А.К.Боярчук, Г.П.Головач

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Справочное пособие по высшей математике. Т. 5
М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 384 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 5 охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики. Наряду с минимальными теоретическими сведениями в нем содержится более семисот детально разобранных примеров. Среди вопросов, нестандартных для такого рода пособий, следует отметить примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Оглавление

Предисловие 3
Введение 4
Основные понятия. Составление дифференциальных уравнений 4
Основные определения (4) Задача Коши (4) Построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых (5) Примеры (5)
Упражнения для самостоятельной работы 10
Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка 11
§ 1. Уравнения с разделяющимися переменными 11
Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (11) Разделение переменных линейной заменой аргумента (11) Примеры (11)
§2. Геометрические и физические задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными 15
Использование геометрического смысла производной (15) Использование физического смысла производной (15) Примеры (15)
§ 3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним 29
Однородное уравнение (29) Уравнение, сводимое к однородному (30) Обобщенно-однородное уравнение (30) Примеры (30)
§ 4. Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним 39
Линейное уравнение первого порядка (39) Обмен ролями между

функцией и аргументом (39) Уравнения, приводимые к линейным (39) Уравнение Миндинга — Дарбу (40) Примеры (40)
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 53
Уравнение в полных дифференциалах (53) Интегрирующий множитель (53) Дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя (54) Примеры (54)
§ 6. Уравнение Эйлера — Риккати 67
Уравнение Эйлера — Риккати. Специальное уравнение Риккати (67) Каноническое уравнение Эйлера — Риккати (67) Примеры (67)
§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной 73
Уравнение, не разрешенное относительно производной (73) Общий интеграл уравнения $F(y')=0$ (73) Представление решения в параметрической форме. Разрешение неполных уравнений (73) Примеры (74)
§ 8. Существование и единственность решения 82
Теоремы Пикара, Пеано и Осгуда (82) Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной (82) Продолжение решения задачи Коши (82) Существование и единственность решения векторной задачи Коши (83) Примеры (83)
§ 9. Особые решения 99
Особое решение. Дискриминантная кривая (99) Огибающая как особое решение (100) Примеры (100)
§ 10. Задачи на траектории 106
Изогональные и ортогональные траектории (106) Эволюта и эвольвента (106) Примеры (107)
Упражнения для самостоятельной работы 112
Глава 2. Дифференциальные уравнения высших порядков 114
§ 1. Виды интегрируемых нелинейных уравнений 114
Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$ (114)
Дифференциальное уравнение вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (114)
Дифференциальное уравнение вида $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ (114) Примеры (115)
§ 2. Уравнения, допускающие понижение порядка 122
Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ (122)
Дифференциальное уравнение вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (122)
Однородное дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (122) Обобщенное однородное дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (122) Уравнение, приводимое к виду $(\varphi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}))' = 0$ (123) Примеры (123)
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными 135

коэффициентами
Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение (135) Поиск частного решения линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов (136) Метод вариации произвольных постоянных (136) Метод Коши нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (137) Примеры (137)
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами 150
Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейно зависимые функции. Определитель Вронского (150) Критерий линейной независимости функций (151) Фундаментальная система решений (151) Формула Остроградского — Лиувилля (151) Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (151) Уравнение Эйлера. Уравнение Чебышева (152) Дифференциальные уравнения второго порядка (152) Связь между линейным дифференциальным уравнением второго порядка и уравнением Эйлера — Риккати (152) Сведение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами (153) Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений второго порядка (153) Примеры (153)
§ 5. Краевые задачи 169
Определение краевой задачи (169) Функция Грина краевой задачи (170) Задача Штурма — Лиувилля (170) Условие эквивалентности краевой задачи интегральному уравнению (170) Примеры (170)
Упражнения для самостоятельной работы 180
Глава 3. Системы дифференциальных уравнений 182
§ 1. Линейные системы 182
Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная матрица уравнения. Определитель Вронского (182) Метод вариации произвольного вектора (183) Матрицант (183) Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (184) Примеры (184)
§ 2. Нелинейные системы 200
Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения (200) Подбор интегрируемых комбинаций (201) Примеры (201)
Упражнения для самостоятельной работы 211
Глава 4. Уравнения в частных производных первого порядка 212

§ 1. Линейные и квазилинейные уравнения 212
Основные понятия (212) Решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка (212) Задача Коши (272) Уравнение Пфаффа (213) Примеры (213)
§ 2. Нелинейные уравнения первого порядка 228
Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка (228) Решение задачи о нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую (228) Метод Коши (229) Обобщение метода Коши (229) Примеры (229)
Упражнения для самостоятельной работы 239
Глава 5. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений 240
§ 1. Зависимость решения от начальных условий и параметров 240
Об оценке погрешности приближенного решения (240) Об отыскании производных от решений по параметру (240) Примеры (241)
§2. Аналитические приближенные методы 246
Метод степенных рядов (246) Метод малого параметра (247) Примеры (247)
§ 3. Численные методы решения дифференциальных уравнений 266
Метод Эйлера k-го порядка (266) Метод Рунге — Кутта 4-го порядка (267) Метод Штермера (267) Примеры (267)
Упражнения для самостоятельной работы 273
Глава 6. Устойчивость и фазовые траектории 274
§ 1. Устойчивость 274
Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость (274) Исследование на устойчивость по первому приближению: первая теорема Ляпунова (274) Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова: вторая теорема Ляпунова (275) Условия отрицательности всех действительных частей корней уравнения $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$, с действительными коэффициентами (275) Примеры (276)
§ 2. Особые точки 292
Определение особых точек и их классификация (292) Практические приемы исследования особых точек (293) Примеры (294)
§ 3. Фазовая плоскость 305
Основные понятия (305) Построение фазового портрета (305) Предельные циклы (306) Признаки отсутствия предельных циклов (306) Признаки наличия предельных циклов (306) Примеры (307)
Упражнения для самостоятельной работы 322
Глава 7. Метод интегральных преобразований Лапласа решения линейных дифференциальных уравнений 323
§ 1. Преобразование Лапласа. Основные понятия и свойства 323
Оригинал и изображение (323) Свойства преобразования Лапласа

(324) Примеры (325)
§ 2. Свертка функций. Теоремы разложения 336
Определение свертки (336) Теорема умножения (Э. Бореля) (336) Обобщенная теорема умножения (А. М. Эфроса) (336) Формулы Дюамеля (337) Примеры (337)
§3. Обратное преобразование Лапласа 339
Формула обращения Римана — Меллина (339) Сведения из теории функций комплексного переменного (340) Теоремы разложения (341) Примеры (342)
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы 346
Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами (346) Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (347) Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля (347) Примеры (347)
§ 5. Интегральные уравнения типа свертки. Особые уравнения 357
Интегральные уравнения типа свертки (357) Интегральные уравнения второго рода (358) Интегральные уравнения первого рода (359) Особые интегральные уравнения. Интегральное уравнение Абеля (359) Примеры (360)
§ 6. Применение операционного исчисления к решению уравнений с частными производными 366
Примеры (367)
Упражнения для самостоятельной работы 370
Ответы 372
Предметный указатель 377

Предметный указатель

Настоящий предметный указатель призван облегчить поиск терминов по алфавитному признаку. Для поиска терминов по тематическому признаку пользуйтесь подробно составленным оглавлением.

В указателе, как правило, приводятся ссылки только на страницу, содержащую определение термина; составитель указателя не ставил своей целью отследить все упоминания приведенных терминов в тексте. Исключение составляют термины, описывающие методы, приемы, практические результаты: для них в некоторых случаях после номеров страниц курсивом указаны также задачи, в которых они используются существенным образом.

С целью уменьшения громоздкости указателя вместо термина "дифференциальное(ые) уравнение(я)" применяется сокращение "д. у.".

А
Абеля
— уравнение интегральное, 359
— — формула, 159, 363, 364
астроида, 111
Б
Бендиксона признак отсутствия предельных циклов, 306, 672, 675
Бернулли уравнение, 39, 115, 97, 99, 101, 103, 106, 168, 265, 447
Бихари лемма, 83, 201, 202
Бореля теорема умножения, 336, 711-715, 719, 720, 740, 752, 753, 762
В
вид канонический линейного д. у. 2-го порядка, 152

Вольтерра уравнение интегральное
— 1-го рода, 358
— 2-го рода, 358
— особое, 359
Вронского
— матрица, 182
— определитель, 151, 183
вычет функции, 340
Г
Гессе
— прием, 208, 460-462
— система, 208
гипербола вырожденная, 18
Грина функция краевой задачи, 170, 393-406
Гурвица матрица, 275, 616-619, 621, 622, 624-627
Д
Дюамеля
— интегралы, 337
— формулы, 337, 347, 721, 742-744, 766
З
задача
— Коши, 4
— — векторная, 83
— краевая, 169
— — нестационарная, 367
— Штурма—Лиувилля, 170
— —, собственные значения, 170
— —, собственные функции, 170
значения собственные задачи Штурма—Лиувилля, 170
И
инвариант линейного д. у. 2-го порядка, 152
интеграл
— вероятности, 338, 715-718, 724, 733
— полный, 228
— системы д. у. первый, 201
интегралы
— Дюамеля, 337
— независимые, 201
интегрируемая комбинация, 201
интегрирующий множитель, 53
К
канонический вид линейного д. у. 2-го порядка, 152
Клеро уравнение, 78, 191, 194
косинус-интеграл Френеля, 334, 707, 712, 713, 763
Коши
— задача,4
— — векторная, 83
— метод
— — отыскания интегральной поверхности, 229, 519—521
— —, обобщение, 229, 522-524
— отыскания частного решения неоднородного д. у., 137
— формула о вычетах, 341
краевая задача, 169
— нестационарная, 367
кривая дискриминантная, 99
критерий
— линейной независимости функций, 151
— Льенара—Шипара, 276, 618, 619, 626-628
— Михайлова, 276, 620, 621, 623
— Рауса—Гурвица, 276, 616, 617, 621, 625
Л
Лагранжа
— уравнение, 78, 192, 193
— — второго рода, 438-440, 629, 630, 750
— функция, 582, 629, 630
Лагранжа—Шарли метод, 228, 504, 517
Лапласа преобразование, 324
—, линейность, 324, 686, 688, 710, 734
—, однородность, 324
Левинсона—Смита теорема о наличии предельных циклов, 306, 676
лемма Бихари, 83, 201, 202
Липшица условие, 82, 240
Лиувилля преобразование, 165, 381—387

Лорана ряд, 340
—, главная часть, 340
—, правильная часть, 340
Льенара—Шипара критерий, 276, 618, 619, 626-628
Ляпунова
— теорема
— — вторая, 275, 606-609, 611, 615
— — первая (об устойчивости по первому приближению), 274-275, 589-593, 595, 598-600, 602, 615, 630
— функция, 275, 606-615, 630
М
матрица
— векторного д. у.
— — интегральная, 182
— — фундаментальная, 182
— Вронского, 182
— Гурвица, 275, 616-619, 621, 622, 624-627
матрицант, 183
метод
— вариации
— — произвольного вектора, 183, 429—431
— — произвольных постоянных, 39, 136, 151, 87-89, 91-93, 97, 108, 325, 326, 331, 342, 360, 431
— исключения, 200, 408-420, 431, 435, 442, 449-451, 453, 454
— Коши
— — отыскания интегральной поверхности, 229, 519—521
— — —, обобщение, 229, 522-524
— — отыскания частного решения неоднородного д. у., 137
— Лагранжа—Шарпи, 228, 504, 517
— малого параметра, 247, 559—566, 568
— неопределенных коэффициентов, 136, 141, 315—324, 328, 329, 410, 432
— подбора интегрируемых комбинаций, 201, 443-448
— последовательных приближений, Ш
— разбиения данного уравнения на две части, 53, 149, 154-156, 15S-160
— Рунге—Кутта численного решения д.у., 267, 572—575
— степенных рядов, 246-247, 537-555, 576, 577
— Штермера численного решения д.у., 267, 575—577
— Эйлера
— — отыскания общего решения неоднородной системы д.у., 184, 420-429, 433, 437, 439
— — численного решения д. у., 266, 569—571
Миндинга—Дарбу уравнение, 40, 106-109
Михайлова критерий, 276, 620, 621, 623
множитель интегрирующий, 53
О
определитель Вронского, 151, 183
Осгуда теорема, 82
Остроградского—Лиувилля формула, 151, 362, 363
П
Пеано теорема, 82
Пикара теорема, 82, 199-204, 207
плоскость фазовая, 305
показатель роста функции, 323
полюс, 340
порядок полюса, 340
преобразование
— Лапласа, 324
——, линейность, 324, 686, 688, 710, 734
——, однородность, 324
— Лиувилля, 165, 381-387
прием Гессе, 208, 460-462
признак отсутствия предельных циклов
— Бендиксона, 306, 672, 675
— Пуанкаре, 306, 673, 678
пространство фазовое, 305

Пуанкаре признак отсутствия предельных циклов, 306, 673, 678
Пфаффа уравнение, 213, 233, 491-500, 503, 505-508, 511, 517
Р
Рауса—Гурвица критерий, 276, 676, 6/7, 621, 625
Рейссига теорема о наличии предельных циклов, 306—307, 677
решение
—-дифференциального уравнения
— — изолированное, 105
— — особое, 99
— задачи Коши
— — общее, 4
— — частное, 4
— неустойчивое в смысле Ляпунова, 274
— — обыкновенного д. у. *n* -го порядка, 4
— устойчивое
— — асимптотически, 274
— — по Ляпунову, 274
Риккати уравнение специальное, 67, 70—71, 164—167, 169-171
Романа—Мемина формула обращения, 339-340
Рунге—Кутта метод численного решения д. у., 267, 572—575
ряд
— Лорана, 340
——, главная часть, 340
——, правильная часть, 340
— Фурье, 556-55S, 728
С
самосопряженная форма линейного д. у. 2-го порядка, 152
седло,293 синус интегральный, 335
— гиперболический, 335
синус-интеграл Френеля, 334, 707, 712, 713, 763
система
— Гессе, 208
— линейных д. у.
— — автономная, 305
— — неоднородная, 182, 184
— — нормальная, 200
— — однородная, 182
— решений однородного д. у. фундаментальная, 151
скорость фазовая, 305
Т
теорема
— запаздывания, 324, 689, 739, 741, 768
— Левинсона—Смита о наличии предельных циклов, 306, 676
— Ляпунова
— — вторая, 275, 606-609, 611, 615
— — первая (об устойчивости по первому приближению), 274-275, 5*9-595, 595, 598-600, 602, 615, 630
— о дифференцировании
— — изображения преобразования Лапласа, 325, 704—706, 723, 749
— — оригинала преобразования Лапласа, 324, 700—702, 740
— о линейности преобразования Лапласа, 324, 686, 688, 710, 734
— о предельных соотношениях, 325
— о существовании и единственности решения задачи Коши, 82
— об интегрировании
— — изображения преобразования Лапласа, 325, 708—710, 732
— — оригинала преобразования Лапласа, 325, 707, 708, 718, 724, 733, 742
— об однородности преобразования Лапласа, 324
— опережения, 324
— Осгуда, 82
— Пеано, 82
— Пикара, 82, 199-204, 207
— подобия, 324, 6*7, 6*9, 765
— разложения

— — вторая, 342, 725, 727, 728, 736, 738, 739, 741, 743-745, 747, 750, 751, 767
— — первая, 341, 729
— Рейссига о наличии предельных циклов, 306—307, 677
— смещения, 324, 699, 7У5, 734
— умножения
— — обобщенная А. М. Эфроса, 336, 764
— — Э.Бореля, 336, 711-715, 719, 720, 740, 752, 753, 762
— Четаева о неустойчивости, 275, 612—614
точка
— разветвления многозначной функции, 342
— системы двух д. у. первого порядка особая, 293
— функции особая
— — однозначного характера, 340
— — устранимая, 340
— функции существенно особая, 340
траектории
— изогональные, 106
— на фазовой плоскости. 305
— ортогональные, 106
У
узел, 293
— вырожденный, 293
— дикритический, 293
уравнение
— Бернулли, 39, 115, 97, 99, 101, 103, 106, 168, 265, 447
— в частных производных
— — гиперболического типа, 366
— — квазилинейное 1-го порядка, 212
— — нелинейное 1-го порядка, 228
— — параболического типа, 366
— дифференциальное
— — *n*-го порядка, 4
— — — каноническое, 4
— — в полных дифференциалах, 53
— — для интегрирующего множителя, 54
— — линейное
— — — 1-го порядка, 39
— — — 2-го порядка, 152
— — — —, инвариант, 152
— — — —, канонический вид, 152
— — — —, самосопряженная форма, 152
— — — *n*-го порядка, 135, 150
— — — — неоднородное, 135
— — — — однородное, 135
— — не разрешенное относительно производной, 73
— — обобщенно-однородное, 30, 122
— — однородное, 29
— — однородное относительно функции и ее производных, 122
— — с разделяющимися переменными, 11
— интегральное
— — Абеля, 359
— — Вольтерра линейное
— — — 1-го рода, 358
— — — 2-го рода, 358
— — — особое, 359
— — Фредгольма
— — — 1-го рода, 357
— — — 2-го рода, 357
— — — однородное, 357
— — — особое, 359
— Клеро, 78, 191, 194
— Лагранжа, 78, 192, 193
— — второго рода, 438-440, 629, 630, 750
— Миндинга—Дарбу, 40, 106-109
— Пфаффа, 213, 233, 491-500, 503, 505-508, 511, 517
— Риккати специальное, 67, 70-71, 164-167, 169-171
— характеристическое, 136, 184
— Чебышева, 152
— Эйлера, 152, 371, 372, 39J
— Эйлера—Риккати, 67, 152, 163, 282
— — каноническое, 67, 172

условие Липшица, 82, 240
Ф
фокус, 293
форма
— векторная системы линейных д. у., 182
— самосопряженная линейного д. у. 2-го порядка, 152
— симметрическая нормальной системы д. у., 201
формула
— Абеля, 159, 363, 364
— Коши о вычетах, 341
— обращения Римана—Меллина, 339—340
— Остроградского—Лиувилля, 151, 362, 363
— Циолковского, 29
формулы Дюамеля, 337, 347, 721, 742-744, 766
Фредгольма уравнение интегральное линейное
— 1-го рода, 357
— 2-го рода, 357
— однородное, 357
— особое, 359
Френеля
— косинус-интеграл, 334, 707, 712, 713, 763
— синус-интеграл, 334, 707, 712, 713, 763
фундаментальная матрица векторного д. у., 182
фундаментальная система решений однородного д. у., 151
функции
— линейно зависимые, 151
— линейно независимые, 151
— собственные задачи Штурма—Лиувилля, 170
функция
— аналитическая в области, 340
— влияния для задачи Коши, 137
— голоморфная, 340
— Грина краевой задачи, 170, 393-406
— дробная, 340
— Лагранжа, 582, 629, 630
— Ляпунова, 275, 606-615, 630
— мероморфная, 340
— моногенная в области, 340
— однородная степени m, 29
— регулярная в области, 340
— Хевисайда, 323, 679, 733
— — обобщенная, 329, 690-694, 728
— целая, 340
функция-изображение преобразования Лапласа, 324
— обобщенная, 326
функция-оригинал преобразования Лапласа, 323
— обобщенная, 326
Фурье ряд, S56-SSS, 728
Х
характеристическое уравнение, 136, 184
Хевисайда функция, 323, 679, 733
— обобщенная, 329, 690-694, 728
Ц
центр, 293
цепная линия, 110
цикл предельный, 306
— неустойчивый, 306
— полуустойчивый, 306
— устойчивый, 306
циклоида, 111
Циолковского формула, 29
Ч
часть ряда Лорана
— главная, 340
— правильная, 340
Чебышева уравнение, 152
Четаева теорема о неустойчивости, 275, 612—614
Ш
Штермера метод численного решения д. у., 267, 575—577
Штурма—Лиувилля задача, 170
—, собственные значения, 170

—, собственные фуншии, 170
Э
эвольвента, 106
эволюта, 106
Эйлера
— метод
— — отыскания общего решения неоднородной системы д. у., 184, 420-429, 433, 437, 439
— — численного решения д. у., 266, 569—571
— уравнение, 152, 371, 372, 391
Эйлера—Риккати уравнение, 67, 152, 163, 282
— каноническое, 67, 172
Эфроса теорема умножения обобщенная, 336, 764
Я
ядро интегрального уравнения, 357

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателей книга по замыслу авторов призвана способствовать глубокому усвоению теории обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью подробно решенных нетривиальных примеров и задач.

Своеобразие предмета теории дифференциальных уравнений — его обширность и тесная связь с теорией пределов, теорией функций, дифференциальным и интегральным исчислениями, теорией рядов и другими разделами математики — определяет соответствующую специфику ее метода. Суть этой специфики состоит в том, что метод теории дифференциальных уравнений есть метод математического анализа. В связи с этим теорию дифференциальных уравнений не без оснований считают дальнейшим обобщением и развитием математического анализа на класс неявных функций, заданных уравнениями, содержащими независимую переменную, функцию и ее производные. Так, интегральное исчисление функции одной переменной фактически есть теория интегрирования в элементарных функциях простейшего класса дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$.

Пособие охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики.

Каждый параграф книги снабжен необходимым минимумом теоретических сведений, используемых при решении соответствующих примеров. Кроме того, в книге разобраны нетрадиционные для такого рода пособий примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений, на применение признаков существования предельных циклов на фазовой плоскости. Каждая глава снабжена упражнениями для самостоятельной работы.

Книга содержит порядка семисот подробно решенных примеров и задач, взятых из следующих учебников и сборников задач по дифференциальным уравнениям:

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1950;

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961;

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1998;

Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. К., 1972;

Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике, т. II, 1958;

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 1973;

Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. М. Сборник задач по теоретической физике. М., 1972;

Мартыненко В. С. Операционное исчисление. К., 1968;

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1978;

Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. Диференціальні рівняння. К., 1981;

Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. К., 1997.

Введение

Основные понятия. Составление дифференциальных уравнений

1. Основные определения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция, заданная в некоторой области D координатного пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, $x \in (x_0, x_1)$ — аргумент, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ — неизвестная функция и ее производные, n — порядок уравнения.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать любую функцию $y = f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$, которая:
а) имеет n производных на интервале (x_0, x_1), причем

$$\forall x \in (x_0, x_1) \quad \left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) \in D;$$

б) удовлетворяет уравнению (1), т. е. обращает его в тождество

$$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1).$$

Уравнение (1) называется *проинтегрированным*, если найдены все его решения.

Уравнение (1), разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)}$, называется *каноническим* и имеет вид

$$y^{(n)} = \varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

2. Задача Коши.

Пусть функция $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна в области D координатного пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Требуется найти интервал X, содержащий точку x_0, и такую n-кратно непрерывно дифференцируемую функцию $y = f(x)$, что $\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right) \in D$, когда $x \in X$, и выполняются условия:

$$1) \quad \forall x \in X \quad f^{(n)}(x) \equiv \varphi\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right);$$

$$2) \quad f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$.

Формально *задача Коши* для уравнения (2) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} = \varphi(x, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Каждое конкретное решение задачи (3) называется *частным решением задачи Коши*. Множество частных решений, зависящее от параметров $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, называется *общим решением задачи Коши*.

3. Построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых.

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{4}$$

где C_i $(i = \overline{1, n})$ — произвольные постоянные, принадлежащие некоторой области C, следует:

1) n раз продифференцировать равенство (4), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,y' = 0, \quad \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\,y' + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,y'^2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,y'' = 0, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \ldots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,y^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

2) Из соотношений (4) и (5) исключить произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.

1. $x^2 + Cy^2 - 2y = 0$.

◀ Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемое решение данного уравнения, где C — параметр, не зависящий от x. Тогда должно выполняться тождество

$$F(x, C) = x^2 + Cy^2(x) - 2y(x) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}$, X — некоторое множество. Функция F дифференцируема по x. Взяв производную, имеем

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial x} \equiv 2x + 2y(x)y'(x)C - 2y'(x) \equiv 0,$$

откуда

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \quad (yy' \not\equiv 0). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим дифференциальное уравнение

$$(x^2 - y)y' - xy = 0. \blacktriangleright$$

2. $Cy - \sin Cx = 0$.

◀ Аналогично проделанному выше получим тождество

$$Cy'(x) - C\cos Cx \equiv 0.$$

При $C = 0$ семейство кривых, для которых составляется дифференциальное уравнение, не определено, поэтому $C \neq 0$. Из системы уравнений

$$y'^2 = \cos^2 Cx, \quad C^2y^2 = \sin^2 Cx \tag{1}$$

находим

$$C^2 = \frac{1 - y'^2}{y^2}, \quad y \neq 0. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), имеем

$$1 - y'^2 = \sin^2\left(\sqrt{\frac{1 - y'^2}{y^2}}\,x\right), \quad \text{или} \quad y' = \cos\left(\frac{x\sqrt{1 - y'^2}}{y}\right). \blacktriangleright$$

3. $(x - C_1)^2 + C_2y^2 = 1$.

◀ Дважды дифференцируя по x тождество $(x - C_1)^2 + C_2y^2(x) - 1 \equiv 0$, получим:

$$2(x - C_1) + 2C_2y(x)y'(x) \equiv 0, \quad 1 + \left((y'(x))^2 + y(x)y''(x)\right)C_2 \equiv 0.$$

Исключив из трех тождеств постоянные C_1 и C_2, имеем

$$y^3y'' + \left(y'^2 + yy''\right)^2 = 0. \blacktriangleright$$

4. $y = e^{Cx}$.

◀ После дифференцирования по переменной x получим $y'(x) = Ce^{Cx}$, откуда $C = \frac{y'}{y}$ $(y \neq 0)$. Таким образом, дифференциальное уравнение данного семейства имеет вид

$$y = e^{\frac{y'}{y}x}. \blacktriangleright$$

5. $x - C_1y^2 - C_2y - C_3 = 0$.

◀ Трижды продифференцировав данное равенство по x, получаем:

$$1 - 2yy'C_1 - C_2y' = 0, \quad 2\left(y'^2 + yy''\right)C_1 + C_2y'' = 0, \quad 2\left(3y'y'' + yy'''\right)C_1 + C_2y''' = 0. \qquad (1)$$

Из последнего равенства (1) находим

$$C_1 = -\frac{C_2y'''}{2(3y'y'' + yy''')} \quad (3y'y'' + yy''' \neq 0). \qquad (2)$$

Подставив (2) во второе равенство (1), получаем

$$y'^2y''' - 3y'y''^2 = 0 \quad \text{или} \quad 3y''^2 - y'y''' = 0,$$

в силу того, что $y' \neq 0$ (это следует из первого равенства (1)). ▶

Примечание. Во всех рассмотренных выше примерах мы предполагали, что существует производная требуемого порядка неявно заданной функции. Это предположение существенно, поскольку уже простейшее уравнение $y^2 - x^2 - C = 0$ определяет бесконечное множество разрывных неявных функций $y = y(x, C)$, $-\infty < x < +\infty$, например

$$y = \begin{cases} \sqrt{C + x^2}, & x \in \mathbb{Q}, \\ -\sqrt{C + x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad C \neq 0.$$

6. Написать дифференциальное уравнение всех окружностей на плоскости.

◀ Из курса аналитической геометрии известно, что каноническое уравнение окружности с центром в точке $M(C_1, C_2)$ и радиусом $R = C_3$ имеет вид:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 - C_3^2 = 0. \qquad (1)$$

Считая, что каждая окружность описывается двумя трижды непрерывно дифференцируемыми функциями $y = y(x)$, из (1) находим:

$$x - C_1 + (y(x) - C_2)y'(x) \equiv 0, \quad 1 + y'^2(x) + (y(x) - C_2)y''(x) \equiv 0, \quad 3y'(x)y''(x) + (y - C_2)y'''(x) \equiv 0.$$

Исключив из двух последних тождеств $y(x) - C_2$, окончательно получим:

$$y'''\left(1 + y'^2\right) - 3y'y''^2 = 0. \blacktriangleright$$

Примечание. Точнее говоря, мы получили дифференциальное уравнение всех окружностей, в каждой из которых выколоты две точки, лежащие на концах горизонтального диаметра.

7. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

◀ Согласно условию задачи, в предыдущем примере следует положить $C_3 = 1$, $C_2 = 2C_1$. Тогда уравнение (1) из примера 6 примет вид

$$(x - C_1)^2 + (y - 2C_1)^2 - 1 = 0.$$

Получили однопараметрическое семейство окружностей. Дифференцируя тождество

$$(x - C_1)^2 + (y(x) - 2C_1)^2 - 1 \equiv 0$$

по переменной x (считая при этом, что y — непрерывно дифференцируемые функции от x), находим:

$$x - C_1 + (y(x) - 2C_1)y'(x) \equiv 0.$$

Из двух полученных тождеств путем исключения C_1 имеем окончательно

$$(2x - y)^2\left(y'^2 + 1\right) - (2y' + 1)^2 = 0. \blacktriangleright$$

8. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной оси Oy, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

◀ Семейство парабол с осью, параллельной оси Oy, имеет вид $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$, где C_j — произвольные параметры $(j = 1, 2, 3)$. Из условия касания прямой $y = 0$ вытекает, что

$$y' \equiv 2C_1x_k + C_2 = 0, \quad C_1x_k^2 + C_2x_k + C_3 = 0,$$

где x_k — абсцисса точки касания. Отсюда следует, что

$$C_3 = \frac{C_2^2}{4C_1} \quad (C_1 \neq 0). \tag{1}$$

Из условия касания прямой $y = x$ вытекает, что должно быть

$$y' \equiv 2C_1x_k + C_2 = 1; \quad x_k = y_k; \quad y_k = C_1x_k^2 + C_2x_k + \frac{C_2^2}{4C_1}.$$

Отсюда находим, что $C_2 = \frac{1}{2}$. Подставив значение C_2 в (1), получим $C_3 = \frac{1}{16C_1}$. Таким образом, искомое семейство удовлетворяет уравнению

$$y = C_1x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16C_1},$$

где C_1 — произвольный параметр. Исключив его из тождеств

$$y' \equiv 2C_1x + \frac{1}{2}, \quad y \equiv C_1x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16C_1},$$

получим требуемое дифференциальное уравнение семейства

$$xy'^2 = y(2y' - 1). \blacktriangleright$$

9. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $x = 0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

◀ Ясно, что центры таких окружностей должны лежать на прямой $y = x$. Отсюда следует, что $C_1 = C_2$ (см. пример 6). А так как окружности касаются координатных осей, то $C_3 = |C_1|$. Таким образом, рассматриваемое семейство окружностей удовлетворяет уравнению

$$(x - C_1)^2 + (y - C_1)^2 - C_1^2 = 0.$$

Из тождеств относительно x:

$$(x - C_1)^2 + (y(x) - C_1)^2 - C_1^2 \equiv 0, \quad x - C_1 + (y(x) - C_1)y'(x) \equiv 0$$

следует требуемое дифференциальное уравнение

$$y'^2(x^2 - 2xy) - 2xy' + y^2 - 2xy = 0. \blacktriangleright$$

10. Составить дифференциальное уравнение семейства циклоид

$$x = C(t - \sin t), \quad y = C(1 - \cos t).$$

◀ Дифференцируя функции x и y по t и разделив $y'(t)$ на $x'(t)$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}, \quad t = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y'}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставив значение t в равенство

$$(t - \sin t)y - x(1 - \cos t) = 0,$$

после некоторых преобразований получим требуемое дифференциальное уравнение

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{x + yy'}{y\left(1 + y'^2\right)}. \blacktriangleright$$

11. Показать, что дифференциальное уравнение кривых 2-го порядка имеет вид

$$9y''^2y^{V} - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0.$$

◀ Пусть в общем уравнении семейства кривых второго порядка $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ выполняется условие $a \neq 0$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $a = 1$. Дифференцируя 5 раз, получим:

$$x + b(y + xy') + cyy' + d + ey' = 0, \tag{1}$$

$$1 + b(2y' + xy'') + c\left(y'^2 + yy''\right) + ey'' = 0, \tag{2}$$

$$b(3y'' + xy''') + c(3y'y'' + yy''') + ey''' = 0, \tag{3}$$

$$b\left(4y''' + xy^{IV}\right) + c\left(3y''^2 + 4y'y''' + yy^{IV}\right) + ey^{IV} = 0, \tag{4}$$

$$b\left(5y^{IV} + xy^{V}\right) + c\left(10y''y''' + 5y'y^{IV} + yy^{V}\right) + ey^{V} = 0. \tag{5}$$

Из уравнений (2), (3), (4) находим

$$b = \frac{3y''y^{IV} - 4y'''^2}{\Delta}, \quad c = \frac{3y''^2y''' + 4y'y'''^2 - 3y'y''y^{IV}}{\Delta}, \tag{6}$$

где $\Delta = 3y'^2y''y^{IV} - 4y'^2y'''^2 - 6y'y''^2y''' + 9y''^4$.

Исключив из уравнений (2) и (5) e и подставив в результат исключения значения b и c из (6), получим окончательно

$$9y''^2y^{V} - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0,$$

что и требовалась показать. ▶

12. Показать, что дифференцируемое семейство кривых

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln C\sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0.$$

◀ Взяв полный дифференциал от тождества

$$\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2(x)} \equiv \ln C,$$

получим

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2(x)}\right) \equiv 0,$$

откуда

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} - \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = 0, \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

или

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0. \blacktriangleright$$

13. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей, касающихся оси Ox.

◀ Если в уравнении семейства окружностей (см. пример 6) положить $C_3 = |C_2|$, то получим уравнение семейства окружностей с требуемыми свойствами:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 - C_2^2 = 0. \tag{1}$$

Определив C_1 и C_2 из тождеств

$$x - C_1 + y'(y - C_2) \equiv 0, \quad 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' \equiv 0$$

и подставив их значения в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y^2y''^2 + 2y\left(1 + y'^2\right)y'' - y'^2\left(1 + y'^2\right)^2 = 0. \blacktriangleright$$

Найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют линии данных семейств.

14. $ax + z = b$, $y^2 + z^2 = b^2$.

Представив параметрические уравнения кривой в виде

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x),$$

где y и z — непрерывно дифференцируемые функции, и подставив их в данные уравнения, получим тождества относительно x

$$ax + z(x) \equiv b, \quad y^2(x) + z^2(x) \equiv b^2. \tag{1}$$

Продифференцировав эти тождества по x, получим

$$a + z'(x) \equiv 0, \quad y(x)y'(x) + z(x)z'(x) \equiv 0,$$

откуда $a = -z'$. Подставив значение a в первое из тождеств (1), имеем $b = z - xz'$. Это соотношение совместно со вторым тождеством из (1) приводит к равенству $y^2 + 2zz'x - x^2z'^2 = 0$. Таким образом, искомая система уравнений имеет вид

$$yy' + zz' = 0, \quad y^2 + 2xzz' - x^2z'^2 = 0. \blacktriangleright$$

15. $x^2 + y^2 = z^2 - 2bz$, $y = ax + b$.

◀ По аналогии с предыдущим примером имеем

$$2x + 2yy' = 2zz' - 2bz', \quad y' = a,$$

откуда находим $a = y'$, $b = \frac{1}{z'}(zz' - x - yy')$. Подставив значения a и b в исходные уравнения, получим:

$$b = y - xy', \quad z'(y - xy') = zz' - x - yy', \quad x^2 + y^2 = z^2 - 2z(y - xy').$$

Последние два соотношения и есть требуемые дифференциальные уравнения. ▶

16. Найти частное решение некоторого дифференциального уравнения, если его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad \text{и} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

◀ Дважды дифференцируя y по x, легко находим соответствующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$

Для отыскания частного решения этого уравнения следует воспользоваться начальными условиями, чтобы найти постоянные C_1 и C_2. Имеем

$$y(0) = (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x)|_{x=0} = C_1 = 1, \quad y'(0) = \alpha(-C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x)|_{x=0} = \alpha C_2 = 0.$$

Итак, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $y = \cos \alpha x$ — частное решение. ▶

17. Найти частное решение дифференциального уравнения, если его общее решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$$

и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 2.$$

◀ Исходя из условий примера, имеем

$$y(1) = \left(C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3\right)\Big|_{x=1} = 1, \quad y'(1) = \left(\frac{C_2}{x} + 3C_3 x^2\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad y''(1) = \left(-\frac{C_2}{x^2} + 6C_3 x\right)\Big|_{x=1} = 2.$$

Отсюда находим, что $C_1 = -\frac{2}{9}$, $C_2 = -\frac{2}{3}$, $C_3 = \frac{2}{9}$. Осталось записать частное решение:

$$y = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} x^3.$$

Составить соответствующее дифференциальное уравнение предоставляем читателю. ▶

18. Пусть некоторое частное решение удовлетворяет задаче Коши

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Может ли оно удовлетворять другой задаче Коши

$$y'' = 1 + 2xy + 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1?$$

◀ Если частное решение дважды непрерывно дифференцируемо, то из первой задачи Коши находим:

$$y'' = 1 + 2yy' = 1 + 2y\left(x + y^2\right) = 1 + 2xy + 2y^3,$$

а также $y'(0) = 1$. Следовательно, это возможно. ▶

19. Пусть общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 e^x + C_3\left(x + x^2\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Может ли функция $y = x + 1$ быть частным решением этого уравнения?

◀ Нет, не может, поскольку ни при каких значениях произвольных постоянных (в том числе и $\pm\infty$) из формулы общего решения получить ее нельзя. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Путем исключения постоянных C_j найти дифференциальные уравнения следующих семейств кривых:

1. $y - \operatorname{tg}(C_1 x) = 0$. **2.** $y = C_1 e^{\frac{x}{C_2}}$. **3.** $\frac{x^2}{1 + C_1} + \frac{y^2}{2 + C_2} - 1 = 0$.

4. $y = C_1 \sin\varphi(x) + C_2 \cos\varphi(x), \quad \varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. **5.** $\rho = C_1\varphi$.

6. $\rho^2 + \varphi^2 - C_1 = 0$ (ρ, φ — полярные координаты).

7. $\begin{cases} C_1 y^2 - C_2 z^2 + C_3 x = 0, \\ C_1 \sin y + 4C_2 e^z - 2C_3 = 0. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} C_1 y + C_2 z + C_3 x + C_4 = 0, \\ C_1 y^2 + C_2 z^2 + C_3 x^2 + 2C_4 = 0. \end{cases}$

Глава 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

§ 1. Уравнения с разделяющимися переменными

1.1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$f_1(x)f_2(y)\,dx + g_1(x)g_2(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где f_i, g_i $(i = 1, 2)$ — заданные непрерывные функции, $x \in (a, b)$, $y \in (c, d)$, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Для того, чтобы проинтегрировать уравнение (1), следует сначала обе его части разделить на произведение $f_2(y)g_1(x)$ $(f_2(y)g_1(x) \neq 0)$, а затем, пользуясь формулой

$$d\left(\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy\right) = f(x)\,dx + g(y)\,dy,$$

записать

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\,dy = C. \tag{2}$$

При делении могли быть потеряны решения уравнений $f_2(y) = 0$ и $g_1(x) = 0$. Поэтому для получения всех решений уравнения (1) следует к семейству интегральных кривых (2) присоединить нули функций f_2 и g_1.

1.2. Разделение переменных линейной заменой аргумента.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + b) \quad (a,\ b \text{ — постоянные}), \tag{3}$$

где f — непрерывная функция, посредством подстановки $t = ax + b$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$(a + bf(t))\,dx - dt = 0.$$

Решить следующие уравнения.

20. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

◄ Это уравнение вида (1). Деля обе его части на произведение $\sqrt{y^2+1}\cdot x$, получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad x \neq 0,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} + C,$$

или

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C.$$

Таким образом, все решения данного уравнения имеют вид

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C, \quad x = 0. \ ►$$

21. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$.

◀ Сначала находим все решения этого уравнения. Имеем

$$(x^2-1)dy+2xy^2\,dx=0,$$

откуда, разделив переменные x и y, получаем

$$\frac{dy}{y^2}+\frac{2xdx}{x^2-1}=0.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, находим

$$-\frac{1}{y}+\ln|x^2-1|=C. \tag{1}$$

Для получения всех решений исходного уравнения к последнему семейству интегральных кривых присоединим еще решение $y=0$.

Далее, из совокупности всех интегральных кривых выделим ту кривую, которая проходит через точку (0, 1). Полагая в (1) $x=0$ и $y=1$, находим $C=-1$. Таким образом, функция

$$y=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$$

является решением поставленной задачи. ▶

22. $xy'+y=y^2$, $y(1)=0{,}5$.

◀ Записывая уравнение в виде

$$x\,dy+(y-y^2)\,dx=0 \tag{1}$$

и разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y-y^2}+\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируя, получаем

$$xy(1-y)=C. \tag{2}$$

Заметим, что несмотря на деление обеих частей уравнения на $x(y-y^2)$, его решения $x=0$, $y=0$ и $y=1$ не были потеряны. Наконец, подставив в (2) $x=1$, $y=0{,}5$, находим $C=\frac{1}{4}$. Следовательно, дифференцируемая кривая

$$4xy(1-y)-1=0$$

— решение поставленной задачи. ▶

23. $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1$.

◀ Переписав уравнение в виде

$$\frac{ds}{dt}=e^s-1,$$

разделяем переменные s и t:

$$\frac{ds}{e^s-1}=dt.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, находим

$$\ln\left|\frac{e^s-1}{e^s}\right|=t+\ln C, \quad \text{или} \quad s=-\ln(1+Ce^t). \blacktriangleright$$

24. $y'=\cos(y-x)$.

◀ Полагая $z=y-x$, получим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-1.$$

Исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{dz}{\cos z-1}=dx.$$

Интегрированием находим

$$x - \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = C, \quad \text{или} \quad x - \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = C.$$

К этим решениям следует присоединить потерянные решения $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶

25. $y' - y = 2x - 3$.

◀ Записав уравнение в виде $dy = (y + 2x - 3)\,dx$ и произведя замену $z = y + 2x - 3$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$dz = (z + 2)\,dx.$$

Отсюда при $z \neq -2$ следует, что

$$\frac{dz}{z+2} = dx.$$

Интегрируя уравнение, имеем

$$\ln|z + 2| = x + \ln C,$$

или, окончательно,

$$y = 1 - 2x + Ce^x.$$

Очевидно, решение $z = -2$, т. е. $y = 1 - 2x$, принадлежит полученному семейству интегральных кривых (его можно включить в семейство при $C = 0$). ▶

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям при $x \to +\infty$.

26. $x^2y' - \cos 2y = 1$, $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$.

◀ Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x}, \quad x \neq 0, \quad \cos y \neq 0.$$

После интегрирования имеем

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad y = \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя дополнительное условие, находим

$$\frac{9}{4}\pi = \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(2C - \tfrac{2}{x}\right) + 2k\pi\right) = \operatorname{arctg} 2C + 2k\pi.$$

Поскольку $|\operatorname{arctg} 2C| < \frac{\pi}{2}$, то отсюда следует, что $k = 1$, $\operatorname{arctg} 2C = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$y = \operatorname{arctg}\left(1 - \tfrac{2}{x}\right) + 2\pi. \blacktriangleright$$

27. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

◀ Разделяем переменные x и y:

$$\frac{3y^2}{y^3 - 8}\,dy = 2x\,dx, \quad y \neq 2.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}\,dy = 2\int x\,dx + C, \quad \ln|y^3 - 8| = x^2 + C.$$

Полагая $C = \ln C_1$ $(C_1 > 0)$, имеем

$$|y^3 - 8| = C_1 e^{x^2}.$$

Очевидно, что решение $y = 2$ можно включить в полученное семейство интегральных кривых, если считать, что $C_1 = 0$. Таким образом, все решения исходного уравнения описываются формулой

$$|y^3 - 8| = C_1 e^{x^2} \quad (C_1 \geqslant 0).$$

Из полученной формулы следует, что единственная кривая $y = 2$ удовлетворяет поставленному в задаче условию. ▶

28. Показать, что каждая интегральная кривая уравнения $y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ имеет две горизонтальные асимптоты.

◀ Разделяя в дифференциальном уравнении переменные x и y, а затем интегрируя, получим

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}, \tag{1}$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка на плоскости Oxy.

Пусть в (1) $x \to +\infty$. Тогда в силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}$ существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = a$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}}$ расходится, то $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = y(+\infty)$ существует и конечен, причем $y(+\infty) > y_0$, так как $a > 0$.

Далее, пусть в (1) $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = b, \quad \text{где} \quad b = \int\limits_{x_0}^{-\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}} < 0.$$

Следовательно, $-\infty < y(-\infty) < y_0$. Таким образом, формула (1) описывает семейство интегральных кривых, каждая из которых имеет две горизонтальные асимптоты $y(-\infty)$ и $y(+\infty)$. ▶

29. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$

в окрестности начала координат. Показать, что из каждой точки границы первого координатного угла выходит одна интегральная кривая, проходящая внутри этого угла.

◀ Находим область D существования функции в правой части уравнения:

$$D = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} M_k,$$

где

$$M_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ 0 \leqslant y < +\infty \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi,\ -1 < y \leqslant 0 \right\}.$$

Пусть $0 \leqslant y < +\infty$, $0 < x < \pi$, $0 < x_0 < \pi$. Тогда разделяя переменные в уравнении и интегрируя, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} = \int\limits_{0}^{y} \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}}. \tag{1}$$

Поскольку при $u \to 0$ $\ln(1+u) \sim u$, то интеграл в правой части равенства (1) сходится по признаку сравнения. В силу положительности подынтегральной функции $\int\limits_{0}^{y} \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}} > 0$. Следовательно, $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} > 0$. Отсюда находим, что $x > x_0$. Такими образом, при $x > x_0$ имеем $y > 0$ (и наоборот), т. е. интегральная кривая, определяемая уравнением (1) и выходящая из точки $(x_0, 0)$, находится в первом квадранте. Из неравенства $y' > 0$ вытекает, что $y = y(x)$ возрастает с возрастанием x. Однако в силу расходимости интеграла в правой части (1) при $y \to +\infty$ и сходимости интеграла в его левой части при $x \to \pi - 0$ следует, что y стремится к конечному пределу при $x \to \pi - 0$.

Аналогичную ситуацию получим при рассмотрении равенства интегралов

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} = \int_{y_0}^y \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}}, \quad 0 \leqslant y < +\infty, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 \leqslant y_0 < +\infty.$$

Пусть $-1 < y \leqslant 0$, $-\pi < x < 0$. Тогда, разделив переменные в исходном уравнении и проинтегрировав полученное, имеем

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}} = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{-\ln(1+u)}}. \tag{2}$$

Поскольку $y < 0$, то интеграл справа в (2) отрицателен. Значит, $x < x_0$. Следовательно, интегральная кривая, выходящая из точки $(x_0, 0)$ $(x_0 < 0)$ стремится вниз налево. Далее, как следует из дифференциального уравнения, при $x \to -\pi + 0$ или при $y \to -1 + 0$ производная $y' \to +\infty$. Таким образом, интегральные кривые асимптотически приближаются к отрезкам прямых $x = -\pi$ или $y = -1$, причем к отрезку прямой $x = -\pi$ они приближаются по касательной, а к отрезку прямой $y = -1$ — по нормали. ▶

§ 2. Геометрические и физические задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными

2.1. Использование геометрического смысла производной.

Для решения геометрических задач целесообразно использовать чертежи, а также геометрический смысл производной и интеграла.

2.2. Использование физического смысла производной.

При составлении дифференциального уравнения, описывающего физический процесс, наряду с применением физических законов используем физический смысл производной, как скорости изменения какой-либо величины.

30. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

◀ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна $S = \frac{1}{2}|NK|y$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (это вытекает из геометрического смысла производной), то $S = \frac{y^2}{2y'}$, $y' > 0$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

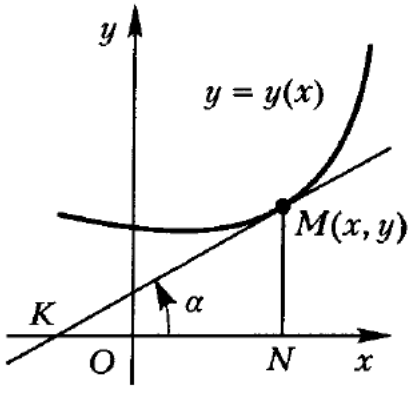


Рис. 1

Считая $y \neq 0$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2\,dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$, или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

Если $y' < 0$ (см. рис. 2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

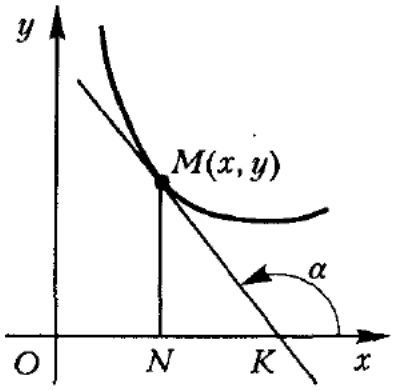


Рис. 2

Наконец, обозначив $Ca^2 = -\tilde{C}$, оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}. \blacktriangleright$$

31. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

◀ Из рис. 3 видим, что $|KL| + |LN| = \frac{y}{y'} + yy'$. Таким образом, требуемое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{y}{y'} + yy' = 2a.$$

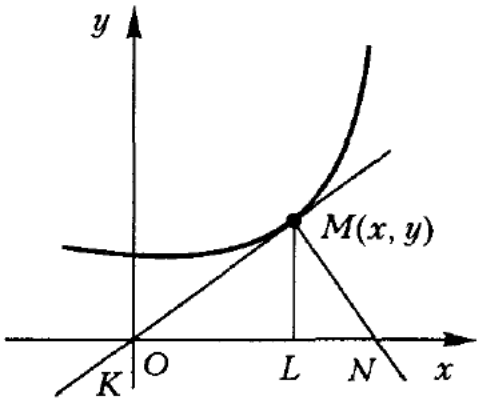


Рис. 3

Разрешив его относительно производной, получаем

$$y' = \frac{a}{y} \pm \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}.$$

Пусть $0 < y \leqslant a$. Тогда из дифференциального уравнения находим

$$\frac{y\,dy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx, \quad \frac{d(a^2 - y^2)}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = -2\,dx.$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\right) \pm x = C.$$

Случай $-a \leqslant y < 0$ и $y' < 0$ рассматривается аналогично. ▶

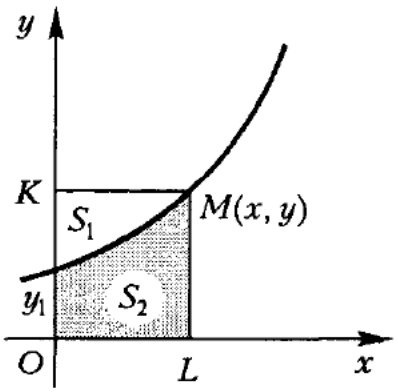


Рис. 4

32. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1 : 2.

