sum_l a^2_{k,l}(x_lx_{-2k-l}+x_lx_{-l}+x_{l+2k}x_{-l}+x_{l+2k}x_{-l-2k}).$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $a^2_{k,-l}=a^2_{k,l-2k}$ (см. (3.1f)). Наконец, поскольку $x_{-j}=\overline{x}_j$, получаем

$$C_{\xi\eta}=-\frac{S}{4}\sum_l a^2_{k,l}(x_l\overline{x}_{l+2k}+x_l\overline{x}_l+x_{l+2k}\overline{x}_l+x_{l+2k}\overline{x}_{l+2k}),$$

что равносильно (3.2). □

Доказательство следствия 3.6. По определению, секционная кривизна в плоскости, натянутой на пару ортогональных векторов ξ и η, равна

$$C_{\xi\eta}=\frac{\langle\Omega(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle}.$$

При нашем выборе ξ и η имеем $\langle\xi,\xi\rangle = k^2S/2$, $\langle\eta,\eta\rangle = l^2S/2$ и $x_l = x_{-l} = \frac{1}{2}$. Следовательно, из теоремы 3.4 и (3.1f) получаем

$$\langle\Omega(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle = -\frac{S}{8}(a_{k,l}^2 + a_{k,-l}^2).$$

Явное выражение (3.1f) дает тождество

$$a_{k,l}^2 + a_{k,-l}^2 = (k\times l)^4\Big(\frac{1}{h_+^2} + \frac{1}{h_-^2}\Big),$$

где $h_\pm := k \pm l$. Отсюда

$$a_{k,l}^2 + a_{k,-l}^2 = \frac{(k\times l)^2(h_+\times h_-)^2}{2h_+^2h_-^2}(k^2+l^2)$$

(здесь использованы очевидные соотношения $h_+^2 + h_-^2 = 2(k^2+l^2)$ и $h_+\times h_- = -2(k\times l)$). Соединив теперь все вместе и подставив $(k\times l)^2 = k^2l^2\sin^2\alpha$, $(h_+\times h_-)^2 = h_+^2h_-^2\sin^2\beta$, мы и получаем формулу (3.3) следствия 3.6. □

§ 4. Группы диффеоморфизмов и недостоверные прогнозы

4.1. Кривизна различных групп диффеоморфизмов

Для произвольного компактного n-мерного замкнутого риманова многообразия M Лукацкий [Luk5] вычислил кривизну группы диффеоморфизмов $S_0\mathrm{Diff}(M)$ (см. также [Smo2]). Мы отсылаем к [Luk3] за вычислениями тензора кривизны группы диффеоморфизмов любой компактной двумерной поверхности (см. случай двумерной сферы S^2, важный для метеорологических приложений, в [Luk1, Yo]) и к [Luk4] за тем же для локально плоского многообразия (n-мерный тор разобран в [Luk2], см. также явные формулы для T^3 в [KNH]).

Риманова геометрия и кривизна групп полупрямого произведения, ответственных за идеальную магнитную гидродинамику, рассматривались в [Ono]. В [Mis3] обсуждается кривизна группы всех (не только сохраняющих объем) диффеоморфизмов окружности. Эта группа, также как ее расширение, называемое *группой Вирасоро*, является конфигурационным пространством уравнения Кортевега–де Фриза (см. гл. VI, п. 1.1). Геометрия правоинвариантных метрик и геодезические на группах симплектоморфизмов изучались в [Don].

Другой способ исследования римановой геометрии группы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, состоит во вложении ее как подмногообразия в группу всех диффеоморфизмов многообразия и затем изучении внешней геометрии соответствующего подмногообразия (см. § 5 ниже).

Помня о приложениях к прогнозам погоды, исследуем сначала группу $S\mathrm{Diff}(S^2)$ сохраняющих площадь диффеоморфизмов стандартной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \{x,y,z\}$. Рассмотрим следующие два стационарных течения

на S^2: поле вращения $u = (-y, x, 0)$ и нереалистичное «пассатное течение» $v = z(-y, x, 0)$, рис. 49 (реальное пассатное течение имеет одинаковые направления в северной и южной полусферах).

В [Luk1] доказано, что секционная кривизна C_{uw} по всем двумерным плоскостям, содержащим u, является неотрицательной для любого поля $w \in S\mathrm{Vect}(S^2)$, в то время как для двумерных плоскостей, содержащих поле v, кривизна C_{vw} отрицательна для «большинства» направлений w. Заметим, что нереалистичное пассатное течение v является «сферическим аналогом» параллельного синусоидального течения на торе $\xi = (\sin y, 0)$ (см. утверждения 3.4–3.7 выше).

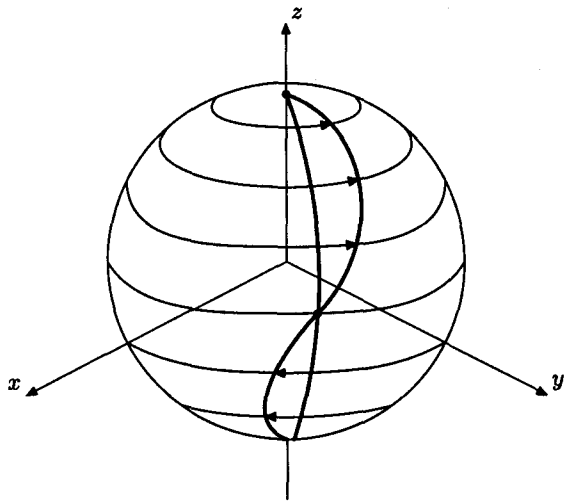


Рис. 49. Профиль скоростей и пассатное течение на сфере

В случае сохраняющих объем диффеоморфизмов трехмерной области $M \in \mathbb{R}^3$ евклидова пространства (наиболее важном для гидродинамики) Рушон получил следующую информацию о секционных кривизнах группы диффеоморфизмов.

Определение 4.1 (см. [Rou2]). Бездивергентное векторное поле на M называется *твердым вращением*, если оно равно полю скоростей вращения твердого тела с постоянной угловой скоростью вокруг фиксированной оси (в частности, его вихрь постоянен). Такого рода движение жидкости возможно тогда и только тогда, когда область M допускает ось симметрии.

Теорема 4.2 (см. [Rou2]). *Если поле скоростей $v(t)$ течения идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей область M, является твердым вращением с постоянным вихрем, тогда секционная кривизна по каждому двумерному направлению в $S\mathrm{Vect}(M)$, содержащему v, неотрицательна.*

Если же скорость $v(t)$ течения идеальной жидкости не является твердым вращением, тогда для каждого момента времени t существуют двумерные сечения, содержащие $v(t)$ (скорость вдоль геодезической), где секционная кривизна строго отрицательна.

Результат о неотрицательности всех секционных кривизн справедлив также для вращений сфер произвольных размерностей [Mis1].

Замечание 4.3. Можно ожидать, что отрицательная кривизна группы диффеоморфизмов вызывает экспоненциальную неустойчивость геодезических (т. е. течений идеальной жидкости) таким же образом, как и для конечномерных групп Ли (см., например, компьютерные расчеты в [KHZ]). Например, для n-мерного компактного многообразия с неположительными секционными кривизнами уравнение Якоби вдоль движений жидкости с нулевой функцией давления всегда имеет неограниченное решение [Mis1]. Отметим, однако, что и в случае твердого вращения двумерной сферы, и в случае плоско-параллельного течения Кюета на цилиндре, все поля Якоби растут не быстрее, чем линейно [Pre], в то время как все секционные кривизны в плоскостях, содержащих эти потоки, неотрицательны в первом случае и неположительны во втором.

Подчеркнем, что обсуждаемая здесь неустойчивость является экспоненциальной неустойчивостью (называемой также *лагранжевой неустойчивостью*) *движения жидкости*, а не ее поля скоростей (сравните с гл. II, § 4). Приведенная теорема показывает, что с лагранжевой точки зрения *все решения* уравнения Эйлера в $M \subset \mathbb{R}^3$ (за исключением твердого вращения) являются неустойчивыми.

С другой стороны, можно ожидать, что стационарное течение может быть устойчивым по Ляпунову решением уравнения Эйлера, в то время как соответствующее движение жидкости является экспоненциально неустойчивым. Действительно, малое возмущение поля скоростей может вызвать экспоненциальную расходимость частиц жидкости. Тогда даже для хорошо предсказуемого поля скоростей (в случае устойчивого решения уравнения Эйлера) мы не можем предсказать движения масс жидкости без большой потери точности.

Недавно, однако, С. Престон [Pre] доказал, что в идеальной двумерной гидродинамике наблюдается следующая альтернатива: либо экспоненциальная, либо полиномиальная неустойчивость, но одновременно и в лагранжевой, и в эйлеровой картине. Другими словами, для типичного двумерного стационарного потока, если вариации поля скоростей растут не быстрее, чем полиномиально, то и частицы жидкости разбегаются не быстрее, чем полиномиально.

Замечание 4.4. Формулы для кривизны групп диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(M)$ существенно упрощаются для локально плоского (или евклидова) многообразия M, т. е. для риманова многообразия, допускающего карты, в которых риманова метрика становится евклидовой. Обозначим через $p\colon \mathrm{Vect}(M) \to S\mathrm{Vect}(M)$ ортогональную проекцию пространства всех гладких векторных полей на их бездивергентные части, где ортогональность рассматривается по отношению к L^2-скалярному произведению на $\mathrm{Vect}(M)$. Пусть $q = \mathrm{Id} - p\colon \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Grad}(M)$ — ортогональная проекция на пространство градиентных векторных полей.

Рассмотрим локально евклидовы координаты $\{x_i\}$ на M и определим операцию, сопоставляющую паре векторных полей u и v ковариантную

производную v вдоль u:

$$\nabla_u v := \sum_i \Big(\sum_j u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Теорема 4.5 (см. [Luk4]). *Пусть M — локально евклидово многообразие. Тогда секционная кривизна C_{uv} для ортонормальной пары бездивергентных векторных полей $u, v \in S\mathrm{Vect}(M)$ равна*

$$C_{uv} = -\langle q(\nabla_u v), q(\nabla_u v) \rangle + \langle q(\nabla_u u), (\nabla_v v) \rangle.$$

Следствие 4.6 (см. [Luk4]). *Если векторное поле $\nabla_u u$ имеет нулевую дивергенцию (т. е. $q(\nabla_u u) \equiv 0$, например, u — простая гармоника на T^n), тогда кривизна в плоскости содержащей u неположительна:*

$$C_{uv} = -\langle q(\nabla_u v), q(\nabla_u v) \rangle.$$

Замечание 4.7. Естественно описать тензор кривизны для трехмерного тора T^3 в базисе $\{e_k\}$ пространства $S_0\mathrm{Diff}(T^3)$, где $e_k = e^{i(k,x)}$, $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Произвольное поле скоростей $u(x)$ представляется как $u(x) = \sum_k u_k e_k$, где компоненты Фурье удовлетворяют условиям $(k, u_k) = 0$ (нулевая дивергенция) и $u_{-k} = \overline{u}_k$ (условие вещественности). Тогда, согласно [NHK], имеем

$$\langle \Omega(u_k e_k, v_l e_l) w_m e_m, z_n e_n \rangle = \\ = (2\pi)^3 \Big(\frac{(u_k, m)(w_m, k)}{|k+m|} \frac{(v_l, n)(z_n, l)}{|l+n|} - \frac{(v_l, m)(w_m, l)}{|l+m|} \frac{(u_k, n)(z_n, k)}{|n+k|} \Big).$$

Все секционные кривизны в трехмерном подпространстве ABC-течений в $S_0\mathrm{Diff}(T^3)$ (см. гл. II, § 1) равны одной и той же отрицательной константе, т. е. кривизны не зависят от A, B и C [KNH].

Фиксируем бездивергентное векторное поле $v \in S\mathrm{Vect}(T^k)$ на k-мерном плоском торе T^k. Среднее от секционных кривизн всех двумерных касательных плоскостей в $S\mathrm{Vect}(T^k)$, содержащих направление v, характеризуется бесконечномерным аналогом нормализованной кривизны Риччи.

Определение 4.8. Пусть Δ является оператором Лапласа–Бельтрами на векторных полях из $S\mathrm{Vect}(T^k)$, а $\{e_i : i = 1, 2, \ldots\}$ — его ортонормированный упорядоченный $(-\lambda_i \leqslant -\lambda_{i+1})$ собственный базис $(\Delta e_i = \lambda_i e_i)$. Определим *нормализованную кривизну Риччи* в направлении v как

$$\mathrm{Ric}(v) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_{v e_i}.$$

Нормализованная кривизна Риччи данного направления на конечномерном многообразии есть среднее от секционных кривизн всех двумерных касательных плоскостей, содержащих это направление, см. (1.13). Она отличается от классической кривизны Риччи множителем (*размерность многообразия*) -1 и определена, когда размерность стремится к бесконечности.

Теорема 4.9 (см. [Luk2]). *Для бездивергентного векторного поля* $v \in \in S\mathrm{Vect}(T^k)$ *на плоском торе* T^k

$$\mathrm{Ric}(v) = -\frac{k+1}{\mathrm{vol}(T^k)(k-1)k(k+2)} \|\sqrt{-\Delta}v\|^2_{L^2(T^k)},$$

где $\sqrt{-\Delta}$ — *«положительный» квадратный корень из минус оператора Лапласа на векторных полях.*

4.2. Недостоверность долгосрочных предсказаний погоды

Для применения проведенных вычислений кривизны сделаем следующие упрощающие предположения: атмосфера является двумерной однородной несжимаемой жидкостью на *двумерном торе*, а движения атмосферы аппроксимируются «пассатным течением», параллельным экватору и имеющим синусоидальный профиль скорости.

Хотя *сфера* является лучшей аппроксимацией для поверхности Земли, чем тор, вычисления, выполненные для «пассатного течения» над S^2 в [Luk1], показывают, что порядок величины кривизны одинаков для групп $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ и $S\mathrm{Diff}(S^2)$. Поэтому выводы о характерной длине пути и неустойчивости течений одинаковы в обоих случаях.

Чтобы оценить кривизну, рассмотрим «пассатное течение» с полем скоростей $\xi(x,y) = (\sin y, 0)$ на торе $T^2 = \{(x,y) \bmod 2\pi\}$. Теорема 3.4 показывает, что кривизна группы $S_0\mathrm{Diff}(T^2)$ в плоскостях, содержащих ξ (с волновым вектором $k = (0,1)$), меняется в пределах $-2/S < C < 0$, где $S = 4\pi^2$ является площадью тора. Однако нижний предел получен довольно грубо. Чтобы произвести ориентировочную оценку длины характерного пути, мы возьмем четверть этого предела в качестве величины «средней кривизны» $C_0 = -1/(2S)$. Существует большое число двумерных направлений с кривизной примерно такой величины.

Остановившись на этой величине C_0 для кривизны, получаем длину характерного пути $s = 1/\sqrt{-C_0} = \sqrt{2S}$ (см. замечание 1.11). (Напомним, что длина характерного пути является длиной среднего пути, на котором малая ошибка в начальных условиях увеличивается в e раз.) Теперь заметим, что скорость движения по группе $S\mathrm{Diff}(T^2)$, соответствующая «пассатному течению» ξ, равна $\|\xi\|_{L^2(T^2)} = \sqrt{S/2}$ (так как средняя величина квадрата синуса равна $1/2$). Следовательно, время, требуемое нашему течению для того, чтобы пройти длину характерного пути, равно 2.

Самые быстрые частицы жидкости проходят за это время расстояние 2, равное $1/\pi$ части своей орбиты вокруг тора. Таким образом, для нашей оценки средней кривизны ошибка вырастет в $e^\pi \approx 20$ раз для полного периода самой быстрой частицы. Выбирая 100 км/час в качестве максимальной скорости пассатного течения, мы получаем 400 часов для времени орбиты, т. е. менее чем три недели.

Таким образом, если в начальный момент состояние погоды было известно с малой ошибкой ε, то порядок абсолютной величины ошибки предсказания

после n месяцев будет

$$10^{kn}\varepsilon, \quad \text{где } k = \frac{30 \cdot 24}{400} \log_{10}(e^{\pi}) \approx 2{,}5.$$

Например, чтобы предсказать погоду на два месяца вперед, мы должны знать ее состояние в начальный момент с точностью, которая на пять знаков больше, чем точность предсказания. На практике это означает, что сколько-нибудь надежный прогноз погоды на такой длительный промежуток времени невозможен.

§ 5. Внешняя геометрия группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы

На группу $S\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов риманова многообразия M^n, сохраняющих объемы, можно смотреть как на подгруппу бóльшей группы $\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов M (ср. [E-M]). Также как и ее подгруппа, бóльшая группа снабжается слабой римановой метрикой (которая, однако, уже не является правоинвариантной):

$$\langle g_*\xi, g_*\eta\rangle = \int\limits_M (\xi,\eta)_{g(x)}\,\mu(x), \tag{5.1}$$

где $\xi,\eta \in \mathrm{Vect}(M)$, $(\xi,\eta)_a$ — скалярное произведение ξ и η в метрике $(\,.\,,\,.\,)$ на M в точке a, а $g \in \mathrm{Diff}(M)$.

Точка зрения на группу сохраняющих объемы диффеоморфизмов как на подгруппу группы всех диффеоморфизмов многообразия оказалась весьма плодотворной для различных приложений. В некотором смысле эта группа «всегда более плоская», чем ее подгруппа. Источником таких упрощений является следующий факт.

Теорема 5.1 (см. [Mis1]). *Компоненты тензора кривизны Ω для большей группы $\mathrm{Diff}(M)$ являются «средними величинами» тензора кривизны для самого риманова многообразия M:*

$$\langle\Omega(u,v)w,z\rangle = \int\limits_M \left\langle \Omega_x^M(u(x),v(x))w(x),z(x)\right\rangle_x \mu(x),$$

где Ω_x^M — тензор кривизны M в $x \in M$, форма объема μ определяется метрикой, а $u,v,w,z \in \mathrm{Vect}(M)$.

Ниже мы построим (следуя [Mis1, Shn4, Tod]) вторую фундаментальную форму вложения «искривленной» подгруппы $S\mathrm{Diff}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$ в «более плоскую» объемлющую группу. Несмотря на свою неканоничность, это вложение доставляет удобное упрощение в вычислениях кривизны.

Пусть для простоты многообразие M является плоским n-мерным тором T^n. Представим диффеоморфизм $g \in \mathrm{Diff}(T^n)$, близкий к тождественному, в виде $g(x) = x + \xi(x)$.

Предложение 5.2. *В координатах $\{\xi\}$ некоторая малая C^1-окрестность единицы Id в группе $\mathrm{Diff}(T^n)$, снабженной метрикой (5.1), изометрично вложена в гильбертово пространство $\mathbb{H} = \{\xi \in L^2(T^n,\mathbb{R}^n)\}$.*

Предложение 5.2 доказывается прямым вычислением.

Допуская некоторую вольность, обозначим через $\mathbb{H}$ (пред)гильбертово пространство гладких отображений из тора T^n в $\mathbb{R}^n$, снабженных L^2-скалярным произведением. Тогда окрестность единицы группы $\mathrm{Diff}(T^n)$ изометрична окрестности начала координат в $\mathbb{H}$. Группу $S\mathrm{Diff}(T^n)$ диффеоморфизмов, сохраняющих объем T^n, представим как подмногообразие $\mathcal{D}$ в $\mathbb{H}$ (рис. 50)

$$\mathcal{D} = S\mathrm{Diff}(T^n) = \left\{\xi \in L^2(T^n, \mathbb{R}^n)\colon \det\left[\mathrm{Id} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \equiv 1\right\} \subset \mathbb{H}.$$

Определение 5.3. *Вторая фундаментальная форма* L (в $0 \in \mathcal{D}$) вложения $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}$ является квадратичным отображением $L\colon T_0\mathcal{D} \to T_0^\perp\mathcal{D}$ из касательного пространства $T_0\mathcal{D} \subset \mathbb{H}$ в его ортогональное дополнение $T_0^\perp\mathcal{D} \subset \mathbb{H}$. На векторе $v \in T_0\mathcal{D}$ величина второй фундаментальной формы $L(v, v)$ равна ускорению точки, движущейся по инерции вдоль $\mathcal{D}$ с начальной скоростью v (см. [K-N]).

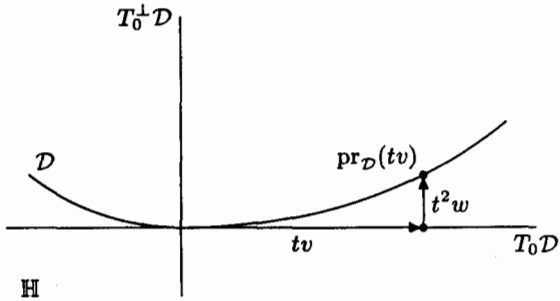


Рис. 50. Вложение сохраняющих объем диффеоморфизмов $\mathcal{D} = S\mathrm{Diff}(M)$ в группу всех диффеоморфизмов $\mathbb{H} = \mathrm{Diff}(M)$

Другими словами, L измеряет «расстояние» в $\mathbb{H}$ (а точнее, его вторую производную) между точкой vt, движущейся в касательном пространстве $T_0\mathcal{D}$ с постоянной скоростью v, и ортогональной проекцией $\mathrm{pr}_{\mathcal{D}}$ этой точки на $\mathcal{D}$:

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{D}}(tv) = tv + \frac{t^2}{2}L(v, v) + O(t^3) \quad \text{при } t \to 0. \tag{5.2}$$

Пространства $T_0\mathcal{D}$ и $T_0^\perp\mathcal{D}$ описываются следующим образом:

$$T_0\mathcal{D} = S\mathrm{Vect}(T^n) = \{v \in \mathrm{Vect}(T^n)\colon \operatorname{div} v = 0\},$$
$$T_0^\perp\mathcal{D} = \mathrm{Grad}(T^n) = \{w \in \mathrm{Vect}(T^n)\colon w = \nabla p, \text{ для некоторого } p \in C^\infty(T^n)\}$$

(мы включили в $T_0\mathcal{D}$ поля нулевой дивергенции, перемещающие центр тяжести T^n, и, следовательно, $T_0^\perp\mathcal{D}$ состоит из градиентов всех однозначных функций).

Заметим, что для векторного поля $v \in S\mathrm{Vect}(T^n)$ преобразование $x \mapsto$ $\mapsto x + tv(x)$ означает, что каждая точка $x \in T^n$ движется равномерно

со скоростью $v(x)$ вдоль прямой линии, проходящей через x. Такие преобразования являются диффеоморфизмами для гладкого $v(x)$ и достаточно малого $t > 0$.

Для демонстрации метода ограничимся случаем $n = 2$ и дадим новое доказательство теоремы 3.4 о кривизне $S\mathrm{Diff}_0(T^2)$ по двумерным направлениям, содержащим синусоидальное течение ξ на торе.

Доказательство теоремы 3.4. Векторное поле $v \in S\mathrm{Vect}(T^2)$ задается соответствующей (однозначной) функцией тока (или гамильтонианом) ψ: $v = \mathrm{sgrad}\,\psi$, т. е. $v_1 = -\partial\psi/\partial x_2$ и $v_2 = \partial\psi/\partial x_1$.

Теорема 5.4. *Значение второй фундаментальной формы L на векторном поле v равно*

$$L(v, v) = -2\nabla(\Delta^{-1}(\det[\mathrm{Hess}\,\psi])), \tag{5.3}$$

где $\mathrm{Hess}\,\psi$ *— матрица гессиана функции тока ψ поля v, а Δ^{-1} — оператор Грина для оператора Лапласа Δ в классе функций с нулевым средним на T^2.*

Доказательство теоремы 5.4. Следующее очевидное соотношение показывает, насколько далеко преобразование $\mathrm{Id} + tv$ отстоит от $\mathcal{D}$ (т. е. от множества преобразований, сохраняющих объемы):

$$\det\left[\mathrm{Id} + t\frac{\partial v}{\partial x}\right] = 1 + t\,\mathrm{div}\,v + t^2(v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1}) = 1 + t^2(v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1}),$$

где $v_{i,j} := \partial v_i/\partial x_j$, а последнее равенство выполняется благодаря тому, что $\mathrm{div}\,v = 0$. Преобразование $\mathrm{Id} + tv$ не принадлежит $\mathcal{D}$, а изменяет стандартный элемент объема в T^2 на величину второго порядка малости по t.

Подправим tv, добавив к нему некоторое векторное поле $t^2 w \in T_0^{\perp}\mathcal{D}$ так, чтобы преобразование $\mathrm{Id} + tv$ стало сохраняющим объемы. Заметим, что значение второй фундаментальной формы (см. (5.2)) на векторе v равно $L(v, v) = 2w$, где $w \in T_0^{\perp}\mathcal{D}$ определяется из условия, что преобразование $x \mapsto x + tv + t^2 w$ сохраняет объем по модулю $O(t^3)$.

Определяющее соотношение $\mathrm{div}\,w = -(v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1})$ на поле w немедленно следует из разложения

$$\det\left(\mathrm{Id} + t\frac{\partial v}{\partial x} + t^2\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 1 + t^2(v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1} + \mathrm{div}\,w) + O(t^3).$$

По определению $T_0^{\perp}\mathcal{D}$ векторное поле w градиентное, $w = \nabla\varphi$, а следовательно, $\mathrm{div}\,w = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$, и

$$L(v, v) = 2w = -2\nabla(\Delta^{-1}(v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1})).$$

Введение функции тока ψ поля v преобразует эту формулу к искомому виду (5.3). □

Симметричная фундаментальная форма $L(u, v)$ может быть получена из квадратичной формы $L(v, v)$ поляризацией

$$L(u, v) = (L(u + v, u + v) - L(u, u) - L(v, v))/2.$$

Наконец, секционная кривизна C_{uv} группы $\mathcal{D}$ по двумерному направлению, натянутому на ортонормальные векторы u и v, дается формулой Гаусса–Кодацци (см. [K-N], предложение VII.4.5)

$$C_{uv} = \langle L(u,u), L(v,v)\rangle - \langle L(u,v), L(u,v)\rangle,$$

где $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ (ср. также с теоремой 4.5 выше). Для неортонормированных векторов надо нормализовать кривизну согласно формуле (1.5).

Пример 5.5. Вычислим (используя вторую фундаментальную форму) секционную кривизну в направлении, натянутом на векторные поля u и v с функциями тока $\varphi = \cos ay$ и $\psi = \cos bx$ (с волновыми векторами из следствия 3.6, равными $k = (0,a)$ и $\ell = (b,0)$).

Легко также получить, что $\det[\operatorname{Hess}\varphi] = \det[\operatorname{Hess}\psi] \equiv 0$, в то время как $\det[\operatorname{Hess}(\varphi+\psi)] = a^2b^2\cos ay\cos bx$. Применение Δ^{-1} эквивалентно умножению этой функции на $-1/(a^2+b^2)$. Переходя к градиенту, находим, что $L(u,v)$ является векторным полем

$$L(u,v) = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Big((b\sin bx\cos ay)\frac{\partial}{\partial x} + (a\cos bx\sin ay)\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

при этом $L(u,u)$ и $L(v,v)$ обращаются в нуль. Заметим также, что $\langle u,u\rangle = a^2S/2$, $\langle v,v\rangle = b^2S/2$, где S — площадь тора. Наконец, оценивая L^2-норму векторного поля $L(u,v)$ на торе, мы приходим к следующей формуле для секционной кривизны:

$$C_{uv} = -\frac{\langle L(u,v), L(u,v)\rangle}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle} = -\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)S},$$

которая совпадает с формулой (3.3).

Мы оставляем читателю проверить, что подстановка векторных полей u и v с функциями тока $\xi = \dfrac{e_k + e_{-k}}{2}$ и $\eta = \sum x_\ell e_\ell$ (где $x_{-\ell} = \overline{x}_\ell$) в полученную выше формулу кривизны дает другое доказательство теоремы 3.4 в полной общности. □

Замечание 5.6. Бао и Ратью [B-R] изучили *вполне геодезические* (или *асимптотические*) направления на римановом подмногообразии $S\mathrm{Diff}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$, т. е. такие направления в касательных пространствах $T_gS\mathrm{Diff}(M)$ (в бездивергентных векторных полях на M), вдоль которых вторая фундаментальная форма L для $S\mathrm{Diff}(M)$ относительно $\mathrm{Diff}(M)$ обращается в нуль. Для произвольного многообразия M^n они получили явное описание таких направлений $g_*v \in T_gS\mathrm{Diff}(M)$ в виде нелинейного дифференциального уравнения первого порядка на v (см. в [KhM2] описание асимптотических направлений на произвольной подгруппе в $\mathrm{Diff}(M)$).

Для двумерного случая это условие асимптотичности направлений записывается как следующее уравнение на функцию тока. Пусть для простоты $\partial M = \varnothing$ и $H^1(M) = 0$.

Теорема 5.7 (см. [B-R]). *Для двумерного риманова многообразия M бездивергентное векторное поле $g_*v \in T_gS\mathrm{Diff}(M)$ является вполне геодези-*

ческим направлением на $S\mathrm{Diff}(M)$ тогда и только тогда, когда функция тока ψ поля v удовлетворяет вырожденному уравнению Монжа–Ампера

$$\det[\mathrm{Hess}\,\psi] = K \cdot m\|\nabla\psi\|^2/2,$$

где m — детерминант метрики на M в некоторых координатах $\{x_i\}$, Hess — гессиан функции ψ в этих координатах, а K — функция гауссовой кривизны на M.

В статье [KhM2] доказано, что для поверхности произвольной, но нигде не нулевой кривизны группа $S\mathrm{Diff}(M)$ не имеет асимптотических направлений, т. е. это уравнение Монжа–Ампера не имеет решений (см. также [BLR], где описываются все многообразия M, для которых асимптотические направления являются гармоническими векторными полями).

Похожие ограничения на направления на $S\mathrm{Diff}(M^2)$ естественно возникают в дискретной версии уравнения Эйлера несжимаемой жидкости [MVe]. Решение дискретизованного уравнения Эйлера является рекурсивной последовательностью диффеоморфизмов. Уравнение Монжа–Ампера является ограничением на начальные условия, которое и обеспечивает сохранение элемента площади на M^2 всеми диффеоморфизмами последовательности.

Уравнение Монжа–Ампера также возникает в задаче Монжа–Канторовича об оптимальном переносе массы (см. обсуждение связи этой задачи с описанием асимптотических направлений в [KhM2]).

Замечание 5.8. Рассмотрим отношение эквивалентности на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$, при котором два диффеоморфизма принадлежат к одному и тому же классу, если они отличаются на преобразование, сохраняющее объемы. Мы получим расслоение $\mathrm{Diff}(M)$ над пространством плотностей, т. е. пространством положительных функций на M, со слоем, изоморфным множеству сохраняющих объемы диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(M)$. Рассмотрим одно из следующих многообразий: n-мерную сферу S^n, пространство Лобачевского Λ^n или евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Согласно С. М. Гусейн-Заде не существует сечения этого $S\mathrm{Diff}(M)$-расслоения над пространством плотностей, инвариантного по отношению к движениям пространства M^n. Однако существует единственная связность на этом расслоении, инвариантная по отношению к движениям на M^n. Параллельный перенос в этой связности, по существу, описан в доказательстве теоремы Мозера (ср. лемму 3.5 гл. III). Случай двумерной сферы имеет интересные приложения в картографии.

§ 6. Сопряженные точки в группе диффеоморфизмов

Хотя по «большинству» двумерных направлений секционные кривизны группы диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(T^2)$ отрицательны, по некоторым направлениям кривизна положительна.

Пример 6.1 (см. [Arn4]). В алгебре $S\mathrm{Vect}(T^2)$ всех бездивергентных векторных полей на торе $T^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$ рассмотрим плоскость,

натянутую на поля с функциями тока $\xi = \cos(3px - y) + \cos(3px + 2y)$ и $\eta = \cos(px + y) + \cos(px - 2y)$. Тогда для секционной кривизны имеем

$$C_{\xi\eta} = \frac{\langle \Omega(\xi,\eta)\xi, \eta\rangle}{\langle \xi,\xi\rangle\langle \eta,\eta\rangle} \to \frac{9}{8\pi^2} > 0 \quad \text{при } p \to \infty.$$

Естественно предположить (по аналогии с конечномерным случаем), что положительность кривизны связана с существованием сопряженных точек на группе $S\mathrm{Diff}(T^2)$.

Определение 6.2. *Сопряженной точкой* к начальной точке $\gamma(0)$ вдоль геодезической линии $\gamma(t)$, $t \in [0,\infty)$ (на римановом многообразии M) называется точка, где геодезическая линия пересекается с бесконечно близкой геодезической, начинающейся в той же точке $\gamma(0)$. Сопряженные точки упорядочены вдоль геодезической, а первой сопряженной точкой является место, где геодезическая линия перестает быть локальным минимумом функционала длины.

Теорема 6.3 (см. [Mis2]). *На геодезической, выходящей из единицы группы $S\mathrm{Diff}(T^2)$ со скоростью $v = \mathrm{sgrad}\,\varphi$, определяемой функцией тока $\varphi = \cos 6x \cos 2y$, существуют сопряженные точки.*

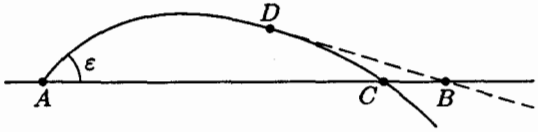


Рис. 51. Геодезическая перестает быть глобальным минимумом длины после первой сопряженной точки

Отрезок геодезической линии уже не является кратчайшей кривой, связывающей ее концы, если отрезок содержит некоторую внутреннюю точку, сопряженную начальной точке, рис. 51. Действительно, разность длин отрезка геодезической кривой и *любой* C^1 *ε-близкой кривой*, связывающей те же концевые точки, имеет порядок ε^2 (геодезическая является экстремалью). Длина *геодезической*, ε-близкой к начальной и связывающей начальную точку A с ее сопряженной точкой C, отличается от длины начальной геодезической между A и C на величину более высокого порядка, ε^3. Разность между BD и $BC + CD$ имеет порядок ε^2. Следовательно, ADB короче, чем ACB.

Если отрезок геодезической содержит k внутренних точек, сопряженных с начальной точкой, то квадратичная форма второй вариации длины имеет k отрицательных квадратов.

Замечание 6.4 (см. [Mis2]). Сопряженные точки могут быть найдены на группе $S\mathrm{Diff}(T^n)$, где T^n — это плоский тор произвольной размерности n (это простое следствие из вышеприведенного двумерного примера).

Другие примеры даются геодезическими на группе сохраняющих площади диффеоморфизмов для поверхности положительной кривизны (например, однородное вращение стандартной двумерной сферы, см. п. 4.1).

С другой стороны, те геодезические в $S\mathrm{Diff}(M)$, которые являются также геодезическими в $\mathrm{Diff}(M)$, не имеют сопряженных точек, если M — риманово многообразие неположительной секционной кривизны [Mis1]. Такие геодезические имеют асимптотические направления на $S\mathrm{Diff}(M)$ и соответствуют решениям уравнения Эйлера на M с постоянными функциями давления. Напротив, геодезические в $\mathrm{Diff}(M)$, нормальные к подмногообразию $S\mathrm{Diff}(M)$, являются потенциальными решениями уравнения Бюргерса, а сопряженные точки на них соответствуют рождению ударных волн [KhM3].

Замечание 6.5. Неизвестно, конечен ли индекс Морса (произвольного отрезка) геодезической линии, соответствующей гладкому стационарному течению на произвольном многообразии произвольной размерности. Было бы интересно узнать, могут ли сопряженные точки в этой ситуации накапливаться. Заметим, что существование малого отрезка вблизи начальной точки, который свободен от сопряженных точек, следует из невырожденности экспоненциального отображения в начальной точке и в ее окрестности. Для течения на произвольной двумерной поверхности накапливание не происходит также и для произвольного отрезка геодезической, см. [EbM, EbMP]: геодезическое экспоненциальное отображение соответствующей группы диффеоморфизмов $S\mathrm{Diff}(M^2)$ оказывается фредгольмовым индекса нуль. С другой стороны, для трехмерного многообразия геодезическое экспоненциальное отображение на $S\mathrm{Diff}(M^3)$ может не быть фредгольмовым. Более того, сопряженные точки вдоль некоторых геодезических могут оказаться бесконечного порядка и плотны на целом интервале [Pre2]. Интересно также, каков кратчайший путь к какой-нибудь точке на геодезической, отделенной от начальной точки сопряженной. (Можно надеяться, что полная картина в этой классической ситуации не портится патологией отсутствия кратчайшего пути между специальными диффеоморфизмами, обнаруженной Шнирельманом в [Shn1], см. п. 7.4.)

§ 7. Вокруг конечности диаметра группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы[1]

Рассмотрим сохраняющий объемы диффеоморфизм ограниченной области. Чтобы достичь положения, предписываемого диффеоморфизмом, каждая частица жидкости движется вдоль некоторого пути в этой области. Расстояние между этим диффеоморфизмом и тождественным — это усредненная характеристика длин путей всех частиц.

Оказывается, что диаметр группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного шара, конечен, в то время как для двумерной области — бесконечен. Причина состоит в том, что в трех (и более) измерениях у частиц достаточно места для того, чтобы переместиться в конечное положение, не столкнувшись друг с другом. Напротив, движение частиц на плоскости может потребовать их обязательного вращения друг относительно друга. Несмотря

[1]Этот параграф написан А. Шнирельманом.

на ограниченность области, такие «заплетения» делают пути частиц с необходимостью длинными (а следовательно, и расстояние между начальной и конечной позициями каждой частицы — большим).

В этом параграфе мы опишем некоторые важные свойства группы $\mathcal{D}(M) := S\mathrm{Diff}(M)$, сохраняющих объемы диффеоморфизмов, как метрического пространства, а также динамические следствия этих свойств.

7.1. Связь внутренней и внешней геометрии группы диффеоморфизмов

Определение 7.1. Рассмотрим риманово многообразие M^n с элементом объема dx. Введем *метрику* на группе $\mathcal{D}(M) = S\mathrm{Diff}(M^n)$. Любому пути g_t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, на группе $\mathcal{D}(M)$ поставим в соответствие его *длину*:

$$\ell\{g_t\}_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \|\dot{g}_t\|_{L^2(M)}\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_{M^n} \left\| \frac{\partial g_t(x)}{\partial t} \right\|^2 dx \right)^{1/2} dt. \tag{7.1}$$

Для двух конфигураций жидкости $f, h \in \mathcal{D}(M)$ определим расстояние между ними на $\mathcal{D}(M)$ как нижнюю грань длин всех путей, соединяющих f и h

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}(f,h) = \inf_{\substack{\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M) \\ g_0 = f,\, g_1 = h}} \ell\{g_t\}_0^1.$$

Это определение превращает $\mathcal{D}(M)$ в *метрическое пространство*. *Диаметр* группы $\mathcal{D}(M)$ — это верхняя грань расстояний между ее элементами:

$$\mathrm{diam}(\mathcal{D}(M)) = \sup_{f,h \in \mathcal{D}(M)} \mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}(f,h).$$

Метрика на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов $\mathcal{D}(M)$, определенная здесь, совпадает с правоинвариантной метрикой на этой группе, определяемой в *единице* как *кинетическая* энергия векторных полей (сравните формулу (7.1) с примером гл. I, п. 1.3).

Начнем со следующих трех тесно связанных между собой задач.

А. Задача о диаметре. Бесконечен или конечен диаметр группы $\mathcal{D}(M)$ диффеоморфизмов, сохраняющих объемы? Если конечен, то как его оценить для данного многообразия M^n?

Пусть M — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с евклидовым элементом объема dx). В этом случае группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}(M)$ естественно вкладывается в гильбертово пространство $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$ вектор-функций на M^n. Это вложение определяет изометрию группы $\mathcal{D}(M)$, снабженной (слабой) римановой структурой, на ее образ, снабженный римановой метрикой, индуцированной из гильбертова пространства.

Определение 7.2. *Стандартным* расстоянием dist_{L^2} между двумя диффеоморфизмами $f, h \in \mathcal{D}(M) \subset L^2(M, \mathbb{R}^n)$ называется расстояние между ними как вектор-функциями в объемлющем гильбертовом пространстве $L^2(M, \mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{dist}_{L^2}(f,h) = \|f - h\|_{L^2(M,\mathbb{R}^n)}.$$

B. Соотношение метрик. Как связаны расстояния $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}$ в группе $\mathcal{D}(M)$ и стандартное расстояние dist_{L^2}, поднятое в $\mathcal{D}(M)$ из пространства $L^2(M, \mathbb{R}^n)$?

Очевидно, что $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)} \geqslant \mathrm{dist}_{L^2}$. Существует ли оценка расстояния $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}(g, h)$ через $\mathrm{dist}_{L^2}(g, h)$? В частности, верно ли, что если два диффеоморфизма, сохраняющие объемы, являются близкими в гильбертовом пространстве, то они могут быть соединены коротким путем в группе $\mathcal{D}(M)$?

C. Кратчайший путь. Существует ли путь минимальной длины, соединяющий в группе $\mathcal{D}(M)$ два заданных диффеоморфизма, сохраняющих объемы? Если такой путь существует, то он является геодезической, т. е. после подходящей перепараметризации он станет решением уравнения Эйлера для идеальной жидкости в M^n. Нахождение кратчайшего пути между двумя произвольными конфигурациями жидкости могло бы стать методом для построения течений идеальной жидкости.

Замечание 7.3. Вопрос о соотношении метрик может быть поставлен для произвольного риманова многообразия M^n, если мы сначала найдем некоторое изометричное вложение $M^n \subset \mathbb{R}^q$. Такое вложение, для которого евклидова метрика в $\mathbb{R}^q$ определяет заданную риманову метрику на M^n, существует по теореме Нэша [Nash] (можно взять $q = 3n(n+9)/2$ для компактного M^n и $q = 3n(n+1)(n+9)/2$ для некомпактного M^n).

7.2. Диаметр группы диффеоморфизмов

Ограничимся простейшей областью M^n, а именно, единичным кубом $M^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon 0 < x_i < 1\}$, избавившись таким образом от топологических сложностей.

Теорема 7.4 (см. [Shn1]). *Диаметр $\mathcal{D}(M)$ группы гладких сохраняющих объемы диффеоморфизмов единичного n-мерного куба M^n, где $n \geqslant 3$, конечен в правоинвариантной метрике* $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}$.

Теорема 7.4′ ([Shn5]). $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(M^n)) \leqslant 2\sqrt{\frac{n}{3}}$ *при* $n \geqslant 3$.

Эта теорема обобщается на случай произвольного односвязного многообразия M. Однако диаметр может стать бесконечным, если фундаментальная группа M нетривиальна [ER2].

Двумерный случай существенно отличается от многомерного.

Теорема 7.5 (см. [ER1, ER2]). *Для произвольного многообразия M размерности $n = 2$ диаметр группы $\mathcal{D}(M^2)$ бесконечен.*

Этот результат можно усилить следующим образом.

Определение 7.6. Диффеоморфизм $g \colon M \to M$ произвольной области (или риманова многообразия) M называется *достижимым*, если он может быть связан с тождественным диффеоморфизмом Id кусочно-гладким путем $g_t \subset \mathcal{D}(M)$ конечной длины.

Теорема 7.7 (см. [Shn2]). *Пусть M^n — n-мерный куб, а $n \geqslant 3$. Тогда каждый элемент группы $\mathcal{D}(M)$ является достижимым. В случае $n = 2$ существуют недостижимые диффеоморфизмы квадрата M^2. Более того, су-*

ществует недостижимый диффеоморфизм, имеющий непрерывное продолжение на край ∂M^2 и тождественный на нем.

Диффеоморфизм g может быть недостижим, если его поведение вблизи границы ∂M^n является достаточно сложным. Мы приведем пример недостижимого диффеоморфизма в п. 8.1. Заметим, что лишь достижимые диффеоморфизмы являются физически разумными, так как жидкость не может достичь недостижимой конфигурации за конечное время.

Следующее утверждение уточняет теорему 7.5.

Теорема 7.8 (ср. 7.5). *Для двумерного M диаметр подмножества достижимых диффеоморфизмов в $\mathcal{D}(M)$ бесконечен.*

Неизвестно, образуют ли все достижимые диффеоморфизмы подгруппу в $\mathcal{D}(M^2)$ (т. е. является ли обратный к достижимому диффеоморфизму достижимым). Не всегда верно, что если путь $\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M^2)$ имеет конечную длину, то длина пути $\{g_t^{-1}\} \subset \mathcal{D}(M^2)$ конечна. Группа $\mathcal{D}(M^2)$ расщепляется на континуум классов эквивалентности следующим образом: два диффеоморфизма находятся в одном и том же классе, если они могут быть соединены друг с другом путем конечной длины. Каждый класс эквивалентности имеет бесконечный диаметр.

Доказательства двумерных результатов достаточно прозрачны и обсуждаются в пп. 8.1–8.2. Подходы к трех- (и много-) мерным результатам, напротив, довольно сложны. Далее мы обсудим лишь их ключевые идеи.

7.3. Сравнение метрик и пополнение группы $\mathcal{D}(M)$

Главное отличие между геометриями групп диффеоморфизмов в размерностях два и три основывается на наблюдении, что для длинного пути на $\mathcal{D}(M^3)$, который скручивает частицы в пространстве, всегда существует некоторый более короткий путь, раскручивающий их «за счет использования третьей координаты». Более точно, справедлива следующая оценка.

Теорема 7.9 (см. [Shn1]). *Для заданной размерности $n \geqslant 3$ существуют такие константы $C > 0$ и $\alpha > 0$, что для каждой пары сохраняющих объемы диффеоморфизмов $f, h \in \mathcal{D}(M^n)$ единичного куба,*

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M)}(f,h) \leqslant C(\operatorname{dist}_{L^2}(f,h))^{\alpha}.$$

Теорема 7.9′ ([Shn5]). *Константа α в теореме 7.9 не меньше $2/(n+4)$.*

Теорема 7.9 означает, что вложение $\mathcal{D}(M^n)$ в $L^2(M, \mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, является «гельдеровым». Видимо, оно не гладко, а $\alpha < 1$. Ясно, что чем больше α, тем «глаже» группа диффеоморфизмов. Конечно, свойство гельдеровости (теорема 7.9) влечет конечность диаметра (теорема 7.4).

Для $n = 2$ аналогичной оценки существовать не может. А именно, для любой пары констант $c, C > 0$ существует диффеоморфизм $g \in \mathcal{D}(M^2)$ такой, что $\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M)}(g, \mathrm{Id}) > C$, но $\operatorname{dist}_{L^2}(g, \mathrm{Id}) < c$. Это дополняет теорему 7.5, но требует, конечно, отдельного доказательства.

Из теорем 7.4 и 7.9 следует простое описание пополнения метрического пространства $\mathcal{D}(M^n)$ в случае $n \geqslant 3$.

Следствие 7.10. *Для $n \geqslant 3$ пополнение группы $\mathcal{D}(M^n)$ в метрике $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}$ совпадает с замыканием $\overline{\mathcal{D}}(M^n)$ этой группы в $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство следствия. Каждая последовательность Коши $\{g_i\}$ в $\mathcal{D}(M^n)$ (по отношению к метрикам $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M^n)}$) является последовательностью Коши в $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$, и следовательно, она сходится к некоторому элементу $g \in L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$.

Обратно, если g принадлежит замыканию группы $\mathcal{D}(M^n)$ в $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$, тогда существует последовательность диффеоморфизмов $\{g_i\} \subset \mathcal{D}(M^n)$, которая сходится к g в $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, по неравенству теоремы 7.9, $\{g_i\}$ является последовательностью Коши в $\mathcal{D}(M^n)$, и, таким образом, g лежит в пополнении $\mathcal{D}(M^n)$. □

Теорема 7.11 (см. [Shn1]). *Пополнение $\overline{\mathcal{D}}(M^n)$ $(n \geqslant 3)$ группы $\mathcal{D}(M^n)$ состоит из всех сохраняющих меру эндоморфизмов куба M^n, т. е. из таких измеримых по Лебегу отображений $f\colon M^n \to M^n$, что для каждого измеримого подмножества $\Omega \subset M^n$*

$$\operatorname{mes} f^{-1}(\Omega) = \operatorname{mes} \Omega.$$

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Разделим единичный куб M^n на N^n равных малых кубов, имеющих линейный размер N^{-1}. Рассмотрим класс $\mathcal{D}_N$ кусочно-непрерывных отображений, переносящих параллельным образом каждый малый куб $\varkappa$ в другой малый куб $\sigma(\varkappa)$, где σ является некоторой перестановкой множества малых кубов. Во-первых, можно показать, что каждое сохраняющее меру отображение $f\colon M^n \to M^n$ может быть аппроксимировано с произвольной точностью в $L^2(M^n, \mathbb{R}^n)$ перестановками малых кубов для достаточно большого N. В свою очередь, оказывается, что каждая такая перестановка может быть аппроксимирована в L^2 некоторым гладким сохраняющим объемы диффеоморфизмом. Обратно, если отображение g принадлежит замыканию группы диффеоморфизмов, $g \in \overline{\mathcal{D}}(M^n)$, то $g = \lim g_i$, $g_i \in \mathcal{D}(M^n)$, почти всюду в M^n, и следовательно, g является эндоморфизмом, сохраняющим меру, см. детали в [Shn1].

В двумерном случае пополнение $\mathcal{D}(M^2)$ в метрике $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}(M)}$ является собственным подмножеством L^2-замыкания $\overline{\mathcal{D}}(M^2)$; хорошее описание этого пополнения не известно.

7.4. Отсутствие кратчайшего пути

Приведенные выше факты влекут отрицательный ответ на вопрос о существовании кратчайшего пути в группе диффеоморфизмов.

Теорема 7.12 (см. [Shn1]). *Для единичного куба M размерности $n \geqslant 3$ существует пара сохраняющих объемы диффеоморфизмов, которые не могут быть связаны в группе $\mathcal{D}(M)$ кратчайшим путем, т. е. для любого пути, соединяющего эти диффеоморфизмы, существует некоторый более короткий путь, соединяющий их.*

Таким образом, привлекательный вариационный подход к построению решений уравнения Эйлера непосредственно не применим к трехмерной гидро-

динамике. Это означает не то, что вариационный метод неправилен, а лишь то, что наше понимание его возможностей в гидродинамике неполно.

Замечание 7.13. Доказательство теоремы 7.12 напоминает пример Вейерштрасса вариационной задачи, не имеющей решения. Этот пример появился в связи с критикой Вейерштрассом использования принципа Дирихле при доказательстве существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Он показывает, что в некоторых случаях функционал может и не достигать своей нижней грани. Рассмотрим две точки A и B в плоскости и поставим такую задачу. Мы ищем гладкую кривую γ минимальной длины, связывающую A и B, и такую, что ее касательные в точках A и B ортогональны к линии (AB), рис. 52. Ясно, что, если γ отличается от отрезка $[AB]$, то ее можно стягивать к линии (AB) (скажем, умножая ординату на $1/2$). Это преобразование сокращает ее длину. Однако, если γ совпадает с отрезком $[AB]$, она не удовлетворяет граничным условиям. Таким образом, нижняя грань не может быть достигнута в классе допустимых кривых.

Критика Вейерштрасса вдохновила Гильберта на построение строгого обоснования для вариационного принципа Дирихле.

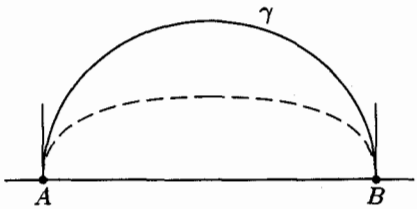


Рис. 52. Не существует кратчайшей кривой между A и B, которая была бы ортогональной к отрезку AB в концевых точках

Опишем теперь пример диффеоморфизма $g \in \mathcal{D}(M^3)$ трехмерного куба M^3, который не может быть соединен с тождественным диффеоморфизмом Id кратчайшим путем.

Пусть (x_1, x_2, z) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ и $M^3 = \{0 < x_1, x_2, z < 1\}$. Рассмотрим произвольный диффеоморфизм $g \in \mathcal{D}(M^3)$ вида

$$g(x, z) = (h(x), z),$$

где h — сохраняющий площади диффеоморфизм квадрата M^2 и $x := (x_1, x_2)$.

Теорема 7.12′. *Если*

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^3)}(\mathrm{Id}, g) < \operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^2)}(\mathrm{Id}, h),$$

то диффеоморфизм $\mathrm{Id} \in \mathcal{D}(M^3)$ *не может быть соединен с диффеоморфизмом* g *кратчайшим путем в* $\mathcal{D}(M^3)$.

Доказательство. Будем оценивать не длину, а действие вдоль путей.

Определение 7.14. *Действием* вдоль пути g_t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, на группе диффеоморфизмов $\mathcal{D}(M^n)$ риманова многообразия M^n называется величина

$$\mathfrak{j}\{g_t\}_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \|\dot{g}_t\|^2_{L^2(M)}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{M^n} \left\|\frac{\partial g_t(x)}{\partial t}\right\|^2 dx\,dt.$$

Действие и длина связаны неравенством

$$\ell^2 \leqslant 2\mathfrak{j}(t_2 - t_1). \tag{7.2}$$

В отличие от длины $\ell\{g_t\}_{t_1}^{t_2}$, действие $\mathfrak{j}\{g_t\}_{t_1}^{t_2}$ зависит от параметризации, и равенство в (7.2) достигается тогда и только тогда, когда параметризация такая, что

$$\|\dot{g}_t\|^2_{L^2(M)} = \int\limits_M \left\|\frac{\partial g_t(x)}{\partial t}\right\|^2 dx \overset{t}{\equiv} \text{const}.$$

Предположим, что существует кратчайший путь g_t, соединяющий Id и g; построим другой путь, имеющий меньшую длину.

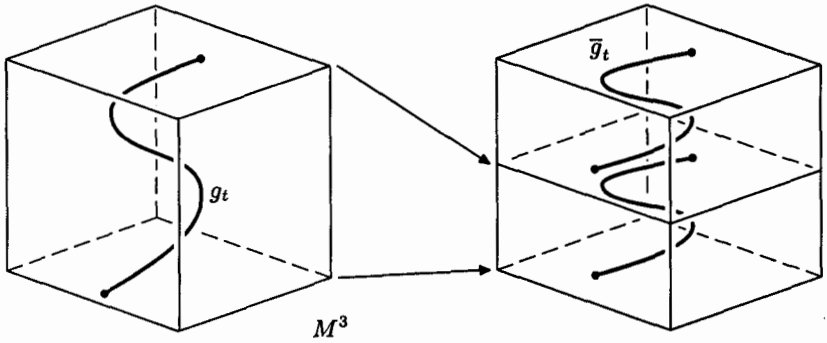


Рис. 53. Каждый из двух параллелепипедов содержит прежний поток внутри куба, сжатый в два раза

Во-первых, сожмем течение g_t в два раза вдоль направления z. Вместо семейства сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного единичного куба M^3 мы получаем теперь сохраняющие объемы диффеоморфизмы параллелепипеда

$$P_1 = \{(x, z) \in M^3 \colon 0 < z < 1/2\}.$$

Теперь рассмотрим новое (разрывное) течение $\overline{g}_t$ в кубе $M^3 = P_1 \cup P_2$, которое является таким сжатым течением на каждой из половин P_1 и P_2, см. рис. 53 (где P_2 задано условием $1/2 < z < 1$). Легко видеть, что течение $\overline{g}_t$ является несжимаемым в M^3 и в общем случае разрывным на (инвариантной) плоскости $z = 1/2$. Заметим также, что течение $\overline{g}_t$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и g_t: $\overline{g}_0 = \mathrm{Id}$, $\overline{g}_1 = g$, так как g имело вид $g(x, z) = (h(x), z)$.

Сравним действия вдоль путей g_t и $\overline{g}_t$. Определим горизонтальную j_H и вертикальную j_V компоненты действия $\mathrm{j} = \mathrm{j}_H + \mathrm{j}_V$ для g_t следующим образом:

$$\mathrm{j}_H\{g_t\}_0^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dt \int\limits_{M^3} \left\| \frac{\partial x'(x,z,t)}{\partial t} \right\|^2 d^2x\, dz,$$

$$\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dt \int\limits_{M^3} \left\| \frac{\partial z'(x,z,t)}{\partial t} \right\|^2 d^2x\, dz$$

и аналогично для пути $\overline{g}_t$. (Здесь $g_t(x,z) = (x', z')$.) Из определения $\overline{g}_t$ мы легко получим, что

$$\mathrm{j}_H\{\overline{g}_t\}_0^1 = \mathrm{j}_H\{g_t\}_0^1 \quad \text{и} \quad \mathrm{j}_V\{\overline{g}_t\}_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1.$$

Следовательно, действие вдоль пути $\overline{g}_t$ меньше, чем вдоль пути g_t: $\mathrm{j}\{\overline{g}_t\}_0^1 < \mathrm{j}\{g_t\}_0^1$ как только вертикальная компонента действия положительна, $\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1 > 0$.

Оказывается, условие $\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1 > 0$ вытекает из предположений теоремы. Действительно, если вертикальная компонента действия обращается в нуль ($\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1 = 0$), то $\partial z'(x,z,t)/\partial t \equiv 0$, и отображение $x \mapsto x'(x,z,t)$ для любого фиксированного z и t является сохраняющим площади диффеоморфизмом квадрата M^2. В этом случае действие вдоль течения g_t равно

$$\mathrm{j}\{g_t\}_0^1 = \int\limits_0^1 dz \left(\int\limits_0^1 dt \int\limits_{M^2} \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial x'(x,z,t)}{\partial t} \right\|^2 d^2x \right).$$

Отсюда следует, что существует $z_0 \in [0,1]$ такое, что

$$\mathrm{j}\{g_t\}_0^1 \geqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_{M^2} \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial x'(x,z_0,t)}{\partial t} \right\|^2 d^2x.$$

Однако это невозможно, так как, по предположению, расстояние в $\mathcal{D}(M^2)$ от Id до диффеоморфизма $x \mapsto x'(x,z_0,t)|_{t=1} = h(x)$ больше, чем расстояние в $\mathcal{D}(M^3)$ от Id до g, которое является длиной кратчайшего пути g_t в $\mathcal{D}(M^3)$, связывающего Id и g.

Следовательно, $\mathrm{j}_V\{g_t\}_0^1 > 0$, и мы построили разрывное течение $\overline{g}_t$ (связывающее Id и диффеоморфизм g), действие которого меньше, чем действие для g_t: $\mathrm{j}\{\overline{g}_t\}_0^1 < \mathrm{j}\{g_t\}_0^1$. Теперь теорема 7.12 следует из следующей леммы о гладкой аппроксимации.