◀ Согласно геометрической интерпретации интеграла имеем (см. рис. 4)

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,dt. \tag{1}$$

Далее, поскольку $S_1 + S_2 = xy$ и $S_2 = 2S_1$, то, приняв во внимание (1), получим

$$S_2 = \frac{2}{3}\,xy = \int_0^x y(t)\,dt.$$

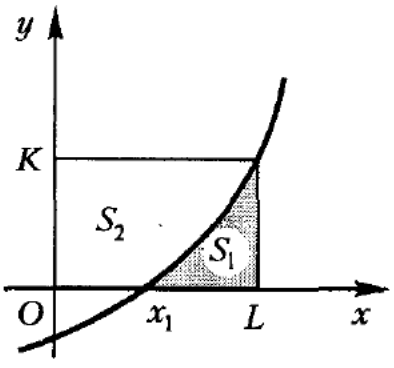


Рис. 5

Дифференцируя это равенство по x, находим

$$\frac{2}{3}\,(xy' + y) = y, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x},$$

откуда $y = C\sqrt{x}$, или

$$x = \tilde{C}y^2.$$

Очевидно, если переменные x и y поменять ролями, то задача также будет иметь решение $y = Cx^2$. ▶

Замечание 1. В процессе решения предполагали, что переменные x и y положительны. Однако, как легко видеть, они могут быть и отрицательными, т. е. можно считать, что постоянная C в обоих решениях принимает любое действительное значение.

Замечание 2. Если вместо рис. 4 воспользоваться рис. 5, то придем к такому же результату, т. е, во всех случаях получаем семейства парабол с вершинами в начале координат. Предлагаем читателю уточнить рисунки 4 и 5 в соответствии с полученным решением задачи.

33. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

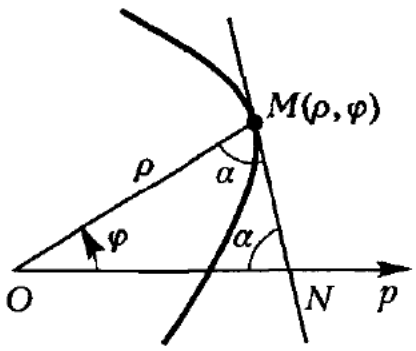


Рис. 6

◀ Используя соотношения между углами α и φ (см. рис. 6), а также геометрическую интерпретацию производной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \varphi),$$

после несложных выкладок получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

интегрируя которое, находим

$$\ln\rho = -2\ln\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \ln 2C, \qquad (1)$$

или

$$\rho = \frac{C}{1+\cos\varphi}. \blacktriangleright$$

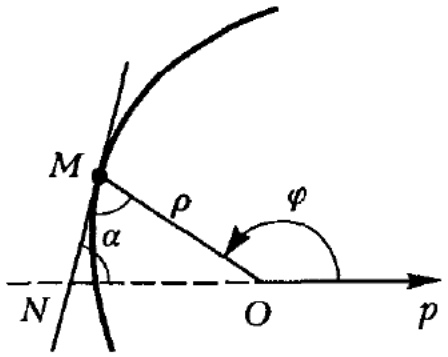


Рис. 7

Замечание. Если вместо рис. 6 рассмотреть рис. 7, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

из которого следует, что

$$\rho = \frac{C}{1-\cos\varphi}.$$

Это семейство получим из семейства (1) путем замены φ на $\varphi+\pi$. Таким образом, окончательный ответ записывается в виде

$$\rho = \frac{C}{1\pm\cos\varphi}.$$

34. Найти уравнение кривой в полярных координатах, если известно, что тангенс угла γ, образованного радиусом-вектором, проведенным в точку касания, и касательной к кривой в этой же точке, равен полярному углу φ.

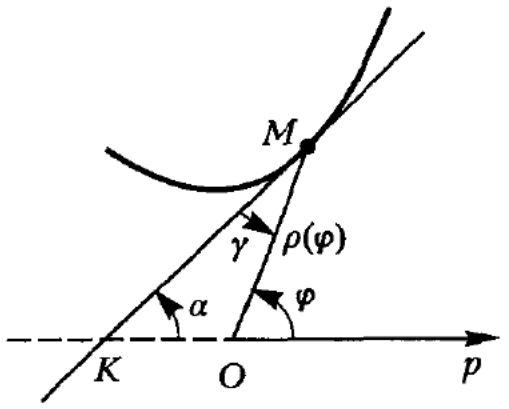


Рис. 8

◀ Используя условие $\operatorname{tg}\gamma = \varphi$ и соотношение $\varphi = \alpha + \gamma$ (см. рис. 8), можем записать

$$\varphi = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\rho'\operatorname{tg}\varphi + \rho}{\rho' - \rho\operatorname{tg}\varphi}$, поэтому из предыдущего уравнения после несложных преобразований получаем

$$\varphi = -\frac{\rho}{\rho'}.$$

Решив это дифференциальное уравнение, найдем

$$\rho = \frac{C}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0). \blacktriangleright$$

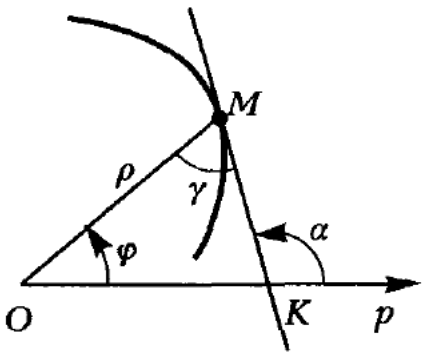


Рис. 9

Замечание. Если вместо рис. 8 рассмотреть рис. 9, то аналогичным путем можно получить дифференциальное уравнение $\varphi = \dfrac{\rho}{\rho'}$, из которого следует, что $\rho = C\varphi$.

35. Нормаль MQ к некоторой кривой пересекает ось Ox в точке Q. Доказать, что если абсцисса точки Q вдвое больше абсциссы точки M, то кривая — равнобочная гипербола

◀ Из рис. 10 видим, что

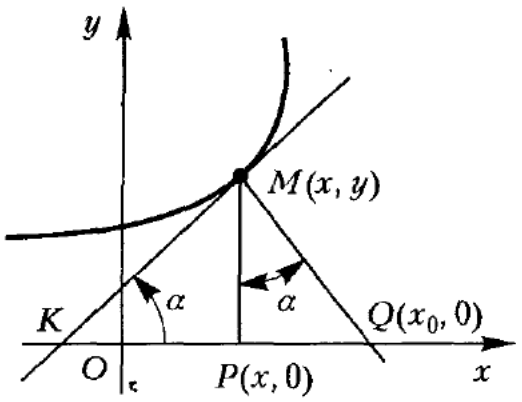


Рис. 10

Используя условие $x_0 = 2x$ и соотношение $y' = \operatorname{tg}\alpha$, из (1) получаем дифференциальное уравнение

$$x = yy'.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$y\,dy = x\,dx, \quad y^2 - x^2 = C. \tag{2}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что каноническое уравнение гиперболы имеет один из видов:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

причем, если $a = b$, то гипербола называется равнобочной. Легко видеть, что второе соотношение в (2) определяет два семейства равнобочных гипербол (для $C > 0$ и для $C < 0$). ▶

Примечание. При $C = 0$ из (2) получаем пару прямых $y = \pm x$ — так называемые *вырожденные гиперболы*.

36. Доказать, что кривая, все нормали к которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

◀ Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка, через которую проходят все нормали, и $M_1(x_1, y_1)$ — точка, расположенная на кривой. Тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$y = -\frac{1}{y_1'(x_1)}(x - x_0) + y_0.$$

Этому уравнению удовлетворяют также координаты точки $M_1(x_1, y_1)$, поэтому должно быть

$$y_1(x_1) = -\frac{1}{y_1'(x_1)}(x_1 - x_0) + y_0.$$

Разделяя переменные x_1 и y_1 и интегрируя, получим:

$$(y_1 - y_0)\,d(y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)\,d(x_1 - x_0) = 0,$$

$$(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 = C^2.$$

Таким образом, если $C \neq 0$, то имеем уравнение окружности радиуса C с центром в точке M_0. ▶

37. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд при непрерывном перемешивании каждую секунду втекает 0,1 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота?

◀ Пусть $Q(t)$ — количество литров азота в сосуде в момент времени t после начала перемешивания. Тогда в $0{,}1\,dt$ литрах смеси содержится $\frac{0{,}1 \cdot Q\,dt}{20}$ литров азота. Согласно условию задачи, в сосуд за время dt поступит $0{,}1\,dt$ л азота, а вытечет $\frac{0{,}1 \cdot Q\,dt}{20}$ л. Следовательно, количество dQ азота, котрое втекает в сосуд за время dt и остается в нем, равно $0{,}1\left(1 - \frac{Q}{20}\right)dt$ литров. Получаем дифференциальное уравнение

$$dQ = 0{,}1\left(1 - \frac{Q}{20}\right)dt \quad \text{или} \quad \frac{dQ}{20 - Q} = \frac{dt}{200},$$

интегрируя которое, находим

$$Q = 20 - Ce^{-0{,}005t}.$$

Для определения постоянной C используем условие $Q(t)|_{t=0} = 16$ л. Получаем $C = 4$, вследствие чего функция

$$Q(t) = 20 - 4e^{-0{,}005t} \tag{1}$$

есть решение поставленной задачи. Полагая в (1) $t = T$ и $Q = 19{,}8$ л (что составляет 99% от 20 л), находим

$$T = 200 \ln 20 \text{ с} = 599{,}2 \text{ с} \approx 10 \text{ минут}$$

— через такой промежуток времени после начала перемешивания в сосуде будет 99% азота. ▶

38. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько останется соли в баке через час?

◀ Пусть $Q(t)$ кг — количество соли в баке в момент времени t после начала истечения смеси из бака. Тогда $\frac{Q}{100}$ есть ее концентрация в данном растворе, а $\frac{Q}{100} \cdot 5\,dt$ — количество соли, вытекающее из бака за время dt мин. Следовательно, имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = -0{,}05\,Q\,dt.$$

Здесь знак "$-$" указывает на то, что количество соли в баке уменьшается. Интегрируя уравнение, получаем $Q = Ce^{-0{,}05t}$. Поскольку при $t = 0$ в баке имелось 10 кг соли, то $C = 10$. Таким образом, $Q = 10e^{-0{,}05t}$ есть решение данной задачи. Полагая в последнем равенстве $t = 60$ мин, получаем, что количество соли в баке через час равно $10e^{-3}$ кг $\approx 0{,}5$ кг. ▶

39. В воздухе комнаты объемом 200 м^3 содержится 0,15% углекислого газа CO_2. Вентилятор подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

◀ Пусть $Q(t)$ м^3 — количество углекислого газа в комнате в момент времени t после начала работы вентилятора. Тогда $\frac{Q(t)}{200}$ есть концентрация его в комнате в момент времени t. Следовательно, 20 м^3 воздуха, которые уходят из комнаты за минуту, содержат $0{,}1Q(t)$ м^3 CO_2. Поэтому за время dt мин из комнаты уйдет $0{,}1Q(t)\,dt$ м^3 CO_2. За это же время вентилятор подаст $\frac{0{,}04\%}{100\%}\,20\,dt$ м^3 $= 0{,}008\,dt$ м^3 CO_2 в комнату. Таким образом, приращение dQ газа CO_2 за время dt равно $(0{,}008 - 0{,}1Q(t))\,dt$, и мы имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = (0{,}008 - 0{,}1Q)\,dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q(t) = (0{,}08 - Ce^{-0{,}1t})\text{ м}^3.$$

Поскольку при $t = 0$ $Q = 0{,}3$ м^3 (т. е. 0,15% от 200 м^3), то $C = -0{,}22$. Таким образом, $Q = 0{,}08 + 0{,}22e^{-0{,}1t}$. Момент времени T, когда количество CO_2 будет 0,1 м^3, находим из равенства $0{,}1 = 0{,}08 + 0{,}22e^{-0{,}1T}$. Получаем

$$T = 10 \ln 11 \approx 24 \text{ мин}. \blacktriangleright$$

40. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C. Когда тело остынет до 25°C, если за 10 минут оно охладилось от 100°C до 60°C?

◀ Согласно указанному закону, можем написать соотношение

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \tag{1}$$

где T — температура тела, T_0 — температура окружающего воздуха, k — коэффициент пропорциональности. В нашем случае $T_0 = 20$°C. Интегрируя уравнение (1), получим

$$T = 20 + Ce^{kt}.$$

Из условия $T(t)|_{t=0} = 100$°C находим $C = 80$, а условие $T(t)|_{t=10} = 60$°C позволяет определить k. Следовательно,

$$k = -0{,}1 \ln 2, \quad T(t) = 20 + 80e^{-0{,}1t \ln 2} = 20 + 80 \cdot 2^{-0{,}1t}$$

Полагая здесь $T = 25$°C, находим требуемый момент времени

$$t_1 = 40 \text{ мин}. \blacktriangleright$$

41. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20°C, опущен металлический предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью $0{,}2c_{H_2O}$ и температурой 75°C. Через минуту вода нагрелась на 2°C. Когда температуры воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1°C? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

◀ По аналогии с предыдущим примером имеем

$$\frac{dT_п}{dt} = k_п(T_п - T_в), \quad \frac{dT_в}{dt} = k_в(T_в - T_п),$$

где $T_п$ и $T_в$ — температуры предмета и воды соответственно, $k_п$ и $k_в$ — постоянные коэффициенты. Вычитая почленно из первого соотношения второе и вводя обозначение $R = T_п - T_в$, можем записать

$$\frac{dR}{dt} = kR, \quad k = k_п + k_в.$$

Отсюда находим $R = Ce^{kt}$. Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ разность $R = 55°$, то $C = 55$. Поэтому $R = 55e^{kt}$. Для определения коэффициента k воспользуемся уравнением теплового баланса. Имеем по общей формуле для теплоты $Q = cm(T_k - T_п)$, где c — удельная теплоемкость тела, m — его масса, $T_k - T_п$ — разность температур:

$$Q_1 = 2c_{H_2O}, \quad Q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}5(75 - T)c_{H_2O}.$$

Здесь Q_1 — количество тепла, поглощенное водой, Q_2 — количество тепла, выделенное предметом при остывании до температуры T. Поскольку по условию $Q_1 = Q_2$, то $T = 55°C$. Таким образом, через минуту $R = 55°C - 22°C = 33°C$. А тогда $33°C = 55°Ce^k$, откуда $k = \ln 0{,}6$. Поэтому $R = 55 \cdot (0{,}6)^t$ есть закон сближения температур воды и тела. Из равенства $1 = 55 \cdot (0{,}6)^{t_1}$ находим

$$t_1 = \frac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8 \text{ мин}$$

— время, по истечении которого температура тела будет выше температуры воды на 1°C. ▶

42. Кусок металла с температурой a помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b. Скорость нагрева металла пропорциональна разности T температур печи и металла, коэффициент пропорциональности равен k. Найти температуру тела через час.

◀ Согласно условию, имеем

$$\frac{dT_м}{dt} = k(T_п - T_м), \tag{1}$$

где $T_п$ и $T_м$ — температуры печи и металла соответственно. Далее, $T_п = a + \frac{1}{60}(b - a)t$ в силу равномерного повышения температуры печи, t — время, измеряемое в минутах. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dT_м}{dt} = k\left(a + \frac{t}{60}(b - a) - T_м\right). \tag{2}$$

Введем замену $a + \frac{t}{60}(b - a) - T_м = z$. Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{kz - \frac{b-a}{60}} = -dt,$$

интегрируя которое, находим

$$\frac{1}{k}\ln\left(kz - \frac{b-a}{60}\right) = -t + \frac{1}{k}\ln C, \quad k \neq 0,$$

или

$$T_м = a + \left(t - \frac{1}{k}\right)\frac{b-a}{60} + Ce^{-kt}.$$

Так как $T_м(t)|_{t=0} = a$, то $C = \frac{b-a}{60k}$. Следовательно, окончательно имеем

$$T_м = a + \frac{b-a}{60}\left(t - \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right).$$

Температура металла через час, очевидно, будет равна

$$T_м(60) = b - \frac{b-a}{60k}\left(1 - e^{-60k}\right). \blacktriangleright$$

43. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, а через 4 с скорость ее 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

◀ Пусть $v(t)$ — скорость лодки в момент времени t от начала движения. Тогда $\frac{dv}{dt}$ есть ее ускорение. Согласно второму закону Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F, \tag{1}$$

где F — сила сопротивления воды. По условию $F = kv$, поэтому (1) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}v = k_0 v \quad (k_0 = \text{const}).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v(t) = Ce^{k_0 t}. \tag{2}$$

Используя условие $v(0) = 1{,}5$, находим $C = 1{,}5$. Тогда (2) имеет вид

$$v(t) = 1{,}5e^{k_0 t},$$

где t измеряется в секундах. Поскольку $v(4) = 1$ м/с, то из равенства $1 = 1{,}5e^{4k_0}$ следует, что $k_0 = 0{,}25\ln(2/3)$. Поэтому скорость движения лодки выражается формулой

$$v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} \text{ м/с}. \tag{3}$$

Подставляя сюда $v = 1$ см/с $= 0{,}01$ м/с, находим соответствующий момент времени

$$t_1 = 4\left(1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln(2/3)}\right) \approx 50 \text{ с}.$$

Далее, поскольку $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, где $s(t)$ — путь, из (3) получаем

$$s(t) = \frac{4}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} + s_0,$$

где s_0 — постоянная интегрирования. Пусть $s(0) = 0$. Тогда $s_0 = -\frac{4}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, и закон движения лодки имеет вид

$$s(t) = \frac{6}{\ln(2/3)}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}} - 1\right).$$

Из (3) видим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$, поэтому из закона движения лодки получаем

$$s_1 = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \frac{6}{\ln(3/2)} \approx 15 \text{ м},$$

где s_1 — путь, который проходит лодка до остановки. ▶

44. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

◀ Воспользуемся законом радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент. Пусть $Q(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени t после начала распада. Тогда, в соответствии с законом радиоактивного распада, имеем $q(t) = kQ(t)$, где k — коэффициент пропорциональности, $q(t)$ — количество вещества, распадающегося за единицу времени. Следовательно, за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ распадется $kQ(t_1)\Delta t$ вещества, где $t_1 \in (t, t + \Delta t)$, $Q(t_1)$ — некоторое промежуточное значение количества вещества между $Q(t)$ и $Q(t + \Delta t)$. С другой стороны, это же количество равно $Q(t + \Delta t) - Q(t)$, поэтому окончательно имеем

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = kQ(t_1)\Delta t, \quad \text{или} \quad \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = kQ(t_1).$$

Считая функцию Q дифференцируемой и переходя к пределу в последнем соотношении при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ(t), \tag{1}$$

решением которого является функция $Q(t) = Ce^{kt}$. Очевидно, постоянная C здесь означает первоначальное количество вещества. Далее, из условия $0{,}5C = Ce^{30k}$ находим $k = -\frac{1}{30}\ln 2$, а из условия $0{,}01C = Ce^{-\frac{t}{30}\ln 2}$ получаем

$$t_1 = \frac{\ln 100}{\ln 2} \cdot 30 \approx 200 \text{ (дней)}$$

— время, по истечении которого останется лишь 1% первоначального количества вещества.

Общая же формула для оставшегося количества вещества имеет вид

$$Q(t) = Q(0)2^{-\frac{t}{30}},$$

где t — время, измеряемое в днях. ▶

45. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

◀ Пусть $Q(t)$ — количество радия. Тогда оно удовлетворяет уравнению (1) из предыдущей задачи. Следовательно, функция $Q(t) = Q(0)e^{kt}$ выражает закон его распада, где t — время, измеряемое в годах. Для определения коэффициента k воспользуемся условием: через $t = 1$ год $Q = 999{,}56$ мг, если $Q(0) = 1$ г. Отсюда $e^k = 0{,}99956$. Таким образом, $Q(t) = Q(0)(0{,}99956)^t$ Положив здесь $Q(t_1) = 0{,}5Q(0)$, определим время

$$t_1 = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}99956} \approx 1600 \text{ лет.} \blacktriangleright$$

46. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы, считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

◀ Прежде всего, определим начальное количество урана в куске породы. Пусть y — количество полностью распавшегося урана в нем. Тогда, приняв во внимание условия задачи, можем составить пропорцию

$$\frac{y}{14} = \frac{238}{206},$$

из которой находим $y = 14 \cdot \frac{238}{206} \approx 16{,}2$ мг. Следовательно, первоначальное количество урана составляет 116,2 мг.

Далее, исходя из общей формулы $Q(t) = 116{,}2e^{kt}$, где $Q(t)$ — количество нераспавшегося урана, и периода его полураспада, находим $k = -\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}$. Принимая теперь во внимание, что по истечении времени T от начала распада в куске породы осталось 100 мг урана, определяем T из соотношения $100 = 116{,}2e^{kT}$:

$$T = -\frac{1}{k}\ln 1{,}162 = \frac{4{,}5 \cdot 10^9}{\ln 2}\ln 1{,}162 \approx 970 \cdot 10^6 \text{ лет}$$

— возраст горной породы. ▶

47. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглощает слой толщиной в 2 м?

◀ Пусть $I(z)$ — количество света, прошедшего слой воды толщиной z (рис. 11). Тогда согласно условию $I(z+\Delta z)-I(z)$ — количество поглощенного света — равно $kI(z)\Delta z$ ($k=\text{const}$). Таким образом, для количества прошедшего света $I(z)$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{dz}=kI.$$

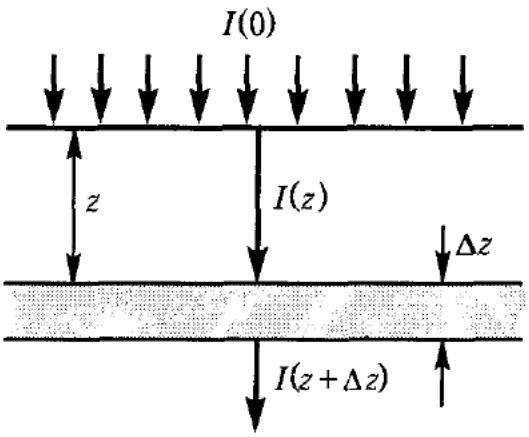


Рис. 11

Его решение — $I(z)=I(0)e^{kz}$. Из условия $I(35)=\frac{1}{2}I(0)$ вытекает, что $k=-\frac{1}{35}\ln 2$. Поэтому $I(z)=I(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z}{35}}$, где z измеряется в см. Полагая в последнем соотношении $z=2\,\text{м}=200\,\text{см}$, получаем $\frac{I(200)}{I(0)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}}$. Тогда

$$\frac{I(0)-I(200)}{I(0)}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}}\approx 0{,}98.$$

Таким образом, поглощается 98% падающего на поверхность света. ▶

48. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности пренебречь. Сопротивление пропорционально квадрату скорости.

◀ Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2\quad(k>0),$$

где m — масса парашютиста, $g\approx 10\,\text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $k=\text{const}$. Разделяя переменные v и t и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{g-k_0v^2}=dt,\quad \frac{1}{2\sqrt{k_0g}}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=t+\ln C,\quad a=\sqrt{\frac{g}{k_0}},\quad k_0=\frac{k}{m},$$

или

$$\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=Ce^{\alpha t},\quad \alpha=2\sqrt{\frac{kg}{m}}. \tag{1}$$

Так как $v(0)=0$, то $C=1$. Далее, из условия $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\frac{a+v(t)}{a-v(t)}\right|=+\infty$ следует, что $v(t)\to a$ при $t\to+\infty$. Но по условию задачи $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=50\,\text{м/с}$, поэтому $a=50$, или $\sqrt{\frac{mg}{k}}=50$. Следовательно, $k=\frac{mg}{2500}$, $\alpha=0{,}4$.

Принимая во внимание естественное условие $0\leqslant v<a$, из (1) находим

$$v(t)=50\,\text{th}(0{,}2t)=\frac{ds(t)}{dt}.$$

Интегрируя, получаем

$$s(t)=250\ln\text{ch}(0{,}2t)+s_0. \tag{2}$$

Используя начальное условие $s(0)=0$, имеем $s_0=0$. Полагая далее в (2) $s=1000$, имеем $1000=250\ln\text{ch}(0{,}2t_1)$. Из последнего равенства определяем время t_1 падения парашютиста до раскрытия парашюта:

$$t_1=5\ln\left(e^4+\sqrt{e^8-1}\right)\approx 5(\ln 2+4)\approx 23\,\text{с}.\ ▶$$

49. Футбольный мяч весом 0,4 кГ[1)] брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 Г при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

◀ По второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2. \tag{1}$$

В нашем случае $m = \frac{P}{g} = \frac{0{,}4}{10}$, $k = 0{,}00048\frac{\text{кГ}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2}$, поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = -10 - 0{,}012v^2.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}0012}v = \sqrt{0{,}12}(C - t), \quad v = \frac{10}{\sqrt{0{,}12}}\operatorname{tg}\left((C-t)\sqrt{0{,}12}\right). \tag{2}$$

Так как $v(0) = 20$, то из (2) следует, что $C = \frac{1}{\sqrt{0{,}12}}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{0{,}12}\right)$. Из (2) также следует, что $v = 0$ при $t = C \approx 1{,}75$ с (это, очевидно, соответствует наибольшей высоте). Принимая во внимание равенство $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, после подстановки его в (2) и интегрирования полученного дифференциального уравнения, имеем

$$s(t) = s_0 + \frac{250}{3}\ln\left|\cos\left((C-t)\sqrt{0{,}12}\right)\right|, \quad s_0 = \text{const}. \tag{3}$$

Формула (3) выражает закон движения мяча. Полагая в (3) $s(0) = 0$, находим

$$s_0 = -\frac{250}{3}\ln\left|\cos\left(C\sqrt{0{,}12}\right)\right|.$$

Если же в (3) положить $t = C$, то получим наибольшую высоту подъема мяча

$$s_{\max} = s_0 \approx \frac{125}{3}\ln 1{,}48 \approx 16{,}3\text{ м}.$$

Случай $k = 0$ предоставляем разобрать читателю. ▶

50. Пусть жидкость вытекает из некоторого сосуда через отверстие в нем со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10\,\text{м/с}^2$, h — высота уровня жидкости над отверстием.

За какое время вся жидкость вытечет из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ см? Ось цилиндра вертикальная.

◀ Пусть $h(t)$ — высота уровня жидкости в баке в момент времени $t > 0$. Через промежуток времени Δt уровень жидкости понизится до значения $h(t + \Delta t)$. Следовательно, из бака вытечет количество жидкости, равное $(h(t) - h(t + \Delta t))\pi R^2$. С другой стороны, через отверстие в баке вытечет $\pi r^2 v(t_1)\Delta t$ жидкости, где $t_1 \in (t, t + \Delta t)$, $v(t_1)$ — некоторое промежуточное значение скорости вытекания жидкости на интервале $(t, t + \Delta t)$. В силу закона сохранения массы имеем равенство:

$$h(t + \Delta t) - h(t) = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 v(t_1)\Delta t.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и предположив, что функция h дифференцируема, а функция v непрерывная, устремим Δt к нулю. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -k^2 v(t), \quad k = \frac{r}{R}, \quad v = 0{,}6\sqrt{2gh}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h(t) = (C - 0{,}3\sqrt{2g}k^2 t)^2, \quad C = \text{const}.$$

[1)] Через Г (грамм-сила) обозначается техническая единица силы, $1\,\text{Г} = 1\,\text{г}\cdot g \approx 0{,}0098$ Н, где $g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения; $1\,\text{кГ} = 1000\,\text{Г}$.

Поскольку $h(0) = H$, то отсюда следует, что $C = \sqrt{H}$. Очевидно, $h(t) = 0$ при

$$t = \frac{10\sqrt{H}}{3\sqrt{2g}} \frac{R^2}{r^2} \approx 1050\,\text{с} = 17{,}5\,\text{мин}. \blacktriangleright$$

51. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

◀ Как видим из рис. 12, при понижении уровня жидкости за время Δt на Δh через отверстие E вытечет $2H\sqrt{h(2R-h)}\Delta h + o(\Delta h)$ жидкости. Поэтому выполняется равенство

$$-2H\sqrt{h(2R-h)}\Delta h + o(\Delta h) = \pi r^2 v(t_1)\Delta t,$$

из которого, как и в предыдущем примере, получаем дифференциальное уравнение

$$-2H\sqrt{h(2R-h)}\,dh = \pi r^2 0{,}6\sqrt{2gh}\,dt, \quad h \not\equiv 0.$$

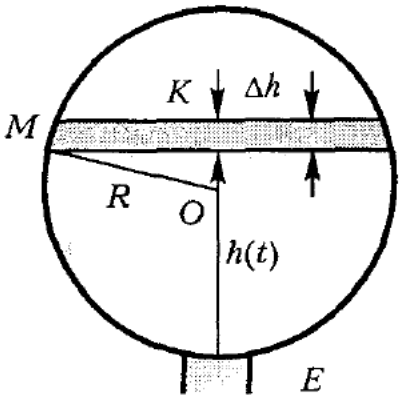


Рис. 12

Решением этого уравнения является функция

$$h(t) = 2R - (0{,}3t + C)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\pi r^2\sqrt{g}}{\sqrt{2}H}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad C = \text{const}. \qquad (1)$$

Поскольку $h(0) = 2R$, то отсюда следует, что $C = 0$. Полагая в (1) $h = 0$, находим время, за которое вытечет вся жидкость:

$$t_1 = \frac{40}{9\pi} \frac{R^{\frac{3}{2}}H}{r^2\sqrt{g}} \approx 1040\,\text{с}. \blacktriangleright$$

52. Воронка имеет форму кругового конуса радиуса $R = 6\,\text{см}$ и высоты $H = 10\,\text{см}$, обращенного вершиной вниз. За какое время из воронки вытечет вся вода через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

◀ Из рис. 13 видим, что количество воды ΔV, содержащееся в заштрихованном слое, с точностью до малых $o(\Delta h)$ равно $\pi r^2\,\Delta h$. С другой стороны, через отверстие O вытечет $\pi r_1^2 v(t_1)\Delta t$ воды. Таким образом, имеем равенство

$$-\pi r^2\Delta h = \pi r_1^2 v(t_1)\Delta t + o(\Delta h),$$

где $r_1 = 0{,}25\,\text{см}$, $t_1 \in (t, t + \Delta t)$, из которого предельным переходом при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$r^2\,dh + r_1^2 v(t)\,dt = 0, \quad v(t) = 0{,}6\sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

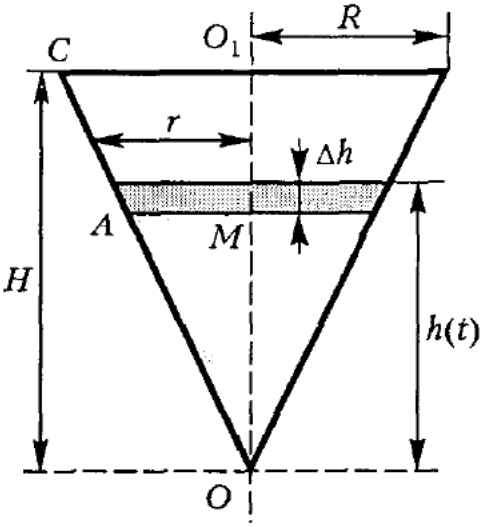


Рис. 13

Из подобия треугольников AMO и CO_1O следует соотношение $r = \frac{hR}{H}$. Поэтому уравнение (1) записываем в виде

$$h^{\frac{3}{2}}\,dh + k^2\,dt = 0, \quad k^2 = 0{,}6\,\frac{H^2}{R^2}\,r_1^2\sqrt{2g}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{2}{5}\,h^{\frac{5}{2}} + k^2 t = \widetilde{C}, \quad \widetilde{C} = \text{const}.$$

Так как $h(0) = H$, то отсюда следует, что $\widetilde{C} = \frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$. Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$h^{\frac{5}{2}} - H^{\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}k^2 t.$$

Полагая здесь $h = 0$, находим

$$t = \frac{2}{5}\,\frac{H^{\frac{5}{2}}}{k^2}$$

— время, за которое вытечет вся вода из воронки. Вычисления дают $t \approx 27\,\text{с}$. ▶

53. В прямоугольный бак размером 60 см × 75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью $S = 2{,}5\,\text{см}^2$. За какое время наполнится бак?

◀ Пусть $h(t)$ — высота уровня воды в баке. Тогда $\Delta V_1 = (h(t+\Delta t) - h(t))\,60 \cdot 75$ — приращение ее объема за время от t до $t+\Delta t$. Это увеличение (или уменьшение) объема происходит за счет поступления ΔV_2 воды и ее утечки в количестве ΔV_3 через отверстие. Таким образом, имеем уравнение $\Delta V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_3$. Поскольку $\Delta V_2 = 1800\Delta t$, $\Delta V_3 = 2{,}5 \cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t$, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$, то последнее уравнение можно представить в виде

$$4500(h(t+\Delta t) - h(t)) = 1800\Delta t - 2{,}5 \cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t, \quad g = 10^3\,\text{см/с}^2. \tag{1}$$

Разделив в (1) обе части на Δt и совершив предельный переход при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$30\frac{dh}{dt} = \left(12 - 0{,}01\sqrt{2gh}\right),$$

проинтегрировав которое, найдем:

$$t + C = -\frac{6000}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h} + \frac{1200}{\sqrt{2g}}\ln(12 - 0{,}01\sqrt{2gh})\right). \tag{2}$$

Пусть $h(0) = 0$, тогда из (2) следует, что $C = -3600\ln 12$. Подставив в (2) $h = 80$, найдем время t_1, за которое наполнится бак:

$$t_1 = 1200\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right) \approx 260\,\text{с}. \blacktriangleright$$

54. Резиновый шнур длиной 1 м под действием силы f кГ удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если его подвесить за один конец?

◀ Пусть $U(x)$ — удлинение шнура длиной x, а $U(x+\Delta x)$ — удлинение шнура длиной $x+\Delta x$. Тогда удлинение элемента длиной Δx равно разности $U(x+\Delta x) - U(x)$ (рис. 14). На элемент шнура Δx действует растягивающая сила f, равная весу шнура длиной $l - x - \theta\Delta x$, т. е.

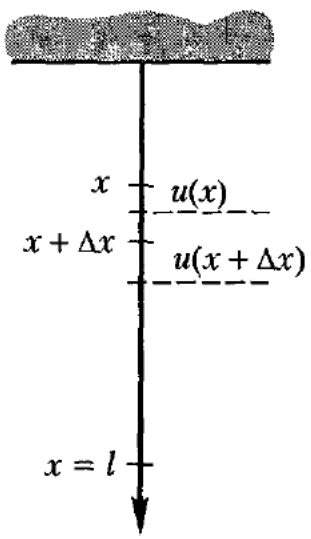


Рис. 14

$$f = \frac{P}{l}(l - x - \theta\Delta x),$$

где $\frac{P}{l}$ — удельный вес шнура, $0 < \theta < 1$. Согласно условию, указанный элемент должен удлиниться на $kf\Delta x$ метров. Таким образом, получаем уравнение

$$U(x+\Delta x) - U(x) = k\frac{P}{l}(l - x - \theta\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

где величина θ введена с целью учета влияния силы, действующей на элемент Δx, обусловленной весом самого элемента. Далее, известным путем из (1) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dx} = \frac{kP}{l}(l - x),$$

из которого следует, что

$$U(x) = C + \frac{kP}{2l}(2l - x)x.$$

Поскольку $U(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$U(x) = \frac{kP}{2l}(2l - x)x.$$

Из последней формулы получаем удлинение шнура длиной l:

$$U(l) = \frac{kPl}{2}. \blacktriangleright$$

55. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности Земли давление равно $1\,\text{кГ/см}^2$ и плотность воздуха $0{,}0012\,\text{г/см}^3$.

◀ Пусть $P(z)$ — давление воздуха на высоте z от поверхности Земли. Тогда разность давлений $P(z) - P(z + \Delta z)$ равна весу столбика воздуха с площадью основания $1\,\text{см}^2$ и высотой Δz, т. е. равна величине $\rho(z + \theta\Delta z)g \cdot \Delta z$, где ρ — некоторая средняя плотность воздуха, $0 < \theta < 1$. Поэтому имеем

$$P(z) - P(z + \Delta z) = \rho(z + \theta\Delta z)g \cdot \Delta z,$$

откуда предельным переходом при $\Delta z \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho(z). \tag{1}$$

Согласно закону Бойля—Мариотта, плотность воздуха при постоянной температуре пропорциональна давлению, т. е.

$$\rho(z) = kP(z).$$

Используя это равенство, из (1) находим

$$\frac{dP}{P} = -kg, \quad P = P_0 e^{-kgz}\ \text{кГ/см}^2.$$

Так как при $z = 0$ $P = 1\,\text{кГ/см}^2$, то $P = e^{-kgz}$, а поскольку

$$0{,}0012\,\text{г/см}^3 = 1000\,\text{Г/см}^2 \cdot k = 1000\,\text{г/см}^2\, gk,$$

где $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2 = \frac{1\,\text{Г}}{1\,\text{г}}$ — ускорение свободного падения, то $kg = 0{,}12 \cdot 10^{-5}\,\text{см}^{-1} = 0{,}12(\text{км})^{-1}$ Таким образом, на высоте h км давление воздуха

$$P = e^{-0{,}12h}\ \text{кГ/см}^2. \blacktriangleright$$

56. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $\frac{1}{3}$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой $10\,\text{кГ}$?

◀ Пусть $T(\varphi)$ — сила натяжения каната, соответствующая его углу наматывания φ на столб, ΔP — нормальная реакция столба на участок каната длиной $\Delta S = R\Delta\varphi$ (рис. 15). Из условия равновесия трех сил $T(\varphi)$, ΔP и $T(\varphi + \Delta\varphi)$, с точностью до бесконечно малых величин угла $\Delta\varphi$, следуют равенства

$$\begin{aligned} T(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi + o(\Delta\varphi) &= \Delta P, \\ T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + o(\Delta\varphi) &= \Delta F, \end{aligned} \tag{1}$$

где ΔF — сила трения, действующая на указанный элемент. Согласно условию, $\Delta F = k\Delta P$, поэтому из (1) получаем соотношение

$$T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = kT(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi + o(\Delta\varphi),$$

из которого известным читателю способом легко получить дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{d\varphi} = kT.$$

Его решение — $T = T_0 e^{k\varphi}$. Пусть при $\varphi = 0$ $T_0 = 10\,\text{кГ}$. Тогда при $\varphi = 6\pi$ (что соответствует трем виткам)

$$T = 10e^{2\pi} \approx 5355\,\text{кГ}. \blacktriangleright$$

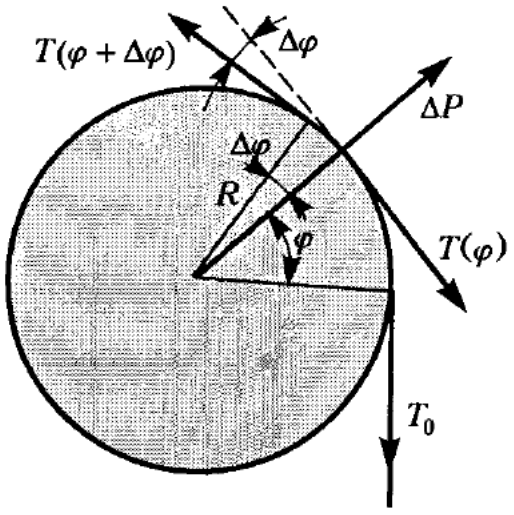


Рис. 15

57. На вращающийся в жидкости диск действует замедляющая его движение сила трения, пропорциональная угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени.

если вначале диск вращался со скоростью 100 оборотов в минуту, а по истечении одной минуты — 60 оборотов в минуту.

◀ Пусть $\omega(t)$ — угловая скорость движения диска. Тогда, согласно закону изменения момента количества движения, имеем

$$I\frac{d\omega}{dt} = M, \tag{1}$$

где I — момент инерции диска, M — момент сил, действующих на диск. По условию $M = k_0\omega$ ($k_0 = \text{const}$), поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega, \quad k = \frac{k_0}{I}.$$

Его решение — $\omega = \omega_0 e^{kt}$. Пусть ω измеряется в оборотах за минуту, а время t — в минутах. Тогда $\omega_0 = 100$, $60 = 100e^k$, откуда $e^k = 0{,}6$. Таким образом, требуемая зависимость имеет вид

$$\omega = 100(0{,}6)^t \text{ об/мин.} \blacktriangleright$$

58. В закрытом помещении объемом $V\,\text{м}^3$ находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего $1\,\text{м}^3$ воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющимся в $1\,\text{м}^3$ воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 г воды, а в $1\,\text{м}^3$ воздуха q_0 г пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

◀ Пусть $Q(t)$ — количество испарившейся воды в граммах за время t. Тогда, согласно условию, скорость испарения $\frac{dQ}{dt}$ равна величине $k(q_1 - q)$, т. е. имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = k(q_1 - q), \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Найдем значение q. Очевидно, что

$$\left(V - m_0 \cdot 10^{-6}\right) q_0 = Q_1$$

есть количество пара в граммах, которое было в помещении, а

$$\left(V - m_0 \cdot 10^{-6}\right) q_0 + Q = Q_2$$

— количество пара в граммах в помещении в момент времени t. Ясно, что количество Q_2 было равномерно распределено в объеме

$$V_2 = V - m_0 \cdot 10^{-6} + Q \cdot 10^{-6}$$

(число 10^{-6} везде фигурирует вследствие того, что 1 г воды занимает $1\,\text{см}^3 = 10^{-6}\,\text{м}^3$ объема). Поэтому

$$q = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{\left(V - m_0 10^{-6}\right) q_0 + Q}{V - 10^{-6}(m_0 + Q)}. \tag{2}$$

Если $V \gg 10^{-6}(m_0 + Q)$, то из (2) можно получить более простую формулу для q:

$$q = \frac{Vq_0 + Q}{V} = q_0 + \frac{Q}{V}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (1), получим окончательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = k\left(q_1 - q_0 - \frac{Q}{V}\right),$$

проинтегрировав которое, получим:

$$Q(t) = V(q_1 - q_0) + Ce^{-\frac{kt}{V}}.$$

Поскольку $Q(0) = 0$, то отсюда следует, что $C = -V(q_1 - q_0)$. Таким образом, для оставшейся в сосуде воды имеем формулу

$$m_1(t) = m_0 - V(q_1 - q_0)\left(1 - e^{-\frac{kt}{V}}\right). \blacktriangleright$$

59. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива она равна m, скорость истечения из ракеты продуктов горения равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

◄ Пусть $M(t)$, $v(t)$ соответственно масса и скорость ракеты в момент времени t. Тогда $k(t) = M(t)v(t)$ есть количество движения ракеты. По закону сохранения количества движения справедливо равенство

$$k(t + \Delta t) - k(t) = \Delta p, \tag{1}$$

где p — импульс внешних сил, действующих в течение времени Δt на промежутке времени от t до $t + \Delta t$. В данном случае таким импульсом служат продукты сгорания ракеты, которые отделяются от нее с абсолютной скоростью $c - v(t)$ (c — относительная скорость отделения продуктов сгорания). Поскольку отделяется (сгорает) масса $M(t) - M(t + \Delta t)$, то

$$\Delta p = (c - v(t))(M(t) - M(t + \Delta t)). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$M(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - M(t)v(t) = (c - v(t))(M(t) - M(t + \Delta t)),$$

или

$$M\Delta v + c\Delta M + o(\Delta v) = 0.$$

Разделив полученное на Δv и устремив Δv к нулю, имеем

$$M + c\frac{dM}{dv} = 0.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$v(t) = c\ln\frac{1}{M(t)} + c_0. \tag{3}$$

Постоянную c_0 определяем из начального условия: $v(t)|_{t=0} = 0$, т. е. в начальный момент времени или, что то же самое, при $M(t) = M$ скорость v равна нулю. Поэтому из (3) имеем $c_0 = -c\ln\frac{1}{M}$. Следовательно,

$$v = c\ln\frac{M}{M(t)} = c\ln\frac{M}{M - x},$$

где x — сгоревшая масса топлива. Если, в частности, сгорит все топливо, т. е. $x = M - m$, то ракета будет иметь скорость

$$v = c\ln\frac{M}{m} \quad — \quad \textit{формула Циолковского.} \ ►$$

§ 3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

3.1. Однородное уравнение.

Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где M, N — непрерывные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и однородные функции одной и той же степени, называется *однородным*.

Напомним, что функция ψ называется *однородной степени* m (m — действительное число), если $\forall t \in (a, b)$ $\psi(tx, ty) \equiv t^m\psi(x, y)$, $(x, y) \in D$.

С помощью замены $y = x \cdot U(x)$ уравнение (1) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и U.

3.2. Уравнение, сводимое к однородному.

К однородному уравнению приводится следующее:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (a_i = \text{const},\ b_i = \text{const},\ i = 1, 2), \tag{2}$$

если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Для этого достаточно положить $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ и подобрать постоянные α, β таким образом, чтобы правая часть уравнения (2) приобрела вид $f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$, $(k = \text{const})$. В этом случае уравнение (2) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_2x + b_2y$.

3.3. Обобщенно-однородное уравнение.

Уравнение вида (1) называется *обобщенно-однородным*, если существует такая постоянная α, что после замены $y = z^\alpha$ оно становится однородным.

Решить уравнения.

60. $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx - x\,dy = 0.$

◀ Здесь функции $M(x, y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ $(|x| \geqslant |y|)$, $N(x, y) = -x$ однородные и имеют степень $m = 1$, так как

$$M(tx, ty) = ty + \sqrt{t^2(x^2 - y^2)} = t\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) = tM(x, y)$$

для $t \geqslant 0$ (т. е. $a = 0$ *и* $b = +\infty$), *а*

$$N(tx, ty) = -tx = tN(x, y)$$

для любого t. Следовательно, данное уравнение однородное. Применив замену $y = xu$, получаем $dy = x\,du + u\,dx$, а уравнение преобразуется к виду

$$\left(xu + |x|\sqrt{1 - u^2}\right) dx - x(x\,du + u\,dx) = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что $x = 0$ является решением исходного уравнения, поэтому считая, что в (1) $x \neq 0$, получим

$$\operatorname{sgn} x \sqrt{1 - u^2}\,dx - x\,du = 0.$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, находим:

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \operatorname{sgn} x \ln|x| = \arcsin\frac{y}{x} + C.$$

Принимая еще во внимание, что $u = \pm 1$ (т. е. $y = \pm x$) также есть решения, окончательно записываем все решения данного уравнения:

$$\operatorname{sgn} x \ln|x| = \arcsin\frac{y}{x} + C; \quad y = \pm x; \quad x = 0. \blacktriangleright$$

Замечание. *Строго говоря, решение* $x = 0$ *получается в результате допущения, что* $\sqrt{-y^2} \cdot 0 = 0$ *для произвольных значений* y.

61. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$

◀ Переписав уравнение в виде

$$x\,dy - y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) dx = 0 \quad (x > 0,\ y > 0),$$

обнаруживаем, что функции $M(x, y) = -y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ и $N(x, y) = x$ однородные одной и той же степени $m = 1$. Поэтому, применив замену $y = xu$, $dy = x\,du + u\,dx$, получим

$$x\,du - u \ln u\,dx = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln x - \ln|\ln u| = \ln C \quad (u \neq 1),$$

или

$$y = xe^{Cx}.$$

Заметим, что решение $y = x$, которое соответствует значению $u = 1$, входит в формулу семейства интегральных кривых при $C = 0$. ▶

62. $xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0,\ M(1, 1).$

◀ В данном примере требуется найти кривую, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению и проходила через точку M.