Лемма 7.15. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое течение $\varphi_t \subset \mathcal{D}(M^3)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, которое начинается в тождественном диффеоморфизме $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, достигает ε-окрестности g в стандартной L^2-метрике, $\mathrm{dist}_{L^2(M^3)}(\varphi_1, g) < \varepsilon$, и такое, что его действие аппроксимирует действие вдоль разрывного пути $\overline{g}_t$, $|\mathrm{j}\{\overline{g}_t\}_0^1 - \mathrm{j}\{\varphi_t\}_0^1| < \varepsilon$.*

Чтобы завершить доказательство, мы заменим короткий, но разрывный путь $\overline{g}_t$ его гладкой аппроксимацией φ_t. Этот путь начинается в тождественном отображении и кончается в отображении φ_1, L^2-близком к g. По теореме 7.9 существует путь f_t в $\mathcal{D}(M^3)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, связывающий φ_1 и g, и такой, что

$$\ell\{f_t\}_1^2 \leqslant C\varepsilon^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

и, следовательно, длина $\ell\{f_t\}_1^2$ стремится к 0 вместе с ε. Тогда составной путь $\varphi_t \cup f_t$ имеет длину, которая не превышает $\ell\{\overline{g}_t\} + \varepsilon + C\varepsilon^\alpha$. Наконец, заметим, что для достаточно малого ε составной путь является более коротким чем g_t, потому что $\ell\{\overline{g}_t\}_0^1 < \ell\{g_t\}_0^1$. Это завершает доказательство теоремы 7.12′ по модулю доказательства леммы 7.15. □

Доказательство теоремы 7.12. По теореме 7.5 для каждого $C > 0$ существует диффеоморфизм h квадрата M^2 такой, что

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^2)}(\mathrm{Id}, h) > C.$$

С другой стороны, если g является диффеоморфизмом трехмерного куба M^3 вида

$$g(x,z) = (h(x), z), \quad x \in M^2, \quad z \in (0,1),$$

то по теореме 7.4′ $\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^3)}(\mathrm{Id}, g) \leqslant 2$. Следовательно, если $C > 2$, этот диффеоморфизм g не может быть соединен с Id кратчайшим путем. Это завершает доказательство теоремы 7.12. □

Доказательство леммы 7.15. Для (разрывного) течения $\overline{g}_t$ мы определим (почти всюду) его эйлерово поле скоростей как $v(x,t) = \partial\overline{g}_t(\overline{g}_t^{-1}(x))/\partial t$. Пусть для некоторого малого $\delta > 0$ множество M_δ есть M, из которого удалена δ-окрестность границы ∂M, а ρ_δ — сжатие, отображающее $M \to M_\delta$. Обозначим через $v_\delta(x,t) = (\rho_\delta)_* v(x,t)$ образ поля v при сжатии. Положив $v_\delta \equiv 0$ вне M_δ, мы получим L^2-векторное поле во всем $\mathbb{R}^3$, которое является бездивергентным в обобщенном смысле, т. е. векторное поле v_δ L^2-ортогонально любому градиентному векторному полю.

Теперь определим гладкое поле

$$w_\delta(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_\delta(y,t)\varphi_\delta(x-y)\,dy$$

как результат свертывания поля v_δ с функцией $\varphi_\delta(x) = \delta^{-3}\varphi(x/\delta)$, где $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Поле $w_\delta(x,t)$ имеет компактный носитель $w_\delta(x,t) \in C_0^\infty(M)$ для всех t, и при $\delta \to 0$ оно сходится к полю $v(x,t)$ равномерно на любом компактном подмножестве в M, не пересекающим границу ∂M и плоскость $z = \dfrac{1}{2}$. Более того, $w_\delta \to v$ в $L^2(M)$. Следовательно, для достаточно малого δ гладкое течение φ_t, полученное интегрированием векторного поля w_δ, удовлетворяет условиям леммы 7.15. □

7.5. Дискретные течения

Доказательства теорем 7.4, 7.7 и 7.9 сходны и основаны на следующей дискретной аппроксимации группы $\mathcal{D}(M^n)$ (ср. также [Lax, Mos2]). Разделим куб $M^n \subset \mathbb{R}^n$ на N^n одинаковых подкубов. Пусть M_N — множество всех этих подкубов. Обозначим через $\mathcal{D}_N$ группу всех перестановок множества M_N; это дискретный аналог группы $\mathcal{D}(M)$ сохраняющих объемы диффеоморфизмов.

Подкубы $\varkappa$, $\varkappa' \in M_N$ называются *соседями*, если они имеют общую $(n-1)$-мерную грань. Перестановка $\sigma \in \mathcal{D}_N$ называется *элементарной*, если каждый подкуб $\varkappa \in M_N$ либо не передвигается перестановкой σ, либо $\sigma(\varkappa)$ — сосед $\varkappa$. Последовательность элементарных перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ называется *дискретным течением*; номер k называется его *протяженностью*. Мы скажем, что дискретное течение $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ *связывает* конфигурации $\sigma, \sigma' \in \mathcal{D}_N$, если $\sigma_k \circ \sigma_{k-1} \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \sigma = \sigma'$.

В нашем рассмотрении особенно важна следующая чисто комбинаторная теорема. Ее можно считать дискретной версией теоремы 7.4.

Теорема 7.16. *Для каждой размерности n существует константа $C_n > 0$ такая, что для каждого N любые две конфигурации $\sigma, \sigma' \in \mathcal{D}_N$ могут быть связаны дискретным течением $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, чья протяженность k меньше, чем $C_n N$.*

Доказательство достаточно длинно, хотя и элементарно, см. [Shn1].

Чтобы сформулировать дискретный аналог теоремы 7.9, мы определим длину дискретного течения (которую не следует путать с протяженностью во времени).

Определение 7.17. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ является дискретным течением в M_N. Пусть каждая перестановка σ_j переводит m_j подкубов в их соседей и оставляет $N^n - m_j$ подкубов на месте. *Длиной* $\ell\{\sigma_j\}_1^k$ дискретного течения называется величина

$$\ell\{\sigma_j\}_1^k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m_j/N^n)^{1/2}}{N},$$

ср. (7.1). Мотивировка определения прозрачна: перестановка σ_j аппроксимируется векторным полем абсолютной величины $1/N$ с носителем на множестве объема m_j/N^n.

Расстояние в $\mathcal{D}_N$ между конфигурациями σ и σ' определяется как

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}_N}(\sigma, \sigma') = \min \ell\{\sigma_j\}_1^k,$$

где минимум берется по всем дискретным течениям (произвольной протяженности), связывающим σ и σ'. *L^2-расстояние* между $\sigma, \sigma' \in \mathcal{D}_N$ определяется как

$$\operatorname{dist}_{L^2}(\sigma, \sigma') = \left(\sum_{\varkappa \in M_N} \frac{\|\sigma(\varkappa) - \sigma'(\varkappa)\|^2}{N^n} \right)^{1/2},$$

где $\|\sigma(\varkappa) - \sigma'(\varkappa)\|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ между центрами соответствующих малых кубов.

Теперь аналогом теоремы 7.9 о сравнении метрик будет следующая

Теорема 7.18. *Для каждой размерности n существуют константы $C_n > 0$ и $\alpha_n > 0$ такие, что для каждого N и каждой пары перестановок $\sigma, \sigma' \in \mathcal{D}_N$*

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}_N}(\sigma, \sigma') \leqslant C_n(\operatorname{dist}_{L^2}(\sigma, \sigma'))^{\alpha_n}.$$

Доказательство основано на индуктивном многошаговом построении «короткого» дискретного течения, связывающего две заданные L^2-близкие дискретные конфигурации (см. [Shn1]).

7.6. Наброски доказательств

Теоремы 7.4 и 7.9 можно доказать следующим образом.

Пусть $g \in \mathcal{D}(M^n)$ при $n \geqslant 3$. Построим такой путь $g_t \subset \mathcal{D}(M^n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющий тождественное отображение и g ($g_0 = \mathrm{Id}$, $g_1 = g$), что

$$\ell\{g_t\}_0^1 \leqslant C(\operatorname{dist}_{L^2}(\mathrm{Id}, g))^{\alpha}.$$

Прежде всего, докажем, что g может быть аппроксимировано перестановкой $\sigma \in \mathcal{D}_N$ малых кубов для достаточно большого N. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует разрывное кусочно-гладкое течение ξ_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, связывающее σ и g и такое, что $L\{\xi_\tau\}_0^1 < \varepsilon$. (Более точно, для каждого τ отображение $\xi_\tau\colon M^n \to M^n$ является гладким в каждом малом кубе $\varkappa \in M_N$, разрывным на гранях между соседними кубами и сохраняющим меру.)

Построим «короткое» дискретное течение $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, связывающее Id и σ в $\mathcal{D}_N$ и удовлетворяющее заключению теоремы 7.18. Можно показать, что существует разрывное течение η_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, которое интерполирует течение $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ в моменты $t = j/k$ для всех $j = 1, \ldots, k$ (т. е. $\eta_{t=j/k} = \sigma_j \circ \sigma_{j-1} \circ \ldots \ldots \circ \sigma_1$), и длина которого имеет тот же порядок:

$$\ell\{\eta_t\}_0^1 \leqslant C_n \cdot \ell\{\sigma_j\}_1^k,$$

где C_n зависит только от n.

Следовательно, композиция путей η_t и ξ_t является разрывным течением, связывающим Id и g и имеющим контролируемую длину.

Последний шаг, являющийся сглаживанием полученного течения, обеспечивает следующая

Лемма 7.19. *Пусть $g \in \mathcal{D}(M^n)$ и пусть $\zeta_t\colon M^n \to M^n$ является разрывным течением, сохраняющим меры измеримых множеств, таким, что $\zeta_0 = \mathrm{Id}$, $\zeta_1 = g$, а ζ_t является гладким в каждом малом кубе $\varkappa \in M_N$. Если $n \geqslant 3$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует гладкое течение $g_t\colon M^n \to M^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с теми же граничными условиями $g_0 = \mathrm{Id}$, $g_1 = g$, как ζ_t, и такое, что $\ell\{g_t\}_0^1 < \ell\{\zeta_t\}_0^1 + \varepsilon$.*

Для доказательства леммы в каждом кубе $\varkappa_\delta = \{x \in \varkappa\colon \operatorname{dist}_{\mathbb{R}^n}(x, \partial\varkappa) > \delta\}$ для некоторого положительного $\delta < 1/2N$ определим $g_t = \zeta_t$. После этого течение гладко продолжается на объединение δ-окрестностей всех граней всех

кубиков $\varkappa \in M_N$ — «пенообразную» область $K_\delta := \bigcup_{\varkappa \in M_N} (\varkappa \setminus \varkappa_\delta)$. Это продолжение строится следующим образом. Соединим Id и g произвольным гладким несжимаемым течением $\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M^n)$. Тогда $h_t = g_t^{-1} \circ \zeta_t$ будет также кусочно-гладким несжимаемым течением, причем $h_0 = h_1 = \mathrm{Id}$. Пусть для каждого кубика $\varkappa \in M_N$, точка $x_\varkappa$ — его центр. Траектории $h_t(x_\varkappa) = x_\varkappa(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, замкнуты для каждого $\varkappa \in M_N$. Пусть $\Sigma_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \colon x_i \in M^n, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Как известно, $\pi_1(\Sigma_p) = 0$ при $n \geqslant 3$. Поэтому существует семейство $x_\varkappa(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, не пересекающихся траекторий, гладко зависящих от t, s, таких, что $x_\varkappa(t, 0) \equiv x_\varkappa$, $x_\varkappa(t, 1) \equiv x_\varkappa(t)$. По непрерывности можно определить отображение $h_{t,s}$ в r-окрестности $B(x_\varkappa, r)$ центров $x_\varkappa$ так, что $h_{t,0}|_{B(x_\varkappa,r)} = \mathrm{Id}$ и $h_{t,1}|_{B(x_\varkappa,r)} = h_t|_{B(x_\varkappa,r)}$. Теперь при каждом фиксированном t мы можем продолжить течение $h_{t,s}$ с $\bigcup_\varkappa B(x_\varkappa, r)$ до гладкого несжимаемого течения $\eta_{t,s}$ на всем кубе M^n, таким образом, чтобы это течение $\eta_{t,s}$ гладко зависело от t, s.

Наконец, последний шаг — это «раздувание» каждого шарика $B(x_\varkappa, r)$ до $\varkappa_\delta$ и «сжатие» области $\bigcup_\varkappa (\varkappa \setminus B(x_\varkappa, r))$ до $\bigcup_\varkappa (\varkappa \setminus \varkappa_\delta)$. Так при каждом s мы получим гладкое несжимаемое течение $\eta_{t,s}$. В частности, $\eta_{t,1}$ совпадает с $g_t^{-1} \circ \zeta_t$ в $\bigcup_\varkappa \varkappa_\delta$, и $\zeta_0 = \zeta_1 = \mathrm{Id}$. При достаточно малых δ длина течения $g_t \circ \eta_{t,1}$ сколь угодно близка к длине течения ζ_t. Подробности см. в [Shn1]; см. также аналогичное рассуждение в доказательстве теоремы гл. III, п. 3.3.

Доказательство теоремы 7.7 похожее, но более изощренное [Shn2].

7.7. Обобщенные течения

Вернемся теперь к задаче нахождения кратчайших путей в группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов $\mathcal{D}(M^n)$. Мы уже знаем, что существуют пары диффеоморфизмов, которые не могут быть соединены гладким течением минимальной длины. Но, может быть, существуют некоторые более широкие классы течений (например, разрывные или измеримые), где минимум всегда достижим? Эта проблема была решена Я. Бренье [Bre1]. Он нашел естественный класс «обобщенных несжимаемых течений», для которых вариационная задача всегда разрешима.

Обобщенные течения (OT) являются далеким обобщением классических течений, в которых частицам жидкости разрешается не только перемещаться независимо друг от друга, но также их траектории могут пересекаться, частицы могут расщепляться и склеиваться. Единственное ограничение состоит в том, что плотности частиц остаются постоянными и средняя кинетическая энергия конечна. Формальное определение OT дается ниже.

Пусть $X = C([0, 1]; M^n)$ — пространство всех параметризованных непрерывных путей $x(t)$ в M^n. Зафиксируем диффеоморфизм $g \in \mathcal{D}(M^n)$.

Определение 7.20. *Обобщенное течение* (OT) в M^n, связывающее диффеоморфизмы Id и g — это вероятностная мера $\mu\{dx\}$ в пространстве X, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset M^n$ и любого $t_0 \in [0,1]$

$$\mu\{x(t)\colon x(t_0) \in A\} = \operatorname{mes} A$$

(это может называться несжимаемостью);

2) для почти всех путей $x(t)$ относительно меры $\mu\{dx\}$ действие вдоль каждого их них конечно:

$$\mathfrak{j}\{x(\cdot)\} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left\|\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right\|^2 dt < \infty,$$

конечным является и «общее действие»

$$\mathfrak{j}\{\mu\} = \int\limits_X \mathfrak{j}\{x(\cdot)\}\mu\{dx\} < \infty;$$

3) для почти всех путей $x(t)$ относительно меры $\mu\{dx\}$ концевые точки $x(0)$ и $x(1)$ связываются посредством диффеоморфизма g: $x(1) = g(x(0))$ (граничное условие).

Таким образом, обобщенное течение $\mu\{dx\}$ можно рассматривать как случайный процесс. В общем случае этот процесс не является ни марковским, ни стационарным. Это понятие очень похоже на понятие полиморфизма, появившееся в работе Вершика [Ver], см. также [Ner2]. Полугруппа полиморфизмов возникает как естественная область для продолжения групп диффеоморфизмов и их представлений.

Каждое гладкое течение $\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M)$ можно рассматривать как обобщенное, если мы поставим в соответствие $\{g_t\}$ меру $\mu_{(g_t)}\{dx\}$ такую, что для каждого измеримого множества $Y \subset X$ его $\mu_{(g_t)}$-мера равна мере точек, траектории которых принадлежат Y:

$$\mu_{(g_t)}(Y) = \operatorname{mes}\{a \in M^n\colon \{g_t(a)\} \in Y\}.$$

Эта мера имеет носитель на n-мерном множестве траекторий $g_t(a)$ течения $\{g_t\}$.

Другим примером *ОТ* является *мультитечение*, которое является выпуклой комбинацией обобщенных потоков, соответствующих гладким течениям. Другими словами, в мультитечениях различные части жидкости движутся (проникая одна сквозь другую, см. рис. 54) в различных направлениях в пределах того же объема! Заметим, что общие *ОТ* могут быть более сложными, чем мультитечения.

Теорема 7.21 (см. [Bre1]). *Для любого диффеоморфизма $g \in \mathcal{D}(M^n)$ существует обобщенное течение μ (с граничными условиями* Id *и g), которое реализует минимум действия*

$$\mathfrak{j}\{\mu\} = \min_{\mu'} \mathfrak{j}\{\mu'\},$$

где минимум берется по обобщенным течениям μ', связывающим тождественное отображение Id *и диффеоморфизм g.*

Таким образом, хотя в нашем примере нижняя грань не достигается среди гладких течений, существует обобщенное течение, минимизирующее действие (а также длину) (см. также [Roe]).

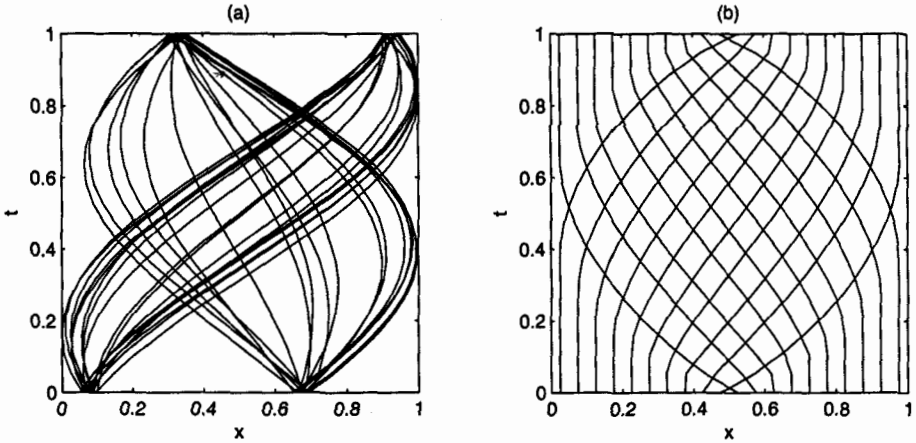


Рис. 54. Траектории частиц в OT, соответствующие (a) «переворачиванию» интервала $[0,1]$; (b) отображению перекладывания интервалов

Фактически, теорема 7.21 является еще более общей, так как она равно применима к разрывным, и, кроме того, к изменяющим ориентацию отображениям g. В последнем случае минимизирующие обобщенные течения особенно интересны, потому что жидкость оказывается вывернутой «наизнанку»! Ни *измеримое течение*, ни даже мультитечение не могут произвести такое преобразование. Эти вопросы нетривиальны даже в одномерном случае.

Есть два замечательных примера, найденных Бренье. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — преобразования отрезка $[0,1]$, определяемые, соответственно, как отображение «переворачивания» $g_1(x) := 1 - x$, $x \in [0,1]$, и как отображение g_2, перекладывающее интервалы $[0,1/2] \leftrightarrow [1/2,1]$. На рис. 54, a и рис. 54, b изображены траектории частиц жидкости для минимальных течений, связывающих Id с g_1 и g_2 соответственно. В первом случае каждая частица жидкости расщепляется при $t = 0$ в континуум траекторий «меньших» частиц; они перемещаются независимо, проходя через все точки отрезка, и затем собираются вместе при $t = 1$. Во втором случае OT является мультитечением (более точно, 2-течением). Другие примеры экзотических минимальных обобщенных течений см. в [Bre1, Bre2, Bre3].

В какой же степени эти минимальные обобщенные течения могут рассматриваться как обобщенные решения уравнений Эйлера? Связь между этими обобщенными течениями и настоящими решениями простирается весьма далеко: например, для каждого OT существует скалярная функция $p(x,t)$, играющая роль давления, такая что для почти любой частицы жидкости ее ускорение в почти каждой точке (x,t) равно $-\nabla_x p$ [Bre2]. Кроме того, минимальные OT являются обобщенными решениями задачи переноса масс (так называе-

мой задачи Монжа–Канторовича). Однако, их гидродинамическая значимость еще не вполне осознана. Различные вопросы, связанные с обобщенными геодезическими и переносом массы обсуждаются в [Bre3, Bre4, Vil].

В двумерном случае обобщенные течения имеют более прозрачный смысл, так как в группе диффеоморфизмов двумерной области M возникает дополнительная структура. А именно, пусть $\{g_t\}$ — гладкое течение, соединяющее Id и $g = g_1$. Каждой точке $z \in M$ соответствует кривая γ_z в цилиндре $Q = M \times [0,1]$, задаваемая уравнением $x = g_t(z)$. При этом для разных точек z_1 и z_2 соответствующие линии γ_{z_1} и γ_{z_2} не пересекаются. Таким образом, линии γ_z образуют несжимаемую *континуальную косу* B в цилиндре Q, причем каждая точка z на нижнем основании цилиндра Q соединяется линией γ_z с точкой $g(z)$ на верхнем основании. Мы можем теперь искать несжимаемую косу B, соединяющую Id и g, изотопную данной косе B_0 и имеющую минимальную энергию.

Эта задача является частным случаем задачи Сахарова–Зельдовича о минимизации энергии магнитного поля, вмороженного в идеальную несжимаемую проводящую жидкость в цилиндре Q (точнее, в соответствующем полнотории, свернутом из Q). В то же время, решения этой задачи (если они существуют) описывают течение идеальной несжимаемой жидкости в области M.

Для этой задачи не доказано существование классического решения; скорее всего оно существует не всегда. Однако можно определить обобщенную косу: всякому обобщенному течению, соединяющему Id и g, соответствует семейство линий в цилиндре Q, а именно, — графики траектории OT (где вертикальная координата — это время). Обобщенное течение называется *обобщенной косой*, слабо изотопной гладкой косе B_0, если для любого числа N любые его N траекторий образуют N-косу, изотопную N-подкосе косы B_0, имеющей то же множество концевых точек на основании цилиндра.

В работе [Shn9] доказано, что среди обобщенных кос, соединяющих Id и g и слабо изотопных гладкой косе B_0, существует коса B, имеющая минимальную энергию (т. е. действие $\mathrm{j}\{B\} = \min$). Более того, существует такое бездивергентное векторное поле $u(x,t) \in L^2(M \times [0,1])$, что $\dot{x}(\omega,t) = u(x(\omega,t),t)$ для почти всех (ω,t). Иначе говоря, коса с минимальным действием обладает определенным полем скоростей $u(x,t)$. Это поле имеет постоянную кинетическую энергию $\int\limits_M |u(x,t)|^2\,dx = \mathrm{const}$ и является слабым решением двумерного уравнения Эйлера. Таким образом, в двумерном случае OT с минимальным действием (и удовлетворяющее определенным топологическим условиям) имеет гидродинамический смысл.

7.8. Аппроксимация гладких течений жидкости обобщенными

Обобщенные течения являются мощным и гибким инструментом для изучения пространства $\mathcal{D}(M^n)$ диффеоморфизмов, сохраняющих объемы. Ключевую роль здесь играет следующая теорема аппроксимации.

Теорема 7.22 (см. [Shn5]). *Пусть $g \in \mathcal{D}(M^n)$, $n \geqslant 3$, — гладкий диффеоморфизм, сохраняющий объемы. Тогда каждое обобщенное течение $\mu\{dx\}$, связывающее* Id *и g, может быть аппроксимировано (вместе с действием) гладкими несжимаемыми течениями: существует последовательность гладких несжимаемых течений $g_t^{(k)}$, связывающих* Id *и g, такая, что при $k \to \infty$:*

1) *меры $\mu_{g_t^{(k)}}$ $*$-слабо сходятся в X к мере $\mu\{dx\}$;*

2) *действия вдоль $g_t^{(k)}$ сходятся к общему действию вдоль обобщенного течения $\mu\{dx\}$: $\mathrm{j}\{g_t^{(k)}\}_0^1 \to \mathrm{j}\{\mu\}_0^1$.*

Здесь $*$-слабая сходимость означает, что для каждого ограниченного непрерывного функционала $\varphi\{x(\cdot)\}$ на X

$$\langle \varphi\{x\}, \mu_{g_t^{(k)}}\{dx\}\rangle \to \langle \varphi(x), \mu\{dx\}\rangle \quad \text{при } k \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы см. в [Shn5]. Следствием этой теоремы и формулы (7.2) является следующая оценка расстояния в $\mathcal{D}(M^n)$, $n \geqslant 3$.

Следствие 7.23. *Если $n \geqslant 3$, то для каждого диффеоморфизма $g \in \mathcal{D}(M^n)$*

$$\operatorname{dist}(\mathrm{Id}, g) = \inf(2\mathrm{j}\{\mu\}_0^1)^{1/2},$$

где нижняя грань берется по всем обобщенным течениям μ, связывающим Id *и g.*

Таким образом, чтобы оценить расстояние между Id и $g \in \mathcal{D}(M^n)$, мы должны построить OT, соединяющее Id и g и имеющее как можно меньшее малое действие. Тогда следствие 7.23 дает оценку расстояния.

Пример 7.24 (ср. 7.4). Оценим диаметр $\operatorname{diam}\mathcal{D}(M^n)$ группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов n-мерного единичного куба. Точное вычисление всех промежуточных констант в доказательстве теоремы 7.3 для $n = 3$ приводит к оценке $\operatorname{diam}\mathcal{D}(M^3) < 100$, которая сильно завышена. Мы докажем следующую оценку.

Теорема 7.4′ [Shn5]. *Если размерность $n \geqslant 3$, то*

$$\operatorname{diam}\mathcal{D}(M^n) \leqslant 2\sqrt{n/3}.$$

Доказательство. Мы используем конструкцию, близкую к конструкции Я. Бренье, который доказал, что все конфигурации частиц на торе являются достижимыми посредством обобщенных течений [Bre1].

Искомое OT строится следующим образом. При $t = 0$ каждая частица в кубе расщепляется в континуум частиц, движущихся по всем направлениям. Начинаясь в точке y, эти «облака» (кубической формы) расширяются и при $t = 1/2$ заполняют весь куб M^n с постоянной плотностью. Во время же второй половины движения ($1/2 \leqslant t \leqslant 1$) «облако» сжимается и коллапсирует при $t = 1$ к точке $g(y)$. Все «облака» расширяются и сжимаются одновременно, а совокупная плотность остается постоянной для всех t.

Точнее, предположим, что куб M^n задан неравенствами $|x_i| < 1/2$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Γ является дискретной группой изометрий пространства $\mathbb{R}^n$,

порожденных отражениями в гранях куба M^n. (В частности, $\Gamma(x)$ — это орбита точки $x \in \mathbb{R}^n$ под действием всех элементов группы Γ.) Для каждой начальной точки $y \in M^n$ и вектора скорости $v \in M^n$ мы определим соответствующую бильярдную траекторию в M^n для времени $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, т. е. путь $x_{y,v}(t) \subset M$, где

$$x_{y,v}(t) := \Gamma(y + 4vt) \cap M^n.$$

Для заданной точки y, отображение $\varphi_y : v \to x_{y,v}(1/2)$ в конечную точку является 2^n-листным накрытием куба M^n, и более того, φ_y сохраняет объем. Эти бильярдные траектории являются траекториями «микрочастиц», в которые расщепляется каждая начальная точка y. При $t = 1/2$ микрочастицы заполняют M^n однородно, и после этого момента они перемещаются вдоль другой бильярдной траектории, собираясь в точке $g(y)$ в конце. Все частицы расщепляются и перемещаются независимо, одним и тем же образом; несжимаемость выполняется автоматически.

Пусть M_y, M_v, M_z, M_u являются четырьмя копиями куба M^n с координатами y, v, z, u соответственно. Определим множество $\Omega \subset M_y \times M_v \times M_z \times M_u$, которое состоит из таких четверок точек $\omega = (y, v,\ z, u) \in \Omega$, что $z = g(y)$ и что концевые точки соответствующих траекторий совпадают, $x_{y,v}(1/2) = x_{z,u}(1/2)$.

Обозначим через $d\omega = 2^{-n}\, dy\, dv$ нормированный элемент объема на Ω. Тогда требуемым обобщенным течением относительно меры μ является следующий случайный процесс в M^n с вероятностным пространством $(\Omega, d\omega)$:

$$x(t,\omega) = \begin{cases} x_{y,v}(4t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ x_{g(y),u}(4-4t), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\omega = (y, v, g(y), u) \in \Omega$. Действие этого OT равно

$$\mathfrak{j}\{\mu\}_0^1 = \frac{1}{2} \int\limits_{M_v} 16v^2\, dv = \frac{n}{2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} 16x^2\, dx = \frac{2n}{3}.$$

По следствию 7.23 получаем, что расстояние между тождественным отображением Id и диффеоморфизмом g (который был выбран произвольно) мажорируется следующим образом:

$$\operatorname{dist}(\mathrm{Id}, g) \leqslant \sqrt{2\mathfrak{j}\{\mu\}_0^1} = 2\sqrt{n/3}.$$

Следовательно, диаметр группы $\mathcal{D}(M^n)$ имеет ту же верхнюю границу. □

Доказательство теоремы 7.9 проходит по той же схеме. Пусть $n \geqslant 3$ и $g \in \mathcal{D}(M^n)$, причем $\|g - \mathrm{Id}\|_{L^2} < \varepsilon$. Мы строим несжимаемое OT, соединяющее Id и g и имеющее малую длину. Тогда согласно теореме 7.22 существует гладкое несжимаемое течение $\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M^n)$, соединяющее Id и g и имеющее длину, сколь угодно близкую к длине вышеуказанного OT.

Наше OT выглядит следующим образом. Пусть $\alpha > 0$ — фиксированное число. При $0 \leqslant t < 1/3$ каждая частица жидкости, которая в момент $t = 0$ находится в точке $x \in M^n$, «раздувается», как было описано в доказательстве теоремы 7.4′, в облако диаметром ε^α с центром в той же точке x и имеющим гладкую плотность. Общая плотность остается при этом постоянной. При $1/3 \leqslant t < 2/3$ каждое облако перемещается с постоянной скоростью, пока его центр не достигнет точки $g(x)$ при $t = 2/3$. На этом этапе общая плотность, вообще говоря, не остается постоянной, и поэтому при каждом $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ применяется еще дополнительный корректирующий диффеоморфизм h_t, восстанавливающий постоянную плотность (при малых ε и $\alpha < 1$ диффеоморфизм h_t будет C^1-близок к тождественному). Наконец, при $2/3 \leqslant t \leqslant 1$ каждое облако стягивается к своему центру $g(x)$.

Заметим, что если расстояние ε между Id и g в L^2 мало, то большая (в смысле меры Лебега) часть «облаков» перемещается на расстояние порядка ε, и лишь малая часть (общей массы не более ε^2) перемещается на расстояние порядка 1. В результате длина построенного OT мала вместе с ε. Точная оценка длины построенного OT в зависимости от числа α показывает, что оптимальный результат будет при $\alpha = \dfrac{2}{n+4}$; при этом длина OT не превышает $C \cdot \|\operatorname{Id} - g\|_{L^2}^\alpha$, и, следовательно,

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^n)}(\operatorname{Id}, g) \leqslant C \cdot \|\operatorname{Id} - g\|_{L^2}^{\frac{2}{n+4}}.$$

Остается открытым вопрос, существует ли какое-нибудь $\alpha > \dfrac{2}{n+4}$, для которого справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^n)}(\operatorname{Id}, g) \leqslant C_\alpha \cdot \|\operatorname{Id} - g\|_{L^2}^\alpha$$

при всяком $g \in \mathcal{D}(M^n)$. Если ответ на этот вопрос утвердительный, то также интересно, какова верхняя грань α_n тех α, при которых это неравенство справедливо. В частности, верно ли, что $\alpha_n < 1$ для любого $n \geqslant 3$?

7.9. Существование сопряженных точек на группах диффеоморфизмов

Важным применением техники обобщенных течений является доказательство существования сопряженных точек на пространстве $\mathcal{D}(M^n)$, ср. § 6.

Определение 7.25. Пусть $\{g_t\} \subset \mathcal{D}(M^n)$ является геодезической траекторией на группе диффеоморфизмов. Мы назовем точку g_{t_c} на траектории *первой секущей* или (*точкой страта Максвелла*) по отношению к начальной точке g_0 вдоль $\{g_t\}$, если геодезическая $\{g_t\}$ имеет минимальную длину среди всех (близких к $\{g_t\}$) кривых, связывающих g_0 и g_τ для всех $\tau < t_c$, и перестает быть минимумом длины как только $\tau > t_c$ (т.е. для каждого $\tau > t_c$ существует кривая $\{g'_t\}$, соединяющая g_0 и g_τ, чья длина меньше, чем длина отрезка $\{g_t \colon 0 < t < t_c\}$).

Мы назовем точку g_{t_c} *первой локальной секущей*, если она является первой секущей, а кривая $\{g'\}_t$ может быть выбрана сколь угодно близкой к отрезку геодезической $\{g_t \colon 0 < t < \tau\}$ для любого $\tau > t_c$.

На конечномерном полном римановом многообразии первая секущая точки g_0 встречается не позже, чем первая сопряженная точка для g_0. Пример плоского тора показывает, что могут быть секущие точки, когда сопряженных точек нет совсем. Но в конечномерном случае первая локальная секущая точка всегда является сопряженной точкой; очевидно, что все секущие точки на торе являются нелокальными. В случае же групп диффеоморфизмов более точное взаимоотношение между секущими и сопряженными точками еще не изучено.

В двумерном случае ($n = 2$) сопряженные точки на некоторых геодезических в $\mathcal{D}(T^2)$ были найдены Г. Мисиолеком [Mis2] (см. § 6). Любопытно, что для $n \geqslant 3$ существуют локальные секущие точки (и, возможно, сопряженные точки) на *любой* достаточно длинной геодезической. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7.26 (см. [Shn5]). *Пусть $\{g_t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \mathcal{D}(M^n)$ является произвольным путем на группе диффеоморфизмов и $n \geqslant 3$. Если длина пути превышает диаметр группы: $\ell\{g_t\}_0^T > \operatorname{diam}\mathcal{D}(M^n)$, то существует путь $\{g'_t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \mathcal{D}(M^n)$ с теми же концевыми точками g_0 и g_T, который:*

1) *является равномерно близким к $\{g_t\}$ (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует путь $\{g'_t\}$ такой, что $\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M)}(g_t, g'_t) < \varepsilon$ для каждого $t \in [0, T]$) и*

2) *имеет меньшую длину: $\ell\{g'_t\}_0^T < \ell\{g_t\}_0^T$.*

Другими словами, если $\{g_t\}$ является геодезическим отрезком, который достаточно длинен ($\ell\{g_t\}_0^T > \operatorname{diam}\mathcal{D}(M^n)$), то существует локальная секущая точка g_{t_c} с $t_c < T$. Более короткий путь может быть выбран произвольно близким к начальной геодезической, что на полном конечномерном многообразии повлекло бы существование сопряженной точки.

Доказательство. Пусть $\{h_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ является путем в $\mathcal{D}(M^n)$, связывающим g_0 и g_T и таким, что

$$\ell\{h_t\}_0^T < \operatorname{diam}\mathcal{D}(M^n) + \frac{\delta}{2} < \ell\{g_t\}_0^T$$

для некоторого малого $\delta > 0$. Такой путь существует по определению диаметра.

Предположим, что параметризация путей $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ выбрана таким образом, что $\|\dot{g}_t\| = \text{const}$, $\|\dot{h}_t\| = \text{const}$, и, следовательно, мы имеем неравенство $\mathrm{j}\{h_t\}_0^T < \mathrm{j}\{g_t\}_0^T$ и для действия.

Пусть μ_{g_t}, μ_{h_t} являются обобщенными течениями, соответствующими классическим течениям $\{g_t\}$, $\{h_t\}$. Рассмотрим выпуклую комбинацию $\overline{\mu}$ мер μ_{g_t}, μ_{h_t} в пространстве X, $\overline{\mu} := (1-\lambda)\mu_{g_t} + \lambda\mu_{h_t}$ для некоторого $0 < \lambda < 1$. Тогда общим действием для обобщенного течения $\overline{\mu}$ является

$$\mathrm{j}\{\overline{\mu}\}_0^T = (1-\lambda)\mathrm{j}\{g_t\}_0^T + \lambda\mathrm{j}\{h_t\}_0^T < \mathrm{j}\{g_t\}_0^T.$$

Чтобы вернуться к классическим течениям, используем теорему аппроксимации 7.22. Она гарантирует, что существует гладкое течение $\{f_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, связывающее g_0 и g_T и слабо $*$-аппроксимирующее $OT\ \overline{\mu}$ вместе с его действием, так что $\mathrm{j}\{f_t\}_0^T < \mathrm{j}\{g_t\}_0^T$. Течение $\{f_t\}$ зависит от λ, и легко видеть, что для

малого λ течение $\{f_t\}$ является L^2-близким к g_t:

$$\operatorname{dist}_{L^2}(\{f_t\},\{g_t\}) < C\lambda^{1/2}.$$

Следовательно, для достаточно малого λ эти течения являются близкими на группе благодаря теореме 7.9, $\operatorname{dist}_{\mathcal{D}(M^n)}(f_t, g_t) < \varepsilon$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Это завершает доказательство теоремы 7.26. □

Другие приложения обобщенных течений и подробности см. в [Shn5, Shn8]. Сопряженные точки на группах диффеоморфизмов дву- и трехмерных многообразий обсуждаются в [EbMP, Pre2].

§ 8. Бесконечный диаметр группы гамильтоновых диффеоморфизмов и симплектическая гидродинамика

Картина разительно меняется, когда мы переходим от группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов трех- (и более) мерных многообразий, к диффеоморфизмам поверхности, сохраняющим площади. Практически никакие из свойств, рассмотренных в предыдущем параграфе (таких, как метрические свойства и диаметр группы, существование решений для вариационных задач типа Коши и Дирихле, пополнение группы и описание достижимых диффеоморфизмов), не переносятся на этот случай. Мы опишем свойства группы диффеоморфизмов поверхности, сохраняющих площади, в более общей постановке групп симплектоморфизмов произвольных симплектических многообразий.

Определение 8.1. *Симплектическим многообразием* (M, ω) называется четномерное многообразие M^{2n}, снабженное невырожденной замкнутой 2-формой ω.

Группа симплектоморфизмов состоит из всех диффеоморфизмов $g\colon M \to M$, которые сохраняют 2-форму ω (т. е. $g^*\omega = \omega$). Мы будем рассматривать симплектоморфизмы, принадлежащие связной компоненте единицы в группе симплектоморфизмов, и только те из них, которые являются отображениями за единичное время гамильтоновых потоков. Под гамильтоновым потоком мы понимаем поток зависящего от времени гамильтонова векторного поля (имеющего однозначную функцию Гамильтона). Такие симплектические диффеоморфизмы M называются *гамильтоновыми*. Они образуют группу, которую мы будем обозначать через $\operatorname{Ham}(M)$, а соответствующую алгебру Ли гамильтоновых векторных полей будем обозначать через $\operatorname{ham}(M)$.

Для двумерного многообразия симплектическая 2-форма ω является формой площади, а группа диффеоморфизмов, сохраняющих площади и центр масс, $S\operatorname{Diff}_0(M^2)$, совпадает с группой $\operatorname{Ham}(M)$. Группа $\operatorname{Ham}(M)$ играет ту же роль в динамике плазмы, какую группа $S\operatorname{Diff}(M)$ — в динамике жидкостей.

Изучение геодезических правоинвариантных метрик на группах симплектоморфизмов является интересной и почти неисследованной областью. Она могла бы быть названа симплектогидродинамикой и является довольно естественным обобщением двумерной гидродинамики. Связь становится еще более

прозрачной для комплексных и почти комплексных многообразий, где метрика $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ связана с симплектической структурой ω посредством соотношения $\langle\xi,\eta\rangle = \omega(\xi, i\eta)$.

Симплектическая гидродинамика в высших размерностях разительно отличается от случая размерности два. Например, каждая ограниченная область на плоскости может быть вложена в любую другую область большей площади некоторым симплектоморфизмом (т. е. диффеоморфизмом, сохраняющим площадь). Уже в размерности четыре это не всегда так, даже некоторые эллипсоиды в симплектическом пространстве не могут быть вложены в шар большого объема симплектоморфизмом [Gro]. Скажем, эллипсоид $\frac{1}{a^2}(p_1^2+q_1^2)+\frac{1}{b^2}(p_2^2+q_2^2)\leqslant 1$ не может быть вложен в шар $p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2\leqslant \leqslant R^2$ большего объема, если $R<\max(a,b)$. Более того, «симплектический верблюд» (ограниченная область в симплектическом четырехмерном пространстве) не может пройти через игольное ушко (маленькое отверстие в трехмерной стене), в то время как в сохраняющей объемы гидродинамике такое просачивание через произвольно маленькое отверстие возможно в любой размерности.

Таким образом, сохранение симплектической структуры ω фазового пространства M гамильтоновым фазовым потоком определяет некоторые специальные свойства диффеоморфизмов, показывающие, что симплектоморфизмы «редко встречаются» среди отображений, сохраняющих объемы, в размерностях $\geqslant 4$. (Более того, группа симплектоморфизмов симплектического многообразия является C^0-замкнутой в группе всех диффеоморфизмов этого многообразия, т. е. в общем случае диффеоморфизм, сохраняющий объемы, не может быть аппроксимирован симплектическим, [El1, Gro].) Эти ограничения приводят к некоторым неожиданным явлениям в статистической механике, где вопреки симплектической природе проблемы обычно принимают в расчет только первые интегралы и сохранение объема и, в то же время, свободно переставляют частицы фазового пространства. Можно также надеяться, что симплектическая (контактная, конформная) гидродинамика найдет другие физически интересные приложения. В этом параграфе мы опишем ряд результатов, известных в симплектической гидродинамике.

Мы сосредоточимся, большей частью, на двух главных метриках, которыми может быть снабжена группа $\mathrm{Ham}(M)$. Первая из них является правоинвариантной метрикой, которая возникает из кинетической энергии и ответственна за гидродинамические приложения (мы следуем работам [ER1, ER2]). Вторая является биинвариантной метрикой, введенной в [Hof] (и изученной в [E-P, LaM]), которая в последнее время стала мощным инструментом в симплектической геометрии и топологии.

8.1. Правоинвариантные метрики на симплектоморфизмах

Пусть (M^{2n},ω) — компактное *точное* симплектическое многообразие. Это означает, что симплектическая форма ω является дифференциалом 1-формы θ: $\omega = d\theta$.

Такое многообразие обязательно имеет непустой край. В противном случае интеграл

$$\int\limits_M \omega^n = \int d(\theta \wedge \omega^{n-1})$$

должен был бы обратиться в нуль, что невозможно, так как $2n$-форма $\mu = \omega^n$ является формой объема на M. Мы зафиксируем риманову метрику на M с тем же элементом объема.

Определение 8.2. На группе $\mathrm{Ham}(M)$ правоинвариантная *L^p-метрика* определяется L^p-нормой ($p \geqslant 1$) на гамильтоновых векторных полях $\mathrm{ham}(M)$ в единице группы (для гидродинамики нужен L^2-случай, который соответствует кинетической энергии жидкости). Задав путь $\{g_t\colon t \in [0,1]\} \subset \mathrm{Ham}(M)$, определим его *$L^p$-длину* $\ell_p(\{g_t\})$ по формуле

$$\ell_p(\{g_t\}) = \int\limits_0^1 \left\| \frac{dg_t}{dt} \right\|_{L^p} dt = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_M \left\| \frac{dg_t}{dt} \right\|^p \mu \right)^{1/p} dt.$$

Функционал длины ℓ_p дает возможность определить *функцию расстояния* dist_p на $\mathrm{Ham}(M)$ как

$$\mathrm{dist}_p(f,g) = \inf \ell_p(\{g_t\}),$$

где нижняя грань берется по всем путям $\{g_t\}$, соединяющим $g_0 = f$ и $g_1 = g$. Наконец, определим *диаметр* группы гамильтоновых симплектоморфизмов как

$$\mathrm{diam}_p(\mathrm{Ham}(M)) := \sup_{f,g \in \mathrm{Ham}(M)} \mathrm{dist}_p(f,g).$$

Теорема 8.3 (ср. 7.5, 7.8 [ER2]). *Диаметр* $\mathrm{diam}_p(\mathrm{Ham}(M))$ *группы гамильтоновых диффеоморфизмов* $\mathrm{Ham}(M)$ *бесконечен в любой L^p-метрике.*

Заметим, что наиболее сильный результат получается для L^1-нормы, так как

$$\ell_p(*) \geqslant C(M,p)\ell_1(*).$$

Замечание 8.4. В отличие от случая, когда сохраняются объемы (для $\dim M \geqslant 3$), утверждение о бесконечности диаметра группы симплектоморфизмов имеет локальную природу и не связано с топологией объемлющего многообразия. Различие между этими двумя случаями происходит из различной топологии соответствующих групп линейных преобразований. Фундаментальная группа группы линейных симплектических преобразований $\mathrm{Sp}(2n)$ является бесконечной, в то время как в случае сохраняющих объемы преобразований $\mathrm{SL}(2n)$ она конечна для $n > 1$.

Для построения примера «длинного пути» в группе гамильтоновых диффеоморфизмов рассмотрим единичный диск $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ со стандартной формой площади. Длинный путь на $\mathrm{Ham}(B^2)$ задается, например, гамильтоновым потоком с функцией Гамильтона $H(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$ за достаточно большое время (рис. 55). Конечный симплектоморфизм находится достаточно далеко от тождественного диффеоморфизма $\mathrm{Id} \in \mathrm{Ham}(B^2)$, так как двумерность

препятствует «сильно сплетенным группам частиц» расплестись посредством короткого пути. Это позволяет построить следующий пример недостижимого диффеоморфизма квадрата [Shn2]. Он задается отображением потока за единичное время для векторного поля с функцией Гамильтона, изображенной на рис. 56. Она имеет «холмы» бесконечно возрастающей высоты с носителями на последовательности дисков, сходящихся к границе квадрата.

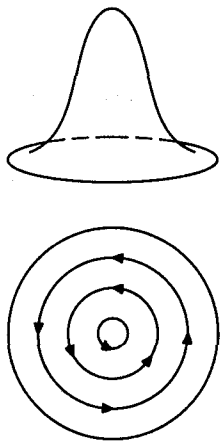


Рис. 55. Профиль гамильтоновой функции и траектории соответствующего потока, который является «длинным путем» на группе $\mathrm{Ham}(B^2)$

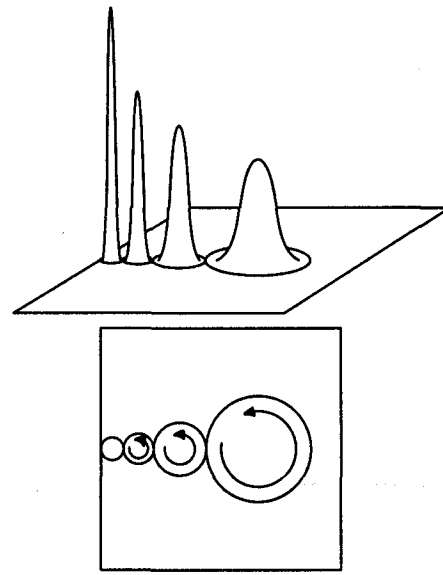


Рис. 56. Недостижимый диффеоморфизм квадрата

8.2. Инвариант Калаби

Мы собираемся доказать теорему 8.3 в упрощенной формулировке — для L^2-нормы и только для подгруппы симплектоморфизмов шара B^{2n}, которые неподвижны на крае ∂B, следуя [ER1]. Основой этого доказательства является понятие инварианта Калаби.

Рассмотрим группу $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ гамильтоновых диффеоморфизмов шара (B^{2n},ω), неподвижных на сфере ∂B, где ω является дифференциалом некоторой 1-формы θ, скажем, стандартной симплектической структурой $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ на $\mathbb{R}^{2n}$.

Предложение 8.5. *Для заданной 1-формы θ на шаре B и гамильтонова диффеоморфизма $g \in \mathrm{Ham}_\partial(B)$, неподвижного на сфере ∂B, существует единственная функция $h\colon B^{2n} \to \mathbb{R}$, обращающаяся в нуль вместе со своим градиентом на ∂B и такая, что*

$$\theta - g^*\theta = dh. \tag{8.1}$$

Доказательство. 1-форма $\theta - g^*\theta$ является замкнутой (поскольку $d(\theta - g^*\theta) = d\theta - g^*d\theta = \omega - g^*\omega = 0$), а потому и точной в шаре B^{2n}. Следовательно, она является дифференциалом некоторой функции h. Равенство нулю на границе для h и dh обеспечивается тем, что g неподвижно на границе. □

Лемма-определение 8.6. *Интеграл функции h по шару B не зависит от выбора 1-формы θ, такой что $d\theta = \omega$. Инвариантом Калаби гамильтонова диффеоморфизма g называется этот интеграл, деленный на $(n+1)$:*

$$\mathrm{Cal}(g) := \frac{1}{n+1}\int\limits_B h\omega^n.$$

Доказательство. Форма θ определена по модулю дифференциала некоторой функции. При замене $\theta \mapsto \tilde{\theta} = \theta + df$ функция h преобразуется по формуле $\tilde{h} = h + (f - g^*f)$, так как дифференциал коммутирует со взятием прообраза. Формы $(g^*f)\omega^n$ и $f\omega^n$ имеют одинаковые интегралы по многообразию, так как отображение g сохраняет симплектическую структуру ω. Следовательно, интеграл h сохраняется:

$$\int\limits_B \tilde{h}\omega^n = \int\limits_B h\omega^n + \int\limits_B (f - g^*f)\omega^n = \int\limits_B h\omega^n = \mathrm{Cal}(g). \qquad \square$$

Лемма-определение 8.6 справедлива для произвольного симплектоморфизма шара неподвижного на границе. Однако для гамильтоновых диффеоморфизмов есть и другое описание инварианта Калаби.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathrm{ham}_\partial(B)$ группы $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ гамильтоновых диффеоморфизмов шара неподвижных на границе. Эта алгебра Ли состоит из гамильтоновых векторных полей в B, обращающихся в нуль на крае — сфере ∂B. Мы будем отождествлять эту алгебру с пространством функций Гамильтона H, нормализованных тем условием, что функция H и ее дифференциал обращаются в нуль на ∂B. (Заметим, что определение функции Гамильтона, соответствующей векторному полю из $\mathrm{ham}_\partial(B)$, является инфинитезимальной версией соотношения (8.1).)

Пусть $g \in \mathrm{Ham}_\partial(B)$ — гамильтонов диффеоморфизм $2n$-мерного шара B. Рассмотрим любой путь $\{g_t\colon 0 \leqslant t \leqslant T,\ g(0) = \mathrm{Id},\ g(T) = g\}$ на группе $\mathrm{Ham}_\partial(B)$, связывающий единичный элемент с g. Такой путь можно считать потоком зависящего от времени гамильтонова векторного поля на B, чья нормализованная функция Гамильтона H_t (определенная на $B^{2n} \times [0,T]$) обращается в нуль на ∂B вместе со своим дифференциалом.

Теорема 8.7 (см. [Ca]). *Интеграл функции Гамильтона H_t по $B^{2n} \times \times [0,T]$ равен инварианту Калаби симплектоморфизма g:*

$$\mathrm{Cal}(g) = \int\limits_0^T \left(\int\limits_B H_t\omega^n \right) dt. \tag{8.2}$$

В частности, этот интеграл не зависит от соединяющего пути, т. е. от выбора зависящего от времени гамильтониана H_t, при условии, что конечное отображение $g(T) = g$ фиксировано.

Геометрически инвариант Калаби является объемом в $(2n+2)$-мерном пространстве $\{(x,t,z)\} = B^{2n} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ области под графиком функции $(x,t) \mapsto z = H_t(x)$.

Лемма 8.8. *Инвариант Калаби* $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}_\partial(B) \to \mathbb{R}$ *является гомоморфизмом группы гамильтоновых диффеоморфизмов* B *(неподвижных на границе) на вещественную прямую.*

Доказательство леммы. Пусть $g_1, g_2 \in \mathrm{Ham}_\partial(B) \to \mathbb{R}$ — два гамильтоновых диффеоморфизма, а $g = g_2 \circ g_1$. Покажем, что соответствующие функции h и h_i, $i = 1,2$, обращающиеся в нуль на крае ∂B и подчиненные условию (8.1), удовлетворяют соотношению

$$\int h\omega^n = \int h_1\omega^n + \int h_2\omega^n.$$

Это верно, поскольку

$$dh = \theta - g^*\theta = \theta - g_2^*\theta + g_2^*\theta - (g_2 \circ g_1)^*\theta = dh_2 + g_2^*(dh_1),$$

и g_2 сохраняет симплектическую форму ω. □

Замечание 8.9. Ядро гомоморфизма Калаби (образованное гамильтоновыми диффеоморфизмами с нулевым инвариантом Калаби) является простой группой, коммутантом $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ (см. [Ban]). (*Коммутант группы* порожден произведениями коммутаторов элементов группы.)

То обстоятельство, что гамильтоновы диффеоморфизмы с нулевым инвариантом Калаби образуют связную нормальную подгруппу, является очевидным (можно умножить зависящий от времени гамильтониан на константу). Алгебра Ли этой подгруппы состоит из гамильтоновых векторных полей, чьи нормализованные функции Гамильтона имеют нулевой интеграл (т. е. нулевое среднее). То, что эта подгруппа состоит из произведений коммутаторов в $\mathrm{Ham}_\partial(B)$, аналогично следующему факту: функции Гамильтона с нулевым средним представимы в виде конечных сумм скобок Пуассона функций из $\mathrm{ham}_\partial(B)$.

Подгруппа гамильтоновых диффеоморфизмов с обращающимся в нуль инвариантом Калаби имеет бесконечный диаметр, также как и объемлющая группа всех гамильтоновых диффеоморфизмов шара [ER2, GaL]. Эргодическое определение инварианта Калаби обсуждается в [G-G, GaL, Der1], см. также [BeG, G-G2] по поводу различных метрических и групповых свойств группы сохраняющих площади диффеоморфизмов.

Инвариант Калаби является гомоморфизмом группы $\mathrm{Symp}_\partial(B)$ всех неподвижных на крае симплектоморфизмов шара в группу $\mathbb{R}$. Мы не знаем, являются ли группа симплектоморфизмов $\mathrm{Symp}_\partial(B)$ $2n$-мерного шара (неподвижных на крае) и ее нормальная подгруппа $\{\mathrm{Cal}(g) = 0\}$ односвязными. Известно, что группа $\mathrm{Symp}_\partial(B)$ стягиваема для $n = 1$ [Mos1] и для $n = 2$ [Gro].

Доказательство теоремы 8.7. Рассмотрим путь

$$\{g_t \in \mathrm{Ham}_\partial(B)\colon 0 \leqslant t \leqslant T,\ g(0) = \mathrm{Id},\ g(T) = g\},$$

состоящий из гамильтоновых диффеоморфизмов с зависящей от времени функцией Гамильтона H_t.

Поскольку инвариант Cal является гомоморфизмом, достаточно доказать соотношение

$$\int_B h\omega^n = (n+1)\int_0^T \left(\int_B H_t\omega^n\right)dt$$

для «инфинитезимально короткого» периода времени $[0,T]$. Другими словами, мы продифференцируем это соотношение по t при $t=0$ и докажем тождество

$$\int_B \left(\frac{d}{dt}h\right)\omega^n = (n+1)\int_B H_0\omega^n.$$

Заметим, что производная при $t=0$ от левой части формулы (8.1) для диффеоморфизма g_t является, по определению, взятой со знаком минус, производной Ли от 1-формы θ вдоль гамильтонова векторного поля $v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t$, порожденного функцией $H = H_0$:

$$-L_v\theta = d\left(\frac{d}{dt}h\right). \tag{8.3}$$

Мы применим формулу гомотопии Картана $L_v = i_v d + d i_v$ (см. гл. I, п. 7.2) к производной Ли $L_v\theta$ и используем определение функции Гамильтона $-dH = i_v\omega$, где $\omega = d\theta$:

$$-L_v\theta = -i_v d\theta - d i_v\theta = d(H - i_v\theta). \tag{8.4}$$

Из формул (8.3)–(8.4) находим производную $\frac{d}{dt}h$: $\frac{d}{dt}h = H - i_v\theta$. (На самом деле, формулы (8.3), (8.4) позволяют восстановить производную только с точностью до аддитивной константы, которая оказывается равной нулю благодаря условиям равенства нулю H, v и h на крае.)

Теперь теорема 8.7 вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.10.

$$-\int_B (i_v\theta)\omega^n = n\int_B H\omega^n.$$

Доказательство леммы 8.10. Пользуясь свойствами внутренней производной i_v, имеем

$$-\int_B i_v\theta\wedge\omega^n = -\int_B \theta\wedge i_v(\omega^n) = -n\int_B \theta\wedge i_v\omega\wedge\omega^{n-1} = n\int_B \theta\wedge dH\wedge\omega^{n-1}.$$

Перенося внешнее дифференцирование d на 1-форму θ, получаем

$$n\int_B d\theta\wedge H\wedge\omega^{n-1} - n\int_{\partial B}\theta\wedge H\wedge\omega^{n-1} = n\int_B H\omega^n,$$

поскольку функция H обращается в нуль на ∂B. Этим завершается доказательство леммы 8.10 и теоремы 8.7. □

Замечание 8.11. Теорема 8.7 может быть переформулирована следующим образом. Определим *интеграл Калаби* от функции Гамильтона H как $\int\limits_B H\omega^n$. Эта формула определяет линейную функцию (или внешнюю 1-форму) на алгебре Ли $\mathrm{ham}_\partial(B)$.

Формой Калаби на соответствующей группе $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ называется правоинвариантная дифференциальная форма, совпадающая с интегралом Калаби на алгебре Ли $\mathrm{ham}_\partial(B)$. Форма Калаби, в действительности, является *биинвариантной* (т. е. как лево-, так и правоинвариантной) 1-формой на группе гамильтоновых диффеоморфизмов $\mathrm{Ham}_\partial(B)$. Это непосредственно следует из того, что интеграл Калаби, определяемый на алгебре Ли $\mathrm{ham}_\partial(B)$, инвариантен относительно присоединенного представления соответствующей группы $\mathrm{Ham}_\partial(B)$.

С другой стороны, последнее справедливо, потому что симплектоморфизм переводит векторное поле с гамильтонианом H в гамильтоново векторное поле для перенесенной функции, в то же время сохраняя ω^n. Следовательно, действие симплектоморфизма сохраняет интеграл.

Инвариант Калаби $\mathrm{Cal}(g)$ гамильтонова диффеоморфизма g в $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ является интегралом от формы Калаби вдоль пути g_t в $\mathrm{Ham}_\partial(B)$, соединяющего тождественный диффеоморфизм с g.

Теорема 8.7′. *Форма Калаби является точной: интеграл зависит только от конечной точки g, а не от связывающего пути.*

Хотя мы уже установили точность формы Калаби, предложим здесь другой путь доказательства ее замкнутости. Форма оказалась бы точной, если бы мы знали, что группа гамильтоновых диффеоморфизмов является односвязной, т. е. что каждый путь, связывающий тождественный с g в $\mathrm{Ham}_\partial(B)$, гомотопичен (или, по крайней мере, гомологичен) любому другому. К сожалению, мы не знаем, так ли это во всех размерностях (см. замечание 8.9).

Доказательство замкнутости. Начнем с хорошо известного общего факта.

Лемма 8.12. *Для любой правоинвариантной дифференциальной формы α на произвольной группе Ли*

$$d\alpha(\xi,\eta) = \alpha([\xi,\eta])$$

для каждой пары векторов ξ,η в алгебре Ли.

(Эта формула следует из самого определения внешнего дифференциала d, см. гл. I, п. 7.2.) Поэтому дифференциал формы Калаби равен интегралу со знаком минус от скобки Пуассона двух гамильтоновых функций.

Лемма 8.13. *Пусть H является произвольной функцией Гамильтона, определенной на шаре B и постоянной на крае ∂B. Тогда скобка Пуассона H с другой функцией Гамильтона F имеет нулевой интеграл по B.*

Пример 8.14. Для двух гладких функций F и H в ограниченной области D плоскости (p,q)

$$\int\limits_D \{F,H\}dp\wedge dq = 0$$

при условии, что H постоянна на крае ∂D (т. е. что гамильтоново поле от H касается ∂D). Действительно,

$$\int\limits_D \{F, H\} dp \wedge dq = \int\limits_D dF \wedge dH = -\int\limits_{\partial D} H\, dF = -H \int\limits_{\partial D} dF = 0,$$

так как H постоянна на крае ∂D.

Доказательство леммы 8.13. Скобка Пуассона $\{F, H\}$ производной функции F равна (со знаком минус) вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H. Рассмотрим $2n$-форму в B, которая является результатом перенесения $2n$-формы $F\omega^n$ потоком поля с гамильтонианом H. Этот поток оставляет шар B инвариантным, так как H постоянна на границе ∂B и соответствующий гамильтонов поток касается ∂B.

Тогда интеграл от скобки Пуассона $\{F, H\}$ равен (минус) производной по времени от интеграла этой результирующей формы по шару B. Но эти гамильтоновы течения сохраняют ω^n, и, следовательно, сохраняют интеграл.

Таким образом, производная по времени от интеграла переносимой формы, а значит, и интеграл от скобки Пуассона обращаются в нуль. □

Замечание 8.15. Подобным образом интеграл от скобки Пуассона любых двух гладких функций на *замкнутом* компактном симплектическом многообразии равен нулю. Можно заменить одну из функций замкнутой (неточной) дифференциальной 1-формой — это не меняет доказательства.

Более того, каждая функция на связном замкнутом симплектическом многообразии, интеграл от которой обращается в нуль, может быть представлена как сумма скобок Пуассона функций на этом многообразии [Arn7].

Замкнутость формы Калаби (инвариантность интеграла (8.2) при деформациях пути) непосредственно следует из леммы 8.12 и леммы 8.13, так как дифференциал формы Калаби, являясь интегралом от скобки Пуассона (со знаком минус) на любых двух функциях из $\mathrm{Symp}_\partial(B)$, всегда обращается в нуль. □

Теперь мы готовы доказать, что диаметр группы симплектоморфизмов бесконечен.

Доказательство теоремы 8.3 для $\mathrm{Ham}_\partial(B^{2n})$. Пусть шар B^{2n} снабжен стандартной симплектической структурой, и пусть $\mu = \omega^n$ — соответствующая форма объема. Рассмотрим ℓ_2-длину пути $\{g_t\}$ в правоинвариантной метрике на $\mathrm{Ham}_\partial(B)$, определяемую следующим образом:

$$\ell(\{g_t\}) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_B \left\| \frac{dg_t(x)}{dt} \right\|^2 \mu \right)^{1/2} dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_B \|\nabla H_t(g_t)\|^2 \mu \right)^{1/2} dt = \int\limits_0^1 \|\nabla H_t\|_{L^2(B)}\, dt.$$

(Здесь g_t является потоком с зависящим от времени гамильтонианом $H_t(x)$ и соединяющим $g_0 = \mathrm{Id}$ и $g_1 = g$.) Длина оценивается снизу инвариантом

Калаби (при помощи неравенств Пуанкаре и Шварца).

$$\ell(\{g_t\}) = \int_0^1 \|\nabla H_t\|_{L^2(B)}\,dt \geqslant c_1 \int_0^1 \|H_t\|_{L^2(B)}\,dt \geqslant$$
$$\geqslant c_2 \int_0^1 \|H_t\|_{L^1(B)}\,dt \geqslant c_2 \int_0^1 \int_B H_t \mu\,dt = c_2 \cdot \mathrm{Cal}(g).$$

Поскольку отображение $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}_\partial(B) \to \mathbb{R}$ сюръективно, можно найти гамильтонов диффеоморфизм (см. замечание 8.4) со сколь угодно большим инвариантом Калаби, и потому сколь угодно далекий от тождественного. □

Доказательства аналогичных утверждений для правоинвариантной метрики, порожденной L^1-нормой на векторных полях $\mathrm{ham}(M)$, и для неточных симплектоморфизмов (теорема 8.3 в полной общности) требуют заметно бóльших усилий [ER2].

8.3. Биинвариантные метрики и псевдометрики на группе гамильтоновых диффеоморфизмов

Группа гамильтоновых диффеоморфизмов (с компактными носителями) $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$ стандартного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ (или группа симплектоморфизмов шара, которые неподвижны в окрестности его края) допускает интересные *биинвариантные* метрики (см. [Hof, E-P, LaM, H-Z, Plt, Don]). Правоинвариантная метрика, рассмотренная выше, определяется в терминах нормы *векторных полей*, что требует дополнительного задания некоторой метрики на $\mathbb{R}^{2n}$. Напротив, биинвариантные метрики определяются только в терминах *функций Гамильтона*.

Определение 8.16 (см. [E-P]). Любая L^p-норма ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ функций Гамильтона с компактными носителями определяет *длину* l_p произвольной гладкой кривой на группе $\mathrm{Ham}(M)$. Задав функцию Гамильтона $H_t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ потока от f до g, мы определим

$$l_p(f,g) := \int_0^1 \|H_t\|_{L^p(\mathbb{R}^{2n})}\,dt.$$

Функционал длины порождает *псевдометрику* ρ_p на группе $\mathrm{Ham}(M)$ (т. е. некоторую симметрическую неотрицательную функцию на

$$\mathrm{Ham}(M) \times \mathrm{Ham}(M),$$

для которой выполняется неравенство треугольника).

Псевдометрики ρ_p являются *биинвариантными*. Это непосредственно следует из инвариантности L^p-нормы под действием присоединенного действия группы симплектоморфизмов. В самом деле, интеграл

$$\|H\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{2n})} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |H(x)|^p \omega^n$$

сохраняется при симплектических заменах переменной x. (Можно было начать с произвольной симплектически инвариантной нормы на алгебре $\mathrm{ham}(M)$.) В частности, расстояние $\rho_\infty(\mathrm{Id}, f)$ в L^∞-(псевдо)метрике между любым гамильтоновым диффеоморфизмом $f \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$ и тождественным элементом Id определяется как

$$\rho_\infty(\mathrm{Id}, f) = \inf_H \int_0^1 \sup_x |H(x,t)|\, dt,$$

где нижняя грань берется по всем функциям Гамильтона $H(x,t)$, соответствующим потокам, начинающимся в Id и оканчивающимся в f. По определению $\rho_\infty(f,g) := \rho_\infty(\mathrm{Id}, fg^{-1})$.

Эта биинвариантная (псевдо)метрика ρ_∞ эквивалентна метрике Хофера [Hof]

$$\rho'_\infty(\mathrm{Id}, f) = \inf_H \int_0^1 (\sup_x H(x,t) - \inf_x H(x,t))\, dt. \tag{8.5}$$

Впоследствии мы будем использовать единое обозначение ρ_∞ для ρ_∞ и ρ'_∞.

Теорема 8.17 (см. [Hof]). *(Псевдо)метрика ρ_∞ является настоящей биинвариантной метрикой на группе $\mathrm{Ham}(M)$, т. е. помимо неотрицательности и неравенства треугольника соотношение $\rho_\infty(f,g) = 0$ влечет совпадение диффеоморфизмов $f = g$.*

Лалонд и МакДафф [LaM] показали, что ρ_∞, определяемая той же формулой (8.5) для любого симплектического многообразия (M, ω), является настоящей метрикой на группе $\mathrm{Ham}(M)$. Они использовали этот факт в доказательстве теоремы несжимаемости Громова в полной общности для отображений произвольных симплектических многообразий в симплектический цилиндр.

Оказывается, что только предельный случай $p = \infty$ является L^p-нормой на гамильтонианах, порождающей метрику. Для $1 \leqslant p < \infty$ существуют различные симплектоморфизмы с нулевым ρ_p-расстоянием между ними [E-P]. Свойства определенных выше (псевдо)метрик вытекают из специальных свойств следующего симплектического инварианта, впервые введенного Хофером для подмножеств в $\mathbb{R}^{2n}$ и названного энергией смещения.

Пусть ρ — биинвариантная (псевдо)метрика на группе гамильтоновых диффеоморфизмов $\mathrm{Ham}(M)$ открытого симплектического многообразия M.

Определение 8.18. *Энергией смещения* $e(A)$ подмножества $A \subset M$ называется (псевдо)расстояние от тождественного отображения до множества всех симплектоморфизмов, полностью сдвигающих A в себя: $e(A) = \inf\{\rho(\mathrm{Id}, f)\}$, где нижняя грань берется по всем $f \in \mathrm{Ham}(M)$ таким, что $f(A) \cap A = \varnothing$. (Если такого f нет, положим $e(A) := \infty$.)

Теорема 8.19 (см. [E-P]). *Пусть ρ — биинвариантная метрика на $\mathrm{Ham}(M)$. Тогда энергия смещения каждого открытого подмножества $A \subset M$ ненулевая, $e_\rho(A) \neq 0$.*

Например, для диска $B \subset \mathbb{R}^2$ радиуса R энергия смещения в метрике Хофера равна πR^2 [Hof]. Кроме того, энергия смещения является ненулевой

для произвольного компактного *лагранжевого подмногообразия* в M [Che]. (Подмногообразие L симплектического многообразия (M^{2n}, ω) называется *лагранжевым*, если $\dim L = n$ и ограничение 2-формы ω на L обращается в нуль.)

Доказательство теоремы 8.19. Заметим, что для коммутатора $[\varphi, \psi]$ любых двух элементов $\varphi, \psi \in \mathrm{Ham}(M)$ выполняется неравенство

$$\rho(\mathrm{Id}, [\varphi, \psi]) \leqslant 2 \min(\rho(\mathrm{Id}, \varphi), \rho(\mathrm{Id}, \psi)). \tag{8.6}$$

Оно следует из биинвариантности метрики ρ и неравенства треугольника.

Выберем произвольные диффеоморфизмы $\varphi, \psi \in \mathrm{Ham}(M)$ такие, что их носители находятся в A и $[\varphi, \psi] \neq \mathrm{Id}$. Теорема 8.19 вытекает из следующей леммы. □

Лемма 8.20. $\rho(\mathrm{Id}, [\varphi, \psi]) \leqslant 4e_\rho(A)$.

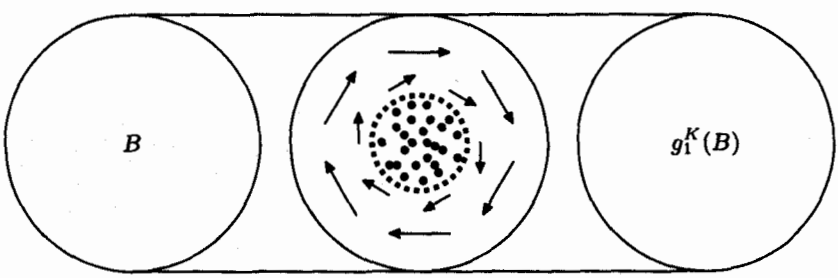
Доказательство леммы. Предположим, что гамильтонов диффеоморфизм $h \in \mathrm{Ham}(M)$ смещает A, $h(A) \cap A = \varnothing$. Тогда диффеоморфизм $\theta := \varphi h^{-1} \varphi^{-1} h$ имеет такое же ограничение на A, как φ. Следовательно, $\varphi^{-1}\psi\varphi = \theta^{-1}\psi\theta$. Используя биинвариантность и неравенство (8.6), мы получаем

$$\rho(\mathrm{Id}, [\varphi, \psi]) = \rho(\psi, \varphi^{-1}\psi\varphi) = \rho(\psi, \theta^{-1}\psi\theta) \leqslant 2\rho(\mathrm{Id}, \theta) \leqslant 4\rho(\mathrm{Id}, h).$$

Минимизация по h завершает доказательство. □

Следствие 8.21 (см. [E-P]). *(Псевдо)метрика ρ_p на $\mathrm{Ham}(M)$, порожденная L^p-нормой на $C_0^\infty(M)$, не является метрикой для $p < \infty$.*

Доказательство следствия. Рассмотрим вложенный шар $B \subset M$ и гамильтонов поток $\{g_t^H\}$ (с компактным носителем), который смещает шар B с себя, $g_1^H(B) \cap B = \varnothing$. Этот поток порождается функцией Гамильтона $H \in C_0^\infty(M \times [0,1])$. Введем новую функцию Гамильтона $K(\,.\,, t)$, гладко обрезая $H(\,.\,, t)$ вне окрестности $U_t \subset M$ движущегося края $g_t^H(\partial B)$, см. рис. 57.



$K(\cdot, t)$

Рис. 57. Смещение шара с вращением

Ограничение потоков K и H на край ∂B совпадают, $g_t^K(\partial B) = g_t^H(\partial B)$ для каждого t, и потому $g_1^K(B) \cap B = \varnothing$.

Сжимая окрестности U_t, можно сделать L^p-норму $K(\,.\,, t)$ (и, следовательно, величину расстояния $\rho_p(\mathrm{Id}, g_1^K)$) произвольно малой для каждого

$p \neq \infty$. Таким образом, энергия смещения для шара B, соответствующая ρ_p, $p \neq \infty$, обращается в нуль. Доказательство завершается теперь применением теоремы 8.19. □

Неформально говоря, можно сместить шар с самого себя с произвольно низкой энергией, но ценой крайне быстрого вращения переносимого шара вблизи края: функция $K(\,.\,,t)$ имеет крутые склоны (и, следовательно, большой градиент) в некоторой окрестности сферы ∂B.

Ограничимся далее случаем гамильтоновых диффеоморфизмов с компактным носителем в $\mathbb{R}^{2n}$.

Замечание 8.22 (см. [E-P]). Для любого диффеоморфизма $\varphi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$ и $1 < p < \infty$ имеем $\rho_p(\mathrm{Id}, \varphi) = 0$. Если $p = 1$, то $\rho_1(\mathrm{Id}, \varphi) = |\,\mathrm{Cal}(\varphi)|$.

Ситуация совершенно иная для биинвариантных метрик L^∞-типа. Многие интересные свойства таких метрик для групп симплектоморфизмов описаны в [H-Z].

В частности, рассмотрим вложение группы гамильтоновых диффеоморфизмов, скажем, шара $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ в группу всех гамильтоновых диффеоморфизмов $\mathbb{R}^{2n}$ с компактными носителями.

Теорема 8.23 (см. [Sik]). *Подгруппа всех гамильтоновых диффеоморфизмов* $\mathrm{Ham}_\partial(B)$ *единичного шара (неподвижных вблизи края) имеет конечный диаметр (в метрике Хофера) в группе всех гамильтоновых диффеоморфизмов* $\mathbb{R}^{2n}$ *с компактными носителями.*

Для диффеоморфизмов с носителями в шаре радиуса R этот диаметр ограничен сверху числом $16\pi R^2$, [H-Z].

Кроме того, для метрики Хофера справедлив следующий аналог оценок $S\mathrm{Diff}(M^3)$- и L^2-метрик (ср. с теоремой 7.9).

Теорема 8.24 (см. [Hof]). *Метрика* ρ_∞ *является непрерывной в* C^0*-топологии: для каждого* $\psi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$

$$\rho_\infty(\mathrm{Id}, \psi) \leqslant 128\,(\textit{диаметр носителя } (\psi))\,|\,\mathrm{Id} - \psi|_{C^0},$$

где ρ_∞ *дается формулой* (8.5).

Диаметр разительно меняется, если рассмотреть саму группу $\mathrm{Ham}_\partial(B)$. Для произвольного симплектического многообразия M с краем его группа гамильтоновых диффеоморфизмов $\mathrm{Ham}_\partial(M)$, неподвижных на крае, имеет бесконечный диаметр в метрике Хофера (сравните с теоремой 8.3, устанавливающей бесконечность диаметра в правоинвариантной L^2-метрике). Это следует из существования симплектоморфизмов с произвольно большим инвариантом Калаби, который ограничивает снизу метрику Хофера. Более тонким утверждением является то, что диаметр подгруппы-коммутанта для $\mathrm{Ham}_\partial(M)$, т.е. подгруппы гамильтоновых диффеоморфизмов с нулевым инвариантом Калаби, также является бесконечным, см. [LaM]. В этой работе также описаны геодезические в метрике Хофера.

Проблема 8.25. Является ли диаметр группы гамильтоновых диффеоморфизмов в метрике Хофера бесконечным для любого замкнутого симплектического многообразия?

Бесконечность диаметра была доказана для некоторых классов многообразий, включающих двумерную сферу $S^2 = \mathbb{C}P^1$ и $\mathbb{C}P^2$ [Plt2], $\mathbb{C}P^n$ для всех n [EnP] и для многообразий с $\pi_2 = 0$ [Ost]. Для произвольных симплектических многообразий вопрос по-прежнему открыт.

8.4. Биинвариантная псевдориманова метрика и функционал действия на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного многообразия

Хотя бездивергентные векторные поля не имеют аналога функции Гамильтона при размерности многообразия большей двух, группа диффеоморфизмов односвязного трехмерного многообразия, сохраняющих объемы, может быть снабжена биинвариантной (но уже незнакоопределенной) метрикой.

Пусть M — односвязное компактное трехмерное многообразие, снабженное формой объема μ. Чтобы определить биинвариантную метрику на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов M, нужно фиксировать на алгебре Ли $S\mathrm{Vect}(M)$ бездивергентных векторных полей некоторую квадратичную форму, которая является инвариантной при присоединенном действии группы $S\mathrm{Diff}(M)$ (т. е. при замене переменных, сохраняющей форму объема). Такая квадратичная форма уже была введена в гл. III, п. 1.4 как *инвариант Хопфа* (или функционал спиральности, или асимптотическое число зацепления) бездивергентного векторного поля.

Напомним, что мы начинаем с некоторого бездивергентного векторного поля v на M^3 и определяем дифференциальную 2-форму $\alpha = i_v\mu$, которая является точной на M. Инвариант Хопфа $\mathcal{H}(v)$ является незнакоопределенной квадратичной формой

$$\mathcal{H}(v) = \int\limits_M d^{-1}\alpha \wedge \alpha.$$

Группа $S\mathrm{Diff}(M)$ может быть снабжена правоинвариантной незнакоопределенной метрикой ρ «конечной сигнатуры» посредством правых сдвигов $\mathcal{H}$ в каждое касательное пространство на группе.

Квадратичная форма $\mathcal{H}(v)$ является инвариантной при заменах переменных, сохраняющих объемы, поскольку она определена независимо от координат. Следовательно, соответствующая псевдориманова метрика ρ на группе $S\mathrm{Diff}(M)$ является биинвариантной. Эта метрика имеет бесконечные индексы инерции (∞, ∞), поскольку таков же тип спектра оператора d^{-1} (или rot^{-1}) (см. [Arn9, Smo1]). Свойства этой метрики, кроме тех, которые обсуждались в гл. III, по-прежнему мало изучены.

Подобное явление встречалось в симплектической топологии (или симплектической теории Морса, см., например, [A-G, Arn22, Cha, Vit, Gro]). Функционал действия на пространстве стягиваемых петель в симплектическом многообразии также имеет индексы инерции (∞, ∞).

Замечание 8.26. Для неодносвязного трехмерного многообразия M, снабженного формой объема μ, определение инварианта спиральности может

быть распространено на гомологичные нулю векторные поля (т. е. поля, принадлежащие образу оператора rot, см. гл. III, § 1):

$$\mathcal{H}(v,w) = \int\limits_M (i_v\mu) \wedge d^{-1}(i_w\mu).$$

Предложение 8.27. *Векторные поля, гомологичные нулю, образуют подалгебру в алгебре Ли бездивергентных векторных полей на M.*

Доказательство. Для любых двух бездивергентных векторных полей v и w на M их коммутатор $\{v,w\}$ гомологичен нулю: $i_{\{v,w\}}\mu = d(i_v i_w \mu)$. □

Следствие 8.28. *Подгруппа сохраняющих объемы диффеоморфизмов, соответствующая подалгебре гомологичных нулю векторных полей, может быть снабжена биинвариантной метрикой «конечной сигнатуры».*

Подалгебра гомологичных нулю векторных полей является также идеалом Ли в объемлющей алгебре Ли бездивергентных векторных полей. Более того, векторные поля, гомологичные нулю, образуют *коммутант* (т. е. пространство, порожденное всеми конечными суммами коммутаторов) *алгебры Ли* всех бездивергентных векторных полей на произвольном компактном связном многообразии M^n с формой объема ([Arn7], см. также [Ban] для симплектического случая).

Замечание 8.29. Рассмотрим бездивергентное векторное поле на трехмерном многообразии, которое является точным и имеет векторный потенциал. Свяжем с этим полем следующий аналог комплекса Морса. Замкнутой кривой на многообразии сопоставим циркуляцию векторного потенциала вдоль этой кривой (если кривая гомологична нулю, то это поток начального поля через поверхность Зейферта, ограниченную нашей кривой).

Мы задали функцию на пространстве кривых. Критические точки этой функции являются замкнутыми траекториями начального поля. Действительно, если поле нигде не касается кривой, его поток через малую поперечную площадку пропорционален ее площади, и первая вариация не могла бы обратиться в нуль.

Как положительный, так и отрицательный индексы инерции второй вариации этого функционала являются бесконечными. Действительно, в частном случае вертикального поля на многообразии, расслоенном над поверхностью на окружности, наш функционал является ориентированной площадью проекции кривой на базу расслоения. Он совпадает с невозмущенным функционалом из теории Рабиновича–Конли–Цендера (см. [H-Z]).

Из этой теории мы знаем, что бесконечность обоих индексов не является препятствием для приложения вариационных принципов. Можно надеяться, что теория Морса нашего функционала могла бы дать интересные инварианты бездивергентных векторных полей. В гидродинамических терминах это могли бы быть инварианты классов изозавихренных векторных полей, т. е. коприсоединенных орбит группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы.

Индекс Морса замкнутой траектории изменяется, когда траектория «сталкивается с другой», т. е. когда ее мультипликатор Флоке равен 1. Для

n-листного накрытия траектории индекс изменяется, когда мультипликатор Флоке, проходя по единичной окружности, обращается в корень n-й степени из единицы. Таким образом, структура этого комплекса Морса ясна, по крайней мере в пространстве расслоения на окружности для кривых, достаточно близких к слоям.

ГЛАВА V
ПРОБЛЕМА БЫСТРОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО

Звезды и планеты обладают магнитными полями, которые постоянно меняются. Земля, например, таинственно переключает свои северный и южный магнитные полюса так, что моменты переключений образуют множество канторова типа на временно́й шкале (см. [AnS]). Механизм возникновения магнитных полей у астрофизических объектов (или электропроводящих сред) составляет предмет *теории динамо*. Кинематическое динамо изучает, какой вид движения жидкости может вызывать экспоненциальный рост магнитного поля для малой магнитной диффузионности. Избегая аналитических и численных результатов (хотя и важных для этой области), мы опишем топологическую сторону теории.

§ 1. Динамо и растяжение частиц

1.1. Быстрое и медленное кинематическое динамо

Определение 1.1. *Уравнением кинематического динамо* называется система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\{v, B\} + \eta \Delta B, \\ \operatorname{div} B = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

(при некотором подходящем выборе единиц измерения).

Предположим, что известно поле скоростей v несжимаемой жидкости, заполняющей некоторую область M. Неизвестное магнитное поле $B(t)$ растягивается течением жидкости, в то время как малая диффузия рассеивает магнитную энергию. Здесь η — малый безразмерный параметр (представляющий собой *магнитную вязкость*), являющийся обратным к так называемому *магнитному числу Рейнольдса* $R_m = 1/\eta$. Скобка $\{v, B\}$ является скобкой Пуассона двух бездивергентных векторных полей (для полей v и B в трехмерном евклидовом пространстве это выражение может быть записано как $\{v, B\} = -\operatorname{rot}(v \times B)$). Векторное поле v предполагается касающимся края области M в любой момент времени. Граничные условия на B различны в разных физических ситуациях. Например, магнитное поле Солнца не касается края, а продолжается во внешнее пространство, образуя петли с концами на солнечной поверхности, видимые как протуберанцы.

В другой модели можно предположить, что граничные условия являются периодическими («звезда» или «планета» заменяется трехмерным тором

$\mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3$) или же, более общим образом, что M является произвольным римановым многообразием конечного объема, а Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M.

Уравнение линейного динамо получается из полной нелинейной системы магнитной гидродинамики отбрасыванием обратного действия магнитного поля на поле скоростей, посредством силы Лоренца. Это имеет физический смысл, когда магнитное поле мало. Такое бывает на начальной стадии разрастания «зерна» магнитного поля при растяжениях.

Следующий вопрос был сформулирован Я. Б. Зельдовичем и А. Д. Сахаровым ([Zel2, Sakh]).

Задача 1.2. Существует ли такое бездивергентное векторное поле v в области M, что энергия $E(t) = \|B(t)\|^2_{L^2(M)}$ магнитного поля $B(t)$ растет экспоненциально во времени для некоторого начального поля $B(0) = B_0$ и для произвольно низкой вязкости?

Рассмотрим решения уравнения динамо (1.1) вида $B = e^{\lambda t}B_0(x)$. Такого типа поле B_0 должно быть собственной функцией для (несамосопряженного) оператора

$$L_{v,\eta}\colon B_0 \mapsto -\{v, B_0\} + \eta\Delta B_0$$

с собственным числом $\lambda^{\mathbb{C}} = \lambda^{\mathbb{C}}(v,\eta)$. Это число $\lambda^{\mathbb{C}}$ называется *комплексным показателем роста* магнитного поля.

Определение 1.3. Поле v называется *кинематическим динамо*, если экспонента $\lambda(\eta) := \operatorname{Re}\lambda^{\mathbb{C}}(v,\eta)$ приращения магнитной энергии поля $B(t)$ положительна для всех достаточно больших *магнитных чисел Рейнольдса* $R_m = 1/\eta$. Динамо является *быстрым*, если существует такая положительная константа λ_0, что $\lambda(\eta) > \lambda_0 > 0$ для всех достаточно больших чисел Рейнольдса. Динамо, которое не является быстрым, называется *медленным*.

Существует много возможностей для эффекта динамо в некоторых «окнах» на оси чисел Рейнольдса. В нашей формализованной терминологии такие векторные поля мы не будем называть динамо.

Замечание 1.4. Существование режима экспоненциального роста поля B является свойством оператора $L_{v,\eta}$, и именно потому мы называем динамо поле скоростей v, а не пару (v, B). Теория кинематического динамо пренебрегает обратным влиянием магнитного поля B на саму проводящую жидкость (т. е. предполагается, что поле скоростей v не подвержено действию B). Как отмечено выше, это предположение оправдано, когда магнитное поле мало. Всякий раз, как растущее поле становится большим, надо принимать во внимание обратную связь, которая описывается полной системой уравнений МГД, включающей силы Лоренца и гидродинамическую вязкость.

Поставленный выше вопрос переформулируется теперь следующим образом.

Задача 1.2′. Существует ли бездивергентное векторное поле, задающее быстрое кинематическое динамо на многообразии M?

Наш главный интерес относится к *стационарным векторным полям* v в дву- и трехмерных областях M. Существует несколько (в основном, упро-

щающих) модификаций постановки этой задачи. Мы разделим рассмотрение диссипативного (реалистического, $\eta \to +0$) и недиссипативного (идеализированного, или совершенного, $\eta = 0$) случаев. В идеализированном *недиссипативном* случае магнитное поле вморожено в течение жидкости, и нас интересует экспоненциальный рост его энергии.

В *дискретной* (по времени) версии этой задачи мы следим за ростом магнитной энергии в моменты $t = 1, 2, \ldots$ Вместо переноса течением и непрерывной диффузии магнитного поля имеется композиция соответствующих двух дискретных процессов на каждом шаге. А именно, когда задан (сохраняющий объемы) диффеоморфизм $g\colon M \to M$ и оператор Лапласа–Бельтрами $\eta\Delta$ на римановом многообразии M, магнитное поле B переносится сначала диффеоморфизмом в $B' := g_* B$, а затем рассеивается как решение уравнения диффузии $\partial B'/\partial t = \eta \Delta B'$:

$$B' \mapsto B'' := \exp(\eta\Delta) B'.$$

З а д а ч а 1.5. Существует ли дискретное быстрое кинематическое динамо, т. е. существует ли такой сохраняющий объемы диффеоморфизм $g\colon M \to M$, что энергия магнитного поля B экспоненциально растет с числом n итераций отображения

$$B \mapsto \exp(\eta\Delta)(g_* B)$$

при $n \to \infty$ (при условии, что η является достаточно близким к 0)? Является ли энергия n-й итерации B ограниченной снизу величиной $\exp(\lambda n)$ с определенным $\lambda > 0$, не зависящим от η из интервала $0 < \eta < \eta_0$ для некоторого η_0?

Другие постановки задачи включают хаотические течения, «периодические» версии задачи динамо (в которых предполагается, что поле v на двуили трехмерном многообразии является периодическим во времени, а не стационарным), а также течения с различными симметриями пространства (см., например, [Bra, Bay1, Bay2, Chi2, Chi3, Sow2, Gil1, PPS, Rob]). Ниже мы детально опишем некоторые примеры конструкций динамо и основные теоремы антидинамо вместе с их естественными многомерными обобщениями. Мы увидим, что топология многообразия M с неизбежностью проявляется в конструкциях и доказательствах.

Следующее замечание Чилдреса показывает, что различие между быстрым и медленным динамо является скорее академическим. Предположим, что показатель динамо $\lambda(\eta)$ убывает крайне слабо, скажем, как $1/(\ln|\ln\eta|)$, когда диффузионность η стремится к нулю. (Это так для стационарного течения с седловыми особыми точками, рассмотренного в [Sow1].) Хотя теоретически это обеспечивает существование только медленного динамо, на практике динамо несомненно является быстрым: для $\eta = 1/(e^{e^3}) < 10^{-8}$ приращение $\lambda(\eta)$ имеет порядок $1/3$, т. е. заметно выше нуля.

З а м е ч а н и е 1.6. Более общей (и гораздо менее разработанной) постановкой задачи динамо является так называемая *самосогласованная теория*. В ней ищется как магнитное поле B, так и (зависящее от времени) поле ско-

ростей v из полной системы уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\{v, B\} + \eta \Delta B, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -(v, \nabla)v + (\operatorname{rot} B) \times B + \nu \Delta v - \nabla p, \\ \operatorname{div} B = \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

для полей B и v в евклидовой области (и с соответствующими значениями символов ∇, Δ, $\times$ и rot для трехмерного риманова многообразия). Мы отсылаем читателя к § 10 гл. I и к [HMRW] за теоретико-групповой трактовкой магнитной гидродинамики и к интересным и основательным обзорам [R-S, Chi2] за современными разработками как кинематической, так самосогласованной теорий. Здесь мы коснемся только топологической стороны теории быстрого кинематического динамо.

1.2. Недиссипативные динамо на произвольных многообразиях

В отличие от диссипативной («реалистической») задачи динамо, которая все еще не решена в полной общности, недиссипативные ($\eta = 0$) динамо легко построить на любом многообразии. Сначала рассмотрим случай двумерного диска.

На первый взгляд кажется, что *недиссипативное непрерывное по времени быстрое динамо на диске* (или на односвязном двумерном многообразии) *невозможно.*

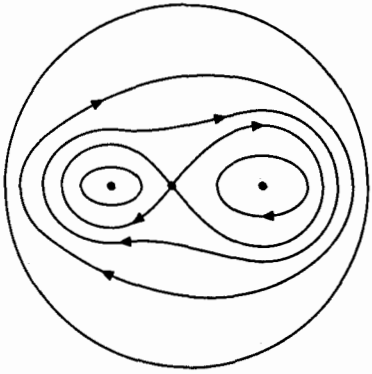


Рис. 58. Типичное гамильтоново поле скоростей на диске. Почти все орбиты поля являются замкнутыми

Псевдодоказательство. Каждое сохраняющее площадь векторное поле v на односвязном двумерном многообразии является гамильтоновым и может быть описано соответствующей функцией Гамильтона. Все орбиты поля v, которые являются кривыми некритических уровней таких функций, замкнуты (рис. 58).

Рассмотрим линеаризованное отображение Пуанкаре вдоль каждой замкнутой орбиты. Производная g_*^T отображения потока g^T в точке орбиты периода T в общем случае будет жордановой 2×2 клеткой с единицами на диагонали. Действительно, касательный вектор к орбите отображается в себя при отображении Пуанкаре, и, следовательно, он является собственным вектором с собственным числом 1. Тогда жорданова блочная структура немедленно следует из несжимаемости течения v при условии, что оно имеет невырожденный «перекос» вдоль орбиты (т. е. периоды меняются при изменении орбиты).

Такого типа жорданов оператор растягивает переносимые векторы магнитного поля B линейно с числом итераций отображения Пуанкаре (см. гл. II, § 5). Линейный рост нормы B на множестве полной меры влечет существование определенной линейной мажоранты для возрастания энергетической нормы $\sqrt{E}$ по времени. □

Однако нельзя пренебрегать вкладом особых уровней в магнитную энергию. Следующее утверждение является фольклором, появлявшимся в той или иной форме во многих исследованиях динамо (см. [VshM, Gil2, Koz1]).

Теорема 1.7. *На произвольном n-мерном многообразии любое бездивергентное векторное поле, имеющее особую точку с единственным положительным собственным числом (у линеаризованного поля в этой точке), является недиссипативным динамо.*

Доказательство. Главным пунктом доказательства является тот факт, что энергия эволюционирующего магнитного поля *внутри* малой окрестности особой точки уже растет экспоненциально во времени.

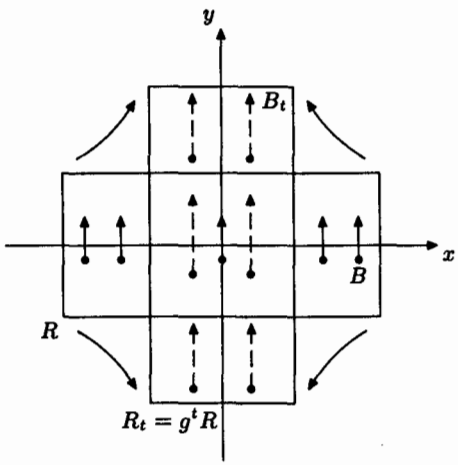


Рис. 59. Недиссипативное динамо, возникающее из гиперболической особой точки

Рассмотрим следующий частный случай. Многообразие $M = \mathbb{R}^2$ — двумерная плоскость с координатами (x, y), а скорость v на M — *стандартное линейное гиперболическое поле* $v(x, y) = (-\lambda x, \lambda y)$ с $\lambda > 0$. Допустим, что магнитное поле B является вертикальным постоянным полем $B = (0, b)$ с носителем в прямоугольнике $R := \{|x| \leqslant p/2,\ |y| \leqslant q/2\}$ (см. рис. 59).

Магнитная энергия в начальный момент, т. е. квадрат L^2-нормы поля B, есть

$$E_2(B) = \int\limits_R B^2\mu = pq \cdot b^2.$$

Спустя время t образ R_t прямоугольника R сжимается в горизонтальном направлении в $e^{\lambda t}$ раз и растягивается в вертикальном во столько же раз (так же как и поле B). Магнитную энергию поля $B_t := g_*^t B$ оценим снизу, ограничив поле на исходный прямоугольник:

$$E_2(B_t) = \int\limits_{R_t} B_t^2\mu > \int\limits_{R_t \cap R} B_t^2\mu = (\text{площадь } R_t \cap R)(e^{\lambda t}b)^2 =$$
$$= (pqe^{-\lambda t}) \cdot (e^{\lambda t}b)^2 = e^{\lambda t}E_2(B).$$

Выражение $e^{\lambda t}E_2(B)$ растет экспоненциально по времени.

Такая же оценка применима к произвольному многообразию M и произвольному векторному полю v, имеющему особую точку с единственным положительным собственным числом. Всегда можно направить начальное магнитное поле вдоль растягивающегося собственного вектора в некоторой окрестности особой точки. В цилиндрической окрестности этой точки получается

$$E_2(B_t) = \|B_t\|^2_{L^2(M)} \geqslant \|B_t\|^2_{L^2(R)} \geqslant e^{\lambda t}\|B\|^2_{L^2(R)} \geqslant$$
$$\geqslant Ce^{\lambda t}\|B\|^2_{L^2(M)} = C \cdot e^{\lambda t} \cdot E_2(B),$$

где $B_t := g_*^t B$ — образ поля B при отображении фазового потока векторного поля v, а C — некоторая положительная константа. □

Замечание 1.8. Экспоненциальный рост B можно получить в любой L^d-норме с $d > 1$. Экспоненциальное растяжение частиц (являющееся ключевой идеей описанной конструкции) встречается ниже во всех моделях динамо. Результат верен и в случае, когда особая точка имеет несколько положительных собственных чисел, скажем, для точки с собственными числами $\lambda_1 \geqslant \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 0 \geqslant \lambda_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ при условии, что $d\lambda_1 + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n > > 0$, или даже если такое же неравенство выполняется для вещественных частей комплексных собственных чисел.

Даже для L^1-нормы можно обеспечить экспоненциальный рост магнитной E_1-энергии, если число связных компонент пересечения $R_t \cap R$ экспоненциально возрастает со временем t. В следующем параграфе это явление описано для диффеоморфизма Аносова двумерного тора и для любого отображения с подковой Смейла.

§ 2. Дискретное динамо в размерности два

2.1. Динамо из отображения кошки на торе

Главные особенности схем разнообразных динамо можно проследить на следующем простом примере (см. [Arn11, AZRS1]).

Пусть объемлющее многообразие M — двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, снабженный стандартной евклидовой метрикой. Назовем *отображением кошки* линейное отображение $A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bmod 1.$$

Это отображение «из кошки делает окрошку»,ср. рис. 19. Направления сжатия (соответственно растяжения) во всех точках тора даются собственным вектором $u_1 \in \mathbb{R}^2$ (соответственно $u_2 \in \mathbb{R}^2$) матрицы A, отвечающим собственному значению $\chi_1 = (3+\sqrt{5})/2 > 1$ (соответственно $\chi_2 = (3-\sqrt{5})/2 < 1$, см. рис. 60).

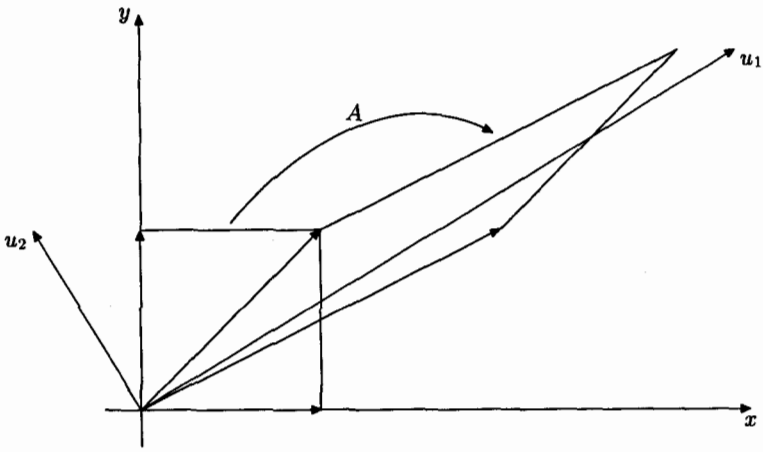


Рис. 60. Отображение кошки

Постоянное магнитное поле B_0, совпадающее с собственным вектором

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

в любой точке из $\mathbb{T}^2$, растягивается в χ_1 раз при каждой итерации A.

Диффеоморфизм $A\colon M \to M$ компактного многообразия M называется *отображением Аносова*, если M снабжено двумя инвариантными непрерывными полями плоскостей дополняющих размерностей, так что первое однородно растягивается, а второе однородно сжимается. Отображение кошки является простейшим примером отображения Аносова.

Замечание 2.1. Принятие в расчет магнитной диффузии не портит пример L^2-динамо из отображения кошки. Итерации $B_{n+1} = \exp(\eta\Delta)[A(B_n)]$ с $B_0 = B$ (и $\eta \neq 0$) дают такой же экспоненциальный рост поля, несмотря на диффузию. Действительно, поле B постоянно, и, следовательно, диффузия не меняет поля или его итерации:

$$\|B_n\|_{L^2} = \chi_1^n \|B_0\|_{L^2}.$$

Кроме того, можно перейти от линейного автоморфизма двумерного тора к произвольному гладкому диффеоморфизму $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ ([Ose2], см. п. 2.3 ниже).

Замечание 2.2. Отображение кошки $A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ является примером недиссипативного L^1-динамо. Оно обеспечивает экспоненциальный рост числа связных компонент пересечения $R \cap A^n(R)$ прямоугольника R (из теоремы 1.7) с его итерациями.

Отображение кошки на двумерном торе можно использовать для построения недиссипативного динамо и на двумерном диске. Идея состоит в использовании двулистного разветвленного накрытия $\mathbb{T}^2 \to S^2$ и автоморфизма Аносова $\mathbb{T}^2$, см. рис. 61. Центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2$ порождает инволюцию на торе, пространство орбит которой гомеоморфно сфере S^2. Автоморфизм

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с четырьмя неподвижными точками, имеющими целые и полуцелые координаты на $\mathbb{R}^2$, и, следовательно, он спускается на факторпространство $\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2 = S^2$.

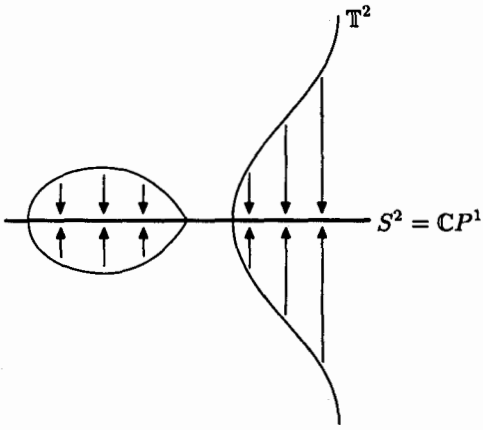


Рис. 61. Накрытие сферы тором разветвляется в четырех точках. Тор $w = \sqrt{z^3 - z}$ в $\mathbb{C}P^2$ отображается на сферу $S^2 = \mathbb{C}P^1$ проекцией $(z, w) \mapsto z$

Эта идея использовалась уже в 1918 г. Латтесом [Lat] и сейчас является довольно популярной в моделях эргодической теории и голоморфной динамики [Herm, Lyub, Kat1].

В контексте теории динамо конструкции, использующие отображения на (негладких) факторпространствах $\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2$, появились в [Gil2] вместе с результатами численных экспериментов. Подробный анализ, данный там, показывает, что для отображения диска по Латтесу любое магнитное поле

после нескольких итераций имеет замечательную структуру, где противоположно ориентированные векторы появляются произвольно близко друг к другу (рис. 62). Диссипативное действие диффузии, большое в этих местах, препятствует быстрому росту магнитной энергии.

Прием, преодолевающий эту трудность в моделях трехмерного динамо, состоит во включении взаимодействия «различных кусков» многообразия в итерационную процедуру, так, чтобы средняя диффузия в основном влияла бы на области с одинаковым направлением магнитного поля (см. [Gil2, B-C]).

Рис. 62. Взаимосокращения магнитного поля при итерациях (из [Gil2])

Вероятно, можно построить аналитическую модель быстрого диссипативного динамо в области в $\mathbb{R}^3$, исходя из конструкции диффеоморфизма Бернулли на D^2, известной в эргодической теории.

Определение 2.3. *Показателем Ляпунова* отображения g в точке x в направлении касательного вектора B называется скорость роста длины образа B при итерациях g, измеряемая как

$$\chi(x, B) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \|g_*^n B\|}{n}.$$

Можно добиться того, чтобы показатели Ляпунова диффеоморфизма типа Латтеса двумерного диска D^2 были положительными почти всюду (см. [Kat2]). Поля растягивающихся направлений являются, в общем случае, негладкими. Диффузионный член диссипативного динамо соответствовал бы «случайным перемешиваниям частиц», в дополнение к гладкой эволюции в потоке поля v (в духе работы [K-Y]).

2.2. Подковы и многократные складки в конструкциях динамо

Определение 2.4. Говорят, что фазовая точка (дискретной или непрерывной) динамической системы является *гомоклинической*, если ее траектория имеет своим пределом при $t \to \pm\infty$ одну и ту же стационарную точку системы, рис. 63.

Предложение 2.5 ([Koz1]). *Любое сохраняющее площади отображение поверхности, имеющее гомоклиническую точку, может выступать в качестве недиссипативного двумерного L^1-динамо.*

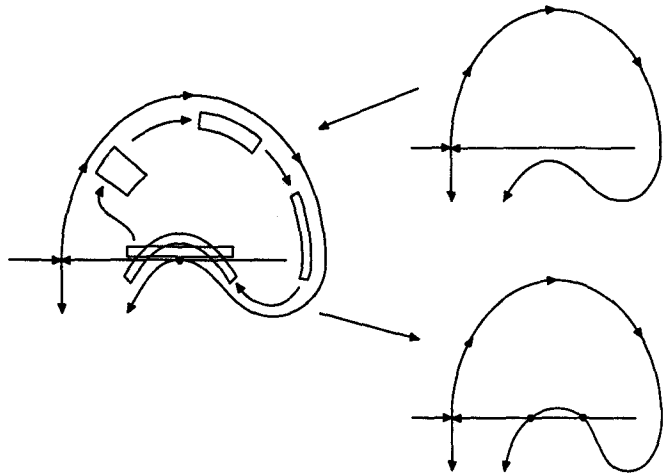


Рис. 63. Гомоклиническая точка и ее бифуркация

Доказательство. Предположим, что $g\colon D^2 \to D^2$ является (сохраняющим объемы) отображением двумерного диска в себя, имеющим *подкову Смейла*. Это означает, что существует прямоугольник $R \subset D^2$, на котором отображение g является композицией следующих двух шагов. Сначала прямоугольник сжимается в горизонтальном направлении с коэффициентом e^{λ} и растягивается в вертикальном направлении с тем же коэффициентом, причем площади сохраняются (рис. 64).

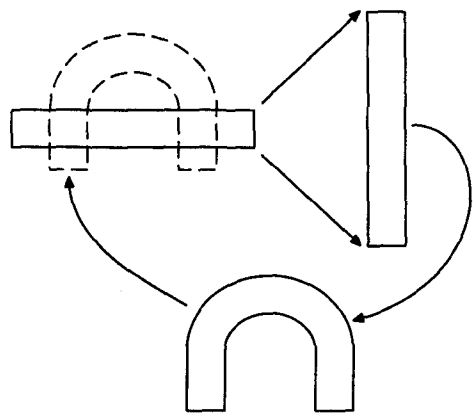


Рис. 64. Подкова Смейла

Затем полученный прямоугольник сгибается таким способом, что пересекается с первоначальным прямоугольником дважды (см. рис. 64).

При итерациях описанной процедуры число связных компонент пересечений $(g^n R) \cap R$ растет как 2^n, где n — число итераций. Теперь аргумент предыдущей теоремы применим к L^1-норме магнитного поля B. Следовательно, $\|B_n\|_{L^1} \geqslant C \cdot 2^n \|B_0\|_{L^1}$.

В окрестности гомоклинической точки типичное отображение имеет подкову Смейла. L^1-норма ограничения поля на эту подкову экспоненциально растет. Это завершает доказательство. □

Замечание 2.6. Динамика точек в инвариантном множестве подковы описывается посредством *последовательностей Бернулли* двух символов. Мы поставим метку 0 или 1 в позицию с номером n, если точка $g^n x$ принадлежит, соответственно, левой или правой ноге подковы Смейла. Инвариантное множество любой C^2-подковы в диске имеет меру нуль [BoR]. Условие на гладкость здесь существенно: существует пример C^1-подковы положительной меры (см. [Bow]).

Мы сталкиваемся здесь с той же трудностью, которая хорошо известна в теории стохастизации аналитических гамильтоновых динамических систем в окрестности периодической орбиты, которая является пределом траектории гомоклинической точки. Бифуркация нетрансверсальных пересечений устойчивого и неустойчивого многообразий такой периодической орбиты ведет к появлению так называемого инвариантного множества неблуждающих точек. (Точка a динамической системы g^t называется *блуждающей*, если существует окрестность $U(a)$ такая, что $U(a) \cap g^t U(a) = \varnothing$ для всех достаточно больших t.) Хотя существование хаоса типа Бернулли на этом множестве было известно после классической работы Алексеева [Al], до сих пор неизвестно, имеет ли соответствующее инвариантное множество фазового пространства положительную или нулевую меру. «Многократная складка», возникающая в такой системе, имеет в своей основе ту же природу, что и складка в недиссипативных моделях динамо.

Мы наблюдали такую складку вмороженного магнитного поля как в подковах, так и в конструкциях Латтеса. Следующая теорема показывает, что она неизбежно появляется во всех конструкциях динамо на диске.

Предложение 2.7 ([Koz1]). *Пусть $g\colon D^2 \to D^2$ является гладким сохраняющим площади диффеоморфизмом двумерного диска, для которого существуют открытое множество $U \subset D^2$, инвариантное относительно g, и непрерывное ориентированное поле направлений, определенное на U и инвариантное относительно g. Тогда показатели Ляпунова диффеоморфизма g обращаются в нуль почти всюду на U.*

Заметим, что отображение Латтеса позволяет нам построить такой диффеоморфизм диска, что инвариантное множество U есть этот диск с удаленными тремя малыми дисками, а показатели Ляпунова положительны (и равны $\ln \chi_1 = \ln(3 + \sqrt{5})/2 > 0$) на U. Однако, поле растягивающихся направлений не ориентировано. Это является главным препятствием к построению реалистического динамо на диске: ненулевая диффузия смешивает векторы магнитного поля B, которые противоположно ориентированы, и, следовательно, препятствует экспоненциальному росту энергии поля.

Доказательство предложения. Предположим противное, т. е. что показатели Ляпунова не обращаются в нуль на множестве U_1 положительной меры. В [Kat2] показано, что периодические точки диффеоморфизма g с гомоклиническими пересечениями их устойчивого и неустойчивого подмногообразий плотны в замыкании U_1. Рассмотрим такую точку x_0 и ориентируем вверх неустойчивое направление в такой точке (рис. 65). Тогда все эти направления, определенные на неустойчивом многообразии W^u точки x_0, касаются его и имеют согласованную ориентацию. Если в некоторый момент неустойчивое многообразие W^u пересечет устойчивое многообразие W^s в одном направлении, то следующее пересечение W^s будет в противоположном направлении, ввиду односвязности диска. (Напротив, например, на торе неустойчивое многообразие *может* пересечь устойчивое многообразие в двух последовательных точках в одном и том же направлении.) Таким образом, ориентация этих направлений меняется и не может быть непрерывно продолжена в точку x_0. □

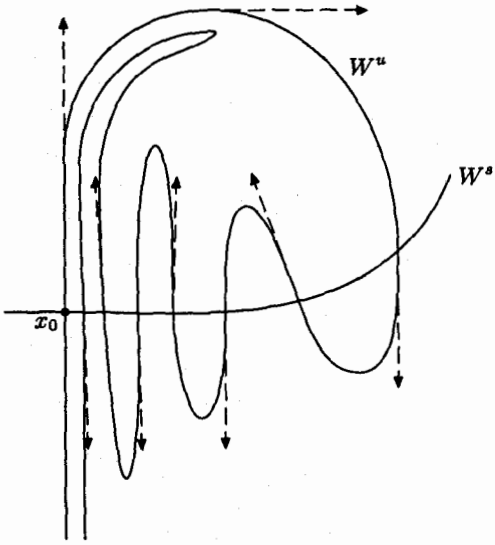


Рис. 65. Линейные ориентированные элементы на неустойчивом многообразии

Для того чтобы принять в расчет этот «перемешивающий» эффект в недиссипативном случае ($R_m = \infty$), мы введем следующее определение.

Определение 2.8. Сохраняющий объемы диффеоморфизм $g\colon M \to M$ называется недиссипативным *средним динамо*, если существует бездивергентное векторное поле B и 1-форма ω такие, что интеграл от спаривания формы ω с полем $g_*^n B$ растет экспоненциально, когда n стремится к бесконечности. Обозначим через λ_m максимальный показатель роста:

$$\lambda_m = \sup_{\omega, B} \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \ln \left| \int_M \omega(g_*^n B)\, \mu \right|.$$

Подобное определение может быть введено и в случае векторного поля вместо диффеоморфизма g. Понятие среднего динамо сильнее, чем понятие недиссипативного L^d-динамо ($d \geqslant 1$): любое среднее динамо является недиссипативным L^d-динамо. Другое важное различие между этими двумя понятиями следующее. Достаточное условие для недиссипативного динамо обеспечивается специальным поведением диффеоморфизма g в окрестности неподвижной точки (теорема 1.7). Ситуация в случаях среднего динамо и диссипативного динамо отличается от этой. Знание только локального поведения g недостаточно для того, чтобы заключить, что g является средним или быстрым диссипативным динамо.

Оказывается, если размерность многообразия равна 2, то диффеоморфизм g является быстрым диссипативным динамо тогда и только тогда, когда он является средним недиссипативным динамо. В этом случае ($\dim M = 2$) скорость роста λ_m определяется оператором $g_{*1}\colon H_1(M) \to H_1(M)$ действия g на первой группе гомологий поверхности M, так же как и в случае экспоненты динамо.

Теорема 2.9 ([Koz1]). *Сохраняющий площади диффеоморфизм g поверхности M является средним недиссипативном динамо тогда и только тогда, когда линейный оператор g_{*1} имеет собственное значение χ с $|\chi| > 1$. Экспонента среднего динамо λ_m равна $\ln|\chi|$.*

2.3. Диссипативные динамо на поверхностях

Теперь предположим, что в системе имеется ненулевая диссипация. В случае тора произвольный диффеоморфизм g может быть описан как $g(x) = \Phi x + \psi(x)$, ($x \bmod 1$), т. е. суммы линейного преобразования $\Phi \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и двояко-периодической функции ψ. В [Ose3] показано, что для диссипативного динамо, когда $\eta \to 0$, рост энергии магнитного поля на $\mathbb{T}^2$ контролируется исключительно матрицей Φ. Эта матрица представляет действие g на группе гомологий $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$.

Теорема 2.10 ([Ose2]). *Пусть $g(x) = \Phi x + \psi(x)$ является диффеоморфизмом (не обязательно сохраняющим площади) двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Тогда g является быстрым диссипативным динамо при $\eta \to 0$ тогда и только тогда, когда матрица Φ имеет собственное значение χ с $|\chi| > 1$. Показатель динамо $\lambda_0 = \lim\limits_{\eta\to 0} \lambda(\eta)$ равен собственному значению $\ln|\chi|$:*

$$\lambda(\eta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\|B_n\|}{n} \to \ln|\chi| \quad \text{при } \eta \to 0$$

для почти каждого начального векторного поля B_0. (Здесь $B_{n+1} = \exp(\eta\Delta) \times [g_* B_n]$, $n = 0, 1, \ldots$, если g сохраняет площадь, и $B_{n+1} = \exp(\eta\Delta) \times \left[(g_* B_n)/\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\right]$, где $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|$ является якобианом отображения, если g не сохраняет площадь. Норма $\|\,.\,\|$ является L^2-нормой векторного поля.)

Оказывается, что показатель динамо определяется исключительно действием g на первой группе гомологий и в более общей ситуации. Для любого произвольного двумерного многообразия M произвольный диффеоморфизм

$g\colon M \to M$ индуцирует линейный оператор g_{*i} в векторном пространстве $H_i(M,\mathbb{R})$ i-ой группы гомологий M для каждого $i = 0,\dots,\dim M$. Следующее утверждение обобщает теорему 2.10 (и аналогично теореме 3.20 для дискретных динамо).

Теорема 2.11 ([Koz1]). *Пусть $g\colon M \to M$ является сохраняющим площади диффеоморфизмом двумерного компактного риманова многообразия M. Диффеоморфизм g является диссипативным быстрым динамо тогда и только тогда, когда линейный оператор g_{*1} имеет собственное значение χ с $|\chi| > 1$. Экспонента динамо $\lambda(\eta)$ равна $\ln|\chi|$ и, следовательно, является независимой от η:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\|B_n\|}{n} = \ln|\chi|$$

для почти каждого начального векторного поля B_0. ($B_{n+1} = \exp(\eta\Delta)[g_* B_n]$, $n = 0,1,\dots$, а Δ является оператором Лапласа–Бельтрами на M.)

Замечание 2.12. Собственное число χ с $|\chi| > 1$ существует для «большинства» диффеоморфизмов поверхностей, отличных от сферы. Действительно, определитель $g_{*1}\colon H_1(M,\mathbb{R}) \to H_1(M,\mathbb{R})$ равен 1, так как g — диффеоморфизм.

Доказательство теоремы 2.11. Сначала покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\|B_n\|}{n} \leqslant \ln|\chi|.$$

Действительно, в пространстве 1-форм рассмотрим оператор $A^* = g^* \circ \exp(\eta\Delta)$, являющийся L^2-сопряженным оператору $A = \exp(\eta\Delta) \circ g_*$. Пусть ω является его (комплексным) собственным вектором, т. е. $A^*\omega = \kappa\omega$ с $\ln|\kappa| = \lambda(\eta)$. Такое ω существует, потому что норма сопряженного оператора A^* равна норме оператора A, а A^* является компактным оператором. Заметим, что $|\kappa| \geqslant 1$, так как $\det|g_{*1}| = 1$. Предположим, что $|\kappa| > 1$ (в противном случае утверждение очевидно).

Оператор внешней производной d коммутирует с g^* и с Δ. Поэтому $g^*\exp(\eta\Delta)d\omega = \kappa d\omega$, где g^* и Δ теперь действуют в пространстве 2-форм. Оператор взятия прообраза $g^*\colon \Omega^2(M,\mathbb{C}) \to \Omega^2(M,\mathbb{C})$ сохраняет L^2-норму, в то время как оператор Лапласа–Бельтрами Δ не увеличивает ее. Следовательно, если $|\kappa| > 1$, отсюда следует, что форма ω замкнута, $d\omega = 0$ (ср. также с теоремой 3.6 ниже).

Кроме того, оператор Лапласа–Бельтрами Δ не меняет класс когомологий $[\omega]$ замкнутой 1-формы ω, так что $g^{*1}[\omega] = \kappa[\omega]$, где g^{*1} — это действие g на первой группе когомологий $H^1(M,\mathbb{C})$, содержащей $[\omega]$.

Поэтому либо $[\omega] \neq 0$ и, следовательно, $|\kappa| \leqslant |\chi|$ (т. е. $\lambda(\eta) \leqslant \ln|\chi|$), либо $[\omega] = 0$. В последнем случае существует функция α такая, что $d\alpha = \omega$ и $g^*\exp(\eta\Delta)\alpha = \kappa\alpha$. Тот же аргумент, что и выше, показывает, что $\alpha = 0$, что противоречит предположению о том, что ω является собственным вектором. Таким образом, остается единственная возможность: $\lambda(\eta) \leqslant \ln|\chi|$.

Чтобы показать, что $\lambda(\eta) \geqslant \ln|\chi|$, мы рассмотрим когомологический класс, который является собственным вектором для g^{*1} с собственным значением χ.

Такой класс является инвариантным относительно A^*, и существует собственный вектор оператора A^* с собственным значением χ. Это влечет необходимое неравенство, а значит и равенство: $\lambda(\eta) = \ln|\chi|$. □

Теорема 2.11 справедлива также, если g не является сохраняющим объемы, а

$$B_{n+1} = \exp(\eta\Delta)\Big[(g_* B_n)\Big/\Big|\frac{\partial g}{\partial x}\Big|\Big],$$

где $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|$ — якобиан g. Легко видеть, что сопряженный оператор имеет тот же вид, что и прежде: $A^* = g^* \exp(\eta\Delta)$.