Прежде всего, находим все решения этого уравнения. Полагая $y = xu$, получаем

$$u^3\,dx + x(u^2 - 1)\,du = 0.$$

Отсюда при $u \neq 0$ интегрированием находим

$$\int \frac{u^2 - 1}{u^3}\,du + \int \frac{dx}{x} = \ln C, \quad \ln|ux| + \frac{1}{2u^2} = \ln C,$$

или

$$x^2 + 2y^2 \ln\frac{|y|}{C} = 0. \tag{1}$$

К полученному семейству присоединим еще кривую $y = 0$. Далее, подставив в (1) $x = 1$, $y = 1$, имеем $C = e^{\frac{1}{2}}$. Поэтому требуемая кривая имеет уравнение

$$x^2 + y^2(\ln y^2 - 1) = 0. \blacktriangleright$$

63. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)\,dx - x^2e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0.$

◀ Здесь удобно применить замену $x = uy$. Тогда $dx = u\,dy + y\,du$, $u\,dy + y\,(ue^u + 1)\,du = 0$,

$$\frac{dy}{y} + \frac{(ue^u + 1)\,du}{u} = 0, \quad \ln|x| + e^{\frac{x}{y}} = C. \blacktriangleright$$

64. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx - x\,dy = 0.$

◀ Очевидно, $xy \geqslant 0$. Отбросив тривиальные решения $x = 0$, $y = 0$, считаем, что $xy > 0$. Полагая $y = ux$ $(u > 0)$, имеем

$$dy = u\,dx + x\,du, \quad 2\left(\sqrt{u}\operatorname{sgn}x - u\right)dx - x\,du = 0. \tag{1}$$

Если $x > 0$, то отсюда находим $(u \neq 1)$:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u} - u}, \quad \ln x = -\ln\left|1 - \sqrt{u}\right| + \ln C, \quad \text{или} \quad x\left|1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| = C.$$

Если же $x < 0$, то полагая в (1) $x = -x_1$, получим

$$2\left(\sqrt{u} + u\right)\,dx_1 + x_1\,du = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$x_1\left(1 + \sqrt{-\frac{y}{x_1}}\right) = C, \quad \text{или} \quad -x\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = C.$$

Объединяя оба ответа (при $x > 0$ и при $x < 0$) в один, окончательно можем записать

$$x - \sqrt{xy} = C. \tag{2}$$

Заметим, что решение $y = x$ $(u = 1)$ входит в (2) при $x > 0$ $(C = 0)$, а решение $y = 0$ вообще не входит. Поэтому все решения данного уравнения описываются формулой (2) с присоединением $y = 0$. Решение же $x = 0$ можно включить в (2) лишь формально, поскольку дифференциал $d\left(x - \sqrt{xy}\right)$ при $x = 0$ не существует. ▶

65. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

◀ Замена $y = xu$, $(u > 0,\ x \neq 0)$ приводит к уравнению

$$xu' = u(\cos\ln u - 1).$$

Считая, что $\ln u \neq 2k\pi$ ($u \neq e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$), получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u(\cos\ln u - 1)}, \quad \ln(|x|C) = \int \frac{d(\ln u)}{\cos\ln u - 1} = \operatorname{ctg}\left(\ln\sqrt{u}\right),$$

или

$$\ln(Cx) = \operatorname{ctg}\ln\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Наконец, легко проверить, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ функция $y = xe^{2k\pi}$, $x \neq 0$, также является решением исходного уравнения. ▶

66. $(6x + y - 1)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0.$

◀ Это уравнение вида (2), п. 3.2. В данном случае

$$a_1 = 6, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad b_2 = 1, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \neq 0.$$

Следовательно, можно применить замену $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$. При этом получим

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad (6u + v + 6\alpha + \beta - 1)\,du + (4u + v + 4\alpha + \beta - 2)dv = 0.$$

Полученное уравнение приводится к однородному, если положить

$$6\alpha + \beta - 1 = 0, \quad 4\alpha + \beta - 2 = 0.$$

Решение этой системы имеет вид $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 4$. Таким образом, после замены $x = u - \frac{1}{2}$, $y = v + 4$ исходное уравнение приводится к однородному:

$$(6u + v)\,du + (4u + v)\,dv = 0.$$

Теперь воспользуемся уже известной заменой $u = v\xi$, $du = v\,d\xi + \xi\,dv$. Следовательно,

$$(6\xi + 1)v\,d\xi + (6\xi^2 + 5\xi + 1)dv = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, отсюда получаем $\left(\xi \neq -\frac{1}{2} \text{ и } \xi \neq -\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{6\xi + 1}{6\xi^2 + 5\xi + 1}\,d\xi + \frac{dv}{v} = 0, \quad \frac{1}{6}\int \frac{6\xi + 1}{6\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)}\,d\xi + \ln|v| = \ln C,$$

или

$$(2\xi + 1)^2 = C\,\frac{3\xi + 1}{v}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$(2x + y - 3)^2 = C\left(3x + y - \frac{5}{2}\right).$$

Решения $2x + y - 3 = 0$ $\left(\xi = -\frac{1}{2}\right)$ и $3x + y - \frac{5}{2} = 0$ $\left(\xi = -\frac{1}{3}\right)$ можно включить в полученное семейство кривых соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ▶

67. $(5x - 7y + 1)\,dy + (x + y - 1)\,dx = 0.$

◀ Поскольку прямые $5x - 7y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ не параллельны, то проводим замену

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

где постоянные α и β удовлетворяют системе уравнений

$$5\alpha - 7\beta + 1 = 0, \quad \alpha + \beta - 1 = 0.$$

из которой находим $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Таким образом, после замены $x = u + \frac{1}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$ получаем дифференциальное уравнение

$$(5u - 7v)\,dv + (u + v)\,du = 0.$$

Как и в предыдущем примере, пользуемся заменой $u = \xi v$. Тогда $du = v\,d\xi + \xi\,dv$, $(\xi^2 + 6\xi - 7) \times$ $\times\, dv + v(\xi + 1)\,d\xi = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int \frac{(\xi + 1)}{(\xi - 1)(\xi + 7)}\,d\xi + \ln(|v|C) = 0, \quad \frac{1}{4}\ln|\xi - 1| + \frac{3}{4}\ln|\xi + 7| + \ln|vC| = 0,$$

откуда

$$(\xi - 1)(\xi + 7)^3v^4 = C \quad \text{или} \quad (x - y)(x + 7y - 4)^3 = C. \blacktriangleright$$

68. $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0.$

◀ Так как прямые $2x+y+1=0$ и $4x+2y-3=0$ параллельны, то замену, которую производили в предыдущих примерах, здесь проводить нельзя. Однако, в силу того, что коэффициенты при переменных x и y пропорциональны, можем положить $z=2x+y$. Тогда $dy=dz-2\,dx$ и исходное уравнение принимает вид

$$5(z-1)\,dx-(2z-3)\,dz=0.$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной y, получаем

$$2x+y-1=Ce^{2y-x}.\ ▶$$

69. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

◀ Посредством замены $x=u+3$, $y=v-2$ приходим к однородному уравнению

$$\frac{dv}{du}=2\frac{v^2}{(u+v)^2}.$$

Применяя еще одну замену $v=u\xi(u)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u\frac{d\xi}{du}=\frac{2\xi^2}{(1+\xi)^2}-\xi.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\int\frac{du}{u}+\int\frac{\xi^2+2\xi+1}{\xi(1+\xi^2)}\,d\xi=C,\quad \ln|u\xi|+2\operatorname{arctg}\xi=C,$$

или (после возвращения к переменным x и y)

$$y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}.\ ▶$$

70. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}.$

◀ Замена $x=u-3$, $y=v+3$ приведет к однородному уравнению

$$\left(\frac{dv}{du}+1\right)\ln\frac{u+v}{u}=\frac{u+v}{u},$$

применение к которому замены $v=u\xi(u)$ позволяет получить уравнение с разделяющимися переменными

$$(u\xi'+\xi+1)\ln(1+\xi)=1+\xi,\quad u\xi'\ln(1+\xi)=(1+\xi)(1-\ln(1+\xi)).$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, находим:

$$\int\frac{du}{u}-\int\frac{\ln(1+\xi)\,d\xi}{(1+\xi)(1-\ln(1+\xi))}=\ln C,$$

или

$$\ln|u|+\ln(1+\xi)+\ln|1-\ln(1+\xi)|=\ln C.$$

Отсюда, потенциируя и возвращаясь к старым переменным, окончательно имеем

$$\ln\frac{x+y}{x+3}=1+\frac{C}{x+y}.\ ▶$$

Замечание. Для решения уравнения (2), п. 3.2, применяют еще и замену

$$z=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},$$

которая сразу приводит к уравнению с разделяющимися переменными. В данном случае можно воспользоваться указанной заменой. Тогда получим уравнение

$$(z+(x+3)z')\ln z=z,\quad \text{где}\quad z=\frac{y+x}{x+3},$$

откуда

$$\ln|x+3|+\ln z+\ln|1-\ln z|=\ln C,\quad \ln\frac{x+y}{x+3}=1+\frac{C}{x+y}.$$

71. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

◀ Уравнение приводится к однородному с помощью замены $x = u - 1$, $y = v - 2$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} + \operatorname{tg}\frac{v-2u}{u}.$$

Далее, как и в предыдущих примерах, применяем замену $v = u\xi(u)$. Тогда получим

$$u\xi' = \operatorname{tg}(\xi - 2).$$

Разделение переменных и интегрирование дает:

$$\frac{d\xi}{\operatorname{tg}(\xi-2)} = \frac{du}{u}, \quad \ln|u| - \ln|\sin(\xi-2)| = \ln C.$$

Потенциируя и возвращаясь к прежним переменным, окончательно имеем

$$x + 1 = C\sin\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

Заметим, что решения $x + 1 = 0$ ($u = 0$) и $\dfrac{y-2x}{x+1} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\operatorname{tg}(\xi - 2) = 0$) входят в полученное семейство решений соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ▶

72. $x^3(y' - x) = y^2$.

◀ Уравнение не является однородным, однако, применив замену $y = (z(x))^\alpha$, замечаем, что уравнение

$$\alpha z^{\alpha-1}x^3\,dz = \left(z^{2\alpha} + x^4\right)dx \tag{1}$$

приводится к однородному, если выбрать $\alpha = 2$. Полагая в (1) $z = xu$, имеем

$$(u^2 - 1)^2\,dx = 2ux\,du.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln|x| + \frac{1}{u^2-1} = C,$$

или

$$\ln|x| + \frac{x^2}{y-x^2} = C. \blacktriangleright \tag{2}$$

Замечание. В данном случае мы получили решение для $y \geqslant 0$, поскольку $y = z^2 \geqslant 0$. Аналогично можно установить, что и для $y = -z^2 \leqslant 0$ семейство решений описывается формулой (2). Решение $y = x^2$ входит в это семейство при $C = \infty$.

73. $2x^2y' = y^3 + xy$.

◀ Положим $y = z^\alpha$. Тогда получим

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}z' = z^{3\alpha} + xz^\alpha,\ 2\alpha x^2 z^{\alpha-1}\,dz - \left(z^{3\alpha} + xz^\alpha\right)dx = 0.$$

Отсюда следует, что функции $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ и $z^{3\alpha} + xz^\alpha$ однородны лишь при одном условии: $\alpha + 1 = 3\alpha = \alpha + 1$, т. е. при $\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, в случае $y \geqslant 0$ применяем замену $y = \sqrt{z}$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$x^2\,dz - (z + x)z\,dx = 0.$$

Замена $z = xu(x)$ преобразует последнее уравнение в уравнение с разделяющимися переменными $x\,du - u^2\,dx = 0$. Интегрируя его, получаем $\frac{1}{u} + \ln|x| = C$, или

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C.$$

Решение $y = 0$ входит в полученное семейство при $C = \infty$. ▶

Замечание 1. В рассмотренном, и в некоторых других примерах мы включали "потерянные" решения в семейство интегральных кривых при сингулярных значениях C. Однако такое включение вызвано не существом дела, а лишь формой записи решения. Покажем это на последнем примере. Имеем

$$x + y^2\ln|x| = Cy^2, \quad \frac{1}{C}(x + y^2\ln|x|) = y^2, \quad C_1(x + y^2\ln|x|) = y^2, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$$

Положив в последней формуле $C_1 = 0$, получим $y \equiv 0$.

Замечание 2. Замена $y = -\sqrt{z}$ (для $y \leqslant 0$) приводит к такому же результату.

74. $y\,dx + x(2xy + 1)\,dy = 0.$

◀ Применив замену $y = z^\alpha$, получим уравнение

$$z^\alpha\,dx + x(2xz^\alpha + 1)\alpha z^{\alpha-1}\,dz = 0.$$

Так как функции z^α и $\alpha x z^{\alpha-1}(2xz^\alpha + 1)$ однородны и имеют одну и ту же степень при $\alpha = -1$, то данное уравнение приводится к однородному с помощью замены $y = \frac{1}{z}$. Однако его можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если воспользоваться заменой $y = \frac{u(x)}{x}$ (в общем случае заменой $y = x^\alpha u(x)$).

Таким образом, получим уравнение

$$-2u^2\,dx + x(2u + 1)\,du = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} + \frac{du}{2u^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{u}\right| + \frac{1}{2u} = \ln C,$$

или

$$2xy = \frac{1}{\ln C|y|}, \quad y^2 e^{-\frac{1}{xy}} = C.$$

Заметим, что последняя форма записи решений исключает такие, как $x = 0$ и $y = 0$, в то время как ей предшествующая включает решение $x = 0$ (при $C = \infty$). Легко показать, что никакие преобразования формулы семейства интегральных кривых не позволяют включить в их состав решение $y = 0$. ▶

75. $2y' + x = 4\sqrt{y}.$

◀ Проверка на обобщенную однородность данного уравнения показывает, что показатель однородности $\alpha = 2$. Следовательно, замена $y = x^2 u(x)$ $(u \geqslant 0)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$2x\,du + (1 + 4u - 4\sqrt{u})\,dx = 0 \quad (x \geqslant 0). \tag{1}$$

Проинтегрировав его, получим:

$$x(1 - 2\sqrt{u}) = Ce^{\frac{1}{2\sqrt{u}-1}}, \quad u = \frac{1}{4},$$

или

$$(x - 2\sqrt{y})e^{\frac{x}{x-2\sqrt{y}}} = C, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Если же $x < 0$, то вместо уравнения (1) получим уравнение

$$2x\,du + (1 + 4u + 4\sqrt{u})\,dx = 0,$$

интегрирование которого приводит к уже полученному результату для уравнения (1). ▶

76. $2\left(\sqrt{x^4y^2 + 1} - x^2y\right)dx - x^3\,dy = 0.$

◀ Полагая $y = z^\alpha$, получаем уравнение

$$2\left(\sqrt{x^4z^{2\alpha} + 1} - x^2z^\alpha\right)dx - \alpha x^3 z^{\alpha-1}\,dz = 0.$$

Отсюда следует, что функции при дифференциалах однородны и имеют одинаковую степень только при $\alpha = -2$. Поэтому замена $y = \frac{u(x)}{x^2}$ приводит к уравнению

$$2\sqrt{u^2 + 1}\,dx - x\,du = 0,$$

откуда находим

$$x^2 = C\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right), \quad \text{или} \quad x^2 = C\left(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2}\right). \blacktriangleright$$

77. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

◀ Согласно условию задачи, $|OK| = |KM|$ (рис. 16). Поэтому $\alpha = 2\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$. Но $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{x}$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Принимая во внимание геометрический смысл производной, окончательно получаем

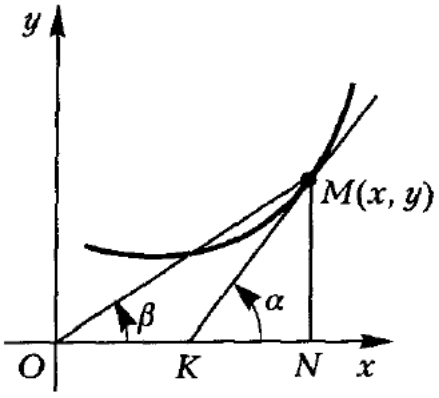


Рис. 16

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Это однородное уравнение и для его решения произведем замену $y = xu(x)$. При этом имеем

$$xu' + u = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u+u^3}\,du.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{x}{u}(u^2+1) = C, \quad \text{или} \quad x^2+y^2 = Cy. \blacktriangleright$$

78. Найти кривую, у которой расстояние до любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

◀ Из рис. 17 видим, что треугольники ONM и OML конгруэнтны, поскольку по условию $|ON| = |OL|$ и гипотенуза OM — общая. Следовательно, углы $\widehat{MOL}$ и $\widehat{MON}$ равны друг другу.

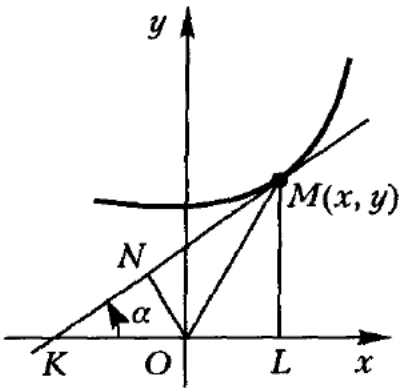


Рис. 17

Но $\widehat{KON} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому $\widehat{MOL} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$. Далее, из треугольника OLM имеем

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{y-x}{y+x}$. Наконец, используя формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и соотношение $\operatorname{tg}\alpha = y'$, получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Применив замену $y = xu(x)$, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{u^2+1} = 0, \quad \ln|x| + \ln(u^2+1) = \ln C,$$

откуда следует, что $x^2+y^2 = Cx$. ▶

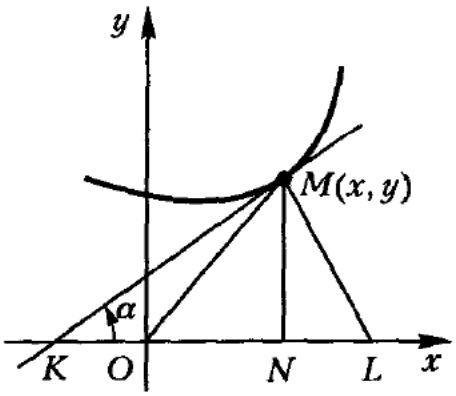


Рис. 18

79. Найти кривые, у которых поднормаль равна разности между модулем радиуса-вектора кривой и абсциссой точки касания.

◀ По условию $|NL| = |OM| - |ON|$ (рис. 18). Поскольку

$$|NL| = y\operatorname{tg}\alpha, \quad |OM| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |ON| = x,$$

то

$$yy' = \sqrt{x^2+y^2} - x.$$

Поскольку это дифференциальное уравнение однородное, то применяем замену $y = xu(x)$. Имеем (для $x > 0$):

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{du^2}{\sqrt{u^2+1}-1-u^2}, \quad 2\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du^2}{\sqrt{u^2+1}-1-u^2} + C,$$

$$x(1-z) = C, \quad \text{где} \quad z = \sqrt{u^2+1}.$$

Таким образом, искомое семейство кривых имеет вид

$$x - \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Случай $x < 0$ предоставляем разобрать читателю. ▶

80. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox, касательной и нормалью к этой же кривой.

◀ По условию, треугольники KMN и OLN (рис. 19) равновелики, поэтому равновелики также треугольники KOP и PML. Поскольку последние еще и подобны, то они конгруэнтны. Следовательно, $|OP| = |PM|$. Из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, где X, Y — текущие координаты точки, лежащей на касательной, следует, что

$$|PO| = y - y'x.$$

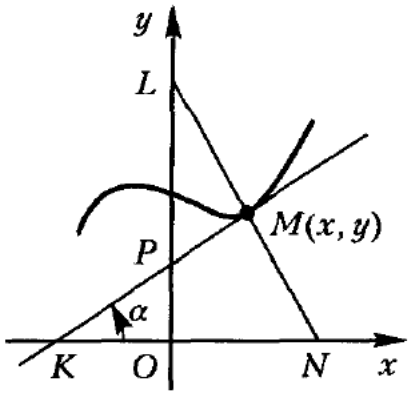


Рис. 19

Длину отрезка PM находим по формуле расстояния между точками $M(x, y)$ и $P(0, |PO|)$:

$$|PM| = \sqrt{x^2 + y'^2 x^2}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$(y - y'x)^2 = x^2 + y'^2 x^2, \quad \text{или} \quad y^2 - 2yy'x - x^2 = 0.$$

Полученное уравнение однородное, поэтому воспользуемся заменой $y = xu(x)$, которая после ее проведения дает возможность разделить переменные. Имеем

$$u^2 + 2uu'x + 1 = 0,$$

откуда интегрированием находим:

$$x(1 + u^2) = 2C, \quad \text{или} \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2. \blacktriangleright$$

81. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

◀ Применив указанную замену, получим

$$mz^{m-1}z' = ax^\alpha + bz^{m\beta} \quad (m \neq 0). \tag{1}$$

Отсюда следует, что если a и b отличны от нуля, то для однородности уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$m - 1 = \alpha = m\beta.$$

Из второго равенства имеем $m = \frac{\alpha}{\beta}$, $(\beta \neq 0,\ \alpha \neq 0)$. Подставив m в первое равенство, получим искомую связь:

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 1. \blacktriangleright$$

82. Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$(ax + by + c)\,dx + (ay - bx + c_1)\,dy = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

являются логарифмическими спиралями.

◀ С помощью формул параллельного переноса системы координат

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta$$

приводим данное уравнение к виду

$$(au + bv)\,du + (av - bu)\,dv = 0.$$

Далее полагаем $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, где ρ, φ — полярные координаты с полюсом в точке (α, β) относительно системы Oxy. Имеем

$$a\rho' = b\rho,$$

откуда находим

$$\rho = Ce^{\frac{b}{a}\varphi}.$$

Получили семейство логарифмических спиралей. ▶

Замечание. Если $a = b = 0$, то получим семейство прямых. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то также получается семейство прямых. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то получим семейство окружностей. Все эти случаи следуют непосредственно из данного уравнения.

83. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, которые выходят из одной и той же точки, параллельно данному направлению.

◀ На рис. 20 показано, что $\widehat{OMN} = \widehat{NMS}$ (угол падения луча OM равен углу отражения луча MS). Выберем направление отраженных лучей параллельно оси Ox. Тогда, исходя из указанного выше равенства углов и параллельности луча MS оси Ox, имеем

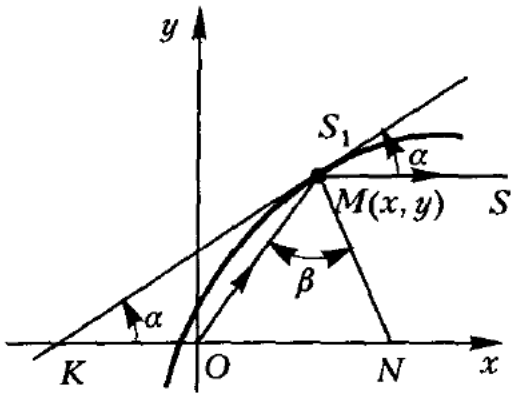


Рис. 20

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{KMO} = \alpha.$$

Следовательно, треугольник KMO — равнобедренный, т. е. $|KO| = |OM|$. Очевидно, $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Длину отрезка KO можно найти, вычислив абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Из уравнения касательной к искомой кривой

$$Y = y + y'(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной, находим требуемую абсциссу:

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Тогда $|KO| = -X$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Это уравнение однородное и с помощью замены $y = xu(x)$, опуская простые выкладки, получаем его решения

$$y^2 - 2Cx - C^2 = 0,$$

геометрически представляющие собой семейство парабол ($C \neq 0$). ▶

84. Пусть k_0 — корень уравнения $f(k) = k$. Показать, что:

1) если $f'(k_0) < 1$, то ни одно решение уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, за исключением решения $y = k_0 x$, не касается прямой $y = k_0 x$ в начале координат;

2) если $f'(k_0) > 1$, то этой прямой касается бесконечно много решений.

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть при выполнении условий $f(k_0) = k_0$, $f'(k_0) < 1$ существует решение уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, касающееся прямой $y = k_0 x$ в начале координат. Тогда в малой окрестности начала координат оно представляется в виде

$$y(x) = k_0 x + x\delta(x), \tag{1}$$

где $\delta(x) \to 0$ при $x \to 0$. Подставив (1) в рассматриваемое уравнение, получаем

$$k_0 + x\delta' + \delta = f(k_0 + \delta(x)) = f(k_0) + f'(k_0)\delta(x) + o(\delta),$$

или

$$x\delta' = A\delta + o(\delta),$$

откуда

$$\frac{x\delta'}{\delta} = A + \frac{o(\delta)}{\delta}, \quad \text{где} \quad A = f'(k_0) - 1.$$

Отбросив $\frac{o(\delta)}{\delta}$ (как величину, стремящуюся к нулю при $x \to 0$), можем записать $\frac{x\delta'}{\delta} \approx A$, откуда находим $\delta \approx C|x|^A$. Из полученной формулы следует, что если $C \neq 0$, то δ к нулю не стремится при $x \to 0$ (в силу того, что $A < 0$). Полученное противоречие и доказывает утверждение 1).

2) В этом случае противоречия нет, поскольку $A > 0$ и $\delta \to 0$ при $x \to 0$ для любых C. ▶

Замечание. Строго говоря, ни одно решение ни в одном из рассмотренных случаев не касается прямой $y = k_0 x$ в начале координат, если молчаливо не допустить, что $\frac{y}{x}\Big|_{x=0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{x}$.

85. Две жидкости x и y подвергают дистиллированию. Известно, что в любой момент времени этого процесса отношение количеств жидкостей, которые превращаются в пар, пропорционально отношению количеств, которые находятся еще в жидком состоянии. Определить зависимость между x и y.

◀ Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — количество жидкостей, не превращенных в пар в момент времени t. Тогда $x(t+\Delta t)$ и $y(t+\Delta t)$ — количества жидкостей, не превращенных в пар в момент времени $t+\Delta t$. Следовательно, за время Δt в пар превратились следующие количества жидкостей:

$$x(t)-x(t+\Delta t) \quad \text{и} \quad y(t)-y(t+\Delta t).$$

Согласно условию, имеем

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{x(t+\Delta t)-x(t)}=k\frac{y(t_1)}{x(t_1)}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$. Если функции x и y дифференцируемы, то из (1) предельным переходом при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=k\frac{y}{x},$$

проинтегрировав которое, находим требуемую зависимость

$$y=Cx^k. \blacktriangleright$$

§ 4. Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

4.1. Линейное уравнение первого порядка.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

называется *линейным уравнением первого порядка*. Наиболее употребительным способом его решения является *метод вариации произвольной постоянной*. Сущность метода состоит в следующем.

Сначала ищется решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0. \tag{2}$$

Затем в общем решении уравнения (2) произвольную постоянную C считают некоторой дифференцируемой функцией от x: $C=C(x)$. Эту функцию находят из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается в результате подстановки общего решения уравнения (2) в уравнение (1).

4.2. Обмен ролями между функцией и аргументом.

Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

4.3. Уравнения, приводимые к линейным.

К линейным уравнениям приводятся также уравнения вида:

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+P(x)f(y)=Q(x), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)=Q(x)e^{ny}, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^m \quad (\textit{уравнение Бернулли}). \tag{5}$$

Полагая в (3) $f(y)=z(x)$, получаем $f'(y)y'=z'(x)$ и $z'+P(x)z=Q(x)$.

В уравнении (4) целесообразно провести замену $e^{-ny} = z(x)$. Тогда получим

$$-ne^{-ny}y' = z', \quad -\frac{z'}{n} + P(x)z = Q(x) \quad (n \neq 0).$$

Уравнение Бернулли приводится к линейному с помощью замены $z(x) = y^{1-m}$ ($m \neq 0$, $m \neq 1$, так как в этих случаях оно уже линейное).

4.4. Уравнение Миндинга—Дарбу.

Уравнение Миндинга—Дарбу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy + R(x, y)(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{6}$$

где M и N — однородные функции степени m, а R — однородная функция степени n, посредством замены $y = ux(u)$ приводится сначала к уравнению Бернулли, а последнее — уже известным способом к линейному.

Решить уравнения.

86. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$.

◀ Сначала находим все решения однородного уравнения, соответствующего данному:

$$y' + y\operatorname{tg} x = 0.$$

Переменные разделяются, и после интегрирования находим

$$y = C\cos x. \tag{1}$$

Формула (1) представляет общее решение однородного уравнения, где C — произвольная постоянная. Для получения всех решений данного уравнения считаем $C = C(x)$ и требуем, чтобы функция $y = C(x)\cos x$ удовлетворяла ему, т. е.

$$C'\cos x - C\sin x + C\cos x\operatorname{tg} x = \sec x,$$

или $C' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда находим $C(x) = \operatorname{tg} x + C_0$, где C_0 — новая произвольная постоянная. Подставив значение $C(x)$ в (1), окончательно получим

$$y = \sin x + C_0\cos x. \blacktriangleright$$

Примечание. В дальнейшем для новой произвольной постоянной будем использовать старое обозначение C. Таким образом, в рассмотренном примере $y = \sin x + C\cos x$ есть общее решение, а C — постоянная.

87. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

◀ Решаем соответствующее однородное уравнение

$$(2x + 1)y' = 2y.$$

Его общее решение имеет вид $y = C(2x + 1)$. Применим метод вариации произвольной постоянной. Имеем

$$\big(C'(2x + 1) + 2C\big)(2x + 1) = 4x + 2C(2x + 1),$$

или $(2x + 1)^2C' = 4x$. Отсюда находим

$$C(x) = 4\int \frac{x\,dx}{(2x + 1)^2} + C_0 = \ln|2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + C_0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$y = (2x + 1)(\ln|2x + 1| + C) + 1. \blacktriangleright$$

88. $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$.

◀ Считая $dx \neq 0$ ($x = 0$ — тривиальное решение), записываем уравнение в виде

$$xy' - xy = e^x.$$

Соответствующее однородное уравнение $xy' - xy = 0$ имеет общее решение $y = Ce^x$. Далее применяем метод вариации произвольной постоянной. Имеем

$$x(C + C')e^x - xCe^x = e^x,$$

откуда $C' = \frac{1}{x}$, $C = \ln|x| + C_0$. Получаем все решения неоднородного уравнения:

$$y = e^x(\ln|x| + C); \quad x = 0. \blacktriangleright \tag{1}$$

89. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$, $M(1, 1)$.

◀ Уравнение не является линейным относительно переменной y, однако оно линейное относительно x. Поэтому целесообразно считать x функцией y.

Считая $dy \neq 0$ ($y = 0$ — тривиальное решение), имеем

$$x + y^2 = y\frac{dx}{dy}.$$

Соответствующее однородное уравнение $x = y\frac{dx}{dy}$ имеет общее решение $x = Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим последовательно

$$Cy + y^2 = y(C'y + C), \quad C' = 1, \quad C = y + C_0.$$

Следовательно, все решения данного уравнения описываются формулами

$$x = Cy + y^2; \quad y = 0. \blacktriangleright \tag{1}$$

Замечание. Переписав первую формулу в (1) в виде $y = \frac{x - y^2}{C}$ и положив $C = \infty$, получим решение $y = 0$. Таким образом, если допустить, что постоянная C может принимать сингулярное значение, то решение $y = 0$ можно не выписывать отдельно.

Полагая в (1) $x = 1$, $y = 1$, находим $C = 0$. Тогда из (1) получим частное решение $x = y^2$.

90. $(2e^y - x)y' = 1$.

◀ Предложенное уравнение линейное относительно x. Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, то его можно записать в виде

$$2e^y - x = x'. \tag{1}$$

Общим решением однородного уравнения $x' + x = 0$ является функция

$$x = Ce^{-y}. \tag{2}$$

Считая $C = C(y)$ и подставив (2) в уравнение (1), получим последовательно

$$2e^y - Ce^{-y} = C'e^{-y} - Ce^{-y}, \quad C' = 2e^{2y}, \quad C(y) = e^{2y} + C_0.$$

Окончательно имеем

$$x = Ce^{-y} + e^y. \blacktriangleright$$

91. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.

◀ Уравнение линейное относительно переменной x, поэтому представляем в его в виде

$$x' - x\operatorname{ctg} y = \sin^2 y.$$

Применив метод вариации произвольной постоянной, получим

$$x(y) = C(y)\sin y, \quad \text{где} \quad C(y) = -\cos y + \text{const}. \blacktriangleright$$

92. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + (2 - x)\ln y = x\left(e^{-2x} + e^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

◀ Это уравнение вида (3), п. 4.3, поэтому применяем замену $\ln y = z(x)$. Имеем

$$z' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}, \quad z' + (2 - x)z = x\left(e^{-2x} + e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Полученное уравнение линейное относительно z. Пользуясь методом вариации произвольной постоянной, получаем

$$z(x) = C(x)e^{\frac{x^2}{2}-2x}, \quad \text{где} \quad C(x) = \int x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{2x}\right) dx + C_0.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\ln y = e^{\frac{x^2}{2}-2x}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right). \blacktriangleright$$

93. $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + 1.$

◀ Это также уравнение вида (3) , п. 4.3. Следовательно, произведем замену $z(x) = \sqrt{y^2+1}$. Тогда получим

$$z' = \frac{y'}{\sqrt{y^2+1}}, \quad z' + z = x^2 + 1.$$

Проделав всю необходимую процедуру, требуемую в методе вариации произвольной постоянной, найдем:

$$z = C(x)e^{-x}, \quad \text{где} \quad C(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right) + C_0.$$

Итак,

$$\sqrt{y^2+1} = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}$$

— общее решение исходного уравнения. ▶

94. $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x} = e^y.$

◀ Умножив обе части рассматриваемого уравнения на e^x, получим уравнение вида (4), п. 4.3.:

$$\frac{dy}{dx} - 1 = e^x e^y.$$

Следовательно, применяем замену $z(x) = e^{-y}$. Тогда получим последовательно

$$z'(x) = -e^{-y}y'(x), \quad -e^y z' - 1 = e^x e^y, \quad -z' - z = e^x.$$

Полученное уравнение линейно относительно z. Его решение имеет вид:

$$z = Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x.$$

Осталось записать общее решение исходного уравнения:

$$e^{-y} = Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x. \blacktriangleright$$

95. $3\,dy + \left(1 + e^{x+3y}\right)dx = 0.$

◀ Преобразовав уравнение к виду

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^x \cdot e^{3y},$$

замечаем, что оно относится к виду (4), п. 4.3. Поэтому воспользуемся заменой $z(x) = e^{-3y}$. Тогда последовательно получим

$$z'(x) = -3e^{-3y}y', \quad -\frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^x}{z}, \quad z' - z = e^x.$$

Общее решение линейного уравнения находим известным способом, в результате чего имеем

$$z(x) = Ce^x + xe^x.$$

Осталось записать общее решение исходного уравнения:

$$y = -\frac{1}{3}\ln(C + x) - \frac{x}{3}. \blacktriangleright$$

96. $\dfrac{\sqrt{\ln y}}{y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{3(x+1)}\sqrt{(\ln y)^3}=1.$

◀ Уравнение относится к виду (3), п. 4.3, поскольку

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3}\right)=\frac{\sqrt{\ln y}}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, произведя замену $z(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3}$, получим линейное уравнение

$$z'+\frac{z}{x+1}=1,$$

общее решение которого имеет вид:

$$z=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{C}{x+1}.$$

Окончательно общий интеграл запишется в виде

$$\frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3}=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{C}{x+1}.\ \blacktriangleright$$

97. $(x+1)(y'+y^2)=-y.$

◀ Считая, что $x\neq -1$, делим обе части уравнения на $x+1$ и записываем его в виде

$$y'+\frac{y}{x+1}=-y^2.$$

Это есть уравнение Бернулли. Разделив обе его части на y^2, затем производим замену $y^{-1}=z(x)$. Тогда последовательно получаем

$$z'(x)=-y^{-2}y',\quad z'-\frac{z}{x+1}=1.$$

Полученное линейное уравнение решаем методом вариации произвольной постоянной. При этом находим

$$z=C(x)(x+1),\quad \text{где}\quad C(x)=\ln|x+1|+C_0.$$

Окончательно решение исходного уравнения принимает вид

$$y=\frac{1}{(x+1)(\ln|x+1|+C)}.\ \blacktriangleright$$

98. $xy\,dx+(x^2+y^2+1)\,dy=0.$

◀ Произведя замену $x^2=u(y)$, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2}y\frac{du}{dy}+u=-(y^2+1).$$

Его общее решение имеет вид $u=\dfrac{C(y)}{y^2}$, где $C(y)=-y^2\left(\dfrac{y^2}{2}+1\right)+\text{const}$. Таким образом, имеем все решения исходного уравнения:

$$y^4+2x^2y^2+2y^2=C.\ \blacktriangleright$$

99. $(x^3y-3x^2y+y^3)\,dx+2x^3\,dy=0.$

◀ Разделив обе части уравнения на $dx\neq 0$ ($x=0$ — очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3\frac{dy}{dx}+(x^3-3x^2)y=-y^3.$$

Считая $y\neq 0$ ($y=0$ — тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на $-y^3$ и полагаем $\frac{1}{y^2}=z(x)$. Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3}=z'(x);\quad x^3z'-(x^3-3x^2)z=1.$$

Решая это линейное уравнение, находим

$$z = C(x)x^{-3}e^x, \quad \text{где} \quad C(x) = -e^{-x} + C_0.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения:

$$Cy^2e^x - y^2 - x^3 = 0; \quad x = 0; \quad y = 0. \blacktriangleright$$

100. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

◀ Умножив обе части уравнения на y и положив $y^2 = u(x)$, получим линейное уравнение

$$u' - \frac{x}{x^2 - 1}u = x. \tag{1}$$

Ищем решение в виде $u = f(x)w(x)$. Подставив u и u' в (1), имеем

$$\left(f' - \frac{xf}{x^2 - 1}\right)w + w'f = x.$$

Функции f и w находим из уравнений

$$f' - \frac{xf}{x^2 - 1} = 0, \quad w'f = x.$$

Из первого уравнения получаем $f = C\sqrt{|x^2 - 1|}$. Из второго уравнения следует, что

$$w = \frac{1}{C}\sqrt{|x^2 - 1|}\operatorname{sgn}(x^2 - 1) + C_0.$$

Следовательно, $u = |x^2 - 1|\operatorname{sgn}(x^2 - 1) + C\sqrt{|x^2 - 1|} = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$, откуда

$$y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}. \blacktriangleright$$

101. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

◀ Разделив обе части уравнения на $y' \neq 0$ ($y = 0$ — очевидное решение) и приняв x за функцию от y, получим уравнение Бернулли

$$2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y.$$

Используя замену $x^{-2} = z(y)$, приходим к линейному уравнению

$$yz' + z = \sin y,$$

общее решение которого выражается формулой

$$z = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}.$$

Все решения исходного уравнения имеют вид:

$$y = 0; \quad \frac{1}{x^2} = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}, \quad \text{или} \quad y + x^2 \cos y - Cx^2 = 0. \blacktriangleright$$

102. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)\,dx + 2(y - 1)\,dy = 0$.

◀ Преобразовывая уравнение следующим образом:

$$\left((x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 2\right)\,d(x + 1) + d(y - 1)^2 = 0$$

и полагая $x + 1 = u$, $(y - 1)^2 = v$, приходим к линейному уравнению

$$\frac{dv}{u} + v = 2 - u^2$$

с его общим решением $v = Ce^{-u} - u^2 + 2u$. Все решения исходного уравнения описываются формулой

$$x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}. \blacktriangleright$$

103. $(e^y - y')x = 2.$

◀ Полагая $e^y = z(x)$, получим уравнение Бернулли

$$z' + \frac{2}{x} z = z^2.$$

Его общее решение имеет вид

$$z(x) = \frac{1}{x(1 + Cx)}.$$

Общее решение исходного уравнения запишется в виде

$$y = -\ln(x + Cx^2). \blacktriangleright$$

104. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt + x + 1.$

◀ Взяв от обеих частей равенства производную, получим линейное уравнение

$$y' = y + 1,$$

общее решение которого

$$y = Ce^x - 1.$$

Исходя из очевидного начального условия $y(0) = 1$, находим $C = 2$. Следовательно,

$$y = 2e^x - 1. \blacktriangleright$$

105. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt.$

◀ Дважды дифференцируя левую и правую части равенства, имеем последовательно

$$\int\limits_0^x y(t)\,dt = 2 + y(x); \quad y(x) = y'(x),$$

откуда находим $y(0) = -2$ и $y(x) = Ce^x$. Из начального условия следует, что $C = 2$. Итак, функция

$$y(x) = -2e^x$$

есть решение поставленной задачи. ▶

106. $y\,dx + x\,dy + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0.$

◀ Это уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку функции $M(x, y) = y$ и $N(x, y) = x$ однородные и имеют степень 1, а функция $R(x, y) = y^2$ однородная и имеет степень 2. Следовательно, применима замена $y = ux(u)$. Имеем $ux\,dx + x(u\,dx + x\,du) + u^2x^2(x(u\,dx + x\,du) - ux\,dx) = 0$, или

$$2u\,dx + x(1 + x^2u^2)\,du = 0; \quad x = 0. \tag{1}$$

Разделим обе части полученного дифференциального уравнения на du. Оно превратится в уравнение Бернулли

$$2u\frac{dx}{du} + x = -u^2x^3.$$

Полагая $x^{-2} = z$, приходим к линейному уравнению

$$uz' - z = u^2.$$

Легко проверить, что его общее решение представляется в виде $z = u^2 + Cu$. Последовательно возвращаясь к старым переменным, окончательно имеем

$$y^2 + Cxy - 1 = 0.$$

Решения $x = 0$ и $y = 0$ входят сюда при $C = \infty$. ▶

107. $(x^2y + y^3 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0.$

◀ Записывая уравнение в виде

$$0 \cdot y^3\,dy + (x^2y + y^3)\,dx + x(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

замечаем, что оно есть уравнение Миндинга—Дарбу. Поэтому, полагая $y = ux$, получаем

$$x^3(u + u^3)\,dx + x^3\,du = 0,$$

или

$$x = 0; \quad \frac{du}{u(1 + u^2)} + dx = 0; \quad u = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = Ce^{-x}$. Возвращаясь к переменным x и y, окончательно получаем

$$y^2 = C^2e^{-2x}(x^2 + y^2); \quad x = 0. \blacktriangleright$$

108. $y^2(x + a)\,dx + x(x^2 - ay)\,dy = 0.$

◀ Это уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку оно приводится к стандартному виду

$$y^2x\,dx + x^3\,dy + ay(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Произведя замену $y = ux(u)$, получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{du} + \frac{x}{u(u + 1)} = \frac{a}{u + 1},$$

для решения которого применим метод вариации произвольной постоянной. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$x = \frac{u + 1}{u}C. \tag{1}$$

Считая $C = C(u)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{du} = a\left(\frac{1}{u + 1} - \frac{1}{(u + 1)^2}\right),$$

решение которого имеет вид

$$C(u) = a\ln(C_0(u + 1)) + \frac{a}{u + 1}, \quad C_0 = \text{const}.$$

Подставив значение $C(u)$ в (1) и принимая во внимание, что $u = \frac{y}{x}$, запишем общее решение исходного уравнения в виде

$$\frac{x}{x + y} = C\exp\left(\frac{x(a - y)}{a(x + y)}\right). \blacktriangleright$$

109. $(2xy - x^2y - y^3)\,dx - (x^2 + y^2 - x^3 - xy^2)\,dy = 0.$

◀ Это также уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку

$$(2xy - x^2y - y^3)\,dx - (x^2 + y^2 - x^3 - xy^2)\,dy = 2xy\,dx - (x^2 + y^2)\,dy - (x^2 + y^2)(y\,dx - x\,dy).$$

Полагая $y = ux(u)$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(u - u^3)\,dx + x(1 + u^2)(x - 1)\,du = 0,$$

из которого следует, что

$$\frac{x - 1}{x}\,\frac{u}{1 - u^2} = C.$$

Следовательно, в старых переменных имеем

$$y(x - 1) = C(x^2 - y^2). \blacktriangleright$$

Решить следующие задачи.

110. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси Ox от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

◀ Из уравнения касательной к искомой кривой в точке $M(x, y)$

$$Y - y = y'(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной, следует, что абсцисса точки пересечения ее с осью Ox равна $x - \frac{y}{y'}$. Согласно условию, имеем уравнение

$$x - \frac{y}{y'} = ky, \quad \text{или} \quad y\frac{dx}{dy} - x = -ky.$$

Все решения полученного уравнения имеют вид

$$x = y(C - k\ln|y|). \blacktriangleright$$

111. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

◀ Из уравнения касательной (см. предыдущий пример) находим длину отрезка OK : $|OK| = y - xy'$ (рис. 21). Пусть S — площадь трапеции $KONM$. Имеем

$$S = \frac{|KO| + |MN|}{2}|ON|.$$

Согласно условию задачи, $S = 3a^2$. Следовательно,

$$3a^2 = \frac{1}{2}(y - xy' + y)x.$$

Полученное уравнение линейное относительно y:

$$xy' - 2y = -\frac{6a^2}{x}.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = \frac{2a^2}{x} + Cx^2. \blacktriangleright$$

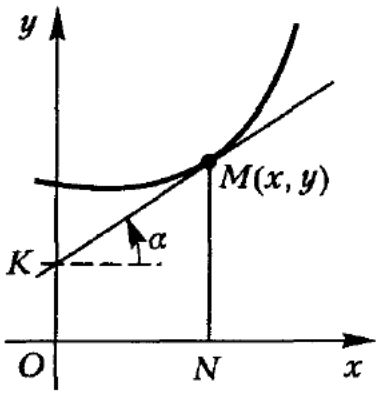


Рис. 21

112. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль является средним арифметическим квадратов координат этой точки.

◀ Согласно условию, имеем (рис. 22.):

$$|NL| = \frac{1}{2}\left(|ON|^2 + |MN|^2\right).$$

Рассмотрим треугольник MNL и найдем длину катета NL. Имеем $|NL| = yy'$. Таким образом, дифференциальное уравнение искомых кривых имеет вид

$$2yy' = x^2 + y^2.$$

Полагая в нем $y^2 = u$, получим линейное уравнение $u' - u = x^2$. Решая его, находим $u = Ce^x - x^2 - 2x - 2$. Окончательно имеем

$$y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2. \blacktriangleright$$

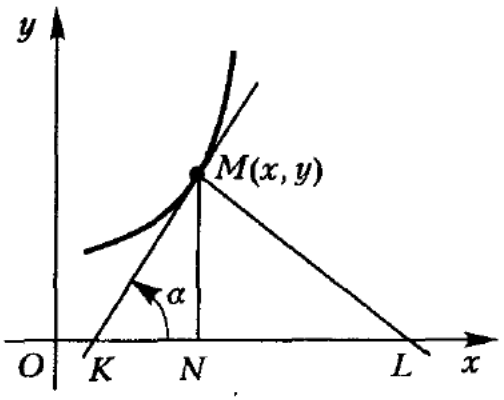


Рис. 22

113. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак втекает 5 л воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

◀ Пусть $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ — количества соли в кг соответственно в первом и втором баке в момент времени t от начала переливания. Тогда $\frac{5Q_1(t_{11})\Delta t}{100}$ — количество соли, выливающееся из первого бака во второй за время от t до $t+\Delta t$, а $\frac{5Q_2(t_{12})\Delta t}{100}$ — количество соли, выливающееся из второго бака за этот же промежуток времени, где $t_{11} \in (t, t+\Delta t)$, $t_{12} \in (t, t+\Delta t)$. Следовательно,

$$Q_2(t+\Delta t) = Q_2(t) + \frac{5Q_1(t_{11})}{100}\Delta t - \frac{5Q_2(t_{12})}{100}\Delta t \qquad (1)$$

есть количество соли во втором баке в момент времени $t + \Delta t$, а

$$Q_1(t + \Delta t) = Q_1(t) - \frac{5Q_1(t_{11})}{100}\Delta t \tag{2}$$

есть количество соли в первом баке в этот же момент времени. Из (2), переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ_1}{dt} = -0{,}05Q_1,$$

откуда $Q_1 = Ce^{-0{,}05t}$, где время t измеряется в минутах. Поскольку $Q_1(0) = 10$, то $C = 10$. Следовательно,

$$Q_1 = 10e^{-0{,}05t}. \tag{3}$$

Совершив предельный переход в (1) при $\Delta t \to 0$, и принимая во внимание (3), получим

$$\frac{dQ_2}{dt} = -0{,}05Q_2 + 0{,}5e^{-0{,}05t}.$$

Решив линейное уравнение, имеем

$$Q_2(t) = (0{,}5t + C)e^{-0{,}05t}.$$

Так как $Q_2(0) = 0$, то $C = 0$. Окончательно находим

$$Q_2(t) = 0{,}5te^{-0{,}05t}.$$

Исследуя функцию Q_2 на экстремум, получим, что $\max Q_2$ достигается при $t = 20$ мин и равен

$$Q_2(20) = \frac{10}{e} \approx 3{,}68 \text{ кг}. \blacktriangleright$$

114. За время Δt (где $\Delta t \to 0$ и выражено в долях года) из каждого грамма радия распадается $0{,}00044\,\Delta t$ грамма и образуется $0{,}00043\,\Delta t$ грамма радона. Из каждого грамма радона за время Δt распадается $70\Delta t$ грамма. В начале опыта имелось некоторое количество x_0 чистого радия. Когда количество образовавшегося и еще не распавшегося радона будет наибольшим?

◀ Обозначим через $P(t)$ и $Q(t)$ количества нераспавшихся радия и радона соответственно в момент времени t от начала распада (в годах). Тогда $P(t) - P(t + \Delta t)$ есть количество распавшегося радия за время от t до $t + \Delta t$, а $Q(t + \Delta t) - Q(t)$ — количество образовавшегося радона за это же время. Согласно условию задачи, имеем уравнения:

$$P(t) - P(t + \Delta t) = P(t_{11}) \cdot 0{,}00044\Delta t, \tag{1}$$

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = P(t_{11}) \cdot 0{,}00043\Delta t - Q(t_{12})70\Delta t, \tag{2}$$

где $t_{11} \in (t, t + \Delta t)$, $t_{12} \in (t, t + \Delta t)$. Совершив предельный переход при $\Delta t \to 0$ (предварительно разделив на Δt левые и правые части уравнений (1) и (2)), получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dP}{dt} = -0{,}00044P(t), \tag{3}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}00043P(t) - 70Q(t). \tag{4}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$P(t) = x_0e^{-0{,}00044t}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим дифференциальное уравнение, проинтегрировав которое, найдем:

$$Q(t) = Ce^{-70t} + \frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}e^{-0{,}00044t}.$$

Принимая во внимание начальное условие $Q(0) = 0$, определяем C: $C = -\frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}$. Окончательно имеем

$$Q(t) = \frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}\left(e^{-0{,}00044t} - e^{-70t}\right).$$

Исследование на экстремум функции $f(t) = e^{-0{,}00044t} - e^{-70t}$ показывает, что $\max f(t)$ достигается при

$$t = \frac{1}{69{,}99956}\ln\frac{70}{0{,}00044} \approx 0{,}17 \text{ года} \approx 62 \text{ дня}. \blacktriangleright$$

115. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.

◀ Линейное дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

имеет общее решение

$$y = (C + \alpha(x))\beta(x), \tag{1}$$

где $\alpha(x) = \int Q(x)\beta^{-1}(x)\,dx$, $\beta(x) = \exp\left(-\int P(x)\,dx\right)$. Согласно условию, из (1) имеем

$$y_1(x) = (C_1 + \alpha(x))\beta(x), \quad y_2(x) = (C_2 + \alpha(x))\beta(x), \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, соответствующие решениям y_1 и y_2. Далее, исходя из равенств (2), выражаем функции α и β через решения y_1 и y_2. Получим

$$\alpha(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{C_1 - C_2} \quad (C_1 \neq C_2), \quad \beta(x) = \frac{C_1y_2(x) - C_2y_1(x)}{y_1(x) - y_2(x)} \quad (y_1(x) \not\equiv y_2(x)).$$

Наконец, подставив значения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в (1), найдем:

$$y = \frac{1}{C_1 - C_2}\Big((C_1 - C)y_2(x) + (C - C_2)y_1(x)\Big) = y_2(x) + \widetilde{C}\Big(y_2(x) - y_1(x)\Big),$$

где $\widetilde{C} = \frac{C_2 - C}{C_1 - C_2}$ — произвольная постоянная. ▶

116. Найти то решение уравнения

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остается ограниченным при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

◀ Из рассмотрения общего решения этого уравнения

$$y = C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$$

следует, что $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} y(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$ существует лишь при $C = 1$ и равен нулю. Поэтому

$$y = \operatorname{tg} x - \sec x$$

является требуемым решением. ▶

117. Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$ имеем $a = \text{const} > 0$, непрерывная функция $f \to b$ при $x \to 0$. Показать, что только одно решение уравнения остается ограниченным при $x \to 0$, и найти предел этого решения при $x \to 0$.