2.4. Асимптотическое число Лефшеца

Экспоненту динамо $\lambda(\eta)$ можно рассматривать как некоторую асимптотическую версию числа Лефшеца диффеоморфизма g (см. [Ose3]).

Определение 2.13. Пусть $g\colon M \to M$ — диффеоморфизм общего положения компактного связного ориентированного многообразия M. *Числом Лефшеца* $L(g)$ диффеоморфизма g называется следующая сумма по всем его неподвижным точкам $\{x_i\}$:

$$L(g) = \sum_{x_i} \operatorname{sign}\det\Big[\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) - \mathrm{Id}\Big],$$

где $\frac{\partial g}{\partial x}$ — это матрица Якоби диффеоморфизма в неподвижной точке, а Id — единичная матрица. *Асимптотическое число Лефшеца* $L_{\mathrm{as}}(g)$ есть

$$L_{\mathrm{as}}(g) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|L(g^n)|$$

(как мы увидим, в нашем примере lim sup есть просто lim).

Формула Лефшеца связывает вклад неподвижных точек диффеоморфизма g с его действием на группах гомологий:

$$L(g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}(g_{*i}),$$

где линейный оператор g_{*i} в векторном пространстве $H_i(M,\mathbb{R})$ i-й группы гомологий M индуцируется диффеоморфизмом $g\colon M \to M$.

Теперь представление показателя динамо $\ln|\chi|$ как асимптотического числа Лефшеца $L_{\mathrm{as}}(g)$ для $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ (или, в более общем случае, для любого $g\colon M \to M$) является немедленным следствием формулы Лефшеца:

$$L(g^n) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}((g^n)_{*i}) = 1 - \operatorname{tr}(\Phi^n) + 1 =$$
$$= (1-\chi^n)(1-\chi^{-n}) = -\chi^n + \mathcal{O}(1) \quad \text{при } |\chi| > 1,\ n \to \infty.$$

Здесь мы пользуемся тем, что для $i = 0, 2$ отображения g_{*i} действуют тождественно на $H_i(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Автоморфизм $g_{*1}\colon H_1(M,\mathbb{R}) \to H_1(M,\mathbb{R})$ может быть нетривиальным и задается матрицей Φ в случае тора $M = \mathbb{T}^2$.

§ 3. Главные теоремы антидинамо

3.1. Теоремы Коулинга и Зельдовича

Традиционно, необходимые условия на механизм динамо формулируются в виде *теорем антидинамо*. Эти теоремы уточняют (обычно геометрические) условия на многообразие M и векторное поле скорости v, при которых экспоненциальный рост L^2-нормы магнитного векторного поля (или, в более общем случае, какого-либо тензорного поля) на многообразии невозможен. В этом параграфе магнитная диффузия η предполагается ненулевой.

Это направление теории динамо, по-видимому, началось со следующей теоремы Коулинга [Cow]: *стационарное магнитное поле в $\mathbb{R}^3$, которое симметрично по отношению к вращениям вокруг заданной оси, не может создаваться стационарным полем скоростей, которое также симметрично по отношению к вращениям вокруг той же оси.* Эта теорема стимулировала многочисленные обобщения (см. [Zel1, K-R, R-S]), которые, в частности, показали, что свойства симметрии поля скоростей не имеют отношения к делу. Одна только симметрия магнитного поля уже предотвращает его рост.

Теорема 3.1. *Трансляционно-, спирально- или осесимметричное магнитное поле в $\mathbb{R}^3$ не может быть создано действием диссипативного динамо.*

В дальнейшем мы будем рассматривать в каком-то смысле двойственную задачу, в которой изучаются ограничения на геометрию *полей скорости*, не допускающие экспоненциального роста магнитного поля.

Рассмотрим область в трехмерном евклидовом пространстве, которая является инвариантной при переносах вдоль некоторого направления (скажем, вдоль вертикальной оси z). *Двумерное движение* в этой трехмерной области является некоторым (бездивергентным) горизонтальным векторным полем ($v_z = 0$), инвариантным при переносах вдоль вертикальной оси.

Я. Б. Зельдович рассмотрел случай, где проекция области на горизонтальную (x, y) плоскость вдоль вертикальной оси z является ограниченной и односвязной.

Теорема 3.2 ([Zel1]). *Предположим, что начальное магнитное поле имеет конечную энергию. Тогда, при переносе двумерным движением и действии магнитной диффузии такое поле затухает при $t \to \infty$.*

Короче говоря, «не существует быстрого кинематического динамо в размерности два».

Мы рассмотрим более общую постановку задачи для переноса-диффузии тензорных плотностей на (возможно, неодносвязном) многообразии.

3.2. Теоремы антидинамо для тензорных плотностей

В какой степени теоремы антидинамо могут быть перенесены на многосвязную ситуацию? Как мы увидим ниже, в неодносвязном случае вместо затухания магнитного поля наблюдается приближение к стационарному (во времени) режиму.

Предположение, что среда несжимаема, как оказалось, является излишним. В сжимаемом случае просто следует рассматривать эволюцию тензорных плотностей вместо эволюции векторных полей. Условие, что эволюционирующее векторное поле v является бездивергентным, может быть также опущено: мы увидим, что эволюция автоматически ведет к соленоидальной плотности для произвольного начального условия. Что действительно важно — так это размерность многообразия. Всюду в этом параграфе мы следуем статье [Arn10], к которой и отсылаем читателя за дальнейшими деталями.

Рассмотрим эволюцию дифференциальных k-форм на компактном n-мерном связном римановом многообразии M без края. Дифференциальная k-форма ω на M эволюционирует при переносе потоком с полем скоростей v и при диффузии с коэффициентом $\eta > 0$ согласно закону:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v \omega = \eta \Delta \omega. \tag{3.1}$$

Оператор производной Ли L_v задает условие, что форма вморожена в среду. Другими словами, нарисуем векторы на частицах среды и на их образах, перемещаемых полем скоростей v на новое место. Тогда величина формы, перенесенной действием (3.1) с $\eta = 0$, не меняется во времени, когда форма вычисляется на нарисованных векторах.

Линейный оператор L_v выражается в терминах оператора i_v (подстановки поля v в дифференциальную форму как первого аргумента) и оператора внешней производной d посредством формулы гомотопии $L_v = i_v \circ d + d \circ i_v$. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ на k-формах определяется формулой $\Delta = d\delta + \delta d$, где $\delta = *d*$ является оператором, сопряженным к d посредством римановой метрики на M. Оператор метрики $*\colon \Omega^k \to \Omega^{n-k}$ (поточечно) отождествляет k-формы на n-мерном римановом многообразии с $n-k$-формами.

В случае многообразия M с краем обычно необходимо добавить условие обращения в нуль на крае для форм и полей.

Пример 3.3. A. Предположим $M = \mathbb{E}^3$ — евклидово пространство с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Определим 2-форму $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$, выбрав векторное поле B с компонентами P, Q, R, т. е. $\omega = i_B \mu$, где $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$ является элементом объема. Для соленоидальных полей v и B уравнение (3.1) для ω переходит в уравнение (1.1), описывающее эволюцию магнитного поля B.

B. Для функций (т. е. для 0-форм, $k = 0$) уравнение (3.1) на M становится уравнением теплопроводности с переносом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(v, \nabla) f + \eta \Delta f. \tag{3.2}$$

C. Для скалярной плотности g (т. е. для $k = n$ и $\omega = g\mu$, где μ является элементом объема на римановом n-мерном многообразии) уравнение (3.1) приобретает вид:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{div}(g \cdot v) + \eta \Delta g, \tag{3.3}$$

используя соотношение $d(i_\xi \mu) = (\operatorname{div} \xi) \cdot \mu$.

Определение 3.4. Замкнутая k-форма ω на M называется *стационарной*, если она удовлетворяет уравнению

$$-L_v\omega + \eta\Delta\omega = 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.5 ([Arn10]). *Число линейно независимых стационарных k-форм не меньше, чем k-е число Бетти b_k многообразия M.*

Напомним, что k-е число Бетти b_k многообразия M есть $b_k(M) = \dim H_k(M, \mathbb{R})$. Примеры, в которых число стационарных форм строго больше чем b_k, обсуждаются ниже.

Теорема 3.6 ([Arn10]). *Для достаточно большого коэффициента диффузии η число линейно независимых стационарных k-форм равно k-му числу Бетти, и:*

a) *в каждом классе когомологий замкнутых k-форм имеется стационарная форма;*

b) *такая форма ровно одна;*

c) *любая замкнутая k-форма, эволюционирующая согласно уравнению* (3.1), *стремится при $t \to \infty$ к стационарной форме, принадлежащей тому же когомологическому классу, т. е. имеющей те же интегралы по каждому из k-мерных циклов;*

d) *эволюция, определяемая уравнением* (3.1) *с любыми начальными условиями, ведет в пределе к замкнутой форме;*

e) *все решения уравнения* (3.4) *являются замкнутыми формами.*

Замечание 3.7. Примеры, приведенные ниже, показывают, что утверждения п. b) и c) неверны, если вязкость достаточно мала (за исключением случаев $k = 0, 1$ или n). Экспоненциально растущие решения наблюдаются в случае $k = 2$, $n = 3$ (который наиболее интересен физически, см., например, [AKo]) на римановом многообразии M, где для малой вязкости η размерность пространства стационарных решений не меньше $2 > b_2(M) = 1$. Общая теорема 3.6 имеет следующие частные случаи.

Теорема 3.8 ($k = 0$). *При любом положительном коэффициенте диффузии η для уравнения теплопроводности* (3.2) *с переносом для скаляров:*

a) *каждое стационарное решение постоянно;*

b) *решение с любым начальным условием стремится к константе при $t \to \infty$.*

Теорема 3.9 ($k = n$). *При любом положительном значении η для уравнения теплопроводности* (3.3) *с переносом для скалярных плотностей:*

a) *размерность пространства стационарных решений уравнения* (3.3) *равна* 1;

b) *существует единственное стационарное решение с любым заданным интегралом по всему многообразию;*

c) *решение с произвольным начальным условием при $t \to \infty$ стремится к стационарному решению с тем же интегралом;*

d) *в частности, решение с начальными условием $g = \operatorname{div} B$ стремится к 0 при $t \to \infty$ независимо от поля B.*

Замечание 3.10. Задача динамо для скалярных плотностей сохраняет многие особенности векторной задачи динамо. Обсуждение и численные

данные в [Bay2] показывают, что собственные функции приобретают сингулярную структуру, когда диффузионность стремится к нулю.

С другой стороны, изучение скалярных плотностей (или, в более общем случае, дифференциальных k-форм) и их асимптотических собственных значений позволяет доказать неравенства Морса и их обобщения методом коротковолновых («квазиклассических») асимптотик [Wit1].

Теорема 3.11 ($k=1$). *Для любого положительного значения η в уравнении* (3.1) *для замкнутых* 1-*форм*:

a) *размерность пространства стационарных решений равна $b_1(M)$, одномерному числу Бетти многообразия*;

b) *существует единственное стационарное решение с заданными значениями интегралов по независимым* 1-*циклам*;

c) *решение с любыми начальными условиями стремится при $t \to \infty$ к стационарному решению с теми же интегралами.*

Задача динамо для магнитного векторного поля на компактном n-мерном римановом многообразии описывается уравнением (3.3) для $(n-1)$-формы ω. Соответствующая эволюция векторной плотности (или векторного поля) B, где $\omega = i_B\mu$, описывается уравнением

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\{v, B\} - B \operatorname{div} v + \eta \Delta B.$$

Теорема 3.12 ($k=n-1$). *Дивергенция эволюционирующего векторного поля B стремится к нулю при любом значении коэффициента диффузии $\eta > 0$. В частности, каждое стационарное решение уравнения* (3.3) *для $(n-1)$-форм является замкнутым.*

Следствие 3.13. *Каждое решение уравнения* (3.1) *для* 1-*форм на компактном двумерном многообразии стремится к стационарной замкнутой* 1-*форме при $t \to \infty$. Для односвязного двумерного многообразия каждое решение уравнения* (3.1) *стремится к нулю* (*ср. с теоремой* 3.2).

3.3. Отступление об уравнении Фоккера–Планка

Задача о нахождении асимптотик на больших промежутках времени для скалярной плотности в уравнении переноса с диффузией интересна уже в одномерном случае. Она возникает при изучении уравнения Фоккера–Планка

$$u_t + (uv)_x = \eta u_{xx}.$$

Это уравнение описывает перенос формы плотности $u(x)\,dx$ потоком векторного поля $v(x)\partial/\partial x$, сопровождаемым малой диффузией с коэффициентом η.

Предположим, например, что система является периодической по x и поле скоростей v потенциально. Введем потенциал U, для которого $v = -\operatorname{grad} U$ (аттракторы поля v являются тогда минимумами потенциала U).

Стационарное *решение Гиббса* этого уравнения имеет вид

$$\overline{u}(x) = \exp(-U(x)/\eta),$$

оно изображено на рис. 66. Если коэффициент диффузии η мал, то распределение плотности концентрируется вблизи минимумов потенциала. Эти минимумы являются аттракторами поля скоростей v. Масса (асимптотически) концентрируется вблизи аттрактора, соответствующего самому низкому уровню потенциала. (Заметим, что общая масса сохраняется при эволюции, $\int u(x,t)\,dx = \text{const.}$) Далее мы предположим, что потенциал достаточно общий и имеет только одну точку глобального минимума.

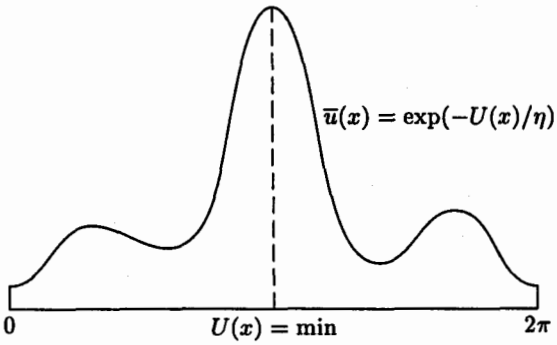


Рис. 66. Стационарное решение уравнения Фоккера–Планка: график плотности

Предположим, что начальная плотность распределена равномерно, скажем, $u = 1$ повсюду. Эволюция немедленно сделает ее неоднородной, и мы увидим максимумы типа Гаусса вблизи всех аттракторов поля v.

Сначала самым заметным будет максимум, соответствующий аттрактору с максимальным коэффициентом сжатия (т. е. максимальным модулем производной от v). Однако после некоторого конечного времени (независимого от η) распределение станет похожим на конечное множество точечных масс, сосредоточенных в аттракторах. На этом этапе самым заметным будет аттрактор, собравший наибольшую массу. А именно, на этом этапе каждый аттрактор поля v соберет практически всю массу из своей области притяжения (равную интегралу от начальной плотности по бассейну этого аттрактора). Таким образом, аттрактор, собравший наибольшую массу в этот момент, вообще говоря, будет отличен от аттрактора, наиболее заметного в начальный момент.

Следующим шагом будет (медленная) конкуренция между различными аттракторами за частицы в их окрестностях. Эта конкуренция описывается (асимптотически) системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{m} = Am$ с постоянными коэффициентами. Элементы соответствующей матрицы A называются *туннельными коэффициентами*. Они экспоненциально малы по η, и, следовательно, туннельная фаза процесса релаксации является экспоненциально долгой ($t \sim \exp(\text{const}/\eta)$). Поэтому в большинстве численных экспериментов вместо предельного распределения (Гиббса) (где почти вся масса сконцентрирована в одном месте) наблюдают промежуточное распределение (сконцентрированное в нескольких точках). Это промежуточное распределение эволюционирует уже так слабо, что его эволюция практически не наблюдается численно.

В конце концов ($t \to \infty$) один из аттракторов возьмет верх и притянет к себе почти всю массу. Этот аттрактор задается решением Гиббса, и он является в чем-то неожиданным: он и не тот, у которого максимальный начальный рост плотности, и не тот, который изначально содержит максимальную массу. Он называется «главным аттрактором», или «генеральным аттрактором» (вероятно потому, что так же трудно было предсказать, кто станет следующим «генеральным секретарем»).

Рассмотрим эволюцию плотности (т. е. дифференциальной n-формы) $u\mu$ на связном компактном n-мерном римановом многообразии с римановым элементом объема μ. Эволюция при переносе потоком градиентного поля скоростей $v = -\operatorname{grad} U$ и диффузии описывается уравнением

$$u_t + \operatorname{div}(uv) = \eta \Delta u.$$

(Заметим, что $(\operatorname{div}(uv))\mu = d(i_v(u\mu)) = L_v(u\mu)$ и $(\Delta u)\mu = (\operatorname{div}\operatorname{grad} u)\mu = d\delta(u\mu)$, так как $u\mu$ является дифференциальной n-формой, и, следовательно, замкнута.)

Спектр оператора эволюции $u \mapsto -\operatorname{div}(uv) + \eta\Delta u$ состоит из точки 0 (соответствующей распределению Гиббса) вместе с конечным множеством собственных значений, очень близких к 0 при $\eta \to 0$. Число таких собственных значений равно числу бассейнов притяжения поля v и определяется комплексом Морса для потенциала U. Существует «спектральная дыра» между этими «топологически необходимыми» собственными значениями и остатком спектра (который остается на конечном расстоянии слева от начала координат при $\eta \to 0$).

Туннельное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение является асимптотическим ($\eta \to 0$) описанием того, что происходит в конечномерном пространстве, натянутом на собственные векторы, отвечающие собственным значениям близким к 0. Собственные значения имеют порядок не больше $\exp(-\mathrm{const}/\eta)$ при $\eta \to 0$, в то время как характеристическое туннельное время имеет порядок $\exp(\mathrm{const}/\eta)$. Это и объясняет слабое затухание мод, соответствующих неглавным аттракторам.

Замечание 3.14. Вопреки очевидной важности проблемы описание явлений, приведенных выше, по-видимому, не представлено в литературе (ср., например, [F-W]). Наше изложение основывается на неопубликованной статье В. В. Фока [Fock] и на работах Виттена [Wit1] и Хелфера [Helf][1]. Фок также заметил, что асимптотики плотности в типичной точке границы между областями притяжения двух конкурирующих аттракторов задаются универсальной (*erf*) функцией в трансверсальном направлении к границе раздела. Здесь время предполагается большим, но фиксированным, а $\eta \to 0$. Асимптотика плотности дается почти собственной функцией (квазимодой), сконцентрированной в одной области притяжения с одной стороны от границы, и квазимодой, соответствующей соседней области — с другой стороны.

[1]Мы благодарим М. А. Шубина и С. Кинга за разъяснения по адаптации общей теории к нашей ситуации.

Переход из одной асимптотики в другую на границе, согласно Фоку, описывается с помощью локальной переходной функции erf, подобной ступеньке.

Эта теория обобщается на случай k-форм, причем малые собственные значения соответствуют критическим точкам потенциала индекса k (см. [Wit1]).

Замечание 3.15 (C. King). В потенциальном случае (как в одномерном, так и для более высокой размерности) оператор $L_v - \eta\Delta$ сопряжен неотрицательному самосопряженному оператору. Следовательно, его спектр является вещественным и неотрицательным.

А именно, замена переменных $\tilde{u}(x) = e^{U(x)/2\eta}u(x)$ переводит одномерный оператор $L_v - \eta\Delta$ в оператор $\eta D_\eta^* D_\eta$, где

$$D_\eta := \frac{d}{dx} + \frac{v(x)}{2\eta} = e^{U(x)/2\eta}\frac{d}{dx}e^{-U(x)/2\eta}.$$

Последнее выражение известно как деформация градиента по Виттену (ее спектральные свойства см. в [Helf]). Квазиклассические асимптотики спектра эллиптических самосопряженных операторов очень общего типа изучались в [Sh1] (см. также [Sh2]).

Замечание 3.16. Случай, когда поле скоростей является локально (но не глобально) градиентным, весьма интересен. Это может случиться уже на окружности. В таком случае формула Гиббса $\overline{u}(x) = \exp(-U(x)/\eta)$ работает только на накрывающей прямой. Потенциал уже не является периодической функцией, а лишь псевдопериодической (суммой линейной и периодической функций).

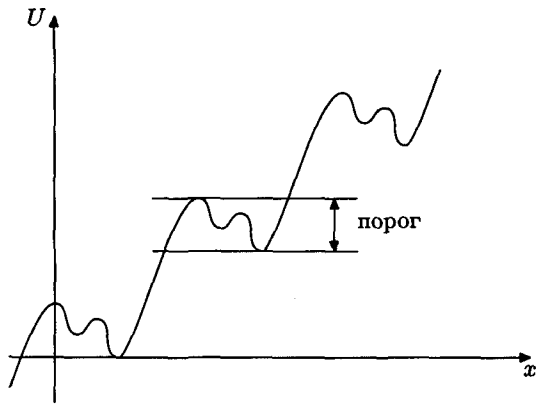


Рис. 67. Порог для локального минимума потенциала является минимальной высотой, которую надо преодолеть, чтобы уйти в бесконечность

Для каждого локального минимума потенциала мы определим «*порог*» как минимальную высоту, которую нужно преодолеть, чтобы уйти на бесконечность, рис. 67. Главным аттрактором оказывается тот, для которого порог максимален.

Многие факты, описанные выше, допускают обобщения на случай псевдопериодического потенциала в высших размерностях. В частности, число

затухающих собственных чисел равно числу критических точек поля соответствующего индекса [Fock].

Заметим, что описание топологии псевдопериодических функций является само по себе богатым и интересным вопросом уже в размерности два (см. [Arn19, Nov3, SiK, GZ, Dyn, Zor, Pan]), где многое еще остается сделать.

Замечание 3.17. Б. Фидлер и К. Роша развили в [F-R] интересную топологическую теорию аттракторов нелинейных уравнений с частными производными типа

$$u_t = f(x, u, u_x) + \eta a(x) u_{xx}.$$

Они вычислили комплекс Морса, определяемый гетероклиническими связями между стационарными решениями в терминах некоторых перестановок и меандров. Меандр задается плоской кривой и прямой линией. Соответствующая перестановка переводит порядок точек пересечения вдоль прямой линии в их порядок вдоль кривой.

3.4. Доказательство теорем антидинамо

Доказательство теоремы 3.5 (согласно Е. И. Коркиной). Оператор $A = -L_v + \eta\Delta$ действует на пространстве H замкнутых k-форм на M. Обозначим через $\operatorname{Ker} A$ множество решений однородного уравнения $A\omega = 0$ и через $\operatorname{Im} A$ — образ A в пространстве H. Индекс определяется как $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$, где $\operatorname{Coker} A = H/\operatorname{Im} A$. Индекс оператора Лапласа Δ нулевой, таким же является и индекс A (который отличается от $\eta\Delta$ только членами низшего порядка: L_v имеет первый порядок). Это означает, что $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A$. Но $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} d$ (так как $A\omega = d(-i_v\omega + \eta\delta\omega)$, если $d\omega = 0$). Отсюда следует, что

$$\dim(H/AH) \geqslant \dim(H/\{d\omega^{k-1}\}) = b_k$$

(теорема де Рама). □

Доказательство теоремы 3.6. 1. Эволюция, определяемая уравнением (3.1), не меняет класс когомологий замкнутой формы ω, поскольку $A\omega = d(-i_v\omega + \eta \cdot \delta\omega)$ является точной формой.

2. Для форм ω из ортогонального дополнения к подпространству гармонических форм в пространстве замкнутых форм H справедливы следующие соотношения:

$$(\omega, \omega) \leqslant \alpha(\delta\omega, \delta\omega), \tag{3.5a}$$

$$|(\omega, L_v\omega)| \leqslant \beta(\delta\omega, \delta\omega), \tag{3.5b}$$

где α и β положительные константы, не зависящие от ω.

Действительно, (3.5a) является неравенством Пуанкаре (оно может рассматриваться как компактность оператора, обратного к оператору Лапласа–Бельтрами):

$$(\omega, \omega) \leqslant \alpha|(\Delta\omega, \omega)| = \alpha(\delta\omega, \delta\omega).$$

Неравенство (3.5b) является комбинацией неравенств Шварца и Пуанкаре. Заметим сначала, что $L_v\omega = di_v\omega$, поскольку по формуле гомотопии

$L_v = i_v d + d i_v$, причем форма ω замкнута. Тогда $(\omega, L_v\omega) = (\omega, d i_v\omega) = -(\delta\omega, i_v\omega)$. Применяя неравенство Шварца к последнему скалярному произведению, получим

$$|(\delta\omega, i_v\omega)|^2 \leqslant (\delta\omega, \delta\omega)(i_v\omega, i_v\omega).$$

Отсюда и из (3.5a), записанного в форме $(i_v\omega, i_v\omega) \leqslant \mathrm{const} \cdot (\delta\omega, \delta\omega)$, вытекает теперь требуемое неравенство (3.5b).

3. Из п. 1 и 2 следует, что на пространстве точных форм эволюция, определяемая уравнением (3.1), является сжимающим оператором при достаточно больших η:

$$\frac{d}{dt}(\omega, \omega) = -2(\omega, L_v\omega) + 2\eta(\omega, d\delta\omega) \leqslant 2(\beta - \eta)(\delta\omega, \delta\omega) \leqslant -2\gamma(\omega, \omega),$$

если $\eta \geqslant \beta + \alpha\gamma$.

4. Из п. 1 и 2 следует также, что в аффинном пространстве замкнутых форм, лежащих в одном и том же когомологическом классе, уравнение (3.1) определяет поток *сжимающих* преобразований (в гильбертовой метрике на H) и, следовательно, имеет неподвижную точку. Это доказывает утверждения a)–c).

5. Оба оператора L_v и Δ коммутируют с d. Поэтому $d\omega$ удовлетворяет уравнению (3.1) так же, как и ω. Но форма $d\omega$ точная, и потому согласно п. 3 она стремится экспоненциально к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, расстояние между $\omega(t)$ и пространством замкнутых форм экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$.

Более того, такое же сжатие к нулю наблюдается в метриках типа H^1, которые учитывают производные, при условии, что коэффициент диффузии η достаточно большой (это доказывается аналогично п. 3 с использованием неравенства типа

$$(\Delta\omega, L_v\Delta\omega) \leqslant \beta(\Delta\omega, \Delta^2\omega)$$

для точных форм).

Обозначим теперь через $\omega = p + h + q$ ортогональное разложение начальной формы ω на точную, гармоническую и коточную (т. е. лежащую в образе оператора δ) составляющие. Уравнение (3.1) принимает вид системы

$$\dot{p} = A_1 p + A_2 h + A_3 q, \quad \dot{h} = A_4 q, \quad \dot{q} = A_5 q,$$

так как для $q(0) = 0$ форма остается замкнутой (т. е. $q(t) \equiv 0$, а замкнутая форма сохраняет свой когомологический класс, т. е. $\dot{h} = 0$ для $q = 0$).

Поскольку $q(t) \to 0$ экспоненциально (в метриках с учетом производных), то $h(t)$ стремится к конечному пределу (также в метриках с учетом производных). Но согласно п. 3 преобразование $\exp(A_1 t)$ является сжимающим, и, следовательно, $p(t)$ также стремится к конечному пределу.

Поэтому $\omega(t)$ сходится к конечному пределу $p(\infty) + h(\infty)$, который является замкнутой формой. Этим и завершается доказательство утверждений d) и e). □

Доказательство теоремы 3.8 (по Ю. С. Ильяшенко и Е. М. Ландису). Если бы стационарное решение в некоторой точке превосходило минимум, то этот минимум немедленно бы возрос повсюду (так как теплота распространяется мгновенно) и решение стало бы нестационарным (так называемый принцип сильного максимума). Следовательно, стационарное решение должно повсюду быть равным своему минимуму, т. е. быть постоянным.

Такое же рассуждение показывает, что периодическое по времени решение уравнения (3.2) также должно быть постоянным. Следовательно, оператор $A = -L_v + \eta\Delta$ на функциях не имеет чисто мнимых собственных значений, а имеет единственный собственный вектор с нулевым собственным числом (по принципу максимума). Это означает, что нуль является собственным значением кратности один, а другие собственные значения лежат строго в левой полуплоскости.

Поскольку A является суммой эллиптического оператора $\eta\Delta$ и оператора $-L_v$ меньшего порядка, стандартные рассуждения (использующие свойства спектра) доказывают сходимость всех решений к константам (даже в метрике с производными). □

Доказательство теоремы 3.9. Оператор $A = -L_v + \eta\Delta$ из правой части уравнения (3.3), переводящий скалярную плотность g в $-\operatorname{div}(gv) + \eta\Delta g$, является сопряженным оператору $A^* = L_v + \eta\Delta$ на функциях.

Собственные значения операторов A и A^* совпадают, и потому размерности пространств стационарных решений уравнений (3.3) и (3.2) одинаковы. Они равны 1 по теореме 3.8. Утверждения b) и c) теоремы 3.9 следуют из свойств спектра оператора A^*, полученных в доказательстве теоремы 3.8. Утверждение d) следует из c), так как $\int(\operatorname{div} B)\,\mu = 0$. □

Доказательство теоремы 3.11. Оператор $-L_v + \eta\Delta$ коммутирует с d. Следовательно, решение уравнения (3.1) с начальными условиями $\omega_0 = df_0$ совпадает с дифференциалом df решения f уравнения (3.2) с начальным условием f_0. Из теоремы 3.8 следует, что $f \to \mathrm{const}$ (с производными). Это значит, что $df \to 0$, точная 1-форма вырождается с течением времени. Таким образом, единственное стационарное решение, которое является точной формой, — нулевое. По теореме 3.5 размерность пространства решений стационарного уравнения не меньше, чем первое число Бетти b_1, т. е. чем коразмерность подпространства точных 1-форм в пространстве замкнутых форм. Поскольку пространство стационарных решений пересекает пространство точных форм только в нуле, то его размерность строго равна числу Бетти b_1 и его проекция на пространство смежных классов замкнутых форм по модулю точных форм является изоморфизмом. Это доказывает утверждения a) и b). Утверждение c) следует из того факта, что точные 1-формы имеют нулевые интегралы по всем 1-циклам. □

Доказательство теоремы 3.12. Так как операторы d и $-L_v + \eta\Delta$ коммутируют, то n-форма $d\omega = g\mu$ эволюционирует согласно закону (3.3). По теореме 3.9 п. d) плотность g стремится к нулю при $t \to \infty$ (условие $d\omega = g\mu$ означает, что g является дивергенцией векторного поля B, которому соответствует $(n-1)$-форма $\omega = i_B\mu$). □

Доказательство следствия 3.13. Для $n=2$ 1-форма ω является $(n-1)$-формой. По теореме 3.12 она стремится к замкнутой (т. е. $d\omega \to 0$) при $t \to \infty$ (сходимость к нулю является экспоненциальной даже в метрике с производными). Используя рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 3.6 п. 5, а также теорему 3.11 для оценки эволюции точных форм, приходим к заключению, что предел ω при $t \to \infty$ существует и является замкнутой формой. □

3.5. Дискретные версии теорем антидинамо

Пусть $g\colon M \to M$ — диффеоморфизм компактного риманова многообразия, $g^\star = (g^*)^{-1}$ — его действие на дифференциальные формы (переносом вперед) и h_η — эволюция форм в течение некоторого фиксированного времени $\eta > 0$ согласно уравнению диффузии

$$h_\eta := \exp(\eta\Delta), \quad f_\eta := h_\eta \circ g^\star.$$

Обозначим через $G^\star$ действие $g^\star$ на группах когомологий

$$G^\star\colon H^*(M,\mathbb{R}) \to H^*(M,\mathbb{R}).$$

Теорема 3.18 (см. [Arn10]). 1. *Класс когомологий замкнутой формы $f_\eta\omega$ получается из класса замкнутой формы ω действием $G^\star$.*

2. *Если η выбрано достаточно большим и $G^\star$ является тождественным преобразованием, то:*

a) *для любой замкнутой формы ω существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_\eta^n\omega$;*

b) *этот предел является единственной замкнутой формой, когомологичной ω и неподвижной при действии f_η;*

c) *если форма ω точная, то $f_\eta^n\omega \to 0$ при $n \to \infty$;*

d) *для любой формы ω (не обязательно замкнутой), последовательность форм $f_\eta^n\omega$ является сходящейся при $n \to \infty$, а предел является замкнутой формой.*

Теорема 3.19 (см. [Arn10]). *Пусть M — двумерное многообразие и $G^\star = \mathrm{Id}$; тогда утверждения* a)–d) *теоремы* 3.18 *верны для всех $\eta > 0$ (а не только для достаточно больших величин η).*

Эти дискретные версии теоремы 3.6 и следствия 3.13 (а также аналоги других теорем) доказываются тем же способом, что и сами «непрерывные» теоремы. Более того, можно снять условие тождественности для $G^\star$. Чтобы получить дискретные аналоги теорем 3.6–3.12 для $G^\star \neq \mathrm{Id}$, надо не ограничиваться стационарными формами, а рассмотреть собственные векторы отображения f_η с собственными значениями λ, $|\lambda| > 1$. Обозначим через $G_k^\star$ действие диффеоморфизма g (переносом вперед) на группе когомологий $H^k(M,\mathbb{R})$, и пусть χ — собственное значение $G_k^\star$ с максимальной абсолютной величиной.

Теорема 3.20 (см. [Koz1]). *Для достаточно большого η*

a) *и любой точной формы ω образ при итерациях $f_\eta^n\omega$ стремится к нулю при $n \to \infty$;*

b) *каждый собственный вектор отображения f_η является замкнутой формой*;

c) *у замкнутой k-формы ω норма $\|f_\eta^n\omega\|$ растет так же, как $\|(G_k^\star)^n[\omega]\|$, т. е. для всех k-форм из одного класса когомологий порядок роста совпадает с порядком роста этого класса при действии $G_k^\star$*;

d) *если класс когомологий Ω является собственным вектором для оператора $G_k^\star$ с собственным значением χ, $G_k^\star\Omega = \chi\Omega$, то существует форма-представитель $\omega \in \Omega$ такая, что $f_\eta\omega = \chi\omega$*;

e) *для любой k-формы ω справедлива оценка*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|f_\eta^n\omega\| \leqslant \ln|\chi|,$$

причем для k-формы ω общего положения неравенство становится равенством:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|f_\eta^n\omega\| = \ln|\chi|.$$

Доказательство. Утверждение a) может быть доказано с использованием тех же оценок, что и в доказательстве теоремы 3.6 п. 2. Для доказательства b)–e) заметим, что оператор f_η является компактным, так что для любой величины в его спектре имеется собственный вектор. Пусть λ находится в спектре и $|\lambda| > 1$. Тогда существует ω такая, что $f_\eta\omega = \lambda\omega$. Внешняя производная d коммутирует с f_η, поэтому $f_\eta d\omega = \lambda d\omega$, и из a) вытекает, что $d\omega = 0$. Оператор «диффузии» $\exp(\eta\Delta)$ не меняет когомологического класса, так что условие $G_k^\star\Omega = \chi\Omega$ влечет $f_\eta\Omega \in \Omega$. Если существует k-форма $\omega \in \Omega$ такая, что $f_\eta\omega = \lambda\omega$, тогда либо $\lambda = \chi$, либо $[\omega] = 0$ и $|\lambda| = 1$. □

Такой же метод может быть использован, например, для доказательства того, что если $M = \mathbb{T}^2$ и $G^\star = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $f_\eta^n\omega$ растет не быстрее линейной функции от n.

Замечание 3.21. Случай $G^\star = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ использовался в [Arn8, AZRS1] (см. следующий параграф) для построения быстрого кинематического динамо на трехмерном компактном римановом многообразии.

Насколько нам известно, эта теория не развивалась для случая многообразия с краем, хотя, конечно, это было бы интересно сделать.

§ 4. Трехмерные модели динамо

4.1. Механизм «веревочного динамо»

Топологический смысл современных конструкций динамо восходит к следующей схеме, предложенной Сахаровым и Зельдовичем (см. [V-Z, ChG]) и изображенной на рис. 68.

Быстрый рост магнитной энергии достигается итерациями трехшагового преобразования полнотория: *растяжение, скручивание, складывание* (*PCC*).

Рассмотрим полноторие $S^1 \times D^2$, вложенное в трехмерный шар. Растянем S^1 вдвое, а D^2 сожмем так, чтобы элемент объема сохранился. Затем мы

скрутим и сложим полноторие таким образом, чтобы оно дважды обматывало среднюю окружность, и, наконец, мы положим получившееся полноторие на его первоначальное место, рис. 68.

Энергия продольного поля в полнотории (направленного вдоль компоненты S^1) растет экспоненциально при итерациях этой конструкции, поскольку поле растягивается вдвое вместе с удлинением продольных магнитных линий.

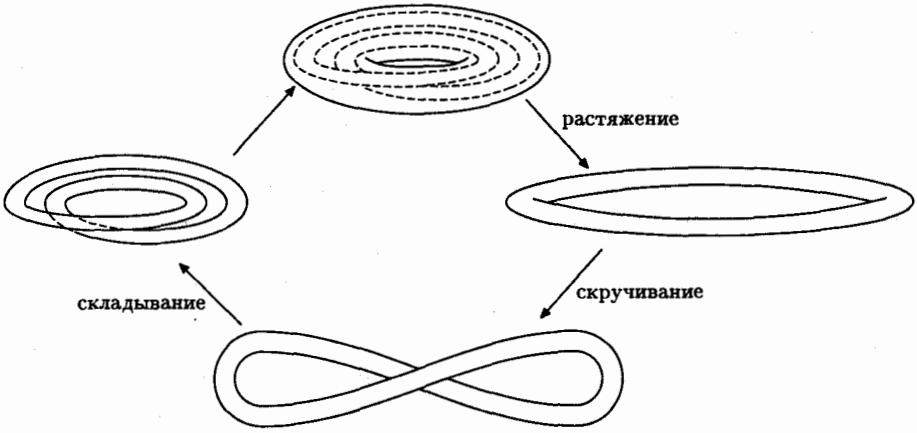


Рис. 68. Веревочное динамо: механизм растяжения-скручивания-складывания

Хотя эта конструкция и не является диффеоморфизмом полнотория на себя, ее можно сделать гладкой, пожертвовав контролем над растяжением в малой части полнотория. Потеря информации о растяжении в малой части многообразия хотя и не влияет на идеализированное недиссипативное динамо, становится существенной при учете вязкости.

4.2. Численное наблюдение эффекта динамо

Наличие хаоса в ABC-потоках (см. гл. II) делает их весьма удобными для моделирования динамо. Ограничимся упоминанием соответствующей литературы. Численный и асимптотический анализ примеров быстрого динамо в ABC-потоках и, в более общей ситуации, в хаотических стационарных течениях, имеется в работах [Hen, G-F, AKo, Chi2, Bay2, Gil1, PPS] (см. также [Zhel] об аналогах ABC-потоков в трехмерном шаре).

Наиболее детально изучен ABC-поток в случае $A = B = C$ с полем скоростей

$$v = (\cos y + \sin z)\frac{\partial}{\partial x} + (\cos z + \sin x)\frac{\partial}{\partial y} + (\cos x + \sin y)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Одной из главных задач при таком моделировании является оценка показателя $\lambda(\eta)$ наиболее быстро растущего режима магнитного поля B, как функции магнитной вязкости η, или магнитного числа Рейнольдса $R_m = 1/\eta$. Другими словами, надо найти собственное значение оператора $L_{R_m} : B \mapsto -R_m\{v, B\} + \Delta B$ с наибольшей вещественной частью. Первые вычисления Е. И. Корки-

ной (см. [AKo]) с помощью метода галеркинских аппроксимаций покрывают отрезок чисел Рейнольдса $R_m \leqslant 19$.

Для малых чисел Рейнольдса (т. е. для большой магнитной вязкости η) каждое решение уравнения динамо (1.1) стремится к стационарному полю, которое определяется классом когомологий начального поля B_0, теорема 3.6. Следовательно, для таких чисел Рейнольдса собственное значение L_{R_m} является нулевым независимо от R_m.

Если ограничиться случаем полей B_0 с нулевым средним, то наибольшее собственное значение оператора L_{R_m} равно -1 при всех значениях R_m, меньших чем критическая величина $R_m \approx 2{,}3$. Причина этого явления состоит в том, что $\Delta \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ (и, конечно, $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} = 0$), и потому поле $\boldsymbol{v}$ является собственным для L_{R_m} с собственным значением -1.

Когда число Рейнольдса растет, появляется пара комплексно сопряженных собственных чисел с $\operatorname{Re} \lambda = -1$. Она перемещается вправо и переходит через «границу динамо» $\operatorname{Re} \lambda = 0$ при $R_m \approx 9{,}0$. Величина $\operatorname{Re} \lambda$ остается положительной, пока число Рейнольса не достигает значения $R_m \approx 17{,}5$, после чего она становится снова отрицательной.

Таким образом, поле $\boldsymbol{v}$ является динамо для $9 < R_m < 17{,}5$. Д. Ж. Галовей и У. Фриш [G-F] нашли динамо в этой задаче при $30 < R_m < 100$. Пока неизвестно, является ли это поле быстрым кинематическим динамо, например, выживает ли экспоненциально растущая мода поля B при $R_m \to \infty$.

Вычислительная часть задачи кинематического быстрого динамо сводится к нахождению первого собственного значения матрицы очень большого (многомиллионного) порядка даже для умеренного числа Рейнольдса (порядка сотен). Физически значимые магнитные числа Рейнольдса R_m имеют абсолютную величину порядка 10^8. Соответствующие матрицы находятся (и еще долго будут оставаться) за пределами возможностей любого компьютера.

Использование симметрии (в частности, теории представлений группы вращений куба) позволяет значительно ускорить вычисления. В частности, первая гармоника некоторого собственного поля для любых чисел Рейнольдса может быть найдена явно [Arn13]. Эта мода имеет наибыстрейший рост при $R_m \leqslant 19$, как показывают численные эксперименты.

Компьютерные эксперименты также показали, что растущая мода находится в малой окрестности инвариантных многообразий неподвижных точек, по крайней мере для $A = B = C$. Можно надеяться, что это наблюдение приведет к новым строгим асимптотическим результатам. В асимптотическом решении, построенном в [DoM], видна концентрация вблизи сепаратрис для очень продолжительного, но конечного времени. Никакой моды с такой концентрацией не найдено при $t \to \infty$!

4.3. Модель диссипативного динамо на трехмерном римановом многообразии

В этом параграфе мы рассмотрим искусственный пример потока с экспоненциальным растяжением частиц, которое обеспечивает эффект быстрого

динамо даже при ненулевой диффузии (см. [Arn8, AZRS1, AZRS2]). В этом примере все может быть вычислено явно. Его недостатком, однако, является нереалистическая однородность растяжения и отсутствие мест, вблизи которых направления растущего поля становятся противоположными.

Конструкция основана на отображении кошки на торе, рассмотренном выше, и является, по существу, упрощенной версией модели гл. II, § 5. Там мы обсуждали экспоненциальное растяжение частиц согласно тем же уравнениям. Однако в отличие от эволюции магнитного поля в задаче кинематического динамо, в идеальной гидродинамике переносимое поле вихря функционально зависит от порождающего его поля скоростей.

Областью течения будет трехмерное компактное многообразие M, которое в декартовых координатах задается как произведение $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ на отрезок $0 \leqslant z \leqslant 1$, причем граничные торы отождествляются посредством преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$$

(т. е. согласно правилу $(x, y, 0) = (2x + y, x + y, 1)$ или, что то же самое, $(x, y, 1) = (x - y, 2y - x, 0)$, где x и y определены с точностью до прибавления целых чисел).

Введем риманову метрику на этом многообразии. Для этого сначала перейдем от декартовых координат x, y, z к таким декартовым координатам p, q, z, что ось p имеет направление собственного вектора A с собственным значением $\chi_1 = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$, а ось q направлена вдоль собственного вектора с собственным значением $\chi_2 = (3 - \sqrt{5})/2 < 1$. Метрика, заданная элементом длины

$$ds^2 = e^{-2\lambda z} dp^2 + e^{2\lambda z} dq^2 + dz^2, \quad \lambda = \ln \chi_1 \approx 0{,}75,$$

является инвариантной по отношению к преобразованию A и, следовательно, определяет аналитическую риманову структуру на компактном трехмерном многообразии M. Выберем направления собственных векторов таким образом, чтобы (p, q, z)- и (x, y, z)-ориентации $\mathbb{R}^3$ совпадали.

Теперь на этом многообразии рассмотрим поток со стационарным полем скоростей $\boldsymbol{v} = (0, 0, v)$ в (p, q, z)-координатах, где $v = \mathrm{const}$, так что $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Каждая частица жидкости, переносимая этим полем, экспоненциально растягивается в направлении q и экспоненциально сжимается вдоль оси p, если рассматривается *как частица на* M. Если магнитное число Рейнольдса мало (вязкость велика), рост магнитного поля подавляется магнитной диффузией, и эффекта динамо нет (ср. с теоремой 3.6). Для малой магнитной вязкости ситуация иная.

Теорема 4.1 (см. [AZRS1]). *Векторное поле $\boldsymbol{v}$ определяет быстрое динамо на римановом многообразии M для произвольно малой магнитной вязкости η, а также и в пределе при $\eta \to 0$. Для заданного начального магнитного векторного поля только его гармоника Фурье, не зависящая от p и q, выживает и экспоненциально растет при $t \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие три векторных поля в $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{e}_p = e^{\lambda z}\partial/\partial p, \quad \boldsymbol{e}_q = e^{-\lambda z}\partial/\partial q, \quad \boldsymbol{e}_z = \partial/\partial z.$$

Эти поля являются A-инвариантными и, следовательно, определяют три векторных поля на M^3, для которых мы сохраним те же обозначения $\boldsymbol{e}_p$, $\boldsymbol{e}_q$, $\boldsymbol{e}_z$. Эти поля являются ортогональными в каждой точке по отношению к построенной выше метрике.

Функцию f на M можно считать функцией $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, которая является периодичной с периодом 1 по x и y и удовлетворяет условию $f(x,y,z+1) = f(x-y, 2y-x, z)$. Предположим также, что $\boldsymbol{B} = B_p\boldsymbol{e}_p + B_q\boldsymbol{e}_q + B_z\boldsymbol{e}_z$ является (магнитным) векторным полем на M. Непосредственное вычисление приводит к следующему предложению.

Предложение 4.2. *Формулы векторного исчисления на M таковы:*

$$\nabla f = \left(e^{\lambda z}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\boldsymbol{e}_p + \left(e^{-\lambda z}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\boldsymbol{e}_p + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z,$$

$$\operatorname{div}(B_p\boldsymbol{e}_p + B_q\boldsymbol{e}_q + B_z\boldsymbol{e}_z) = e^{\lambda z}\frac{\partial B_p}{\partial p} + e^{-\lambda z}\frac{\partial B_q}{\partial q} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(*в частности,* $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_p = \operatorname{div}\boldsymbol{e}_q = \operatorname{div}\boldsymbol{e}_z = 0$);

$$\operatorname{rot}(B_p\boldsymbol{e}_p + B_q\boldsymbol{e}_q + B_z\boldsymbol{e}_z) = (\operatorname{rot}_p\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_p + (\operatorname{rot}_q\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_q + (\operatorname{rot}_z\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_z,$$

где

$$\operatorname{rot}_p\boldsymbol{B} = e^{-\lambda z}\left(\frac{\partial B_z}{\partial q} - \frac{\partial e^{\lambda z}B_q}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{rot}_q\boldsymbol{B} = e^{\lambda z}\left(\frac{\partial e^{-\lambda z}B_p}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial p}\right),$$

$$\operatorname{rot}_z\boldsymbol{B} = e^{\lambda z}\frac{\partial B_q}{\partial p} - e^{-\lambda z}\frac{\partial B_p}{\partial q}$$

(*в частности,* $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_p = -\lambda\boldsymbol{e}_q$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_q = -\lambda\boldsymbol{e}_p$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_z = 0$);

$$\Delta f = e^{2\lambda z}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + e^{-2\lambda z}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\Delta\boldsymbol{e}_p := -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_p = -\lambda^2\boldsymbol{e}_p, \quad \Delta\boldsymbol{e}_q = -\lambda^2\boldsymbol{e}_q, \quad \Delta\boldsymbol{e}_z = 0$$

и

$$\{\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q\} = 0, \quad \{\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_p\} = \lambda\boldsymbol{e}_p, \quad \{\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_q\} = -\lambda\boldsymbol{e}_q.$$

Доказательство предложения. Обозначим $\varphi_p = e^{-\lambda z}dp$, $\varphi_q = e^{\lambda z}dq$, $\varphi_z = dz$ двойственные 1-формы (в $\mathbb{R}^3$ и на M). Форма является двойственной к соответствующему полю в том смысле, что, например, $\varphi_p|_{\boldsymbol{e}_p} = 1$, $\varphi_p|_{\boldsymbol{e}_q} = \varphi_p|_{\boldsymbol{e}_z} = 0$ и т. д. Тогда формула для дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial z}dz = e^{\lambda z}\frac{\partial f}{\partial p}\varphi_p + e^{-\lambda z}\frac{\partial f}{\partial q}\varphi_q + \frac{\partial f}{\partial z}\varphi_z$$

непосредственно влечет формулу для градиента и т. д. □

Уравнение эволюции (1.1) магнитного поля $\boldsymbol{B} = B_p\boldsymbol{e}_p + B_q\boldsymbol{e}_q + B_z\boldsymbol{e}_z$ на M вдоль векторного поля $\boldsymbol{v} = v\partial/\partial z$ имеет следующие компоненты:

$$\frac{\partial B_p}{\partial t} + v\frac{\partial B_p}{\partial z} = -\lambda v B_p + \eta\Big[(\Delta - \lambda^2)B_p - 2\lambda e^{\lambda z}\frac{\partial B_z}{\partial p}\Big],$$
$$\frac{\partial B_q}{\partial t} + v\frac{\partial B_q}{\partial z} = \lambda v B_q + \eta\Big[(\Delta - \lambda^2)B_q + 2\lambda e^{-\lambda z}\frac{\partial B_z}{\partial q}\Big],$$
$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + v\frac{\partial B_z}{\partial z} = \eta\Big(\Delta - 2\lambda\frac{\partial}{\partial z}\Big)B_z.$$

Заметим, что уравнение для z-компоненты поля отделяется от остальных. Предположим, что функция B_z имеет нулевое среднее. Тогда асимптотически при $t \to \infty$ B_z-компонента затухает (ср. с теоремой антидинамо Зельдовича, п. 3.1). Действительно, последнее уравнение является уравнением теплопроводности в движущейся жидкости. Легко видеть, что B_z уменьшается, так как каждый его максимум стремится исчезнуть (принцип максимума). Формально говоря,

$$\frac{d}{dt}\int B_z^2\,\mu = \int B_z\frac{\partial B_z}{\partial t}\,\mu = \eta\int B_z(\Delta B_z)\,\mu = -\eta\int(\nabla B_z)^2\,\mu.$$

Итак, в дальнейшем можно предположить, что компонента B_z постоянна.

Достаточно рассмотреть только одну компоненту векторного поля B, так как уравнения для p- и q-компонент отличаются только подстановкой $\lambda \to -\lambda$:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v\frac{\partial B}{\partial z} = \lambda v B + \eta(\Delta - \lambda^2)B, \tag{4.1}$$

где $B \equiv B_q$.

Чтобы задать граничные условия на B, вернемся к (x, y, z)-системе координат. Периодичность по x и y позволяет разложить B в ряд Фурье:

$$B(x,y,z,t) = \sum_{n,m} B_{n,m}(z,t)\exp[2\pi i(nx + my)] =$$
$$= b(p,q,z,t) = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta}(z,t)\exp[i(\alpha p + \beta q)],$$

где n и m — целые, и α, β связаны с $2\pi n$, $2\pi m$ линейным преобразованием, соответствующим переходу от координат x, y к p, q.

Лемма 4.3. *Функция $b_{0,0}(z,t)$ является периодической по z. Гармоники $b_{\alpha,\beta}(z,t)$ с $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ экспоненциально затухают по z для аналитических функций B.*

Доказательство. Ограничения, накладываемые на амплитуды Фурье, вытекают из инвариантности по отношению к переносам вдоль оси z: $B(x,y,z,t) = B(2x + y, x + y, z + 1, t)$. Последнее эквивалентно тождеству, которому удовлетворяют коэффициенты Фурье, на которые действует оператор, сопряженный к A:

$$B_{(n,m)}(z+1,t) = B_{(n,m)A^*}(z,t). \tag{4.2}$$

Здесь A^* — транспонированная матрица A, в нашем случае $A^* = A$.

Таким образом, сдвиг вдоль оси z эквивалентен изменению индексов амплитуд Фурье: индексы (n, m) переходят в индексы $(n, m)A$. Итерации матрицы A сдвигают типичный вектор (n, m) вдоль гиперболы в плоскости (n, m) (см. рис. 69). Исключением является только случай $n = m = 0$, когда магнитное поле не зависит от x, y или от p, q: $(0, 0)A = (0, 0)$. Действительно, собственные направления A не содержат целых точек (n, m) (отличных от $(0, 0)$), так как собственные значения A иррациональны.

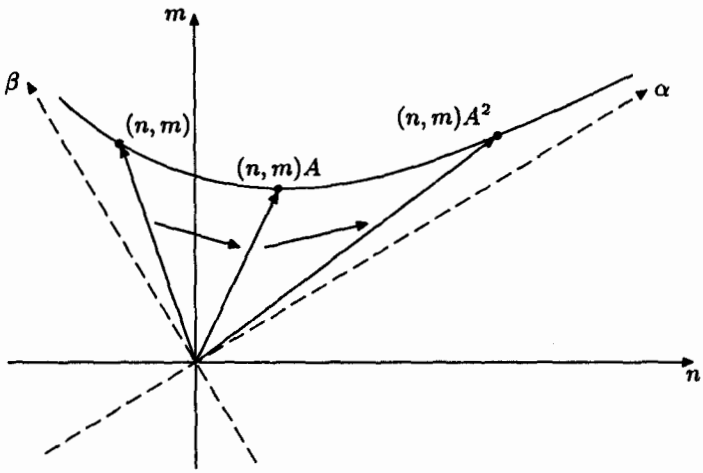


Рис. 69. Инвариантные кривые для орбит $\{(n, m)A^k\}$ являются гиперболами в (n, m)-(или (α, β)-) плоскости

С другой стороны, из аналитичности $B(x, y, z, t)$ следует, что его Фурье-гармоники $b_{\alpha,\beta}$ должны экспоненциально затухать по α и β. Таким образом, благодаря указанному свойству для сдвига по z, функции $b_{\alpha,\beta}(z, t)$ быстро убывают для фиксированных $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ при $|z| \to \infty$. Периодичность же по z нулевой гармоники очевидна. Лемма доказана. □

Для завершения доказательства теоремы 4.1 сначала положим $\eta = 0$. Уравнение (4.1) может быть решено явно (благодаря свойству вмороженности):

$$b(p, q, z, t) = e^{\lambda v t} b(p, q, z - vt, 0) \tag{4.3}$$

(перейдем к лагранжевой системе координат, решим задачу Коши и вернемся к эйлеровым координатам).

Уравнение (4.1) может быть записано в виде $\partial b/\partial t = T_\eta b$, где оператор T_η (зависящий от вязкости η) действует на функции на M^3 (зависящие в нашем случае от t как от параметра):

$$T_\eta b = \lambda v b + \eta(\Delta - \lambda^2) b - v \frac{\partial b}{\partial z}.$$

Рассмотрим сначала невязкий случай $\eta = 0$. Невязкий оператор T_0 имеет серию собственных функций $b_k = \exp(2\pi i k z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, с собственными значениями $\gamma_k = \lambda v - 2\pi i k v$.

Каждое решение (4.3), которое не зависит от p и q (т. е. которое постоянно на каждом двумерном торе $z = \text{const}$, $t = \text{const}$), может быть представлено как линейная комбинация произведений $b_k \cdot \exp(\gamma_k t)$ (разложение (4.3) в ряд Фурье по z).

Оператор T_0 не имеет других собственных функций. Действительно, предположим, что $b\colon M^3 \to \mathbb{C}$ — некоторая собственная функция T_0 с собственным значением γ. Тогда функция $b(p,q,z,t) = b\exp(\gamma t)$ удовлетворяла бы соотношению (4.3). Выбрав $t = 1/v$, мы получим из (4.3)

$$b(p,q,z) = e^{\lambda - \gamma/v} b(p,q,z-1).$$

В силу (4.2) коэффициенты Фурье $b_{\alpha,\beta}(z)$ вдоль каждой гиперболы $\alpha = \lambda^n \alpha_0$, $\beta = \lambda^{-n}\beta_0$ образуют геометрические прогрессии. Это противоречит затуханию коэффициентов Фурье гладкой функции $b(\cdot,\cdot,z)$ на двумерном торе (исключая случай $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, когда b не зависит от p и q).

Отсутствие собственных функций объясняется непрерывностью спектра T_0 (на ортогональном дополнении к пространству функций, постоянных на торах $z = \text{const}$).

Теперь вернемся к общему случаю $\eta \neq 0$. Как и выше, уравнение (4.1) имеет набор собственных решений $b_k \exp(\gamma_k t)$, которые не зависят от p и q, с собственными числами

$$\gamma_k = \lambda v + \eta(-4\pi^2 k^2 - \lambda^2) - 2\pi i k v, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если η мало, имеется много ($\approx C\eta^{-1/2}$) растущих мод. (Если η велико, растущей моды не существует вовсе, так как $\operatorname{Re}\gamma_k < 0$.)

Однако поведение решений, начальное поле которых зависит от p и q, разительно отличается от их поведения, отвечающего условию вмороженности (4.3). Действительно, рассмотрим временну́ю эволюцию b как комбинацию двух процессов: вмороженного растяжения (4.3) ($\eta = 0$) и действия чистой диффузии ($v = 0$). Если η мало, вмороженное преобразование можно считать долгим.

Долгий сдвиг $z - vt$ ($vt \in \mathbb{Z}$) вдоль оси z эквивалентен переносу (вдоль гиперболы) индексов (α, β) гармоник $b_{\alpha,\beta}(z,t)$ для фиксированного z. Следовательно, любая заданная гармоника будет смещаться со временем в область больших волновых чисел, где диссипация становится существенной. Ее амплитуда будет тогда затухать за счет диффузионной части процесса. Асимптотически, когда $t \to \infty$, эволюционирующее поле будет затухать при сколь угодно малой вязкости η.

Таким образом, асимптотически при $t \to \infty$ выживает только решение, не зависящее от p и q (см. в [AZRS1] детали, связанные с асимптотикой решения). Такое периодическое по z решение в $\mathbb{R}^3$ растет экспоненциально в метрике ds^2, когда $z \to \infty$. Показатель соответствующей экспоненты отделен от 0 положительной константой, не зависящей от $\eta > 0$. Наконец, благодаря линейному соотношению между сдвигами по осям z и t получаем такой же экспоненциальный рост решения при $t \to \infty$. □

4.4. Геодезические потоки и дифференциальные операции на поверхностях постоянной отрицательной кривизны

Каждая компактная риманова поверхность может быть снабжена метрикой постоянной кривизны. Эта кривизна является положительной для сферы, нулевой для тора и отрицательной для любой поверхности, содержащей не менее двух ручек (т. е. для любой поверхности рода $\geqslant 2$).

В этом параграфе мы покажем, что геодезический поток на каждой римановой поверхности, кривизна которой является постоянной и отрицательной, дает пример быстрого (диссипативного) кинематического динамо. Более точно, пусть M^3 является расслоением единичных векторов над такой поверхностью P: $M^3 = \{\xi \in TP\colon \|\xi\| = 1\}$. Геодезический поток определяет динамическую систему на этом трехмерном многообразии M^3 с экспоненциальным растяжением частиц, подобную примеру выше. Избегая повторений, мы приведем здесь основные формулы для дифференциальных операций на расслоении единичных векторов над P.

Прежде всего перейдем от поверхности P к ее универсальной накрывающей $\widetilde{P}$. Каждая такая поверхность постоянной отрицательной кривизны накрывается плоскостью Лобачевского $\widetilde{P} = \Lambda$, причем накрытие является локальной изометрией (т. е. отождествляет метрики на обоих пространствах).

Замечание 4.4. Иногда удобно представлять расслоение единичных векторов $V^3 := T_1\Lambda$ над плоскостью Лобачевского Λ как группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Тогда пространство M^3 является компактным фактором $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (или, в более общем случае, универсальной накрывающей $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$) по дискретной подгруппе Γ: $M^3 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$.

Рассмотрим следующие три «основных» потока на плоскости Лобачевского: геодезический поток и два орициклических потока. Введем естественные координаты (x, y, φ) в пространстве линейных элементов (или единичных векторов) $V^3 = T_1\Lambda^2$. Здесь плоскость Лобачевского является верхней полуплоскостью $\Lambda^2 = \{(x, y)\colon y > 0\}$, снабженной метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$, а $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол между линейным элементом и вертикалью в Λ^2 (см. рис. 70, *а*). Ось x называется *абсолютом* плоскости Лобачевского. Напомним, что геодезическими на Λ^2 являются полуокружности и прямые линии, ортогональные к абсолюту (предложение 1.3 гл. IV).

Определение 4.5. *Геодезический поток* плоскости Лобачевского — это поток в пространстве единичных линейных элементов $V^3 = T_1\Lambda^2$, который за время t переводит каждый элемент l в линейный элемент на Λ^2, касающийся той же геодезической, что и l, но в точке, находящейся на расстоянии t (в метрике Лобачевского) впереди l.

Предел последовательности касающихся в данной точке окружностей растущего радиуса на плоскости Лобачевского называется *орициклом*.

Предложение 4.6 (см., например, [Arn15]). *Орициклы на плоскости Лобачевского — это евклидовы окружности, касающиеся абсолюта, или параллельные ему прямые.*

Каждый линейный элемент (точка с направлением) на Λ^2 принадлежит двум орициклам, «верхнему» и «нижнему» (см. рис. 70, *b*).

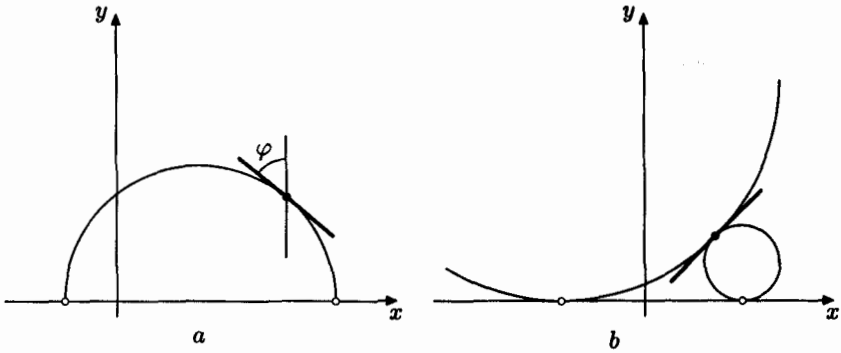


Рис. 70. (*a*) Координаты (x, y, φ) в пространстве элементов и геодезическая в плоскости Лобачевского. (*b*) Два орицикла, проходящие через один элемент

Определение 4.5′. *Первый* (+) и *второй* (−) *орициклические потоки* на Λ^2 являются потоками, отображающими за время t каждый линейный элемент на плоскости Лобачевского в линейный элемент, принадлежащий, соответственно, тому же нижнему или верхнему орициклам и находящийся на расстоянии t впереди.

Эти потоки задаются следующими векторными полями: e (для геодезического потока), h^- (для «нижнего» орициклического потока) и h^+ (для «верхнего» орициклического потока) на V:

$$e = -y\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + y\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$h^- = -y\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - y\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + (\cos\varphi - 1)\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$h^+ = -y\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - y\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + (\cos\varphi + 1)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Предложение 4.7. *Векторные поля e, h^+, h^- порождают алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.*

Доказательство. $\{e, h^+\} = h^+$, $\{e, h^-\} = -h^-$, $\{h^+, h^-\} = 2e$, где $\{\,.\,,\,.\,\}$ обозначает скобку Пуассона векторных полей: $L_{\{u,v\}} = L_u L_v - L_v L_u$. В координатах можно записать $\{u, v\} = (u, \nabla)v - (v, \nabla)u$ (см. гл. II, § 2). □

Заметим, что разность орициклических полей $f := \frac{1}{2}(h^- - h^+)$ есть поле вращения $f = \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Введем также поле суммы $\tilde{e} := \frac{1}{2}(h^+ + h^-)$. Скобки Пуассона полей e, $\tilde{e}$, f следующие: $\{f, e\} = \tilde{e}$, $\{\tilde{e}, e\} = f$, $\{\tilde{e}, f\} = e$.

Теперь определим на $V^3 = T_1\Lambda^2$ однопараметрическое семейство метрик:

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \lambda^2\Big(d\varphi + \frac{dx}{y}\Big)^2. \tag{4.4}$$

Предложение 4.8. *Построенные выше метрики на пространстве линейных элементов $V^3 = T_1\Lambda^2$ характеризуются следующими тремя условиями:*

1) *рассмотрим «горизонтальные» плоскости, определяющие стандартную риманову связность на $T_1\Lambda^2$, заданную метрикой Лобачевского на Λ^2. Условие на метрику в $T_1\Lambda^2$ таково, что слои проекции $T_1\Lambda^2 \to \Lambda^2$ ортогональны этим плоскостям;*

2) *эта проекция переводит горизонтальные плоскости в касательные пространства к Λ^2 изометрично;*

3) *эти метрики инвариантны по отношению к изометриям плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Из условия 2 следует, что

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \lambda^2(d\varphi + a\,dx + b\,dy)^2.$$

Используем условие 1 в следующей форме: коэффициенты a и b удовлетворяют соотношению $d\varphi + a\,dx + b\,dy = 0$ вдоль двух кривых в $V = T_1\Lambda^2$. Одна из кривых является параллельным переносом линейного элемента вдоль определяемой им геодезической (т. е. она является орбитой e), а другая кривая получается параллельным переносом того же линейного элемента в перпендикулярном направлении (т. е. вдоль орбиты $\tilde{e}$). Вычисление можно провести для $x = 0$, $y = 1$, $\varphi = 0$ и затем воспользоваться инвариантностью согласно условию 3. □

Для каждой метрики семейства (4.4) базис e, $\tilde{e}$, f является ортогональным: $(e, \tilde{e}) = (e, f) = (\tilde{e}, f) = 0$ и, более того, $(e, e) = (\tilde{e}, \tilde{e}) = 1$, $(f, f) = \lambda^2$. Элемент объема, порожденный этими тремя полями, равен $\tau(e, \tilde{e}, f) = \lambda$.

Предложение 4.9. *Все поля e, $\tilde{e}$, f, h^+, h^- являются бездивергентными и гомологичными нулю. Их вихри следующие:*

$$\operatorname{rot} e = -\frac{e}{\lambda}, \quad \operatorname{rot} \tilde{e} = -\frac{\tilde{e}}{\lambda}, \quad \operatorname{rot} f = \lambda f, \quad \operatorname{rot} h^{\pm} = -\frac{\tilde{e}}{\lambda} \mp \lambda f.$$

Спиральности обоих орициклических потоков нулевые, в то время как спиральность геодезического потока e на компактном многообразии $M^3 = T_1P^2$ равна

$$\mathcal{H}(e) = -8\pi^2\lambda^2((\text{род } P^2) - 1).$$

Доказательство. Введем 1-формы α, $\tilde{\alpha}$, β, двойственные полям e, $\tilde{e}$, f соответственно (т. е. $\alpha|_e = 1$, $\alpha|_{\tilde{e}} = \alpha|_f = 0$ и т. д.). Теперь формулы для вихря и дивергенции есть прямое следствие формулы дифференциала 1-формы:

$$d\gamma(v_1, v_2) = \gamma(\{v_2, v_1\}) + L_{v_1}\gamma(v_2) - L_{v_2}\gamma(v_1).$$

Например, комбинируя ее с формулами для скобок Пуассона

$$\{e, f\} = -\tilde{e}, \quad \{e, \tilde{e}\} = -f, \quad \{\tilde{e}, f\} = e,$$

получаем $d\alpha(e,\tilde{e}) = d\alpha(e,f) = 0$, $d\alpha(\tilde{e},f) = -1$. Следовательно, $-\lambda d\alpha = i_e\tau$. По определению это означает, что $\operatorname{div} e = 0$ и $\operatorname{rot} e = -e/\lambda$ (более детальное изложение см. в гл III, § 1).

Спиральность для геодезического поля e на $M^3 = T_1P^2$ равна

$$\mathcal{H}(e) = \int\limits_M (e, \operatorname{rot}^{-1} e)\tau = -\lambda \int\limits_M \tau = -2\pi\lambda^2 \cdot (\text{площадь } P^2).$$

Здесь используется то, что объем расслоения M является произведением длины слоя $2\pi\lambda$ и площади поверхности P^2. Теорема Гаусса–Бонне сводит площадь поверхности P^2 (с постоянной кривизной) к числу ручек: (площадь $P^2 = 4\pi((\text{род } P^2) - 1)$). Мы оставляем читателю вычисления спиральности для орициклических потоков $h^{\pm}$ на M. □

Возвращаясь к гидродинамике, мы немедленно получаем следующее

Следствие 4.10. *Поля скоростей e, $\tilde{e}$, f, а также линейные комбинации e и $\tilde{e}$ являются стационарными решениями уравнения Эйлера на $M^3 = T_1P^2$. Они являются также стационарными решениями соответствующего уравнения Навье–Стокса на M для поля вихря $\omega = \operatorname{rot} v$:*

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \{\operatorname{rot}^{-1}\omega, \omega\} = -\eta \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot}\omega + R,$$

где R (ротор внешней силы) пропорционален ω.

Доказательство. $\{e, \operatorname{rot}^{-1} e\} = \{\tilde{e}, \operatorname{rot}^{-1}\tilde{e}\} = \{f, \operatorname{rot}^{-1} f\} = 0$. □

Симметричность этого следствия и формул предложения 4.9 при перестановке e и $\tilde{e}$ не случайна. Поток поля $f = \partial/\partial\varphi$ является изометрией $V^3 = T_1\Lambda^2$ и переводит поле e в поле $\tilde{e}$ за время $\pi/2$.

Предложение 4.11. *Каждое стационарное решение $\omega_0 = Ae + B\tilde{e}$ уравнения Эйлера для ротора является неустойчивым в линейном приближении.*

Доказательство. Рассмотрим линеаризованное уравнение Навье–Стокса (ср. с линеаризованным уравнением Эйлера (5.1) гл. II) для вариаций скорости $v = v_0 + v_1$ и вихря $\omega = \omega_0 + \omega_1$:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \{v_0, \omega_1\} + \{v_1, \omega_0\} = -\eta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\omega_1.$$

Для начального вихря $\omega_0 = Ae + B\tilde{e}$ мы имеем $v_0 = -\lambda\omega_0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial t} = \{\omega_0, v_1 + \lambda\omega_1\} - \eta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\omega_1, \tag{4.5}$$

где $v_1 = \operatorname{rot}^{-1}\omega_1$. Рассмотрим трехмерное пространство специальных («длинноволновых») возмущений

$$\omega_1 = ae + b\tilde{e} + cf, \quad v_1 = -\lambda ae - \lambda b\tilde{e} + \frac{c}{\lambda} f.$$

Оператор правой части формулы (4.5) отображает это пространство (с базисом e, $\tilde{e}$, f) в себя и задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -\eta/\lambda^2 & 0 & B\xi \\ 0 & -\eta/\lambda^2 & -A\xi \\ 0 & 0 & -\eta\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \xi = \lambda + \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, для ненулевой вязкости η собственные значения являются отрицательными, и соответствующие моды затухают. Однако для $\eta = 0$ имеется линейный рост возмущений (в направлении, перпендикулярном к ω_0 и лежащем в плоскости $(e, \tilde{e})$). □

Замечание 4.12. Естественно было бы предположить, что наше линеаризованное уравнение для $\eta = 0$ имеет экспоненциально растущие решения и даже бесконечномерное пространство таких решений (хотя это и не доказано). В самом деле, по крайней мере для быстро осциллирующих решений, можно отбросить второй член $\{v_1, \omega_0\}$ и принять в расчет только первый, $\{v_0, \omega_1\}$, поскольку для таких решений $v_1 = \mathrm{rot}^{-1}\omega_1$ является малым по сравнению с ω_1. Тогда получается уравнение переносимого потоком вмороженного поля. Оно имеет экспоненциально растущие решения (направления h^- или h^+ для $\omega_0 = -e$ или $\omega_0 = e$ соответственно).

По-видимому, и для малого положительного η уравнение (4.5) имеет много экспоненциально растущих решений.

Подобным же образом можно изучать стационарное решение $\omega_0 = f$, $v_0 = f/\lambda$. В этом случае первый член в правой части уравнения (4.5) имеет вид $\{\omega_0, v_1 - \omega_1/\lambda\}$. Матрица оператора эволюции для «длинноволновых» возмущений приобретает вид

$$\begin{pmatrix} -\eta/\lambda^2 & \xi & 0 \\ -\xi & -\eta/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому собственные значения в этом случае всегда отрицательны для $\eta > 0$, в то время как для $\eta = 0$ собственные значения являются чисто мнимыми $\pm i\xi$ и 0. «Движение жидкости» на M, соответствующее полю f, является «твердым» (т. е. изометрией) и, по-видимому, устойчивым.

Как обычно, задача упрощается для уравнения динамо, в котором магнитное поле не связано с полем скоростей. Рассмотрим, например, поле скоростей $v = Ae + B\tilde{e} + Cf$, где A, B, C постоянны. Трехмерное пространство «длинноволновых» магнитных полей $\boldsymbol{B} = ae + b\tilde{e} + cf$ инвариантно по отношению к растяжению потоком v, а также по отношению к «диффузии». Эволюция «длинноволнового» поля дается матрицей

$$\begin{pmatrix} -\eta/\lambda^2 & C & -B \\ -C & -\eta/\lambda^2 & A \\ -B & A & -\eta\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Ограничимся случаем $B = C = 0$, когда частицы растягиваются геодезическим потоком. В этом случае собственные числа этой матрицы легко вычисляются и получается следующее

Следствие 4.13. *Для достаточно малой магнитной вязкости ($\eta < |A|$) геодезический поток является быстрым динамо. Растущая мода является линейной комбинацией орициклических течений (т. е. течений $\tilde{e}$*

и f). Порядок роста (т. е. показатель растущей моды) зависит непрерывно от магнитной вязкости η и стремится к $|A|$ при $\eta \to 0$.

Для поля скоростей $\tilde{e}$ (соответствующего случаю $A = C = 0$) выполняются аналогичные свойства динамо.

Гипотетически число экспоненциально растущих мод в этих случаях растет неограниченно, когда магнитная вязкость η стремится к нулю. Напротив, для «твердого» поля f (т. е. для $A = B = 0$) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -\eta/\lambda^2 & C \\ -C & -\eta/\lambda^2 \end{pmatrix},$$

которая указывает на отсутствие роста «длинноволновых» полей. Кроме того, при ненулевой магнитной вязкости η магнитные поля затухают, поскольку собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части.

4.5. Сохранение энергии и особенности уравнения Эйлера

Предложение 4.14. *Если векторное поле ω_0 является решением следующего уравнения:*

$$\{\mathrm{rot}^{-1}\omega_0, \omega_0\} = \mathrm{const} \cdot \omega_0, \tag{4.6}$$

то константа в нем нулевая.

Доказательство. Будем искать решение уравнения Гельмгольца $\dot{\omega} = -\{v, \omega\}$, $v = \mathrm{rot}^{-1}\omega$ в виде $\omega(t) = a(t)\omega_0$, где ω_0 удовлетворяет соотношению (4.6) и $a(t)$ зависит только от t. Такая подстановка дает следующее уравнение для a: $\dot{a} = -a^2 \cdot \mathrm{const}$. Все нетривиальные решения последнего уравнения уходят в бесконечность за конечное время, если константа ненулевая. Неограниченный рост ω противоречит закону сохранения энергии $\dot{E} = 0$ для кинетической энергии $E = \frac{1}{2}\int v^2\,\mu$. □

Среди «длинноволновых» векторных полей на $M = T_1P^2$, рассмотренных выше, только поля $\omega_0 = ae + b\tilde{e}$ (которые коммутируют с $\mathrm{rot}^{-1}\omega_0$) удовлетворяют уравнению (4.6). Действительно, для $\omega_0 = ae + b\tilde{e} + cf$ из указанных выше коммутационных соотношений следует

$$\{\mathrm{rot}^{-1}\omega_0, \omega_0\} = ac\xi\tilde{e} - bc\xi e,$$

где $\xi = \lambda + 1/\lambda$. Правая часть не содержит f, следовательно $c = 0$.

§ 5. Показатели динамо в терминах топологической энтропии

5.1. Топологическая энтропия динамических систем

В п. 1.2 мы видели, что экспоненциальный рост L^2-магнитной энергии (как и L^q-энергии для $q > 1$) можно легко получить в моделях недиссипативного динамо, поле скоростей которых имеет гиперболическую неподвижную точку или гиперболический предельный цикл. Однако класс

идеализированных недиссипативных динамо, обеспечивающих экспоненциальный рост L^1-энергии магнитного поля, является более изощренным. Чтобы описать этот класс, а также сформулировать условия, накладываемые на реалистические (диссипативные) динамо, рассмотрим понятие энтропии потока или диффеоморфизма.

Определение 5.1. Пусть dist — метрика на компактном метрическом пространстве M, и пусть $g\colon M \to M$ — непрерывное отображение. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим новую метрику $\mathrm{dist}_{g,n}$ на X как

$$\mathrm{dist}_{g,n}(x, y) = \max_{i=0,1,\ldots,n} \mathrm{dist}(g^i x, g^i y).$$

Множество в M является (n, ε)-*порождающим*, если в $\mathrm{dist}_{g,n}$-метрике ε-шары с центрами в точках этого множества покрывают пространство M. Пусть $N(n, \varepsilon, g)$ является мощностью минимального (n, ε)-порождающего множества. Тогда *топологическая энтропия отображения* g определяется по формуле

$$h_{\text{топ}}(g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N(n, \varepsilon, g).$$

Топологической энтропией $h_{\text{топ}}(v)$ *векторного поля* v называется топологическая энтропия отображения потока этого векторного поля за время 1.

Такое же определение можно дать для произвольного компактного топологического пространства, заменив ε-шары на некоторое открытое покрытие и взяв максимум по всем покрытиям (см., например, [K-Y]).

Для наглядности будем считать траектории двух точек x и y неразличимыми, если их образы $g^i(x)$ и $g^i(y)$ являются ε-близкими для каждого $i = 0, \ldots, n$. Тогда $N(n, \varepsilon, g)$ измеряет число траекторий длины n для диффеоморфизма g, которые являются попарно различимыми для данного ε. Интуитивно положительность энтропии означает, что это число траекторий растет экспоненциально по n.

5.2. Границы показателей в недиссипативных моделях динамо

Теорема 5.2 (см. [Koz2, K-Y]). *Пусть v — бездивергентное C^∞ векторное поле на компактном трехмерном римановом многообразии M, а μ — риманова форма объема на M. Предположим, что магнитное поле B_0 переносится течением g_v^t поля v: $B_t := g_{v*}^t B_0$. Тогда для каждого непрерывного поля B_0 на M показатель роста L^1-нормы мажорируется топологической энтропией $h_{\text{топ}}(v)$ поля v:*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{t} \ln \int_M \|B_t\| \, \mu \leqslant h_{\text{топ}}(v).$$

Более того, показатель в точности равен топологической энтропии для любого магнитного поля B_0 общего положения (т. е. для поля из некоторого открытого и плотного подмножества в пространстве векторных полей).

Эту формулировку теоремы 5.2 можно рассматривать как еще одно естественное определение топологической энтропии: возьмем какое-нибудь векторное поле, подействуем на него потоком и оценим соответствующий показатель роста L^1-энергии. Чтобы быть уверенным, что выбранное поле — «общего положения», можно начать с некоторой пары векторных полей B_1 и B_2, которые вместе с полем v образуют базис в каждом касательном пространстве M. Тогда $h_{\text{топ}}(v)$ равно наибольшей скорости роста L^1-энергии этих двух векторных полей при итерациях:

$$h_{\text{топ}}(v) = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \text{где } \lambda_i = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{t} \ln \int\limits_M \|B_i(t)\|\, \mu.$$

Кроме того, топологическая энтропия гладкого отображения $g\colon M \to M$ равна максимуму показателя роста L^1-нормы при итерациях действия g на дифференциальную форму общего положения. Более точно,

$$h_{\text{топ}}(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \int\limits_M \|Dg^{n*}\|\, \mu,$$

где Dg^{n*} — соответствующее отображение полных внешних алгебр касательных пространств к M, и интеграл берется по мере Лебега μ. Мера μ не предполагается g-инвариантной. Если же отображение g сохраняет меру, тогда это же утверждение справедливо и для k-векторных полей (см. [Koz2]). Топологическая энтропия также дает нижнюю границу для роста магнитного поля в любой L^q-норме ($q \geqslant \dim(M) - 2$) даже в случае конечной гладкости диффеоморфизма (см. [K-Y]).

Теорема 5.2 доставляет необходимое и достаточное условие существования экспоненциального роста недиссипативного L^1-динамо. Для того чтобы быть динамо, поле скоростей v должно иметь ненулевую энтропию, т. е., грубо говоря, порождать некоторый хаос. Положительная топологическая энтропия часто вызвана наличием подков, причем для двумерных систем они, по существу, исчерпывают всю энтропию ([Kat2], см. обсуждение в [K-Y]). Для других L^q-норм ($q > 1$) топологическая энтропия дает нижнюю границу для скорости роста подходящего магнитного поля [Koz2, K-Y]. Спектр оператора недиссипативного кинематического динамо для непрерывного векторного поля на компактном римановом многообразии без края описан в [CLMS] (см. также [LL]).

5.3. Верхние границы для диссипативных L^1 динамо

Клаппер и Янг [K-Y] доказали, что такое же необходимое условие присуще и диссипативным (реалистическим) динамо: если топологическая энтропия поля обращается в нуль ($h_{\text{топ}}(v) = 0$), то поле v не может являться быстрым динамо (другими словами, показатель $\lambda(\eta)$ стремится к нулю при стремлении к нулю магнитной вязкости η). Такая оценка была предложена Финном и Оттом в 1988 г., а доказательство было анонсировано в 1992 г. М. М. Вишиком. В работе [K-Y] этот результат сформулирован и доказан в более общем виде, допускающем векторные поля конечной гладкости.

Теорема 5.3 (см. [K-Y]). *Пусть v и B_0 — бездивергентные векторные поля с носителями в компактной области $M \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что v имеет класс гладкости C^{k+1} и B_0 — класс гладкости C^k для некоторого $k \geqslant 2$. Пусть $B_\eta(t)$ — решение уравнения динамо* (1.1) *с начальным условием B_0. Тогда*

$$\limsup_{\eta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \int\limits_M \|B_\eta(n)\| \, \mu \leqslant h_{\text{топ}}(v) + \frac{r(g)}{k}.$$

Здесь $g := g_v^1$ — отображение потока поля v за время 1, *$B_\eta(n)$ — величина $B_\eta(t)$ в момент времени $t = n$, и*

$$r(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\Big(\max_{x\in M} \Big\|\frac{\partial(g^n)}{\partial x}(x)\Big\|\Big).$$

Здесь $\dfrac{\partial(g^n)}{\partial x}$ — матрица Якоби отображения g^n. Эта оценка сверху справедлива также для обращающейся в нуль магнитной вязкости $\eta = 0$.

В случае идеализированного недиссипативного динамо $\eta = 0$ и гладкого векторного поля v ($k = \infty$) эта теорема совпадает с теоремой 5.2.

Различные вопросы теории кинематического динамо и, в частности, задача быстрого динамо обсуждаются в недавно вышедшей книге [ChG], а также в книгах и обзорах [Mof3, K-R, R-S, Chi2, ZRS, Z-R].

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Эта глава является обзором ряда смежных вопросов, к которым может быть применена теоретико-групповая схема предшествующих глав или ее модификации. Мы хотим продемонстрировать различные (но, тем не менее, «гидродинамические») свойства разнообразных динамических систем, а также наметить возможные направления будущих исследований.

§ 1. Уравнение Кортевега–де Фриза как уравнение Эйлера

В гл. I мы обсуждали общую эйлерову природу уравнений движения трехмерного твердого тела и идеальной несжимаемой жидкости. Первое уравнение связано с группой Ли $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, в то время как второе — с огромной бесконечномерной группой Ли $S\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих объемы.

В этом параграфе мы имеем дело с промежуточным случаем: с группой Ли всех диффеоморфизмов одномерного многообразия, а именно, окружности. Точнее, с одномерным расширением этой группы, называемым группой Вирасоро. В некотором смысле она является «самым простым» примером бесконечномерной группы Ли. Оказывается, что соответствующее уравнение Эйлера для геодезического потока на группе Вирасоро хорошо известно в математической физике как уравнение Кортевега–де Фриза. Это уравнение считается каноническим примером интегрируемой гамильтоновой системы с бесконечным числом степеней свободы.

1.1. Алгебра Вирасоро

Алгеброй Вирасоро называется объект, который только на одну размерность больше, чем алгебра $\mathrm{Vect}(S^1)$ всех гладких векторных полей на окружности S^1 (в физической литературе эти векторные поля обычно предполагаются тригонометрическими полиномами).

Определение 1.1. *Алгебра Вирасоро* (обозначаемая как vir) является векторным пространством $\mathrm{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}$, снабженным следующей операцией взятия коммутатора:

$$\left[\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}, a\right), \left(g(x)\frac{\partial}{\partial x}, b\right)\right] = \left((f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\frac{\partial}{\partial x}, \int\limits_{S^1} f'(x)g''(x)\,dx\right),$$

для любых двух элементов $(f(x)\partial/\partial x, a)$ и $(g(x)\partial/\partial x, b)$ в vir.

Результат коммутирования является парой, состоящей из векторного поля и числа. Это векторное поле равно взятой со знаком минус скобке Пуассона исходных векторных полей на окружности: $\{f\partial/\partial x, g\partial/\partial x\} = (fg' - f'g)\partial/\partial x$. Билинейное кососимметрическое выражение

$$c(f,g) := \int\limits_{S^1} f'(x)g''(x)\,dx$$

называется 2-*коциклом Гельфанда–Фукса* (см. [G-F]).

Определение 1.2. *Вещественнозначным* 2-*коциклом* на произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется билинейная кососимметрическая форма $c(\,.\,,\,.\,)$ на этой алгебре, удовлетворяющая следующему тождеству:

$$\sum_{(f,g,h)} c([f,g],h) = 0 \quad \text{для любых трех элементов } f,g,h \in \mathfrak{g},$$

где сумма берется по трем циклическим перестановкам элементов (f,g,h).

Это коциклическое тождество означает, что расширенное пространство $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$, снабженное операцией взятия коммутатора

$$[(f,a),(g,b)] = ([f,g], c(f,g)), \tag{1.1}$$

подчиняется тождеству Якоби алгебры Ли. Если положить в (1.1), $c(f,g) = 0$ для всех пар f,g, то получается *тривиальное расширение* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Расширение алгебры $\mathfrak{g}$ называется *нетривиальным* (другими словами, соответствующий 2-коцикл *не является* 2-*кограницей*), если его нельзя свести к тривиальному расширению линейной заменой координат в $\hat{\mathfrak{g}}$. Коциклы на алгебрах Ли, а также геометрический смысл коцикла Гельфанда–Фукса более детально рассмотрены ниже в п. 1.4.

Алгебра Вирасоро является единственным нетривиальным одномерным центральным расширением алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ векторных полей на окружности. Существует так называемая группа Вирасоро, алгеброй Ли которой является алгебра Вирасоро vir (см., например, [Ner1]).

Определение 1.3. *Группой Вирасоро* (или *Вирасоро–Ботта*) называется множество пар $(\varphi(x), a) \in \mathrm{Diff}(S^1) \oplus \mathbb{R}$ с законом умножения

$$(\varphi(x),a) \circ (\psi(x),b) = \left(\varphi(\psi(x)), \int\limits_{S^1} \log(\varphi\circ\psi(x))' d\log\psi'(x)\right).$$

Применяя общие конструкции из гл. I, снабдим группу Вирасоро некоторой (правоинвариантной) римановой метрикой. Для этого зафиксируем «энергоподобную» квадратичную форму в алгебре Ли vir, т. е. на касательном пространстве к группе в единице:

$$H\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}, a\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{S^1} f^2(x)\,dx + a^2\right).$$

Рассмотрим соответствующее уравнение Эйлера, т. е. уравнение геодезического потока, порожденного этой метрикой.

Определение 1.4. Уравнением *Кортевега–де Фриза* (КдФ) на окружности называется эволюционное уравнение

$$\partial_t u + uu' + u''' = 0$$

относительно неизвестной зависящей от времени функции $u(\,.\,,t)$ на S^1. Здесь штрих $'$ означает $\partial/\partial x$ и $\partial_t = \partial/\partial t$.

Теорема 1.5 (см. [OK1]). *Уравнение Эйлера геодезического потока на группе Вирасоро (в указанной правоинвариантной метрике) совпадает с однопараметрическим семейством КдФ-уравнений.*

Доказательство. Уравнению правоинвариантного геодезического потока на группе Вирасоро отвечает уравнение Гамильтона на двойственном пространстве к алгебре Вирасоро vir^* с линейной скобкой Ли–Пуассона и функцией Гамильтона $-H$.

Пространство vir^* можно отождествить с множеством пар

$$\{(u(x)(dx)^2, c)\colon u(x) \text{ — гладкая функция на } S^1,\ c \in \mathbb{R}\}.$$

Действительно, квадратичные дифференциалы $u(x)(dx)^2$ естественным образом двойственны векторным полям на окружности, а константы двойственны друг другу:

$$\left\langle \left(v(x)\frac{\partial}{\partial x}, a\right), (u(x)(dx)^2, c)\right\rangle = \int\limits_{S^1} v(x)u(x)\,dx + ac.$$

Коприсоединенным действием элемента алгебры Ли $\left(f\dfrac{\partial}{\partial x}, a\right) \in \mathrm{vir}$ на элемент $(u(x)(dx)^2, c)$ двойственного пространства vir^* является

$$\mathrm{ad}^*_{(f\partial/\partial x, a)}(u(dx)^2, c) = (2f'u + fu' + cf''', 0), \tag{1.2}$$

где $'$ означает производную по x. Эта формула вытекает из тождества

$$\left\langle \left[\left(f\frac{\partial}{\partial x}, a\right), \left(g\frac{\partial}{\partial x}, b\right)\right], (u(dx)^2, c)\right\rangle = \left\langle \left(g\frac{\partial}{\partial x}, b\right), \mathrm{ad}^*_{(f\partial/\partial x, a)}(u(dx)^2, c)\right\rangle,$$

которое справедливо для любой пары $\left(g\dfrac{\partial}{\partial x}, b\right) \in \mathrm{vir}$.

Квадратичный функционал энергии H на алгебре Вирасоро определяет «тавтологический» оператор инерции $A\colon \mathrm{vir} \to \mathrm{vir}^*$, который переводит пару $(u(x)\partial/\partial x, c) \in \mathrm{vir}$ в пару $(u(x)(dx)^2, c) \in \mathrm{vir}^*$.

В частности, он определяет квадратичный гамильтониан на двойственном пространстве vir^*:

$$H(u(dx)^2, c) = \frac{1}{2}\left(\int u^2\,dx + c^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle \left(u\frac{\partial}{\partial x}, c\right), (u(dx)^2, c)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left(u\frac{\partial}{\partial x}, c\right), A\left(u\frac{\partial}{\partial x}, c\right)\right\rangle.$$

Соответствующее уравнение Эйлера для правоинвариантной метрики на группе (согласно общей формуле (6.4), теоремы 6.15 в гл. I) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(dx)^2, c) = -\mathrm{ad}^*_{A^{-1}(u(dx)^2,c)}(u(dx)^2, c).$$

Используя явную формулу (1.2) коприсоединенного действия с

$$(f\partial/\partial x, a) = A^{-1}(u(dx)^2, c) = (u\partial/\partial x, c),$$

мы получаем искомое уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} \partial_t u = -2u'u - uu' - cu''' = -3uu' - cu''', \\ \partial_t c = 0. \end{cases}$$

Коэффициент c не зависит от времени, а функция u удовлетворяет уравнению КдФ (с измененными коэффициентами). □

Замечание 1.6. Без центрального расширения уравнение Эйлера на группе диффеоморфизмов окружности имело бы вид

$$\partial_t u = -3uu',$$

известный как невязкое уравнение Бюргерса. Это уравнение заменой единицы времени сводится к уравнению для поля скоростей u свободно летящих невзаимодействующих частиц на окружности. Оно обнаруживает совершенно иные свойства в сравнении с уравнением КдФ (см., например, [Arn15]).

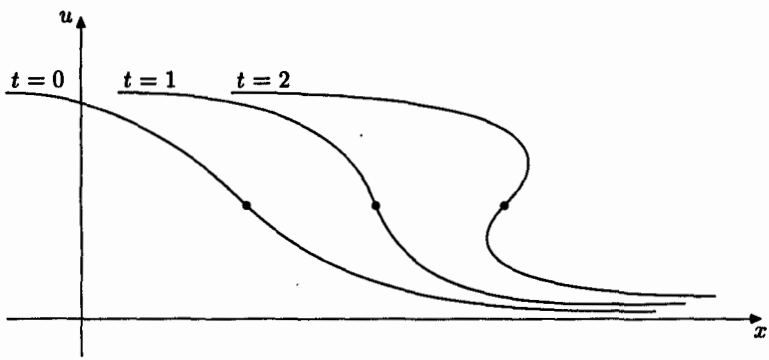


Рис. 71. Ударная волна, порожденная свободно движущимися невзаимодействующими частицами

Если $u(x,t)$ — скорость свободно летящей частицы x в момент t, тогда материальная производная u равна нулю: $\partial_t u + uu' = 0$. На рис. 71 показана типичная перестройка поля скоростей u по времени. Поскольку скорость каждой частицы сохраняется, быстрые частицы в конце концов обгоняют медленные. Каждая точка перегиба в начальном профиле скоростей $u(x,0)$ порождает ударную волну.

Таким образом, за конечное время решения соответствующего уравнения Эйлера определяют многозначное, а не однозначное векторное поле на окружности. Другими словами, геодезический поток на группе $\mathrm{Diff}(S^1)$ по отношению к правоинвариантной метрике, порожденный квадратичной формой $\int u^2\,dx$ на алгебре Ли, является неполным.

Заметим, что ударные волны также появляются и в случае уравнения Бюргерса с малой вязкостью. Простейшие типичные бифуркации ударных волн описаны в работе [Bog] (см. также [SAF, Si2]). Типичные особенности проекций решений на плоскость независимых переменных для квазилинейных 2×2 систем классифицированы в [Ra].

Напротив, решения уравнения КдФ существуют и остаются гладкими для всех значений t. Они не порождают каких-либо ударных волн. В интерпретации КдФ как уравнения мелкой воды параметр c отвечает дисперсии (или толщине слоя) жидкости.

Замечание 1.7. Дифференциальная геометрия группы Вирасоро с определенной выше правоинвариантной метрикой обсуждается в [Mis3]. В частности, секционные кривизны в двумерных направлениях, содержащих центральное направление, неотрицательны (ср. замечание 2.4 в гл. IV). О связи геометрии уравнения КдФ и кэлеровой геометрии коприсоединенных орбит Вирасоро см. в [Seg, STZ].

Эйлерову точку зрения можно перенести на супер-КдФ уравнение (введенное в [Kup]) и понимать его как уравнение геодезических на супераналогах группы Вирасоро, соответствующих супералгебрам Невье–Шварца и Рамона (см. [OK1]). Другим развитием этого подхода является переход от L^2-метрики на алгебре Вирасоро к другой, скажем к H^1-метрике:

$$\left\|\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}, a\right)\right\|^2_{H^1} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{S^1} f^2(x)\,dx + \int\limits_{S^1}(f'(x))^2\,dx + a^2\right).$$

Предложение 1.8 (см. [Mis4]). *Уравнение Эйлера для H^1-метрики на алгебре Вирасоро порождает уравнение мелкой воды Камасса–Холма:*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_t u'' = uu''' + 2u'u'' - 3uu' - cu''', \\ \partial_t c = 0 \end{cases}$$

(*введенное в* [C-H]). *Здесь штрих $'$ означает $\dfrac{\partial}{\partial x}$, а ∂_t обозначает $\dfrac{\partial}{\partial t}$.*

Аналогично, однородная $\dot H^1$-метрика (т. е. L^2-метрика на производных $f'(x)$) на алгебре Вирасоро порождает уравнение Хантера–Сакстона $\partial_t = -2u'u'' - uu'''$ как уравнение геодезического потока на группе Вирасоро (или на ее факторе по модулю вращений), см. [KhM].

1.2. Принцип сдвига аргумента и интегрируемость уравнений движения многомерного твердого тела

Определение 1.9. Функция F на симплектическом многообразии называется *первым интегралом гамильтоновой системы* с гамильтонианом H,

если скобка Пуассона H с F равна нулю. О функциях, скобка Пуассона которых равна нулю, говорят, что они находятся *в инволюции* по отношению к этой скобке.

Гамильтонова система на симплектическом $2n$-мерном многообразии M^{2n} называется *вполне интегрируемой*, если она имеет n интегралов в инволюции, которые функционально независимы почти всюду на M^{2n}.

Теорема, приписываемая Лиувиллю, утверждает, что неособые множества уровня n первых интегралов в инволюции на компактном многообразии размерности $2n$ являются n-мерными торами. Гамильтонова система определяет квазипериодическое движение $\dot{\varphi} = \mathrm{const}$ в подходящих угловых координатах $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ на каждом из торов (см. [Arn16]).

Пример 1.10. Каждая гамильтонова система с одной степенью свободы является вполне интегрируемой, так как она всегда обладает одним первым интегралом — самой функцией Гамильтона.

В частности, уравнение Эйлера движения трехмерного твердого тела является вполне интегрируемой гамильтоновой системой на коприсоединенных орбитах группы Ли $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Этими орбитами являются двумерные сферы с центром в начале координат (а также само начало координат), а функция Гамильтона задается кинетической энергией системы.

Пример 1.11. Подсчет размерностей недостаточен для того, чтобы обосновать полную интегрируемость уравнения движения n-мерного твердого тела для $n > 3$. Движения тела с закрепленной точкой по инерции описываются геодезическим потоком на группе $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ всех вращений евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Группа $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ снабжена специальной левоинвариантной римановой метрикой, определяемой квадратичной формой инерции в координатах, связанных с телом. Эта квадратичная форма на алгебре Ли $\mathfrak{so}_n$ кососимметрических $n \times n$ матриц имеет вид $-\operatorname{tr}(\omega D \omega)$, где

$$\omega \in \mathfrak{so}_n, \quad D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_k = \frac{1}{2} \int \rho(x) x_k^2 \, d^n x,$$

а $\rho(x)$ является плотностью тела в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$. Оператор инерции $A\colon \mathfrak{so}_n \to \mathfrak{so}_n^*$, определяющий эту форму, переводит матрицу ω в матрицу $A(\omega) = D\omega + \omega D$.

Замечание 1.12. Для $n = 3$ из этой формулы вытекает неравенство треугольника для главных моментов инерции d_k. Операторы, удовлетворяющие этому неравенству, образуют открытое множество в пространстве симметрических 3×3 матриц. При $n > 3$ симметрические матрицы операторов инерции твердых тел являются весьма специальными. Они образуют подмногообразие размерности n в $n(n-1)/2$-мерном пространстве классов эквивалентности симметрических матриц на алгебре Ли.

Теорема 1.13 ([Mish] для $n = 4$, [Man] для всех n). *Уравнение Эйлера $\dot{m} = \operatorname{ad}_\omega^* m$ движения n-мерного твердого тела с $\omega = A^{-1} m$ и оператором инерции A, определенным выше, является вполне интегрируемым. Функции*

$$H_{\lambda,\nu} = \det(m + \lambda D^2 + \nu E) \tag{1.3}$$

на сопряженном пространстве $\mathfrak{so}_n^*$ *доставляют полное семейство интегралов в инволюции.*

Инволютивность функций $H_{\lambda,\nu}$ может быть доказана методом пуассоновых пар и сдвига аргумента, который мы обсудим ниже (см. [Man]). Как мы отмечали выше, операторы инерции физического происхождения $A(\omega) = D\omega + \omega D$ (т. е. те, чьи матричные элементы $a_{ij} = d_i + d_j$) образуют весьма специальное подпространство в пространстве всех симметрических операторов $A\colon \mathfrak{so}_n \to \mathfrak{so}_n^*$. Согласно Манакову, достаточным условием интегрируемости является условие

$$a_{ij} = \frac{p_i - p_j}{q_i - q_j}$$

(которое отвечает вышеупомянутому физическому случаю при $p_i = q_i^2$). Предел при $n \to \infty$ этих интегрируемых систем на $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ рассмотрен в [War].

Геодезический поток на группе $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, снабженной произвольной левоинвариантной римановой метрикой, является в общем случае неинтегрируемым.

Для бесконечномерной гамильтоновой системы интегрируемость часто связана с существованием двух независимых пуассоновых структур, образующих так называемую пуассонову пару, таким образом, что система является гамильтоновой по отношению к обеим структурам.

Определение 1.14. Пусть многообразие M снабжено двумя пуассоновыми структурами $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_1$. Говорят, что они *образуют пуассонову пару* (или *являются совместными*), если все их линейные комбинации $\lambda\{\,.\,,\,.\,\}_0 + \nu\{\,.\,,\,.\,\}_1$ также являются пуассоновыми структурами.

Динамическая система $\dot{x} = v(x)$ на M называется *бигамильтоновой*, если векторное поле v является гамильтоновым по отношению к обеим структурам $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_1$.

Замечание 1.15. Условие, что $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_1$ образуют пуассонову пару, эквивалентно тождеству

$$\sum_{(f,g,h)} \{\{f,g\}_0, h\}_1 + \{\{f,g\}_1, h\}_0 = 0 \tag{1.4}$$

для любой тройки гладких функций f, g, h на M, где сумма берется по всем циклическим перестановкам тройки.

В следующей теореме положим для простоты, что M односвязно и что пуассоновы структуры $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_1$ всюду невырождены, т. е. что они обратны некоторым симплектическим структурам на M.

Теорема 1.16 (см. [GDo]). *Пусть векторное поле v бигамильтоново по отношению к структурам пуассоновой пары $\{\,.\,,\,.\,\}_0$, $\{\,.\,,\,.\,\}_1$. Тогда существует последовательность гладких функций H_k, $k = 0, 1, \ldots$, на M такая, что*

1) *H_0 является гамильтонианом поля $v_0 := v$ по отношению к структуре $\{\,.\,,\,.\,\}_0$;*

2) *поле v_k, отвечающее 0-гамильтониану H_k, совпадает с полем 1-гамильтониана H_{k+1};*

3) *функции* H_k, $k = 0, 1, \ldots$, *находятся в инволюции относительно каждой из двух скобок Пуассона.*

Алгоритм построения гамильтонианов H_k называется *схемой Ленарда* и изображен на рис. 72.

Хотя эта теорема здесь сформулирована только для случая невырожденных скобок, такая же процедура обычно применима и в более общем контексте. А именно, пусть поле $v_0 := v$ является гамильтоновым с функциями Гамильтона H_0 и H_1 относительно структур $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_1$ соответственно. Рассмотрим функцию H_1 как гамильтониан по отношению к скобке $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ и породим следующее гамильтоново поле v_1. Легко показать, используя тождество (1.4), что поле v_1 *сохраняет* скобку Пуассона $\{\,.\,,\,.\,\}_1$, если обе скобки образуют пуассонову пару. Отсюда, вообще говоря, не следует, что поле v_1 является *гамильтоновым* по отношению к скобке $\{\,.\,,\,.\,\}_1$. (Пример: вертикальное поле $\partial/\partial z$ сохраняет пуассонову структуру в $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, заданную бивекторным полем $\partial/\partial x \wedge \partial/\partial y$, но не определяется какой-либо функцией Гамильтона. Каждое гамильтоново поле для этой структуры было бы горизонтальным.) Если нам повезет и поле v_1 действительно окажется гамильтоновым относительно скобки $\{\,.\,,\,.\,\}_1$, назовем соответствующий гамильтониан H_2 и продолжим процесс.

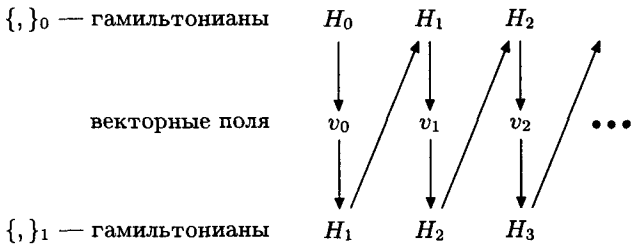


Рис. 72. Построение последовательности гамильтонианов H_k и бигамильтоновых векторных полей

Чтобы применить технику пуассоновых пар к алгебрам Ли, напомним, что на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует естественная линейная структура Ли–Пуассона (см. гл. I, § 6)

$$\{f, g\}(m) := \langle [df, dg], m \rangle$$

для любых двух гладких функций f, g на $\mathfrak{g}^*$, и $m \in \mathfrak{g}^*$. Другими словами, скобка Пуассона двух линейных функций на $\mathfrak{g}^*$ равна их коммутатору в самой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Симплектические листы этой пуассоновой структуры являются коприсоединенными орбитами действия группы на $\mathfrak{g}^*$, причем функции Казимира инвариантны относительно коприсоединенного действия. Следующий метод построения функций в инволюции на орбитах называется *методом сдвига аргумента*. Первоначально он появился в статье Манакова [Man] для описания интегрируемых случаев уравнений движения многомерного твердого тела (см. последующие обобщения, например, в [A-G, T-F]).

Зафиксируем точку m_0 в двойственном пространстве к алгебре Ли. Этому элементу поставим в соответствие некоторую новую пуассонову структуру на $\mathfrak{g}^*$.

Определение 1.17. *Постоянной скобкой Пуассона, ассоциированной с точкой* $m_0 \in \mathfrak{g}^*$, называется скобка $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$, заданная формулой

$$\{f, g\}_0(m) := \langle [df, dg], m_0 \rangle$$

для любых двух гладких функций f, g на сопряженном пространстве и любой $m \in \mathfrak{g}^*$. Дифференциалы df, dg функций f, g взяты в текущей точке m, и как и выше, они рассматриваются как элементы самой алгебры Ли.

Скобки $\{\,.\,,\,.\,\}$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ совпадают в точке m_0. Более того, бивектор, определяющий постоянную скобку $\{\,.\,,\,.\,\}_0$, не зависит от текущей точки. Симплектическими листами этой скобки являются касательная плоскость к коприсоединенной орбите группы в точке m_0, а также все плоскости в $\mathfrak{g}^*$, параллельные этой касательной плоскости (рис. 73).

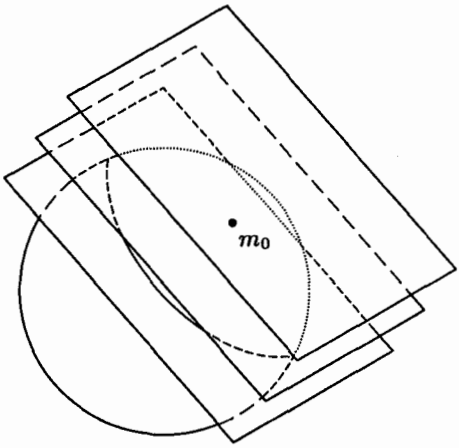


Рис. 73. Симплектические листы постоянной скобки являются плоскостями, параллельными касательной плоскости к коприсоединенной орбите в m_0

Предложение 1.18. *Скобки* $\{\,.\,,\,.\,\}$ *и* $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ *образуют пуассонову пару для каждой фиксированной точки* m_0.

Доказательство. Линейная комбинация $\{\,.\,,\,.\,\}_\lambda := \{\,.\,,\,.\,\} + \lambda\{\,.\,,\,.\,\}_0$ есть скобка Пуассона, являющаяся линейной структурой Ли–Пуассона $\{\,.\,,\,.\,\}$, перенесенной из начала координат в точку $-\lambda m_0$. □

Следствие 1.19. *Пусть* $f, g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ *— инварианты коприсоединенного действия группы, и пусть* $m_0 \in \mathfrak{g}^*$. *Тогда функции* $f(m + \lambda m_0)$, $g(m + \nu m_0)$ *точки* $m \in \mathfrak{g}^*$ *находятся в инволюции при любых* $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ *на каждой коприсоединенной орбите.*

Доказательство непосредственно вытекает из того, что функции Казимира для всех линейных комбинаций совместных скобок Пуассона нахо-

дятся в инволюции друг с другом. Этот факт вытекает из определения пуассоновой пары. □

Мы оставляем читателю нахождение на основе этого следствия семейства (1.3) первых интегралов, обеспечивающих интегрируемость уравнений движения многомерного твердого тела (см. [Man]). Ниже мы покажем, как эта схема работает для уравнения КдФ.

Замечание 1.20. Функция Гамильтона f и пуассонова структура $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ порождают следующее гамильтоново векторное поле на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$:

$$v(m) = \mathrm{ad}^*_{df} m_0, \tag{1.5}$$

здесь дифференциал df берется в точке m. Действительно, для произвольной функции g имеем

$$\{f, g\}_0(m) = \langle \mathrm{ad}_{df}(dg), m_0\rangle = \langle (dg), \mathrm{ad}^*_{df} m_0\rangle,$$

причем последнее спаривание компонент совпадает с производной Ли $L_v g$ (в точке $m \in \mathfrak{g}^*$) от функции g вдоль векторного поля v, определяемого (1.5). Следовательно, это векторное поле v является гамильтоновым с функцией Гамильтона f.

1.3. Интегрируемость уравнения КдФ

Существование бесконечного числа законов сохранения для течения, определенного уравнением КдФ, было обнаружено в конце 1960-х гг. В некотором смысле это открытие и явилось началом современной теории бесконечномерных интегрируемых гамильтоновых систем (см. захватывающий исторический обзор [Ma, Miu]).

Первоначальный набор законов сохранения КдФ был найден методом неопределенных коэффициентов, остановившимся на девятом инварианте. В работе [Miu] Миура вспоминал, как летом 1966 г. распространилась гипотеза, что существует ровно 9 законов сохранения для КдФ. Он потратил неделю летних каникул и нашел десятый. Позднее была написана программа вычисления одиннадцатого инварианта. Тогда только специалисты пришли к убеждению, что существует бесконечная серия законов сохранения.

В этом параграфе мы покажем, как эти законы можно получить, применяя рекурсивную схему Ленарда или метод Манакова сдвига аргумента из предыдущего параграфа.

Уравнение КдФ является примером бигамильтоновой системы. Во-первых, как мы обсуждали в п. 1.1, оно является гамильтоновым на двойственном пространстве $\mathrm{vir}^* = \{(u(dx)^2, c)\}$ алгебры Вирасоро для квадратичной функции Гамильтона

$$-H(u(dx)^2, c) = -\frac{1}{2}\left(\int u^2\,dx + c^2\right)$$

относительно линейной пуассоновой структуры. Эта пуассонова структура называется *второй гамильтоновой структурой* КдФ и иногда называется скобкой Магри (см. [Mag]).

Более того, можно найти такую точку в пространстве vir^*, что уравнение КдФ будет гамильтоново по отношению к постоянной пуассоновой структуре, ассоциированной с этой точкой. А именно, пусть пара $(u_0(x)(dx)^2, c_0)$ состоит из функции $u_0(x) \equiv 1/2$ и $c_0 = 0$.

Определение 1.21. Пусть F — функция на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $m \in \mathfrak{g}^*$. В случае бесконечномерного пространства $\mathfrak{g}^*$ дифференциал $dF|_m$ (рассматриваемый как вектор самой алгебры Ли) называется *вариационной производной* $\dfrac{\delta F}{\delta m}$ и определяется соотношением

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(m + \varepsilon w)|_{\varepsilon=0} = \left\langle \frac{\delta F}{\delta m}, w \right\rangle$$

для произвольного вектора $w \in \mathfrak{g}^*$.

Например, в случае алгебры Вирасоро функционал F определен на множестве пар $(u(x)(dx)^2, c)$. Вариационной производной

$$\left(\left(\frac{\delta F}{\delta u} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\delta F}{\delta c} \right)$$

является такая пара, состоящая из векторного поля и числа, что

$$\frac{d}{d\varepsilon} F((u + \varepsilon w)(dx)^2, c + \varepsilon b)|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \left\langle \left(\left(\frac{\delta F}{\delta u} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\delta F}{\delta c} \right), (w(dx)^2, b) \right\rangle = \int \left(\frac{\delta F}{\delta u}(x) \cdot w(x) \right) dx + \frac{\delta F}{\delta c} \cdot b.$$

(Обычно в качестве функционалов рассматривают дифференциальные полиномы на vir^*, или другими словами, интегралы полиномов от функции u и ее производных, см. [GDo].)

Предложение 1.22. 1. *Пуассонова структура* $\{\,.\,,\,.\,\}_0$, *ассоциированная с точкой*

$$\left(\frac{1}{2}(dx)^2, 0 \right) \in \mathrm{vir}^*,$$

переводит каждую функцию Гамильтона F *на двойственном пространстве* vir^* *в гамильтоново векторное поле на* vir^*, *которое в точке* $(u(dx)^2, c)$ *задается парой*

$$\left(\left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)' (x)(dx)^2, 0 \right).$$

2. *Уравнение Кортевега–де Фриза гамильтоново по отношению к постоянной пуассоновой структуре* $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ *с функцией Гамильтона*

$$Q(u(dx)^2, c) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (-u^3(x) + c(u')^2(x))\, dx. \tag{1.6}$$

Пуассонова структура $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ называется *первой гамильтоновой структурой* КдФ (см., например, [LeM]). С гамильтонианов $H_2 = H$ и $H_3 = Q$ относительно пуассоновой пары $\{\,.\,,\,.\,\}$ и $\{\,.\,,\,.\,\}_0$ начинается серия законов сохранения уравнения КдФ, отвечающих итерационной схеме Ленарда. Легко

показать, что на каждом шаге гамильтониан H_k является дифференциальным полиномом порядка k по $u(x)$. Обычно эта серия первых интегралов КдФ начинается с функции Гамильтона $H_1(u) := \int u(x)\,dx$.

Доказательство. Утверждение 1 — непосредственное применение понятия вариационной производной к формуле (1.5). Действительно, положив величины $u(x)$ и c равными константам $u_0(x) \equiv 1/2$ и $c_0 = 0$ в формуле (1.2), получим гамильтоново векторное поле для функционала F на пространстве vir^*:

$$\mathrm{ad}^*_{(f\partial/\partial x, a)}((u_0(dx)^2, c_0) = ((2f'u_0 + fu_0' + c_0 f''')(dx)^2, 0) = (f'(dx)^2, 0),$$

где $f := \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right)$ и $a := \left(\frac{\delta F}{\delta c}\right)$.

2. Вариационная производная от функции Q, заданной формулой (1.6), равна

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta u}\right) = -\frac{3}{2}u^2 - cu''. \tag{1.7}$$

В самом деле, это следует из равенства

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int\limits_{S^1} (-(u+\varepsilon w)^3 + c((u+\varepsilon w)')^2)\,dx = -\int\limits_{S^1} \left(\frac{3}{2}u^2 + cu''\right) w\,dx.$$

Подставляя вариационную производную $f = \delta Q/\delta u$ из формулы (1.7) в соотношение (1.2), получаем следующее гамильтоново векторное поле на сопряженном пространстве vir^*:

$$\begin{cases} \partial_t u = f' = -\left(\frac{3}{2}u^2 + cu''\right)' = -3uu' - cu''', \\ \partial_t c = 0, \end{cases}$$

т. е. уравнение КдФ. □

Замечание 1.23. Поток КдФ касается коприсоединенных орбит алгебры Вирасоро (как поток каждого уравнения Эйлера на сопряженном пространстве к любой алгебре Ли). Заметим, что никакие из построенных первых интегралов уравнения КдФ не являются инвариантами коприсоединенного действия алгебры Вирасоро, и поэтому их свойства сильно отличаются от свойств функций Казимира двумерной гидродинамики (ср. замечание 9.8 в гл. I). Описание орбит алгебры Вирасоро (или соответствующих функций Казимира), помимо очевидной пользы для исследования поведения решений КдФ, является вопросом, представляющим самостоятельный интерес.

Задача классификации коприсоединенных орбит алгебры Вирасоро известна также как классификация операторов Хилла

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \colon u \in C^\infty(S^1)\right\}$$

или проективных структур на окружности. Она была независимо решена в разных контекстах (см. [Kui, LPa, Seg, Ki2]). Орбиты нумеруются одним

дискретным и одним непрерывным параметрами. Обобщение этой задачи до классификации симплектических листов, так называемых скобок Гельфанда–Дикого, которые являются естественными скобками Пуассона на алгебрах дифференциальных операторов более высокого порядка на окружности, а также ее связь с перечислением гомотопических типов неуплощающихся кривых на сферах дается в работе [OK2] (см. также [KhS, Sha, E-K]).

Схема Ленарда порождает серию уравнений Гамильтона, называемых иерархией КдФ. Подобные конструкции бигамильтоновых структур работают как для уравнений Камасса–Холма и Хантера–Сакстона [KhM], так и для иерархий высших КдФ, которые являются гамильтоновыми потоками на пространстве коэффициентов дифференциальных операторов более высокого порядка на окружности (см. [Adl, GDi, SeW, PrS]).

1.4. Отступление о когомологиях алгебр Ли и коцикле Гельфанда–Фукса

Теория когомологий алгебр Ли является алгебраическим обобщением следующей геометрической конструкции теории групп Ли.

Пусть G — связная компактная односвязная группа Ли, снабженная двусторонне инвариантной метрикой (стандартный пример: группа единичных кватернионов $\mathrm{SU}(2) \approx S^3$ или группа $\mathrm{SU}(n)$ унитарных матриц с определителем единица).

Группы когомологий и их внешнюю алгебру для группы G можно вычислить следующим образом.

Теорема 1.24. *Внешняя алгебра двусторонне инвариантных дифференциальных форм на G изоморфна внешней алгебре когомологий многообразия G. Изоморфизм задается сопоставлением каждой дифференциальной форме ее когомологического класса.*

Доказательство основано на двух фактах: 1) каждая двусторонне инвариантная форма замкнута (см. формулу (1.8) ниже); 2) каждая замкнутая форма когомологична двусторонне инвариантной форме, а именно, усреднению всех своих сдвигов по группе.