◀ Представляем общее решение уравнения в виде

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a}\int_0^x f(t)|t|^{a-1}\,d(|t|)$$

($d(|t|) = \operatorname{sgn} t\,dt$, $t \neq 0$), или

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a}\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}\,d(|t|), \tag{1}$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$ в силу условия. Вследствие оценки

$$\frac{1}{|x|^a}\left|\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}\,d(|t|)\right| \leqslant \frac{1}{a}\sup_{0 \leqslant t \leqslant x}|\varepsilon(t)| \to 0, \quad x \to 0,$$

из (1) следует, что $\lim\limits_{x \to 0} y$ существует и ограничен только при $C = 0$ и равен $\frac{b}{a}$. Решение уравнения, о котором шла речь в условии задачи, имеет вид

$$y = \frac{1}{|x|^a}\int_0^x f(t)|t|^{a-1}\,d(|t|). \text{ ▶}$$

118. Пусть в дифференциальном уравнении в предыдущей задаче $a = \text{const} < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показать, что все решения этого уравнения имеют один и тот же конечный предел при $x \to 0$. Найти этот предел.

◀ Очевидно, что общее решение рассматриваемого уравнения при соблюдении условия $f(x) \to b$ при $x \to 0$ можно представить в виде

$$y = |x|^{-a}\left(C + \int f(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)\right) = \frac{b}{a} + |x|^{-a}\left(C + \int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)\right).$$

Если интеграл $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)$ ограничен, то при любом C, очевидно, $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a}$. Если указанный интеграл не ограничен при $x \to 0$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)}{|x|^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a}$ при всех значениях C. ▶

119. Показать, что уравнение $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, где функция f непрерывная и $|f(t)| \leqslant M$ при $-\infty < t < +\infty$, имеет одно решение, ограниченное при $-\infty < t < +\infty$. Найти это решение. Показать, что найденное решение периодическое, если функция f периодическая.

◀ Общее решение данного уравнения можно представить в виде

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau. \tag{1}$$

Такое представление возможно в силу того, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau,$$

как показывает оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau\right| \leqslant Me^{t}, \tag{2}$$

сходится. Из неравенства (2) также следует, что функция $e^{-t}\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau$ ограничена числом M для всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом, необходимым (и достаточным) условием ограниченности функции x является равенство $C = 0$. Упоминаемое в условии решение имеет вид

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau. \tag{3}$$

Пусть, далее, $\forall \tau \in (-\infty, +\infty)$ $f(\tau + T) = f(\tau)$, где $T > 0$. Тогда из (3) находим

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau + T)e^{\tau}\,d\tau = e^{-(t+T)}\int_{-\infty}^{t+T} f(\tau_1)e^{\tau_1}\,d\tau_1 = x(t+T),$$

где $\tau_1 = \tau + T$. Следовательно, x — периодическая функция. ▶

Замечание. Требование непрерывности функции f не является необходимым. Выделение класса функций f, для которого эта теорема верна, предоставляется читателю.

120. Показать, что только одно решение уравнения $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найти этот предел. Выразить это решение через интеграл.

◀ Исходим из общего решения данного уравнения

$$y = xe^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2}\,dx\right). \tag{1}$$

В силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$, выражение в скобках в (1) можно представить в виде

$$C + \int e^{-x^2}\,dx = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt, \tag{2}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Равенство (2) легко проверяется посредством дифференцирования. Таким образом, все решения изучаемого уравнения выражаются формулой

$$y = xe^{x^2}\left(C_1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt\right). \tag{3}$$

Пусть $x \to +\infty$. Тогда из (3) замечаем, что для ограниченности y при $x \to +\infty$ необходимо выполнение условия

$$C_1 = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = -\sqrt{\pi}.$$

Последнее равенство и достаточное для того, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ был конечным. Действительно, по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt - \sqrt{\pi}}{x^{-1}e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-(x^{-2}+2)e^{-x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь запишем искомое решение:

$$y = xe^{x^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt - \sqrt{\pi}\right) = x\int\limits_{+\infty}^{x} e^{x^2-t^2}\,dt. \blacktriangleright$$

121. Найти периодическое решение уравнения

$$y' = 2y\cos^2 x - \sin x.$$

◀ В силу сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t-\sin t\cos t}\sin t\,dt,$$

общее решение данного уравнения представляем в виде

$$y = Ce^{x+\sin x\cos x} - \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t+x-\sin t\cos t+\sin x\cos x}\sin t\,dt. \tag{1}$$

Поскольку функция $e^{x+\sin x\cos x}$, очевидно, не является периодической, а функция

$$y_1(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t+x-\sin t\cos t+\sin x\cos x}\sin t\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s-\sin s\cos(s+2x)}\sin(x+s)\,ds,$$

как следует из тождества,

$$y_1(x) = \int\limits_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-t_1+(x+2\pi)-\sin t_1\cos t_1+\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}\sin t_1\,dt_1 \equiv y_1(x+2\pi),$$

где $t_1 = t + 2\pi$, является 2π-периодической, то функция y периодическая только при $C = 0$. Полагая в (1) $C = 0$, получим периодическое решение $y = y_1(x)$. ▶

122. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$$

$a(t) \geqslant C > 0$, $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и функции a, f непрерывны при $t > t_0$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t \to +\infty$.

◀ Исходя из общего решения данного уравнения

$$x(t) = \left(C + \int f(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) dt\right) \exp\left(-\int a(t)\,dt\right),$$

условий задачи, и применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C + \int f(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) dt}{\exp\left(\int a(t)\,dt\right)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right)}{a(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right)} = 0.$$

Заметим, что непрерывность функций a и f здесь гарантирует дифференцируемость соответствующих интегралов, а условие $a(t) \geqslant C > 0$ используется дважды:

$$\exp\left(\int a(t)\,dt\right) > e^{Ct} \to +\infty \quad \text{и} \quad \left|\frac{f(t)}{a(t)}\right| \leqslant \frac{|f(t)|}{C} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \blacktriangleright$$

123. Пусть в уравнении из предыдущей задачи имеем $a(t) \geqslant C > 0$ и пусть $x_0(t)$ решение с начальным условием $x_0(0) = b$. Показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если изменить функцию f и число b меньше чем на δ (т. е. заменить их такой функцией f_1 и таким числом b_1, что $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$), то решение $x_0(t)$ изменится при $t \geqslant 0$ меньше, чем на ε. Это свойство решения называется устойчивостью по отношению к постоянно действующим возмущениям.

◀ Пусть $t_0 = 0$. Тогда общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде

$$x(t) = \left(C + \int_0^t f(\tau) \exp\left(\int_0^\tau a(\xi)\,d\xi\right) d\tau\right) \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right). \tag{1}$$

Исходя из формулы (1) и условий задачи, имеем

$$x_0(t) = \left(b + \int_0^t f(\tau) \exp\left(\int_0^\tau a(\xi)\,d\xi\right) d\tau\right) \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right), \tag{2}$$

$$x_1(t) = \left(b_1 + \int_0^t f_1(\tau) \exp\left(\int_0^\tau a(\xi)d\xi\right) d\tau\right) \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right). \tag{3}$$

Вычитая почленно из (2) равенство (3), получим оценку

$$|x_0(t) - x_1(t)| \leqslant |b - b_1| \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right) + \int_0^t |f(\tau) - f_1(\tau)| \exp\left(-\int_\tau^t a(\xi)\,d\xi\right) d\tau. \tag{4}$$

Поскольку

$$|b - b_1| < \delta, \quad |f(\tau) - f_1(\tau)| < \delta, \quad \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right) \leqslant e^{-Ct}, \quad \exp\left(-\int_\tau^t a(\xi)\,d\xi\right) \leqslant e^{-C(t-\tau)},$$

то из (4) следуют оценки

$$|x_0(t) - x_1(t)| \leqslant \delta\left(e^{-Ct} + \frac{1}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)\right) < \delta\left(1 + \frac{1}{C}\right).$$

Таким образом, если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать число $\delta = \frac{\varepsilon C}{1+C}$, то при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|x_0(t) - x_1(t)| < \varepsilon,$$

указывающее, согласно определению, на устойчивость решения $x_0(t)$ при постоянно действующих возмущениях. ▶

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

5.1. Уравнение в полных дифференциалах.

Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции Φ, т. е.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y). \tag{2}$$

Теорема. *Если функции M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ непрерывны в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, то условие*

$$\frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $M\,dx + N\,dy$ было полным дифференциалом функции Φ.

При этом

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\,dt. \tag{3}$$

Точка (x_0, y_0) выбирается так, чтобы сегменты $[x_0, x]$, $[y_0, y]$ принадлежали области D. Функцию Φ можно также представить в виде

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\,dt.$$

Все решения уравнения (1) содержатся в равенстве $\Phi(x, y) = C$, являющемся для этого уравнения общим интегралом.

5.2. Интегрирующий множитель.

Функция $\mu = \mu(x, y) \not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение вида (1) превращается в уравнение в полных дифференциалах, называется *интегрирующим множителем* для этого уравнения.

Теорема 1. *Если функции M и N непрерывны, имеют непрерывные частные производные, то интегрирующий множитель существует, если $M^2 + N^2 \neq 0$ (достаточные условия).*

Теорема 2. *Если $\mu_0(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения вида (1), а $u_0(x, y)$ — соответствующий ему интеграл этого уравнения, т. е.*

$$\mu_0(M\,dx + N\,dy) = du_0,$$

то $\mu = \mu_0(x, y)\varphi(u_0)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, также будет интегрирующим множителем указанного уравнения.

Это свойство интегрирующего множителя позволяет во многих случаях находить его *методом разбиения данного уравнения на две части.*

Сущность метода заключается в следующем. Пусть $u_1(x, y) = C_1$, $\mu_1(x, y)$; $u_2(x, y) = C_2$, $\mu_2(x, y)$ — общие интегралы и интегрирующие множители соответственно для уравнений

$$M_1\,dx + N_1\,dy = 0, \quad M_2\,dx + N_2\,dy = 0. \tag{4}$$

Тогда, в силу приведенной выше теоремы, функции $\mu_1^* = \mu_1\varphi_1(u_1)$ и $\mu_2^* = \mu_2\varphi_2(u_2)$ являются интегрирующими множителями для первого и второго уравнений соответственно. Если удастся подобрать функции φ_1 и φ_2 так, чтобы выполнялось равенство $\mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2)$, то интегрирующим множителем для уравнения

$$(M_1 + M_2)\,dx + (N_1 + N_2)\,dy = 0, \tag{5}$$

очевидно, является функция $\mu = \mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2)$.

5.3. Дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя.

Если известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x, y)$ — известная дифференцируемая функция, то интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{6}$$

Найти общие интегралы уравнений.

124. $(x\ln y - x^2 + \cos y)\,dy + (x^3 + y\ln y - y - 2xy)\,dx = 0.$

◀ Так как на множестве $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty,\ y > 0\right\}$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y\ln y - y - 2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x\ln y - x^2 + \cos y) = \ln y - 2x,$$

то левая часть рассматриваемого уравнения является полным дифференциалом некоторой функции Φ. По формуле (3), п. 5.1, получаем

$$\Phi(x, y) = \int_0^x (t^3 + y\ln y - y - 2ty)\,dt + \int_{y_0}^y \cos t\,dt = \frac{x^4}{4} + xy(\ln y - 1) - yx^2 + \sin y - \sin y_0.$$

Общий интеграл уравнения записывается в виде

$$x^4 + 4xy(\ln y - 1) - 4x^2y + 4\sin y = C. \blacktriangleright$$

125. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0.$

◀ Поскольку при $|y| > |x|$ выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right) = -y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

то имеем уравнение в полных дифференциалах. Применив формулу (3), п. 5.1, получим

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \left(t + \frac{1}{\sqrt{y^2 - t^2}}\right)dt + \int_{y_0}^y t\,dt = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{2}y_0^2.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$x^2 + y^2 + 2\arcsin\frac{x}{y} = C. \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения методом интегрирующего множителя, зная, что $\mu = f(x)$ или $\mu = f(y)$.

126. $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)dy = 0.$

◀ Полагая в (6), п. 5.3, $\omega = x$, $M = 1 + \frac{y}{x^2}$, $N = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}$, получаем

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4y}{x^3}\right) \equiv \frac{2\mu}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right),$$

или

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{2\mu}{x}.$$

Отсюда $\mu = x^2$ ($C = 1$). Видим, что выбор функции ω оказался удачным. Умножив почленно данное уравнение на x^2, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x^2 + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$$

Применив формулу (3), п. 5.2, найдем общий интеграл:

$$x^3 + 3xy + 3y^2 = C. \blacktriangleright$$

127. $y^2(x-3y)\,dx+(1-3xy^2)dy=0.$

◀ Положим в (6), п. 5.3, $\omega=x$, $M=y^2(x-3y)$, $N=1-3xy^2$:

$$\left(1-3xy^2\right)\frac{d\mu}{dx}=2y(x-3y)\mu;\quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{2y(x-3y)}{1-3xy^2}.$$

Замечаем, что μ не может зависеть только от x, поскольку слева в последнем равенстве имеется функция только от x, а справа — функция от x и y (x и y — независимые переменные). Испытаем теперь множитель $\omega=y$.

Имеем

$$-y^2(x-3y)\frac{d\mu}{dy}=2y(x-3y)\mu;\quad -y\frac{d\mu}{dy}=2\mu.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $\mu=y^{-2}$ ($C=1$).

Умножая обе части исходного уравнения на y^{-2}, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$(x-3y)\,dx+(y^{-2}-3x)\,dy=0.$$

По формуле (3), п. 5.2, записываем общий интеграл этого уравнения

$$x^2y-6xy^2-2=Cy\quad (y\neq 0).$$

При почленном делении исходного уравнения на y^2 мы потеряли решение $y=0$, поэтому общий его интеграл имеет вид

$$x^2y-6xy^2-2=Cy\quad (y=0 \text{ при } C=\infty).\ ▶$$

Проинтегрировать следующие уравнения с помощью множителя $\mu=\mu(x+y)$ или $\mu=\mu(x-y)$.

128. $\left(2x^3+3x^2y+y^2-y^3\right)dx+\left(2y^3+3xy^2+x^2-x^3\right)dy=0.$

◀ Пусть $\mu=\mu(x-y)$. Тогда, полагая в (6), п. 5.3 $\omega=x-y$, получим

$$\left(2y^3+3xy^2+x^2-x^3+\left(2x^3+3x^2y+y^2-y^3\right)\right)\frac{d\mu}{d\omega}=(6x^2-6y^2+2y-2x)\mu,$$

или

$$\left(y^3-x^3+x^2+y^2+3xy(x+y)\right)\frac{d\mu}{d\omega}=2(3x^2-3y^2+y-x)\mu.$$

Очевидно, что выражение $\dfrac{2(3x^2-3y^2+y-x)}{y^3-x^3+x^2+y^2+3xy(x+y)}$ не является функцией от $(x-y)$, поэтому будем искать функцию μ в виде $\mu=\mu(x+y)$. Тогда, аналогично проделанному выше, имеем

$$\left(2y^3+3xy^2+x^2-x^3-\left(2x^3+3x^2y+y^2-y^3\right)\right)\frac{d\mu}{d\omega}=(6x^2-6y^2+2y-2x)\mu,$$

или

$$\left(3(y-x)(y^2+xy+x^2)-(y-x)(x+y)+3xy(y-x)\right)\frac{d\mu}{d\omega}=(y-x)\left(2-6(x+y)\right)\mu,$$

откуда окончательно находим

$$\left(3(x+y)^2-(x+y)\right)\frac{d\mu}{d\omega}=\left(2-6(x+y)\right)\mu,$$

или

$$(3\omega^2-\omega)\mu'=2(1-3\omega)\mu;\quad \omega\mu'+2\mu=0.$$

Решая последнее уравнение, получаем $\mu=\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ ($C=1$). Умножив исходное уравнение на $\dfrac{1}{(x+y)^2}$, будем иметь уравнение в полных дифференциалах. Его общий интеграл имеет вид

$$\int\limits_0^x\frac{2t^3+3t^2y+y^2-y^3}{(t+y)^2}\,dt+\int\limits_{y_0}^y 2t\,dt=\text{const}\quad (y_0\neq 0),$$

или

$$x^3+y^3+xy=C(x+y).$$

Отметим, что решение $y=-x$ содержится в общем интеграле при $C=\infty$. ▶

129. $\left(y-\frac{ay}{x}+x\right)dx+a\,dy=0.$

◀ Ищем интегрирующий множитель в виде $\mu=\mu(x+y)$. Тогда из (6), п. 5.3, получим $(\omega=x+y)$:

$$\left(a-y+\frac{ay}{x}-x\right)\frac{d\mu}{d\omega}=\left(1-\frac{a}{x}\right)\mu,$$

или

$$\Big((a-x)x-y(x-a)\Big)\mu'=(x-a)\mu;\quad (x+y)\mu'+\mu=0;\quad \omega\mu'+\mu=0.$$

Таким образом, $\mu=\omega^{-1}=(x+y)^{-1}$ $(C=1)$ и данное уравнение приводим к виду

$$\left(1-\frac{ay}{x(x+y)}\right)dx+\frac{a}{x+y}\,dy=0.$$

Интегрируя его, получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x}dt+a\int\limits_{0}^{y}\frac{dt}{x+t}=\text{const}\quad (x_0\neq 0),$$

или

$$e^x\left|1+\frac{y}{x}\right|^a=C.\ ▶$$

Решить следующие уравнения, считая, что интегрирующий множитель имеет вид: $\mu=\mu(xy)$, $\mu=\mu(x^2+y^2)$ или $\mu=\mu(x^2-y^2)$.

130. $(x^2+y)\,dy+x(1-y)\,dx=0.$

◀ Испытаем множитель $\mu=\mu(xy)$, т. е. в (6), п. 5.3, положим $\omega=xy$. Тогда получим

$$\Big((x^2+y)y-(1-y)x^2\Big)\frac{d\mu}{d\omega}=(-x-2x)\mu,$$

или

$$\left(2yx^2+y^2-x^2\right)\frac{d\mu}{d\omega}+3x\mu=0.$$

Замечаем, что отношение $\dfrac{3x}{2yx^2+y^2-x^2}$ через xy не выражается, следовательно, в рассмотренном виде интегрирующий множитель не существует.

Положим $\omega=x^2+y^2$. Тогда будем иметь

$$\Big((x^2+y)2x-(1-y)2xy\Big)\frac{d\mu}{d\omega}=-3x\mu,$$

или

$$2\left(x^2+y^2\right)\mu'+3\mu=0;\quad 2\omega\mu'+3\mu=0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим $\mu=\omega^{-\frac{3}{2}}$ $(C=1)$. Таким образом, исходное уравнение преобразовывается в уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{x^2+y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy+\frac{x(1-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=0.$$

Проинтегрировав его, получим

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{t(1-y)\,dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{d(|y|)}{|y|^2}=\text{const}\quad (y_0\neq 0),$$

или

$$(1-y)\left(\frac{1}{|y|}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{1}{|y|}=C;\quad \frac{y}{|y|}+\frac{1-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=C.\ ▶$$

131. $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0.$

◀ Пусть $\omega = xy$. Тогда из (6), п. 5.3, получаем

$$\left((2x^2y^3 - x)y - (2x^3y^2 - y)x\right)\frac{d\mu}{d\omega} = 4xy(x^2 - y^2)\mu,$$

или

$$(xy)^2\mu' + 2xy\mu = 0; \quad \omega\mu' + 2\mu = 0.$$

Отсюда находим $\mu = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{x^2y^2}$ $(C = 1)$. Исходное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах:

$$\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx + \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right)dy = 0.$$

Применив формулу (3), п. 5.1, находим общий интеграл

$$\int_1^x \left(2t - \frac{1}{t^2y}\right)dt + \int_1^y \left(2t - \frac{1}{t^2}\right)dt = \text{const},$$

или

$$xy\left(x^2 + y^2\right) + 1 = Cxy. \blacktriangleright$$

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

132. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0.$

◀ Записывая уравнение в виде

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \frac{1}{2}\,d\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

и полагая $x^2 + y^2 = u$, получаем

$$u\,dx + \frac{1}{2}\,du = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u = Ce^{-2x}, \quad \text{или} \quad \left(x^2 + y^2\right)e^{2x} = C. \blacktriangleright$$

133. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

◀ Записав уравнение в виде

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$$

и приняв во внимание, что $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$, получаем $d\left(x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = 0$, откуда

$$x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$$

— общий интеграл уравнения. ▶

134. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}.$

◀ Представим уравнение в виде

$$\frac{dy^2}{2\sqrt{1 + y^2}} = d(xy),$$

откуда

$$\sqrt{1 + y^2} = xy + C. \blacktriangleright$$

135. $xy^2(xy' + y) = 1.$

◀ По аналогии с решением предыдущих примеров, имеем последовательно

$$(xy)^2(xy)' = x; \quad xy = u; \quad u^2u' = x; \quad \frac{1}{3}\left(u^3\right)' = x,$$

откуда

$$u^3 = \frac{3}{2}x^2 + C, \quad \text{или} \quad 2x^3y^3 - 3x^2 = C. \blacktriangleright$$

136. $y^2\,dx - \left(xy + x^3\right)dy = 0.$

◀ Считая $x \neq 0$, $y \neq 0$ ($x = 0$ и $y = 0$ — тривиальные решения), преобразуем уравнение к виду

$$y(y\,dx - x\,dy) - x^3\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} - \frac{x}{y}\,dy = 0.$$

Полагая $\frac{y}{x} = u$, имеем

$$du + \frac{dy}{u} = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрировав его, получим $u^2 + 2y = C$, или

$$y^2 + 2x^2y = Cx^2.$$

Решение $x = 0$ входит сюда при $C = \infty$, а решение $y = 0$ — при $C = 0$, поэтому можно считать, что получили общий интеграл исходного уравнения. ▶

137. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0.$

◀ Преобразовываем последовательно уравнение следующим образом:

$$y\,dx + d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = 0; \quad x\,dx + \frac{x}{y}\,d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = 0; \quad \frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) + \frac{1}{u}\,d(\ln u) = 0,$$

где $u = \frac{y}{x}$.

Поэтому

$$\frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) + \frac{du}{u^2} = 0, \quad d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{u} = \text{const}, \quad \text{или} \quad x^2y - 2x = 2Cy. \blacktriangleright$$

138. $(x^2 + 3\ln y)y\,dx = x\,dy.$

◀ Вводя замену $\ln y = u$, получаем уравнение

$$(x^2 + 3u)\,dx - x\,du = 0, \tag{1}$$

интегрирующий множитель которого ищем в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\mu(x^2 + 3u)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu x) = 0,$$

откуда следует, что $4\mu + x\mu' = 0$. Интегрируя полученное уравнение, находим один из интегрирующих множителей $\mu = x^{-4}$. Разделив почленно уравнение (1) на x^4 ($x \neq 0$), приходим к уравнению в полных дифференциалах

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3u}{x^4}\right)dx - \frac{du}{x^3} = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} - \int_1^y \frac{dt}{tx^3} = \text{const}, \quad \text{или} \quad x^2 + \ln y = Cx^3. \blacktriangleright$$

139. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0.$

◀ Полагая $xy = u$, получаем $y = \frac{u}{x}$, $dy = \frac{1}{x^2}(x\,du - u\,dx)$.

Подставив y и dy в уравнение, имеем

$$\frac{u^2}{x^2}\,dx + (u + \operatorname{tg} u)\,\frac{x\,du - u\,dx}{x^2} = 0,$$

откуда

$$u \operatorname{tg} u\,dx = (u + \operatorname{tg} u)x\,du.$$

Интегрируя, находим

$$x = Cu \sin u, \quad \text{или} \quad y \sin xy = C. \blacktriangleright$$

140. $y(x + y)\,dx + (xy + 1)\,dy = 0.$

◀ Разделив почленно обе части уравнения на y, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x + y)\,dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)\,dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x^2 + 2xy + \ln y^2 = C.$$

При делении на y было потеряно решение исходного уравнения $y = 0$. ▶

Замечание. Полученный интеграл можно представить следующим образом:

$$\ln y^2 = \ln C - x^2 - 2xy,$$

откуда

$$y^2 e^{x^2 + 2xy} = C,$$

где C — новая постоянная. Теперь легко видеть, что решение $y = 0$ содержится в последней формуле общего решения при $C = 0$.

141. $y(y^2 + 1)\,dx + x(y^2 - x + 1)\,dy = 0.$

◀ Цепочка преобразований над уравнением:

$$(y^2 + 1)(y\,dx + x\,dy) - x^2\,dy = 0; \quad \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2y^2} - \frac{dy}{y^2(y^2 + 1)} = 0; \quad \frac{d(xy)}{(xy)^2} = \frac{dy}{y^2(y^2 + 1)};$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{y^2(y^2 + 1)}, \quad \text{где} \quad u = xy,$$

приводит, как видно, к уравнению с разделяющимися переменными.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + 1}\right)\,dy + C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x - y}{xy^2} + \operatorname{arctg} y = C. \blacktriangleright$$

142. $(x^2 + 2x + y)\,dx - (x - 3x^2y)\,dy = 0.$

◀ Проводим последовательно преобразования:

$$(x^2 + 2x)\,dx + (y\,dx - x\,dy) + 3x^2y\,dy = 0; \quad \left(1 + \frac{2}{x}\right)\,dx - d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3}{2}\,dy^2 = 0 \quad (x \neq 0);$$

$$d\left(x + \ln x^2 - \frac{y}{x} + \frac{3}{2}y^2\right) = 0.$$

Интегрируя, находим

$$x + \ln x^2 - \frac{y}{x} + \frac{3}{2}y^2 = C.$$

Присоединим еще "потерянное" решение $x = 0$. ▶

143. $y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x}\,dx.$

◀ Разделив обе части уравнения на x^2 и произведя замену $\frac{y}{x} = u$, получаем уравнение

$$du = 2x \operatorname{tg} u\,dx,$$

которое легко интегрируется. Имеем

$$\int \frac{d(\sin u)}{\sin u} = 2\int x\,dx + \ln C, \quad \text{откуда} \quad \left|\sin\frac{y}{x}\right| = Ce^{x^2}. \blacktriangleright$$

144. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0.$

◀ Замены $e^x = u$ и $u = zy$ приводят к уравнениям

$$\frac{y}{u}\,du + \left(\frac{u}{y} - 1\right)dy = 0; \quad y\,dz + z^2 dy = 0.$$

Последнее уравнение имеет общий интеграл

$$\ln|y| - ye^{-x} = C; \quad y = 0. \blacktriangleright$$

145. $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy.$

◀ Проведем следующие преобразования уравнения:

$$x(y\,dx - x\,dy) = y(x^2 + y^2)\,dy; \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}\,dy; \quad -d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\,dy.$$

Положим $y = xu$. Тогда

$$-d(\operatorname{arctg} u) = u\,dy, \quad -\frac{du}{u(1+u^2)} = dy.$$

Интегрируя, получаем окончательно:

$$u^2 = \left(1 + u^2\right)Ce^{-2y}, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2}e^{2y} = C. \blacktriangleright$$

146. $x^2y(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy.$

◀ Действуем аналогично проделанному в предыдущем примере. Имеем

$$(x^2y - 1)\,d(xy) = y\,dx; \quad (x^2y - 1)\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dx}{x}.$$

Положим $xy = u$. Тогда получим

$$(xu - 1)\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad \left(u - \frac{1}{x}\right)\frac{du}{u} = \frac{dx}{x^2}.$$

Пусть $-\frac{1}{x} = v$, тогда

$$(u + v)\frac{du}{u} - dv = 0, \quad \text{или} \quad u\,du + v\,du - u\,dv = 0.$$

Разделим обе части уравнения на u^2 и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{du}{u} - d\left(\frac{v}{u}\right) = 0, \quad \ln|u| - \frac{v}{u} = \text{const}.$$

Окончательно имеем

$$x^2y\ln Cxy = -1. \blacktriangleright$$

147. $(x^2 - y^2 + y)\,dx + x(2y - 1)\,dy = 0.$

◀ Образуем уравнение для интегрирующего множителя $\mu = \mu(\omega)$:

$$\left((2xy - x)\frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2 - y^2 + y)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (-4y + 2)\mu.$$

Легко видеть, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(x)$:

$$x(2y - 1)\frac{d\mu}{dx} = 2(-2y + 1)\mu; \quad x\mu' + 2\mu = 0.$$

Интегрируя, получаем $\mu = x^{-2}$. Умножив обе части уравнения на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x} - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x^2 + y^2 - y = Cx. \blacktriangleright$$

148. $(2x^2y^2 + y)\,dx + (x^3y - x)\,dy = 0.$

◀ Из уравнения для интегрирующего множителя

$$\left(x(x^2y - 1)\frac{\partial \omega}{\partial x} - (2x^2y + 1)y\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (x^2y + 2)\mu$$

видно, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = xy$:

$$xy(x^2y - 1 - 2x^2y - 1)\frac{d\mu}{d\omega} = (x^2y + 2)\mu,$$

или $\omega\mu' + \mu = 0$. Из последнего уравнения находим $\mu = \omega^{-1} = (xy)^{-1}$. Разделив обе части исходного уравнения на xy ($x \neq 0$, $y \neq 0$), получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(2xy + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x^2 - \frac{1}{y}\right) dy = 0,$$

проинтегрировав которое, находим:

$$x^2(1 + y) + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C.$$

Очевидно, что уравнение имеет также тривиальные решения $x = 0$, $y = 0$. ▶

149. $y\left(x + y^2\right) dx + x^2(y - 1)\,dy = 0.$

◀ Применим метод разбиения на две части. Для этого рассмотрим два уравнения

$$xy\,dx - x^2dy = 0, \quad y^3\,dx + x^2y\,dy = 0.$$

Легко убедиться в том, что для первого уравнения $\mu_1 = \frac{1}{x^2y}$ и общий интеграл $u_1(x, y) \equiv \frac{y}{x} = C_1$, а для второго $\mu_2 = \frac{1}{x^2y^3}$, $u_2(x, y) \equiv \frac{xy}{x + y} = C_2$. Согласно методу разбиения на две части, интегрирующий множитель μ для исходного уравнения удовлетворяет соотношению

$$\mu = \frac{1}{x^2y}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2y^3}\varphi_2\left(\frac{xy}{x + y}\right),$$

откуда

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{y^2}\varphi_2\left(\frac{xy}{x + y}\right).$$

Пусть $\varphi_2(z) = z^2$. Тогда

$$\frac{1}{y^2}\varphi_2\left(\frac{xy}{x + y}\right) = \frac{x^2}{(x + y)^2} = \frac{1}{(1 + \frac{y}{x})^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{и} \quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}\frac{1}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{y(x + y)^2}.$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x + y^2}{(x + y)^2}\,dx + \frac{x^2(y - 1)}{y(x + y)^2}\,dy = 0.$$

Выберем в формуле (3), п. 5.1, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Получим общий интеграл в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \frac{t + y^2}{(t + y)^2}\, dt = C, \quad \frac{x(y-1)}{x+y} + \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| = C.$$

Уравнение имеет также тривиальные решения $x = 0$ и $y = 0$, которые включаем в общий интеграл соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ▶

150. $(x^2 - \sin^2 y)\, dx + x \sin 2y\, dy = 0$.

◀ Составив дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя

$$\left(x \sin 2y \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 - \sin^2 y) \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \frac{d\mu}{d\omega} = -2 \sin 2y \cdot \mu, \tag{1}$$

видим, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(x)$. Тогда из (1) следует, что

$$x\mu' + 2\mu = 0,$$

откуда $\mu = x^{-2}$. Разделив исходное уравнение на x^2 $(x \neq 0)$ и проинтегрировав полученное, имеем

$$\frac{1}{x} \int_0^y \sin 2t\, dt + \int_{x_0}^x dt = \text{const}, \quad x_0 \neq 0,$$

или, окончательно,

$$\sin^2 y + x^2 = Cx.$$

Решение $x = 0$ включаем сюда при $C = \infty$. ▶

151. $x(\ln y + 2 \ln x - 1)\, dy = 2y\, dx$.

◀ Из дифференциального уравнения для интегрирующего множителя

$$\left(-x(\ln y + 2 \ln x - 1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - 2y \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \frac{d\mu}{d\omega} = \mu(3 + \ln y + 2 \ln x)$$

следует, что оно допускает $\omega = \ln x + 2 \ln y$. Действительно, в этом случае $\mu' + \mu = 0$, откуда

$$\mu = e^{-\omega} = \frac{1}{xy^2}.$$

Разделив исходное уравнение на xy^2 $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2}{xy}\, dx - \frac{1}{y^2}(\ln y + 2 \ln x - 1)\, dy = 0.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{y} \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^y \frac{\ln t - 1}{t^2}\, dt = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{\ln x^2 y}{y} = C. \blacktriangleright$$

152. $(x^2 + 1)(2x\, dx + \cos y\, dy) = 2x \sin y\, dx$.

◀ Полагая $x^2 + 1 = u$, $\sin y = v$, приводим уравнение к виду

$$(u - v)\, du + u\, dv = 0,$$

которое при $u \neq 0$ можно записать так:

$$\frac{du}{u} + \frac{u\, dv - v\, du}{u^2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad d\left(\ln u + \frac{v}{u}\right) = 0.$$

Имеем $\ln u + \frac{v}{u} = \text{const}$. Следовательно,

$$(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + \sin y = C(x^2 + 1). \blacktriangleright$$

153. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$

◀ Из уравнения для интегрирующего множителя

$$\left((x^3y^2 - x)\frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2y^3 + y)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = 2\mu$$

усматривается возможность выбора $\omega = xy$. Тогда будем иметь $\omega\mu' + \mu = 0$, откуда

$$\mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}.$$

Умножив исходное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(t + \frac{1}{t}\right)dt + \int_1^y \left(x^2t - \frac{1}{t}\right)dt = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{x^2}e^{-x^2y^2} = C.$$

Решение $y = 0$ следует из общего интеграла при $C = 0$. ▶

154. $(x^2 - y)\,dx + x(y + 1)\,dy = 0.$

◀ Применяем метод разбиения уравнения на два:

$$x^2\,dx + xy\,dy = 0 \quad \text{и} \quad x\,dy - y\,dx = 0.$$

Первое уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu_1 = \frac{1}{x}$ и общий интеграл $u_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C_1$, а второе уравнение — $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$, $u_2(x, y) \equiv \frac{y}{x} = C_2$. Согласно указанному методу, интегрирующий множитель для исходного уравнения имеет вид

$$\mu = \frac{1}{x}\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{x^2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

где φ_1, φ_2 — произвольные дифференцируемые функции. Из (1) следует, что $x\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$. Положим $\varphi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда получим

$$x\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \quad (x > 0).$$

Следовательно, $\varphi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$. Таким образом, $\mu(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}}$ $(x > 0)$. Умножив исходное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x^2 - y}{x\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Ce^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}e^{-\sqrt{x^2+y^2}} = C.$$

Частное решение $x = 0$ получаем при $C = 0$. Непосредственно можно убедиться, что множитель $\mu(x, y)$ пригоден и для $x < 0$. ▶

155. $y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx).$

◀ Аналогично предыдущему напишем уравнения

$$y^2(y\,dx - 2x\,dy) = 0 \quad \text{и} \quad x^3(x\,dy - 2y\,dx) = 0.$$

Тогда $\mu_1 = \frac{1}{xy^3}$, $u_1 \equiv \frac{y^2}{x} = C_1$; $\mu_2 = \frac{1}{x^4y}$, $u_2 \equiv \frac{x^2}{y} = C_2$ — соответственно интегрирующие множители и интегралы этих уравнений. Интегрирующий множитель исходного уравнения ищем из соотношения

$$\mu = \frac{1}{xy^3}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^4y}\varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

из которого следует, что

$$\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{y^2}{x^3}\varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Полагаем $y^2 = xu$. Тогда

$$\varphi_1(u) = \frac{u}{x^2}\varphi_2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u}}\right) \quad (x > 0,\ u > 0).$$

Замечаем, что правая часть последнего равенства будет функцией только от u, если взять $\varphi_2(\alpha) = \alpha^{\frac{4}{3}}$. Таким образом,

$$\varphi_1(u) = \sqrt[3]{u} = y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}, \quad \mu(x, y) = x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{3}}.$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{4}{3}}\right)dx - \left(2x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{7}{3}}\right)dy = 0.$$

Взяв в последней формуле п. 5.1 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, получим общий интеграл уравнения

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(t^{-\frac{4}{3}} + 2t^{\frac{5}{3}}\right)dt - \int_1^y \left(2x^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{8}{3}}t^{-\frac{7}{3}}\right)dt = \text{const},$$

$$x^3 - 4y^2 = C\sqrt[3]{xy^4}, \quad \text{или} \quad \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^3 - 4y^2} = C.$$

Частные решения $x = 0$, $y = 0$ получаем при $C = 0$. ▶

156. $\left(6x - 2y - 2y^2\right)dx + \left(5y^2 - 8xy - x\right)dy = 0.$

◀ Для отыскания интегрирующего множителя воспользуемся методом разделения уравнения на два:

$$(6x - 2y)\,dx - x\,dy = 0; \quad (5y^2 - 8xy)\,dy - 2y^2\,dx = 0.$$

Нетрудно установить, что интегрирующие множители этих уравнений, а также их интегралы имеют вид:

$$\mu_1 = x, \quad \mu_2 = y^2; \quad u_1 \equiv 2x^3 - x^2y = C_1, \quad u_2 \equiv 2y^4x - y^5 = C_2.$$

Согласно указанному методу, интегрирующий множитель данного уравнения ищем из соотношения

$$\mu = x\varphi_1(2x^3 - x^2y) = y^2\varphi_2(2y^4x - y^5).$$

Отсюда

$$\varphi_1(2x^3 - x^2y) = \frac{y^2}{x}\varphi_2(2y^4x - y^5).$$

Полагая здесь $y^2 = ux$, получаем

$$\varphi_1\left(2\frac{y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}\right) = u\varphi_2\left(2\frac{y^6}{u} - y^5\right),$$

или

$$\varphi_1(\alpha) = u\varphi_2(u^2\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{2y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}.$$

Пусть $\varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ $(z > 0)$. Тогда

$$\varphi_2(u^2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{u^2\alpha}} = \frac{1}{u\sqrt{\alpha}} \quad (u > 0).$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\quad \mu(x,y)=\frac{x}{\sqrt{2x^3-x^2y}}=\frac{1}{\sqrt{2x-y}}\quad (2x>y).$$

Заметим, что для $2x<y$ аналогично можно найти $\mu(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-2x}}$.

В обоих случаях после интегрирования уравнения в полных дифференциалах и упрощений получаем ответ

$$(2x-y)(x-y^2)^2=C.\ \blacktriangleright$$

157. $x\,dx+(xy-y^3)\,dy=0.$

◀ Целесообразно записать уравнение в форме

$$x\,dx+x\,d\left(\frac{y^2}{2}\right)-d\left(\left(\frac{y^2}{2}\right)^2\right)=0$$

и положить $\frac{y^2}{2}=u$. Тогда получим

$$x\,dx+(x-2u)\,du=0.$$

Уравнение для интегрирующего множителя этого уравнения имеет вид:

$$\left((x-2u)\frac{\partial\omega}{\partial x}-x\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\frac{d\mu}{d\omega}=-\mu.$$

Если взять $\omega=x-u$, то отсюда получим уравнение $2\omega\mu'+\mu=0$. Следовательно, $\mu=|\omega|^{-\frac{1}{2}}=(|x-u|)^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому левая часть уравнения

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{|x-u|}}+\frac{x-2u}{\sqrt{|x-u|}}\,du=0$$

является полным дифференциалом некоторой функции Φ. Выбирая $x_0\neq 0$, $u_0=0$, получим общий интеграл уравнения в виде

$$\Phi(x,u)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{t\,dt}{\sqrt{|t|}}+\int\limits_{0}^{u}\frac{x-2t}{\sqrt{|x-t|}}\,dt=\text{const}.$$

После интегрирования и перехода к переменным x и y, общий интеграл исходного уравнения примет вид

$$\operatorname{sgn}\left(2x-y^2\right)\sqrt{|2x-y^2|}\left(x+y^2\right)=C,\quad \text{или}\quad \left(2x-y^2\right)\left(x+y^2\right)^2=C.\ \blacktriangleright$$

158. $y^3\,dx+2(x^2-xy^2)\,dy=0.$

◀ Для каждого из уравнений

$$y^3\,dx-2xy^2\,dy=0;\quad 2x^2\,dy=0$$

находим $\mu_1=\frac{1}{xy^3}$, $u_1=\frac{x}{y^2}$; $\mu_2=\frac{1}{x^2}$, $u_2=y$.

Следовательно, интегрирующий множитель для исходного уравнения удовлетворяет соотношению

$$\mu=\frac{1}{xy^3}\varphi_1\left(\frac{x}{y^2}\right)=\frac{1}{x^2}\varphi_2(y).$$

Если взять $\varphi_2(y)=y^{-1}$, то получим, что $\varphi_1(\alpha)=\alpha^{-1}$. Таким образом, $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2y}$ и

$$\frac{y^2}{x^2}\,dx+2\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x}\right)dy=0$$

— уравнение в полных дифференциалах. Записав его общий интеграл в виде

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} + 2\int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{x}\right) dt = \text{const},$$

получим общее решение

$$y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}. \blacktriangleright$$

159. $(y - x)\,dy + y\,dx - x\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

◀ Для уравнения $(y - x)\,dy + y\,dx = 0$ интегрирующим множителем является функция $\mu_1 = y^{-2}$, а интегралом — $u_1 = ye^{\frac{x}{y}}$. Для уравнения $x\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ интегрирующим множителем является функция $\mu_2 = \frac{1}{x}$, а интегралом — $u_2 = \frac{x}{y}$. В соответствии с методом разбиения имеем

$$\mu = \frac{1}{y^2}\varphi_1\left(ye^{\frac{x}{y}}\right) = \frac{1}{x}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right).$$

Если положим $\varphi_1(\alpha) = \alpha$, то отсюда получим, что $\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = \varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$. Следовательно, $\mu = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$ есть интегрирующий множитель для данного уравнения, которое после умножения на μ принимает вид

$$e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y^2}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3}\right) e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int_0^x e^{\frac{t}{y}}\left(1 - \frac{t}{y^2}\right) dt + \int_{y_0}^y dt = \text{const} \quad (y_0 \neq 0),$$

$$y^2 + y - x = Cye^{-\frac{x}{y}}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{y^2 + y - x}e^{-\frac{x}{y}} = C. \blacktriangleright$$

160. $(6xy^2 + x^2)\,dy - y(3y^2 - x)\,dx = 0.$

◀ Поскольку уравнение $6xy^2\,dy - 3y^2\,dx = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu_1 = \frac{1}{3xy^3}$ и интеграл $u_1 = \frac{y^2}{x}$, а уравнение $x^2\,dy + xy\,dx = 0$ — интегрирующий множитель $\mu_2 = \frac{1}{x^2y}$ и интеграл $u_2 = xy$, то, согласно методу разбиения на две части, интегрирующий множитель исходного уравнения ищем в виде

$$\mu = \frac{1}{3xy^3}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^2y}\varphi_2(xy),$$

откуда находим $\frac{x}{3y^2}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \varphi_2(xy)$. Полагая $\varphi_2 \equiv \frac{1}{3}$, получаем $\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{y^2}{x}$. Следовательно, $\mu = \frac{1}{x^2y}$. Умножив данное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(3\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx - \left(6\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Его общий интеграл запишем в виде

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt - \int_1^y \left(6\frac{t}{x} + \frac{1}{t}\right) dt = \text{const}.$$

Вычислив интегралы, окончательно получим

$$e^{\frac{3y^2}{x}}yx = C. \blacktriangleright$$

§ 6. Уравнение Эйлера—Риккати

6.1. Уравнение Эйлера—Риккати. Специальное уравнение Риккати.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1}$$

называется *уравнением Эйлера—Риккати.* Если положить $P(x) = bx^\alpha$, $Q(x) \equiv 0$, $R(x) = -a$, где a, b, α — постоянные, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha. \tag{2}$$

Оно называется *специальным уравнением Риккати.* Уравнение Эйлера—Риккати, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Даже специальное уравнение Риккати приводится к квадратурам только в том случае, когда $\alpha = \frac{4k}{\pm 1 - 2k}$, где k — целое или ∞. Если равенство $\alpha = \frac{4k}{1-2k}$ выполняется при $k > 0$, то в (2) делаем замену $y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax}$, приводящую (2) к виду

$$\frac{du}{dx} + \frac{au^2}{x^2} = bx^{\alpha+2}.$$

Полагая далее $u = \frac{1}{v}$, имеем

$$\frac{dv}{dx} + bx^{\alpha+2}v^2 = ax^{-2}.$$

Наконец, после замены $x^{\alpha+3} = z$ приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dz} + \frac{b}{\alpha+3}v^2 = \frac{a}{\alpha+3}z^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}.$$

Эти преобразования проводим до тех пор, пока не получим уравнение с разделяющимися переменными.

Если равенство $\alpha = \frac{4k}{1-2k}$ выполняется при $k < 0$, то указанные преобразования следует проводить в обратном порядке.

6.2. Каноническое уравнение Эйлера—Риккати.

Уравнение

$$u' = \pm u^2 + w(x) \tag{3}$$

называется *каноническим уравнением Эйлера—Риккати.* Если в (1) функция R дважды дифференцируема, то с помощью замен

$$y = \alpha(x)z, \quad z = u + \beta(x) \tag{4}$$

уравнение (1) приводится к каноническому виду. Иногда форма (3) позволяет сравнительно легко установить частное решение уравнения (1).

Если $y_1(x)$ — частное решение уравнения (1), то заменой $y = y_1 + \frac{1}{z}$ уравнение Эйлера—Риккати приводится к линейному.

Путем подбора частного решения решить уравнения.

161. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

◀ Ищем частное решение в виде $y_1(x) = \frac{a}{x}$, где $a = \text{const}$. Подставив его в данное уравнение, получаем

$$-a + a + a^2 = 4 \quad \text{откуда} \quad a = \pm 2.$$

Пусть $a = 2$. Тогда, произведя замену $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$, имеем линейное уравнение

$$x^2z' - 5xz - x^2 = 0.$$

Интегрируя его, находим $z = Cx^5 - \frac{x}{4}$. Следовательно,

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$$

есть общее решение исходного уравнения. Частное решение $y_1 = \frac{2}{x}$ получается отсюда при $C = \infty$. ▶

162. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.

◀ Частное решение $y_1(x)$ ищем в виде $y_1(x) = ax + b$. Подставив его в уравнение, получаем тождество относительно x:

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 \equiv -x^2,$$

из которого следует, что $2ab - 2b = 0$; $a = 1$; $-b + b^2 = 0$. Возможны два решения последней системы уравнений: $a = b = 1$ или $a = 1$, $b = 0$. Пусть $a = 1$, $b = 0$. Тогда $y_1(x) = x$ есть частное решение. Производя замену $y = x + \frac{1}{z}$, получаем линейное уравнение

$$x\left(1 - \frac{z'}{z}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 = -x^2,$$

или

$$xz' + z - 1 = 0.$$

Интегрируя его, находим $z = 1 + \frac{C}{x}$, вследствие чего

$$y = x + \frac{x}{x + C}. \blacktriangleright$$

163. Выразить общее решение уравнения Эйлера—Риккати через три различных его решения.

◀ Если известно одно частное решение уравнения Эйлера—Риккати $y_1(x)$, то его общее решение имеет вид

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)},$$

где $z(x)$ — общее решение соответствующего линейного уравнения первого порядка. Так как общее решение последнего выражается через две функции, т. е. $z(x) = \alpha(x) + C\beta(x)$, то общее решение уравнения Эйлера—Риккати представляется в виде

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\alpha(x) + C\beta(x)}. \tag{1}$$

Пусть $y_2(x)$, $y_3(x)$ — частные решения рассматриваемого уравнения. Тогда из (1) следует, что

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\alpha + C_1\beta}, \quad y_3 = y_1 + \frac{1}{\alpha + C_2\beta}, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — постоянные, соответствующие частным решениям $y_2(x)$ и $y_3(x)$ ($C_1 \neq C_2$). Разрешив систему уравнений (2) относительно α и β и подставив их значения в (1), получим

$$y = \frac{y_2(y_3 - y_1) + \widetilde{C}y_1(y_3 - y_2)}{y_3 - y_1 + \widetilde{C}(y_3 - y_2)},$$

где $\widetilde{C} = \frac{C - C_1}{C_1 - C_2}$ — произвольная постоянная. ▶

Решить уравнения.

164. $y' + y^2 = 2x^{-4}$.

◀ Это специальное уравнение Риккати. Так как $\alpha = -4$, то $k = 1$ — целое. Следовательно, его можно привести к квадратурам. Произведем замену

$$y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \quad (a = 1).$$

Тогда получим уравнение

$$u'x^2 + u^2 = 2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + \frac{1}{x} = \ln C.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\sqrt{2}+x(xy-1)}{\sqrt{2}+x(1-xy)}e^{\frac{2\sqrt{2}}{x}}=C.\ \blacktriangleright$$

165. $y'-y^2=2x^{-\frac{12}{5}}$.

◀ Это также специальное уравнение Риккати. Так как $k=3$, то в данном случае придется провести указанные в п. 6.1 преобразования трижды. Итак, полагая $y=\frac{u}{x^2}-\frac{1}{x}$, получаем

$$\frac{du}{dx}-\frac{u^2}{x^2}=2x^{-\frac{2}{5}}.$$

Произведя замены $u=\frac{1}{v}$, $x^{\frac{3}{5}}=z$, снова имеем специальное уравнение Риккати

$$\frac{dv}{dz}+\frac{10}{3}v^2=-\frac{5}{3}z^{-\frac{8}{3}}.$$

Выполняя эти же замены повторно, получаем:

$$\frac{dv_1}{dz_1}-5v_1^2=10z_1^{-4},$$

где $z_1=z^{\frac{1}{3}}$, $v=\frac{1}{v_1z^2}+\frac{3}{10z}$. Применение проведенных преобразований еще раз приводит к уравнению

$$\frac{dv_2}{dz_2}-10v_2^2=5,$$

где $z_2=z_1^{-1}$, $v_1=\frac{1}{v_2z_1^2}-\frac{1}{5z_1}$. Решая последнее уравнение, находим

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}z_2+C\right).$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно получаем:

$$y=x^{-1}\frac{\sqrt{2}\left(x^{-\frac{1}{5}}-0{,}3x^{\frac{1}{5}}\right)\operatorname{ctg}\left(5\sqrt{2}x^{-\frac{1}{5}}+C\right)+0{,}3x^{\frac{2}{5}}-1{,}2}{0{,}3\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}\operatorname{ctg}\left(5\sqrt{2}x^{-\frac{1}{5}}+C\right)-0{,}06x^{\frac{2}{5}}+1}.\ \blacktriangleright$$

166. $y'+y^2=x^{-\frac{4}{3}}$.