Эта классическая теорема сводит все вычисления к чисто алгебраическим, в терминах коммутатора алгебры Ли. Действительно, любая односторонне инвариантная форма определяется своим значением в единице группы, т. е. на алгебре Ли. Внешний дифференциал этой формы также является инвариантной формой, и, следовательно, он также определяется своим значением на алгебре Ли.

Дифференциал инвариантной 1-формы ω дается следующим тождеством (*формула Маурера–Картана*):

$$(d\omega)(\xi, \eta) = \mp\omega([\xi, \eta]).$$

(Здесь знак зависит от того, является ли форма лево- или правоинвариантной.) Эта формула дает алгебраическое условие замкнутости, совпадающее с условием двусторонней инвариантности.

В более общем случае справедлива следующая

Теорема 1.25. *Для односторонне инвариантной n-формы ω, значение которой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ есть $\omega(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi_i\in\mathfrak{g}$, ее внешний дифференциал является инвариантной $(n+1)$-формой $d\omega$, значение которой на алгебре Ли равно*

$$d\omega(\xi_0,\dots,\xi_n)=\pm\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\hat{\xi}_i,\dots,\hat{\xi}_j,\dots,\xi_n). \tag{1.8}$$

Здесь знак выбирается в зависимости от того, является ли форма ω лево- или правоинвариантной. Символ $\hat{}$ означает, что соответствующий вектор отсутствует.

Пример 1.26. Для 1-формы ω мы имеем $\mp(d\omega)(\xi,\eta)=\omega([\xi,\eta])$. Дифференциал 2-формы ω дается формулой

$$\mp d\omega(\xi,\eta,\zeta)=\omega([\xi,\eta],\zeta)+\omega([\eta,\zeta],\xi)+\omega([\zeta,\xi],\eta).$$

Это алгебраическое свойство приводит к следующему определению.

Определение 1.27. *Когомологическим комплексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$* называется комплекс

$$\Omega^0\xrightarrow{d_0}\Omega^1\xrightarrow{d_1}\Omega^2\xrightarrow{d_2}\dots,$$

где Ω^n является векторным пространством внешних n-форм на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а дифференциал d_n дается формулой (1.8).

Группой (или пространством) n-когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется векторное пространство

$$\frac{\operatorname{Ker} d_n\colon\Omega^n\to\Omega^{n+1}}{\operatorname{Im} d_{n-1}\colon\Omega^{n-1}\to\Omega^n},$$

являющееся факторпространством пространства замкнутых n-форм по подпространству всех точных n-форм.

Элементы пространства $\operatorname{Ker} d_n\colon\Omega^n\to\Omega^{n+1}$ называются *n-коциклами*, а элементы подпространства $\operatorname{Im} d_{n-1}\colon\Omega^{n-1}\to\Omega^n$ — *n-кограницами*, или коциклами, когомологичными нулю.

Замечание 1.28. Соотношение $d_nd_{n-1}=0$ непосредственно следует из формулы (1.8) и тождества Якоби. Геометрически это означает, что граница границы симплекса (скажем, треугольника или тетраэдра) нулевая.

Пример 1.29. Пусть $a\in\mathfrak{g}^*$ — элемент сопряженного пространства к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Положим

$$\omega(\xi,\eta):=a([\xi,\eta]).$$

Эта функция является 2-коциклом и даже 2-кограницей на $\mathfrak{g}$.

Например, для алгебры Ли $\mathfrak{g}=\operatorname{Vect}(S^1)$ векторных полей на окружности и точки $a=(dx)^2/2\in\operatorname{Vect}^*$ получаем следующий 2-коцикл, когомологичный нулю:

$$\omega\Big(g(x)\frac{\partial}{\partial x},h(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big)=\frac{1}{2}\int\limits_{S^1}(g'h-gh')\,dx=\int\limits_{S^1}g'h\,dx.$$

Замечание 1.30. 2-коцикл на $\mathrm{Vect}(S^1)$, определяющий алгебру Вирасоро, имеет более сложную природу и связан с проективными структурами на окружности (ниже мы следуем [Tab3]).

Заметим, что каждый 2-коцикл на алгебре Ли задает линейное отображение из этой алгебры Ли в двойственное к ней пространство. Построим естественное отображение из алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ векторных полей на окружности в двойственное к ней пространство квадратичных дифференциалов $\mathrm{Vect}(S^1)^* = \{u(x)(dx)^2\}$, зафиксировав некоторую проективную структуру на S^1.

Возьмем четыре точки x, $x+t$, $x+2t$, $x+3t$ в некоторой аффинной системе координат, где t очень мало. Диффеоморфизм $f\colon S^1 \to S^1$ переводит их в четыре точки, двойное отношение которых имеет порядок t^2 (а не порядок t!). Главная часть этого двойного отношения в точке x называется (с точностью до постоянного множителя) *производной Шварца* $S(x)$ диффеоморфизма f

$$S(x) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Соответствующий квадратичный дифференциал $S(x)(dx)^2$ не зависит от (проективного) выбора координаты x и измеряет «непроективность» отображения f. Он является коциклом группы диффеоморфизмов окружности со значениями в квадратичных дифференциалах.

Теперь вернемся к алгебре Ли векторных полей. Пусть f является диффеоморфизмом окружности S^1, близким к единице, $f(x) = x + sv(x)$, где s мало, и пусть $v(x)d/dx$ — векторное поле из алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Тогда $S(x)$ равно $sv'''(x) + O(s^2)$, где штрих $'$ обозначает производную d/dx. Отбросив члены более высокого порядка, получаем искомое отображение, переводящее поле $v(x)d/dx$ в квадратичный дифференциал $v'''(x)(dx)^2$.

Пусть q — угловая координата на окружности. Тогда полю $w(q)\partial/\partial q$ соответствует $(d^3w/dq^3 + dw/dq)(dq)^2$. Этот факт легко вывести, рассмотрев алгебру Ли, порожденную образующими проективной группы $\partial/\partial q$, $(\cos q)\partial/\partial q$, $(\sin q)\partial/\partial q$. Мы получим коцикл, значение которого на двух векторных полях $v(q)\partial/\partial q$ и $w(q)\partial/\partial q$ равно

$$\int\limits_{S^1} (vw''' + vw')\,dq,$$

где штрихом $'$ обозначена производная d/dq по углу. Второй член когомологичен нулю, как мы видели выше (см. пример 1.29). Интегрируя по частям первый член, получаем коцикл Гельфанда–Фукса. Итак, коцикл Гельфанда–Фукса (и, следовательно, алгебра Вирасоро) измеряют деформацию проективной структуры на $S^1 = \mathbb{R}P^1$ диффеоморфизмами.

§ 2. Уравнения газовой динамики и сжимаемых жидкостей

Движение сжимаемой жидкости — это естественное обобщение движения идеальной несжимаемой жидкости. Вместо условия несжимаемости предположим теперь, что давление в уравнении Эйлера определяется внутренними

степенями свободы жидкости. Обычно этими внутренними параметрами являются плотность и энтропия жидкости.

2.1. Баротропные жидкости и газовая динамика

Баротропные жидкости (или газы) являются упрощенными моделями сжимаемых жидкостей, в которых только плотность жидкости или газа является внутренней степенью свободы.

Определение 2.1. (Сжимаемая) жидкость называется *баротропной*, если член давления в эволюционном уравнении определяется только плотностью жидкости. Движение такой жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho\dot{v} = -\rho(v,\nabla)v - \nabla h(\rho), \\ \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

с неизвестными — векторным полем скорости v и функцией плотности жидкости ρ. Функция давления $h(\rho)$ отражает физические свойства жидкости и предполагается заданной. Например, уравнение одномерной *газовой динамики* соответствует выбору $h(\rho) = \rho^\nu$ (для движения воздуха $\nu \approx 1.4$).

Уравнениям (2.1) можно придать смысл на произвольном римановом многообразии M: (v,∇) означает ковариантную производную вдоль поля v (см. гл. I), а дивергенция берется по отношению к форме объема, индуцированной метрикой. Первое уравнение — аналог уравнения Эйлера несжимаемой жидкости, только поле скоростей $v \in \operatorname{Vect}(M)$ теперь не предполагается бездивергентным. Второе же уравнение является уравнением неразрывности с неизвестной функцией ρ. Таким образом, фазовое пространство системы состоит из всевозможных пар $\{(v,\rho)\colon v \in \operatorname{Vect}(M),\ \rho \in C^\infty(M)\}$.

Соответствующее конфигурационное пространство для течений баротропной жидкости на многообразии M — это группа

$$P := \operatorname{Diff}(M) \ltimes C^\infty(M),$$

определяемая как полупрямое произведение группы *всех* диффеоморфизмов многообразия M и пространства $C^\infty(M)$ всех гладких функций на многообразии (см. [HMRW], где имеется вывод уравнения с помощью лагранжева формализма, и [GrS] по поводу некоторых теорем существования решений).

Напомним (ср. с гл. I, § 10 о магнитном расширении группы), что групповая структура на *полупрямом произведении* P определяется формулой

$$(\varphi, a) \circ (\psi, b) = (\varphi \circ \psi, \psi_* a + b),$$

где $\psi_* a$ — естественное действие диффеоморфизма ψ на функцию a: $(\psi_* a)(x) = a(\psi^{-1}(x))$. Коммутатор в соответствующей алгебре Ли

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Vect}(M) \ltimes C^\infty(M)$$

также определяется полупрямым произведением:

$$[(v,a),(w,b)] = ([v,w], L_w a - L_v b),$$

где $\varphi, \psi \in \mathrm{Diff}(M)$; $a, b \in C^\infty(M)$; $v, w \in \mathrm{Vect}(M)$; а $[v, w]$ означает коммутатор, т. е. скобку Пуассона двух векторных полей на M со знаком минус ($[v, w] = -\{v, w\}$, см. гл. I, § 2).

Замечание 2.2. Алгебра Ли $\mathfrak{p} = \mathrm{Vect}(M) \ltimes C^\infty(M)$ имеет простой геометрический смысл: она является алгеброй Ли дифференциальных операторов первого порядка на M. Такой оператор является суммой $L_v + \rho$ оператора L_v производной Ли по некоторому полю v на M и оператора нулевого порядка умножения на функцию ρ.

Предложение 2.3 (см. [GS1, MRW, Nov2]). *Уравнение движения баротропной жидкости является уравнением Гамильтона на $\mathfrak{p}^*$ по отношению к линейной структуре Пуассона–Ли и функции Гамильтона*

$$H(v, \rho) = -\int\limits_M \Big(\frac{1}{2}\rho v^2 + \Phi(\rho)\Big)\mu,$$

где $\dfrac{d}{d\rho}\Phi(\rho) = h(\rho)$.

Замечание 2.4. В отличие от динамики Эйлера (как твердого тела, так и идеальной жидкости), полная энергия баротропной жидкости не является квадратичной формой и она не отвечает римановой метрике на группе P. Однако все же имеется вариационная задача на кокасательном пространстве T^*P группы Ли P, экстремалями которой являются решения уравнений (2.1). Теоретико-групповая интерпретация и все описанные гамильтоновы свойства уравнений остаются справедливыми и для уравнений баротропной жидкости (или газовой динамики) с несколькими несущественными поправками.

Заметим, что для одномерного многообразия $M = \mathbb{R}$ или S^1 уравнения газовой динамики (2.1) для алгебры $\mathfrak{p} = \mathrm{Vect}(M) \ltimes C^\infty(M)$ являются интегрируемыми (см. п. 3.2 ниже). Эта алгебра Ли имеет три независимых нетривиальных 2-коцикла (причем одним из них является коцикл Гельфанда–Фукса алгебры Вирасоро).

Схема доказательства предложения 2.3. Непосредственной проверкой нетрудно доказать следующее

Предложение 2.5. *Сопряженным пространством к пространству векторных полей* $\mathrm{Vect}(M)$ *на n-мерном многообразии M является пространство $\Omega^1(M) \otimes_f \Omega^n(M)$, где $\otimes_f$ означает, что тензорное произведение берется над функциями на M.*

Другими словами, элементами пространства $\Omega^1(M) \otimes_f \Omega^n(M)$ являются пары $\beta \otimes \mu$, $\beta \in \Omega^1$, $\mu \in \Omega^n$, причем мы не делаем различия между парами $f\beta \otimes \mu$ или $\beta \otimes f\mu$ для произвольной функции f. (Зафиксировав форму объема μ_0 — и тем самым нарушив инвариантность — мы можем отождествить векторное пространство $\Omega^1(M) \otimes_f \Omega^n(M)$ с пространством 1-форм $\Omega^1(M)$.) Спаривание векторного поля $v \in \mathrm{Vect}(M)$ и элемента $\overline{\beta} = \beta \otimes_f \mu \in \Omega^1(M) \otimes_f \Omega^n(M)$ задается формулой:

$$\langle v, \beta \otimes \mu \rangle = \int\limits_M (i_v \beta)\, \mu$$

(векторное поле v надо подставить в 1-форму β, затем полученную n-форму $(i_v\beta)\mu$ проинтегрировать по M). Естественность такого выбора сопряженного пространства подтверждается тем, что коприсоединенное действие алгебры Ли $\mathrm{Vect}(M)$ имеет простой геометрический смысл:

$$\mathrm{Ad}^*_\varphi(\beta \otimes_f \mu) = \varphi_*\beta \otimes_f \varphi_*\mu, \tag{2.2}$$

т. е. оно является заменой координат как в 1-форме β, так и в n-форме μ.

В случае алгебры Ли $\mathfrak{p} = \mathrm{Vect}(M) \ltimes C^\infty(M)$ элементами соответствующего сопряженного пространства $\mathfrak{p}^*$ являются пары $(\overline{\beta}, \theta)$, где $\overline{\beta} \in \Omega^1(M) \otimes_f \otimes_f \Omega^n(M)$ и $\theta \in \Omega^n(M)$. Оставляем читателю убедиться самостоятельно, что коприсоединенное действие элемента $(\varphi, a) \in \mathrm{Diff} \ltimes C^\infty(M)$ задается формулой $\mathrm{Ad}^*_{(\varphi,a)}(\overline{\beta}, \theta) = (\varphi_*\overline{\beta} + da \otimes \varphi_*\theta, \varphi_*\theta)$ (см., например, [MRW]).

По известному коприсоединенному действию можно найти вариационную производную функции Гамильтона (см. определение 1.21) и соответствующее уравнение Эйлера по формуле

$$\dot{m} = \mathrm{ad}^*_{\delta H/\delta m} m. \qquad \square$$

Оказывается, что уравнение движения баротропной жидкости, или газовой динамики, во многом похоже на несжимаемый случай (например, структура законов сохранения в четных и нечетных размерностях). Это явление объясняется «несжимаемостью» баротропной жидкости по отношению к координатам, меняющимся вместе с плотностью.

Точнее, пусть μ — форма объема на M, индуцированная римановой метрикой. Функции плотности ρ отвечает *n-форма плотности* $\theta := \rho\mu \in \Omega^n(M)$.

Теорема 2.6 (см. [KhC]). *Уравнения движения баротропной жидкости* (2.1) *имеют первые интегралы*

$$I(v) := \int\limits_M u \wedge (du)^m \quad \text{или} \quad I_f(v) := \int\limits_M f\Big(\frac{(du)^m}{\theta}\Big)\theta$$

в зависимости от четности числа $n = \dim(M)$ ($n = 2m+1$ *и* $n = 2m$ *соответственно*). *Здесь поле* v *двойственно* 1*-форме и относительно метрики, а* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— произвольная функция.*

Эти первые интегралы можно получить с помощью формулы (9.2) из гл. I, заменив n-форму μ формой плотности $\theta = \rho\mu \in \Omega^n(M)$, где ρ — функция плотности. Ниже мы покажем, что эти инварианты являются функциями Казимира на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{p}$. Другой (хотя и тривиальный) закон сохранения той же природы отвечает за общую массу жидкости, т. е. за интеграл от формы плотности θ по многообразию M. Функция Гамильтона H — это еще один первый интеграл уравнения, но она не является функцией Казимира.

Замечание 2.7. Уравнения движения баротропной жидкости, плотность ρ которой почти постоянна, аппроксимируют уравнения Эйлера несжимаемой жидкости [Eb]. Условие несжимаемости можно рассматривать как дополнительную связь, налагаемую на систему (см. [Arn16]). Динамическая

система на подмногообразии может задаваться как динамическая система на объемлющем многообразии с дополнительной «силой реакции», направленной к подмногообразию.

Например, точечная масса, вынужденная двигаться по единичной окружности, может рассматриваться как свободный конец твердого стержня, закрепленного в другом конце. Эта система есть предельный случай механической системы, представляющей собой материальную точку, находящуюся на конце пружины, когда коэффициент упругости стремится к бесконечности, а собственная длина пружины (длина при равновесии) остается равной единице. Точка стержня движется по окружности, а точка на пружине колеблется вблизи нее. В пределе координата и скорость (но не ускорение) «упругого маятника» стремятся к соответствующим характеристикам маятника на твердой подвеске.

Подобно этому для группы диффеоморфизмов можно ввести «возвращающую силу», направленную к подгруппе сохраняющих объемы диффеоморфизмов. Тогда скорость и ее первые частные производные для баротропной (слабо сжимаемой) жидкости стремятся к соответствующим величинам для идеальной жидкости. В частности, приведенные выше законы сохранения для баротропной жидкости превратятся в формулы (9.2) гл. I законов сохранения при $\rho \to 1$. Действительно, формулы этих законов сохранения содержат лишь скорость v и ее пространственные частные производные $\partial v/\partial x$ (другими словами, форму u и ее дифференциал du, где u связано с v с помощью римановой метрики, т. е. без какого-либо дифференцирования). Законы сохранения не содержат производных скорости по времени (т. е. ускорения), и, следовательно, предельный переход возможен.

Доказательство теоремы 2.6. Эвристически, идея состоит в том, что плотность ρ переносится потоком и жидкость является несжимаемой по отношению к новой форме объема θ (зависящей от времени и от начальных условий). Таким образом, можно применить теорему 9.2 гл. I, предположения которой не требуют какой-либо связи между метрикой и формой объема.

Более точно, траектории уравнений движения баротропной жидкости касаются орбит коприсоединенного представления группы $P = \mathrm{Diff}(M) \ltimes \ltimes C^\infty(M)$, и утверждение теоремы вытекает из следующего предложения.

Предложение 2.8. *Функционал*

$$I(\overline{\beta}, \theta) = \int\limits_M u \wedge (du)^m$$

в случае нечетного $n = 2m + 1$ *и функционалы*

$$I_f(\overline{\beta}, \theta) = \int f\Big(\frac{(du)^m}{\theta}\Big)\theta$$

в случае четного $n = 2m$ (*где* 1-*форма* u *определяется по формуле* $u := \overline{\beta}/\theta \in \in \Omega^1(M)$) *инвариантны при коприсоединенном действии группы* P *на двойственном пространстве* $\mathfrak{p}^*$.

Доказательство. Заметим, что частное $u = \overline{\beta}/\theta$ имеет геометрический смысл дифференциальной 1-формы (см. (2.2)). На эту форму элемент группы действует по формуле:

$$\mathrm{Ad}^*_{(\varphi,a)} u = \mathrm{Ad}^*_{(\varphi,a)}\left(\frac{\overline{\beta}}{\theta}\right) = \frac{\varphi_*\overline{\beta} + da \otimes \varphi_*\theta}{\varphi_*\theta} = \varphi_*\left(\frac{\overline{\beta}}{\theta}\right) + da = \varphi_* u + da.$$

Таким образом, 1-форма u переносится потоком с точностью до дифференциала некоторой функции. Следовательно, действие группы P на классе смежности $[u] \in \Omega^1/d\Omega^0$ 1-формы на M, также как и на n-форме $\theta \in \Omega^n$, является геометрическим: это просто замена переменных. Теперь предложение 2.8 (также как и предложение 9.3 из гл. I) следует из бескоординатного определения функционалов I и I_f. □

Для завершения доказательства теоремы 2.6 осталось напомнить, что оператор инерции $\widetilde{A}\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$, определяемый римановой метрикой на многообразии M, является отображением $(v, \rho) \mapsto (u \otimes \theta, \theta)$, где $\theta = \rho\mu$ — форма плотности на M, а 1-форма u получается из вектора скорости v «опусканием индексов» с помощью метрики. □

2.2. Другие консервативные системы уравнений, связанные с движением жидкости

В обзорах [GS2, HMRW, MRW, Nov2, DKN, VlM] рассмотрен гамильтонов формализм, связанный с различными типами жидкостей, и в частности, развит метод полупрямых произведений и гамильтоновых редукций.

Приведем несколько примеров:

1. Общая невязкая сжимаемая жидкость — это среда с двумя внутренними степенями свободы: член давления определяется и плотностью, и энтропией (в отличие от баротропного случая, где он определяется только плотностью), см. [Nov2]. Тогда соответствующее уравнение Эйлера связано с полупрямым произведением алгебр Ли

$$\mathfrak{p}^* := \mathrm{Vect}(M) \ltimes [C^\infty_\varepsilon(M) \oplus C^\infty_\rho(M)].$$

2. Анизотропные жидкости (например, супержидкость ^{4}He) требуют введения векторного поля для внутренних степеней свободы [Nov2, KhL].

3. Магнитная гидродинамика в сжимаемой идеально проводящей жидкости отвечает полупрямому произведению магнитного расширения группы диффеоморфизмов (рассмотренного в гл. I, § 10) с пространством гладких функций на M (см. [MRW]).

4. Движение идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей не имеет явной групповой структуры: нельзя построить композицию двух преобразований потока с различными контурами границы. Гамильтонов формализм для этой задачи, а также гамильтонов вид уравнений движения капли жидкости с учетом поверхностного натяжения излагается в [LMMR].

5. Движение твердого тела в жидкости описывается уравнениями Кирхгофа в $\mathbb{R}^6$ (см. гл. I, § 10). Однако вся система тело-жидкость является

уже бесконечномерной системой. Движение тела, погруженного в жидкость, задается вектором количества движения и кинетическим моментом, а жидкость представляет собой бесконечномерную систему рассматриваемого типа (одна из компонент границы фиксирована, другая свободна). Жидкость, заполняющая полость M в твердом теле, — другой пример подобной системы. Ей отвечает полупрямое произведение группы $E(3)$ (движений тела) и $S\mathrm{Diff}(M)$ (движение жидкости, заполняющей полость объема) (см. [VII] об анализе устойчивости для систем обоих типов).

6. Геометрия геодезических относительно H^1-метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов и ее связь с усредненным уравнением Эйлера обсуждалась в [MRS].

7. Многие уравнения, связанные с двумерной гидродинамикой, интегрируемы. Например, уравнение Кадомцева–Петриашвили $(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$ определяет интегрируемую гамильтонову систему, описывающую течение мелкой воды.

8. Уравнения движения бесконечно проводящей жидкости (а также β-плоскости в метеорологии, $\Delta\psi_t + \beta\psi_x + \{\psi, \Delta\psi\} = 0$) отличаются от стандартной несжимаемой двумерной или трехмерной гидродинамики членом типа силы Кориолиса (см. [Fey] и п. 2.3 ниже).

9. Уравнение $\{\psi^s + cy, \beta\psi^s + \beta\} = 0$ стационарных волн в двумерной задаче получается из уравнения β-плоскости подстановкой $\psi(x, y, t) = \psi^s(x - ct, y)$. Оно имеет интересные решения в виде стационарного движения дипольного вихря (см. [LaR], гл. I, п. 11.1 о случае $\beta = 0$).

10. Многие динамические системы на *синус*-алгебре являются «квантовым» аналогом алгебры гамильтоновых векторных полей на двумерном торе (см. замечание 11.6 в гл. I и в [HOT]).

11. Общие скобки Пуассона гидродинамического типа [D-N, DKN] определяют гамильтонов формализм для квазилинейных уравнений первого порядка на многообразии. Свойства этих скобок накладывают весьма ограничительные условия на риманову структуру этого многообразия.

Еще одним преимуществом гамильтонова подхода является простая геометрическая интерпретация так называемых *переменных Клебша*, встречающихся во многих задачах, представляющих физический интерес. Эти переменные возникают в гидродинамической постановке как избыточный набор координат (с дополнительными связями между ними), в которых уравнение Эйлера принимает каноническую гамильтонову форму (см. [Lam]). Общую пуассонову точку зрения на симплектические (или Клебша) переменные можно найти в [M-W] (см. также [Zak, MRW]).

Определение 2.9 (см. [M-W, MRW]). Пусть P — пуассоново многообразие. *Симплектическими переменными* на P называется отображение $J\colon M \to P$ симплектичекого многообразия M в P, которое согласовано со скобками Пуассона (т. е. поднятие скобки Пуассона двух функций f, g на P является скобкой Пуассона на M от их поднятий, $f \circ J$, $g \circ J$). Канонические симплектические координаты на M называются *каноническими координатами* на пуассоновом многообразии P.

Функция Гамильтона $H\colon P \to \mathbb{R}$ определяет функцию Гамильтона $H_M := H \circ J$ на M, а интегральные кривые «канонической» гамильтоновой системы на M с гамильтонианом H_M накрывают соответствующие интегральные кривые для пуассоновой «неканонической» гамильтоновой системы на P.

Пример 2.10. Конструкция многообразия M и отображения J для пространства $P = \mathfrak{g}$, двойственного к произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, снабженного скобкой Ли–Пуассона, весьма наглядна. Симплектическое многообразие — это кокасательное расслоение $M = T^*G$ к группе Ли G, а отображение J является сдвигом L_g^* любого ковектора $\xi \in T_g^*G$ в точке $g \in G$ в касательное пространство в единице: $T_e^*G = \mathfrak{g}^*$. Естественные координаты (p, q) в кокасательном расслоении T^*G являются каноническими для $\mathfrak{g}^*$, поскольку симплектическая структура имеет вид $dp \wedge dq$.

Линейный аналог переменных на T^*G — это набор канонических координат на $\overline{M} = \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}$, а отображение

$$\bar{J}\colon \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

задается формулой $(p, q) \mapsto \mathrm{ad}_q^* p$. Мы отсылаем к работам [M-W, MRW, Zak] за подробным описанием этой конструкции переменных Клебша и ее многочисленными приложениями к динамическим системам и их законам сохранения.

2.3. Уравнение бесконечной проводимости

Уравнение бесконечной проводимости обладает многими свойствами, присущими уравнениям идеальной гидродинамики. Оно связано с уравнением движения несжимаемой жидкости, поскольку при высокой плотности электронный газ подобен жидкости: взаимное отталкивание одинаково заряженных частиц в электронных сгустках делает этот газ несжимаемым.

Определение 2.11 (см., например, [Fey]). Уравнение (нерелятивистской) *бесконечной проводимости* в области в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\dot{v} = -(v, \nabla)v - v \times \boldsymbol{B} - \nabla p. \tag{2.3}$$

Здесь v — это бездивергентное поле скоростей электронного газа, $\boldsymbol{B}$ — постоянное по времени (но не в пространстве) внешнее бездивергентное магнитное поле, а символ $\times$ означает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Можно написать аналог этого уравнения на произвольном римановом многообразии M с формой объема μ (см. [OKC]).

Предложение 2.12 (см. [KhC]). *Уравнение бесконечной проводимости* (2.3) *эквивалентно следующему гамильтонову уравнению на пространстве* $S\mathrm{Vect}(M)^* = \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$, *двойственном к алгебре Ли векторных полей нулевой дивергенции* $S\mathrm{Vect}(M)$:

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} = -L_v[u + \alpha]. \tag{2.4}$$

Здесь 1*-форма* u *связана с векторным полем* v *с помощью оператора инерции для данной метрики,* $[u] \in \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ *— класс смежности* 1*-формы* u,

а α является 1-формой, дифференциал $d\alpha$ которой удовлетворяет тождеству $d\alpha = -i_{\boldsymbol{B}}\mu$.

Доказательство. Доказательство дословно повторяет рассуждения для случая идеальной несжимаемой жидкости, рассмотренного в гл. I (см. уравнение (7.11) в гл. I). Наличие формы α, удовлетворяющей $d\alpha = -i_{\boldsymbol{B}}\mu$ (с точностью до дифференциала некоторой функции), приводит к члену $v \times \boldsymbol{B}$ в формуле (2.3).

Уравнение бесконечной проводимости (2.3) гамильтоново, причем функция Гамильтона равна квадратичной форме энергии (со знаком минус), у которой сдвинуто начало координат в $S\mathrm{Vect}(M)^*$:

$$-H([u]) = -\frac{1}{2}\int\limits_M (u+\alpha, u+\alpha)\,\mu.$$

Уравнение Эйлера, соответствующее этой функции, имеет вид

$$\frac{\partial[u+\alpha]}{\partial t} = -L_v[u+\alpha],$$

эквивалентный (2.4), так как поле $\boldsymbol{B}$ постоянно во времени, и, следовательно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0. \qquad \square$$

Следствие 2.13. *Уравнение бесконечной проводимости* (2.3) *имеет либо по крайней мере один, либо бесконечно много первых интегралов, в зависимости от четности $n = \dim(M)$. Соответствующие интегралы равны $I(v)$ или $I_f(v)$ из формул* (9.2), *в которых u заменена на $u+\alpha$ с 1-формой α, определенной выше.*

Замечание 2.14. Уравнение бесконечной проводимости (и его обобщение на n-мерное многообразие M) можно понимать как уравнение Эйлера на центральном расширении алгебры Ли бездивергентных векторных полей на M [Rog, Ze2]. Соответствующий 2-коцикл, расширяющий алгебру Ли векторных полей нулевой дивергенции $S\mathrm{Vect}(M)$, является 2-коциклом Лихнеровича [Lich]. Для любой замкнутой 2-формы β на M (например, для $\beta = d\alpha$ выше) он определяется по формуле

$$c_\beta(v,w) = \int\limits_M (i_w i_v \beta)\,\mu$$

(ср. с замечанием 11.6 из гл. I о расширении *синус*-алгебры и алгебры гамильтоновых векторных полей на двумерном торе).

§ 3. Кэлерова геометрия и динамические системы на пространстве узлов

Бесконечномерные пространства кривых появляются в гидродинамической постановке как некоторые специальные «маломерные» коприсоединенные орбиты группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$. Эта точка зрения связывает во многом казалось бы далекие друг от друга симплектические и пуассоновы многообразия и динамические системы на них.

3.1. Геометрические структуры на множестве вложенных кривых

Рассмотрим *пространство $\mathcal{C}$ гладко вложенных непараметризованных ориентированных замкнутых кривых* (или *пространство узлов*) в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Это пространство кривых можно представлять как пространство всех гладких отображений $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ окружности в $\mathbb{R}^3$, являющихся иммерсиями ($\gamma'(x) \neq 0$ для всех $x \in S^1$) и не имеющих двойных точек, причем мы не различаем между собой отображения с одним и тем же образом:

$$\mathcal{C} = \{\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^3 : \gamma'(x) \neq 0\, \forall\, x \in S^1,\ \gamma(x) = \gamma(y) \Leftrightarrow x = y\}/(\gamma \sim (\gamma \circ \varphi)).$$

Здесь φ пробегает множество диффеоморфизмов окружности S^1.

Связные компоненты пространства $\mathcal{C}$ являются классами эквивалентных (ориентированных) узлов. Мы будем называть *два узла эквивалентными*, если существует изотопия объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$, переводящая один узел в другой. Локально постоянные функции на $\mathcal{C}$ называются *инвариантами узлов*.

Пространство узлов $\mathcal{C}$ может быть снабжено естественной симплектической структурой. Рассмотрим вложенную кривую $\gamma = \gamma(S^1) \subset \mathbb{R}^3$. Касательный вектор v к пространству узлов $\mathcal{C}$ в точке γ является бесконечно малой вариацией кривой γ, т. е. некоторым нормальным векторным полем, заданным на $\gamma(S^1)$. В параметризованной форме вектор $v(x)$ ортогонален $\gamma'(x)$ в $\mathbb{R}^3$ для всех $x \in S^1$.

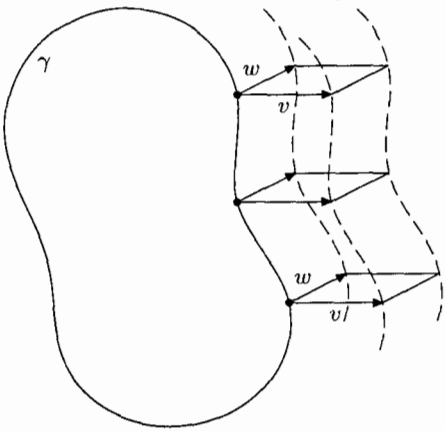


Рис. 74. Значение симплектической структуры на двух вариациях узла является объемом воротника, натянутого на вариации

Определение 3.1. *Симплектическая структура* (*Марсдена–Вайнштейна*) на пространстве узлов есть 2-форма β на $\mathcal{C}$, значение которой на паре элементов $v, w \in T_\gamma\mathcal{C}$ равно ориентированному объему следующего «воротника» вдоль кривой γ. В каждой точке $\gamma(x)$ на векторы $v(x)$ и $w(x)$ натянем параллелограмм. Воротник есть объединение этих параллелограммов вдоль $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, рис. 74.

Для некоторой параметризации параметром $x \in S^1$ имеем

$$\beta(v,w) = \int\limits_{S^1} \mathrm{vol}(\gamma'(x), v(x), w(x))\, dx,$$

где vol — объем параллелепипеда, натянутого на три вектора. Интеграл, очевидно, не зависит от выбора параметризации.

Заметим, что нам нужна не евклидова структура в пространстве, а только форма объема в $\mathbb{R}^3$. Определение может быть легко перенесено на произвольное трехмерное многообразие с формой объема. Более того, для многообразия произвольной размерности $n \geqslant 2$ аналогичное определение задает симплектическую структуру на пространстве подмногообразий коразмерности 2 (т. е. размерности $(n-2)$).

Эта симплектическая структура имеет следующий гидродинамический смысл. Каждая связная компонента пространства $\mathcal{C}$ (т. е. каждый класс изотопных узлов) может рассматриваться как специальная коприсоединенная орбита группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы в $\mathbb{R}^3$.

Определение 3.2. Пусть γ — узел в $\mathbb{R}^3$. Тогда он определяет *функционал* ℓ_γ на пространстве бездивергентных векторных полей: значение ℓ_γ на поле v равно величине потока поля v через любую поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограниченную контуром γ (такая вложенная поверхность σ называется поверхностью Зейферта).

Предложение 3.3. *Функционал узла ℓ_γ корректно определен на бездивергентных векторных полях, т. е. его величина не зависит от выбора поверхности σ, для которой $\partial\sigma = \gamma$.*

Доказательство. Разность между потоками поля v через две поверхности с той же границей γ есть поток v через замкнутую поверхность. Последний равен нулю ввиду бездивергентности поля v. □

Замечание 3.4. Свяжем пространство функционалов $\ell_\gamma \in S\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)^*$ с другим описанием двойственного пространства как факторпространства всех 1-форм на $\mathbb{R}^3$ по точным 1-формам или как пространства всех замкнутых 2-форм:

$$S\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)^* = \Omega^1(\mathbb{R}^3)/d\Omega^0(\mathbb{R}^3) = Z^2(\mathbb{R}^3).$$

Внешняя производная d переводит класс смежности 1-формы (элемент из $\Omega^1/d\Omega^0$) в замкнутую 2-форму (элемент из Z^2) взаимно однозначно, так как $H^1(\mathbb{R}^3) = 0$ (см. следствие 7.9 гл. I).

Кривой γ сопоставим особую 2-форму ω_γ в $\mathbb{R}^3$ с носителем на γ. Она является δ-образной формой, интегралы которой по любой двумерной площадке обращаются в нуль, если только эта площадка не пересекает кривую. Если же площадка пересекает кривую, то интеграл равен алгебраическому числу точек пересечения, когда знак пересечения определяется по ориентации кривой γ и ориентации площадки в каждой точке пересечения.

Замкнутость 2-формы ω_γ соответствует замкнутости кривой γ. Таким образом, ω_γ принадлежит $Z^2(\mathbb{R}^3)$. (Более точно, ω_γ — это так называемый

поток Де Рама. Она принадлежит замыканию пространства гладких замкнутых 2-форм (см. [DeR])).

Чтобы представить замкнутую (и, следовательно, точную) 2-форму ω_γ на $\mathbb{R}^3$ как элемент факторпространства $\Omega^1/d\Omega^0$, мы должны взять d^{-1} от нее. Форма $d^{-1}\omega_\gamma$ определена неоднозначно. Ее можно представить как δ-образную 1-форму с носителем на поверхности Зейферта σ кривой γ, рис. 75. Класс смежности такой 1-формы u_σ принадлежит (определенному соответствующим образом) замыканию пространства $\Omega^1/d\Omega^0$.

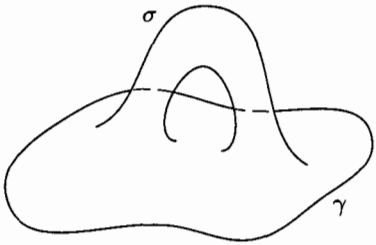


Рис. 75. 2-форма ω_γ имеет носитель на кривой γ. Носителем 1-формы $d^{-1}\omega_\gamma$ является поверхность Зейферта σ

Предложение 3.5. *Спаривание 1-формы u_σ с бездивергентным векторным полем v согласно определению гл.* I (*см. формулу* (7.7) *в гл.* I) *совпадает с потоком поля v через поверхность σ.*

Доказательство. Пусть μ — форма объема в пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда спаривание (класса смежности) 1-формы u_σ и бездивергентного поля v равно (см. формулу (7.3) гл. I)

$$\langle [u_\sigma], v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} i_v u_\sigma\, \mu = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_\sigma \wedge i_v\, \mu = \int\limits_{\sigma} i_v\, \mu.$$

Полученный интеграл не зависит от выбора системы координат и равен потоку поля v через поверхность σ. □

Мы отождествили узлы с некоторыми точками в двойственном пространстве $S\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)^*$. Коприсоединенное действие диффеоморфизмов, сохраняющих объем, на узлах является геометрическим, и, следовательно, все узлы, изотопные заданному, образуют коприсоединенную орбиту. Подобное рассуждение применимо также и к зацеплениям. Таким образом, классификация инвариантов узлов, будучи достаточно трудной самой по себе, становится частью намного более сложного вопроса о классификации всех функций Казимира группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$ (или трехмерной сферы S^3), сохраняющих элемент объема.

Предложение 3.6 (см. [M-W]). *Отождествим множество изотопных узлов с коприсоединенной орбитой группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющих объемы. Тогда симплектическая структура Кириллова–Костанта на этой орбите совпадает с симплектической структурой Марсдена–Вайнштейна.*

Доказательство. Пусть два поля v и w определяют две вариации кривой γ. Симплектическая структура Кириллова–Костанта на коприсоединенной орбите в точке ω_γ ставит в соответствие этим вариациям следующее число:

$$\langle \omega_\gamma, [v,w]\rangle := \langle d^{-1}\omega_\gamma, -\{v,w\}\rangle = -\langle u_\sigma, \{v,w\}\rangle = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} (i_{\{v,w\}} u_\sigma)\,\mu = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_\sigma \wedge (i_{\{v,w\}}\mu).$$

Здесь учтено, что коммутатор $[v,w]$ в алгебре Ли векторных полей равен минус их скобке Пуассона. Поскольку $\{v,w\} = -\operatorname{rot}(v\times w)$, то согласно определению $\operatorname{rot}(v\times w)$

$$-i_{\{v,w\}}\mu = i_{\operatorname{rot}(v\times w)}\mu = d\alpha.$$

Здесь 1-форма α связана с векторным полем $(v\times w)$ посредством римановой метрики: $\alpha(\xi) = ((v\times w),\xi)$ для любого векторного поля ξ. Теперь имеем

$$\langle \omega_\gamma, [v,w]\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_\sigma \wedge d\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_\sigma \wedge \alpha = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_\gamma \wedge \alpha.$$

Этот интеграл по определению 1-формы α равен циркуляции поля $v\times w$ вдоль γ или, что то же, объему воротника, натянутого на вариации v и w кривой γ:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_\gamma \wedge \alpha = \int\limits_{S^1} \operatorname{vol}(\gamma', v, w)\,dx = \beta(v,w).$$

Итак, он совпадает с симплектической структурой, задаваемой определением 3.1. □

Замечание 3.7. Заметим, что коприсоединенные орбиты, соответствующие узлам, удовлетворяют некоторому условию «квантования». Свяжем с каждым узлом поле с носителем в тонкой трубчатой окрестности узла, поток которого через любую трансверсаль к узлу равен единице. Поток такого поля через поверхность Зейферта любого другого узла является целым числом.

Если m — точка из такой «квантованной» орбиты, то орбита точки λm ($\lambda\in\mathbb{R}$) для нецелого λ не соответствует, вообще говоря, никакому (непараметризованному) узлу. Это следует из описания коприсоединенных орбит как классов смежности $[\alpha]$ 1-форм по модулю дифференциалов: форма $\lambda\alpha$ соответствует орбите λm. Эти орбиты коприсоединенного представления узлового типа зависят от периода формы $\oint \alpha$ как от параметра. Орбиты непараметризованных узлов соответствуют 1-формам периода 1 при описании с помощью классов смежности.

Рассмотрим коприсоединенную орбиту одного из таких зацеплений или узлов. Мы видели, что это «многообразие» имеет следующее специальное свойство: значения «координат» его точек, равные числам зацепления с другими узлами, всегда целые, за исключением тех узлов, которые пересекают

заданный. В этом смысле орбита подобна многограннику, грани которого параллельны координатным подпространствам и имеют целочисленные значения проекций вдоль этих подпространств. Простейшим примером многогранника такого типа является ломаная линия на шахматной доске, состоящая из частей границ клеток.

Можно представлять себе эти орбиты как элементы некоторого подмножества сопряженного пространства, в чем-то похожего на подмножество точек векторного пространства, одна из координат которых целочисленная. По-видимому, заменяя целые коэффициенты узлов, образующих зацепления, рациональными, можно получить множество, плотное в некоторой естественной топологии.

Замечание 3.8. Пространство $\mathcal{C}$ также можно снабдить естественной почти комплексной структурой, т. е. непрерывным полем операторов $J_\gamma\colon T_\gamma\mathcal{C} \to T_\gamma\mathcal{C}$ таким, что $J_\gamma^2 = -1$ для всех $\gamma \in \mathcal{C}$. Этот оператор имеет простой геометрический смысл: каждое поле вариации v вдоль кривой γ переводится в другое поле Jv вдоль γ, векторы $Jv(x)$ которого получаются поворотом $v(x)$ на $\pi/2$ в положительном направлении в плоскости, перпендикулярной к $\gamma'(x)$ (см. рис. 76).

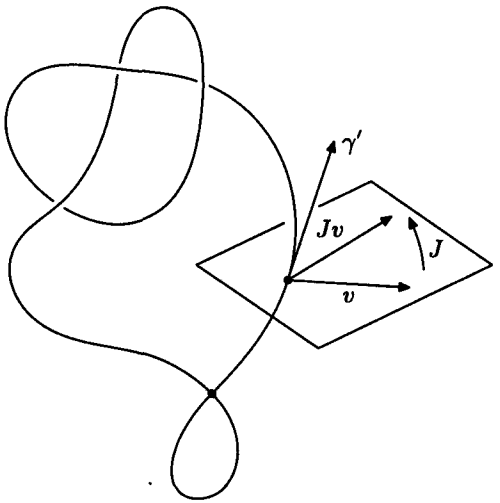


Рис. 76. Иммерсированный узел и почти комплексная структура в пространстве узлов

Оказывается, что тензор кривизны этой структуры нулевой [PeS, Bry1]. В конечномерном случае этого условия было бы достаточно для существования комплексных координат на многообразии (теорема Ньюлендера–Ниренберга, [N-N]). Однако такую конструкцию комплексных координат нельзя без дополнительных условий перенести на бесконечномерный случай. Можно показать, что бесконечномерное многообразие всех C^∞-кривых *не допускает* комплексной структуры [Lem1]. Согласно Л. Лемперту аналогичное утверждение об отсутствии комплексной структуры имеет место и в категории анали-

тических узлов в аналитическом многообразии, хотя ситуация здесь еще более усложняется [Lem3], (ср. с обсуждением в [Bry1]). (Мы также отсылаем к работе [PeS], в которой обсуждается геометрическое квантование для вихревых конфигураций.)

Заметим также, что пространство модулей изометричных отображений окружности в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ (по модулю евклидовых движений, сохраняющих ориентацию) *допускает* комплексную структуру [MiZ]. Другой пример бесконечномерного комплексного многообразия доставляет типичная коприсоединенная орбита алгебры Вирасоро [Ki3] или сама группа Вирасоро [Lem2].

Замечание 3.9. Построенные выше структуры, так же как и динамические системы, к которым мы сейчас перейдем, можно определить на большем множестве $\overline{\mathcal{C}}$ так называемых *иммерсированных узлов*, которое имеет более удобную топологию (см. [Bry1]). Это множество содержит иммерсии γ с самопересечениями конечной кратности в конечном числе точек (рис. 76). Распространение инвариантов узлов с множества $\mathcal{C}$ на пространство иммерсированных узлов $\overline{\mathcal{C}}$ является ключевым элементом теории Васильева инвариантов узлов конечного порядка [VasV].

На первый взгляд кажется, что пространство иммерсированных узлов с одной точкой самопересечения имеет (бесконечную) размерность, которая на единицу меньше, чем размерность симплектического пространства (коприсоединенной орбиты) регулярных узлов в пространстве всех иммерсий окружности, и, следовательно, оно не может нести какой-либо симплектической структуры. Это, однако, не так, поскольку соответствующая коприсоединенная орбита имеет размерность на два меньше, чем размерность орбиты регулярного узла: иммерсированные узлы с одной двойной точкой (заданного топологического типа) образуют двухпараметрическое семейство орбит (поскольку интегралы от соответствующей 1-формы вдоль каждой из двух петель являются инвариантами), тогда как орбиты регулярных узлов заданного топологического типа образуют однопараметрическое семейство (где инвариантом является интеграл по всему узлу).

3.2. Уравнение нити, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение цепочки Гейзенберга

Чтобы определить динамическую систему на (симплектическом) пространстве непараметризованных (иммерсированных) ориентированных узлов $\overline{\mathcal{C}}$ (являющимся замыканием множества вложенных кривых $\mathcal{C}$), нужна функция Гамильтона. Естественно взять в качестве гамильтониана H *функционал длины* кривой:

$$H(\gamma) := \text{длина } (\gamma) = \int\limits_{S^1} \sqrt{(\gamma'(x), \gamma'(x))}\, dx.$$

Отметим, что как и в идеальной гидродинамике, для задания эволюции мы должны зафиксировать риманову метрику в дополнение к выбору формы объема на многообразии.

Определение 3.10. *Уравнением нити* называется гамильтоново уравнение с функцией Гамильтона H, сопоставляющей каждой кривой ее длину, в пространстве узлов $\overline{\mathcal{C}}$, наделенном симплектической структурой Марсдена–Вайнштейна.

Эволюция $\{\gamma(x,t)\}$ кривой $\gamma(x,0)$, $x \in S^1$ согласно уравнению нити такова:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = k(x,t)\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

где $k(x,t)$ — кривизна кривой в точке x в момент t.

Действительно, это уравнение принимает особенно простой вид, если в качестве x выбран натуральный параметр, равный длине дуги кривой Г. В этом случае вариационная производная $\dfrac{\delta H}{\delta\gamma}$ равна

$$-(\text{длина } (\gamma))^{-1}\frac{d^2\gamma}{dx^2}.$$

Соответствующее гамильтоново поле можно найти с помощью почти комплексной структуры J_γ:

$$\operatorname{sgrad} H = -(\text{длина } (\gamma))^{-1} J_\gamma\Big(\frac{\delta H}{\delta\gamma}\Big) =$$

$$= (\text{длина } (\gamma))^{-2} J_\gamma\Big(\frac{d^2\gamma}{dx^2}\Big) = (\text{длина } (\gamma))^{-2}\Big(\frac{d\gamma}{dx} \times \frac{d^2\gamma}{dx^2}\Big). \tag{3.1$'$}$$

Переход от натуральной параметризации длиной дуги к произвольной приводит к появлению множителя $k(x,t)$ в уравнении (3.1).

Замечание 3.11. Хасимото заметил в [Has], что уравнение нити (3.1) эквивалентно *нелинейному уравнению Шредингера*

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi \tag{3.2}$$

относительно неизвестной комплекснозначной волновой функции $\psi\colon S^1 \to \mathbb{C}$. Это уравнение является вполне интегрируемой бесконечномерной системой и обладает солитонными решениями (см., например, [DKN]).

Преобразование, сводящее одно из этих уравнений к другому и называемое *преобразованием Хасимото*, задается формулой

$$\psi(x,t) = k(x,t)\exp\left(i\int_0^x \tau(u,t)\,du\right),$$

где $\tau(u,t)$ — это кручение кривой γ в точке u в момент времени t.

В работе [LaP] показано, что преобразование Хасимото сохраняет гамильтоновость уравнений: оно переводит структуру Марсдена–Вайнштейна на кривых в некоторую (непостоянную) пуассонову структуру на волновых функциях.

Замечание 3.12. Другой эквивалентной формой уравнения нити является уравнение газовой динамики, с которым мы имели дело в § 2.

Переписав уравнение (3.1) в репере Френе кривой γ, получаем эволюционные уравнения относительно кривизны $k(x,t)$ и кручения $\tau(x,t)$, которые после замены $\rho := k^2$ («плотности энергии» кривой) принимают вид:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho\tau) = 0, \\ \partial_t \tau + \tau\partial_x \tau = \partial_x\Big(\frac{1}{4}\rho + \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\partial_x^2\rho^{1/2}\Big), \end{cases}$$

где $\partial_x := \partial/\partial x$ и $\partial_t := \partial/\partial t$ (см. [Tur]). Таким образом, ρ и τ являются аналогами полей плотности и скорости одномерной жидкости.

Замечание 3.13. *Магнитная цепочка Гейзенберга* дает еще один вариант уравнения нити. Это уравнение описывает динамику вектор-функции $L(x) \in \mathbb{R}^3$, $x \in S^1$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = L \times \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}. \tag{3.3}$$

Это уравнение получается из (3.1) при использовании натуральной параметризации x вдоль кривой γ. Действительно, уравнение нити (3.1)–(3.1′) можно записать в виде

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2},$$

эквивалентном уравнению (3.3) для соответствующего касательного вектора $L := \partial\gamma/\partial x$.

Вектор $L(x) \in \mathbb{R}^3$ можно интерпретировать как элемент трехмерной алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. С этой точки зрения уравнение (3.3) является частным случаем так называемого *уравнения Ландау–Лифшица* для произвольной конечномерной группы Ли или, скорее, для соответствующей калибровочной группы.

Замечание 3.14. Уравнение нити можно рассматривать как «предельный случай» уравнения Эйлера–Гельмгольца для вихря, сосредоточенного на кривой, если учитывать только вклад локальных членов взаимодействия разных вихрей, ср. с гл. I, п. 11.3. Интегрируемая динамика является в этом случае результатом такой аппроксимации. Учет следующего (нелокального) члена делает динамику намного более сложной (см. [KlM]).

3.3. Группы петель и общее уравнение Ландау–Лифшица

Пусть G — конечномерная матричная группа с невырожденной формой Киллинга $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$ для $A, B \in G$, т. е. *редуктивная группа* (в качестве примера можно взять $\mathrm{SO}(3)$ или группу всех невырожденных матриц GL_n), и пусть $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли.

Определение 3.15. *Группой петель* $\widetilde{G}$ (или *калибровочной группой*) называется группа G-значных функций на окружности $\widetilde{G} = C^\infty(S^1, G)$ с поточечным умножением. Соответствующей *алгеброй Ли петель* $\tilde{\mathfrak{g}}$ является алгебра Ли $\mathfrak{g}$-значных функций на окружности также с поточечным коммутированием.

Определение 3.16. *Уравнение Ландау–Лифшица* — это эволюционное уравнение $\partial_t L = L \times \partial_x^2 L$ на векторнозначную функцию $L(x) \in \mathbb{R}^3$ на окружности $x \in S^1$. Здесь $\partial_x^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

В более общем виде *уравнение Ландау–Лифшица*, ассоциированное с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, является следующим эволюционным уравнением с неизвестной $\mathfrak{g}$-значной функцией m, определенной на S^1:

$$\partial_t m = [m, \partial_x^2 m]. \tag{3.4}$$

Согласно этому определению классическое уравнение Ландау–Лифшица (3.3) отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ при отождествлении векторов из $\mathbb{R}^3$ с угловыми скоростями — элементами из $\mathfrak{so}(3)$:

$$L = (v_1, v_2, v_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.17. *Уравнение Ландау–Лифшица, связанное с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, является уравнением Эйлера, соответствующим группе петель $\widetilde{G}$ с квадратичной функцией Гамильтона*

$$H(m) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^1} \langle \partial_x m, \partial_x m \rangle$$

на двойственном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, где $\partial_x m$ является $\mathfrak{g}$-значной функцией, а $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ обозначает инвариантное скалярное произведение в алгебре $\mathfrak{g}$.

Для матричной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (например, $\mathfrak{gl}_n$ или $\mathfrak{sl}_n$) в качестве инвариантного скалярного произведения можно взять след произведения матриц $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY)$.

Доказательство. Обратный оператор к оператору инерции $A^{-1}\colon \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}$, отвечающий гамильтониану H, переводит ($\mathfrak{g}^*$-значную) функцию m в ($\mathfrak{g}$-значную) функцию $-\partial_x^2 m$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид

$$\partial_t m = \operatorname{ad}^*_{A^{-1}m} m = -[\partial_x^2 m, m],$$

эквивалентный (3.4). □

Следствие 3.18 (см., например, [A-L]). *Классическое уравнение Ландау-Лифшица* (3.3) *является гамильтоновым уравнением на двойственном пространстве $\tilde{\mathfrak{so}}(3)^*$ с функцией Гамильтона*

$$H(L) = -\int\limits_{S^1} ((\partial_x v_1)^2 + (\partial_x v_2)^2 + (\partial_x v_3)^2)\, dx$$

(*здесь* $L(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x)) \in \mathbb{R}^3 = \mathfrak{so}(3)^*$).

Статьи [A-L, Luk6] содержат также и вычисления секционных кривизн группы петель $\widetilde{\mathrm{SO}}(3)$ относительно правоинвариантной римановой метрики, заданной функцией Гамильтона $H(L)$.

§ 4. Уравнение Соболева

Изучая колебания жидкости в быстро вращающемся сосуде и начав с соответствующего приближенного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k(v \times e_z) + \operatorname{grad} p = F, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{4.1}$$

(с неизвестными v и p), С. Л. Соболев получил уравнение необычного вида, названное теперь в его честь.

Определение 4.1. *Уравнением Соболева* называется уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4.2}$$

относительно неизвестной функции u.

Замечание 4.2. Уравнение (4.1) получается при линеализации уравнения Навье–Стокса для вращающейся области. Этими уравнениями описываются атмосферы планет и колебания жидкого топлива в баках ракет. Пуанкаре [Poi2] свел эту линейную систему (4.1) к одному уравнению (4.2), названному затем именем Соболева, который переоткрыл его в 1940-е гг. и изучал соответствующие граничные задачи.

Работа Соболева была рассекречена и впервые опубликована в 1954 г. (см. [Sob2]). Однако фактически эта работа была написана примерно в 1942 г. в Казани. Соседом Соболева был Понтрягин, и они обсуждали многие связанные с этой темой задачи функционального анализа. В частности, они рассматривали и «псевдогильбертовы» пространства с одним (изученным Соболевым) или с несколькими (изученными Понтрягиным) отрицательными квадратами в метрике. Эти пространства теперь называются пространствами Понтрягина. Лишь немногие знают, что начало теории этих пространств было положено засекреченной гидродинамической работой Соболева.

Работы Пуанкаре и Соболева были продолжены Бабиным, Махаловым и Николаенко, которые рассмотрели нелинейную динамику в случае быстрого вращения и мелкого слоя жидкости. Многие особенности соболевской линейной задачи, такие как малые знаменатели и диофантовы условия несоизмеримости, накладываемые на геометрические параметры области, вновь появились в работе [BMN]. В ней показано, что решение трехмерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса равномерно вращающейся жидкости можно разложить в сумму решения двумерной системы Эйлера (или Навье–Стокса) с усредненными по вертикали начальными данными, векторного поля, имеющего явное выражение в терминах фаз, и малого остатка.

Замечание 4.3. Чтобы вывести уравнение Соболева из системы (4.1) с $F = 0$ (подробности см. в [GaS]), возьмем ротор от обеих частей первого уравнения. Получим (используя $\operatorname{rot}(a \times b) = -\{a, b\}$)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + 2k\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{где} \quad \operatorname{rot} u = \omega. \tag{4.3}$$

Возьмем ротор еще раз и получим

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + 2k\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Теперь, продифференцировав по t, имеем

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + 2k\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$$

Подставив $\partial\omega/\partial t = -2k\,\partial u/\partial z$ из уравнения (4.3), приходим к уравнению Соболева

$$-\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} - 4k^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Изучение спектральных задач для линейного уравнения Соболева показало сильную зависимость формы собственных колебаний от формы резервуара. А именно, путем некоторых преобразований Соболев пришел к двумерной спектральной задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_\Gamma = g$$

(и к соответствующей однородной задаче $u|_\Gamma = 0$) в плоской области, ограниченной кривой Γ.

При заданной величине спектрального параметра λ получается задача Дирихле для одномерного волнового уравнения. При решении ее методом характеристик немедленно проявляется зависимость результатов от формы области.

Как мы увидим ниже, на границе области появляется динамическая система. Эргодические свойства этой системы сильно влияют на характер колебаний.

Рассмотрим теперь случай выпуклой области. Ее покрывают два семейства характеристических линий. Каждое из этих двух семейств определяет диффеоморфизм границы области в себя — инволюцию, переставляющую точки пересечения каждой характеристики с границей. Динамическая система, о которой идет речь — это диффеоморфизм на граничной кривой, являющийся произведением (композицией) двух инволюций, соответствующих двум семействам характеристик.

В терминах этого диффеоморфизма $T\colon \Gamma \to \Gamma$ решение задачи Дирихле (при фиксированном λ) строится так. Во-первых, линейной заменой переменных преобразуем характеристики в прямые линии $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$. Наша задача принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u|_\Gamma = g.$$

Решение представляется в виде суммы двух функций $f(x) + h(y)$, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y. Чтобы найти эти функции, зафиксируем некоторую граничную точку (скажем, A) и возьмем произвольное значение одной из функций в этой точке. Значение второй функции определится из граничного условия (т. е. $h(A) = g(A) - f(A)$).

Рассмотрим точку B пересечения характеристической линии первого семейства ($x = \mathrm{const}$), проходящей через точку A, с границей Γ. В точке B

мы уже знаем величину первой функции (она та же самая, что и в точке A). Величина второй функции в B определяется их суммой $g(B)$. А именно, $h(B) = g(B) - f(B) = g(B) - f(A)$.

Далее, пусть характеристика второго семейства ($y = \text{const}$), проходящая через B, пересекает границу Γ в точке $A' = TA$, рис. 77. Вдоль этой линии мы уже знаем величину второй функции (которая та же самая, что и в B: $h(A') = h(B)$). Зная сумму $g(A')$, мы найдем величину первой функции в A'. (Здесь $f(A') = g(A') - h(A') = g(A') - h(B) = g(A') - g(B) + f(A)$ и т. д.)