◀ Здесь $\alpha_1=-\frac{4}{3}$, следовательно, $k=-1$. Рассматриваем данное уравнение как такое, которое получено в результате проделанных в предыдущих примерах преобразований. Таким образом, можем написать (см. п. 6.1):

$$\frac{b}{\alpha+3}=1;\quad \frac{a}{\alpha+3}=1;\quad \frac{\alpha+4}{\alpha+3}=\frac{4}{3}.$$

Из этих равенств следует, что $\alpha=0$, $a=b=3$. Теперь видим, что в уравнении

$$y'+3y^2=3 \tag{1}$$

были проведены замены по формулам

$$y=\frac{u}{x^2}+\frac{1}{3x},\quad u=\frac{1}{v},\quad x^3=z, \tag{2}$$

в результате чего получилось уравнение

$$\frac{dv}{dz}+v^2=z^{-\frac{4}{3}},$$

т. е. исходное уравнение.

Решая уравнение (1), получаем

$$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)e^{-6x}=C, \quad \text{или} \quad \frac{v\left(3z^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right)+3}{v\left(z^{\frac{1}{3}}-3z^{\frac{2}{3}}\right)+3}e^{-6\sqrt[3]{z}}=C.$$

Поскольку в исходном уравнении через y обозначена функция, а через x — аргумент, то его общим интегралом будет

$$\frac{y\left(x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}{y\left(x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}e^{-6\sqrt[3]{x}}=C. \blacktriangleright$$

167. $y'-y^2=2x^{-\frac{8}{5}}$.

◀ В этом специальном уравнении Риккати $k=-2$, следовательно, потребуется провести два обратных преобразования над ним. Из уравнений

$$\frac{b}{\alpha+3}=-1; \quad \frac{a}{\alpha+3}=2; \quad \frac{\alpha+4}{\alpha+3}=\frac{8}{5}$$

следует, что данное уравнение получено в результате преобразования уравнения

$$y_1'+\frac{10}{3}y_1^2=-\frac{5}{3}x_1^{-\frac{4}{3}} \tag{1}$$

по формулам $y_1=\frac{u}{x_1^2}+\frac{3}{10x_1}$, $u=\frac{1}{y}$, $x_1^{\frac{5}{3}}=x$. В свою очередь, смотрим на уравнение (1) как на такое, которое получено в результате преобразования уравнения

$$\frac{dy_2}{dx_2}-5y_2^2=10 \tag{2}$$

посредством замен $y_2=\frac{v}{x_2^2}-\frac{1}{5x_2}$, $v=\frac{1}{y_1}$, $x_2^3=x_1$.

Решив уравнение (2), получаем

$$y_2=\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}x_2+C\right).$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$\frac{yx^{\frac{3}{5}}\left(50x^{\frac{2}{5}}-3\right)-10}{5\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}\left(10+3y^{\frac{3}{5}}\right)}=\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}+C\right). \blacktriangleright$$

168. $xy'-5y-y^2=x^2$.

◀ Сначала заметим, что специальное уравнение Риккати (2), п. 6.1, после замен $y=\frac{u}{x}$ и $x^{\alpha+2}=t$ переходит в следующее:

$$t\frac{du}{dt}-\frac{u}{\alpha+2}+\frac{a}{\alpha+2}u^2=\frac{b}{\alpha+2}t \quad (\alpha\neq-2), \tag{1}$$

или

$$tu'+lu+mu^2=nt. \tag{1'}$$

В исходном уравнении заменим аргумент, полагая $x^2=t$. Тогда получим (переобозначив y через u):

$$t\frac{du}{dt}-\frac{5}{2}u-\frac{u^2}{2}=\frac{t}{2}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), находим: $\alpha=-\frac{8}{5}$, $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{5}$.

Таким образом, между исходным уравнением и специальным уравнением Риккати установлена связь, причем, поскольку $\alpha=-\frac{8}{5}=\frac{4k}{1-2k}$ при $k=-2$, то первое интегрируется в квадратурах и его общий интеграл можно получить методом преобразований, которые применялись выше. Однако мы применим иной подход к интегрированию уравнений (1').

Сущность метода состоит в следующем.

Если $mn \neq 0$ и $l \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение (1′) можно преобразовать двумя путями:

1) применив подстановку $u = \frac{t}{p+v}$, где $p = \frac{1+l}{n}$, получим

$$tv' + (l+1)v + nv^2 = mt;$$

2) подстановкой $u = q + \frac{t}{v}$, где $q = -\frac{l}{n}$, приводим уравнение (1′) к виду

$$tv' + (l-1)v + nv^2 = mt.$$

Если $m = 0$ или $n = 0$, то уравнение (1′) превращается в линейное уравнение или в уравнение Бернулли соответственно.

Если $l = -\frac{1}{2}$, то его можно представить в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)' + m = n\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)^2, \tag{3}$$

после чего оно интегрируется в квадратурах. Отсюда следует, что преобразования целесообразно проводить тем из указанных выше способов, который приведет к уравнению (3). В принципе это возможно только в том случае, когда $l = \omega + \frac{1}{2}$, где ω — целое число.

В данном примере $l = -\frac{5}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $\omega = -3$, поэтому выбираем первый путь. Имеем

$$u = \frac{t}{v-3}; \quad tv' - \frac{3}{2}v + \frac{v^2}{2} = -\frac{t}{2}.$$

В полученном уравнении $l = -\frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$. Применив замену $v = \frac{t}{w+1}$, получим

$$tw' - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}w^2 = \frac{t}{2}.$$

В последнем уравнении $l = -\frac{1}{2}$, поэтому оно приводится к уравнению вида (3):

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{w}\right)' - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{w}\right)^2,$$

которое имеет общее решение $w = \sqrt{t}\operatorname{ctg}(-\sqrt{t} + C)$. Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$y = \frac{x^2}{v-3}; \quad v = \frac{x^2}{w+1}; \quad w = x\operatorname{ctg}(C - x). \blacktriangleright$$

169. $xy' + 3y + y^2 = x^2$.

◀ По аналогии с решением предыдущего примера, посредством замены $x^2 = t$ приводим уравнение к виду

$$ty' + \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = \frac{3}{2} > 0$, то к полученному уравнению применяем второй путь преобразований, указанный в примере 168. Имеем

$$y = -3 + \frac{t}{u}; \quad tu' + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Еще раз применяем указанное преобразование:

$$u = -1 + \frac{t}{v}; \quad tv' - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{v}\right)' + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{v}\right)^2,$$

откуда находим $v = \sqrt{t}\operatorname{cth}(\sqrt{t}+C)$. Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y = -3 + \frac{x^2}{x\operatorname{th}(x+C)-1}. \blacktriangleright$$

170. $3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}$.

◀ Полагая $x^{\frac{2}{3}} = t$, получаем

$$t\frac{dy}{dt} - \frac{9}{2}y - \frac{y^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = -\frac{9}{2}$, то применяем цепочку преобразований:

$$y = \frac{t}{v-7}; \quad tv' - \frac{7}{2}v + \frac{v^2}{2} = -\frac{t}{2}; \quad v = \frac{t}{w+5}; \quad tw' - \frac{5}{2}w - \frac{w^2}{2} = \frac{t}{2};$$

$$w = \frac{t}{\varkappa - 3}; \quad t\varkappa' - \frac{3}{2}\varkappa + \frac{\varkappa^2}{2} = -\frac{t}{2}; \quad \varkappa = \frac{t}{\psi+1}; \quad t\psi' - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Из последнего уравнения получаем $\psi = \sqrt{t}\operatorname{ctg}\left(C - \sqrt{t}\right)$. Совершить переход к переменным x и y предлагаем читателю. ▶

171. $\frac{dy}{dx} + \frac{5}{x}y + \frac{3}{x}y^2 = x$.

◀ Произведя замену $x^2 = t$, получим:

$$t\frac{dy}{dt} + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}y^2 = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = \frac{5}{2} > 0$, то применяем второй путь преобразований, указанный в примере 168. Имеем

$$y = \frac{t}{v} - \frac{5}{3}; \quad t\frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}v + \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2}t;$$

$$v = \frac{t}{w} - 3; \quad t\frac{dw}{dt} + \frac{w}{2} + \frac{3}{2}w^2 = \frac{t}{2};$$

$$w = \frac{t}{\varkappa} - \frac{1}{3}; \quad t\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{\varkappa}{2} + \frac{\varkappa^2}{2} = \frac{3}{2}t.$$

Записав последнее уравнение в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{\varkappa}\right)' + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{\varkappa}\right)^2$$

и решив его, получаем $\varkappa = \sqrt{3t}\operatorname{cth}(\sqrt{3t}+C)$.

Обратный переход по цепочке вверх к переменным x и y не составляет трудностей. ▶

172. $y' + \frac{3}{x}y + xy^2 = \frac{1}{x}$.

◀ Приведем уравнение к каноническому виду. Сначала посредством замены $y = \alpha(x)z$ добьемся того, чтобы коэффициент при z^2 был равен единице. Имеем

$$z'\alpha + \alpha' z + \frac{3}{x}\alpha z + x\alpha^2 z^2 \equiv \frac{1}{x}, \tag{1}$$

откуда $\alpha(x) = \frac{1}{x}$. Поэтому из (1) следует, что $z' + \frac{2}{x}z + z^2 = 1$. Далее, заменой $z = u + \beta(x)$ последнее уравнение преобразуем так, чтобы в нем отсутствовала искомая функция u в первой степени. Имеем

$$u' + \beta' + \frac{2}{x}(u+\beta) + u^2 + 2u\beta + \beta^2 \equiv 1.$$

Взяв $\beta(x) = -\frac{1}{x}$, получим каноническое уравнение Эйлера—Риккати

$$u' + u^2 = 1,$$

которое имеет общее решение $u = \operatorname{th}(x + C)$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{x}\left(\operatorname{th}(x + C) - \frac{1}{x}\right). \blacktriangleright$$

§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

7.1. Уравнение, не разрешенное относительно производной.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где F — известная функция, называется *уравнением, не разрешенным относительно производной.*

Если функция F — многочлен степени n относительно производной, то уравнение $F = 0$ называется *уравнением первого порядка n-ой степени* и имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x, y)y'^k = 0, \tag{1}$$

где p_k — известные функции. Разрешив уравнение (1) относительно y', получим:

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Пусть уравнения (2) имеют общие интегралы

$$\varphi_k(x, y) = C_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Тогда общим интегралом уравнения (1) будет

$$(\varphi_1(x, y) - C_1)\,(\varphi_2(x, y) - C_2)\,\ldots\,(\varphi_n(x, y) - C_n) = 0. \tag{3}$$

7.2. Общий интеграл уравнения $F(y') = 0$.

Уравнение $F(y') = 0$ имеет общий интеграл $F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$, причем, если $F(y') \equiv 0$ на некоторых частях области определения функции F, то отношение $\frac{y - c}{x}$ будем считать произвольной функцией от x со значениями на этих же частях.

7.3. Представление решения в параметрической форме. Разрешение неполных уравнений.

Пусть для уравнения $F(x, y, y') = 0$ существуют такие функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $y' = g(u, v)$, что $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), g(u, v)) \equiv 0$ относительно параметров u и v из некоторой области их задания. Тогда, используя соотношение $dy = y'\,dx$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv = g(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right),$$

откуда

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \tag{4}$$

Если уравнение (4) имеет общее решение $v = \alpha(u, C)$, то общее решение исходного уравнения записывается в параметрической форме

$$x = \varphi\left(u, \alpha(u, C)\right), \quad y = \psi\left(u, \alpha(u, C)\right). \tag{5}$$

Неполные уравнения $F(x, y') = 0$ и $F(y, y') = 0$ приводятся к квадратурам, если их можно разрешить относительно x или y соответственно. Если, например, $x = \varphi(y')$, то вводим параметр p по формуле $y' = p$. Тогда $x = \varphi(p)$ и $dy = p\,dx = p\varphi'(p)\,dp$, откуда $y = \int p\varphi'(p)\,dp + C$. Аналогично поступаем в случае, когда уравнение $F(y, y') = 0$ можно разрешить относительно y.

Найти общие интегралы уравнений.

173. $y'^2 - (3x - 2y)y' + 2x^2 - xy - 3y^2 = 0.$

◀ Решая это квадратное уравнение относительно производной, получаем два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$y' = 2x - 3y \quad \text{и} \quad y' = x + y.$$

Оба уравнения линейные, поэтому их общие решения находим без труда:

$$y = C_1 e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} \quad \text{и} \quad y = C_2 e^x - x - 1.$$

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (3), п. 7.1:

$$\left(\left(y - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^{3x} - C_1\right)\left((y + x + 1)e^{-x} - C_2\right) = 0. \blacktriangleright$$

174. $y'^3 - \left(x^2 + xy + y^2\right)y' + xy(x + y) = 0.$

◀ Уравнение допускает очевидное решение $y' = x$. Остальные решения находим из квадратного уравнения $y'^2 + xy' - (x + y)y = 0$:

$$y' = y \quad \text{и} \quad y' = -x - y.$$

Общие решения полученных дифференциальных уравнений соответственно имеют вид

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = C_2 e^x, \quad y = C_3 e^{-x} - x + 1.$$

Общим интегралом исходного уравнения будет

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C_1\right)\left(ye^{-x} - C_2\right)\left((y + x - 1)e^x - C_3\right) = 0. \blacktriangleright$$

175. $y'^3 \sin x - (y \sin x - \cos^2 x)y'^2 - (y \cos^2 x + \sin x)y' + y \sin x = 0.$

◀ Очевидное решение $y' = \sin x$ позволяет найти другие два решения кубического уравнения: $y' = y$ и $y' = -\frac{1}{\sin x}$. Решив полученные дифференциальные уравнения, имеем

$$y = -\cos x + C_1, \quad y = C_2 e^x, \quad y = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| + C_3.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения записывается в виде

$$(y + \cos x - C_1)(ye^{-x} - C_2)\left(y - \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| - C_3\right) = 0. \blacktriangleright$$

Найти решения уравнений.

176. $x^3 y'^2 + x^2 y y' + a = 0.$

◀ Решив уравнение относительно y

$$y = -\frac{a}{x^2 y'} - xy', \tag{1}$$

вводим параметр p по формуле $y' = p$. Тогда из (1) следует, что

$$y = -\frac{a}{x^2 p} - xp. \tag{2}$$

Для выражения x через p воспользуемся равенством $dy = p\,dx$. Дифференцируя (2) и принимая во внимание указанное равенство, получаем:

$$p\,dx = \frac{2a}{x^3 p}\,dx + \frac{a}{x^2 p^2}\,dp - x\,dp - p\,dx,$$

откуда

$$\left(\frac{2a}{x^3p}-2p\right)dx+\left(\frac{a}{x^2p^2}-x\right)dp=0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{x^2p^2}-x\right)\left(dp+\frac{2p}{x}\,dx\right)=0.$$

Очевидно, последнее уравнение имеет решения $x=\sqrt[3]{\frac{a}{p^2}}$ и $x=\frac{C}{\sqrt{|p|}}$. Подставив их в (2), находим $y=-2\sqrt[3]{pa}$ и $y=-\frac{a}{C^2}\operatorname{sgn}p-C\sqrt{|p|}$. Получили все решения в параметрической форме. Исключив параметр p, получаем эти же решения в явном виде:

$$x=\frac{4a}{y^2} \quad \text{и} \quad y=\frac{a}{c}+\frac{c}{x}. \blacktriangleright$$

177. $9yy'^2+4x^3y'-4x^2y=0.$

◀ Полагая $y'=p$ и разрешая уравнение относительно y, получаем:

$$y=\frac{4x^3p}{4x^2-9p^2}. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) и принимая во внимание равенство $dy=p\,dx$, находим:

$$p\,dx=4\,\frac{\left(12x^4p-27x^2p^3-8px^4\right)dx+\left(4x^5+9p^2x^3\right)dp}{(4x^2-9p^2)^2},$$

или $9p^3\,dx=4x^3\,dp$ (считаем, что $4x^2+9p^2\neq 0$). Из последнего уравнения следует, что $4x^2-9p^2=4Cx^2p^2$, поэтому из (1) окончательно получаем:

$$y^2=Cx^2+\frac{9}{4}C^2. \blacktriangleright$$

178. $y'^3-xy^4y'-y^5=0.$

◀ В данном случае уравнение удобно разрешить относительно x:

$$x=\frac{y'^2}{y^4}-\frac{y}{y'}. \tag{1}$$

Полагая в (1) $y'=p$ и продифференцировав полученное, имеем

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{2p\,dp}{y^4}-\frac{4p^2\,dy}{y^5}-\frac{dy}{p}+\frac{y\,dp}{p^2},$$

откуда

$$\left(2\,dy-\frac{y}{p}\,dp\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{2p^2}{y^5}\right)=0.$$

Из этого уравнения находим:

$$p=Cy^2 \quad \text{и} \quad p=-y\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}}.$$

Подставим значения $y'=p$ в (1). Получим

$$x=C^2-\frac{1}{Cy} \quad \text{и} \quad x=\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)y^{-\frac{2}{3}}. \blacktriangleright$$

179. $x=y'\sin y'.$

◀ Уравнение разрешено относительно x, поэтому можно ввести параметр $p=y'$. Тогда $x=p\sin p$ и остается выразить y через p. Воспользовавшись связью $dy=p\,dx$, имеем

$$dy=p\,d(p\sin p)=p(\sin p+p\cos p)\,dp.$$

Отсюда интегрированием получаем

$$y=p^2\sin p+p\cos p-\sin p+C.$$

Таким образом, имеем общее решение в параметрической форме:

$$x=p\sin p, \quad y=p^2\sin p+p\cos p-\sin p+C. \blacktriangleright$$

180. $y = (2 + y')\sqrt{1 - y'}$.

◀ Как и в предыдущем примере, вводим параметр $y' = p$. Тогда $y = (2 + p)\sqrt{1 - p}$. Так как $dx = \frac{1}{p}\,dy$, а $dy = d\left((2 + p)\sqrt{1 - p}\right)$, то

$$dx = \frac{1}{p}\,d\left((2 + p)\sqrt{1 - p}\right) = -\frac{3p}{2\sqrt{1 - p}}.$$

Отсюда интегрированием находим $x = 3\sqrt{1 - p} + C$. Если исключим параметр p из выражений для x и y, то получим общее решение

$$y = x + C - \frac{1}{27}(x + C)^3. \blacktriangleright$$

181. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

◀ Полагая $y' = tx(t)$, где t — параметр, находим

$$x(t) = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y' = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

Из последнего равенства следует, что $dy = \frac{3t^2}{1 + t^3}\,dx$. Поскольку $dx = 3\frac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}\,dt$, то $dy = 9\frac{t^2(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^3}\,dt$. Интегрируя, получаем

$$y(t) = \frac{3}{2}\,\frac{4t^3 + 1}{(1 + t^3)^2} + C$$

— общее решение исходного уравнения в параметрической форме. ▶

182. $y'^5 - 8y'^4 + 9y'^3 - 7y'^2 + 6y' + 1 = 0$.

◀ Пусть a_k $(k = \overline{1, 5})$ — корни уравнения $a^5 - 8a^4 + 9a^3 - 7a^2 + 6a + 1 = 0$. Тогда $y' = a_k$ и $y = a_k x + C$, или $\frac{y - C}{x} = a_k$. Поскольку a_k — корни указанного уравнения, то должно быть

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^5 - 8\left(\frac{y - C}{x}\right)^4 + 9\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 7\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{y - C}{x}\right) + 1 = 0.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения. ▶

183. $y' = 10\sin y'$.

◀ Поскольку $y' = a_k$, где a_k — корни уравнения $a = 10\sin a$, то $y = a_k x + C$, и общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$y - C = 10x\sin\frac{y - C}{x}. \blacktriangleright$$

184. $y' + |y'| = 0$.

◀ Это уравнение выполняется для всех $y' \leqslant 0$. Поэтому, полагая $y' = \varphi(x)$, где φ — любая неположительная функция, имеем:

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C = -\int |\varphi(x)|\,dx + C.$$

Следовательно,

$$y = \frac{1}{2}\int \left(\varphi(x) - |\varphi(x)|\right) dx + C$$

есть решение данного уравнения. ▶

185. $x^{y'} = y^x$.

◀ Уравнение имеет одно очевидное решение $y' = x$; $y = C + \frac{x^2}{2}$. Кроме того, имеются и другие решения, которые представим в параметрическом виде. Для этого положим $y' = x^t$. Тогда получим

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y' = t^{\frac{t}{t-1}} \quad (t \neq 1).$$

Отсюда

$$dy = t^{\frac{t}{t-1}}\,dx = t^{\frac{t}{t-1}}\,d\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right) = \frac{t^{\frac{t+1}{t-1}}}{t-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t-1}\right)dt.$$

Интегрируя последнее соотношение, находим

$$y = \int t^{\frac{t+1}{t-1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t-1}\right)\frac{dt}{t-1} + C. \blacktriangleright$$

186. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

◀ Разрешив уравнение относительно x и полагая $y' = p$, получим $x = \frac{y}{p}\ln p$. Так как $dy = p\,dx$, то

$$dy = p\,d\left(\frac{y}{p}\ln p\right) = \frac{y}{p}\,dp + \ln p\,dy - \frac{y}{p}\ln p\,dp, \quad \text{или} \quad (1 - \ln p)\left(dy - \frac{y}{p}\,dp\right) = 0.$$

Из последнего уравнения находим $p = e$ и $p = Cy$. Таким образом, решения данного уравнения имеют вид

$$x = \frac{y}{e} \quad \text{и} \quad Cx = \ln Cy. \blacktriangleright$$

187. $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$.

◀ Полагая здесь $y' = p$, разрешаем уравнение относительно x:

$$x = \frac{yp^2 - 1}{p^3} = \frac{y}{p} - \frac{1}{p^3}. \tag{1}$$

Из равенства $dy = p\,dx$, а также (1) следует, что

$$dy = p\,d\left(\frac{y}{p} - \frac{1}{p^3}\right) = dy - \frac{y}{p}\,dp + \frac{3\,dp}{p^3}. \tag{2}$$

Из (2) находим $p = C$ и $y = \frac{3}{p^2}$. Подставив эти значения в (1), получим

$$x = \frac{y}{C} - \frac{1}{C^3} \quad \text{и} \quad 27x^2 = 4y^3. \blacktriangleright$$

188. $y'^2 + 2yy'\operatorname{ctg} x - y^2 = 0$.

◀ Разрешая уравнение относительно y', получаем два дифференциальных уравнения

$$y' = y\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad y' = -y\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Их соответствующие решения имеют вид

$$y = \frac{C_1}{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad y = \frac{C_2}{\sin^2\frac{x}{2}}. \blacktriangleright$$

189. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

◀ Умножив обе части уравнения на y^2 и обозначив $y^2 = u$, получим

$$4(u - xu')^3 = u'^2.$$

Полагая $u' = p$ и разрешив последнее уравнение относительно u, будем иметь

$$u = xp + \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

Поскольку $du = p\,dx$, то, дифференцируя обе части равенства (1), найдем

$$p\,dx = d\left(xp + \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = x\,dp + p\,dx + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}dp, \quad \text{или} \quad \left(x + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)dp = 0.$$

Отсюда имеем $p = C$, или $p = -\frac{2}{27x^3}$. Подставив значения p в (1), окончательно получим:

$$y^2 = 2Cx + C^{\frac{2}{3}} \quad \text{и} \quad y^2 = \frac{1}{27x^2}. \blacktriangleright$$

190. $(3x + 5)y'^2 - (3y + x)y' + y = 0.$

◀ Положив $y' = p$ и разрешив уравнение относительно y, имеем

$$y = xp - \frac{5p^2}{1 - 3p}. \tag{1}$$

Продифференцируем обе части равенства (1), приняв во внимание, что $dy = p\,dx$. Получим

$$p\,dx = d\left(xp - \frac{5p^2}{1-3p}\right) = x\,dp + p\,dx - \frac{5p(2-3p)\,dp}{(1-3p)^2}, \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{5p(2-3p)}{(1-3p)^2}\right) dp = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$p = C \quad \text{и} \quad x = \frac{5p(2-3p)}{(1-3p)^2}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим решения исходного уравнения:

$$y = Cx - \frac{5C^2}{1-3C} \quad \text{и} \quad x = \frac{5p(2-3p)}{(1-3p)^2}, \quad y = \frac{5p^2}{(1-3p)^2}.$$

Последние два из них являются параметрическими уравнениями решения, не входящего в семейство интегральных кривых ни при каком C. ▶

191. $y = xy' - y'^2.$

◀ Полагая здесь $y' = p$ и дифференцируя обе части равенства $y = px - p^2$, получаем

$$p\,dx = d\left(xp - p^2\right) = x\,dp + p\,dx - 2p\,dp,$$

или

$$(x - 2p)\,dp = 0.$$

Отсюда находим $p = C$ и $p = \frac{x}{2}$. Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид

$$y = Cx - C^2 \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2}{4}. \blacktriangleright$$

192. $y = 2xy' - 4y'^2.$

◀ Введение параметра $y' = p$ с последующим дифференцированием обеих частей уравнения приводит к следующему соотношению:

$$p\,dx = d\left(2xp - 4p^2\right) = 2x\,dp + 2p\,dx - 8p\,dp, \quad \text{или} \quad 2x\,dp + p\,dx - 8p\,dp = 0.$$

Полученное уравнение можно рассматривать как линейное относительно $x = x(p)$:

$$p\frac{dx}{dp} + 2x = 8p.$$

Его общее решение имеет вид:

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{8}{3}p.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{8}{3}p, \quad y = \frac{4}{3}p^2 + \frac{2C}{p}.$$

Кроме того, имеется еще одно решение $y = 0$, не входящее в это общее решение ни при каком C. ▶

Примечание. Здесь и далее рассматриваем *уравнения Лагранжа* и *Клеро*, которые соответственно имеют вид:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \quad \left(\varphi(y') \neq y'\right), \quad y = y'x + \psi(y').$$

193. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

◀ По аналогии с предыдущим примером имеем

$$y' = p; \quad y = xp^2 - 2p^3; \quad p\,dx = d(xp^2 - 2p^3),$$

или

$$p\left((p-1)\,dx + 2(x-3p)\,dp\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $p = 1$, $p = 0$, а также $(p-1)\frac{dx}{dp} + 2x = 3p$. Интегрируя линейное уравнение, получаем

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1.$$

Таким образом, все решения данного уравнения описываются формулами:

$$y = 0; \quad y = x - 2; \quad x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} + p^2. \blacktriangleright$$

194. $2y'^2(y - xy') = 1$.

◀ Разрешая уравнение относительно y и полагая $y' = p$, получаем

$$y = xp + \frac{1}{2p^2}. \tag{1}$$

Используя равенство $dy = p\,dx$ и дифференцируя обе части (1), находим

$$p\,dx = d\left(xp + \frac{1}{2p^2}\right) = x\,dp + p\,dx - \frac{1}{p^3}\,dp,$$

или

$$\left(x - \frac{1}{p^3}\right)dp = 0.$$

Отсюда следует, что $p = C$, а также $x = \frac{1}{p^3}$. Подставив полученные значения в (1), окончательно имеем

$$8y^3 = 27x^2 \quad \text{и} \quad y = Cx + \frac{1}{2C^2}. \blacktriangleright$$

195. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

◀ Из уравнения касательной к кривой в точке $M(x, y)$

$$Y = y + y'(x)(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной, следует, что абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox равна $x_\text{п} = x - \frac{y}{y'}$, а ордината точки пересечения ее с осью Oy $y_\text{п} = y - xy'$. Согласно условию $|x_\text{п}y_\text{п}| = 4a^2$, или $x_\text{п}y_\text{п} = \pm 4a^2$. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(y - xy') = \pm 4a^2, \tag{1}$$

или $(xy' - y)^2 \pm 4a^2y' = 0$. Полагая $y' = p$ и дифференцируя, находим

$$2(xp - y)(x\,dp + p\,dx - p\,dx) \pm 4a^2\,dp = 0,$$

или

$$\left(x^2p - xy \pm 2a^2\right)dp = 0.$$

Следовательно, $p = C$, а также $p = \frac{1}{x}\left(y \pm \frac{2a^2}{x}\right)$.

Подставляя значение p в уравнение $(xp - y)^2 \pm 4a^2p = 0$, получаем решения

$$y = \pm\frac{a^2}{x} \quad \text{и} \quad (Cx - y)^2 \pm 4a^2C = 0.$$

Легко проверить, что кривая $y = \pm\frac{a^2}{x}$ является огибающей семейства прямых $(Cx - y)^2 \pm$ $\pm 4a^2C = 0$, каждая из которых совместно с осями координат образует указанный в условии треугольник. Исключая эти тривиальные возможности, получаем решение поставленной задачи

$$y = \pm\frac{a^2}{x}. \blacktriangleright$$

196. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна единице.

◀ Если сохранить обозначения из предыдущего примера, то согласно условию получим

$$\frac{1}{x_{\text{п}}^2} + \frac{1}{y_{\text{п}}^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{y'^2}{(xy' - y)^2} + \frac{1}{(y - xy')^2} = 1.$$

Разрешая уравнение относительно y и полагая $y' = p$, будем иметь

$$y = xp \pm \sqrt{1 + p^2}. \qquad (1)$$

Продифференцируем обе части в (1). Тогда, принимая во внимание равенство $dy = p\,dx$, получим дифференциальное уравнение

$$\left(x \pm \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) dp = 0,$$

из которого следует, что $p = C$, а также $x = \mp\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Подставив значения p и x в (1), находим:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{и} \quad y = Cx \pm \sqrt{1 + C^2}.$$

Если исключим тривиальный случай $y = Cx \pm \sqrt{1 + C^2}$, то получим решение данной задачи

$$x^2 + y^2 = 1. \blacktriangleright$$

197. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную двум.

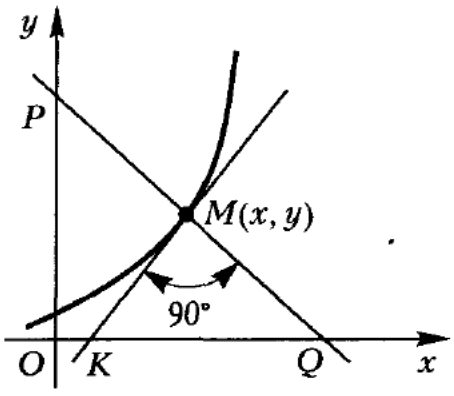


Рис. 23

◀ Из уравнения нормали

$$Y = y - \frac{1}{y'}(X - x)$$

следует, что $|OP| = y + \frac{x}{y'}$, $|OQ| = x + yy'$ (рис. 23). Согласно условию,

$$|PQ| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2} = 2,$$

поэтому

$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)^2 + (x + yy')^2 = 4.$$

Положив в этом уравнении $y' = p$ и разрешив его относительно y, получим

$$y = -\frac{x}{p} \pm \frac{2}{\sqrt{1 + p^2}}. \qquad (1)$$

Дифференцируя равенство (1), имеем

$$dy = p\,dx = d\left(-\frac{x}{p} \pm \frac{2}{\sqrt{1 + p^2}}\right); \quad p\,dx = \frac{x\,dp}{p^2} - \frac{dx}{p} \mp 2p\left(1 + p^2\right)^{-\frac{3}{2}} dp,$$

или

$$\left(p + \frac{1}{p}\right) dx = \left(\frac{x}{p^2} \mp 2p\left(1 + p^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) dp.$$

Последнее уравнение линейное относительно x и его общее решение имеет вид

$$x = \frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}} \pm \frac{p}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Параметрические уравнения общего решения исходного уравнения определяются равенствами (1) и (2). Положив в (1) $x = y = 0$, получаем $p = \infty$. А тогда из (2) следует, что $C = 0$. Таким образом, кривая, параметрические уравнения которой имеют вид

$$x = \frac{p}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{2p^2+1}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (p > 0), \tag{3}$$

удовлетворяет поставленной задаче. Очевидно, что если в (3) поменять местами x и y, то получим другую кривую

$$x = \frac{2p^2+1}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{p}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (p > 0), \tag{4}$$

которая также является решением поставленной задачи, поскольку с геометрической точки зрения переменные x и y равноправные. Ясно, что если в (4) параметр p заменим на $\frac{1}{p}$ $(p > 0)$, то получим ту же кривую, однако с другим параметрическим представлением

$$x = \frac{p(2+p^2)}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{p^2}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (p > 0). \blacktriangleright$$

198. Найти кривые, у которых произведение расстояний от каждой касательной до двух данных точек является величиной постоянной.

◀ Согласно условию, $|KA| \cdot |LB| = a^2$ ($a = \text{const}$) (см. рис. 24). Пусть $|AO| = |OB| = b$. Тогда, подставив в нормальное уравнение касательной

$$\frac{Y - y'X - y + xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

вместо координат X и Y координаты точки $A(-b, 0)$, получим

$$|KA| = \frac{|by' - y + xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Аналогично получаем

$$|LB| = \frac{|-by' - y + xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

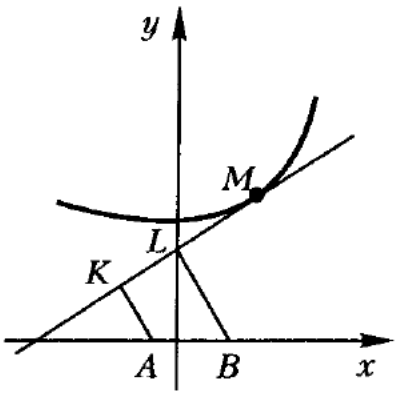


Рис. 24

Таким образом, имеем

$$|by' - y + xy'| \cdot |-by' - y + xy'| = a^2\left(1+y'^2\right), \quad \text{откуда} \quad (xy' - y)^2 - by'^2 = \pm a^2\left(1+y'^2\right).$$

Обозначив $b^2 \pm a^2 = m$, $\pm a^2 = n$ и разрешив последнее уравнение относительно y, можем записать

$$y = xy' \pm \sqrt{my'^2 + n}. \tag{1}$$

Полагая в (1) $y' = p$ и продифференцировав, получим

$$\left(x \pm \frac{mp}{\sqrt{mp^2+n}}\right) dp = 0,$$

откуда $p = C$ и $x = \mp\frac{mp}{\sqrt{mp^2+n}}$. Таким образом, отбросив тривиальный случай $p = C$, имеем параметрические уравнения искомого решения

$$x = \mp\frac{mp}{\sqrt{mp^2+n}}, \quad y = \pm\frac{n}{\sqrt{mp^2+n}}.$$

Исключив параметр p, получим

$$nx^2 + my^2 = mn.$$

Очевидно, что в зависимости от знаков m и n, это могут быть как эллипсы, так и гиперболы. ▶

§ 8. Существование и единственность решения

8.1. Теоремы Пикара, Пеано и Осгуда.

Теорема (Пикара). *Если в задаче Коши*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

функция f непрерывна в прямоугольнике $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ и удовлетворяет в нем условию Липшица по переменной y, т. е.

$$\begin{aligned} &\exists L > 0 :\ \forall (y_1, y_2 \in [-b + y_0, b + y_0]),\ \forall (x \in [-a + x_0, a + x_0]) \\ &|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \quad (L = \text{const}), \end{aligned} \tag{2}$$

то на сегменте $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$, где $d = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$, существует единственное решение задачи (1), к которому равномерно сходятся при $n \to \infty$ приближения y_n, определяемые формулами

$$y(x_0) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}_0. \tag{3}$$

Теорема (Пеано). *Если функция f непрерывна в R, то хотя бы одно решение $y = \varphi(x)$ задачи (1) существует на указанном сегменте.*

Теорема (Осгуда). *Если:*

1) *функция $\omega = \omega(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ при $t > 0$;*

2) *интеграл $\int\limits_0^{2b} \frac{dt}{\omega(t)} = +\infty$;*

3) $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \omega(|y_1 - y_2|)$ *в R,*

то в R может существовать не более одного решения задачи (1).

8.2. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной.

Теорема. *Если в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y_0') функция $F = F(x, y, y')$ удовлетворяет условиям:*

1) *F непрерывна по совокупности аргументов x, y, y';*

2) *существует частная производная $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$;*

3) *существует частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$, причем $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N$ ($N = \text{const}$),*

то на сегменте $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, для которого $y'(x_0) = y_0'$ и y_0' — действительный корень уравнения $F(x_0, y_0, y_0') = 0$.

8.3. Продолжение решения задачи Коши.

Часто решение задачи Коши существует не только на сегменте, указанном в теоремах Пикара и Пеано, но и на большем сегменте.

Если условия теоремы Пикара выполнены в замкнутой области, то решение задачи (1) можно продолжить вплоть до границы этой области.

Если функция f непрерывна в полосе $\Pi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x < \beta,\ -\infty < y < +\infty\right\}$ и удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)|y| + \psi(x), \tag{4}$$

где φ и ψ — непрерывные функции, то всякое решение задачи (1) можно продолжить на весь интервал (α, β).

Информация о величине интервала существования решения задачи Коши содержится в следующем утверждении.

Лемма (Бихари). *Если справедливо неравенство*

$$y(x) \leqslant C + \int_{x_0}^{x} v(t)g(y(t))\,dt, \quad x_0 \leqslant x \leqslant a, \tag{5}$$

где $C = \text{const} > 0$, *функции* $y = y(x)$, $v = v(x)$ *неотрицательные и непрерывные, а функция* $g = g(y)$ *непрерывная, неотрицательная и неубывающая, причем* $g(y) > 0$ *при* $y > 0$, *то*

$$y(x) \leqslant G^{-1}\left(G(C) + \int_{x_0}^{x} v(t)\,dt\right), \tag{6}$$

где

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{g(t)}, \quad u_0 > 0, \tag{7}$$

для всех тех $x \in [x_0, a)$, *для которых функция* $G(C) + \int_{x_0}^{x} v(t)\,dt$ *принадлежит области определения функции* G^{-1}.

8.4. Существование и единственность решения векторной задачи Коши.

Если в задаче (1) y и f векторы, т. е. $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, то вместо задачи (1) будем иметь задачу:

$$\begin{gathered} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}. \end{gathered} \tag{8}$$

При условиях, аналогичных изложенным в п. 8.1, существует единственное решение задачи (8). При этом под непрерывностью вектор-функции f понимается непрерывность ее координат $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а условие Липшица (2) распространяется на каждую функцию f_i по каждой переменной y_k. Абсолютная величина $|y|$, $|f|$ заменяется длиной соответствующего вектора.

К задаче (8) сводится следующая. Найти такую функцию $y = y(x)$ вместе с окрестностью точки x_0, которая удовлетворяет уравнению

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{9}$$

и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{10}$$

Если в некоторой области D, содержащей точку $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, функция f и ее частные производные первого порядка по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны, то задача (9), (10) имеет единственное решение в достаточно малой окрестности указанной точки, целиком лежащей в D. Положив $y = y_1$, $y' = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y_n$, вместо (9), (10) получим систему

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{11}$$

с начальными условиями $y_1(x_0) = y_0$, $y_2(x_0) = y_0', \ldots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

199. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями:

а) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$; б) $y' = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$.

◀ Воспользуемся формулами (3), п. 8.1

а) В рассматриваемом случае $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0(t) = y_0 = 0$,

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x \left(t - y_n^2(t)\right)dt, \quad n \in \mathbf{Z}_0. \tag{1}$$

Полагая здесь $n = 0$, получаем первое приближение

$$y_1(x) = \int_0^x \left(t - y_0^2(t)\right) dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

Полагая в (1) $n = 1$, находим

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t - y_1^2(t)\right) dt = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}.$$

б) Поскольку $y(0) = 1$, то $y_0(t) \equiv 1$, $x_0 = 0$ и

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \left(y_n(t) + e^{y_n(t)-1}\right) dt.$$

Отсюда при $n = 0$ получаем

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + e^{1-1}\right) dt = 1 + 2x,$$

а при $n = 1$ находим

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + e^{2t}\right) dt = \frac{1}{2} + x + x^2 + \frac{1}{2} e^{2x}. \blacktriangleright$$

200. Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решениям следующих уравнений и систем:

а) $y' = 2x + z, \quad z' = y; \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 0;$

б) $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2;$

в) $y'' + y'^2 - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

◀ а) Система интегральных уравнений, эквивалентная данной системе дифференциальных уравнений с начальными условиями, имеет вид:

$$y(x) = 1 + \int_1^x \left(2t + z(t)\right) dt, \quad z(x) = \int_1^x y(t)\, dt.$$

Последовательные приближения находим по рекуррентным формулам

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_1^x \left(2t + z_n(t)\right) dt, \quad z_{n+1}(x) = \int_1^x y_n(t)\, dt, \tag{1}$$

где $z_0(t) = 0$, $y_0(t) \equiv 1$, $n \in \mathbb{Z}_0$, вытекающим из формулы (3), п. 8.1, если под y и f понимать векторы с координатами (y, z) и $\left(2t + z(t), y(t)\right)$ соответственно.

Полагая в (1) $n = 0$ и $n = 1$, получаем

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x \left(2t + z_0(t)\right) dt = x^2, \qquad z_1(x) = \int_1^x y_0(t)\, dt = x - 1;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x \left(2t + z_1(t)\right) dt = \frac{1}{2} - x + \frac{3}{2} x^2, \qquad z_2(x) = \int_1^x y_1(t)\, dt = \int_1^x t^2\, dt = \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

б) По аналогии с проделанным выше, имеем

$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t y_n(\tau)\,d\tau, \quad y_{n+1}(t) = 2 + \int_0^t x_n^2(\tau)\,d\tau.$$

Полагая здесь $n = 0$ и $n = 1$, последовательно находим:

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t y_0(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^t 2\,d\tau = 1 + 2t, \quad y_1(t) = 2 + \int_0^t x_0^2(\tau)\,d\tau = 2 + \int_0^t d\tau = 2 + t,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^t (2 + \tau)\,d\tau = 1 + 2t + \frac{t^2}{2},$$

$$y_2(t) = 2 + \int_0^t x_1^2(\tau)\,d\tau = 2 + \int_0^t (1 + 2\tau)^2\,d\tau = 2 + t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3.$$

в) Как и в п. 8.4, данное уравнение второго порядка сведем к системе двух уравнений первого порядка, полагая $y = y$, $y' = z$. Тогда получим

$$z' = 2y - z^2, \quad y' = z; \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Из рекуррентных формул

$$z_{n+1}(x) = \int_0^x \Big(2y_n(t) - z_n^2(t)\Big)dt, \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x z_n(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_0,$$

где $z_0(t) \equiv 0$, $y_0(t) \equiv 1$, находим

$$z_1(x) = \int_0^x \Big(2y_0(t) - z_0^2(t)\Big)dt = 2x, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x z_0(t)\,dt = 1,$$

$$z_2(x) = \int_0^x \Big(2y_1(t) - z_1^2(t)\Big)dt = \int_0^x \Big(2 - 4t^2\Big)\,dt = 2x - \frac{4}{3}x^3,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x z_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x 2t\,dt = 1 + x^2. \blacktriangleright$$

201. Указать какой-нибудь сегмент, на котором существует решение с данными начальными условиями:

а) $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$; б) $y' = 2y^2 - x$, $y(1) = 1$;

в) $\dfrac{dx}{dt} = t + e^x$, $x(1) = 0$; г) $\dfrac{dx}{dt} = y^2$, $\dfrac{dy}{dt} = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

◀ а) Воспользуемся сначала теоремой существования, изложенной в п. 8.1. В данном случае $x_0 = y_0 = 0$, $f(x, y) = x + y^3$. Функция f непрерывна в любом прямоугольнике $R = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant a, |y| \leqslant b\Big\}$ и удовлетворяет в нем условию Липшица, поскольку производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$ ограничена числом $3b^2$. Следовательно, на сегменте $[-d, d]$, где $d = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{(x, y) \in R} |f(x, y)| = a + b^3$ существует единственное решение данной задачи. Найдем число $d = \min\left(a, \dfrac{b}{a + b^3}\right)$. Ясно, что если на каком-то сегменте I существует единственное решение, то оно существует и на каждом меньшем сегменте, вложенном в I. Отсюда следует, что желательно найти как можно больший отрезок I, т. е. $\max \min\left(a, \dfrac{b}{a + b^3}\right)$. Так как функция $\psi(a) = a$

возрастает при $a \geqslant 0$, а функция $g(a) = \frac{b}{a+b^3}$ убывает, то $\max \min \left(a, \frac{b}{a+b^3}\right)$ достигается при условии, что $\psi(a) = g(a)$, т. е.

$$a = \frac{b}{a+b^3}. \tag{1}$$

Взяв производную по b от правой части (1), найдем, что при $b^3 = \frac{a}{2}$ достигается максимум a, который легко вычислить, подставив значение $a = 2b^3$ в (1). Тогда получим

$$b = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}, \quad a = \frac{2}{\sqrt[5]{216}} = \frac{1}{3}\sqrt[5]{36} \approx 0{,}66.$$

Таким образом, можно гарантировать существование и единственность решения данной задачи на сегменте $-0{,}66 \leqslant x \leqslant 0{,}66$.

Если воспользоваться леммой Бихари (см. п. 8.3), то можно указать значительно больший сегмент существования решения.

Действительно, в данном случае

$$y(x) = \int_0^x \left(t + y^3(t)\right) dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x y^3(t)\, dt$$

и

$$|y(x)| \leqslant \frac{a^2}{2} + \int_0^x |y(t)|^3\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

т. е. $C = \frac{a^2}{2}$, $v(x) \equiv 1$, $g(y) = y^3$. Поэтому

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u^2}\right), \quad u \geqslant u_0 > 0,$$

$$G^{-1}(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 - 2u_0^2 t}}, \quad G(C) + \int_0^x dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{C^2}\right) + x.$$

Следовательно,

$$G^{-1}\left(G(C) + \int_0^x v(t)\, dt\right) = \frac{C}{\sqrt{1 - 2C^2 x}}, \quad |y(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1 - 2C^2 x}} \quad \text{для} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2C^2}\right).$$

Из уравнения $a = \frac{1}{2C^2}$ находим $\max a = \sqrt[5]{2} \approx 1{,}15$.

Заменив в исходном уравнении x на $-x$ ($x \geqslant 0$) и проделав такие же выкладки, получим неравенство

$$|y(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1 + 2C^2 x}} \quad (x \leqslant 0),$$

которое показывает, что решение задачи а) существует и при $-\sqrt[5]{2} \leqslant x \leqslant 0$. Таким образом, существование единственного решения задачи а) можно гарантировать на сегменте $-1{,}15 \leqslant x \leqslant 1{,}15$.

б) Применим теорему Пикара существования и единственности решения. Здесь $x_0 = y_0 = 1$, $f(x, y) = 2y^2 - x$. Функция f непрерывна в любом прямоугольнике

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| \leqslant a, \ |y - 1| \leqslant b\right\}$$

и имеет ограниченную производную по y в R:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |4y| \leqslant 4|b + 1|.$$

Поэтому на сегменте $|x-1| \leqslant d = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |2y^2 - x| \leqslant 2(1+b)^2 + 1 + a$, существует единственное решение. Как и в случае а), параметры a и b находим из условий:

$$a = \frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1}\right) = 0. \tag{2}$$

Следовательно, $a = \frac{1}{4(1+b)}$, $2b^2 - 3 = \frac{1}{4(1+b)}$. Из последнего равенства следует, что $b > \sqrt{\frac{3}{2}} > 1{,}2$. А тогда $a < \frac{1}{4(1+1{,}2)} = 0{,}11$.

Однако оценку для d можно улучшить, считая, что $a < 1$. Тогда $M = 2(1+b)^2 - 1 + a$ и из равенств, аналогичных (2), находим

$$a = \frac{1}{4(1+b)}, \quad 2b^2 - 1 = \frac{1}{4(1+b)} < \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad b < \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Следовательно, $a = \frac{1}{4(1+b)} > \frac{1}{4\left(1+\sqrt{\frac{5}{8}}\right)} \approx 0{,}13$. Итак, по меньшей мере, на сегменте $0{,}87 \leqslant x \leqslant 1{,}13$ решение задачи существует и единственное.

Пользуясь леммой Бихари, можно указать еще больший сегмент существования и единственности решения. Действительно, представляя данную задачу в виде

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) + 2\int_1^x y^2(t)\,dt \quad (x \geqslant 1),$$

получаем оценку ее решения:

$$|y(x)| \leqslant C + 2\int_1^x |y(t)|^2\,dt, \quad C = \frac{1}{2} \cdot \max_{1\leqslant x\leqslant X} |3 - x^2|,$$

из которой, согласно лемме, следует неравенство

$$|y(x)| \leqslant G^{-1}\left(G(C) + 2(x-1)\right), \tag{3}$$

где

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \quad (u \geqslant u_0 > 0), \quad G^{-1}(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}.$$

Таким образом, из (3) получаем оценку

$$|y(x)| \leqslant \frac{C}{1 - 2C(x-1)},$$

из которой следует, что решение задачи б) существует на сегменте $1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2C} + 1$. Величину X находим из уравнения $\frac{1}{2C} + 1 = X$, или

$$\frac{1}{X-1} = \max_{1\leqslant x\leqslant X} |3 - x^2|. \tag{4}$$

Из (4) получаем $X = 1{,}5$, т. е. существование единственного решения гарантируется на сегменте $1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$. Для выяснения вопроса о продолжимости решения левее точки $x = 1$ в задаче б) произведем замену $x = 1 - t$ $(t \geqslant 0)$ и снова воспользуемся леммой Бихари. После аналогичных выкладок приходим к оценке

$$|y(t)| \leqslant \frac{C}{1 - 2Ct}, \quad \text{где} \quad C = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|1 + t - \frac{t^2}{2}\right|.$$

Получаем уравнение

$$\frac{1}{T} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|2 + 2t - t^2\right|,$$

из которого следует, что $0{,}33 < T < 0{,}41$. Итак, можно гарантировать существование и единственность решения задачи б) на сегменте $0{,}67 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

в) Применим сначала теорему Пикара, все условия которой выполнены в прямоугольнике R, а затем найдем

$$d = \min\left(a, \frac{b}{a+1+e^b}\right).$$

Из уравнений

$$a = \frac{b}{a+1+e^b}, \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{a+1+e^b}\right) = 0$$

получаем $a = e^{-b}$, $a = e^{-(a^2+a+1)}$. Отсюда находим, что $a \geqslant 0{,}2$. Таким образом, на сегменте $0{,}8 \leqslant t \leqslant 1{,}2$ решение существует и единственно.