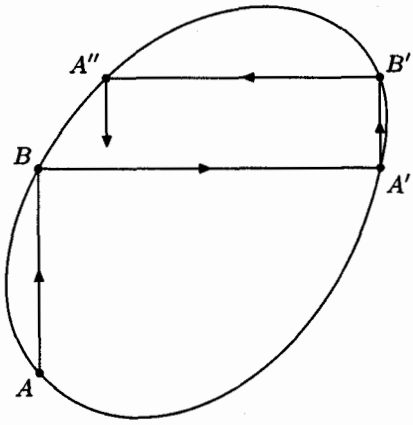


Рис. 77. Построение решения задачи Дирихле для волнового уравнения с помощью двух семейств характеристик

Бесконечный процесс построения решения описывается ломаной траекторией, которая состоит из чередующихся сегментов характеристик, соединяющих точки $A^{(n)} = T^n A$. Решение является суммой начального значения и альтернированной суммы граничных величин в вершинах ломаной из характеристик.

Влияние свойств динамической системы $T\colon \Gamma \to \Gamma$ на решения нашей задачи Дирихле состоит в следующем. Предположим, что T имеет периодическую траекторию, $T^n A = A$. Тогда альтернированная сумма величин граничной функции g в вершинах соответствующей ломаной траектории $ABA'B' \ldots A$ равна нулю. Следовательно, каждой периодической траектории отображения T отвечает условие разрешимости задачи Дирихле (и, следовательно, определенное «нетривиальное обобщенное решение» соответствующего однородного уравнения «сосредоточенное» у этой периодической траектории).

Существуют и другие, более тонкие, свойства динамики отображения T, которые также существенно влияют на разрешимость задачи Дирихле (детали см., например, в [Arn2, FoP]).

Рассмотрим сначала эллиптическую область. В этом случае диффеоморфизм T становится вращением после подходящего выбора угловой координаты на границе. Действительно, эллипс можно превратить в окружность аффинным преобразованием плоскости. Характеристики обоих семейств пре-

вратятся в два семейства параллельных линий, образующих некоторый угол α друг с другом. Отображение T станет поворотом окружности на угол 2α (по теореме о «вписанном угле»).

В зависимости от того, соизмерим ли угол α с 2π или нет, орбиты поворота T либо все состоят из конечного числа точек (с одним и тем же периодом для всех начальных точек), либо всюду плотны на окружности.

В первом («резонансном») случае решение неоднородного уравнения существует тогда и только тогда, когда правая часть g удовлетворяет бесконечному числу независимых условий. Соответствующая однородная задача, естественно, имеет при этом бесконечномерное пространство решений.

Когда угол α несоизмерим с 2π, любая T-орбита всюду плотна (второй, «эргодический», случай). Ситуация здесь более сложная. Формально можно найти решение в виде ряда Фурье. Однако его сходимость зависит от арифметических диофантовых свойств иррационального числа $\alpha/2\pi$ (а также от того, в каком именно функциональном пространстве исследуется задача). Для почти всех (в смысле меры Лебега) иррациональных чисел $\alpha/2\pi$ соответствующая однородная задача имеет единственное решение $u = 0$. Неоднородная же задача имеет в этом случае некоторое (гладкое) решение для каждой достаточно гладкой правой части g (степень гладкости g должна возрастать вместе с требуемой гладкостью решения; для аналитического решения достаточно аналитичности правой части).

Случай эллипса, рассмотренный выше, является исключительным, поскольку динамика соответствующего диффеоморфизма T интегрируема. (Согласно М. Юркину [Yur] область, ограниченная эллипсом, является единственной формой полости в симметричном вращающемся волчке, в которой изучение осцилляций описываемых уравнением Соболева, сводится к конечномерной задаче.) Для граничной кривой общего вида диффеоморфизм T нельзя, вообще говоря, свести к вращению ни для какой угловой координаты.

В пространстве всех диффеоморфизмов (и, следовательно, в пространстве кривых Г) *структурно устойчивые* диффеоморфизмы образуют открытое и всюду плотное подмножество. Такие диффеоморфизмы являются диффеоморфизмами «резонансного типа» с конечным числом периодических орбит (все имеющие один и тот же период), причем притягивающие и отталкивающие орбиты чередуются.

Специалисты по аксиоматической теории динамических систем обычно считают «типичными» явления, которые имеют место на открытом всюду плотном подмножестве пространства систем. С этой точки зрения «типичные» диффеоморфизмы окружности являются структурно устойчивыми. Однако с физической точки зрения такие структурно устойчивые системы не слишком широко распространены. Рассмотрим, например, семейство диффеоморфизмов окружности $x \mapsto x + a + b\sin x \pmod{2\pi}$ (здесь a и b являются параметрами). Для большинства точек (a, b) в прямоугольнике $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant b \leqslant \beta$ достаточно малой высоты β диффеоморфизм вообще не имеет периодических точек и выбором подходящей координаты на окружности может быть превращен в поворот на некоторый несоизмеримый с 2π угол. Каж-

дая орбита такого диффеоморфизма является всюду плотной на окружности. Для почти всех величин угла поворота вопрос о разрешимости задачи Дирихле, соответствующей такому диффеоморфизму T, оказывается таким же, как и для интегрируемого случая эллиптической границы.

Например, для областей, близких к эллиптическим, «эргодические» ситуации реализуются в подавляющем большинстве случаев, в то время как «резонансные» являются редкостью (хотя и образуют некоторое открытое и всюду плотное множество) в пространстве деформаций эллипса (см. [Arn2]).

Вернемся к исходной спектральной задаче с параметром λ. Для границы Γ общего положения эти два типа поведения динамической системы $T = T(\lambda)$ на кривой Γ перемежаются при изменении λ. Если Γ — малое возмущение эллипса общего положения, то резонансные значения параметра λ (при которых возникают нетривиальные собственные функции) образуют бесконечное всюду плотное множество (малой меры) на оси λ. Эргодические значения λ (для которых $T(\lambda)$ сводится к повороту окружности подходящей гладкой заменой координаты) образуют множество канторовского типа почти полной (для малых возмущений эллипса) меры.

Как мы видим, все топологические сложности нелинейной теории динамических систем (в частности, теории их бифуркаций) появляются в гидродинамике при изучении спектра *линейной* задачи малых колебаний жидкости!

После С. Л. Соболева спектральную задачу изучали Р. А. Александрян и его школа (см. [Ale]). Отметим серию статей С. Г. Овсепяна [Ovs], где особенное внимание уделено случаю невыпуклой границы Γ.

В невыпуклом случае возникает новая трудность: характеристическая линия пересекает границу более чем в двух точках, так что «динамика» T оказывается многозначной (или ветвящейся). Эргодические свойства такой ветвящейся многозначной динамики и соответствующая «хаотизация» образуют интересную, но недостаточно исследованную часть теории динамических систем.

Рассмотрим, например, диффеоморфизм окружности, который становится многозначным алгебраическим соответствием алгебраической кривой на себя, если диффеоморфизм продолжить в комплексную область. Это означает, что график диффеоморфизма является одной из компонент вещественной алгебраической кривой на декартовом квадрате другой алгебраической кривой. Можно предполагать, что число аттракторов такого диффеоморфизма ограничено константой, зависящей только от дискретных инвариантов соответствия (родов кривых и степени этого соответствия). Однако этот факт доказан только для соответствий, однозначных по отношению к одной из компонент (скажем, для полиномиальных или рациональных отображений сферы Римана в себя), [Jak, Herm].

З а м е ч а н и е 4.4. Задача Дирихле для одномерного волнового уравнения встречается во многих задачах различной природы. Например, Ж.-П. Дюфур [Duf] детально изучил ее локальный аналог для алгебраических кривых с особенностями (скажем, $x^2 = y^3$). Такая задача возникает при изучении потери симметрии (например, при классификации морсовских функций

в окрестности неподвижной точки инволюции прямой $x \to -x$ или при классификации пар инволюций прямой в окрестности общей неподвижной точки и т. д.) (см. обзор С. Воронина [Vor]).

Аналогичный метод был использован в работе [Arn1], связанной с 13-й проблемой Гильберта, при изучении представлений функций на деревьях суммами функций от координат. Интересно отметить, что основной прием во всех этих задачах состоит в рассмотрении альтернированных сумм значений известных функций вдоль ломаной из характеристик — тот же самый прием, который был изобретен в гидродинамике при исследовании спектральных задач для уравнения Соболева.

§ 5. Эллиптические координаты с гидродинамической точки зрения

Рассмотрим электрически заряженный металлический эллипсоид. Теорема, восходящая к Ньютону [NewI] и Айвори [Ivo], утверждает, что потенциал электростатического поля распределившихся зарядов, будет постоянным внутри эллипсоида, а вне его эквипотенциальными поверхностями будут эллипсоиды, конфокальные исходному. Ниже (следуя [Arn12, ShV]) мы покажем, что и этот факт, и его многомерные обобщения имеют гидродинамическую природу: электромагнитные поля такого вида порождаются несжимаемыми течениями электрических зарядов вдоль квадрик.

5.1. Заряды на квадриках в трех измерениях

Начнем с квадратичной поверхности (скажем, эллипсоида) Q в трехмерном пространстве и включим ее в семейство конфокальных квадрик.

Определение 5.1. Для квадрики Q, определяемой уравнением

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1,$$

конфокальным семейством квадрик $Q_{\mathrm{cnf}}(\lambda)$ называется следующее семейство поверхностей:

$$Q_{\mathrm{cnf}}(\lambda) = \left\{ \frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} = 1 \right\}.$$

Сигнатура квадрик семейства меняется при $\lambda = -a_1, -a_2$ или $-a_3$. Например, для однополостного гиперболоида с $a_1 > a_2 > 0 > a_3$ семейство состоит из двуполостных гиперболоидов при $-a_1 < \lambda < -a_2$, из однополостных гиперболоидов для $-a_2 < \lambda < a_3$ и эллипсоидов при $a_3 < \lambda$, рис. 78.

Будем также использовать другое семейство квадрик, содержащее исходную поверхность Q, а именно: семейство квадрик, *гомотетичных* Q с центром в начале координат. Пусть сначала Q — эллипсоид.

Определение 5.2. *Гомеоидной плотностью* на поверхности эллипсоида Q называется плотность слоя между Q и бесконечно близким эллипсоидом, гомотетичным Q.

Теперь мы можем придать математический смысл «распределению свободных электрических зарядов» на поверхности эллипсоида.

Теорема 5.3 (Айвори, см. [Ivo, Arn12]). *Конечная масса, распределенная по поверхности эллипсоида с гомеоидной плотностью, не притягивает никакой внутренней точки, а каждую внешнюю точку притягивает так же, как если бы та же масса была распределена с гомеоидной плотностью на поверхности любого другого меньшего конфокального эллипсоида.*

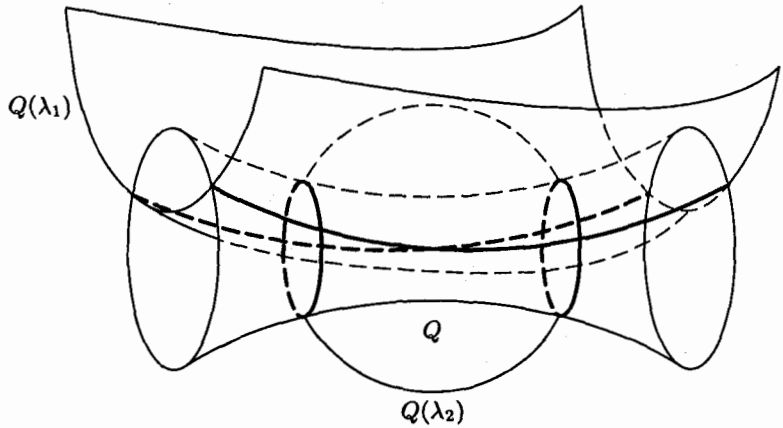


Рис. 78. Квадрики конфокального семейства пересекают гиперболоид вдоль ортогональной системы кривых

Притягивание зарядов определяется законом Кулона (или Ньютона): в $\mathbb{R}^n$ сила пропорциональна r^{1-n} (в соответствии с фундаментальным решением уравнения Лапласа).

Существуют аналоги теоремы Айвори для гиперболоидов. Можно заменить гомеоидные плотности на эллипсоидах гармоническими формами различных степеней, а кулоновский потенциал — обобщенными потенциалами, связанными с законом Био–Савара.

В простейшем нетривиальном случае однополостного гиперболоида H в трехмерном евклидовом пространстве результат следующий. Рассмотрим кривые пересечения гиперболоида с другими квадриками конфокального семейства $H_{\mathrm{cnf}}(\lambda)$. Пересечения с конфокальными эллипсоидами (соответственно, с конфокальными двуполостными гиперболоидами) назовем *параллелями* (соответственно, *меридианами*) на H. (Заметим, что параллели и меридианы ортогональны друг другу в каждой точке гиперболоида, рис. 78. Это свойство вытекает из теоремы существования ортогонального собственного базиса для симметрической матрицы, примененной к двойственному по Лежандру семейству квадрик (см., например, [A-G].)

Гиперболоид H делит пространство $\mathbb{R}^3$ на две части: «внутреннюю» $I(H)$ и «внешнюю» $E(H)$, причем последняя не односвязна. Зона внутри гиперболической трубы гладко расслаивается на меридианы (ортогональные к эллипсоидам в конфокальном семействе), а кольцевая зона вне гиперболоида гладко расслаивается на параллели (ортогональные двуполостным гиперболоидам).

Теорема 5.4 (см. [Arn12]). *Существует единственный (с точностью до постоянного множителя) поверхностный ток, текущий вдоль меридианов гиперболоида, который создает магнитное поле, обращающееся в нуль внутри трубы гиперболоида и направленное вдоль параллелей во внешней кольцевой области гиперболоида. Аналогично, существует единственный (с точностью до постоянного множителя) поверхностный ток, текущий вдоль параллелей гиперболоида, который порождает магнитное поле, обращающееся в нуль во внешней кольцевой области и направленное вдоль меридианов внутри трубы гиперболоида.*

Магнитное поле во внутренней области гиперболоида, но вне заряженного эллипсоида из того же конфокального семейства, совпадает с точностью до знака с электростатическим полем эллипсоида. Рассмотрим электростатическое поле, порожденное двумя зарядами противоположных знаков, в сумме равными нулю и распределенными с гомеоидной плотностью по двум поверхностям проводящего двуполостного гиперболоида. Это поле между поверхностями совпадает (с точностью до знака) с магнитным полем во внешней области конфокального однополостного гиперболоида. Явные формулы приведены ниже.

Замечание 5.5. Векторные поля из теоремы 5.4 являются точными стационарными решениями соответствующих уравнений Эйлера несжимаемой жидкости, текущей, соответственно, внутри или вне гиперболоида в $\mathbb{R}^3$. Течение является потенциальным внутри трубы гиперболоида и безвихревым во внешней области.

5.2. Заряды на многомерных квадриках

Пусть Q — невырожденная квадрика с центром в начале координат евклидова n-мерного пространства. Включим ее в семейство *конфокальных квадрик*

$$Q_{\mathrm{cnf}}(\lambda) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1 \right\}$$

как гиперповерхность, соответствующую $\lambda = 0$. Будем предполагать, что выполняются неравенства $a_n < \ldots < a_1$.

Определение 5.6. *Эллиптическими координатами* точки $x \in \mathbb{R}^n$ называется набор из n значений λ (в возрастающем порядке), для которых соответствующая квадрика семейства $Q_{\mathrm{cnf}}(\lambda)$ проходит через x. Такая система координат является ортогональной: конфокальные квадрики пересекаются под прямым углом.

Описанные выше в теореме 5.4 результаты для трехмерного случая были распространены Б. Шапиро и А. Вайнштейном [ShV] на гиперболоиды в евклидовых пространствах любого числа измерений. Невырожденный гиперболоид H в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфный $S^l \times \mathbb{R}^k$, делит пространство на внешнюю область $E(H)$ (диффеоморфную произведению S^l с полупространством) и внутреннюю $I(H)$.

Пусть ω — дифференциальная форма с обобщенными коэффициентами (т. е. поток де Рама, см. [DeR]). Скажем, что форма является *гармонической вне гиперповерхности* Γ, если она непрерывна вне этой гиперповерхности, козамкнута (т. е. $\delta\omega = 0$, где δ — оператор, сопряженный с оператором внешней производной d, см. гл. V, п. 3.2) и если ее внешняя производная является формой (с обобщенными коэффициентами) с носителем на Γ.

Теорема 5.7 (см. [ShV]). *Для заданного гиперболоида H существует единственная (с точностью до постоянного множителя) l-форма, гармоническая вне H, разложимая в эллиптических координатах и обращающаяся в нуль во внутренней зоне $I(H)$, и существует единственная (с точностью до постоянного множителя) k-форма, гармоническая вне H, разложимая в эллиптических координатах и обращающаяся в нуль во внешней области $E(H)$.*

Эти формы создаются подходящими гомеоидными плотностями на *фокальных квадриках*, являющихся предельными квадриками конфокального семейства, когда кратчайшая ось гиперболоидов или эллипсоидов обращается в нуль. В работе [ShV] имеются явные формулы и доказательства.

Для гиперболоидов с индексами $(1, n-1)$ и $(n-1, 1)$ эти плотности имеют следующий магнитогидродинамический смысл.

Пусть H^1 — невырожденная квадрика с $a_n < \ldots < a_2 < 0 < a_1$ (и пусть H^{n-1} — квадрика с $a_n < 0 < a_{n-1} < \ldots < a_1$ соответственно). Как и выше, внешняя зона $E(H^{n-1})$ гиперболоида H^{n-1} расслаивается на *параллели* (диффеоморфные окружности), вдоль которых постоянны значения всех эллиптических координат, *положительных* в $E(H^{n-1})$ (их число равно $(n-1)$). Внутренняя область $I(H^1)$ для квадрики H^1 расслаивается на *меридианы* (диффеоморфные прямой), вдоль которых постоянны значения всех эллиптических координат, *отрицательных* в $I(H^1)$ (их число тоже равно $(n-1)$).

Теорема 5.7′ [ShV]. *Существует единственное (с точностью до постоянного множителя) потенциальное течение несжимаемой жидкости во внутренней области $I(H^1)$, траектории которого совпадают с меридианами. Аналогично, существует единственное (с точностью до постоянного множителя) безвихревое течение несжимаемой жидкости во внешней зоне $E(H^{n-1})$, траекториями которого служат параллели.*

По построению оба течения направлены вдоль координатных линий оставшейся эллиптической координаты. Так в трехмерном случае получаются следующие явные формулы для соответствующих векторных полей v_1 и v_2 в зонах $I(H^1)$ и $E(H^2)$ в эллиптических координатах $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ (см. [ShV]):

$$v_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\Phi(\lambda_2)\Phi(\lambda_3)} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Phi(\lambda_1)\Phi(\lambda_2)} \frac{\partial}{\partial \lambda_3},$$

где

$$\Phi(\lambda_i) = \sqrt{(\lambda_i + a_1)(\lambda_i + a_2)(\lambda_i + a_3)}.$$

Даже в трехмерном случае неизвестны доказательства этих геометрических теорем, которые не были бы основаны на прямых вычислениях.

Вопрос 5.8. Существование специальных форм, гармонических вне гиперболоидов, приводит к вопросу: существуют ли фильтрации, аналогичные тем, которые возникают в теории смешанных структур Ходжа, в пространствах дифференциальных форм на некомпактных алгебраических и полуалгебраических многообразиях?

ЛИТЕРАТУРА

[A-H] A b a r b a n e l H. and H o l m D. Nonlinear stability analysis of inviscid flows in three dimensions: incompressible fluids and barotropic fluids // Phys. Fluids. — 1987. — V. 30, № 11. — P. 3369–3382.

[Adl] A d l e r M. On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de-Vries equations // Inv. Math. — 1979. — V. 50. — P. 219–248.

[Aic] A i c a r d i F. Topological invariants of knots and framed knots in the solid torus // C.R. Acad. Sci. Paris. Serie I. — 1995. — V. 321. — P. 81–86; Topological invariants of Legendrian curves // C.R. Acad. Sci. Paris. Serie I. — 1995. — V. 321. — P. 199–204.

[A-R] A k h m e t i e v P. and R u z m a i k i n A. Borromeanism and bordism // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas. Kluwer Academic Publ. — 1992. — P. 249–264; A fourth-order topological invariant of magnetic or vortex lines // J. of Geometry and Physics. — 1995. — V. 15. — P. 95–101.

[Ale] А л е к с а н д р я н Р. А. Об одной задаче Соболева для специальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Докл. Ан СССР. — 1950. — Т. 73, № 4.

[Al] А л е к с е е в В. М. Квазислучайные динамические системы I,II,III // Матем. сборник. — 1968. — Т. 76, № 1. — С. 72–134; 1968. — Т. 77, № 4. — С. 545–601; 1969. — Т. 78, № 1. — С. 3–50.

[A-L] А л е к с о в с к и й В. А., Л у к а ц к и й А. М. Нелинейная динамика намагниченности ферромагнетиков и движение обобщенного твердого тела с группой токов // Теор. и матем. физика. — 1990. — Т. 85, № 1. — С. 1090–1096.

[ATL] A l v i n o A., T r o m b e t t i G. and L i o n s P.-L. On optimization problems with prescribed rearrangements // Nonlinear Anal. — 1989. — V. 13, № 2. — P. 185–220.

[AnS] A n u f r i e v A. and S o k o l o f f D. Fractal properties of geodynamo models // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1994. — V. 74, № 1–4. — P. 207–223.

[ART] A r e f H., R o t t N. and T h o m a n n H. Gröbli's solution of the three-vortex problem // Annual Review in Fluid Mechanics. — 1992. — V. 24. — P. 1–20.

[Arn1] А р н о л ь д В. И. О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных // Матем. сборник. — 1959. — Т. 48, № 1. — С. 3–74. [Исправления см. в Матем. сборник. — 1962. — Т. 56, № 3. — С. 392.]

[Arn2] А р н о л ь д В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1961. — Т. 25, № 1. — С. 21–86.

[Исправления см. в Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 479–480.]

[Arn3] Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationaires des fluides parfaits // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1965. — V. 261. — P. 17–20.

[Arn4] Arnold V. I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. — 1966. — V. 16. — P. 316–361.

[Arn5] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24, № 3. — С. 225–226. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 143–146.]

[Arn6] Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Сер. математика (изд-во Казанского ун-та). — 1966. — Т. 5. — С. 3–5. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. С. 91–94.]

[Arn7] Арнольд В. И. Об одномерных когомологиях алгебры Ли бездивергентных векторных полей и числах вращения динамических систем // Функц. анализ и его прил. — 1969. — Т. 3, № 4. — С. 77–78. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 147–150.]

[Arn8] Арнольд В. И. Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей // Прикл. матем. и механ. — 1972. — Т. 36, № 2. — С. 255–262. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 203–212.]

[Arn9] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения // В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). — Ереван: АН Арм. ССР, 1974. — С. 229–256. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 215–236.]

[Arn10] Арнольд В. И. Несколько замечаний об антидинамо-теореме // Вестник МГУ. Сер. 1. — 1982. — Т. 6. — С. 50–57. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 323–333.]

[Arn11] Arnold V. I. On some nonlinear problems // Crafoord Prize in Math. Crafoord Lectures. The Royal Swedish Acad. Sci. — 1982. — P. 1–7.

[Arn12] Арнольд В. И. Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори // Успехи матем. наук. — 1983. — Т. 38, № 5. — С. 145–146; Some algebro-geometrical aspects of the Newton attraction theory // Arithmetic and Geometry II. — Basel: Birkhäuser, 1983. (Progress in Math., V. 36). — P. 1–3.

[Arn13] Арнольд В. И. Эволюция магнитного поля под действием переноса и диффузии // Успехи матем. наук. — 1983. — Т. 38, № 2. — С. 226–227; Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии // В кн.: Некоторые вопросы современного анализа. Сборник памяти В. М. Алексеева. Под ред. В. М. Тихомирова. — М.: изд-во МГУ, 1984. — С. 8–21.

[Arn14] Арнольд В. И. Экспоненциальное разбегание траекторий и его гидродинамические приложения // В кн.: Н. Е. Кочин и развитие механики. — М.: Наука, 1984. — С. 185–193.

[Arn15] Arnold V. I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988. [Имеется перев.: Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: НИЦ РХД, МЦНМО, 2002.]; Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[Arn16] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1989; Изд. 5. — М.: УРСС, 2003.

[Arn17] Arnold V. I. Ten problems // Advances in Soviet Math., V. 1. — Providence, RI: AMS, 1999. — P. 1–8.

[Arn18] Arnold V. I. Kolmogorov's hydrodynamic attractors // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1991. — V. 434, № 1890. — P. 19–22.

[Arn19] Арнольд В. И. Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, вып. 2. — С. 1–12; Полиинтегрируемые потоки // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, вып. 6. — С. 54–62.

[Arn20] Arnold V. I. Mathematical problems in classical physics // Trends and Perspectives in Applied Math. — New York: Springer, New York, 1994. (Appl. Math. Sci., V. 100). — P. 1–20.

[Arn21] Arnold V. I. Topological invariants of plane curves and caustics. — Providence, RI: AMS, 1994. (University Lecture Series, V. 5). [Имеется перев.: Арнольд В. И. Волновые фронты и топология кривых. — М.: Фазис, 2002.]; Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Adv. in Sov. Math., V. 21. — Providence: AMS, 1994. — P. 33–91; Инварианты и перестройки фронтов на плоскости // В кн.: Особенности гладких отображений с дополнительными структурами. — 1995. (Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Т. 209). — С. 14–64; Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи матем. наук. — 1995. — Т. 50, № 1. — С. 3–68.

[Arn22] Arnold V. I. Symplectic geometry and topology. — Preprint Ceremade, Paris, 24/02/94, 1994. — P. 1–51; Journal of Mathematical Physics. — 2000. — V. 41, № 6. — P. 3307–3343.

[Arn23] Arnold V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connectins, and quantum Hall effect // Selecta Mathematica. New Series. — 1995. — V. 1, № 1. — P. 1–19. [Имеется перевод в кн.: Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 583–604.]

[Arn24] Arnold V. I. Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations // The Floer memorial volume. — Basel: Birkhäuser, 1995. (Progr. Math., V. 133). — P. 99–103.

[Arn25] Arnold V. I. On a variational problem connected with phase transitions of means in controlaable dynamical systems // Nonlinear Problems in Mathematical Physics: in honour of O. A. Ladyzhenskaya. — Klumer/Plenum Publishers, 2002. — V. 23–34; Оптимизация в среднем и фазовые переходы

в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, вып. 2. — С. 1–11.

[Arn26] Арнольд В. И. Задачи Арнольда. — М.: Фазис, 2000.

[A-A] Arnold V. I. and Avez A. Ergodic Problems in Classical Mechanics. — W. A. Benjamin, Inc, 1968. [Имеется перев.: Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. — Ижевск: НИЦ «РХД», 1999.]

[A-G] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 7–139.

[AKh] Arnold V. I. and Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1992. — V. 24. — P. 145–166.

[AKh2] Arnold V. I. and Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics // Applied Mathematical Sciences, V. 125. — New York: Springer-Verlag, 1998.

[AKo] Арнольд В. И., Коркина В. И. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости // Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. — 1983. — Т. 3. — С. 43–46. [См. также Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997. — С. 345–349.]

[AKN] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 3. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1985.

[AVG] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. — М.: МЦНМО, 2004.

[AZRS1] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в стационарном течении с растяжениями в римановом пространстве // Журнал эксп. и теор. физики. — 1981. — Т. 81, № 6. — С. 2052–2058.

[AZRS2] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в движущейся проводящей жидкости // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 35, № 5. — С. 220–221; Стационарное магнитное поле в периодическом потоке // ДАН СССР. — 1982. — Т. 266, № 6. — С. 1357–1361.

[At] Atiyah M. F. Green's functions for self-dual four-manifolds // Math. Anal. and Appl., Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud. — Acad. Press, New York–London, 1981. — P. 129–158.

[AuS] Auckly D. and Sadun L. A family of Möbius invariant 2-knot energies // Geometric Topology. — Providence, RI: AMS, 1997. — P. 235–238.

[BMN] Babin A., Mahalov A. and Nikolaenko B. Global splitting, integrability, and regularity of 3D Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids // Europ. J. Mech. B/Fluids. — 1996. — V. 15, № 3. — P. 291–300; Regularity and integrability of rotating shallow-water equations // C.R. Acad. Sci. Paris. Série I. — 1997. — V. 324. — P. 593–598; Regularity and integrability of $3D$

Euler and Navier–Stokes equations for rotating fluids // Asympt. Anal. — 1997. — V. 15, № 2. — P. 103–150.

[B-V] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. [См. также: Babin A. V. and Vishik M. I. Attractors of evolution equations. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1992. (Studies in Math. and Appl., V. 25.)]; Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их размерности // Успехи матем. наук. — 1983. — Т. 38, вып. 4. — С. 133–187.

[Baj] Bajer K. Flow kinematics and magnetic equilibria. — Ph.D. Thesis, Cambridge Univ., 1989.

[Ban] Banyaga A. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique // Comment. Math. Helv. — 1978. — V. 53, № 2. — P. 174–227.

[B-R] Bao D. and Ratiu T. On the geometrical origin and the solutions of a degenerate Monge–Ampère equation // Proc. Symp. Pure Math., V. 54. — Providence, RI: AMS, 1993. — P. 55–68.

[BLR] Bao D., Lafontaine J. and Ratiu T. On a nonlinear equation related to the geometry of the diffeomorphism group // Pacific J. Math. — 1993. — V. 158, № 2. — P. 223–242.

[Bay1] Bayly B. J. Fast magnetic dynamos in chaotic flows // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 57. — P. 2800–2803.

[Bay2] Bayly B. J. Scalar dynamo models // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1993. — V. 73. — P. 61–74.

[B-C] Bayly B. J. and Childress S. Construction of fast dynamos using unsteady flows and maps in three dimensions // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1988. — V. 44. — P. 211–240.

[BeG] Benaim M. and Gambaudo J. M. Metric properties of the group of area preserving diffeomorphisms // Trans. of the AMS. — 2001. — V. 353, № 11. — P. 4661–4672.

[Bej] Benjamin B. The alliance of practical and analytical insights into the nonlinear problems of fluid mechanics // Lecture notes in Math., V. 503. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976. — P. 8–29.

[Ben] Bennequin D. Entrelacements et équations de Pfaff // Astérisque. — 1983. — V. 107–108. — P. 87–161.

[Brd] Berdichevsky V. I. Statistical mechanics of point vortices // Phys Review E. — 1995. — V. 51, № 5. — P. 4432–4452.

[BFS] Berdichevsky V. I., Fridlyand A. and Sutyrin V. Prediction of the turbulent velocity profile in Couette and Poiseuille flows from first principles // Phys. Rev. Letters. — 1996. — V. 76, № 21. — P. 3967–3970.

[Ber] Березин Ф. А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1, вып. 2. — С. 1–14.

[Be1] Berger M. A. Third order link invariant // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — V. 23. — P. 2787–2793.

[Be2] Berger M. A. Energy-crossing number relations for braided magnetic fields // Phys. Rev. Lett. — 1993. — V. 70, № 6. — P. 705–708.

[B-F] Berger M. A. and Field G. B. The topological properties of magnetic helicity // J. Fluid Mech. — 1984. — V. 147. — P. 133–148.

[Berr] Berry M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1984. — V. 392, № 1802. — P. 45–57.

[BKMR] Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E. and Ratiu T. S. Dissipation induced instabilities // Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire. — 1994. — V. 11, № 1. — P. 37–90; Euler–Poincaré equations and double bracket dissipation // Comm. Math. Phys. — 1995. — V. 175, № 1. — P. 1–42.

[Bog] Богаевский И. А. Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, № 4. — С. 1–16.

[B-T] Bott R. and Taubes C. On the self-linking of knots // J. Math. Phys. — 1994. — V. 35. — P. 5247–5287.

[Bow] Bowen R. A horseshoe with positive measure // Invent. Math. — 1975. — V. 29. — P. 203–204.

[BoR] Bowen R. and Ruelle D. The ergodic theory of axiom A flows // Invent. Math. — 1975. — V. 29. — P. 181–202.

[Bra] Брагинский С. И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // Журнал эксп. и теор. физики. — 1964. — Т. 47. — С. 1084–1098; К теории гидромагнитного динамо // Журнал эксп. и теор. физики. — 1964. — Т. 47. — С. 2178–2193.

[Bre1] Brenier Y. The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids // J. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 2, № 2. — P. 225–255; Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1999. — V. 52, № 4. — P. 411–452; Topics on hydrodynamics and volume preserving maps // Handbook of math. fluid dynamics. V. II. — North Holland, 2003. — P. 55–86; Some geometric PDE related to hydrodynamics and electrodynamics // Proc. of the ICM. V. III (Beijin 2002). — P. 761–772. — Beijin: Higher Ed. Press, 2002.

[Bre2] Brenier Y. The dual least action problem for an ideal incompressible fluid // Arch. Rational Mech. Anal. — 1993. — V. 122, № 4. — P. 323–351.

[Bre3] Brenier Y. Homogeneous hydrostatic flows with convex velocity profiles // Nonlinearity. — 1999. — V. 12. — P. 495–512; Fluid limit of particles with Monge–Kantorovich interaction. — Preprint, 1999; Derivation of the Euler equations from a caricature of Coulomb interaction // Comm. Math. Phys. — 2000. — V. 212, № 1. — P. 93–104.

[Bre4] Brenier Y. Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs // C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. — 1987. — V. 305, № 19. — P. 805–808; Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — V. 44, № 4. — P. 375–417; Extended Monge–Kantorovich theory // Lect. Notes in Math., V. 1813. — Springer, 2003. — P. 91–121; A geometric presentatyion of the semi-geostrophic equations. — Preprint, I. Newton Institute, 1996.

[B-L] Bruno O. P. and Laurence P. Existence of three-dimensional toroidal MHD equilibria with nonconstant pressure // Comm. Pure Appl. Math. — 1996. — V. 49, № 7. — P. 717–764.

[Bru] Brushlinskaya N. N. On the behavior of the equations of hydrodynamics as the Reynolds number passes through a critical value // Sov. Math. Dokl. — 1965. — V. 6. — P. 724–728. [См. также: Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 162. — С. 731–734].

[Bry1] Brylinski J.-L. Loop spaces, characteristic classes and geometric quatization. — Birkhäuser, 1993. (Progress in Math., V. 107).

[Bry2] Brylinski J.-L. Radon transform and functionals on the spaces of curves // The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995 (Ed. I. M. Gelfand, J. Lepovsky, M. Smirnov). — Birkhäuser, Boston, 1996. — P. 45–73.

[BFHW] Bryson S., Freedman M. H., He Z.-X. and Wang Z. Möbius invariance of knot energy // Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 28. — P. 99–103.

[B-E] Burns D. M. and Epstein C. L. A global invariant for three-dimensional CR-manifolds // Inven. Math. — 1998. — V. 92. — P. 333–348.

[Bur] Burton G. R. Rearrangements of functions, maximizations of convex functionals, and vortex rings // Math. Annalen. — 1987. — V. 276. — P. 225–253; Steady symmetric vortex pairs and rearrangements // Proc. Royal Soc. Edinburgh. — 1988. — V. 108A. — P. 269–290; Variational problems on classes of rearrangements and multiple configurations for steady vortices // Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1989. — V. 6, № 4. — P. 295–319.

[But] Buttke T. F. Fast vortex methods in three dimensions // Vortex dynamics and vortex methods, Lectures in Appl. Math., V. 28. — Providence, RI: AMS, 1991. — P. 51–66; Velicity methods: Lagrangian numerical methods which preserve the Hamiltonian structure of incompessible fluid flow // Vortex flows and related numerical methods. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., V. 395). — P. 39–57.

[Ca] Calabi E. On the group of automorphisms of a symplectic manifold // Problems in analysis, Lectures at the Symposium in honor of S. Bochner. — Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1970. — P. 1–29.

[Cal] Calugareanu G. L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionneles // Rev. Math. Pures Appl. — 1959. — V. 4. — P. 5–20.

[C-H] Camassa R. and Holm D. An integrable shallow water equation with peaked solutions // Phys. Rev. Lett. — 1993. — V. 71, № 11. — P. 1661–1664.

[CDG] Cantarella J., DeTurck D. and Gluck H. Upper bounds for the writhing of knots and the helicity of vector fields // Knots, braids, and mapping class groups (New York, 1998). — Providence, RI: AMS, 2001. (AMS/IP Stud. Adv. Math., V. 24); The Biot-Savart operator for application to knot theory, fluid dynamics and plasma physics // J. Math. Phys. — 2001. — V. 42, № 2. — P. 876–905.

[CLM] Cappell S. E., Lee R. and Miller E. Y. A symplectic geometry approach to generalized Casson's invariants of 3-manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 22. — P. 269–275.

[C-L] Carlen E and Loss M. Extremals of functionals with competing symmetries // J. Funct. Anal. — 1990. — V. 88. — P. 437–456.

[Cha] Chaperon M. On generating families // The Floer memorial volume, Progr. Math., V. 133. — Basel: Birkhäuser, 1995. — P. 283–296.

[Che] Chekanov Yu. V. Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves // Duke Math. J. — 1998. — V. 95, № 1. — P. 213–226.

[Chm] Chemin J.-Y. Fluides parfaits incompressibles // Astérisque. — 1995. — V. 230. — P. 1–177.

[C-S] Cheng C.-Q. and Sun Y.-S. Existence of invariant tori in three-dimensional measure-preserving maps // Cel. Mech. Dyn. Ast. — 1990. — V. 47. — P. 275–292.

[CMa] Chern S. J. and Marsden J. E. A note on symmetry and stability for fluid flows // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1990. — V. 51, № 1–4. — P. 19–26.

[Chr] Chern S. S. Complex manifolds without potential theory. — New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.

[CLMS] Chicone C., Latushkin Y. and Montgomery-Smith S. The spectrum of the kinematic dynamo operator for an ideally conducting fluid // Comm. Math. Phys. — 1995. — V. 173. — P. 379–400.

[Chi1] Childress S. Construction of steady-state hydromagnetic dynamos. I. Spatially periodic fields // Report MF-53, Courant Inst. of Math. Sci. — 1967; New solutions of the kinematic dynamo problem // J. Math. Phys. — 1970. — V. 11. — P. 3063–3076.

[Chi2] Childress S. Fast dynamo theory. Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds: H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, M. Tabor and P. Comte). — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — P. 111–147.

[Chi3] Childress S. On the geometry of fast dynamo action in unsteady flows near the onset of chaos // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1993. — V. 73. — P. 75–90.

[ChG] Childress S. and Gilbert A. Stretch, twist and fold: the fast dynamo // Lecture notes in Physics, V. 37. — Springer-Verlag, 1995.

[C-M] Chui A. Y. K. and Moffatt H. K. The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1995. — V. 451, № 1943. — P. 609–629.

[CFT] Constantin P., Foias C. and Temam R. Attractors representing turbulent flows // Mem. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 53, № 314. — P. 67.

[Cow] Cowling T. G. The magnetic field of sunspots // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. — 1934. — V. 140. — P. 39–48.

[D-L] Delshams A. and de la Llave R. Existence of quasiperiodic orbits and absence of transport for volume-preserving transformations and flows. — Preprint, 1990. — P. 1–28.

[DeR] De Rham G. Variétés différentiables. Formes, courantes, formes harmoniques. — Paris: Hermann, 1955. [Имеется перев.: Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 2006.

[Der1] Deryabin M. On asymptotic Hopf invariant for Hamiltonian systems // J. Math. Phys. — 2005. — V. 46, № 6.

[Der2] Deryabin M. Ideal hydrodynamics on Lie groups // Physica D. — 2006. — V. 221, № 1. — P. 84–91.

[Dez] Dezin A. A. Invariant forms and some structure properties of the Euler equations of hydrodynamics // Zeit. Anal. Anwend. — 1983. — V. 2. — P. 401–409. (in Russian).

[Dik] Dikii L. A. On the non-linear theory of hydrodynamical stability // Appl. Math. Mech. — 1965. — V. 29, № 5. — P. 852–855.

[DoM] Доброхотов С. Ю., Мартинес-Оливе В. Локализованные асимптотические решения уравнения магнитного динамо в ABC-полях // Матем. заметки. — 1993. — Т. 54, вып. 4. — С. 45-68.

[DoS] Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И. Параметрикс и асимптотика локализованных решений уравнений Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$, линеаризованных на гладком течении // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, вып. 1. — С. 72– 82; Некоторые асимптотические решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, вып. 1. — С. 25–35.

[Dom] Dombre T., Frisch U., Greene J. M., Henon M., Mehr A. and Soward A. M. Chaotic streamlines in the ABC flows // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 167. — P. 353–391.

[Don] Donaldson S. K. Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics // AMS Transl. Ser. 2, V. 196. — Providence, RI: AMS, 1999. — P. 13–33.

[D-O] Douady A. and Osterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A–B. — 1980. — V. 290, № 24. — P. A1135–A1138.

[D-S] Doyle P. and Schramm O. Personal communications to D. Auckly, L. Sadun, R. B. Kusner and J. M. Sullivan, see [AuS], [KuS].

[DKN] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I // Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 179–284.

[D-N] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 294–297.

[DFN] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Изд. 2-е, перераб. — М.: Наука, 1986.

[Duf] Dufour J.-P., Bi-stabilité des fronces // C.R. Acad. Sci. Sér A–B. — 1977. — V. 285. — P. A445–A448; Stabilité simultanée de deux fonctions différentiables // Ann. Inst. Fourier. — 1979. — V. 29, № 1. — P. 263–282.

[Dyn] Дынников И. А. О пересечениях поверхностей уровня псевдопериодических функций // Успехи матем. наук. — 1994. — Т. 49, вып. 1. — С. 213–214.

[Eb] Ebin D. G. The motion of slightly compressible fluids viewed as a motion with strong constraining force // Annals of Math. — 1977. — V. 105. — P. 141–200; Motion of a slightly compressible fluid // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. — 1975. — V. 72, № 2. — P. 539—542; The initial boundary value problem for sub-sonic fluid motion // Comm. Pure and Appl. Math. — 1979. — V. 32. — P. 1–19; Motion of slightly compressible fluids in a bounded domain // Comm. Pure and Appl. Math. — 1982. — V. 35. — P. 451–485.

[E-M] Ebin D. G. and Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // Ann. of Math. — 1970. — V. 92. — P. 102–163; Groups of diffeomorphisms and the solution of the classical Euler equation for a perfect fluid // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 75. — P. 962–967.

[EbM] Ebin D. G., Misiolek G. The exponential map on $\mathcal{D}^s_\mu$ // Proceedings of the Arnoldfest. Communications of the Fields Institute (Ed. E. Bierstone et al.), V. 24. — 1999. — P. 153–163.

[EbMP] Ebin D., Misiolek G. and Preston S. Singularities of the exponential map on the volume-preserving diffeomorphism group // Geom. and Funct. Anal. — 2006. — V. 16, № 4. — P. 850–868.

[El1] Элиашберг Я. М. Теорема о структуре волновых фронтов и ее применения в симплектической топологии // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, вып. 3. — С. 65–72.

[El2] Eliashberg Ya. Topological characterization of Stein manifolds of dim > 2 // Internat. J. Math. — 1990. — V. 1, № 1. — P. 29–46.

[E-P] Eliashberg Ya. and Polterovich L. Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms // Internat. J. Math. — 1993. — V. 4, № 5. — P. 727–738.

[ER1] Eliashberg Ya. and Ratiu T. On the diameter of the symplectomorphism group of the ball // Math. Sci. Res. Inst. Publ., V. 20. — New York: Springer, 1991. — P. 169–172.

[ER2] Eliashberg Ya. and Ratiu T. The diameter of the symplectomorphism group is infinite // Invent. Math. — 1991. — V. 103, № 2. — P. 327–340.

[EnP] Entov M. and Polterovich L. Calabi quasimorphism and quantum homology // Int. Math. Research Notices. — 2003. — V. 30. — P. 1635–1676.

[E-K] Etingof P. I. and Khesin B. A. Affine Gelfand–Dickey brackets and holomorphic vector bundles // Geom. and Funct. Anal. — 1994. — V. 4, № 4. — P. 399–423.

[E-G] Etnyre J. and Ghrist R. Contact topology and hydrodynamics. I. Beltrami fields and the Seifert conjecture, nonlinearity. — 2000. — V. 13, № 2. — P. 441–458; II. Solid tori // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2002. — V. 22, № 3. — P. 819–833; III. Knotted orbits // Trans. AMS. — 2000. — V. 352, № 12. — P. 5781–5794.

[Eul] Euler L. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primiis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad onmes motus qui inhuiusmodi corpora cadere possunt accommodata // Mémoires de l'Académie des Sciences. — Berlin, 1765; Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series secunda. Opera mechanica et astronomica // Natur. Sci. Soc. Switzerland; Orell Füssli, Zürich; B. G. Teubner,

Leipzig. — 1948. — V. III.; 1950. — V. IV.; Commentationes mechanicae ad theoriam corporum fluidorum pertinentes // Mémoires de l'Académie des Sciences, Berlin; Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series secunda. Opera mechanica et astronomica // Soc. Sci. Natur. Helveticae; C. A. Truesdell, Lausanne. — 1954. — V. XII.; 1955. — V. XIII.

[E-B] Evans N. V. and Berger M. A. A hierarchy of linking integrals // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — P. 237–248.

[Fad] Фаддеев Л. Д. К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — М.: Наука, 1971. — Т. 21. — С. 164–172.

[FZ] Fairlie D. B. and Zachos C. K. Infinite-dimensional algebras, sine brackets, and SU(∞) // Phys. Letters B. — 1989. — V. 224, № 1–2. — P. 101–107.

[FFZ] Fairlie D. B., Fletcher P. and Zachos C. K. Trigonometric structure constants for new infinite-dimensional algebras // Phys. Letters B. — 1989. — V. 218, № 2. — P. 203–206.

[Fer] Ferrand E. On the Bennequin invariant and the geometry of wave fronts // Geom. Dedicata. — 1997. — V. 65, № 2. — P. 219–245.

[Fey] Feynman R. P. Statistical mechanics. — New-York: Benjamin, 1972. [Имеется перев.: Фейнман Р. Статистическая механика. Курс лекций. — М.: Мир, 1975.]

[F-R] Fiedler B. and Rocha C. Heteroclinic orbits of semilinear parabolic equations // J. Diff. Equations. — 1996. — V. 125, № 1. — P. 239–281.

[Fj] Fjørtoft R. Applications of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geofys. Publ. Norske Vid., Akad. Oslo. — 1950. — V. 17, № 6. — P. 52.

[Fock] Фокк В. В. Асимптотики уравнения Фоккера–Планка. — М.: МГУ, 1986. — Препринт.

[FNRS] Fock V. V., Nekrasov N. A., Rosly A. A. and Selivanov K. G. What we think about the higher dimensional Chern–Simons theories // Sakharov Memorial Lectures in Physics. V. 1–2. — Commack, NY: Nove Sci. Publ., 1992. — P. 465–471.

[FoT] Foias C. and Temam R. Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier–Stokes equations // J. Math. Pures Appl. — 1979. — V. 58, № 3. — P. 339–368.

[FoP] Fox D. and Pucci C. The Dirichlet problem for the wave equation // Annali di Mathematica pura ed applicata. Serie IV. — 1958. — V. XLVI. — P. 155–182.

[Fr1] Freedman M. H. A note on topology and magnetic energy in incompressible perfectly conducting fluids // J. Fluid Mech. — 1988. — V. 194. — P. 549–551.

[Fr2] Freedman M. H. Trivial magnetic froth // Lectures at Santa Barbara. — 1991; Zedovich's neutron star and the prediction of magnetic froth // Proceedings of the Arnoldfest, Fields Institute Communications (Ed. E. Bierstone et al.), V. 24. — 1999. — P. 165–172.

[FrB] Freedman M. H. and Berger M. A. Combinatorial relaxation of magnetic fields // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. — 1993. — V. 73, № 1–4. — P. 91–96.

[FH1] Freedman M. H. and He Z.-X. Links of tori and the energy of incompressible flows // Topology. — 1991. — V. 30, № 2. — P. 283–287.

[FH2] Freedman M. H. and He Z.-X. Divergence-free fields: energy and asymptotic crossing number // Annals of Math. — 1991. — V. 134, № 1. — P. 189–229.

[FHW] Freedman M. H., He Z.-X. and Wang Z. Möbius energy for knots and unknots // Annals of Math. — 1994. — V. 139, № 1. — P. 1–50.

[F-W] Freidlin M. I. and Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems // Fund. Principles of Math. Sci., V. 260. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1984; Reaction-diffusion equations with randomly perturbed boundary conditions // Ann. Probab. — 1992. — V. 20, № 2. — P. 963–986.

[F-K] Frenkel I. B. and Khesin B. A. Four-dimensional realization of two-dimensional current groups // Commun. Math. Phys. — 1996. — V. 178, № 3. — P. 541–562.

[FrT] Frenkel I. B. and Todorov A. N. Complex counterpart of Chern–Simons–Witten theory and holomorphic linking. — Preprint math. AG/0502169, 2005.

[FGV] Friedlander S., Gilbert A. D. and Vishik M. M. Hydrodynamic instability for certain *ABC* flows // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. — 1993. — V. 73, № 1–4. — P. 97–107.

[FV1] Friedlander S. and Vishik M. M. Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid // Phys. Rev. Lett. — 1991. — V. 66, № 17. — P. 2204–2206; Instability criteria for steady flows of a perfect fluid // Chaos. — 1992. — V. 2, № 3. — P. 455–460.

[FV2] Friedlander S. and Vishik M. M. On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics // Chaos. — 1995. — V. 5, № 2. — P. 416–423.

[Fri] Frisch U. Turbulence. — Cambridge University Press, 1995. [Имеется перев.: Фриш У. Турбулентность. — М.: Фазис, 1998.]

[FuT] Fuchs D. and Tabachnikov S. Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space // Topology. — 1997. — V. 36, № 5. — P. 1025–1053.

[Fuks] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. — М.: Наука, 1984.

[Ful] Fuller F. B. The writhing number of a space curve // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1971. — V. 68. — P. 815–819; Decomposition of the linking number of a closed ribbon: a problem from molecular biology // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1978. — V. 75, № 8. — P. 3557–3561.

[GaS] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.

[Gal] Galileo Galilei. Le opere. — Firenze: Ristampa della Edizione Nazionale, 1890–1909. — V. 8.

[G-F] Galloway D. J. and Frisch U. A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1984. — V. 29, № 1. — P. 13–18.

[GmF] Gama S. and Frisch U. Local helicity, a material invariant for the odd-dimensional incompressible Euler equations // Solar and Planetary Dynamos (Cambridge, 1992). — Cambridge, 1993. (Publ. Newton Inst. Cambridge Univ. Press, V. 1). — P. 115–119.

[G-G] Gambaudo J. M. and Ghys É. Enlacements asymptotiques // Topology. — 1997. — V. 36, № 6. — P. 1355–1379.

[G-G2] Gambaudo J. M. and Ghys É. Commutators and diffeomorphisms of surfaces // Ergodic Theor. Dyn. Syst. — 2004. — V. 24, № 5. — P. 1591–1617.

[GaL] Gambaudo J. M. and Lagrange M. Topological lower bounds on the distance between area preserving diffeomorphisms // Bol. Soc. Bras. Mat., Nova. Sér. — 2000. — V. 31, № 1. — P. 9–27.

[GST] Gambaudo J. M., Sullivan D. and Tresser C. Infinite cascades of braides and smooth dynamical systems // Topology. — 1994. — V. 33, № 1. — P. 85–94.

[Gar] Garnett L. Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion // J. Funct. Anal. — 1983. — V. 51. — P. 285–311.

[GDi] Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Семейство гамильтоновых структур, связанных с интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. — М.: ИПМ, 1978. — Препринт. Т. 136.

[GDo] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и классическое уравнение Янга–Бакстера // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, вып. 4. — С. 1–9.

[GFu] Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2, вып. 4. — С. 92–93.

[GGZ] Gelfand I. M., Graev M. I. and Zelevinskii A. V. Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type // Sov. Math. Dokl. — 1988. — V. 36, № 1. — P. 5–10.

[GPS] Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Об одной теореме Пуанкаре // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127, вып. 3. — С. 490–493.

[Ger] Gerasimov A. — Частное сообщение.

[Gé] Gérard P. Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels // (d'après J.-Y. Chemin et J. M. Delort) Séminaire Bourbaki, 44ème année, V. 1992/92, Astérisque. — 1992. — V. 206, № 757:5. — P. 411–444.

[Gh] Ghrist R. Steady nonintegrable high-dimensional fluids // Lett. Math. Phys. — 2001. — V. 55, № 3. — P. 193–204.

[Gil1] Gilbert A. D. Magnetic field evolution in steady chaotic flows // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. — 1992. — V. A339. — P. 627–656.

[Gil2] Gilbert A. D. Towards a realistic fast dynamo: models based on cat maps and pseudo-Anosov maps // Phil. Trans. R. Soc. Lond. —1993. — V. A443. — P. 585–606.

[GK2] Ginzburg V. L. and Khesin B. A. Steady fluid flows and symplectic geometry // J. Geometry and Physics. — 1994. — V. 14, № 2. — P. 195–210.

[GK1] Ginzburg V. L. and Khesin B. A. Topology of steady fluid flows // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds. H. K. Moffatt et al.). — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — P. 265–272.

[G-P] Гончаров В. П. и Павлов В. И. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. — М.: изд-во МГУ, 1993.

[Gor] Goryunov V. Vassiliev invariants of knots in $\mathbb{R}^3$ and in a solid torus // AMS Transl. Ser. 2. V. 190. — Providence, RI: AMS, 1999. — P. 37–59.

[GrS] Grassin M. and Serre D. Existence de solutions globales et réguluéres aux équations d'Euler pour un gaz parfait isentropique // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math. — 1997. — V. 325, № 7. — P. 721–726.

[Gri] Grinfeld M. A. Variational principles and stability of stationary flows of barotropic ideal fluid // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. — 1984. — V. 28, № 1. — P. 31–54.

[Gro] Gromov M. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math. — 1985. — V. 82, № 2. — P. 307–347.

[Grö] Gröbli W. Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. — Zürich und Furrer, 1877.

[GS1] Guillemin V. and Sternberg S. The moment map and collective motion // Ann. Phys. — 1980. — V. 127, № 1. — P. 220–253.

[GS2] Guillemin V. and Sternberg S. Symplectic techniques in physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[Gur] Gurarie D. Symmetries and conservation laws of two-dimensional hydrodynamics // Physica D. — 1995. — V. 8, № 4. — P. 621–636.

[GZ] Гусейн-Заде С. М. О количестве критических точек у квазипериодического потенциала // Функц. анализ и его прил. — 1989. — Т. 23, вып. 2. — С. 55–56.

[HTV] Haller S., Teichmann J. and Vizman C. Totally geodesic subgroups of diffeomorphisms // J. Geom. Phys. — 2002. — V. 42, № 4. — P. 342–354.

[Has] Hasimoto R. A soliton on a vortex filament // J. Fluid Mechanics. — 1972. — V. 51. — P. 477–485.

[Helf] Helffer B. Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications // Lecture Notes in Math., V. 1336. — Springer-Verlag, 1988.

[Helm] Helmholtz H. On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex motion. — 1858; Transl. P. G. Tait in Phil. Mag. — 1867. — V. 33, № 4. — P. 485–512.

[Hen] Hénon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1966. — V. 262. — P. 312–314.

[Herm] Herman M.-R. Majoration du nombre de cycles périodiques pour certaines familles de difféomorphismes du cercle // An. Acad. Brasil, Ciênc. — 1985. — V. 57, № 3. — P. 261–263.

[Hof] Hofer H. Estimates for the energy of a symplectic map // Comment. Math. Helv. — 1993. — V. 68, № 1. — P. 48–72.

[H-Z] Hofer H. and Zehnder E. Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1994.

[HMRW] Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. and Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys. Rep. — 1985. — V. 123. — P. 1–116.

[H-K] Holm D. D. and Kupershmidt B. A. Noncanonical Hamiltonian formulation of ideal magnetohydrodynamics // Physica D. — 1983. — V. 7, № 1–3. — P. 330–333.

[Hop] Hoppe J. Diffeomorphism groups, quatization, and SU(∞) // Int. J. Mod. Phys. A. — 1989. — V. 4, № 19. — P. 5235–5248.

[HOT] Hoppe J., Olshanetsky M. and Theisen S. Dynamical systems on quantum tori Lie algebras // Comm. Math. Phys. — 1993. — V. 155, № 3. — P. 429–448.

[HoM] Hornig G. and Mayer C. Towards a third-order topological invariant for magnetic fields // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — V. 35. — P. 3945–3959.

[Ilsh] Ильяшенко Ю. С. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнения Навье–Стокса на двумерном торе // Успехи механики. Международный журнал социалистических стран. — 1982. — Т. 5, вып. 1. — С. 31–63.

[Ily] Ilyin A. A. Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure // Nonlinear Anal. — 1996. — V. 27, № 5. — P. 605–616.

[Ish] Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. — Киев: АН УССР, 1952; Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976.

[Ivo] Ivory J. On the attraction of homogeneous ellipsoids // Philos. Trans. — 1809. — V. 99. — P. 345–372.

[Jac] Jacobi C. G. Vorlesungen über Dynamik. — Berlin: G. Reimer, 1884. [Имеется перев.: Якоби К. Лекции по динамике. — Л.-М.: ОНТИ, 1936.]

[Jak] Якобсон М. В. О числе периодических траекторий для аналитических диффеоморфизмов окружности // Функц. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, вып. 1. — С. 91–92.

[KNH] Kambe T., Nakamura F. and Hattori Y. Kinematic instability and line-stretching in relation to the geodesics of fluid motion // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds. H. Moffatt et al.). — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — P. 493–504.

[KHZ] Kambe T., Hattori Y. and Zeitlin V. On the stretching of line elements in fluid and an approach from differential geometry // Proc. NATO ASI Theory of Solar and Planetary Dynamos (Eds. M. Proctor, P. Matthews, A. Rucklidge). — 1993.

[Ka] Kato T. On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation // Arch. Rational. Mech. Anal. — 1967. — V. 25. — P. 188–200.

[Kat1] Katok A. Bernoulli diffeomorphisms on surfaces // Annals of Math. — 1979. — V. 110. — P. 529–547.

[Kat2] Katok A. Lyapunov exponents, entropy, and periodic points for diffeomorphisms // Publ. Math. IHES. — 1980. — V. 51. — P. 137–174.

[Kel] Kelvin L. On vortex motion // Trans. Roy. Soc. Edin. — 1869. — V. 25. — P. 217–260; Maximum and minimum energy in vortex motion // Mathematical and Physical Papers, V. 4. — Cambridge Univ. Press. — P. 172–183.

[KhL] Khalatnikov I. M. and Lebedev V. V. Hamiltonian equations of hydrodynamics of anisotropic superfluid *He–A* // Phys. Lett. A. — 1977. — V. 61. — P. 319–320.

[Kha] Khanin K. M. Quasi-periodic motion of vortex systems // Physica D. — 1982. — V. 4, № 2. — P. 261–269.

[Kh1] Khesin B. A. Ergodic interpretation of integral hydrodynamic invariants // J. Geometry and Physics. — 1992. — V. 9, № 1. — P. 101–110.

[Kh2] Khesin B. A. Informal complexification and Poisson structures on moduli spaces // AMS Transl. Ser. 2, V. 180. — 1997. — P. 147–155.

[Kh3] Khesin B. A. Geometry of higher helicities // Moscow Math. J. — 2003. — V. 3, № 3. — P. 989–1011.