Воспользуемся теперь леммой Бихари. Из интегрального уравнения данной задачи

$$x(t) = \frac{1}{2}(t^2-1) + \int_1^t e^{x(s)}\,ds, \quad t \geqslant 1,$$

следует оценка

$$|x(t)| \leqslant C + \int_1^t e^{|x(s)|}\,ds, \quad C = \frac{1}{2}\max_{1\leqslant t\leqslant T}|t^2-1| = \frac{1}{2}(T^2-1).$$

Поскольку

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{e^s} = e^{-u_0} - e^{-u}, \quad u \geqslant u_0 > 0,$$

то

$$G^{-1}(y) = -\ln\left(e^{-u_0} - y\right), \quad G(C) = e^{-u_0} - e^{-C} \quad (C > u_0).$$

Согласно лемме, имеем оценку

$$|x(t)| \leqslant -\ln\left(e^{-u_0} - e^{-u_0} + e^{-C} - t + 1\right) = -\ln\left(e^{-C} - t + 1\right),$$

откуда $1 \leqslant t \leqslant e^{-C} + 1$. Следовательно, максимально возможный сегмент существования решения справа от точки $t = 1$ найдем, решив уравнение

$$T^2 - 1 = -2\ln(T-1) \quad (1 < T < 2).$$

Из него следует, что $T > 1{,}5$.

Для выяснения вопроса о продолжимости решения левее точки $t = 1$ произведем замену $t = 1 - \tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$ и проделаем все выкладки согласно лемме Бихари. Тогда получим

$$|x(\tau)| \leqslant -\ln(e^{-C} - \tau), \quad \text{где} \quad C = \max_{0\leqslant\tau\leqslant\tau_0}\left|\frac{\tau^2}{2} - \tau\right|.$$

Максимально возможное значение τ_0 находим из уравнения

$$\tau_0 = e^{-C} \quad \text{или} \quad C = -\ln\tau_0 \quad (0 < \tau_0 < 1).$$

Так как $C = \tau_0 - \frac{\tau_0^2}{2}$, то $\frac{\tau_0^2}{2} - \tau_0 = \ln\tau_0$. Отсюда получаем $\tau_0 > 0{,}6$.

В результате делаем вывод о существовании и единственности решения на сегменте $0{,}4 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

г) Применяем теорему Пикара для системы дифференциальных уравнений. Здесь $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Функции $f_1(t, x, y) = y^2$, $f_2(t, x, y) = x^2$ непрерывны в области

$$\Omega = \left\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : |t| \leqslant a, \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leqslant b\right\}$$

и имеют в ней ограниченные частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$. Следовательно, на сегменте $-h \leqslant t \leqslant h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{(t,x,y)\in\Omega}\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, существует единственное решение рассматриваемой задачи.

Поскольку $M = \max\limits_{(t,x,y)\in\Omega} \sqrt{x^4+y^4} \leqslant \sqrt{(1+b)^4+(2+b)^4} \leqslant \sqrt{2}(2+b)^2$, то из условий

$$a = \frac{b}{M} \geqslant \frac{b}{\sqrt{2}(2+b)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{(2+b)^2}\right) = 0$$

находим, что $b = 2$ и $a \geqslant \frac{2}{M(2)} = \frac{2}{\sqrt{3^4+4^4}} > 0{,}1$. Следовательно, на сегменте $-0{,}1 \leqslant t \leqslant 0{,}1$ существует единственное решение.

Если применим лемму Бихари, то сможем указать сегмент существования и единственности $-\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$.

Действительно, из интегральных уравнений рассматриваемой задачи следует, что

$$|x(t)| \leqslant 1 + \int_0^t |y(s)|^2\, ds, \quad |y(t)| \leqslant 2 + \int_0^t |x(s)|^2\, ds,$$

откуда

$$|x(t)| + |y(t)| \leqslant 3 + \int_0^t \Big(|x(s)|^2 + |y(s)|^2\Big) ds \leqslant 3 + \int_0^t \Big(|x(s)| + |y(s)|\Big)^2 ds,$$

или

$$u \leqslant 3 + \int_0^t u^2(s)\, ds, \quad \text{где} \quad u = |x| + |y|.$$

Согласно лемме Бихари имеем

$$G = \int_{v_0}^{v} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}, \quad G^{-1}(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 t}$$

и

$$u \leqslant G^{-1}(G(3) + t) = \frac{3}{1 - 3t},$$

откуда $0 \leqslant t < \frac{1}{3}$. Аналогично получаем левый от точки $t = 0$ интервал продолжимости $-\frac{1}{3} < t \leqslant 0$. ▶

202. Для уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$ построить третье приближение к решению и оценить его погрешность при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$.

◀ Согласно формуле (3), п. 8.1, имеем

$$y_0 = 0; \quad y_1(x) = \int_0^x (t - y_0^2)\, dt = \frac{x^2}{2}; \quad y_2(x) = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4}\right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Оценим погрешность полученного приближения.

Легко установить, что решение данной задачи существует и единственно на сегменте $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, так что последовательные приближения

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))\, dt \tag{1}$$

равномерно сходятся на этом сегменте к решению интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\, dt. \tag{2}$$

Вычитая почленно из (1) равенство (2) при $x \geqslant x_0$ и оценивая соответствующие разности для $n \in \mathbb{Z}_0$, получим

$$|y(x) - y_0| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} |\psi(t)|\,dt, \quad \psi(t) = |f(t, y(t))|,$$

$$|y(x) - y_1(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \Big|f(t, y(t)) - f(t, y_0)\Big|dt \leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} dx_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} \psi(t)\,dt = L \int\limits_{x_0}^{x} (x-u)\psi(u)\,du, \tag{3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \Big|f(t, y(t)) - f(t, y_{n-1}(t))\Big|dt \leqslant \frac{L^n}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-u)^n \psi(u)\,du,$$

где L — постоянная Липшица функции f по переменной y в прямоугольнике

$$R = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\Big\}.$$

В рассматриваемом случае $L \leqslant \max\limits_{(x,y)\in R} |2y(x)| = 2\|y\|$, $\psi(u) = |u - y^2(u)| \leqslant |u| + \|y\|^2$, $n = 3$, $x_0 = 0$, поэтому из (3) получаем оценку

$$\|y - y_3\| \leqslant \frac{4}{3}\|y\|^3 \int\limits_0^x (x-u)^3 \Big(u + \|y\|^2\Big)du \leqslant \frac{4}{3}\|y\|^3 \int\limits_0^{0,5} (0,5-u)^3 \Big(u + \|y\|^2\Big)du = \frac{\|y\|^3}{48}\Big(0,1 + \|y\|^2\Big). \tag{4}$$

Остается оценить $\|y\|$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 0,5$, который содержится в сегменте $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right]$.

Из леммы Бихари следует, что $|y| \leqslant \frac{C}{1 - Cx}$ (см. пример 201), где $C = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 0,5} \frac{x^2}{2} = 0,125$. Поэтому $\|y\| \leqslant \frac{0,125}{1 - 0,125 \cdot 0,5} \leqslant 0,134$. Принимая во внимание оценку (4), окончательно имеем

$$\|y - y_3\| \leqslant 0,6 \cdot 10^{-5}. \blacktriangleright$$

203. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделить области на плоскости xOy, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения:

а) $y' = 2xy + y^2$; б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$; в) $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$; г) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.

◀ а) Функция $f(x, y) = 2xy + y^2$ непрерывна в любой части плоскости xOy, а ее производная $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y)$ ограничена в любой конечной части D этой плоскости. Следовательно, по теореме Пикара через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения а).

б) Функция $f(x, y) = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$ непрерывна $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, однако ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(y - 2x)^{-\frac{2}{3}}$ ограничена только при $y \neq 2x$. Тогда, по теореме Пикара, через каждую точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, где $y_0 \neq 2x_0$, проходит единственная интегральная кривая.

в) Воспользуемся теоремой п. 8.2. Функция $F(x, y, y') = (x-2)y' - \sqrt{y} + x$ удовлетворяет условиям: 1) она непрерывна при $y \geqslant 0$; 2) частная производная $\frac{\partial F}{\partial y'} = x - 2 \neq 0$ при $x \neq 2$; 3) частная производная $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ ограничена при $y \geqslant \varepsilon > 0$; 4) $y' = \frac{\sqrt{y} - x}{x - 2}$ — единственный действительный корень уравнения $F(x, y, y') = 0$. Следовательно, через каждую точку (x_0, y_0) плоскости xOy, где $x_0 \neq 2$ и $y_0 \geqslant \varepsilon > 0$, проходит единственная интегральная кривая уравнения в).

г) Ясно, что при $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, правая часть уравнения непрерывна и имеет ограниченную частную производную по y. Следовательно, по теореме Пикара, через каждую точку плоскости xOy, за исключением прямых $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, проходит единственная интегральная кривая рассматриваемого уравнения. ▶

Примечание. Если функция f в задаче Коши имеет в прямоугольнике R ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то она автоматически удовлетворяет условию Липшица.

204. При каких неотрицательных a нарушается единственность решений уравнения $y' = |y|^a$ и в каких точках?

◀ При неотрицательных a функция $f(x, y) = |y|^a$ непрерывна, поэтому уравнение имеет решения. Если $y \neq 0$, то частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = a|y|^{a-1}\operatorname{sgn} y$ существует и ограничена в каждой конечной части плоскости xOy. Следовательно, по теореме Пикара, если $y \neq 0$, то при любом a существует единственная интегральная кривая, проходящая через заданную точку. Если $y = 0$, но $a \geqslant 1$, то функция f удовлетворяет условию Липшица:

$$|y_1|^a = |y_1|^{a-1}|y_1| \leqslant L|y_1| \quad (\text{здесь } y_2 = 0).$$

Поэтому, согласно теореме Пикара, единственность решения и в этом случае гарантирована. Остается проверить случай, когда $0 < a < 1$ и $y = 0$.

Возьмем произвольную точку $M(x_0, 0)$ на оси Ox. Очевидно, что через эту точку проходит интегральная кривая $y \equiv 0$. Однако через эту точку проходит также кривая $\frac{|y|^{1-a}}{1-a}\operatorname{sgn} y = x - x_0$, являющаяся решением рассматриваемого уравнения. Таким образом, при $0 < a < 1$ в точках $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ нарушается единственность решений данного уравнения. ▶

205. С помощью необходимого и достаточного условия единственности для уравнений вида $y' = f(y)$ исследовать дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } y' = (y-1)\sqrt{y^3}; \quad \text{б) } y' = \arccos y; \quad \text{в) } y' = \begin{cases} y\ln^2 y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

◀ Согласно указанному критерию, если непрерывная функция $f \neq 0$, то решение уравнения существует и единственно. Если же $f(y) = 0$ при $y = C = \text{const}$, то вопрос о единственности решается с помощью исследования на сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}$. Если этот интеграл расходится, то $y = C$ — частное решение, в противном случае через каждую точку прямой $y = C$ проходят другие интегральные кривые.

В случае а) имеем $C = 1$ и $C = 0$. Функция $f(y) = (y-1)\sqrt{y^3}$ непрерывна при $y \geqslant 0$. Поскольку несобственные интегралы

$$\int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y^3}} \quad (y_0 > 0;\ y_0 \neq 1) \quad \text{и} \quad \int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y^3}} \quad (0 < y_0 < 1)$$

расходятся, то через каждую точку полуплоскости $y \geqslant 0$ проходит единственная интегральная кривая данного дифференциального уравнения.

В случае б) $C = 1$ и несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{\arccos y}$ $(-1 \leqslant y_0 < 1)$ сходится, так как $\frac{1}{\arccos y} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-y}}\right)$ при $y \to 1 - 0$. Поэтому через каждую точку (x, y), где $-1 \leqslant y < 1$, проходит единственная интегральная кривая, а через каждую точку прямой $y = 1$ — любое число интегральных кривых.

В случае в) $C = 0$ и $C = 1$. Так как несобственный интеграл

$$\int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{y\ln^2 y} = \int\limits_{\ln y_0}^{-\infty} \frac{dt}{t^2} \quad (0 < y_0 < 1)$$

сходится, а несобственный интеграл

$$\int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{y\ln^2 y} = \int\limits_{\ln y_0}^{0} \frac{dt}{t^2} \quad (y_0 > 0,\ y_0 \neq 1)$$

расходится, то через каждую точку верхней полуплоскости, за исключением прямой $y = 0$, проходит единственная интегральная кривая.

Предлагаем читателю выполнить геометрическую иллюстрацию рассмотренных случаев. ►

206. При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений и систем?

а) $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$; б) $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$;

в) $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$; г) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 + \ln(t+1)$, $x\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y - t}$.

◄ Воспользуемся утверждениями п. 8.4. В случае а) имеем $f(x, y, y') = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$. Функция f и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны при $y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому в достаточно малой окрестности каждой точки (x_0, y_0, y_0'), где $y_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, существует единственная интегральная кривая, проходящая через эту точку.

б) Функция $f(x, y, y') = \dfrac{y + \sqrt{y}}{x+1}$ и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}(x+1)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны при $x \neq -1$ и $y > 0$. Следовательно, через каждую точку (x_0, y_0, y_0'), где $x_0 \neq -1$ и $y_0 > 0$, проходит единственная интегральная кривая.

в) Поскольку функция $f(x, y, y', y'') = \dfrac{1}{y}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right)$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = -\dfrac{1}{5y\sqrt[5]{(y' - x)^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y''} = \dfrac{1}{y}$ непрерывна при $y \neq 0$ и $y' \neq x$, то через каждую точку (x_0, y_0, y_0', y_0''), где $y_0 \neq 0$ и $y_0' \neq x_0$, проходит единственная интегральная кривая уравнения

$$y''' = \frac{1}{y}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right).$$

г) Так как функции $f_1(t, x, y) = y^3 + \ln(t+1)$, $f_2(t, x, y) = \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{y - t}$ и их частные производные $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 3y^2$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = -\dfrac{\sqrt[3]{y - t}}{x^2}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{(y - t)^2}}$ непрерывны при $x \neq 0$, $t > -1$, $y \neq t$, то через каждую точку (t_0, x_0, y_0), где $t_0 > -1$, $y_0 \neq t_0$, $x_0 \neq 0$, проходит единственное решение $(x(t), y(t))$. Заметим, что в случае системы уравнений $\dfrac{dx}{dt} = f_1$, $\dfrac{dy}{dt} = f_2$ и т. д., ее решение является вектор-функцией с координатами $x(t)$, $y(t)$ и т. д. ►

207. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости xOy пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0)

а) для уравнения $y' = x + y^2$? б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

◄ а) Так как функция $f(x, y) = x + y^2$ непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ в любой конечной части плоскости xOy, то, согласно теореме Пикара, через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = x + y^2$, т. е. пересечение графиков двух его решений в этой точке невозможно.

б) В силу непрерывности функции $f(x, y) = x + y^2$ и ее частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$, через каждую точку (x_0, y_0, y_0') проходит единственная интегральная кривая. Последнее, однако, не исключает того, что через точку (x_0, y_0) проходят две различные интегральные кривые с различными угловыми коэффициентами касательных к ним, т. е. пересечение графиков двух решений в некоторой точке (x_0, y_0) возможно. Этот факт можно установить и непосредственно, дважды проинтегрировав данное уравнение и приняв во внимание, что $y(x_0) = y_0$. Тогда получим

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + y_0'x - \frac{x_0^2 x}{2} + y_0 - y_0'x_0 + \frac{x_0^3}{3} + \int_{x_0}^{x}(x - t)y^2(t)\,dt.$$

Очевидно, что любая кривая $y(x)$ проходит через точку (x_0, y_0), однако каждая из них имеет в этой точке "свою" касательную с угловым коэффициентом y_0'. ►

208. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости xOy касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0)

а) для уравнения $y' = x + y^2$?

б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

в) для уравнения $y''' = x + y^2$?

◀ а) Касание двух различных интегральных кривых в точке (x_0, y_0) невозможно в силу теоремы существования и единственности (см. пример 207, а)).

б) Касание двух различных интегральных кривых означает, что через точку (x_0, y_0, y_0') проходят две интегральные кривые уравнения $y'' = x + y^2$. Последнее же невозможно в силу теоремы существования и единственности решения. (см. пример 207, б)).

в) Теорема единственности решения гарантирует существование в окрестности каждой точки (x_0, y_0, y_0', y_0'') единственной интегральной кривой уравнения $y''' = x + y^2$. Она гарантирует также существование единственного решения и в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', y_{01}'')$. Следовательно, графики двух решений, проходящих через указанные точки, имеют общую касательную. ▶

209. Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$? Рассмотреть отдельно случаи $n = 1, 2, 3$.

◀ При $n = 1$ имеем $y'(0) = (x + y^2)|_{x=0} = y^2(0) = 1 \neq 2$. Следовательно, если $n = 1$, то уравнение не имеет ни одного решения с указанными начальными условиями.

Так как функция $f(x, y, y') = x + y^2$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ в окрестности точки $(0, 1, 2)$, то согласно теореме существования (см. п. 8.4) задача $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ имеет единственное решение в достаточно малой окрестности точки $(0, 1, 2)$.

В силу теоремы единственности (см. п. 8.4) задача $y''' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0)$ — произвольное, имеет единственное решение в окрестности точки $(0, 1, 2, y''(0))$. Следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(0, 1, 2)$ имеется однопараметрическое множество решений задачи

$$y''' = x + y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \blacktriangleright$$

210. Сколько решений уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) проходит через точку (x_0, y_0) по заданному направлению, образующему угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ с осью Ox? Рассмотреть случаи $n = 1$, $n = 2$ и $n \geqslant 3$.

◀ Пусть $n = 1$. Тогда задача $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ в силу непрерывности функций f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеет единственное решение в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0). Если к тому же $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0)$, то поставленная задача имеет единственное решение. Если же $\operatorname{tg}\alpha \neq f(x_0, y_0)$, то эта задача решений не имеет.

Пусть $n = 2$. Тогда задача $y'' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, в силу непрерывности функций f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, имеет единственное решение в достаточно малой окрестности точки $(x_0, y_0, \operatorname{tg}\alpha)$.

Наконец, если $n \geqslant 3$, то задача $y^{(n)} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ имеет бесчисленное множество решений вследствие того, что задача $y^{(n)} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, $y''(x_0) = y_0''$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ имеет единственное решение в достаточно малой окрестности точки $(x_0, y_0, \operatorname{tg}\alpha, y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$. Другими словами, в силу произвольности чисел y_0'', y_0''', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ задача $y^{(n)} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ ($n \geqslant 3$) имеет $(n-2)$-параметрическое множество решений.

Последний вывод можно отнести и к предыдущему примеру для случая $n > 3$. ▶

211. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?

◀ В точке $(0, 0)$ имеем $y_1(0) = y_2(0)$, $y_1'(0) = y_2'(0)$, $y_1''(0) = y_2''(0)$, $y_1'''(0) = y_2'''(0)$, $y_1^{IV}(0) = 0$, $y_2^{IV}(0) = 24$, т. е. $y_1^{IV}(0) \neq y_2^{IV}(0)$. Видим, что n не может быть равно единице, поскольку через точку $(0, 0)$ проходит два различных решения, а теорема единственности (см. п. 8.4) утверждает,

что через каждую точку плоскости xOy проходит только одно решение. Далее, $n \neq 2$, так как в противном случае, согласно указанной теореме, через точку $(0, y(0), y'(0))$ проходила бы лишь одна интегральная кривая. По этой же причине $n \neq 3$, $n \neq 4$.

Пусть $n = 5$. Тогда задача $y^{V} = f(x, y)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 0$ может иметь решение $y_1 = x$, а задача $y^{V} = f(x, y)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 24$ — решение $y_2 = x + x^4$. Это объясняется тем, что в пространстве переменных $(x, y, y', y'' y''', y^{IV})$ кривые y_1 и y_2 не совпадают ни в одной точке, т. е. могут быть решениями одного и того же уравнения $y^{V} = f(x, y)$ (заметим, что функции f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y''}$, $\frac{\partial f}{\partial y'''}$, $\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}$ здесь непрерывны). Указанные кривые не совпадают ни в одной точке и в пространстве переменных $(x, y, y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots)$, поэтому уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ может иметь их в качестве решений и при $n > 5$. Тривиальные примеры: $y^{V} = 0$, $y^{VI} = 0$. ▶

212. Пусть функция f непрерывна и при каждом x не возрастает при возрастании y. Доказать, что если два решения уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию $y(x_0) = y_0$, то они совпадают при $x \geqslant x_0$.

◀ Почленно вычитая из тождества $y_1' \equiv f(x, y_1(x))$ тождество $y_2' \equiv f(x, y_2(x))$ и вводя в рассмотрение функцию u, где $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ $(x \geqslant x_0)$, получаем задачу

$$u'(x) = f\big(x, y_2(x) + u(x)\big) - f(x, y_2(x)), \quad u(x_0) = 0, \quad x \geqslant x_0, \tag{1}$$

которая имеет очевидное решение $u(x) \equiv 0$. Докажем, что других решений нет. Применим метод доказательства от противоположного. Пусть существует такое $x > x_0$, для которого $u > 0$. Тогда, в силу непрерывности функции u, найдутся такие два числа $\varepsilon_1 \geqslant 0$ и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, что $u(x) > 0$ при $x_0 \leqslant x_0 + \varepsilon_1 < x \leqslant x_0 + \varepsilon_2$, причем, уменьшая ε_1, всегда можно иметь $u(x_0 + \varepsilon_1) = 0$. Интегрируя в (1), получаем

$$u(x) = \int\limits_{x_0+\varepsilon_1}^{x} \big(f\,(t, y_2(t) + u(t)) - f\,(t, y_2(t))\big)\,dt, \quad x \in [x_0 + \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2]. \tag{2}$$

Поскольку $u(t) \geqslant 0$ при $t \in [x_0 + \varepsilon_1, x]$, то, в силу невозрастания функции $f(t, y)$ по y, справедливо неравенство

$$f\,(t, y_2(t) + u(t)) - f(t, y_2(t)) \leqslant 0. \tag{3}$$

Принимая во внимание (3), из (2) находим, что $u(x) \leqslant 0$ при $x \in (x_0 + \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2]$. Таким образом, пришли к противоречию, из которого следует, что функция u не может быть положительной ни при каком $x > x_0$. Аналогично устанавливаем, что u не может быть отрицательной. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ при всех $x \geqslant x_0$. ▶

213. Сколько производных имеют решения следующих уравнений и систем в окрестности начала координат?

а) $y' = x + y^{\frac{7}{3}}$; б) $y' = x|x| - y^2$; в) $y'' = |x^3| + y^{\frac{5}{3}}$; г) $y''' = y - x\sqrt[3]{x}$;

д) $\dfrac{dx}{dt} = t + y$, $\dfrac{dy}{dt} = x + t^2|t|$; е) $\dfrac{dx}{dt} = y^2 + \sqrt[3]{t^4}$, $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}$.

◀ Применяем теорему о дифференцируемости решений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), в которой утверждается, что если функция f имеет в этой окрестности непрерывные частные производные до k-го порядка включительно, то решение указанного уравнения с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет непрерывные производные до $k + 1$-го порядка включительно. Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда f — вектор-функция.

а) Имеем $f(x, y) = x + y^{\frac{7}{3}}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{7}{3}y^{\frac{4}{3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{28}{9}y^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{28}{27}y^{-\frac{2}{3}}$. Видим, что функция f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности начала координат. Следовательно, в силу приведенной выше теоремы, задача $y' = x + y^{\frac{7}{3}}$, $y(0) = 0$ имеет в окрестности начала координат трижды непрерывно дифференцируемое решение $y = y(x)$.

б) Так как функция $f(x, y) = x|x| - y^2$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x} = 2|x|$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ и не дифференцируема дважды в окрестности начала координат (поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial x} = 2|x|$ не дифференцируема при $x = 0$), то решение $y = y(x)$ задачи $y' = x|x| - y^2$, $y(0) = 0$ дважды непрерывно дифференцируемо.

в) Поскольку функция $f(x, y, y') = |x^3| + y^{\frac{5}{3}}$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 0$ в окрестности начала координат, то, согласно теореме существования п. 8.4, задача $y'' = |x^3| + y^{\frac{5}{3}}$, $y(0) = 0$, имеет единственное непрерывное решение $y = y(x)$ в этой окрестности. Подставляя $y(x)$ в данное уравнение, получаем тождество

$$y''(x) = |x^3| + y^{\frac{5}{3}}(x),$$

из которого следует, что функция y'' непрерывна. Дифференцируя это тождество, находим:

$$y'''(x) \equiv 3x^2 \operatorname{sgn} x + \frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}(x)y'(x), \tag{1}$$

$$y^{IV}(x) = 6|x| + \frac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}}(x)y'^2(x) + \frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}(x)y''(x). \tag{2}$$

В силу того, что правая часть уравнения (1) непрерывна в окрестности начала координат, а правая часть уравнения (2) разрывна при $y = 0$, то можно гарантировать существование непрерывной третьей производной решения рассматриваемой задачи.

г) В силу того, что

$$y^{IV} = y' - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, \quad y^{V} = y'' - \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}},$$

задача $y''' = y - x\sqrt[3]{x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ имеет четырежды непрерывно дифференцируемое решение $y(x)$ в окрестности начала координат.

д) Функции $f_1(t, x, y) = t + y$, $f_2(t, x, y) = x + t^2|t|$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 3t|t|, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 6|t|, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0$$

в окрестности точки (t_0, x_0, y_0), где $t_0 = x_0 = y_0 = 0$, поэтому данная система уравнений имеет трижды непрерывно дифференцируемое решение $(x(t), y(t))$ в этой окрестности.

е) В этом случае функции $f_1(t, x, y) = y^2 + \sqrt[3]{t^4}$, $f_2(t, x, y) = \sqrt[3]{x}$ непрерывны в окрестности точки $(0, 0, 0)$, однако, поскольку производная $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ разрывна в этой точке, то можно гарантировать только непрерывную дифференцируемость решений $x(t)$, $y(t)$ данной системы уравнений. ▶

214. При каких a каждое решение продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$

а) для уравнения $y' = |y|^a$?

б) для уравнения $y' = (y^2 + e^x)^a$?

в) для уравнения $y' = |y|^{a-1} + \left((x\sqrt[3]{y})^2\right)^a$?

г) для системы $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$, $z' = y(1 + z^2)^a$?

◀ а) Пусть $a < 0$. Тогда $y \neq 0$ и решение данного уравнения $y = (1 - a)^{\frac{1}{1-a}}x^{\frac{1}{1-a}}$ $(x > 0)$ не продолжимо влево. Пусть $a > 1$. Тогда решение $y = (a - 1)^{\frac{1}{1-a}}(C - x)^{\frac{1}{1-a}}$ не продолжимо правее точки $x = C$, так как прямая $x = C$ является асимптотой для этого решения. Если $a = 0$, то уравнение $y' = 1$, где $y \neq 0$, также имеет непродолжимые решения вида $y = x + C$ $(x \neq -C)$.

При $a = 1$ все решения уравнения $y' = |y|$ описываются с помощью формул $y = |C|e^x$ и $y = -|C|e^{-x}$. Очевидно, что каждое из них продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$. Наконец, если $0 < a < 1$, то все решения имеют вид

$$y = (1-a)^{\frac{1}{1-a}}(x-C)^{\frac{1}{1-a}}, \quad (x \geqslant C), \quad y = -(1-a)^{\frac{1}{1-a}}(C-x)^{\frac{1}{1-a}}, \quad (x \leqslant C), \quad y \equiv 0.$$

Легко видеть, что первое решение является продолжением второго. Таким образом, если $0 < a \leqslant 1$, то все решения рассмотренного уравнения продолжимы на всю ось Ox.

б) Так как функция $f(x, y) = (y^2 + e^x)^a$ вместе с частной производной $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay(y^2 + e^x)^{a-1}$ непрерывна в любой окрестности начала координат, то согласно теореме существования через каждую точку этой окрестности проходит одна интегральная кривая. Однако не при каждом a все интегральные кривые имеют своей областью определения всю ось Ox. Так, если $a > \frac{1}{2}$, то в силу оценки $y' = (y^2 + e^x)^a > (y^2)^a = |y|^{2a}$ $(x > 0)$ и предыдущего примера заключаем, что ни одно решение уравнения $y' = (y^2 + e^x)^a$ не продолжимо вправо (решения обязательно будут иметь вертикальные асимптоты).

Пусть $a \leqslant \frac{1}{2}$ и $x \geqslant 0$, тогда $(y^2 + e^x)^a \leqslant (y^2 + e^x)^{\frac{1}{2}} \leqslant |y| + e^{\frac{x}{2}}$. Таким образом, справедлива формула (4), п. 8.3. Значит, каждое решение данного уравнения продолжимо на полуинтервал $0 \leqslant x < +\infty$. Если $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, то они продолжимы и левее нуля, так как при $x \leqslant 0$

$$(y^2 + e^x)^a \leqslant (y^2 + 1)^a \leqslant (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \leqslant |y| + 1.$$

и применимо утверждение п. 8.3. При $x \leqslant 0$ и $a \leqslant 0$ имеем оценку

$$(y^2 + e^x)^a \leqslant e^{xa},$$

из которой на основании указанного утверждения следует, что все решения уравнения продолжимы левее нуля и при $a \leqslant 0$. Таким образом, если $a \leqslant \frac{1}{2}$, то каждое решение уравнения, существующее в окрестности начала координат, непрерывно продолжимо как левее, так и правее нуля на бесконечный интервал, т. е. оно продолжимо на всю ось Ox.

в) Очевидно, при $a \leqslant 1$ не каждое решение уравнения продолжимо на всю ось Ox, т. к. $y \neq 0$ (при $a < 1$ $|y|^{a-1} + \left((x\sqrt[3]{y})^2\right)^a \to +\infty$ при $y \to 0$, следовательно, интегральные кривые приближаются к оси Ox под прямым углом и не определены при $y = 0$; при $a = 1$ правая часть уравнения не определена в точке $(x, 0)$). Если $a > 1$, то правая часть уравнения непрерывна, следовательно, уравнение имеет решения в окрестности любой точки плоскости xOy.

Очевидно, что каждое решение $y(x)$, для которого $|y(x)| \leqslant 1$, продолжимо на всю ось Ox, поэтому будем считать, что существуют такие x, для которых справедливо неравенство $|y(x)| > 1$. Тогда при $1 < a \leqslant \frac{3}{2}$ имеем оценку

$$|y|^{a-1} + \left((x\sqrt[3]{y})^2\right)^a = |y|^{a-1} + |x|^{2a}|y|^{\frac{2}{3}a} = |y|^{\frac{2}{3}a}\left(|x|^{2a} + |y|^{\frac{a}{3}-1}\right) \leqslant |y|^{\frac{2}{3}a}(|x|^{2a} + 1) \leqslant |y|\left(|x|^{2a} + 1\right).$$

В силу утверждения п. 8.3 и последнего неравенства заключаем, что если $1 < a \leqslant \frac{3}{2}$, то каждое решение уравнения продолжимо на всю ось Ox.

Если $a = \frac{3}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то при $|x| > 1$ имеем оценку

$$y' = |y|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + |x|^{3+2\varepsilon}|y|^{1+\frac{2}{3}\varepsilon} > |y|^{1+\frac{2}{3}\varepsilon}.$$

Следовательно, при $a > \frac{3}{2}$ и $|x| > 1$ решения данного уравнения растут быстрее решений уравнения $y' = |y|^{1+\frac{2}{3}\varepsilon}$, исследованного в примере а), т. е. не продолжимы.

г) Поскольку правые части системы уравнений непрерывны вместе со своими частными производными по y и z при любом a во всем пространстве переменных (x, y, z), то в окрестности любой его точки существует единственное решение данной системы.

Пусть $a \leqslant 0$. Тогда для суммы квадратов правых частей уравнений при $y^2 + z^2 \geqslant 2$ справедлива оценка

$$\left(y^2 + z^2 + 2\right)^{-2a} + y^2\left(1 + z^2\right)^{2a} \leqslant \left(r^2 + 2\right)^{-2a} + r^2 \leqslant r^{-4a}\left(1 + \frac{2}{r^2}\right)^{-2a} + r^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4^{-a}r^{-4a} + r^2 = r^2\left(1 + 4^{-a}r^{-4a-2}\right),$$

где $r^2 = y^2 + z^2$, из которой при $-4a - 2 \leqslant 0$, т. е. при $a \geqslant -\frac{1}{2}$ следует, что

$$|f| = \sqrt{(r^2+2)^{-2a} + y^2(1+z^2)^{2a}} \leqslant r(1+4^{-a})^{\frac{1}{2}}.$$

На основании полученной оценки и утверждения п. 8.3 заключаем, что при $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$ все решения системы продолжимы на всю ось Ox.

Пусть $a > 0$. Тогда из первого уравнения системы можно получить оценку

$$|y| \leqslant |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(y^2+z^2+2)^a} \right| \leqslant |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| = |y_0| + |x - x_0|,$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка. Как видим, решение $y(x)$ продолжимо на всю ось Ox. На основании последней оценки правая часть второго уравнения при $a \leqslant \frac{1}{2}$ оценивается следующим образом:

$$\left| y\left(1+z^2\right)^a \right| \leqslant |y| \left(1+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (|y_0| + |x - x_0|)(|z| + 1).$$

Отсюда в силу утверждения п. 8.3 следует, что если $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, то решения системы продолжимы на весь интервал $-\infty < x < +\infty$.

Пусть $a < -\frac{1}{2}$, тогда $y' \geqslant |y|^{-2a}$. Следовательно, решения уравнения $y' = (y^2+z^2+2)^{-a}$ при $a < -\frac{1}{2}$ не продолжимы, так как растут быстрее, чем решения уравнения $y' = |y|^{-2a}$, имеющие асимптоты (см. пример а)).

Пусть $a > \frac{1}{2}$. Тогда, как мы видели, все решения $y(x)$ продолжимы на всю ось Ox. Возьмем кривую $y = y(x)$ с начальным условием $y(0) = 0$. В силу того, что $y' > 0$, функция $y = y(x)$ возрастает (значит, она положительна при $x > 0$). Следовательно,

$$\int_0^x y(t)\,dt \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{1}$$

Далее, интегрируя второе уравнение системы, получаем

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^a} = \int_0^x y(t)\,dt \quad (z \geqslant z_0;\ x \geqslant 0).$$

Поскольку $\int_{z_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^a}$ сходится, то отсюда и из (1) вытекает, что $x \to x_1$ при $z \to +\infty$ $(x_1 < +\infty)$, т. е. прямая $x = x_1$ является асимптотой для решения $z = z(x)$.

Итак, исходя из полученных результатов, заключаем, что лишь при $|a| \leqslant \frac{1}{2}$ все решения системы продолжимы на интервал $-\infty < x < +\infty$. ▶

215. Для следующих уравнений доказать, что решение с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$ и имеются решения, непродолжимые на полуинтервал $-\infty < x \leqslant x_0$:

а) $y' = x^3 - y^3$; б) $y' = xy + e^{-y}$.

◀ Функции $f_1(x, y) = x^3 - y^3$, $f_2(x, y) = xy + e^{-y}$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -3y^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = x - e^{-y}$, поэтому согласно теореме существования п. 8.1 через каждую точку плоскости xOy проходит одна гладкая интегральная кривая, своя для каждого из уравнений в а) и б). Покажем, что все кривые продолжимы на полуинтервал $[x_0, +\infty)$.

а) Прямая $y = x$ делит плоскость xOy на две части, в левой из которых все решения $y(x)$ убывают, так как $y'(x) < 0$, а в правой части — возрастают в силу того, что $y'(x) > 0$. При этом ни одна интегральная кривая не может выйти из правой полуплоскости, поскольку для этого ей пришлось бы пересечь прямую $y = x$, на которой $y' = 0$. Следовательно, ни одна кривая в полуплоскости $x > y$ асимптот не имеет, т. е. она продолжима на полуинтервал $[x_0, +\infty)$.

Заменив в данном уравнении x на $-x$, получим уравнение

$$y' = x^3 + y^3,$$

из которого интегрированием находим

$$x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{x^3 + t^3} \leqslant \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{x_0^3 + t^3} \quad (x \geqslant x_0;\ y \geqslant y_0;\ x_0 + y_0 > 0).$$

Поскольку интеграл справа при $y \to +\infty$ сходится, то $x \to x_1$ при $y \to +\infty$, где $x_1 > x_0$. Значит, каждое решение уравнения $y' = x^3 - y^3$ не продолжимо на полуинтервал $(-\infty, x_0]$.

б) Поскольку $y' = 0$ при $xy + e^{-y} = 0$, то кривая $x = -\frac{1}{ye^y}$ делит всю плоскость xOy на три области, в каждой из которых решения или убывают, или возрастают. Исследуем эту ситуацию подробнее.

Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) в области, определяемой неравенствами $xy + e^{-y} < 0$, $x < 0$. Поскольку в этой области $y' < 0$, то ордината кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), убывает и принимает минимальное значение на кривой $xy + e^{-y} = 0$ $(x < 0)$. Перейдя через кривую $xy + e^{-y} = 0$, интегральная кривая попадает в область, где $y' > 0$. При этом ордината интегральной кривой возрастает, однако в силу оценки

$$|xy + e^{-y}| \leqslant |x|y + 1, \quad (y \geqslant 0)$$

и утверждения п. 8.3 рассматриваемая интегральная кривая асимптоты не имеет, т. е. продолжима вправо при $x > 0$.

Теперь возьмем произвольную точку (x_0, y_0) в области, где $xy + e^{-y} > 0$. Так как $y' > 0$ в этой области, то решение $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$, возрастает. Если кривая попадает в верхнюю полуплоскость, то решение, как мы видели, продолжимо вправо. Если же она попадает в область $xy + e^{-y} < 0$, $y < 0$, то в силу отрицательности производной решение $y = y(x)$ будет убывать. Благодаря конструкции этой области (любая вертикальная прямая пересекает границу области в двух точках) ни одна интегральная кривая не сможет выйти из нее, а значит, не может быть продолжена при $x > 0$.

Покажем теперь, что уравнение имеет непродолжимые на полуинтервал $(-\infty, x_0]$ решения.

Заменив в уравнении x на $-x$ и y на $-y$, получим

$$y' = xy + e^y \geqslant e^y.$$

Поскольку уравнение $y' = e^y$ имеет при $x > 0$ непродолжимые решения, то полученное уравнение, решения которого растут еще быстрее при $x > 0$, также имеет непродолжимые решения. ▶

216. Пусть на всей плоскости xOy функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \leqslant K(x)$, функция K непрерывная. Доказать, что решение уравнения $y' = f(x, y)$ с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

◀ Из двух дифференциальных задач

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0; \quad z' = K(x)z, \quad z(x_0) = y_0,$$

вторая из которых является вспомогательной, почленным вычитанием получаем задачу

$$u' = Q(x) + P(x)u, \quad u(x_0) = 0,$$

где $u(x) = y(x) - z(x)$, $Q(x) = f(x, z(x)) - K(x)z(x)$, а $P(x) = \frac{f(x, y(x)) - f(x, z(x))}{y(x) - z(x)}$ может быть представлено в виде $P(x) = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{y=\xi(x)}$, где $\xi(x)$ — некоторая функция, график которой лежит между графиками $y(x)$ и $z(x)$.

Решение полученной задачи имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \exp\left(\int\limits_{t}^{x} P(s)\,ds\right) dt,$$

откуда в силу условия задачи следует, что

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |Q(t)| \exp\left(\int\limits_{t}^{x} K(s)\,ds\right) dt \equiv \Phi(x).$$

Так как функция K непрерывна при $x \geqslant x_0$, то решение $z = z(x)$ существует при $x \geqslant x_0$ и непрерывно. А тогда в силу непрерывности функции f и функция Q также непрерывна при $x \geqslant x_0$. Следовательно, при $x \geqslant x_0$ непрерывна и подынтегральная функция в последнем интеграле, который также непрерывен. Таким образом, при всех $x \geqslant x_0$ имеем

$$z(x) - \Phi(x) \leqslant y(x) \leqslant z(x) + \Phi(x),$$

откуда на основании локальной непрерывности функции $y = y(x)$ следует ее существование и непрерывность при $x \geqslant x_0$. ▶

217. Дана система в векторной записи $y' = f(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы существования в окрестности каждой точки (x, y). Пусть в области $|y| > b$ при всех x

$$y f(x, y) \leqslant K(x)|y|^2,$$

где $y \cdot f$ — скалярное произведение, а функция K непрерывна. Доказать, что решение с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

◀ Умножив скалярно обе части данного уравнения на вектор-функцию $y = y(x)$ и обозначив $|y|^2 = u(x)$, получим

$$u' = 2y \cdot f \leqslant 2K(x)u, \quad u > b^2,$$

откуда

$$\frac{u'}{u} \leqslant 2K(x), \quad u \leqslant u_0 \exp\left(2\int\limits_{x_0}^{x} K(t)\,dt\right),$$

или окончательно

$$|y| \leqslant |y_0| \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} K(t)\,dt\right) \equiv \Phi(x).$$

Так как функция K непрерывна при $x \geqslant x_0$, то функция Φ также непрерывна при $x \geqslant x_0$, следовательно, функция $|y|$ продолжима на полуинтервал $[x_0, +\infty)$. ▶

Примечание. Из неравенства $|y| \leqslant \Phi(x)$ еще не следует продолжимость функции $|y|$ на полуинтервал $[x_0, +\infty)$, если при этом не будет гарантировано существование решения в окрестности каждой точки полуплоскости $x > x_0$ плоскости xOy.

§ 9. Особые решения

9.1. Особое решение. Дискриминантная кривая.

Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если в любой окрестности каждой его точки проходит другое решение, имеющее в этой точке общую с ним касательную.

Пусть функция $F = F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка. Геометрическое место точек $\varphi(x, y) = 0$, получаемых путем исключения y' из уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0, \tag{1}$$

называется *дискриминантной кривой* дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. Следует проверить, является ли ветвь дискриминантной кривой, удовлетворяющая этому дифференциальному уравнению, особым решением, т. е. касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Аналогично поступаем с геометрическим местом $\psi(x, y) = 0$, удовлетворяющим условиям

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \quad \text{— неограниченная.}$$

9.2. Огибающая как особое решение.

Семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ может иметь огибающую $y = \varphi(x)$. В таком случае кривая $y = \varphi(x)$ является особым решением указанного уравнения. Если функция $\Phi = \Phi(x, y, C)$ непрерывно дифференцируема, то огибающая удовлетворяет системе уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{2}$$

Вообще говоря, системе (2) удовлетворяет дискриминантная кривая семейства $\Phi(x, y, C) = 0$. Для отделения от дискриминантной кривой некоторой ее части, состоящей из особых точек, можно пользоваться условием:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \tag{3}$$

на кривой, не состоящей из особых точек.

Оставшаяся часть дискриминантной кривой может оказаться огибающей. Если, в частности, эта часть не принадлежит рассматриваемому семейству, то она заведомо будет огибающей.

В следующих задачах найти все решения данных уравнений и выделить особые решения, если они есть.

218. $y'^2 - y^2 = 0$.

◀ Функция $F(x, y, y') = y'^2 - y^2$ непрерывно дифференцируема, поэтому если данное уравнение имеет особое решение, то оно удовлетворяет системе (1), п. 9.1: $y'^2 - y^2 = 0$, $2y' = 0$, из которой путем исключения y' получаем $y = 0$. Кривая $y = 0$ является решением рассматриваемого уравнения, однако утверждать, что оно особое, мы пока что не можем.

Найдем остальные решения этого уравнения. Имеем $y' = \pm y$, откуда интегрированием находим $y = C_1 e^x$, а также $y = C_2 e^{-x}$. Теперь видим, что ни одна интегральная кривая из двух полученных семейств не касается кривой $y = 0$ (за исключением, естественно, ее самой). Следовательно, решение $y = 0$ не является особым. ▶

219. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$.

◀ Полагая $x + y = u(x)$ и разрешая уравнение относительно производной, получаем

$$u' = 3u^{\frac{2}{3}},$$

откуда $u = (x + C)^3$, или $y = (x + C)^3 - x$. Из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) \equiv x + y - (x + C)^3 = 0, \quad -3(x + C)^2 = 0$$

следует, что кривая $y = -x$ является дискриминантной кривой семейства интегральных кривых. Так как на дискриминантной кривой

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 2 \neq 0$$

и эта кривая семейству не принадлежит, то решение $y = -x$ является особым. ▶

220. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.

◀ Разрешаем уравнение относительно производной

$$y' = \pm 2\sqrt{y^3(1 - y)}$$

и интегрируем полученные уравнения:

$$\pm \int \frac{dy}{2\sqrt{y^3(1 - y)}} = x + C, \quad \pm \int \frac{dt}{\sin^2 t} = x + C,$$

где положено $y = \sin^2 t$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$. Принимая во внимание и очевидное решение $y = 1$, окончательно имеем

$$y = \frac{1}{1 + (x + C)^2}, \quad y = 1. \tag{1}$$

Из уравнений

$$\Phi \equiv y\left(1+(x+C)^2\right)-1=0, \quad \frac{\partial}{\partial C}\left(y\left(1+(x+C)^2\right)-1\right)=0$$

находим дискриминантную кривую $y=1$. Поскольку на дискриминантной кривой

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2=1\neq 0$$

и $y=1$ семейству (1) не принадлежит, то $y=1$ — огибающая этого семейства. Следовательно, $y=1$ — особое решение данного дифференциального уравнения.

Если для отыскания дискриминантной кривой воспользоваться системой уравнений (1), п. 9.1, то, кроме кривой $y=1$, можно получить еще решение $y=0$. Однако, как видно из (1), ни одно решение этого семейства (исключая, естественно, решение $y=0$, получаемое из (1) при $C=\infty$) не касается решения $y=0$. Таким образом, решение $y=0$ не является особым. ▶

221. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$.

◀ Решив уравнение относительно производной, получим два дифференциальных уравнения:

$$y'=y; \quad y'=\pm\sqrt{y}.$$

Проинтегрировав их, находим

$$y=C_1e^x; \quad y=\frac{1}{4}(x+C_2)^2; \quad y=0.$$

Из уравнений

$$\Phi \equiv 4y-(x+C_2)^2=0, \quad -2(x+C_2)=0$$

следует, что $y=0$ — дискриминантная кривая. В силу условия

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2=16\neq 0,$$

выполняющегося на дискриминантной кривой, и того, что кривая $y=0$ семейству $\Phi(x, y, C)=0$ не принадлежит, заключаем, что $y=0$ — огибающая семейства $y=\frac{1}{4}(x+C_2)^2$, следовательно, $y=0$ — особое решение. ▶

222. $4(1-y)=(3y-2)^2y'^2$.

◀ Имеем

$$y'=\pm 2\frac{\sqrt{1-y}}{|3y-2|} \quad \left(y\neq\frac{2}{3}, \quad y\leqslant 1\right),$$

откуда

$$\pm\frac{1}{2}\int\frac{|3y-2|}{\sqrt{1-y}}\,dy=x+C,$$

или

$$y^2(1-y)-(x+C)^2=0.$$

Кроме того, $y=1$ — очевидное решение. Из уравнений

$$\Phi \equiv y^2(1-y)-(x+C)^2=0, \quad -2(x+C)=0$$

следует, что $y^2(1-y)=0$, или $y=0$, а также $y=1$. Так как $y=0$ не является решением, а на кривой $y=1$, которая, очевидно, семейству $\Phi(x, y, C)=0$ не принадлежит, выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2=1\neq 0,$$

то $y=1$ — особое решение. ▶

223. $y'-xy+\sqrt{y}=0$.

◀ Полагая $\sqrt{y}=z$, получим линейное дифференциальное уравнение

$$2z'-xz+1=0,$$

проинтегрировав которое, находим

$$z = \frac{1}{2}(C - x)e^{\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{4}(C - x)^2 e^x. \tag{1}$$

В процессе интегрирования было потеряно решение $y = 0$. В силу неограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y = 0$, где $f(x, y) = xy - \sqrt{y}$ — правая часть рассматриваемого дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, решение $y = 0$ может быть особым. Из уравнений

$$\Phi \equiv y - \frac{1}{4}(C - x)^2 e^x = 0, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv \frac{1}{2}(C - x)e^x = 0$$

также следует, что кривая $y = 0$ может быть особой. Так как

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1 \neq 0$$

на этой кривой, а сама кривая семейству (1) не принадлежит, то, согласно п. 9.2, решение $y = 0$ особое. ►

224. $y' = \varphi(x)|y|^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, где φ — непрерывная функция, отличная от тождественного нуля.

◄ Пусть $y > 0$. Тогда, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y = \left(C + (1 - \alpha)\int \varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{1}$$

Так как производная $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(x)|y|^\alpha)$ не ограничена при $y = 0$, то, согласно теореме существования единственного решения для уравнения $y' = f(x, y)$, решение $y = 0$ может быть особым. Из уравнений

$$\Phi \equiv y - \left(C + (1 - \alpha)\int \varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv -\frac{1}{1 - \alpha}\left(C + (1 - \alpha)\int \varphi(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0$$

находим, что $y = 0$ — дискриминантная кривая семейства (1). В силу условия

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1 \neq 0,$$

выполняющегося на дискриминантной кривой, и того, что кривая $y = 0$ не принадлежит семейству (1), заключаем, что $y = 0$ — огибающая семейства (1), т. е. $y = 0$ — особое решение.

При $y < 0$ аналогичным путем получаем другое семейство интегральных кривых, для которого кривая $y = 0$ также является огибающей. ►

225. Показать, что функция $y = \psi(x)$ — особое решение уравнения

$$y' = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}y + \varphi(x)|y - \psi(x)|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

где φ — непрерывная, а ψ — непрерывно дифференцируемая функции на интервале (a, b), причем $\psi \neq 0$ на (a, b).