[KhC] Khesin B. A. and Chekanov Yu. V. Invariants of the Euler equation for ideal or barotropic hydrodynamics and superconductivity in D dimensions // Physica D. — 1989. — V. 40, № 1. — P. 119–131.

[KLR] Khesin B. A., Lyubashenko V. and Roger C. Extensions and contractions of the Lie algebra of q-pseudodifferential symbols on the circle. — Preprint hep-th/9403189, 1994; J. Funct. Anal. — 1997. — V. 143, № 1. — P. 55–97.

[KhM] Khesin B. and Misiolek G. Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits // Advances in Math. — 2003. — V. 176, № 1. — P. 116–144.

[KhM2] Khesin B. and Misiolek G. Asymptotic direction, Monge–Ampere equations and the geometry of diffeomorphism groups // J. of Math. Fluid Mechanics. — 2005. — V. 7. — P. 365–375.

[KhM3] Khesin B. and Misiolek G. Shock waves for the Burgers equation and curvatures of diffeomorphism groups. — Preprint math. DG/0702196, 2007. To appear in Proc. Steklov Math. Inst.

[KhR] Khesin B. A. and Rosly A. A. Symplectic geometry of moduli spaces of holomorphic bumndles over complex surfaces // The Arnoldfest. Fields Institute Communications (Ed. E. Bierstone et al.), V. 24. — 1999. — P. 311–323; Polar homology and holomorphic bundles // Phil. Trans. Royal Soc. London A. — 2001. — V. 359. — P. 1413–1427; Polar homology // Canad. J. Math. — 2003. — V. 55, № 5. — P. 1100–1120.

[KhS] Khesin B. A. and Shapiro B. Z. Nondegenerate curves on S^2 and orbit classification of the Zamolodchikov algebra // Comm. Math. Phys. — 1992. — V. 145, № 2. — P. 357–362.

[KhV] Kholodenko A. L. and Vilgis T. A. Some geometrical and topological problems in polymer physics // Phys. Rep. — 1998. — V. 298, № 5–6. — P. 251–370.

[KiT] Kida S. and Takaoka M. Vortex reconnection // Annual Review in Fluid Mechanics. — 1994. — V. 26. — P. 169–189.

[KiN] Kidambi R. and Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere // Phys. D. — 1998. — V. 116, № 1–2. — P. 143–175.

[Kir] Kirchhoff G. R. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. — Leipzig: Teubner, 1876. [Имеется перев.: Кирхгоф Г. Р. Механика. Лекции по математической физике. – М.: АН СССР, 1962.]

[Ki1] Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи матем. наук. — 1962. — Т. 17. — С. 57–110.

[Ki2] Kirillov A. A. Infinite-dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations. Geometry of moments // Lect. Notes in Math., V. 970. — Springer-Verlag, 1982. — P. 101–123.

[Ki3] Кириллов А. А. Кэлерова структура на K-орбитах группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, вып. 2. — С. 42–45.

[Kl] Klein F. Einleitung in die höhere Geometrie. — 3-d Aufl., Berlin, 1926. [Имеется перев.: Клейн. Ф. Высшая геометрия. — М.-Л.: ОНТИ, 1939.]

[KlM] Klein R. and Majda A. J. Self-stretching of a perturbed vortex filaments. I. The asymptotic equation for deviations from a straight line // Physica D. — 1991. — V. 49, № 3. — P. 323–352; II. Structure of solutions // Physica D. — 1991. — V. 53, № 2–4. — P. 267–294.

[K-Y] Klapper I. and Young L.-S. Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy // Comm. Math. Phys. — 1995. — V. 173. — P. 623–646.

[K-N] Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of differential geometry. V. 1–2. — NY–London–Sydney: Interscience Publishers, 1969. [Имеется перев.: Кобаяси С., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.]

[Kol] Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 119, № 5. — С. 861–864.

[KLe] Копьев В. Ф. и Леонтьев Е. А. Акустическая нестабильность плоских вихревых потоков с круговыми линиями тока // Акустический журнал. — 1988. — Т. 34, № 2. — С. 475–480.

[KdV] Korteweg D. J. and de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // Philos. Mag. — 1895. — V. 39. — P. 422–443.

[Kos] Kostant B. Quantization and unitary representations // Lect. Notes Math., V. 170. — Berlin: Springer, 1970. — P. 87–208.

[KoV] Kotschick D. and Vogel T. Linking numbers of measured foliations // Ergodic Theory Dyn. Systems. — 2003. — V. 23, № 2. — P. 541–558.

[Ko1] Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. — 1983. — Т. 6. — С. 10–22; Kozlov V. V. Hydrodynamics of noncommutative integration of Hamiltonian

systems // Dynamical systems in classical mechanics, V. 168. — Providence, RI: AMS, 1995. — P. 227–238.

[Ko2] Козлов В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, вып. 1. — С. 69–70.

[Ko3] Kozlov V. V. Dynamical systems determined by the Navier–Stokes equations // Russ. J. Math. Phys. — 1993. — V. 1, № 1. — P. 57–69.

[Koz1] Козловский О. — Частное сообщение.

[Koz2] Kozlovsky O. An integral formula for topological entropy of C^∞ maps // Ergodic theory and dynamical systems. — 1998. — V. 18, № 2. — P. 405–424.

[K-R] Krause F. and Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. — NY: Pergamon Press, Oxford–Elmsford, 1980.

[Kri] Krishnamurti T. N. Numerical weather prediction // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1995. — V. 27. — P. 195–224.

[KrM] Krishnaprasad P. S. and Marsden J. E. Hamiltonian structure and stability for rigid bodies with flexible attachments // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1987. — V. 98. — P. 137–158.

[Kui] Kuiper N. H. Locally projective spaces of dimension one // Michigan Math. J. — 1953–1954. — V. 2, № 2. — P. 95–97.

[Kup] Kupershmidt B. A. A super Korteweg de Vries equation: an integrable system // Phys. Lett. A. — 1984. — V. 102, № 5–6. — P. 213–215; Super Korteweg de Vries equation associated to super extensions of the Virasoro algebra // Phys. Lett. A. — 1985. — V. 109, № 9. — P. 417–423.

[KuY] Куракин Л. Г., Юдович В. И. Бифуркация рождения цикла в системе с косимметрией // Докл. РАН. — 1998. — Т. 358, № 3. — С. 346–349; Kurakin L. G. and Yudovich V. I. Bifurcation of the branching of a cycle in n-parameter family of dynamic systems with cosymmetry // Chaos. — 1997. — V. 7, № 3. — P. 376–386.

[KuS] Kusner R. B. and Sullivan J. M. Möbius energies for knots and links, surfaces and submanifolds // Geom. Topology. — Providence, RI: AMS, 1997. — P. 570–604.

[Lad] Ladyzhenskaya O. On the local solvability of non-stationary problems for incompressible ideal and viscous fluids and vanishing viscosity // Boundary Problems in Math. Phys., V. 5, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, Nauka. — 1971. — V. 21. — P. 65–78.

[LL] La Llave R. D. Hyperbolic dynamical systems and generation of magnetic fields by perfectly conducting fluids // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1993. — V. 73. — P. 123–131.

[LaM] Lalonde F. and McDuff D. The geometry of symplectic energy // Annals of Math. — 1995. — V. 141, № 2. — P. 349–371.

[Lam] Lamb H. Hydrodynamics. — Cambridge University Press, 1932. [Имеется перев.: Лэмб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1974.]

[LaP] Langer J. and Perline R. Poisson geometry of the filament equation // J. of Nonlinear science. — 1991. — V. 1. — P. 71–93.

[LaR] Larichev V. D. and Reznik G. M. Two-dimensional Rossby solution: An exact solution // Dokl. Acad. Sci. USSR. — 1976. — V. 231. — P. 1077–1079.

[Lat] Lattes S. Sur l'iteration des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1918. — V. 16. — P. 26–28.

[L-A] Laurence P. and Avallaneda M. A Moffatt-Arnold formula for the mutual helicity of linked flux tubes // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. — 1993. — V. 69, № 1–4. — P. 243–256; Woltjer's variational principle. II. The case of unbounded domains // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. — 1993. — V. 69, № 1–4. — P. 201–241.

[LS1] Laurence P. and Stredulinsky E. W. A gradient bound for the Grad-Kruskal-Kulsrud functional // Comm. Pure Appl. Math. — 1996. — V. 49, № 3. — P. 237–284.

[LS2] Laurence P. and Stredulinsky E. W. Asymptotic Massey products induced currents and Borromean torus links // J. Math. Phys.— 2000. — V. 41, № 5. — P. 3170–3191; A lower bound for the energy of magnetic fields supported in linked tori // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. — 2000. — V. 331, № 3. — P. 201–206.

[LS3] Laurence P. and Stredulinsky E. W. Topological decomposition of Sobolev functions and the localization of energy in ideal plasmas // C.R. Acasd. Sci., Paris. Ser. I Math. — 1997. — V. 324, № 4. — P. 403–408; Optimal regularity in a variational problem for current sheets in ideal magnetohydrodynamics // J. Math. Phys. — 2002. — V. 43, № 11. — P. 5707–5719.

[LS4] Laurence P. and Stredulinsky E. W. Axisymmetric MHD equilibria from Kruskal-Kulsrud to Grad // IMA Vol. Math. Appl., V. 53. — New York: Springer, 1993. — P. 111–134.

[LS5] Laurence P. and Stredulinsky E. W. Two-dimensional magnetohydrodynamic equilibria with prescribed topology // Comm. Pure Appl. Math. — 2000. — V. 53, № 9. — P. 1177–1200.

[Lax] Lax P. D. Approximation of measure preserving transformations // Comm. Pure Appl. Math. — 1971. — V. 24. — P. 133–135.

[LPa] Лазуткин В. Ф., Панкратова И. Л. Нормальные формы и версальные деформации для уравнения Хилла // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, вып. 4. — С. 41–48.

[LeM] Лебедев Д. Р., Манин Ю. И. Гамильтонов оператор Гельфанда–Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, вып. 4. — С. 40–46.

[LeB] LeBrun C. A Kahler structure on the space of string worldsheets // Class. Quantum Gravity. — 1993. — V. 10, № 9. — P. L141–L148.

[Lem1] Lempert L. Loop spaces as complex manifolds // J. of Diff. Geometry. — 1993. — V. 38, № 3. — P. 519–543.

[Lem2] Lempert L. The Virasoro group as a complex manifold // Math. Research Lett. — 1995. — V. 2. — P. 479–495.

[Lem3] Lempert L. — Частное сообщение.

[LMa] Leonard N. E. and Marsden J. E. Stability and drift of underwater vehicle dynamics: mechanical systems with rigid motion symmetry // Physica D. — 1997. — V. 105. — P. 130–162.

[Ler] Leray J. La calcul différential et intégral sur une variété analytique complexe (Problém de Cauchy, III) // Bull. Soc. Math. France. — 1959. — V. 87. — P. 81–180.

[Lew] Lewis D. Lagrangian block diagonalization // J. Dyn. Diff. Eq. — 1992. — V. 4, № 1. — P. 1–41.

[LMMR] Lewis D., Marsden J. E., Montgomery R. and Ratiu T. S. The Hamiltonian structure for dynamic free boundary problems // Physica D. — 1986. — V. 18, № 1–3. — P. 391–404.

[LMR] Lewis D., Marsden J. E. and Ratiu T. S. Stability and bifurcation of a rotating liquid drop // J. Math. Phys. — 1987. — V. 28. — P. 2508–2515.

[LRSM] Lewis D., Ratiu T. S., Simo J. C. and Marsden J. E. The heavy top: a geometric treatment // Nonlinearity. — 1992. — V. 5, № 1. — P. 1–48.

[LeS] Lewis D. and Simo J. C. Nonlinear stability of rotating pseudo-rigid bodies // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1990. — V. 427, № 1873. — P. 281–319.

[Lich] Lichnerowicz A. Algébre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire // Ann. Inst. Fourier. — 1974. — V. 24, № 3. — P. 219–266.

[Lie] Lie S. Teorie des Transformationsgruppen. — Leipzig: B. G. Teubner, 1980.

[Lieb] Lieb E. H. Sharp constants in the Hardy–Littlewood–Sobolev and related inequalities // Ann. of Math. — 1983. — V. 118. — P. 349–374.

[Lif] Lifschitz A. Essential spectrum and local stability condition in hydrodynamics // Phys. Lett. A. — 1991. — V. 152, № 3–4. — P. 199–204.

[L-W] Lin X. C. and Wang Z. Integral geometry of plane curves and knot invariants // J. Diff. Geom. — 1996. — V. 44, № 1. — 74–95.

[Lor] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmosph. Sci. — 1963. — V. 20, № 2. — P. 130–141.

[Loj] Lojasievicz S. Ensembles semi-analitique // Lecture Notes IHES. Bures-sur-Yvette. — 1965.

[Luk1] Лукацкий А. М. О кривизне группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру двумерной сферы // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, вып. 3. — С. 23–27.

[Luk2] Лукацкий А. М. О кривизне группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру n-мерного тора // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, № 2. — С. 187–188.

[Luk3] Lukatsky A. M. The structure of the curvature tensor of the group of measure-preserving diffeomorphisms of a two-dimensional compact manifold // Siber. Math. J. — 1988. — V. 29. № 6. — P. 947–951.

[Luk4] Лукацкий А. М. Отрицательность кривизн группы диффеоморфизмов для локально евклидовых многообразий // Успехи матем. наук. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 137–138.

[Luk5] Lukatsky A. M. On the curvature of the diffeomorphism group // Ann. of Global Anal. Geom. — 1993. — V. 11, № 2. — P. 135–140.

[Luk6] Lukatsky A. M. On the geometry of current groups and a model of the Landau–Lifschitz equation // Lie groups and Lie algebras. Math. Appl. V. 433. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. — P. 425–433.

[Lyub] Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи матем. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 35–95.

[Mag] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 5. — P. 1156–1162.

[MPa] Mallet-Paret J. Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright // J. Diff. Equations. — 1976. — V. 22, № 2. — P. 331–348.

[Man] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, вып. 4. — С. 93–94.

[Ma] Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Современные пробл. математики. Т. 11. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 5–152.

[M-P] Marchioro C. and Pulvirenti M. Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids // Appl. Math. Sci., V. 96.— Springer-Verlag, 1994.

[MMe] Markus L. and Meyer R. Generic Hamiltonian systems are neither integrable nor ergodic // Memoirs of the AMS, V. 144. — Providence, RI: AMS, 1974.

[Mar] Marsden J. E. Lectures on Mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[MMR] Marsden J. E., Montgomery R. and Ratiu T. S. Reduction, symmetry, and phases in mechanics // Memoirs of the AMS, V. 436. — Providence, RI: AMS, 1990.

[MaR] Marsden J. E. and Ratiu T. S. Introduction to mechanics and symmetry: A basic exposition of classical mechanical systems // Texts Appl. Math., V. 17. — New York: Springer-Verlag, 1994.

[MRS] Marsden J. E., Ratiu T. S. and Shkoller S. The geometry and analysis of the averaged Euler equations and a new diffeomorphism group // Geom. Funct. Anal. — 2000. — V. 10, № 3. — P. 582–599.

[MRW] Marsden J., Ratiu T. and Weinstein A. Semidirect product and reduction in mechanics // Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — V. 281. — P. 147–177.

[MaS] Marsden J. E. and Simo J. C. The energy-momentum method // La «Mecanique Analytique» de Lagrange et son Heritage. — 1990. (Atti della Accademia delle Scienze di Torino, V. 124). — P. 245–268.

[M-W] Marsden J. and Weinstein A. Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids // Physica D. — 1983. — V. 7, № 1–3. — P. 305–323.

[Mas] Massey W. Some higher order cohomology operations // Symp. Intern. Topologia Algebraica. Mexico, UNESCO, 1958.

[MatS] Mattingly J. C. and Sinai Ya. G. An elementary proof of the existence and uniqueness theorem for the Navier–Stokes equation // Commun. Contemp. Math. — 1999. — V. 1, № 4. — P. 497–516.

[Max] Maxwell J. C. A treatise on Electricity and Magnetism. V. 2. — Oxford: Clarendon Press, 1877. [Имеется перев.: Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 2. — М.: Наука, 1989.]

[MSi] Meshalkin L. D. and Sinai Ya. G. Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous fluid // J. Appl. Math. Mech. — 1961. — V. 25. — P. 1700–1705.

[MiZ] Millson J. J. and Zombro B. Kähler structure on the moduli space of isometric maps of a circle into Eucledian space // Invent. Math. — 1996. — V. 123, № 1. — P. 35–59.

[Mil1] Milnor J. W. On the total curvature of knots // Ann. of Math. — 1950. — V. 52. — P. 248–257.

[Mil2] Milnor J. W. Link groups // Ann. of Math. — 1954. — V. 59. — P. 177–195.

[Mil3] Milnor J. W. Morse theory. — Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1963. [Имеется перев.: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]

[Mil4] Milnor J. W. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Math. — 1976. — V. 21, № 3. — P. 293–329.

[Mish] Мищенко А. С. Интегралы геодезических потоков на группах Ли // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, вып. 3. — С. 73–77.

[Mis1] Misiolek G. Stability of flows of ideal fluids and the geometry of the group of diffeomorphisms // Indiana Univ. Math. J. — 1993. — V. 42, № 1. — P. 215–235.

[Mis2] Misiolek G. Conjugate points in $S\mathrm{Diff}(T^2)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 124, № 3. — P. 977–982.

[Mis3] Misiolek G. Conjugate points in the Bott–Virasoro group and the KdV equation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — V. 125, № 3. — P. 935–940.

[Mis4] Misiolek G. A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott–Virasoro group // J. Geom. Phys. — 1998. — V. 24, № 3. — P. 203–208.

[Miu] Miura R. M. The Korteweg-de-Vries equation: a survey of results // SIAM Rev. — 1976. — V. 18, № 3. — P. 412–459.

[Mof1] Moffatt H. K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid. Mech. — 1969. — V. 106. — P. 117–129.

[Mof2] Moffatt H. K. Some developments in the theory of turbulence // J. Fluid Mech. — 1981. — V. 106. — P. 27–47; Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1 // J. Fluid Mech. — 1985. — V. 159. — P. 359–378; Part 2 // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 166. — P. 359–378.

[Mof3] Moffatt H. K. Magnetic field generation in electrically conducting fluid. — Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[Mof4] Moffatt H. K. Structure and stability of solutions of the Euler equations: a Lagrangian approach // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1990. — V. 333, № 1631. — P. 321–342.

[Mof5] Moffatt H. K. The energy spectrum of knots and links // Nature. — 1990. — V. 347. — P. 367–369.

[MoR] Moffatt H. K. and Ricca R. L. Helicity and Calugareanu invariant // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1992. — V. 439. — P. 411–429.

[MoT] Moffatt H. K. and Tsinober A. Helicity in laminar and turbulent flow // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1992. — V. 24. — P. 281–312.

[MRe] Monastyrsky M. I. and Retakh V. S. Topology of linked defects in condensed matter // Comm. Math. Phys. — 1986. — V. 103. — P. 445–459.

[MSa] Monastyrsky M. I. and Sasorov P. V. Topological invariants in magnetic hydrodynamics // Sov. Phys. JETP. — 1987. — V. 93. — P. 1210–1220; Conservation of topological invariants of magnetic field in magnetohydrodynamics. — Preprint ITEP, 1988. — P. 63–88.

[Mor1] Moreau J.-J. Une méthode de «cinématique fonctionnelle» en hydrodynamique // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1959. — V. 249. — P. 2156–2158.

[Mor2] Moreau J.-J. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluid parfait barotrope // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1961. — V. 252. — P. 2810–2812.

[MYZ] Morgulis A., Yudovich V. I. and Zaslavsky G. M. Compressible helical flows // Comm. Pure and Appl. Math. — 1995. — V. 48, № 5. — P. 571–582.

[MoG] Morrison P. J. and Greene J. M. Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics // Phys. Rev. Letters. — 1980. — V. 45, № 10. — P. 790–794.

[Mos1] Moser J. On the volume elements on a manifold // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — V. 120. — P. 286–294.

[Mos2] Moser J. On the approximation of measure-preserving mappings by smooth ones and by symplectic diffeomorphisms. — Forschungsinstitut für Mathematik. ETH Zurich, 1995. — Preprint.

[MVe] Moser J. and Veselov A. P. Two-dimensional «discrete hydrodynamics» and the Monge–Ampère equation // Ergod. Theor. and Dyn. Syst. — 2002. — V. 22, № 5. — P. 1575–1583.

[Moy] Moyal J. Quantum mechanics as a statistical theory // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1949. — V. 45. — P. 99–124.

[MuR] Murometz Y. and Razboynik S. Integrability of models of two-dimensional turbulence // Integrable and superintegrable systems (Ed. B. A. Kupershmidt). — London: World Scientific, 1990. — P. 34–45.

[Nad] Надирашвили Н. С. Блуждающие решения уравнения $2D$ Эйлера // Функц. анализ и его прил. — 1991. – Т. 25, вып. 3. — С. 70–71.

[NHK] Nakamura F., Hattori Y. and Kambe T. Geodesics and curvature of a group of diffeomorphisms and motion of an ideal fluid // J. Phys. A. — 1992. — V. 25, № 2. — P. L45–L50.

[Nash] Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math. — 1956. — V. 63, № 1. — P. 20–63.

[Ner1] Неретин Ю. А. Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр // Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. Т. 22. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 164–224.

[Ner2] Неретин Ю. А. Категории бистохастических мер и представления некоторых бесконечномерных групп // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, вып. 2. — С. 52–76; Neretin Yu. A. Mantles, trains, and representations of infinite-dimensional groups // First European Congress of Math., V. II (Paris, 1992). — Basel: Birkhäuser, 1994. (Progress Math., V. 120). — P. 293–310.

[N-N] Newlander A. and Nirenberg L. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds // Ann. of Math. — 1957. — V. 65. — P. 391–404.

[NewI] Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. — London, 1687; Mathematical principles of natural philosophy. — Dawsons of Pall Mall, London, 1969. [Имеется перев.: Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989.]

[NewP] Newton P. K. Hannay–Berry phase and the restricted three-vortex problem // Physica D. — 1994. — V. 79, № 2–4. — P. 416–423.

[NovE] Novikov E. A. Dynamics and statistics of a system of vortices // Sov. Phys. JETP. — 1975. — V. 41. — P. 937–943.

[Nov1] Новиков С. П. Аналитический обобщенный инвариант Хопфа. Многозначные функционалы // Успехи матем. наук. — 1984. — Т. 39, № 5. — С. 113–124.

[Nov2] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи матем. наук. — 1982. — Т. 37, № 5. — С. 1–56.

[Nov3] Novikov S. P. Quasiperiodic structures in topology // Topological methods in modern math. — Houston, Publish or Perish, 1993. — P. 223–233; The semiclassical electron in a magnetic field and lattice. Some problems in low-dimensional «periodic» topology // Geom. Funct. Anal. — 1995. — V. 5, № 2. — P. 434–444.

[Ob] Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184, № 2.

[OH1] O'Hara J. Energy of a knot // Topology. — 1991. — V. 30, № 2. — P. 241–247.

[OH2] O'Hara J. Energy of a knots and conformal geometry. — River Edge, NJ: World Scientific, 2003. (Series on Knots and Everything, V. 33).

[Olv] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1986. [Имеется перев.: Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.]

[Ono] Ono T. Riemannian geometry of the motion of an ideal incompressible magnetohydrodynamical fluid // Physica D. — 1995. — V. 81, № 3. — P. 207–220; A Riemannian geometrical description for the Lie–Poisson systems and its application to idealized magnetohydrodynamics // J. Phys. A. — 1995. — V. 28, № 6. — P. 1737–1751.

[Ose1] Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1968. — Т. 19. — С. 179–210.

[Ose2] Оселедец В. И. О новой форме записи уравнения Навье–Стокса. Гамильтонов формализм // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44, № 3. — С. 169–170.

[Ose3] Oseledets V. I. Fast dynamo problem for a smooth map on a two-torus // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1993. — V. 73, № 1–4. — P. 133–145.

[Ost] Ostrover Y. A Comparison of Hofer's metrics on Hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian submanifolds // Commun. Contemp. Math. — 2003. — V. 5, № 5. — P. 803–811.

[Ovs] Ovsepjan S. G. On the generating set of boundary points in the Dirichlet problem for the equation of the vibrating string in multiconnected regions // Doklady AN Arm. SSR. — 1964. — V. 39. — P. 193–200; Ergodicity of continuous automorphisms and uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for the equation of vibration of a string, I, II // Izv. AN Arm. SSR. — 1967. — V. 2, № 2. — P. 128–136; 1967. — V. 2, № 3. — P. 195–209; On the generating set of boundary points and on the completeness of system of generalized eigenfunctions of the Dirichlet problem for the equation of string vibrations // Doklady AN Arm. SSR. — 1968. — V. 47, № 1. — P. 3–8; A construction of the generating set and the generalized eigenfunctions of the Dirichlet problem for the equation of string vibrations in a class of measurable functions // Izv. AN Arm. SSR. — 1969. — V. 4, № 2. — P. 102–121; The approximation of generalized eigenfunctions of the Dirichlet problem for the vibrating string equation that belong to $L^p(D)$ by smoother generalized eigenfunctions // Izv. AN Arm. SSR. — 1969. — V. 4, № 4. — P. 278–287.

[OK1] Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А. Суперуравнение Кортевега–де Фриза как уравнение Эйлера // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, вып. 4. — С. 81–82.

[OK2] Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А. Симплектические листы скобок Гельфанда–Дикого и гомотопические классы неуплощающихся кривых // Функц. анализ и его прил. — 1990. — Т. 24, вып. 1. — С. 38–47.

[OKC] Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А., Чеканов Ю. В. Интегралы уравнений Эйлера многомерной гидродинамики и сверхпроводимости // Записки ЛОМИ, Т. 172. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, Т. 10. — Наука, 1989.

[Pan] Панов Д. А. Многокомпонентные псевдопериодические отображения // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, вып. 1. — С. 30–38.

[Pat] Patrick G. W. Relative equilibria in Hamiltonian systems: the dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space // J. Geom. and Phys. — 1992. — V. 9, № 2. — P. 111–119.

[PeS] Penna V. and Spera M. A geometric approach to quantum vortices // J. Math. Phys. — 1989. — V. 30, № 12. — P. 2778–2784; Geometry of quantum vortices and link invariants // Internat. J. Modern Phys. B. — 1992. — V. 6, № 11–12. — P. 2209–2216.

[PSS] Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Шлячков С. В. Странные аттракторы // Современные пробл. математики. Фундаментальные направле-

ния. Т. 66. Динамические системы. Т. 9. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1991. — С. 100–148.

[Poh] Pohl W. F. The self-linking number of a closed space curve // J. Math. Mech. — 1967/68. — V. 17. — P. 975–985.

[Poi1] Poincaré H. Théory des Tourbillons. — Paris: Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1893.

[Poi2] Poincaré H. Sur la precession des corps déformables // Bull. Astronomique. — 1910. — V. 21. — P. 321.

[Poi3] Poincaré H. Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste. — G. V. Paris, 1895; Chelsey, 1980. [Имеется перев.: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды, Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971–1972.]

[Plt] Polterovich L. Hamiltonian loops and Arnold's principle // Topics in singularity theory. — Providence, RI: AMS, 1997. (Amer. Math. Soc. Transl. V. 180. Ser. 2). — P. 181–187.

[Plt2] Polterovich L. Hofer's diameter and Lagrangian intersections // Int. Math. Research Notices. — 1998. — V. 4. — P. 217–223.

[Pl1] Polyak M. Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams // Topology. — 1998. — V. 37, № 5. — P. 989–1009.

[Pl2] Polyak M. On the Bennequin invariant of Legendrian curves and its quantization // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. — 1996. — V. 322, № 1. — P. 77–82.

[PlV] Polyak M. and Viro O. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Internat. Math. Res. Notices. — 1994. — V. 11. — P. 8.

[Pol] Polyakov A. M. Fermi–Bose transmutations induced by gauge fields // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — V. 3, № 3. — P. 325–328.

[PPS] Ponty Y., Pouquet A. and Sulem P. L. Dynamos in weakly chaotic two-dimensional flows // J. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. — 1995. — V. 79. — P. 239–257.

[Por] Porter R. Milnor's μ-invariants and Massey products // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — V. 257, № 1. — P. 39–71.

[PrS] Pressley A. and Segal G. Loop groups. — Oxford: Clarendon Press, 1986. [Имеется перев.: Пресли А., Сигал Г. Группы петель. — М.: Мир, 1990.]

[Pre] Preston S. For ideal fluids, Eulerian and Lagrangian instabilities are equivalent // Geom. Funct. Anal. — 2004. — V. 14, № 5. — P. 1044-1062; Nonpositive curvature on the area-preserving diffeomorphism group // J. Geom. Phys. — 2005. — V. 53, № 2. — P. 226–348.

[Pre2] Preston S. On the volumorphism group, the first conjugate point is always the hardest // Comm. Math. Phys. — 2006. — V. 267. — P. 493–513.

[Ra] Rakhimov A. Kh. Singularities of solutions of quasilinear equations // St. Petersburg Math. J. — 1992. — V. 4, № 4. — P. 217–224; Рахимов А. Х. Особенности римановых инвариантов // Функц. анализ и его прил. — 1993. — Т. 27, вып. 1. — С. 46–59.

[Ri] Ricca R. L. Rediscovery of Da Rios equations // Nature. — 1991. — V. 352. — P. 561–562.

[RiM] Ricca R. L. and Moffatt H. K. The helicity of a knotted vortex filament // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — P. 225–236.

[Riv] Riviére T. High-dimensional helicities and rigidity of linked foliations // Asian J. Math. — 2002. — V. 6, № 3. — P. 505–533.

[Rob] Roberts G. O. Dynamo action in fluid motions with two-dimensional periodicity // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. — 1972. — V. 271. — P. 411–454.

[R-S] Roberts G. O. and Soward A. M. Dynamo theory // Annual Review in Fluid Mechanics. — 1992. — V. 24. — P. 459–512.

[Rog] Roger C. Extensions centrales d'algèbres et de groups de Lie de dimension infinie, algèbre de Virasoro et généralisation // Rep. Math. Phys. — 1995. — V. 35, № 2–3. — P. 225–266.

[Roe] Roesch M. Solutions d'un probléme variationnel relaxé en mécanique des fluides parfaits incompressible // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. — 1994. — V. 318, № 9. — P. 811–816.

[Rou1] Rouchon P. On the Arnol'd stability criterion for steady-state flows of an ideal fluid // European J. Mech. B/Fluids. — 1991. — V. 10, № 6. — P. 651–661.

[Rou2] Rouchon P. The Jacobi equation, Riemannian curvature and the motion of a perfect incompressible fluid // European J. Mech. B/Fluids. — 1992. — V. 11, № 3. — P. 317–336.

[Rue] Ruelle D. Rotation numbers for diffeomorphisms and flows // Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique Théoretique). — 1985. — V. 42, № 1. — P. 109–115.

[R-T] Ruelle D. and Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. — 1971. — V. 20, № 2. — P. 167–192; Comm. Math. Phys. — 1971. — V. 23, № 3. — P. 343–344.

[Ryl] Рылов А. И. О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // ПММ. — 1992. — Т. 56, вып. 5. — С. 386–391.

[Ryt] Рытов С. М. О переходе от волновой к геометрической оптике // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 18, № 4–5. — Р. 263–266.

[S-V] Sadun L. and Vishik M. The spectrum of the second variation of the energy for an ideal incompressible fluid // Phys. Lett. A. — 1993. — V. 182, № 4–6. — P. 394–398.

[Sakh] Сахаров А. Д. — Частное сообщение.

[Sat] Sato N. Cobordisms of semi-boundary links // Topology Appl. — 1984. — V. 18, № 2–3. — P. 225–234.

[SaV] Saveliev M. V. and Vershik A. M. New examples of continuum graded Lie algebras // Phys. Lett. A. — 1990. — V. 43, № 3. — P. 121–128.

[STZ] Schonbek M. E., Todorov A. N. and Zubelli J. P. Geodesic flow on diffeomorphisms of the circle, Grassmanians, and the geometry of the periodic KdV equation // Adv. Theor. Math. Phys. — 1999. — V. 3, № 4. — P. 1027–1092.

[SchL] Schwartz L. Théorie des distributions. — Paris: Hermann, 1966.

[SchA] Schwarz A. S. The partition function of degenerate quadratic functional and Ray–Singer invariants // Lett. Math. Phys. — 1977/78. — V. 2, № 3. — P. 247–252.

[SchS] Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. — 1957. — V. 66. — P. 270–284.

[SYu] Sedenko V. I. and Yudovich V. I. Stability of steady flows of perfect incompressible fluid with a free boundary // J. Appl. Math. Mech. — 1978. — V. 42, № 6. — P. 1148–1155.

[Seg] Segal G. Unitary representations of some infinite-dimensional groups // Comm. Math. Phys. — 1981. — V. 80, № 3. — P. 301–342; The geometry of the KdV equation // Internat. J. Modern Phys. A. — 1991. — V. 6, № 16. — P. 2859–2869.

[SeW] Segal G. and Wilson G. Loop groups and equations of KdV type // Publ. Math. IHES, V. 61.. — 1985. — P. 5–65.

[Ser1] Serre D. Invariants et dégénérescence symplectique de l'équation d'Euler des fluids parfaits incompressibles // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. — 1984. — V. 298. — P. 349–352.

[Ser2] Serre D. Sur le principe variationnel des équations de la mécanique des fluides parfaits // RAIO Modél. Math. Anal. Numér. — 1993. — V. 27, № 6. — P. 739–758.

[Ser3] Serre D. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimesion trois // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A–B. — 1979. — V. 289, № 4. — P. A267–A270; Physica D. — 1984. — V. 13, № 1–2, — P. 105–136.

[Ser4] Serre D. La croissance de la vorticité dans les écoulements parfaits incompressibles // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1999. — V. 328, № 6. — P. 549–552.

[Shf] Шафаревич А. И. Поведение при $t \to \infty$ быстро убывающих асимптотических решений линеаризованных уравнений Навье–Стокса // Матем. заметки. — 1994. — Т. 55, вып. 6. — С. 124–145.

[Shf2] Шафаревич А. И. Обобщенные уравнения Прандтля–Маслова на графах, описывающие растянутые вихри в несжимаемой жидкости // Доклады РАН. — 1998. — V. 358, № 6. — P. 752–755; Asymptotic description of vortex filaments in an incompressible fluid // J. Appl. Math. Mech. — 2000. — V. 64, № 2. — P. 255–265; Localized asymptotic solutions of the Navier–Stokes equations and topological invariants of vector fields. Prandtl–Maslov equations on Reeb graphs and Fomenko invariants // Russian J. Math. Phys. — 2000. — V. 7, № 4. — P. 426–463.

[Sha] Шапиро М. З. Топология пространства невырожденных кривых // Функц. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, вып. 3. — С. 93–96; Топология пространства невырожденных кривых // Изв. РАН. Сер. матем. — 1993. — Т. 57, вып. 5. — С. 106–126.

[ShV] Шапиро Б. З., Вайнштейн А. Д. Многомерные аналоги теорем Ньютона и Айвори // Функц. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, вып. 1. — С. 20-24.

[SAF] She Z. S., Aurell E. and Frisch U. The inviscid Burgers equation with initial data of Brownian type // Comm. Math. Phys. — 1992. — V. 148, № 3. — P. 623–641.

[Shn1] Шнирельман А. И. О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости // Матем. сб. — 1985. — Т. 128, вып. 1(9). — С. 82–109.

[Shn2] Shnirelman A. Attainable diffeomorphisms // Geom. and Funct. Analysis. — 1993. — V. 3, № 3. — P. 279–294.

[Shn3] Shnirelman A. Lattice theory and flows of ideal incompressible fluid // Russ. J. Math. Phys. — 1993. — V. 1, № 1. — P. 105–114.

[Shn4] Shnirelman A. — Частное сообщение.

[Shn5] Shnirelman A. Generalized fluid flows, their approximation and applications // Geom. and Funct. Analysis. — 1994. — V. 4, № 5. — P. 586–620.

[Shn6] Shnirelman A. Evolution of singularities generalized Liapunov function and generalized integral for an ideal incompressible fluid // Amer. J. Math. — 1997. — V. 119, № 3. — P. 579–608.

[Shn7] Shnirelman A. On the non-uniqueness of weak solution of the Euler equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1997. — V. 50, № 12. — P. 1261–1286.

[Shn8] Shnirelman A. Weak solution of incompressible Euler equations with decreasing energy // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1998. — V. 326, № 3. — P. 329–334; Comm. Math. Phys. — 2000. — V. 210, № 3. — P. 541–603.

[Shn9] Shnirelman A. Diffeomorphisms, braids and flows // An introduction to the geometry and topology of fluid flows, NATO Sci. Ser. II, V. 47. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. — P. 253–270.

[Sh1] Shubin M. A. Semiclassical asymptotics on covering manifolds and Morse inequalities // Geom. Funct. Anal. — 1996. — V. 6, № 2. — P. 370–409.

[Sh2] Shubin M. A. Novikov inequalities for vector felds // The Gelfand mathem. seminars 1993–1995 (Eds. I. M. Gelfand, J. Lepovsky, M. Smirnov). — Birkhäuser, 1996. — P. 243–274.

[Shm] Шумакович А. Н. Явные формулы для странности плоской кривой // Алгебра и анализ. — 1995. — Т. 7, вып. 3. — С. 165–199.

[Sik] Sikorav J.-C. Systèmes Hamiltoniens et topologie symplectique. — Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa. ETS. Editrice Pisa, 1990.

[SLM] Simo J. C., Lewis D. R. and Marsden J. E. Stability of relative equilibria I: The reduced energy momentum method // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1991. — V. 115, № 1. — P. 15–59.

[SPM] Simo J. C., Posbergh T. A. and Marsden J. E. Stability of coupled rigid body and geometrically exact rods: block diagonalization and the energy-momentum method // Physics Reports. — 1990. — V. 193, № 6. — P. 280–360; Stability of relative equilibria II: Application to nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1991. — V. 115, № 1. — P. 61–100.

[Si1] Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 768–771.

[Si2] Sinai Ya. G. Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation // Comm. Math. Phys. — 1992. — V. 148, № 3. — P. 601–621.

[SiK] Синай Я. Г., Ханин К. М. Перемешивание некоторых классов специальных потоков над поворотом окружности // Функц. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, вып. 3. — С. 1–21.

[Smo1] Smolentsev N. K. A bi-invariant metric on the group of diffeomorphisms of a three-dimensional manifold // Sib. Math. J. — 1983. — V. 25, № 1. — P. 152–159.

[Smo2] Смоленцев Н. К. Кривизна классических групп диффеоморфизмов // Сибирский матем. журнал. — 1994. — Т. 35, вып. 1. — С. 169–176.

[Sob1] Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. — 1938. — Т. 4, вып. 3. — С. 471–496.

[Sob2] Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, вып. 1. — С. 3-50; Докл. АН СССР. — 1956. — V. 109. — P. 707; On the motion of a symmetric top with a cavity filled by a fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1960. — V. 3. — P. 20–55.

[Sow1] Soward A. M. Fast dynamo action in a steady flow // J. Fluid Mech. — 1987. — V. 180. — P. 267–295.

[Sow2] Soward A. M. An asymptotic solution of a fast dynamo in a two-dimensional pulsed flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1993. — V. 73, № 1–4. — P. 179–215.

[Squ] Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. A. — 1933. — V. 142.

[Sul] Sullivan D. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds // Invent. Math. — 1976. — V. 36. — P. 225–255.

[Tab1] Табачников С. Л. Два замечания об асимптотическом инварианте Хопфа // Функц. анализ и его прил. — 1990. — Т. 24, вып. 1. — С. 84–85.

[Tab2] Tabachnikov S. L. Invariants of smooth triple point free plane curves // J. Knot Theory Ramifications. — 1996. — V. 5, № 4. — P. 531–552.

[Tab3] Tabachnikov S. L. Projective connections, group Vey cocycle and deformation quantization // Int. Math. Res. Notices. — 1996. — V. 14. — P. 705–722.

[Tar] Tartar L. — Personal communication to D. Serre see [Ser1].

[Tay] Taylor J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reversed magnetic field // Phys. Rev. Lett. — 1974. — V. 33. — P. 1139.

[Tem] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics // Appl. Math. Sci. 68. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[Th1] Thurston W. P. Noncobordant foliation of S^3 // Bull. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 78. — P. 511–514; Foliations and groups of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 80. — P. 304–307.

[Th2] Thurston W. P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hypebolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 6, № 3. — P. 357–381.

[Tod] Todorov A. N. — Частное сообщение.

[T-F] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли // Современные пробл. математики. Фундамен-

тальные направления. Т. 16. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 227–299.

[Tro] Трошкин О. В. О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // Успехи матем. наук. — 1988. — Т. 43, вып. 4. — С. 129–158; Troshkin O. V. Nontraditional methods in mathematical hydrodynamics // Transl. Math. Monogr., V. 144. — Providence, RI: AMS. — P. 197.

[Tu1] Turaev V. G. Milnor invariants and Massey products // Zap. Semin. LOMI. — 1976. — V. 66. — P. 189–203, 209–210; English transl.: J. Sov. Math. — 1979. — P. 128–137.

[Tu2] Turaev V. G. Quantum invariants of knots and 3-manifolds. — Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994. (De Gruyter Studies in Math. 18.)

[Tur] Turski L. A. Hydrodynamical description of the continuous Heisenberg chain // Canad. J. Phys. — 1981. — V. 59, № 4. — P. 511–514.

[Vai] Vainshtein S. I. Force-free magnetic fields with constant alpha // Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds. Moffatt H. K. et al.). — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — P. 177–193.

[V-Z] Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо») // Успехи физ. наук. 1972. — Т. 106, вып. 3. — С. 431–457.

[V-K] Vakulenko A. F. and Kapitansky L. V. Stability of solutions in S^2 in the nonlinear σ-model // Sov. Phys. Dokl. — 1979. — V. 246, № 4. — P. 433–434.

[Var] Varopoulos N. Th. Brownian motion can see a knot // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1985. — V. 97. — P. 299–309.

[VasO] Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. — М.-Л.: Госэнергоиздат. — 1958.

[VasV] Vassiliev V. A. Cohomology of knot spaces // Adv. Soviet Math., V. 1. — Providence, RI: AMS, 1990. — P. 23–69.

[V-F] Verjovsky A. and Freyer R. F. V. The Jones–Witten invariant for flows on a three-dimensional manifold // Comm. Math. Phys. — 1994. — V. 163, № 1. — P. 73–88.

[Ver] Вершик А. М. Многозначные обображения с инвариантной мерой и операторы Маркова // Записки ЛОМИ. — 1977. — Т. 72. — С. 121–160.

[Vil] Villani C. Topics in optimal transportation // Graduate Studies in Mathematics, V. 58. — Providence, Ri: AMS, 2003.

[Vir] Viro O. Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real algebraic curves // Topology of real algebraic varieties and related topics. — Providence, RI: AMS, 1996. (Transl. AMS. Ser. 2, V. 173). — P. 231–252.

[VshM] Vishik M. M. Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1989. — V. 48, № 1–3. — P. 151–167.

[VshS] Vishik S. M. Euler hydrodynamic equation on the two-dimensional sphere and the dodecahedron group symmetries // Izv. Russ. Acad. Sci. Atmosfer. Okean. — 1994. — V. 29, № 4. — P. 456–462.

[V-D] Вишик С. М., Должанский Ф. В. Аналоги уравнений Эйле-

ра–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 1032–1035.

[Vit] Viterbo C. Symplectic topology as the geometry of generating functions // Math. Ann. — 1992. — V. 292, № 4. — P. 685–710.

[Vla1] Vladimirov V. A. Integrals of two-dimensional motions of a perfect incompressible fluid of nonuniform density // Fluid Dynamics. — 1987. — V. 22, № 3. — P. 340–343.

[Vla2] Vladimirov V. A. On the instability of equilibrium of fluids // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1989. — V. 30, № 2. — P. 269–276; Lyapunov's direct method in problems of fluid equilibrium instability // Arch. Mech. — 1990. — V. 42, № 4–5. — P. 595–607.

[Vla3] Vladimirov V. A. Analogue of the hydrodynamics of whirling and stratified liquids and its application to stability theory // Methods of hydroscopical studies. Waves and vortices (in Russian). — Gorky, 1985. — P. 76–90.

[VlB] Vladimirov V. A. and Belov S. Ya. The example of conversion of the Lagrange theorem in two-layer liquid // Dynamics of Continuous Media, Lavrentyev Institute for Hydrodynamics Press. — 1988. — V. 84. — P. 21–27; The examples of inversion of the Lagrange theorem in hydrodynamics // GAKUTO Internat. Series, Math. Science and Appl. — 1993. — V. 1. — P. 611–622.

[VlI] Владимиров В. А., Ильин К. И. Устойчивость тела в вихревом потоке идеальной жидкости // Прикл. матем. и теор. физики. — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 84–92; On the stability of a dynamical system «rigid body+inviscid fluid». Part I. Variational Principles // J. Fluid Mech. — 1999. — V. 386. — P. 43–75; On Arnold's variational principles in fluid mechanics // Proceedings of the Arnoldfest, Communications of the Fields Institute (Ed. E. Beirstone et al.), V. 24. — 1999. — P. 471–495.

[VlM] Vladimirov V. A. and Moffatt H. K. On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Part I. Fundamental principles // J. Fluid Mech. — 1995. — V. 283. — P. 125–139.

[VMI] Vladimirov V. A., Moffat H. K. and Ilin K. I. On general principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Part II. Stability criteria for two-dimensional flows // J. Fluid Mech. — 1996. — V. 329. — P. 187–205.

[Vld] Владимирский В. В. // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 31, № 3. — С. 222–225.

[Vog] Vogel T. On the asymptotic linking number // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — V. 131, № 7. — P. 2289–2297.

[Vor] Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 2. — С. 21–29.

[War] Ward R. S. Infinite-dimensional gauge groups and special nonlinear gravitons // J. Geometry and Physics. — 1992. — V. 8, № 1–4. — P. 317–325.

[We] Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // J. Diff. Geometry. — 1983. — V. 18, № 3. — P. 523–557; J. Diff. Geometry. — 1985. — V. 22, № 2. — P. 255.

[Wh] White J. H. Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions // Amer. J. Math. — 1969. — V. 91. — P. 693–728.

[Wit1] Witten E. Supersymmetry and Morse theory // J. Diff. Geom. — 1982. — V. 17, № 4. — P. 661–692.

[Wit2] Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial // Comm. Math. Phys. — 1989. — V. 121, № 3. — P. 351–399.

[Wit3] Witten E. Chern-Simons gauge theory as a string theory // The Floer memorial volume. — Basel: Birkhäuser, 1995. (Progr. in Math., V. 133). — P. 637–678.

[W-G] Wolansky G. and Ghil M. An extension of Arnold second stability theorem for the Euler equations // Physica D. — 1996. — V. 94, № 4. — P. 161–167.

[Wol] Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1958. — V. 44. — P. 489–491.

[Yo] Yoshida K. Riemannian curvature on the group of area-preserving diffeomorphisms (motions of fluid) on 2-sphere // Phys. D. — 1997. — V. 100, № 3–4. — P. 377–389.

[Yu1] Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3. — С. 1032–1066.

[Yu2] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Матем. заметки. — 1991. — Т. 49, вып. 5. — С. 142–148; Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. — 1995. — V. 5, № 2. — P. 402–411; On the bifurcation in the creation of a cycle from a family of equilibria of a dynamical system and its delay // J. Appl. Math. Mech. — 1998. — V. 62, № 1. — P. 19–29; Cosymmetry and dynamical systems // Proc. of the Third Int. Congress on Indust. and Appl. Math., Hamburg, July 1995, ZAMM. — 1996. — P. 556–559; The cosymmetric version of the implicit function theorem // Linear Topol. Spaces Complex Analysis. — 1995. — V. 2. — P. 105–125; Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Матем. заметки. — 1996. — Т. 60, № 2. — С. 313–317.

[Yu3] Yudovich V. I. Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid // Math. Res. Letters. — 1995. — V. 2. — P. 27–38;

[Yu4] Yudovich V. I. Secondary flows and fluid instability between rotating cylinders // J. Appl. Math. Mech. — 1966. — V. 30. — P. 822–833.

[Yu5] Yudovich V. I. On the gradual loss of smoothness and instability that are intrinsic to flows of an ideal fluid // Dokl. Phys. — 2000. — V. 45, № 2. — P. 88–91; On the loss of smoothness of the solutions of the Euler equations and the inherent instability of flows of an ideal fluid // Chaos. — 2000. — V. 10, № 3. — P. 705–719.

[Yur] Юркин М. Ю. О конечномерности задачи о малых колебаниях волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью // Функц. анализ и его прил. — 1997. — Т. 31, вып. 1. — С. 51–66.

[Zak] Захаров В. Е. Об алгебре интегралов движения двумерной гидродинамики в переменных Клебша // Функц. анализ и его прил. — 1989. — Т. 23, вып. 3. — С. 24–31.

[Zel] Zeitlin V. Finite-mode analogs of $2D$ ideal hydrodynamics: Coadjoint orbits and local canonical structure // Physica D. — 1991. — V. 49, № 3. — P. 353–362.

[Ze2] Zeitlin V. On the structure of phase-space, Hamiltonian variables and statistical approach to the description of two-dimensional hydrodynamics and magnetohydrodynamics // J. Phys. A. — 1992. — V. 25, № 4. — P. L171–L175.

[ZeK] Zeitlin V. and Kambe T. Two-dimensional ideal magnetohydrodynamics and differential geometry // J. Phys. A. — 1993. — V. 26, № 19. — P. 5025–5031.

[Zel1] Зельдович Я. Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении // Журнал эксп. и теор. физики. — 1956. — Т. 31. — С. 154.

[Zel2] Зельдович Я. Б. Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная. — М.: Наука, 1985.

[Z-R] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Проблемы динамо в астрофизике // Итоги науки. Астрономия. Т. 21. — М.: ВИНИТИ, 1982. — С. 151–187.

[ZRS] Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. and Sokolov D. Magnetic fields in astrophysics. — Gordon Breach, 1983. [Имеется перев.: Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. — Ижевск: ИКИ, 2007.]

[ZBM] Zenkov D. V., Bloch A. M. and Marsden J. E. The energy momentum method for the stability of nonholonomic systems // Dynam. Stab. Syst. — 1998. — V. 13, № 2. — P. 123–165.

[Zhel] Zheligovsky V. A. Numerical solution of the kinematic dynamo problem for Beltrami flows in a sphere // J. Sci. Comput. — 1993. — V. 8, № 1. — P. 41–68.

[Zig1] Ziglin S. L. The nonintegrability of the problem on the motion of four vortices of finite strengths // appendix to [Kha], Physica D. — 1982. — V. 4, № 2. — P. 268–269.

[Zig2] Ziglin S. L. Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 1088–1103; Зиглин С. Л. О неинтегрируемости ABC-течения при $A = B$ // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, вып. 2. — С. 80–81; On the absence of a real analytic first integral for the ABC-flow in the case $A = B$ // Chaos. — 1998. — V. 8, № 1. — P. 272–273; Аналитическое доказательство неинтегрируемости ABC-течения при $A = B = C$ // Функц. анализ и его прил. — 2003. — Т. 37, вып. 3. — С. 77–80.

[Zor] Зорич А. В. Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному // УМН. — 1984. — Т. 39, вып. 5. — С. 235–236; Квазипериодическая структура поверхностей уровня морсовской 1-формы, близкой к рациональной — задача С. П. Новикова // Изв. РАН. Сер. матем. — 1987. — Т. 51, № 6. — Р. 1322–1344.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

L^p-метрика 257
f-энергия 176

Абстрактная алгебра Ли 19
Автоморфизм внутренний 15
Алгебра Вирасоро 314
— Ли 15, 18
— — бездивергентных векторных полей 18, 24, 30
— — петель 344
Антипредставление 22
Аттрактор странный 76

Вариация геодезической 213
Вектор волновой 222
— углового момента 27
— угловой скорости 27
Вектор-потенциал 138
Векторное поле Хопфа 136
Вес особый 177
Вихрь векторного поля 57
Вращение твердое 226
Вязкость магнитная 271

Гамильтониан расширенный 108
Геодезическая 210
Гипотезы Колмогорова 76
Голономия связности асимптотическая 200
— — средняя 200
Группа 13
— Вирасоро 225, 315
— Ли 13
— — диффеоморфизмов 13, 14
— — диффеоморфизмов точных 25, 46
— петель 344
— симплектоморфизмов 255

Действие на группе диффеоморфизмов 242
Диаметр группы диффеоморфизмов 237
— — симплектоморфизмов 257
Дивергенция векторного поля 138
Динамо кинематическое 272
— среднее 282
Диффеоморфизм достижимый 238
— симплектический гамильтонов 255
— точный 46
Дифференциал локальный 187

Жидкость баротропная 329

Зацепление асимптотическое 183
— сателлитное 168
— среднее 183
— существенное 145
— топологическое 180
— тривиальное 145

Инвариант зацепления 188
— — Джонса–Виттена 199
— — комплексный 197
— Калаби 259, 262
— узла 337
— Хопфа 134, 140
Индекс Морса 128
Интеграл гамильтоновой системы первый 318
— Дирихле 89
— зацепления третьего порядка 188
— Калаби 262

Класс вращения векторного поля 47
— Годбийона–Вея 204
Коммутант алгебры Ли 46
— группы 46
Коммутатор 18
Комплекс когомологический алгебры Ли 327
Координаты эллиптические 353
Коцикл Гельфанда–Фукса 315
— на алгебре Ли 315
Коэффициент верчения 191
— зацепления 143
— — асимптотический 153
— — голоморфный 194
— — Милнора 189
— — средний 154, 184
— мультизацепления 184
— пересечения асимптотический 169
— самозацепления инфинитезимальный 181
— скручивания 191
— туннельный 290
Кривизна Риччи 212
— — нормализованная 212, 228

Кривизна секционная 212
— скалярная 212

Лист симплектический 39

Магнитное расширение 63, 64
Метод сдвига аргумента 321
Метрика левоинвариантная 26
— на группе диффеоморфизмов 237
— правоинвариантная 31
Многообразие пуассоново 38
— симплектическое 255
Модуль полнотория конформный 172
Момент угловой 27
Мультитечение 248

Оператор инерции 26, 27, 48
— присоединенный 16
Орбита коприсоединенная, не допускающая дополнительных симметрий 127
— присоединенная 19, 22
Отображение Аносова 277

Пара пуассонова 320
Переменные симплектические 334
Перенос параллельный 210
Плоскость Лобачевского 209
Плотность гомеоидная 351
Поверхность Зейферта 169
Подкова Смейла 280
Подмногообразие вполне геодезическое 221
— лагранжево 266
Подмножество полуаналитическое 85
Показатель Ляпунова 279
— роста комплексный 272
Поле Бельтрами 82
— бессиловое 82
— векторное вихря 58
— — изозавихренное 92
— — с функцией тока 23
— — точное 46
— —, гомологичное нулю 138
— —, левоинвариантное 19
— —, правоинвариантное 19
— —, смоделированное по зацеплению 145
— — — — сильно 145
— вихря 31, 33
— гамильтоново 38
— скоростей эйлерово 31
Полиморфизм 93
Поток геодезический 305
— де Рама 339
— жидкости стационарный 80
— орициклический 306
Представление коприсоединенное 22, 23
— присоединенное 16, 19
Преобразование Мёбиуса 174
— Хасимото 343
Проводимость бесконечная 335
Произведение внутреннее 23, 43
Производная вариационная 50, 324
— внешняя 43
— ковариантная 211
— Ли 17, 44, 51
Пространство конфигурационное идеальной жидкости 43
Псевдометрика на группе гамильтоновых диффеоморфизмов 264

Расстояние стандартное между диффеоморфизмами 237
Расширение алгебры Ли нетривиальное 315
— — — тривиальное 315
Решение Гиббса 289
Род узла 169

Семейство квадрик конфокальное 351
Сила непотенциальная 127
Симплектическое многообразие точное 256
Синус-алгебра 74
Система гамильтонова вполне интегрируемая 319
Скалярное произведение векторных полей 48
Скобка Пуассона векторных полей 17
— — постоянная 322
Скорость угловая 16
Слоение ядер 183
Спиральность векторного поля 134, 138
— перекрестная 67
Структура гамильтонова уравнения КдФ 323, 324
— Ли–Пуассона 38
— пуассонова 37
— симплектическая Марсдена–Вайнштейна 337
Схема Ленарда 321

Тензор кривизны 212
Теорема Гаусса 157
— Гельмгольца 32
— об инвариантности спиральности 135
— Сквайра 115
— спиральности 154
— устойчивости 103
— Эйлера 28
Течение дискретное 245
— обобщенное 247
Тип морсовский 128
Точка гомоклиническая 279
— слоения регулярная 96

Точка сопряженная 235
— страта Максвелла 253
— устойчивая по Ляпунову 96
Траектория хаотическая 122

Узлы эквивалентные 337
Уравнение Кортевега–де Фриза 316
— кинематического динамо 271
— Ландау–Лифшица 344, 345
— Навье–Стокса 75
— нити 343
— Соболева 346
— Фоккера–Планка 289
— Шредингера нелинейное 343
— Эйлера в форме Гельмгольца 111
— — идеальной гидродинамики 31
— — идеальной жидкости 42
— — обобщенное 49
— — стационарное 80
— Эйлера–Гельмгольца 31, 32
— Якоби 213
Уравнения идеальной магнитной гидродинамики 61
— Кирхгофа 62
— Эйлера 28

Форма билинейная на алгебре Ли бездивергентных полей 141
— вихря 33
— зацепления Гаусса–де Рама 160
— Калаби 262
— квадратичная сопряженная 40
— Кириллова 36
— стационарная 288
Форма фундаментальная вторая 231
— — симметричная 232
Форма-вычет 193
Форма-потенциал 138
Формула гомотопии 44
— Маурера–Картана 326
Функционал голономии 203
— Джонса–Виттена 201
— длины кривой 342
— узла 338
— Черна–Саймонса 202
Функция g-инвариантная 176
— Бернулли 81
— вихря 57
— Гамильтона 36
— Морса 127
— плотности локальная 60
— тока 21
— энергии 48
—, не допускающая дополнительных симметрий 125

Число Лефшеца 285
— над-пересечений 168
— пересечений 165
— — асимптотическое 165, 166
— — среднее 166
— — узла 168
— Рейнольдса магнитное 271

Энергия векторного поля 87, 132
— кривой 173
— смещения 265
Энтропия топологическая 311

Топологическая гидродинамика — это молодой раздел математики, в котором изучаются топологические свойства потоков со сложными траекториями, а также приложения этих свойств к исследованию движения жидкостей. Топологическая гидродинамика связана с теорией гидродинамической устойчивости, римановой и симплектической геометриями, магнитогидродинамикой, теорией групп и алгебр Ли, теорией узлов и динамическими системами. Приложения этой теории включают в себя гидродинамику, описание уравнения Кортевега—де Фриза как геодезического потока и результаты о римановой геометрии групп диффеоморфизмов (объясняющие, в частности, почему долгосрочные прогнозы погоды не могут быть надежными).

Перед вами первая монография, в которой топологические, теоретико-групповые и геометрические задачи идеальной гидродинамики и магнитогидродинамики рассматриваются с единой точки зрения. Необходимый подготовительный материал из гидродинамики и чистой математики излагается с большим количеством примеров и рисунков. Книга предназначена для аспирантов и специалистов по чистой или прикладной математике, работающих в таких областях, как гидродинамика, группы Ли, динамические системы и дифференциальная геометрия.

ISBN 978-5-94057-312-8

9 785940 573128

интернет-
OZON
68345110