◄ Полагая $y = z(x)\psi(x)$, получим дифференциальное уравнение

$$z' = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}|z - 1|^\alpha |\psi(x)|^\alpha,$$

где функция $\frac{\varphi|\psi|^\alpha}{\psi}$ непрерывная, поэтому (см. пример 224) решение $z = 1$ — особое, а тогда и $y = \psi(x)$ — особое решение исходного уравнения. ►

226. Показать, что функции $y = \pm\psi(x)$ — особые решения уравнения

$$y' = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,y + \varphi(x)|y^2 - \psi^2(x)|^\alpha,$$

где $0 < \alpha < 1$, φ, ψ' — непрерывные на интервале (a, b) функции и $\forall x \in (a, b)$ $\psi(x) \neq 0$.

◀ В результате замены $y = z(x)\psi(x)$ получаем дифференциальное уравнение

$$z' = \beta(x)|z^2 - 1|^\alpha,$$

где $\beta = \frac{\varphi}{\psi}|\psi|^{2\alpha}$ — непрерывная функция. Полагая в последнем уравнении $z = 1 + \varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x) > 0$, и интегрируя полученное уравнение, находим

$$\varepsilon(x) = \left(2^\alpha(1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{x}\beta(t)\left(1+\frac{\varepsilon(t)}{2}\right)^\alpha dt + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \in (a, b), \quad x_0 \in (a, b). \tag{1}$$

Очевидно, дифференциальному уравнению $\varepsilon' = \beta\varepsilon^\alpha(2+\varepsilon)^\alpha$ удовлетворяет также функция $\varepsilon \equiv 0$ на (a, b). Покажем, что в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ функции ε и $\varepsilon \equiv 0$ имеют общую касательную. Из (1) имеем

$$\varepsilon(x_0) = C^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \varepsilon'(x_0) = C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta(x_0)(2+\varepsilon(x_0))^\alpha. \tag{2}$$

В точке касания с абсциссой x_0 должны выполняться условия

$$\varepsilon(x_0) = 0, \quad \varepsilon'(x_0) = 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $C = 0$. Таким образом, любая функция, определяемая уравнением

$$\varepsilon(x) = \left(2^\alpha(1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{x}\beta(t)\left(1+\frac{\varepsilon(t)}{2}\right)^\alpha dt\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

тождественно равна нулю на (a, b). Это означает, что решение $\varepsilon = 0$ — особое, т. е. решение $y = \psi(x)$ — особое для данного дифференциального уравнения.

Аналогично доказывается, что решение $y = -\psi(x)$ также является особым. ▶

Найти особые решения, не интегрируя самого уравнения.

227. $y'^2(x^2 - b) - 2xyy' - x^2 = 0$.

◀ Разрешая уравнение относительно производной, получаем

$$y' = \frac{xy \pm |x|\sqrt{y^2 + x^2 - b}}{x^2 - b}. \tag{1}$$

Если $|x| > b$, то через каждую точку плоскости xOy проходит единственное решение каждого из двух дифференциальных уравнений (1), так как в этом случае их правые части непрерывные и имеют непрерывные частные производные по y.

Пусть $|x| < b$. Тогда условия непрерывности нарушаются на кривой $x^2 + y^2 = b$. Однако в силу лишь достаточности этих условий (достаточности для существования единственного решения), мы не можем утверждать, что указанная кривая представляет собой особое решение.

Применим результат решения примера 226. Здесь функции $\varphi(x) = \pm\frac{|x|}{x^2 - b}$ и $\psi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{b - x^2}}$ непрерывны при $|x| < b$, $\alpha = \frac{1}{2}$, следовательно, решения $y = \pm\psi(x) = \pm\sqrt{b - x^2}$ — особые для каждого из уравнений (1), т. е. кривая $x^2 + y^2 = b$ действительно является особой. ▶

228. $y - 2xy' - y'^2 = 0$.

◀ Здесь $F(x, y, y') = y - 2xy' - y'^2$, частная производная $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$ ограничена, а из уравнений $F \equiv y - 2xy' - y'^2 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv -2x - 2y' = 0$ следует, что особым решением может быть только функция $y = -x^2$. Однако, как легко проверить, $y = -x^2$ не является решением уравнения, следовательно, особых решений нет. ▶

229. $y'^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)y' - \left(1 + x^2\right)y - \frac{x^4}{16} = 0.$

◀ Разрешая уравнение относительно производной, получим

$$y' = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{4}\sqrt{16y + x^4 + 4x^2}.$$

Полагая здесь $u = y + \frac{1}{16}\left(x^4 + 4x^2\right)$, имеем

$$u' = \pm\sqrt{1+x^2}\sqrt{u}, \quad u \geqslant 0.$$

Так как функции $\pm\sqrt{1+x^2}$ непрерывны, то, согласно примеру 224, решение $u \equiv 0$ — особое. А тогда $y = -\frac{1}{16}\left(x^4 + 4x^2\right)$ является особым решением исходного уравнения. ▶

230. $y^2 y'^2 - \frac{y^3 y'}{x} + a^2 = 0.$

◀ Полагая $y^2 = 2u$ и разрешая полученное уравнение относительно u', находим

$$u' = \frac{u}{x} \pm \frac{1}{|x|}\sqrt{u^2 - a^2x^2}, \quad u \geqslant 0.$$

Применим результат решения примера 226. В данном случае

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = \pm\frac{1}{|x|}$$

есть непрерывные при $x \neq 0$ функции, а $\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, $u = \pm ax$ $(x \neq 0)$ — особые решения. Тогда $y^2 = 2|ax|$ является особым решением исходного уравнения при $x \neq 0$. ▶

231. $x + yy' - ay'^2 = 0.$

◀ Из уравнений

$$F \equiv x + yy' - ay'^2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \equiv y - 2ay' = 0$$

путем исключения y' находим кривую $y^2 + 4ax = 0$, которая, как нетрудно непосредственно проверить, не есть особая, поскольку функции $y = \pm 2\sqrt{-ax}$ не являются решениями данного дифференциального уравнения. ▶

232. $yy'^2 + y'(x - y) - x = 0.$

◀ Разрешим уравнение относительно y'. Получим

$$y' = 1, \quad y \neq 0 \quad \text{и} \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Поскольку правые части полученных дифференциальных уравнений и их частные производные по y разрывны только при $y = 0$, а функция $y = 0$ не является решением данного уравнения, то особых решений нет. ▶

233. $4y^3 - 4y^2 = \left(1 + x^2\right)y'^2.$

◀ Записав уравнение в виде $F(x, y, y') = 0$, где $F(x, y, y') = 4y^3 - 4y^2 - \left(1+x^2\right)y'^2$ и исключив y' из системы уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'\left(1 + x^2\right) = 0,$$

получаем уравнение $y^3 - y^2 = 0$, содержащее решения исходного дифференциального уравнения $y = 0$ и $y = 1$, которые могут быть особыми.

Разрешив данное уравнение относительно производной, имеем

$$y' = \frac{2y\sqrt{y-1}}{\pm\sqrt{1+x^2}}. \tag{1}$$

Поскольку правая часть уравнения (1) существует при $y \geqslant 1$ и $y = 0$, то решение $y = 0$ является изолированным. ▶

Примечание. Решение $y = \varphi(x)$ называется *изолированным*, если в некоторой его окрестности не проходят другие интегральные кривые.

Полагая в (1) $y = 1 + \varepsilon(x)$, где $0 \leqslant \varepsilon(x) \ll 1$, и пренебрегая функцией $\varepsilon^{\frac{3}{2}}(x)$, можем записать

$$\varepsilon'(x) \approx \frac{2(\varepsilon(x))^{\frac{1}{2}}}{\pm\sqrt{1+x^2}}. \tag{2}$$

Приближенное уравнение (2) имеет решение $\varepsilon(x) \equiv 0$, которое, как следует из примера 224, есть особое. А тогда для уравнения (1) решение $y = 1$ также будет особым.

234. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно семейство решений этого уравнения.

а) $y = Cx^2 - C^2$; б) $xy = Cy - C^2$; в) $y = C^2(x - C)^2$.

◀ а) Так как функция $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2 + C^2$ непрерывно дифференцируема, то согласно п. 9.2 дискриминантная кривая семейства интегральных кривых $y - Cx^2 + C^2 = 0$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv -x^2 + 2C = 0, \quad \Phi \equiv y - Cx^2 + C^2 = 0,$$

из которой путем исключения параметра C следует, что $y = \frac{x^4}{4}$. Получили явное выражение для дискриминантной кривой.

В силу того, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2Cx = -x^3$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1 + x^6 \neq 0$ на дискриминантной кривой, и кривая $y = \frac{x^4}{4}$ данному семейству не принадлежит, то последняя является огибающей, т. е. $y = \frac{x^4}{4}$ — особое решение соответствующего дифференциального уравнения.

б) Аналогично предыдущему имеем

$$\Phi \equiv xy - Cy + C^2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv -y + 2C = 0,$$

откуда $C = \frac{y}{2}$ и $y^2 - 4xy = 0$ — дискриминантная кривая, распадающаяся на две: $y = 4x$ и $y = 0$. На первой кривой $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 17x^2 \neq 0$, на второй — $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = x^2 \neq 0$. Так как кривая $y = 4x$ ни при каком C не принадлежит семейству $\Phi(x, y, C) = 0$, то согласно п. 9.2 она является особым решением соответствующего дифференциального уравнения. Вторая кривая $y = 0$ $(x \neq 0)$ принадлежит указанному семейству, поэтому вопрос о том, является ли она особым решением, остается открытым. Для решения вопроса представляем кривые семейства при $x \neq C$ в виде

$$y = \frac{C^2}{C - x}. \tag{1}$$

Поскольку $y'(x_0) \neq 0$ при $C \neq 0$, то кривые семейства (1) не касаются кривой $y = 0$ $(x \neq 0)$, значит, последняя по определению не является особым решением.

в) Исключая параметр C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) \equiv y - C^2(x - C)^2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv 2C(x - C)(2C - x) = 0,$$

получаем две ветви дискриминантной кривой

$$y = \frac{x^4}{16} \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Поскольку первая ветвь данному семейству не принадлежит и на ней

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^6}{16} \neq 0,$$

то она является огибающей. Вторая ветвь принадлежит семейству, поэтому несмотря на то, что $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 \neq 0$, нельзя утверждать, что она также будет огибающей.

Проверим условия касания кривой $y = 0$ к остальным кривым семейства. Пусть x_0 — произвольная абсцисса. Тогда из условия касания следует, что должны выполняться равенства

$$y'(x_0) = 2C^2(x_0 - C) = 0, \quad y(x_0) = C^2(x_0 - C)^2 = 0, \quad C \not\equiv 0.$$

Легко видеть, что они выполняются при $C = x_0$. Следовательно, через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит по меньшей мере две кривые: $y = 0$ и $y = x_0^2(x - x_0)^2$, имеющие в ней общую касательную, поэтому кривая $y = 0$ является огибающей. ▶

§ 10. Задачи на траектории

10.1. Изогональные и ортогональные траектории.

Линии, пересекающие все кривые данного семейства плоских кривых под одним и тем же углом φ, называются *изогональными траекториями* этого семейства. В частности, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то изогональные траектории называются *ортогональными*.

Для отыскания изогональных траекторий семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ следует сначала составить дифференциальное уравнение указанного семейства. Пусть $F(x, y, y') = 0$ — дифференциальное уравнение данного семейства. Тогда уравнение

$$F\left(x, y, \frac{y' - m}{1 + my'}\right) = 0, \tag{1}$$

где $m = \operatorname{tg}\varphi$ $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$, является дифференциальным уравнением изогональных траекторий, а уравнение

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{2}$$

есть уравнение ортогональных траекторий. Проинтегрировав затем уравнение (1) или уравнение (2), получим семейство изогональных или семейство ортогональных траекторий.

Если имеем семейство кривых $\Phi(\rho, \theta, C) = 0$, заданное в полярной системе координат ρ, θ, и $F(\rho, \theta, \rho') = 0$ — дифференциальное уравнение этого семейства, то изогональные траектории $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$ можем найти, проинтегрировав уравнение

$$F\left(\rho, \theta, \frac{\rho(\rho' + m\rho)}{\rho - m\rho'}\right) = 0. \tag{3}$$

Для отыскания ортогональных траекторий следует проинтегрировать уравнение

$$F\left(\rho, \theta, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0. \tag{4}$$

10.2. Эволюта и эвольвента.

Геометрическое место центров кривизны, отвечающих возможным точкам некоторой кривой Γ, называется *эволютой* K этой кривой. Кривая Γ по отношению к своей эволюте K называется *эвольвентой*. Основное свойство, связывающее кривые K и Γ, состоит в том, что касательная к эволюте является одновременно нормалью к эвольвенте. Таким образом, если известна эволюта, то семейство эвольвент можно найти, рассматривая их как ортогональные траектории семейства касательных к данной эволюте.

Пусть $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ — параметрические уравнения эволюты. Тогда, использовав указанное выше свойство, параметрические уравнения семейства эвольвент $x = x(t, C)$, $y = y(t, C)$ можно определить из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \eta'_\xi = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\dfrac{dx}{dy}, \\ y = \eta + (x - \xi)\eta'_\xi. \end{cases} \tag{5}$$

Решив первое уравнение этой системы и подставив найденное x во второе уравнение, получим параметрические уравнения эвольвенты.

Найти ортогональные траектории семейств линий.

235. $y = ax^\alpha$.

◀ Согласно п. 10.1, сначала составляем дифференциальное уравнение данного семейства $\Phi(x, y, a) = y - ax^\alpha$. Имеем

$$\Phi(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y' - a\alpha x^{\alpha-1} = 0.$$

Отсюда путем исключения параметра a находим нужное уравнение $xy' - \alpha y = 0$. Заменив в последнем уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$\frac{x}{y'} + \alpha y = 0. \tag{1}$$

Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$x^2 + \alpha y^2 = C.$$

Таким образом, если $\alpha < 0$, то семейство гипербол ортогонально другому семейству гипербол; если $\alpha > 0$, то семейство парабол ортогонально семейству эллипсов; наконец, если $\alpha = 0$, то семейство горизонтальных прямых ортогонально семейству вертикальных прямых. ▶

236. $(2a - x)y^2 = x^3$.

◀ Исключая параметр a из системы

$$(2a - x)y^2 - x^3 = 0, \quad -y^2 + 2(2a - x)yy' - 3x^2 = 0,$$

получаем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$2y'x^3 - 3x^2y - y^3 = 0.$$

Ему соответствуют дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$2x^3 + (3x^2y + y^3)y' = 0.$$

Последнее уравнение однородное. Решая его известным способом, находим общий интеграл:

$$\int \frac{3u + u^3}{u^4 + 3u^2 + 2}\,du + \int \frac{dx}{x} = \ln C, \quad \text{где} \quad u = \frac{y}{x},$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 = C(2x^2 + y^2). \blacktriangleright$$

237. $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Аналогично проделанному выше, имеем

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad 2x + 2yy' - 2a = 0,$$

откуда $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$. После замены в последнем уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$ получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0.$$

Это однородное уравнение. Полагая $y = xu(x)$, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u^3 + u}\,du = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$x(u^2 + 1) = Cu, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = Cy. \blacktriangleright$$

238. $y^2 - 2p(x - a) = 0$.

◀ Исключение параметра a из уравнений

$$y^2 - 2p(x - a) = 0, \quad 2yy' - 2p = 0$$

с одновременной заменой y' на $-\frac{1}{y'}$ приводит к дифференциальному уравнению ортогональных траекторий

$$y + py' = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$y = Ce^{-\frac{x}{p}}.$$

Таким образом, исходное семейство парабол ортогонально семейству экспонент. ▶

Найти семейства изогональных траекторий линий.

239. $x - y = x^2 + a^2$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

◀ Дифференциальное уравнение данных линий имеет вид

$$1 - y' - 2x = 0.$$

Отсюда, используя уравнение (1), п. 10.1, $(m = 1)$, получаем дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$1 - \frac{y' - 1}{y' + 1} - 2x = 0, \quad \text{или} \quad 1 - x - xy' = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим требуемые траектории

$$y = \ln Cx - x. \blacktriangleright$$

240. $x^2 + y^2 = 2ax$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

◀ Заменяя в дифференциальном уравнении $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ данного семейства производную y' на $\frac{y' - 1}{y' + 1}$, согласно (1), п. 10.1, получаем

$$y'(x^2 - y^2 + 2xy) + x^2 - y^2 - 2xy = 0.$$

Интегрируя это однородное дифференциальное уравнение, находим

$$\int \frac{1 - 2u - u^2}{1 - u + u^2 - u^3}\,du + \int \frac{dx}{x} = \ln C, \quad \text{где} \quad u = \frac{y}{x},$$

откуда

$$x^2 + y^2 = C(x - y). \blacktriangleright$$

241. $x^2 + y^2 = a^2$ $(\varphi = \alpha)$.

◀ Если в дифференциальном уравнении данного семейства $x + yy' = 0$ вместо y' подставить $\frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, то получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$y' = \frac{ym - x}{xm + y}, \quad m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Перейдя к полярным координатам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, получим уравнение $\rho' + m\rho = 0$, откуда

$$\rho = Ce^{-m\theta}. \blacktriangleright$$

242. $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

◀ Исключив параметр a из уравнений

$$\rho' = -a\sin\theta, \quad \rho = a(1 + \cos\theta),$$

получим дифференциальное уравнение данного семейства:

$$\rho\sin\theta + (1 + \cos\theta)\rho' = 0.$$

Отсюда, согласно (4), п. 10.1, находим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$\rho'\sin\theta - (1 + \cos\theta)\rho = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, находим искомое семейство

$$\rho = C\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \text{или} \quad \rho = C(1-\cos\theta). \blacktriangleright$$

243. $\rho^2 = \ln\operatorname{tg}\theta + C \ \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

◀ Заменив в дифференциальном уравнении семейства

$$\rho\rho' = \frac{1}{\sin 2\theta}$$

производную ρ' на $-\frac{\rho^2}{\rho'}$, согласно (4), п. 10.1, имеем дифференциальное уравнение ортогональных к данному семейству траекторий

$$\rho' + \rho^3\sin 2\theta = 0.$$

Разделяя в нем переменные и интегрируя, находим требуемые траектории:

$$\rho^2 = \frac{1}{C-\cos 2\theta}. \blacktriangleright$$

244. $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$ $(\varphi = \alpha)$.

◀ Действуем по той же схеме, что и в предыдущем примере. Сначала получаем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$\rho' = \rho\operatorname{tg} 2\theta.$$

Заменив в этом уравнении ρ' на $\rho\cdot\frac{\rho'+m\rho}{\rho-m\rho'}$, где $m = \operatorname{tg}\alpha$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, согласно (3), п. 10.1, имеем дифференциальное уравнение изогональных траекторий $\rho'(1+m\operatorname{tg}2\theta) = \rho(\operatorname{tg}2\theta - m)$, $\rho \neq 0$, или

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}(2\theta-\alpha).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим семейство изогональных траекторий

$$\rho = \frac{C}{\sqrt{|\cos(2\theta-\alpha)|}}. \blacktriangleright$$

245. $\rho = a(1+\cos\theta)$ $\left(\varphi = \alpha;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$.

◀ Дифференциальное уравнение данного семейства имеет вид

$$\rho'(1+\cos\theta) + \rho\sin\theta = 0.$$

Заменив здесь ρ' на $\rho\frac{\rho'+m\rho}{\rho-m\rho'}$ $(m = \operatorname{tg}\alpha)$, получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий:

$$\rho'(1+\cos\theta - m\sin\theta) + \rho(m + m\cos\theta + \sin\theta) = 0,$$

или

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{m\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - m\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Проинтегрировав это соотношение, получим

$$\ln\rho = 2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2} - m\sin\frac{\theta}{2}\right| + \ln C_1, \quad \text{или} \quad \rho = C\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right). \blacktriangleright$$

246. $\rho = a\cos\theta$ $\left(\varphi = \alpha;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$.

◀ Заменяя в дифференциальном уравнении этого семейства

$$\rho'\cos\theta + \rho\sin\theta = 0$$

производную ρ' на $\rho\frac{\rho'+m\rho}{\rho-m\rho'}$ ($m=\operatorname{tg}\alpha$), согласно (3), п. 10.1, записываем дифференциальное уравнение изогональных траекторий:

$$\frac{\rho'}{\rho}=-\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=-\operatorname{tg}(\theta+\alpha).$$

интегрируя которое, получаем исходное семейство:

$$\rho=C\cos(\theta+\alpha).$$

Очевидно, если $\alpha=0$, то полученное семейство, естественно, совпадает с данным в условии задачи. ►

Найти эвольвенты линий.

247. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ (*цепная линия*).

◄ Запишем сначала параметрические уравнения цепной линии:

$$\xi=at,\quad \eta=a\operatorname{ch}t,$$

а затем, вычислив производную $\eta'_\xi=\frac{d\eta}{d\xi}=\operatorname{sh}t$, воспользуемся первым уравнением в (5), п. 10.2. Тогда получим

$$d\xi=a\,dt,\quad d\eta=a\operatorname{sh}t\,dt,\quad \eta'_\xi=\frac{d\eta}{d\xi}=\operatorname{sh}t=-\frac{dx}{dy}. \tag{1}$$

Второе уравнение в (5) примет вид

$$y=a\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t(x-at). \tag{2}$$

Дифференцируя обе части (2) и подставив dy в (1), получим:

$$\operatorname{sh}t=-\frac{dx}{(x-at)\operatorname{ch}t\,dt+\operatorname{sh}t\,dx},$$

или

$$x\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t\frac{dx}{dt}=at\sin t.$$

Решая линейное уравнение с помощью метода вариации произвольной постоянной, находим:

$$x=a(t-\operatorname{th}t)+\frac{C}{\operatorname{ch}t}. \tag{3}$$

Подставив значение x в (2), имеем

$$y=\frac{C\operatorname{sh}t+a}{\operatorname{ch}t}. \tag{4}$$

Параметрические уравнения семейства эвольвент цепной линии имеют вид (3), (4). ►

248. $\xi=a(\cos t+t\sin t)$, $\eta=a(\sin t-t\cos t)$ (окружность).

◄ Действуя по той же схеме, что и в предыдущем примере, получим:

$$d\xi=at\cos t,\quad d\eta=at\sin t,\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\operatorname{tg}t,$$

$$y=a(\sin t-t\cos t)+\operatorname{tg}t\Big(x-a(\cos t+t\sin t)\Big),\quad dy=\operatorname{tg}t\,dx+\frac{1}{\cos^2 t}\Big(x-a(\cos t+t\sin t)\Big)\,dt,$$

$$\operatorname{tg}t=-\frac{dx}{\operatorname{tg}t\,dx+\frac{1}{\cos^2 t}(x-a(\cos t+t\sin t))\,dt},\quad \frac{dx}{dt}+x\operatorname{tg}t=a\sin t(1+t\operatorname{tg}t).$$

Интегрируя полученное линейное уравнение с помощью метода вариации произвольной постоянной, находим:

$$x=C\cos t+\frac{at}{2}(2\sin t-t\cos t).$$

Тогда

$$y=-at\cos t+\left(C-\frac{at^2}{2}\right)\sin t.$$

Получили параметрические уравнения искомого семейства эвольвент. ►

249. $\xi = a(t - \sin t)$, $\eta = a(1 - \cos t)$ (*циклоида*).

◀ Аналогично с проделанным выше, имеем:

$$d\xi = a(1 - \cos t)\,dt, \quad d\eta = a\sin t\,dt, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y = a(1 - \cos t) + \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\left(x - a(t - \sin t)\right) = 2a + \operatorname{ctg}\frac{t}{2}(x - at),$$

$$dy = (dx - a\,dt)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{(x - at)}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt, \quad \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = -\frac{dx}{(dx - a\,dt)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{(x - at)\,dt}{2\sin^2\frac{t}{2}}}.$$

После несложных преобразований получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{a}{2}(\sin t - t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

общий интеграл которого имеет вид

$$x = C\sin\frac{t}{2} + a(t + \sin t).$$

Тогда

$$y = a(1 - \cos t) + \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\left(C\sin\frac{t}{2} + a(t + \sin t) - a(t - \sin t)\right) = C\cos\frac{t}{2} + a(3 + \cos t). \blacktriangleright$$

250. $\xi = a\cos^3 t$, $\eta = a\sin^3 t$ (*астроида*).

◀ Поскольку $d\xi = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $d\eta = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$, то

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{tg} t, \quad y = a\sin^3 t - \operatorname{tg} t(x - a\cos^3 t), \quad dy = a\cos t\,dt - \frac{x\,dt}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t\,dx,$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{dx}{a\cos t\,dt - \frac{x\,dt}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t\,dx}.$$

Из последнего равенства получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + x\operatorname{tg} t = a\cos^3 t\operatorname{tg} t.$$

Его общее решение имеет вид

$$x = C\cos t + \frac{a}{2}\cos t\sin^2 t.$$

Осталось найти y. Находим:

$$y = a\sin^3 t - \operatorname{tg} t\left(C\cos t + \frac{a}{2}\cos t\sin^2 t - a\cos^3 t\right) = -C\sin t + a\cos^2 t\sin t + \frac{a}{2}\sin^3 t.$$

Получили параметрические уравнения требуемых эвольвент:

$$x = C\cos t + \frac{a}{2}\cos t\sin^2 t, \quad y = -C\sin t + \frac{a}{2}\sin t(1 + \cos^2 t). \blacktriangleright$$

251. $\xi = -2t^3$, $\eta = 3t^2$.

◀ Как и в предыдущих примерах, имеем:

$$d\xi = -6t^2\,dt, \quad d\eta = 6t\,dt, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{t}, \quad y = 3t^2 - \frac{1}{t}(x + 2t^3), \quad dy = \left(\frac{x}{t^2} + 2t\right)dt - \frac{dx}{t},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{t} = -\frac{dx}{\left(\frac{x}{t^2} + 2t\right)dt - \frac{dx}{t}}, \quad \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t(t^2 + 1)} = \frac{2t^2}{t^2 + 1}.$$

Применив к полученному линейному дифференциальному уравнению метод вариации произвольной постоянной, находим:

$$x = 2t + \frac{Ct}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Для определения y подставим полученное значение x во второе уравнение системы (5), п. 10.2. Имеем

$$y = 3t^2 - \frac{1}{t}\left(2t + \frac{Ct}{\sqrt{t^2+1}} + 2t^3\right) = t^2 - 2 - \frac{C}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Таким образом, параметрические уравнения эвольвент данной кривой записываются в виде:

$$x = 2t + \frac{Ct}{\sqrt{t^2+1}}, \quad y = t^2 - 2 - \frac{C}{\sqrt{t^2+1}}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти решения следующих задач.

1. $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right),\ x \neq 0.$ **2.** $y' = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,\ y(0) = 1.$

3. $y\,dx + \left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy = 0,\ y(1) = 1.$ **4.** $x^2y' - \cos 2y - 1 = 0,\ y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi.$

5. $(x^2+1)y' = 2xy,\ \int\limits_0^{+\infty} y(x)\,dx$ сходится. **6.** $\frac{1}{x}\int\limits_0^x y(t)\,dt = ky(x),\ y(1) = 1,\ k = \text{const}.$

Проинтегрировать уравнения.

7. $y' = \frac{y}{x} + e^x\frac{2xy}{x^2+y^2}.$ **8.** $y' = \frac{y}{x} + \sin x \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$ **9.** $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0.$

10. $(x + y + 4)y' = 2x + 3y - 5.$ **11.** $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$

Найти решения следующих задач Коши.

12. $\sin\left(\frac{2x+8y-3}{x+4y}\right)dy + e^{x+4y+5}\,dx = 0,\ y(0) = 2.$

13. $(x^2y^3 - y)\,dx - (x^4y^3 - 2x^3y^2 + 6x)\,dy = 0,\ y(1) = 1.$

14. $(x^\pi - y^\pi)\,dx + y^{\frac{\pi}{2}}\left(x^{\frac{\pi}{2}} - y^{\frac{\pi}{2}}\right)dy = 0,\ y(1) = 1.$ **15.** $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x},\ y(1) = e^{\frac{\pi}{2}}.$

Проинтегрировать следующие линейные уравнения и сводящиеся к ним.

16. $y = x(y' - x\cos x).$ **17.** $y' + y\sin x = \sin x.$ **18.** $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0.$

19. $y' = \frac{y}{3x - y^2}.$ **20.** $y' + 2y = e^x \cdot y^2.$ **21.** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

Построить общее решение уравнений в форме Коши.

22. $y' + y\frac{1+x^2}{1+x^3} = e^x.$ **23.** $y' + y\left(1+x^2\right)^{-1}\sin x = \cos x.$ **24.** $y' + y\operatorname{tg} x = \cos x.$ **25.** $y' + \frac{y}{x} = x.$

Решить следующие дифференциальные задачи.

26. $x\ln x\frac{dy}{dx} + iy = x(\ln x - 1),\ y(e) = 2 - 5i.$ **27.** $x^2y' + y = e^{\frac{1}{x}}\frac{1-x^3}{(x^3+1)^2},\ \left|\int\limits_1^{+\infty} y(x)\,dx\right| < \infty.$

28. $y' = \left(3x^4y^2 + y^5\right)\left(xy^4 + 2x^5y\right)^{-1},\ y(1) = 1.$

Проинтегрировать следующие уравнения Риккати.

29. $2y' = xy + y^2 + \frac{1}{x^2} - 3.$ **30.** $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} + x.$ **31.** $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2,\ \int\limits_0^1 y(x)\,dx = 1.$

32. $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x,\ \int\limits_1^2 (x-y)^2\,dx = 1.$

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах.

33. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$. **34.** $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\,dy$.

35. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)\,dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$.

Проинтегрировать уравнения, подобрав интегрирующий множитель.

36. $xy^2(xy' + 1) = 1$. **37.** $(x^2 + 3\ln y)y\,dx = x\,dy$.

38. $(x^2 + 2x + y)\,dx - (x - 3x^2y)\,dy = 0$. **39.** $(x^2 - y)\,dx + x(y + 1)\,dy = 0$.

Найти возможные особые точки, кривые и особые решения.

40. $y' = \sqrt{y}$. **41.** $y' = \sqrt[3]{y}$. **42.** $y' = \sqrt{y} + 1$. **43.** $y' = 2\sqrt[3]{xy}$. **44.** $y' = \frac{5}{8}\left(\sqrt[5]{y} + x^{\frac{1}{6}}\sqrt[15]{y}\right)$.

Решить уравнения путем сведения их к дифференциальным.

45. $y(x) = x + \int\limits_0^x e^{x-t}y(t)\,dt$. **46.** $\int\limits_0^x (x - t)t^2\sqrt[3]{y(t)}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (5x - 6t)y(t)\,dt + 2x = 0$.

Глава 2

Дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. Виды интегрируемых нелинейных уравнений

1.1. Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$ может быть проинтегрировано, если уравнение $F(x, u) = 0$ можно разрешить или относительно $u = \varphi(x)$ или же относительно $x = \psi(u)$.

Действительно, в первом случае имеем

$$y^{(n)} = \varphi(x), \quad y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \qquad (1)$$

где C_j $(j = \overline{1, n})$ — произвольные постоянные.

Во втором случае полагаем $y^{(n)} = t$. Тогда $x = \psi(t)$ и $d(y^{(n-1)}) = t\,dx = t\psi'(t)\,dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int t\psi'(t)\,dt + C_1.$$

Аналогично находим $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}, \ldots, y = g(t) + \omega(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где g и ω — известные функции. Таким образом, общее решение находится в параметрической форме

$$x = \psi(t), \quad y = g(t) + \omega(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (2)$$

Иногда уравнению $F(x, y^{(n)}) = 0$ удовлетворяют параметрические уравнения $x = \alpha(t)$, $y^{(n)} = \beta(t)$, т. е. $F(\alpha(t), \beta(t)) \equiv 0$ при $t \in (t_0, t_1)$. Тогда, действуя аналогично изложенному выше, получаем параметрические уравнения общего решения, имеющего вид (2).

1.2. Дифференциальное уравнение вида $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$.

Если уравнению $F(u, v) = 0$ удовлетворяют параметрические уравнения $u = \alpha(t)$, $v = \beta(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, то дифференциальное уравнение вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ можно проинтегрировать. Действительно, тогда

$$y^{(n-1)} = \alpha(t), \quad y^{(n)} = \beta(t)$$

и $d(y^{(n-1)}) = \beta(t)\,dx$, или $\alpha'(t)\,dt = \beta(t)\,dx$, откуда

$$x = \int \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)}\,dt + C_1.$$

Функцию y находим из дифференциального уравнения $y^{(n-1)} = \alpha(t)$ способом, указанным в п. 1.1.

1.3. Дифференциальное уравнение вида $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$.

Пусть $u = \dot{\alpha}(t)$, $v = \beta(t)$ — функции, удовлетворяющие уравнению, указанному в п. 1.2. Тогда дифференциальное уравнение вида $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$ можно проинтегрировать. Действительно, имеем,

$$y^{(n-2)} = \alpha(t), \quad y^{(n)} = \beta(t),$$

или, если ввести обозначение $y^{(n-2)} = z(x)$, то

$$z(x) = \alpha(t), \quad z''(x) = \beta(t).$$

Из первого уравнения находим

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\alpha(t) = \frac{\alpha'}{x'}, \quad z''(x) = \frac{\alpha''x' - x''\alpha'}{x'^3}.$$

Используя второе уравнение, получаем

$$\alpha''x' - x''\alpha' = x'^3\beta. \tag{3}$$

Если положить $x' = \varkappa$, то уравнение (3) примет вид

$$\alpha''\varkappa - \varkappa'\alpha' = \beta\varkappa^3. \tag{4}$$

Это уравнение Бернулли. Пусть $\varkappa = x' = \varphi(C, t)$ — его общее решение. Тогда

$$x = \int \varphi(C, t)\,dt + C_2.$$

Для получения функции $y = y(t)$ интегрируем $n-2$ раза уже известным нам способом уравнение $y^{(n-2)} = \alpha(t)$. Таким образом, получаем общее решение дифференциального уравнения рассматриваемого вида в параметрической форме.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения и найти частные решения там, где заданы начальные условия.

252. $y''' = x + \cos x$.

◀ Последовательно интегрируя обе части уравнения три раза, получаем

$$y'' = \int (x + \cos x)\,dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1\right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2\right) dx + C_3 = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3. \blacktriangleright$$

253. $y^{IV} = e^x - 1$, при $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y_0' = 1$, $y_0'' = 1$, $y_0''' = 1$.

◀ Сначала находим общее решение:

$$y''' = e^x - x + C_1, \quad y'' = e^x - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

$$y' = e^x - \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \quad y = e^x - \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Затем подбираем значение пока произвольных постоянных таким образом, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям. Имеем

$$1 = 1 + C_1, \quad 1 = 1 + C_2, \quad 1 = 1 + C_3, \quad 2 = 1 + C_4,$$

откуда находим $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$. Частное решение имеет вид

$$y = e^x - \frac{x^4}{24} + 1. \blacktriangleright$$

254. $y'''^5 + \sin y''' - 1 = 0$, при $x_0 = 1$, $y_0 = y_0' = y_0'' = 2$.

◀ Легко показать графически, что уравнение $\alpha^5 + \sin\alpha - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень α_1. Следовательно, $y''' = \alpha_1$, откуда, последовательно интегрируя, получаем

$$y'' = \alpha_1x + C_1, \quad y' = \alpha_1\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad y = \alpha_1\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Для определения постоянных интегрирования пользуемся начальными условиями. Имеем

$$2 = \alpha_1 + C_1, \quad 2 = \frac{\alpha_1}{2} + C_1 + C_2, \quad 2 = \frac{\alpha_1}{6} + \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3,$$

откуда находим $C_1 = 2 - \alpha_1$, $C_2 = \frac{\alpha_1}{2}$, $C_3 = 1 - \frac{\alpha_1}{6}$.

В силу этого частное решение имеет вид

$$y = \alpha_1 \frac{x^3}{6} + (2 - \alpha_1)\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_1}{2}x + 1 - \frac{\alpha_1}{6}. \blacktriangleright$$

255. $y''^2 + xy'' - x^3 = 0.$

◀ Разрешив уравнение относительно y'', получим:

$$y'' = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^3}.$$

Поскольку уравнения относятся к виду $y'' = \varphi(x)$, то двукратным интегрированием можно получить их общие решения. Однако, полученные уравнения можно проинтегрировать также с помощью параметра, положив, например, $x = t^2 + t$ (при этом радикал исчезает). Тогда получим

$$y'' = t^3 + t^2, \quad y'' = -t^3 - 2t^2 - t.$$

Далее имеем

$$d(y') = \left(t^3 + t^2\right) dx = \left(t^3 + t^2\right)(2t + 1)\, dt,$$

откуда

$$y' = \int \left(t^3 + t^2\right)(2t + 1)\, dt + C_1 = \frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3} + C_1,$$

$$dy = \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3} + C_1\right) dx = \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3} + C_1\right)(2t + 1)\, dt.$$

Интегрируя еще раз, находим:

$$y = \int \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3} + C_1\right)(2t + 1)\, dt + C_2 = \frac{4}{35}t^7 + \frac{19}{60}t^6 + \frac{17}{60}t^5 + \frac{t^4}{12} + C_1(t^2 + t) + C_2.$$

Аналогично интегрируем второе уравнение. ▶

256. $y''^3 - 2y'' - x = 0.$

◀ Это уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$ при $n = 2$ и его можно разрешить относительно x. Имеем

$$x = y''^3 - 2y''.$$

Положив $y'' = t$, получаем $x = t^3 - 2t$. Далее, $d(y') = t\, dx = t(3t^2 - 2)\, dt$, откуда

$$y' = \int (3t^3 - 2t)\, dt = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

В свою очередь, $dy = \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right) dx = \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right)(3t^2 - 2)\, dt$, откуда

$$y = \int \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right)(3t^2 - 2)\, dt + C_2 = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \left(C_1 + \frac{2}{3}\right)t^3 - 2C_1 t + C_2.$$

Таким образом, получили общее решение данного дифференциального уравнения в параметрической форме:

$$x = t^3 - 2t, \quad y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \left(C_1 + \frac{2}{3}\right)t^3 - 2C_1 t + C_2. \blacktriangleright$$

257. $y'' + \ln y'' - x = 0$; при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y_0' = 2$.

◀ Аналогично изложенному выше, полагаем $y'' = t$. Тогда

$$x = t + \ln t, \quad d(y') = t\, dx = t\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = (t + 1)\, dt,$$

откуда

$$y' = \int (t + 1)\, dt = \frac{t^2}{2} + t + C_1,$$

а также

$$y=\int\left(\frac{t^2}{2}+t+C_1\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)dt+C_2=\frac{t^3}{6}+\frac{3}{4}t^2+(C_1+1)t+C_1\ln|t|+C_2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$x=t+\ln t,\quad y=\frac{t^3}{6}+\frac{3}{4}t^2+(C_1+1)t+C_1\ln t+C_2.$$

Очевидно, $x_0=1$ при $t=1$, поэтому

$$y_0'=\left(\frac{t^2}{2}+t+C_1\right)\Big|_{t=1}=2,\quad y_0=\left(\frac{t^3}{6}+\frac{3}{4}t^2+(C_1+1)t+C_1\ln t+C_2\right)\Big|_{t=1}=1.$$

Из двух последних уравнений находим $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=-\frac{17}{12}$. Частное решение имеет вид

$$x=t+\ln t,\quad y=\frac{t^3}{6}+\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\ln t-\frac{17}{12}.\ \blacktriangleright$$

258. $y'''-e^{-y''}=0.$

◀ Это уравнение вида $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ при $n=3$ и $F(u,v)\equiv v-e^{-u}=0$. Согласно п. 1.2 имеем

$$y''=t,\quad y'''=e^{-t},$$

откуда $d(y'')=e^{-t}\,dx$, или $dt=e^{-t}\,dx$. Интегрируя последнее уравнение, находим $x=e^t+C_1$. Для получения функции y воспользуемся уравнением $y''=t$. Имеем $d(y')=t\,dx=te^t\,dt$, откуда

$$y'=\int te^t\,dt+C_2=e^t(t-1)+C_2.$$

Интегрируем еще раз:

$$\int dy=\int\left(e^t(t-1)+C_2\right)dx+C_3=\int\left(e^t(t-1)+C_2\right)e^t\,dt+C_3,$$

или

$$y=\frac{e^{2t}}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)+C_2e^t+C_3.$$

Окончательно имеем

$$x=e^t+C_1,\quad y=\frac{e^{2t}}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)+C_2e^t+C_3.\ \blacktriangleright$$

259. $y'''-y''=0.$

◀ Уравнение относится к виду $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$, однако, в отличие от предыдущего примера, для его интегрирования применим другой способ. Полагая в нем $y''=z(x)$, получим уравнение первого порядка $z'-z=0$, общее решение которого $z=C_1e^x$. Следовательно, $y''=C_1e^x$, откуда

$$y=C_1e^x+C_2x+C_3.\ \blacktriangleright$$

260. $y'''^2+y''^2-1=0.$

◀ Как и в предыдущем примере, полагаем $y''=z(x)$. Тогда $z'^2+z^2-1=0$. В полученном уравнении разделяются переменные:

$$\frac{dz}{\pm\sqrt{1-z^2}}=dx.$$

Проинтегрировав, получаем

$$z=\pm\sin(x+C_1),\quad \text{или}\quad y''=\pm\sin(x+C_1).$$

Интегрируя еще два раза последнее уравнение, окончательно находим

$$(y-C_2x-C_3)^2=\sin^2(x+C_1).$$

Кроме того, имеем еще очевидное решение

$$y=\pm\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5.\ \blacktriangleright$$

Примечание. Решение этого уравнения можно получить в параметрической форме, если воспользоваться тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t - 1 \equiv 0$. Действительно, полагая в данном уравнении $y'' = \sin t$, $y''' = \cos t$, можем записать $d(y'') = \cos t\, dx$, или $d(\sin t) = \cos t\, dx$, откуда $x = t + C_1$ ($\cos t \neq 0$). Далее, $d(y') = \sin t\, dx = \sin t\, dt$, откуда

$$y' = \int \sin t\, dt + C_2 = -\cos t + C_2.$$

В свою очередь, отсюда следует, что $dy = (C_2 - \cos t)\, dx = (C_2 - \cos t)\, dt$, поэтому

$$y = \int (C_2 - \cos t)\, dt + C_3 = C_2 t - \sin t + C_3.$$

Кроме того, имеются еще решения уравнения $y'' = \pm 1$, которые не принадлежат общему решению.

261. $y''^3 + 3y''y' - y'^2 = 0$.

◀ Положим $y'' = ty'$. Тогда из уравнения получим, что

$$y' = t^{-3} - 3t^{-2}, \quad y' = 0.$$

Таким образом, данному уравнению соответствует система уравнений

$$y' = t^{-3} - 3t^{-2}, \quad y'' = t^{-2} - 3t^{-1} \quad (t \neq 0), \quad y' = 0.$$

Поскольку $d(y') = y''\, dx$, то в силу первых двух уравнений системы находим

$$d\left(t^{-3} - 3t^{-2}\right) = \left(t^{-2} - 3t^{-1}\right) dx,$$

откуда

$$x = 3\int \frac{(2t-1)\, dt}{t^2(1-3t)} + C_1 = 3\left(\frac{1}{t} - \ln\frac{|t|}{|1-3t|}\right) + C_1.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$dy = \left(-3t^{-5} + 6t^{-4}\right) dt, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{3}{4}t^{-4} - 2t^{-3} + C_2.$$

Кроме того, как следует из третьего уравнения системы, $y = C$ есть также решение данного уравнения. ▶

262. $y''^2 + y'^2 - y'^4 = 0$.

◀ Полагая в данном уравнении $y' = \pm \operatorname{ch} t$, получаем

$$y'' = \pm\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t.$$

Отсюда следует, что $d(\pm \operatorname{ch} t) = \pm\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t\, dx$, или

$$dx = \pm\frac{dt}{\operatorname{ch} t}.$$

Интегрируя, находим $x = \pm 2 \operatorname{arctg} e^t + C_1$. Из уравнения $y' = \pm \operatorname{ch} t$, принимая во внимание выражение для dx, получаем $y = t + C_2$. Таким образом, параметрические уравнения общего решения имеют вид

$$x = \pm 2 \operatorname{arctg} e^t + C_1, \quad y = t + C_2. \blacktriangleright$$

263. $y'' + 2y'' \ln y' - 1 = 0$.

◀ Вводя параметр t по формуле $y' = t$, из уравнения получаем

$$y'' = \frac{1}{1 + 2\ln t}.$$

Так как $d(y') = y''\, dx$, то в силу параметрических представлений производных y' и y'' имеем уравнение

$$dt = \frac{dx}{1 + 2\ln t}. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем

$$x = t(2\ln t - 1) + C_1.$$

Функцию y находим из уравнения $y' = t$, пользуясь (1):

$$dy = t\, dx = t(1 + 2\ln t)\, dt, \quad y = t^2 \ln t + C_2.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$x = t(2\ln t - 1) + C_1, \quad y = t^2 \ln t + C_2. \blacktriangleright$$

264. $y''(1 + y')e^{y'} = 1.$

◀ Действуем по той же схеме, что и в предыдущем примере. Имеем

$$y' = t, \quad y'' = \frac{e^{-t}}{1+t}.$$

Отсюда, в силу соотношения $d(y') = y''\,dx$, получаем

$$(1 + t)\,dt = e^{-t}\,dx.$$

Следовательно,

$$x = te^t + C_1.$$

Из уравнения $y' = t$ находим

$$y = \int t\,dx + C_2 = \int t(1 + t)e^t\,dt + C_2 = (t^2 - t + 1)e^t + C_2.$$

Итак, получили общее решение

$$x = te^t + C_1, \quad y = (t^2 - t + 1)e^t + C_2. \blacktriangleright$$

265. $y'' - e^y = 0.$

◀ Это уравнение вида $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$ при $n = 2$. Согласно п. 1.3 имеем

$$y'' = \beta(t), \quad y = \alpha(t), \tag{1}$$

где $\alpha(t) = \ln t$, $\beta(t) = t$. Уравнение (3), п. 1.3, принимает вид

$$-\frac{1}{t^2}x' - \frac{1}{t}x'' = tx'^3, \quad \text{или} \quad t\varkappa' + \varkappa + t^3\varkappa^3 = 0,$$

где $\varkappa = x'$. Решив последнее уравнение Бернулли (или, еще проще, уравнение $(t\varkappa)' + (t\varkappa)^3 = 0$), получаем

$$x' = \varkappa = \pm\frac{1}{t\sqrt{2t + C_1}}.$$

Отсюда находим:

$$x = \pm\int \frac{dt}{t\sqrt{2t + C_1}} + C_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln\left|\frac{\sqrt{C_1} + \sqrt{2t + C_1}}{\sqrt{C_1} - \sqrt{2t + C_1}}\right| + C_2, \quad \text{если } C_1 > 0;$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{-C_1}} \operatorname{arctg}\sqrt{-1 - \frac{2t}{C_1}} + C_2, \quad \text{если } C_1 < 0;$$

$$x = -\sqrt{\frac{2}{t}} + C_2, \quad \text{если } C_1 = 0.$$

Присоединив сюда еще второе уравнение из (1), будем иметь общее решение данного дифференциального уравнения в параметрической форме. ▶

Примечание. Рассмотренное уравнение допускает и другой способ решения. А именно, умножая обе части уравнения на y', получаем: $y''y' = e^y y'$, или

$$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = (e^y)',$$

откуда интегрированием находим $y'^2 = 2e^y + C_1$, или

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y + C_1}} = dx.$$

Интегрируя еще раз, получаем общее решение в явном виде

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}+\sqrt{2e^y+C_1}}{\sqrt{C_1}-\sqrt{2e^y+C_1}}\right| + C_2, \quad \text{если} \quad C_1 > 0;$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{-C_1}}\operatorname{arctg}\sqrt{-1-\frac{2}{C_1}e^y} + C_2, \quad \text{если} \quad C_1 < 0;$$

$$x = -\sqrt{2e^{-y}} + C_2, \quad \text{если} \quad C_1 = 0.$$

266. $yy'' = 1$.

◀ Умножив обе части уравнения на y', получаем $yy''y' = y'$ $(y' \neq 0)$, или

$$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = (\ln|y|)',$$

откуда интегрированием находим $y'^2 = \ln y^2 + C_1$, или

$$y' = \pm\sqrt{\ln y^2 + C_1}.$$

Разделив переменные и опять проинтегрировав, окончательно имеем

$$x + C_2 = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{C_1+\ln y^2}}. \blacktriangleright$$

267. $y^3y'' - y^4 + 1 = 0$.

◀ По аналогии с проделанным выше, имеем

$$y^3y''y' + \left(1-y^4\right)y' = 0 \quad (y' \neq 0), \quad \text{или} \quad \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(y^{-2}+y^2\right)'.$$

Отсюда следует, что $y'^2 = \left(y^2+y^{-2}\right) + C_1$, или

$$y' = \pm\sqrt{C_1+y^2+y^{-2}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$x + C_2 = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{C_1+y^2+y^{-2}}} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|y^2+\frac{C_1}{2}+\sqrt{C_1y^2+y^4+1}\right|. \blacktriangleright$$

268. $y''' + y' = 0$.

◀ Умножив обе части уравнения на y'', получаем

$$y''y''' + y''y' = 0 \quad (y'' \neq 0).$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{y''^2}{2}\right)' + \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = 0,$$

а также

$$y''^2 + y'^2 = C_1^2.$$

Полагаем $y' = C_1\sin t$, $y'' = C_1\cos t$. Из тождества $d(y') = y''dx$ в силу последних уравнений имеем $d(\sin t) = \cos t\,dx$, или $dx = dt$, откуда

$$x = t + C_2.$$

Из уравнения $y' = C_1\sin t$ находим

$$y = C_1\int\sin t\,dx + C_3 = C_1\int\sin t\,dt + C_3 = -C_1\cos t + C_3.$$

Теперь окончательно можем записать:

$$x = t + C_2, \quad y = C_1\cos t + C_3, \quad \text{или} \quad y = C_1\cos(x+C_2) + C_3. \blacktriangleright$$

269. $y''2 - 4xy'' + 4y' = 0$.

◀ Полагая $y'' = t$, находим

$$y' = xt - \frac{t^2}{4}.$$

Поскольку $d(y') = y''\,dx$, то из последних соотношений следует, что $d\left(xt - \frac{t^2}{4}\right) = t\,dx$, или

$$\left(x - \frac{t}{2}\right) dt = 0.$$

Решив полученное уравнение, имеем $t = C_1$, а также $x = \frac{t}{2}$. Функцию y, которая соответствует решению $t = C_1$, находим из уравнения

$$y' = xt - \frac{t^2}{4}.$$

Получаем $y' = xC_1 - \frac{C_1^2}{4}$, откуда

$$y = C_1\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}C_1^2 x + C_2.$$

Аналогично, для функции y, соответствующей решению $x = \frac{t}{2}$, имеем

$$y' = \frac{t^2}{4}.$$

Отсюда

$$dy = \frac{t^2}{4}\,dx = \frac{t^2}{4}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{8}\,dt.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $y = \frac{t^3}{24} + C_3$, или

$$y = \frac{x^3}{3} + C_3.$$

Таким образом, все решения данного уравнения описываются формулами:

$$y = \frac{\tilde{C}_1}{2}x\left(x - \frac{\tilde{C}_1}{2}\right) + C_2 \equiv C_1 x(x - C_1) + C_2, \quad y = \frac{x^3}{3} + C_3. \blacktriangleright$$

270. $\sin y'' + y\ln y'' = 1$.

◀ Полагая в этом уравнении $y'' = t$, получаем

$$y = \frac{1 - \sin t}{\ln t} \quad (t > 0). \tag{1}$$

Для получения функции x воспользуемся уравнением (3), п. 1.3. Имеем

$$\frac{\alpha''}{\varkappa^2} - \frac{\varkappa'}{\varkappa^3}\alpha' = \beta, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1 - \sin t}{\ln t}, \quad \beta = t, \quad \varkappa = x'.$$

Общее решение этого уравнения представляется в виде

$$\varkappa = \pm\frac{\alpha'}{\sqrt{2\int \alpha'\beta\,dt + C_1}}.$$

Следовательно,

$$x = \pm\int \frac{\alpha'\,dt}{\sqrt{2\int \alpha'\beta\,dt + C_1}} + C_2. \tag{2}$$

Таким образом, (1) и (2) суть параметрические уравнения общего решения данного дифференциального уравнения. ▶

§ 2. Уравнения, допускающие понижение порядка

2.1. Дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то его порядок можно понизить с помощью замены $y^{(k)} = z(x)$. Действительно, тогда получим уравнение

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0,$$

порядок которого на k единиц меньше исходного.

2.2. Дифференциальное уравнение вида $F\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Порядок дифференциального уравнения

$$F\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

можно понизить с помощью замены $y' = p(y)$, где $p = p(y)$ — новая неизвестная функция, а переменная y является аргументом.

Имеем

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right)$$

и т. д., т. е. порядок дифференциального уравнения понижается на единицу.

2.3. Однородное дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Если дифференциальное уравнение $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ однородное относительно функции и ее производных, т. е. справедливо тождество

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}\right) \equiv t^{\alpha}F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right),$$

то порядок уравнения можно понизить на единицу, положив $y' = yz(x)$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Действительно, последовательно дифференцируя соотношение $y' = yz(x)$, имеем:

$$y'' = (yz(x))' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = \left(y(z^2 + z')\right)' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

и т. д., $y^{(n)} = y\psi(z, z', \dots, z^{(n-1)})$, где ψ — известная функция. Подставив значения производных в дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ и используя однородность функции F, получаем:

$$F\left(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y\psi\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) \equiv y^{\alpha}F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \psi\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

2.4. Обобщенно однородное дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Дифференциальное уравнение $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ называется *обобщенно однородным*, если функция F удовлетворяет тождеству

$$F\left(tx, t^m y, t^{m-1}y', t^{m-2}y'', \dots, t^{m-n}y^{(n)}\right) \equiv t^{\alpha}F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right),$$

где m — некоторое действительное число.

Если уравнение $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ обобщенно однородное, то замена переменных $x = e^t$, $y = e^{mt}z(t)$ приводит к уравнению, явно не содержащему независимую переменную t. Следовательно, порядок такого уравнения можно понизить. Действительно, имеем

$$y' = \frac{d(e^{mt}z)}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{mt}z) = e^{-t+mt}(mz + z'),$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{-t}\frac{dy'}{dt} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{(m-1)t}(mz + z')\right) = e^{(m-2)t}\left((m-1)mz + (2m-1)z' + z''\right)$$

и т. д., $y^{(n)} = e^{(m-n)t}\psi(z, z', \ldots, z^{(n)})$, где ψ — известная функция. Подставляя значения производных в рассматриваемое уравнение и пользуясь обобщенной однородностью, получаем:

$$F\left(e^t, e^{mt}z, e^{(m-1)t}(mz + z'), e^{(m-2)t}\left((m-1)mz + (2m-1)z' + z''\right), \ldots, e^{(m-n)t}\psi\left(z, z', \ldots, z^{(n)}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv e^{at}F\left(1, z, (mz + z'), \left((m-1)mz + (2m-1)z' + z''\right), \ldots, \psi\left(z, z', \ldots, z^{(n)}\right)\right) = 0.$$

2.5. Уравнение, приводимое к виду $\left(\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right)' = 0$.

Если путем алгебраических преобразований дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

можно привести к виду

$$\left(\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right)' = 0,$$

то интегрированием его порядок можно понизить на единицу:

$$\varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1,$$

где φ — известная функция.

Решить уравнения.

271. $x^2y'' = y'^2$.

◀ В это уравнение второго порядка явно не входит неизвестная функция. Следовательно, согласно п. 2.1, полагая $y' = z(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x^2z' = z^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} + C_1, \quad \text{или} \quad z = \frac{x}{1 - C_1x} = y'.$$

Интегрируя еще раз, окончательно получаем

$$y = \int \frac{x\,dx}{1 - C_1x} + C_2 = \begin{cases} -\frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}\ln|C_1x - 1| + C_2, & \text{если} \quad C_1 \neq 0,\ C_1 \neq \infty; \\ \frac{x^2}{2} + C_2, & \text{если} \quad C_1 = 0; \\ C_2, & \text{если} \quad C_1 = \infty. \end{cases}$$ ▶

272. $y''' = y''^2$.

◀ Полагая $y'' = z(x)$, понижаем порядок уравнения на две единицы:

$$z' = z^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dz}{z^2} = x - C_1, \quad \text{или} \quad z = \frac{1}{C_1 - x}, \quad z \neq 0.$$

Остается дважды проинтегрировать уравнение $y'' = (C_1 - x)^{-1}$. Имеем

$$y' = -\ln|C_1 - x| + C_2, \quad y = (C_1 - x)\ln|C_1 - x| + C_2x + C_3.$$

Кроме того, при разделении переменных мы потеряли решение $z = y'' = 0$, или $y = Cx + D$. ▶

273. $xy''' = y'' - xy''$.

◀ По аналогии с изложенным выше, имеем

$$y'' = z(x), \quad xz'(x) = (1-x)z(x).$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx, \quad \ln|z| = \ln|x| - x + \ln C_1,$$

откуда

$$z = C_1 x e^{-x}, \quad \text{или} \quad y'' = C_1 x e^{-x}.$$

Применяя двукратное интегрирование к последнему уравнению, получаем

$$y = C_1 e^{-x}(x+2) + C_2 x + C_3. \blacktriangleright$$

274. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

◀ Так как уравнение не содержит явно функцию y, то, применив замену $y' = z(x)$, порядок уравнения можно понизить на единицу. Имеем

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}.$$

Полученное уравнение является однородным, поэтому воспользуемся заменой $z = xu(x)$, где u — новая неизвестная функция. При этом получим уравнение $(u + xu') = u \ln u$, в котором переменные разделяются:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C_1$, откуда $u = e^{1+C_1 x}$. Следовательно, требуется проинтегрировать уравнение

$$y' = xe^{1+C_1 x}.$$

Имеем

$$y = \frac{e^{1+C_1 x}}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2.$$

Кроме того, разделяя переменные, мы потеряли решение $u = e$, или $y = \frac{ex^2}{2} + C$, которое, однако, может быть получено из общего решения предельным переходом при $C_1 \to 0$ и $C_2 = C + \frac{e}{C_1^2}$.

Действительно, пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, можем написать:

$$y = \frac{e}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right)\left(1 + C_1 x + \frac{C_1^2}{2}x^2 + o(C_1^2)\right) + C + \frac{e}{C_1^2} = \frac{e}{2}x^2 + C + o(1) \quad \text{при} \quad C_1 \to 0. \blacktriangleright$$

275. $xy'y'' + y'^2 + 1 = ay''\sqrt{1+y'^2}$.

◀ Произведя замену $y' = z(x)$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$xzz' + z^2 + 1 = az'\sqrt{1+z^2}.$$

Положим $z = \operatorname{tg} t$ ($|t| < \frac{\pi}{2}$). Тогда

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x' \cos^2 t}$$

и последнее уравнение примет вид

$$x' \cos t + x \sin t = a,$$

откуда легко находим x:

$$x = C_1 \cos t + a \sin t. \tag{1}$$

Принимая во внимание (1), из уравнения $z = \operatorname{tg} t = \frac{dy}{dx}$ получаем

$$y = \int \operatorname{tg} t\, dx + C_2 = \int \operatorname{tg} t\, d(C_1 \cos t + a \sin t) + C_2 = -C_1 \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1 \sin t - a\cos t + C_2. \tag{2}$$

Итак, уравнения (1) и (2) представляют общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрической форме. ▶

276. $x^4y''' + 2x^3y'' - 1 = 0.$

◀ Замена $y'' = z(x)$ приводит к линейному уравнению первого порядка

$$x^4z' + 2x^3z - 1 = 0,$$

общее решение которого имеет вид $z = \frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. Следовательно,

$$y'' = \frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2},$$

откуда двукратным интегрированием находим

$$y = \frac{1}{2x} - C_1 \ln|x| + C_2x + C_3. \blacktriangleright$$

277. $y'^2 + 2yy'' = 0.$

◀ Уравнение не содержит явно переменную x, поэтому в соответствии с п. 2.2 полагаем $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и уравнение запишется в виде

$$p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0.$$

Отсюда находим $p = 0$ и $p + 2y\frac{dp}{dy} = 0$. Из первого из двух последних уравнений получаем $y = C$, а из второго имеем $p^2 = \frac{C_1}{y}$, или $y'^2 = \frac{C_1}{y}$, откуда

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}}, \quad \text{или} \quad \pm C_1\sqrt{\frac{y}{C_1}}\,d\left(\frac{y}{C_1}\right) = dx \quad (C_1 \neq 0).$$

Интегрируя, находим

$$\pm\frac{2C_1}{3}\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{3}{2}} = x + C_2, \quad \text{или} \quad y^3 = C_1\left(\frac{3x}{2C_1} + \frac{3C_2}{2C_1}\right)^2 = \frac{9}{4C_1}(x + C_2)^2.$$

Окончательно имеем

$$y^3 = \tilde{C}_1(x + C_2)^2, \quad y = C,$$

где $\tilde{C}_1$ — новая произвольная постоянная. ▶

278. $yy'' = y'^2 - y'^3.$

◀ Как и в предыдущем примере, полагаем $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3.$$

Полученное уравнение распадается на два:

$$p = 0 \quad \text{и} \quad y\frac{dp}{dy} = p - p^2.$$

Из первого уравнения следует, что

$$y = C,$$

и из второго — что

$$p = y' = \frac{y}{C_1 + y}.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$x = C_1 \ln|y| + y + C_2. \blacktriangleright$$

279. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

◀ Согласно п. 2.2, после замены $y' = p(y)$ получаем

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dy} + z = 2e^{-y},$$

где $z = p^2$. Последнее уравнение линейное и его общее решение имеет вид

$$z = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}.$$

Подставив сюда $z = y'^2$, получаем уравнение

$$y'^2 = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}, \quad \text{или} \quad y' = \pm\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

интегрируя которое, находим

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}}} = x + C_2, \quad \text{или} \quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1 + 4e^{y}} = x + C_2,$$

откуда

$$y = \ln\left(\widetilde{C}_1 + (x + C_2)^2\right),$$

где $\widetilde{C}_1$ — новая постоянная. ▶

280. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.

◀ Уравнение не содержит x, поэтому полагаем $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad y''' = p\left(p'^2 + pp''\right) \quad \text{и} \quad p^2p'^2 - 2p^2\left(p'^2 + pp''\right) + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p'^2 + 2pp'' - \frac{1}{p^2} = 0.$$

Так как полученное уравнение явно не содержит аргумента y, то производим замену $p' = u(p)$. Имеем

$$p'' = u\frac{du}{dp}, \quad u^2 + 2puu' - \frac{1}{p^2} = 0, \quad \text{или} \quad w + pw' = \frac{1}{p^2},$$

где $w = u^2$. Общее решение последнего уравнения имеет вид:

$$w = \frac{C_1}{p} - \frac{1}{p^2}, \quad \text{или} \quad p'^2 = \frac{C_1}{p} - \frac{1}{p^2},$$

откуда

$$p' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{p} - \frac{1}{p^2}}. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем

$$\pm\int \frac{p\,dp}{\sqrt{C_1 p - 1}} = y + C_2, \quad \text{или} \quad \pm\frac{2}{3C_1^2}\sqrt{C_1 p - 1}(C_1 p + 2) = y + C_2.$$

Воспользовавшись соотношением $dx = \frac{dy}{p}$ и уравнением (1), имеем

$$dx = \pm\frac{dp}{\sqrt{C_1 p - 1}},$$

откуда интегрированием находим

$$x = \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 p - 1} + C_3.$$

Наконец, исключив параметр p из выражений для x и y, окончательно будем иметь:

$$12(C_1 y - x) = C_1^2(x - C_3)^3 - 12(C_3 + C_1 C_2), \quad \text{или} \quad 12(C_1 y - x) = C_1^2(x + \widetilde{C}_2)^3 + \widetilde{C}_3,$$

где $\widetilde{C}_2$ и $\widetilde{C}_3$ — новые произвольные постоянные. ▶

Примечание. Данное уравнение не содержит явно переменной y, поэтому начать решать его можно было бы с замены $y' = z(x)$. Предлагаем читателю убедиться в том, что такой путь также приводит к полученному ответу.

281. $yy'' + y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.

◀ Замечая, что левую часть уравнения можно записать в виде $(yy')'$ и полагая $yy' = z(x)$, получим уравнение

$$z' = \frac{z}{\sqrt{1+x^2}},$$

переменные в котором разделяются. Проинтегрировав его, находим:

$$z = C_1\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Таким образом,

$$yy' = C_1\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

откуда следует, что

$$y^2 = C_1\left(x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) + C_2. \blacktriangleright$$

282. $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0$.

◀ Поскольку функция

$$F(x, y, y', y'') = x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2$$

вследствие тождества

$$x^2tyty'' - 2x^2(ty')^2 + xtyty' + (ty)^2 \equiv t^2\left(x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2\right)$$

однородная относительно переменных y, y', y'', то данное дифференциальное уравнение однородное. Следовательно, согласно п. 2.3 порядок такого уравнения можно понизить, применив подстановку $y' = yz(x)$. Тогда получим уравнение

$$x^2z' - x^2z^2 + xz + 1 = 0.$$

Это уравнение Эйлера—Риккати. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $z = \frac{1}{x}$ есть его частное решение. Поэтому посредством подстановки $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$ приходим к линейному уравнению

$$xu' + u + x = 0,$$

из которого следует, что $u = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}$. Отсюда, и из подстановки $y' = yz$, получаем уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{\widetilde{C}_1 + x^2}{x(\widetilde{C}_1 - x^2)},$$

где $\widetilde{C}_1$ — новая постоянная. Проинтегрировав его, окончательно находим

$$y = \frac{C_2x}{\widetilde{C}_1 - x^2}. \blacktriangleright$$

283. $xyy'' - xy'^2 - yy' + \dfrac{xy'^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

◀ Это также однородное уравнение. После замены $y' = yz(x)$ получим уравнение

$$xz' - z + \frac{xz^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\left(\frac{x}{z}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда

$$\frac{x}{z} = -\sqrt{1-x^2} + C_1, \quad \text{или} \quad z = \frac{x}{C_1 - \sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{C_1 - \sqrt{1-x^2}},$$

окончательно имеем

$$\ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C_1 \ln\left|C_1 - \sqrt{1-x^2}\right| + C_2. \blacktriangleright$$

284. $xyy'' + xy'^2 - 3yy' = 0.$

◀ Полагая в уравнении $y' = yz(x)$, получаем:

$$x(2z^2 + z') - 3z = 0.$$

Решив это дифференциальное уравнение, имеем $z = \dfrac{2x^3}{x^4 + C_1}$. Далее, интегрируя уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^3}{x^4 + C_1},$$

находим:

$$y = C_2\sqrt{|C_1 + x^4|}. \blacktriangleright$$

285. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x).$

◀ Используя однородность уравнения, полагаем $y' = yz(x)$. Тогда получим $(xz)' + (xz)^2 = 0$, откуда

$$\frac{(xz)'}{(xz)^2} = -1.$$

Интегрируя, находим $\frac{1}{xz} = x + C_1$, откуда $z = \frac{1}{x(x + C_1)}$, или

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x + C_1)}.$$

Интегрируя еще раз, окончательно имеем

$$y = C_2\left|\frac{x}{x + C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}. \blacktriangleright$$

286. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$

◀ Проверим уравнение на обобщенную однородность. С этой целью вместо переменных x, y, y', y'' подставим в выражение для функции $F(x, y, y', y'') = 4x^2y^3y'' - x^2 + y^4$ соответственно tx, $t^m y$, $t^{m-1}y'$, $t^{m-2}y''$ и, если это возможно, подберем значение m таким образом, чтобы выполнялось тождество

$$t^{4m}4x^2y^3y'' - t^2x^2 + t^{4m} \equiv t^\alpha\left(4x^2y^3y'' - x^2 + y^4\right).$$

Очевидно, что такое тождество выполняется лишь при условии $4m = 2$, т.е. при $m = \frac{1}{2}$ (и при этом $\alpha = 2$). Следовательно, данное уравнение обобщенно однородное и, согласно п. 2.4, для начала его интегрирования пользуемся заменой $x = e^t$, $y = e^{\frac{t}{2}}u(t)$. Имеем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{u(t)}{2} + u'(t)\right)}{e^t} = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{u}{2} + u'\right),$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{u}{2} + u'\right)\right) = e^{-\frac{3}{2}t}\left(u'' - \frac{u}{4}\right).$$

Подставив значения производных, x и y в исходное уравнение, после некоторых преобразований получаем:

$$4u^3u'' = 1.$$

Последнее уравнение явно не содержит переменную t, поэтому посредством замены $u' = p(u)$ понижаем его порядок на единицу:

$$4pu^3\frac{dp}{du} = 1.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, находим

$$4p^2 + \frac{1}{u^2} = \overline{C}_1, \quad \text{или} \quad p = \pm\sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}}.$$

Далее, интегрируем уравнение $u' = \pm\sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}}$:

$$\pm 2\int \frac{u\,du}{\sqrt{4C_1u^2 - 1}} = t + C_2, \quad \text{или} \quad \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{4C_1u^2 - 1} = t + C_2,$$

откуда

$$u^2 = C_1(t + C_2)^2 + \frac{1}{4C_1}.$$

Окончательно получаем решение уравнения в виде

$$x = e^t, \quad y^2 = e^t\left(C_1(t + C_2)^2 + \frac{1}{4C_1}\right). \blacktriangleright$$

287. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.

◀ Как и в предыдущем примере, проверяем уравнение на обобщенную однородность. Для этого должны быть совместными следующие уравнения относительно m:

$$2m - 2 = 2(m - 1) = 1 + (m - 2) = m + (m - 1) - 1,$$

эквивалентные одному уравнению $2m - 2 = m - 1$, имеющему решение $m = 1$. Следовательно, данное уравнение действительно обобщенно однородное. Полагая $x = e^t$, $y = e^t u(t)$, получаем:

$$y' = u + u', \quad y'' = e^{-t}(u' + u''), \quad 3u'' + 3u' - u'^2 = 0.$$

Замена $u' = z$ в последнем уравнении приводит к уравнению с разделяющимися переменными $3z' = z^2 - 3z$, интегрируя которое, находим

$$\ln\left|\frac{z - 3}{z}\right| = t + \overline{C}_1, \quad \text{или} \quad z = \frac{3}{1 - C_1e^t} = u'.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к следующему результату:

$$u = \int \frac{d(e^t)}{e^t(1 - C_1e^t)} = \begin{cases} 3t - 3\ln|1 - C_1e^t| + C_2, & \text{если } C_1 \text{ конечное,} \\ C_2, & \text{если } C_1 = \infty. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения записывается в виде

$$y = \begin{cases} 3x\ln\frac{x}{|1 - C_1x|} + C_2x, & \text{если } C_1 \text{ конечное,} \\ C_2x, & \text{если } C_1 = \infty. \blacktriangleright \end{cases}$$

Примечание. В примерах 286, 287 мы нашли общие решения при $x > 0$. Для получения общего решения при $x < 0$ следует применить замену $x = -e^t$, $y = e^{mt}u(t)$ и провести аналогичные выкладки.

288. $x^4\left(y'^2 - 2yy''\right) = 4x^3yy' + 1$.

◀ Проверяя уравнение на обобщенную однородность, получаем уравнения

$$4 + 2(m - 1) = 4 + m + (m - 2) = 3 + m + (m - 1) = 0,$$

совместные, эквивалентные одному уравнению $2m + 2 = 0$. Следовательно, уравнение обобщенно однородное. Решаем его для случая, когда $x < 0$, полагая $x = -e^t$, $y = e^{-t}u(t)$. Имеем

$$y' = e^{-2t}(u - u'), \quad y'' = e^{-3t}(2u - 3u' + u''), \quad 2uu'' - u'^2 - u^2 + 1 = 0.$$

Полагая $u' = p(u)$, получим уравнение

$$2up\frac{dp}{du} - p^2 - u^2 + 1 = 0, \quad \text{или} \quad u\frac{d(p^2)}{du} - p^2 = u^2 - 1.$$

Это линейное уравнение относительно p^2. Его общее решение имеет вид $p^2 = u^2 + 1 + C_1 u$. Тогда

$$u' = \pm\sqrt{u^2 + 1 + C_1 u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + C_1 u + 1}} = t + C_2, \quad \text{или} \quad \pm \ln\left|u + \frac{C_1}{2} + \sqrt{u^2 + C_1 u + 1}\right| = t + \ln C_2.$$

Подставляя в полученное соотношение значение $u = -xy$, $t = \ln(-x)$ и произведя алгебраические преобразования, будем иметь

$$2C_2 x^2 y = \left(C_2 x + \frac{C_1}{2}\right)^2 - 1. \tag{1}$$

Кроме того, при замене $u' = p(u)$ мы потеряли решения $u = \pm 1$. Поэтому к интегралу (1) следует присоединить еще решения $xy = \pm 1$. ▶

289. $xy'' - x^2 yy' - y' = 0$.

◀ Это уравнение также обобщенно однородное, поскольку уравнения

$$1 + (m - 2) = 2 + m + (m - 1) = m - 1$$

совместны и $m = -2$ — их решение. Однако, решение данного уравнения проще найти, поделив обе его части на x^2 $(x \neq 0)$. В результате получим:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = yy', \quad \text{или} \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = \left(\frac{y^2}{2}\right)'.$$

Отсюда следует, что

$$y' = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2}\right) x.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\frac{2}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 > 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}}\right| = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 < 0;$$

$$-\frac{2}{y} = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 = 0. \blacktriangleright$$

Понизив порядок данных уравнений, свести их к уравнениям первого порядка.

290. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

◀ Уравнение не содержит явно функцию y, поэтому произведя подстановку $y' = z(x)$, получим уравнение второго порядка

$$z'^2 - zz'' = \left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

Это уравнение однородно относительно переменных z, z', z'', поэтому положив $z' = zv(x)$, будем иметь уравнение первого порядка

$$v' + \frac{1}{x} = 0 \quad \text{и} \quad z = 0. \blacktriangleright$$

291. $y^2\left(y'y''' - 2y''^2\right) = y'^4$.

◀ Поскольку независимая переменная явно не входит в уравнение, то произведя замену $y' = p(y)$, получим уравнение второго порядка (см. п. 2.2):

$$y^2\left(pp'' - p'^2\right) = p^2.$$

Поделив обе части полученного уравнения на p^2y^2 $(py \neq 0)$, имеем

$$\left(\frac{p'}{p}\right)' = \frac{1}{y^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{p'}{p} = -\frac{1}{y^2} + C_1. \blacktriangleright$$

292. $x^2\left(y^2y''' - y'^3\right) = 2y^2y' - 3xyy'^2$.

◀ Уравнение однородное, поэтому замена $y' = yz(x)$ приводит к уравнению второго порядка (см. п. 2.3):

$$x^2(3zz' + z'') = 2z - 3xz^2.$$

Так как уравнения $2 + m + (m - 1) = 2 + (m - 2) = m = 1 + 2m$ совместны, то полученное дифференциальное уравнение является обобщенно однородным. Следовательно, уместна замена $x = e^t$ $(x > 0)$, $z = e^{-t}u(t)$, в результате которой приходим к уравнению (см. п. 2.4)

$$u'' - 3uu' - 3u' = 0.$$

Поскольку последнее уравнение явно не содержит независимой переменной t, то полагая $u' = p(u)$, получаем уравнения первого порядка

$$\frac{dp}{du} - 3u - 3 = 0 \quad \text{и} \quad u' = 0. \blacktriangleright$$

Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

293. $yy''' + 3y'y'' = 0$.

◀ Поделив обе части уравнения на yy'', получаем

$$\frac{y'''}{y''} + \frac{3y'}{y} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\ln|y''|\right)' + 3\left(\ln|y|\right)' = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln\left(|y''||y|^3\right) = \ln|C_1|, \quad \text{или} \quad y''y^3 = C_1$$

(отбрасывая знак модуля, мы не теряем решений, поскольку постоянная C_1 произвольная). Умножив обе части последнего уравнения на $\frac{y'}{y^3}$, снова получаем уравнение, обе части которого являются полными производными:

$$y''y' = C_1\frac{y'}{y^3}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = -\frac{C_1}{2}(y^{-2})'.$$

Проинтегрировав его, имеем

$$y'^2 + C_1y^{-2} = C_2, \quad \text{или} \quad y' = \pm\sqrt{C_2 - C_1y^{-2}}.$$

Еще раз интегрируя, окончательно находим

$$\pm\frac{1}{C_2}\sqrt{C_2y^2 - C_1} = x + C_3, \quad \text{или} \quad y^2 = C_2(x + C_3)^2 + \widetilde{C}_1,$$

где $\widetilde{C}_1$ — новая постоянная. При делении на y'' мы потеряли решение $y'' = 0$, т. е. $y = \alpha x + \beta$. ▶

294. $5y'''^2 - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0$.

◀ Разделив обе части уравнения на $y''y'''$, получим

$$\frac{5y'''}{y''} = \frac{3y^{\mathrm{IV}}}{y'''}, \quad \text{или} \quad \left(5\ln|y''| - 3\ln|y'''|\right)' = 0,$$

откуда находим

$$y''^5 = C_1y'''^3, \quad \text{или} \quad \frac{1}{C_1^{\frac{1}{3}}} = \frac{y'''}{(y'')^{\frac{5}{3}}}.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\frac{x}{C_1^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{2}(y'')^{-\frac{2}{3}} + C_2,$$

или

$$y'' = \pm\left(\frac{2}{3}C_2 - \frac{2}{3}\frac{x}{C_1^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}} \equiv \pm(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x)^{-\frac{3}{2}},$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — новые постоянные. Наконец, дважды интегрируя последнее уравнение, имеем

$$y = \pm\frac{4}{\tilde{C}_2^2}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x)^{\frac{1}{2}} + C_3 x + C_4.$$

Присоединим сюда еще решение уравнения $y''' = 0$, потерянное при делении:

$$y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 x + \overline{C}_3. \blacktriangleright$$

295. $y'' = xy' + y + 1$.

◀ Имеем

$$y'' = (xy + x)',$$

откуда следует, что

$$y' = xy + x + C_1, \quad \text{или} \quad (y+1)' = x(y+1) + C_1.$$

Это линейное уравнение первого порядка, и его общее решение имеет вид

$$y + 1 = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_2\right). \blacktriangleright$$

296. $xy'' - y' = x^2 y y'$.

◀ Поделив обе части уравнения на x^2, имеем

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' = \left(\frac{y^2}{2}\right)',$$

откуда

$$\frac{y'}{x} = \frac{y^2}{2} + C_1, \quad \text{или} \quad \frac{2\,dy}{y^2 + 2C_1} = x\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$2\int\frac{dy}{y^2 + 2C_1} = \frac{x^2}{2} + C_2,$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2C_1}} = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 > 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{-2C_1}}\ln\left|\frac{y - \sqrt{-2C_1}}{y + \sqrt{-2C_1}}\right| = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 < 0;$$

$$-\frac{2}{y} = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{если } C_1 = 0.$$

При разделении переменных мы "потеряли" решения уравнения $y^2 + 2C_1 = 0$ $(C_1 < 0)$, или $y = \pm\sqrt{-2C_1}$. Нетрудно, однако, показать, что они получаются в результате предельного перехода при $C_2 \to \mp\infty$ из общего решения при $C_1 < 0$. ▶.

В следующих задачах найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

297. $yy'' = 2xy'^2$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 0{,}5$.

◀ Поскольку уравнение однородное, то полагая $y' = yz(x)$, получим

$$z' = z^2(2x - 1).$$

Интегрируя, находим

$$z = \frac{1}{C_1 + x - x^2} = \frac{y'}{y}. \tag{1}$$

Из начальных условий следует, что $C_1 = 6$. Интегрируя уравнение (1), получим

$$\int \frac{dx}{(x+2)(3-x)} = \ln|y| - \ln C_2,$$

откуда $y = C_2\sqrt[5]{\frac{2+x}{3-x}}$. Подставив сюда $x = 2$ и $y = 2$, определим $C_2 = \sqrt[5]{8}$. Искомое решение уравнения имеет вид

$$y = \sqrt[5]{8\,\frac{2+x}{3-x}}. \blacktriangleright$$

298. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y;\ y(1) = 1,\ y'(1) = 4.$

◀ Это обобщенно однородное уравнение и $m = 2$, поэтому производим замену $x = e^t$, $y = e^{2t}u(t)$. Получаем уравнение

$$u'' - 6u^2 = 0.$$

Умножая обе его части на u' и интегрируя, имеем

$$u'^2 = 4u^3 + C_1. \tag{1}$$

Так как $y = 1$ при $x = 1$, то из формул замены следует, что $u(0) = 1$. В силу того, что $y' = e^t(u' + 2u)$ и $y'(1) = 4$, находим $u'(0) + 2u(0) = 4$, откуда $u'(0) = 2$. Полагая в (1) $t = 0$ и используя значения $u(0)$, $u'(0)$, определяем $C_1 = 0$. Осталось проинтегрировать уравнение

$$u'^2 = 4u^3.$$

Имеем $u' = \pm 2u^{\frac{3}{2}}$, $\pm u^{-\frac{3}{2}}\,du = 2\,dt$, $\frac{1}{\pm\sqrt{u}} = t + C_2$, или

$$u = \frac{1}{(t + C_2)^2}.$$

Для определения постоянной C_2 воспользуемся условием $u(0) = 1$, в результате чего находим $C_2 = \pm 1$. Итак, $u = \frac{1}{(t \pm 1)^2}$, однако, в силу условия $u'(0) = 2$, берем только решение $u = \frac{1}{(t-1)^2}$.

Окончательно можем записать

$$y = \frac{x^2}{(\ln x - 1)^2}. \blacktriangleright$$

299. $y''\cos y + y'^2 \sin y = y';\ y(-1) = \frac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2.$

◀ Полагая $y' = p(y)$, получаем уравнение

$$p'\cos y + p\sin y = 1,$$

общее решение которого имеет вид:

$$p = \sin y + C_1\cos y, \quad \text{или} \quad y' = \sin y + C_1\cos y. \tag{1}$$

Для определения постоянной C_1 воспользуемся условием, что $y'(-1) = 2$ при $y = \frac{\pi}{6}$. Находим $C_1 = \sqrt{3}$. Далее, интегрируя уравнение (1), получаем

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)} = x + C_2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = x + C_2.$$

Подставив сюда значения $x = -1$, $y = \frac{\pi}{6}$, находим $C_2 = 1$. Требуемое частное решение выражается формулой

$$x = -1 + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right). \blacktriangleright$$

Примечание. Знак $|\cdot|$ здесь отброшен в силу условия $y'(-1) = 2 > 0$.

300. Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.

◀ Согласно условию задачи имеем уравнение $R = \frac{k}{\cos\alpha}$, где R — радиус кривизны кривой, α — указанный в задаче угол, k — коэффициент пропорциональности. Поскольку $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, то написанное выше уравнение можно записать в виде

$$\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}} = k|y''|\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{или} \quad ky'' = 1+y'^2, \quad \frac{y''}{1+y'^2} = \frac{1}{k}, \quad (\operatorname{arctg} y')' = \frac{1}{k}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\operatorname{arctg} y' = \frac{x}{k} + C_1, \quad \text{или} \quad y' = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + C_1\right).$$

Проинтегрировав еще раз, окончательно получим

$$y = -k \ln\left|\cos\left(\frac{x}{k} + C_1\right)\right| + C_2. \blacktriangleright$$

301. Доказать, что уравнение движения маятника $y'' + \sin y = 0$ имеет частное решение $y(x)$, стремящееся к π при $x \to +\infty$.

◀ Умножив обе части уравнения на y' и проинтегрировав полученное, будем иметь

$$y'^2 = 2C_1 + 2\cos y. \tag{1}$$

Выберем частное решение так, чтобы $y'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу того, что $y(x) \to \pi$ при $x \to +\infty$, из (1) следует, что $C_1 = 1$. Интегрируя теперь уравнение

$$y'^2 = 2(\cos y + 1),$$

получаем

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(1+\cos y)}} = x + C_2.$$

Очевидно, что соотношение

$$\frac{1}{2}\int_0^y \frac{dt}{\cos\frac{t}{2}} = x + \ln C_2 \quad (0 < y < \pi) \tag{2}$$

также есть частное решение данного уравнения. Выполнив интегрирование в левой части (2), находим

$$\ln\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\pi + y)\right) = x + \ln C_2,$$

или

$$y = \operatorname{arctg}(C_2 e^x) - \pi, \tag{3}$$

где $C_2 > 0$. Очевидно, что $y(x) \to \pi$ при $x \to +\infty$. ▶

Замечание. Решение (3) описывает физический процесс бесконечно долгого подъема математического маятника в свое наивысшее положение (при этом переменная x играет роль времени, а переменная y — роль угла поворота).

302. Определить форму равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепного моста). Весом самой нити пренебречь.

◀ Рассмотрим равновесие произвольного элемента нити длиной ΔS (рис. 25). Проектируя силы, действующие на выделенный элемент, на оси Ox, Oy, получаем уравнения

$$-T(x)\cos\alpha(x) + T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x) = 0,$$
$$-T(x)\sin\alpha(x) + T(x+\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x) - \Delta P = 0,$$

где $T(x)$ — величина натяжения нити в сечении x, $\alpha(x)$ — угол между касательной к нити и осью Ox, ΔP — вес элемента ΔS (или величина какой-либо распределенной нагрузки).

Из первого уравнения следует, что $T(x)\cos\alpha(x) = T_0 = \text{const}$, т. е. горизонтальная составляющая натяжения нити всегда имеет постоянную величину. Из второго уравнения находим, что

$$d(T(x)\sin\alpha(x)) = dP(x),$$

или

$$T_0\, d(\operatorname{tg}\alpha(x)) = dP(x), \quad T_0\, dy' = dP(x). \quad (1)$$

В данной задаче $dP(x) = k\,dx$, где k — коэффициент пропорциональности. Тогда из (1) следует уравнение $T_0\, dy' = k\,dx$, дважды интегрируя которое, получаем форму нити

$$y = \frac{k}{2T_0}x^2 + C_1x + C_2. \blacktriangleright$$

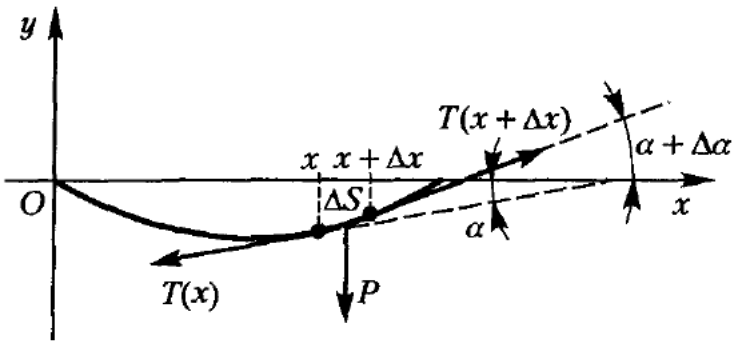


Рис. 25

303. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити (с закрепленными концами) под действием ее веса.

◄ Пользуясь уравнением (1) из предыдущей задачи и принимая во внимание соотношение

$$dP(x) = \rho g\, dS,$$

где ρg — вес единицы длины нити, $dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, получаем дифференциальное уравнение формы этой нити:

$$T_0y'' = \rho g\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{или} \quad \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = a^2, \quad a^2 = \frac{\rho g}{T_0}.$$

Так как

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \left(\ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)\right)',$$

то

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{a^2(x+C_1)},$$

откуда

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{a^2(x+C_1)} - e^{-a^2(x+C_1)}\right).$$

Проинтегрировав еще раз, получим

$$y = \frac{1}{2a^2}\left(e^{a^2(x+C_1)} + e^{-a^2(x+C_1)}\right) + C_2, \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{a^2}\operatorname{ch}(a^2x + C_1) + C_2. \blacktriangleright$$

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение.

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad (1)$$

где $a_i = \text{const}$ $(i = \overline{0, n})$, f — известная функция, называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Если f — непрерывная на сегменте функция, то общее решение уравнения (1) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения (1).

Алгебраическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

называется *характеристическим*, соответствующим однородному уравнению (1). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения (2). Каждому простому корню λ_k соответствует частное решение однородного уравнения (1), имеющее вид $y_k = e^{\lambda_k x}$, а каждому корню λ_r кратности l ($l \geqslant 2$) — решения $y_r = e^{\lambda_r x}$, $y_{r+1} = xe^{\lambda_r x}, \ldots, y_{r+l-1} = x^{l-1}e^{\lambda_r x}$. Произвольная линейная комбинация всех частных решений является общим решением однородного уравнения (1), т. е.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k. \tag{3}$$

3.2. Поиск частного решения линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, то частное решение уравнения (1) будет

$$\tilde{y} = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}, \tag{4}$$

где $s = 0$, если число γ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения (2), и s равно кратности l корня уравнения (2), если число γ с ним совпадает, $Q_m(x)$ — многочлен степени m. Для определения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ следует (4) подставить в (1) и приравнять выражения при одинаковых функциях.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_p(x)$, то частное решение уравнения (1) состоит из суммы частных решений $\tilde{y}_i$ неоднородных уравнений

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f_i(x) \quad (i = \overline{1, p}).$$

3.3. Метод вариации произвольных постоянных.

Если f — непрерывная на сегменте функция, то частное решение уравнения (1) можно найти, применив *метод вариации произвольных постоянных*, заключающийся в следующем. Пусть построено общее решение однородного уравнения (1), т. е. имеется выражение (3). Тогда для отыскания частного решения неоднородного уравнения (1) поступают следующим образом:

а) предполагают, что $C_k = C_k(x)$ — дифференцируемые функции;

б) частное решение ищут в виде

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k; \tag{5}$$

в) функции $C_k'(x)$ определяют из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(l)} = \frac{f(x)}{a_0}\delta_{n-1,l}, \quad l = \overline{0, n-1}, \tag{6}$$

где $\delta_{n-1,l}$ — символ Кронекера;

г) получив решения системы (6) $C_k'(x) = \varphi_k(x)$, интегрируют эти уравнения:

$$C_k(x) = \int \varphi(x)\,dx + \alpha_k, \tag{7}$$

где α_k — постоянные;

д) подставляют (7) в (5):

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\int \varphi_k(x)\,dx + \alpha_k \right). \tag{8}$$

Заметим, что формула (8) определяет также общее решение неоднородного уравнения (1).

3.4. Метод Коши нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $K(x, s)$ есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$K(x, s)|_{x=s} = K'_x(x, s)|_{x=s} = \ldots = K_x^{(n-2)}(x, s)|_{x=s} = 0, \quad K_x^{(n-1)}(x, s)|_{x=s} = 1. \tag{9}$$

Тогда, если функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$, $x \in [a, b]$, то

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\, ds \tag{10}$$

будет частным решением неоднородного уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Решение $K(x, s)$ называется *функцией влияния для задачи Коши.*

Найти общие решения однородных уравнений, а также частные решения там, где указаны начальные условия.

304. $y'' + y' - 2y = 0.$

◀ Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Его корни — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Корню λ_1 соответствует частное решение $y_1 = e^x$, а корню λ_2 — решение $y_2 = e^{-2x}$. Произвольная линейная комбинация этих решений есть общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \blacktriangleright$$

305. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, соответствующее данному дифференциальному, имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$, поэтому общее решение исходного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, продифференцируем общее решение. Получим $y' = 2C_2 e^{2x}$. Затем в выражения для общего решения и его производной вместо x, y, y' подставим их значения 0, 0, 2 соответственно. Имеем

$$C_1 + C_2 = 0, \quad 2C_2 = 2,$$

откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Искомое частное решение имеет вид

$$y = e^{2x} - 1. \blacktriangleright$$

306. $y''' - 8y = 0.$

◀ Из характеристического уравнения $\lambda^3 - 8 = 0$ находим его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Следовательно, общее решение есть произвольная линейная комбинация частных решений:

$$y = C_1 e^{2x} + \left(C_2 e^{i\sqrt{3}x} + C_3 e^{-i\sqrt{3}x}\right) e^{-x}. \tag{1}$$

Поскольку коэффициенты данного дифференциального уравнения действительны, то решение (1) можно представить в действительной форме, воспользовавшись формулами Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

Подставляя значения $e^{\pm i\sqrt{3}x} = \cos\sqrt{3}x \pm i\sin\sqrt{3}x$ в (1), получаем

$$y = C_1 e^{2x} + \left((C_2 + C_3)\cos\sqrt{3}x + i(C_2 - C_3)\sin\sqrt{3}x\right) e^{-x}. \tag{2}$$

Пусть $C_2 = \tilde{C}_2 + i\tilde{C}_3$, $C_3 = \tilde{C}_2 - i\tilde{C}_3$, где $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ — действительные произвольные постоянные. Тогда из (2) следует, что

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(\overline{C}_2 \cos\sqrt{3}x + \overline{C}_3 \sin\sqrt{3}x\right),$$

где $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$ — новые действительные произвольные постоянные. Мы получили общее решение в действительной форме. ▶

307. $y^{IV} + 4y = 0$.

◀ Корни характеристического уравнения $\lambda^4 + 4 = 0$ находим, пользуясь известной формулой, которая, применительно к рассматриваемому случаю, имеет вид

$$\lambda_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \quad k = \overline{0, 3}.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$, $\lambda_3 = -1+i$, $\lambda_4 = -1-i$. Тогда линейная комбинация

$$y = \left(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}\right) e^{x} + \left(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}\right) e^{-x} \tag{1}$$

является общим решением рассматриваемого дифференциального уравнения.

Так как коэффициенты дифференциального уравнения действительны, то решение (1) можно представить в действительной форме с помощью формул Эйлера $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ и положив $C_1 = \tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2$, $C_2 = \tilde{C}_1 - i\tilde{C}_2$, $C_3 = \tilde{C}_3 + i\tilde{C}_4$, $C_4 = \tilde{C}_3 - i\tilde{C}_4$, где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, $\tilde{C}_4$ — действительные произвольные постоянные. Тогда получим

$$y = (\overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x)e^{x} + (\overline{C}_3 \cos x + \overline{C}_4 \sin x)e^{-x},$$

где $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$, $\overline{C}_4$ — новые действительные произвольные постоянные. ▶

308. $y^{VI} + 64y = 0$.

◀ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^6 + 64 = 0$:

$$\lambda_k = \sqrt[6]{-64} = 2e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{6}}, \quad k = \overline{0, 5}.$$

После подстановки соответствующих значений k в формулу для λ_k имеем $\lambda_1 = \sqrt{3}+i$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}+i$, $\lambda_4 = -\sqrt{3}-i$, $\lambda_5 = -2i$, $\lambda_6 = \sqrt{3}-i$. Следовательно, общее решение в комплексной форме представится в виде

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} + \left(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}\right) e^{\sqrt{3}x} + \left(C_5 e^{ix} + C_6 e^{-ix}\right) e^{-\sqrt{3}x}.$$

Положив здесь $C_1 = \tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2$, $C_2 = \overline{C}_1$, $C_3 = \tilde{C}_3 + i\tilde{C}_4$, $C_4 = \overline{C}_3$, $C_5 = \tilde{C}_5 + i\tilde{C}_6$, $C_6 = \overline{C}_5$ и воспользовавшись формулами Эйлера, получаем общее решение в действительной форме

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)e^{\sqrt{3}x} + (C_5 \cos x + C_6 \sin x)e^{-\sqrt{3}x},$$

где C_i $(i = \overline{1, 6})$ — новые действительные произвольные постоянные. ▶

309. $y'' - 2y' + y = 0$.

◀ Из характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ находим его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Так как кратность корня равна двум, то согласно п. 3.1 частные решения данного дифференциального уравнения имеют вид:

$$y_1 = e^{x}, \quad y_2 = xe^{x}.$$

Следовательно,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$$

— общее решение. ▶

310. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

◀ Решив характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \equiv (\lambda^2 + 1)^2 = 0$, получим $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$. Согласно п. 3.1 записываем частные решения

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = xe^{ix}, \quad y_3 = e^{-ix}, \quad y_4 = xe^{-ix},$$

а затем и общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + x\left(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}\right).$$

Если положить $C_1 = \tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2$, $C_2 = \overline{C}_1$, $C_3 = \tilde{C}_3 + i\tilde{C}_4$, $C_4 = \overline{C}_3$, то придем к действительной форме общего решения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$

где C_i $(i = \overline{1, 4})$ — новые действительные произвольные постоянные. ▶

311. $y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16 \equiv (\lambda + 2)^4 = 0$ имеет корень $\lambda = -2$ кратности $l = 4$. Согласно п. 3.1, этому корню соответствуют четыре частных решения

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}, \quad y_3 = x^2e^{-2x}, \quad y_4 = x^3e^{-2x}.$$

Следовательно,

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{-2x}$$

— общее решение. ▶

312. $y^{VI} - 5y^V + 4y^{IV} = 0; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 0, \ y^V(0) = 2.$

◀ Составив характеристическое уравнение $\lambda^6 - 5\lambda^5 + 4\lambda^4 = 0$ и решив его, получим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 4$. Следовательно, общее решение представится в виде:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x + C_6e^{4x}.$$

Для определения постоянных C_i $(i = \overline{1, 6})$, соответствующих искомому частному решению, следует последовательно продифференцировать пять раз общее решение и воспользоваться начальными условиями. Тогда получим систему уравнений относительно указанных постоянных:

$$\begin{aligned} C_1 + C_5 + C_6 &= 0, & 6C_4 + C_5 + 64C_6 &= 0, \\ C_2 + C_5 + 4C_6 &= 0, & C_5 + 256C_6 &= 0, \\ 2C_3 + C_5 + 16C_6 &= 0, & C_5 + 1024C_6 &= 2. \end{aligned}$$

Отсюда находим $C_5 = -\frac{2}{3}$, $C_6 = \frac{1}{384}$, $C_1 = \frac{85}{128}$, $C_2 = \frac{21}{32}$, $C_3 = \frac{5}{16}$, $C_4 = \frac{1}{12}$. Таким образом,

$$y = \frac{85}{128} + \frac{21}{32}x + \frac{5}{16}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{384}e^{4x}$$

— искомое частное решение. ▶

313. $y^{VI} + 3y^{IV} = 0; \ y(0) = 1, \ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = y^V(0) = 0.$

◀ Из характеристического уравнения $\lambda^6 + 3\lambda^4 = 0$ находим его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = i\sqrt{3}$, $\lambda_6 = -i\sqrt{3}$. Согласно п. 3.1, записываем общее решение данного дифференциального уравнения

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5 \sin \sqrt{3}x + C_6 \cos \sqrt{3}x.$$

Аналогично проделанному в предыдущем примере составляем систему уравнений относительно постоянных C_i $(i = \overline{1, 6})$ и решаем ее. Тогда получим: $C_1 = 1$, $C_i = 0$ $(i = \overline{2, 6})$. Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y = 1. \ ▶$$

Найти общие решения неоднородных уравнений, а также частные решения там, где указаны начальные условия.

314. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}; \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

◀ Сначала находим общее решение однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, т. е. уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Так как корни его характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ есть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, то указанное общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Поскольку правая часть уравнения $f(x) = e^{4x}$ и число $\gamma = 4$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, то в соответствии с п. 3.2 частное решение данного неоднородного уравнения ищем в виде:

$$\tilde{y} = Q_0(x)e^{4x} \equiv a_0e^{4x}, \tag{1}$$

где a_0 — пока что неизвестная постоянная. Для определения a_0 подставим (1) в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получим тождество

$$5a_0e^{4x} \equiv e^{4x},$$

из которого находим $a_0 = \frac{1}{5}$. Следовательно, $\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{4x}$ и общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Подставив в общее решение, а также в производную от него, вместо x, y, y' значения 0, 1, 0 соответственно, получим систему уравнений относительно C_1, C_2:

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 1, \quad -C_1 + 3C_2 + \frac{4}{5} = 0.$$

Решив эту систему и подставив значения C_1, C_2 в общее решение, найдем искомое частное:

$$y = \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}. \blacktriangleright$$

315. $y'' - y = 2e^x - x^2$.

◀ Легко находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}. \tag{1}$$

Так как правая часть данного дифференциального уравнения есть сумма функций $f_1 + f_2$, имеющих вид $P_m(x)e^{\gamma x}$, то, согласно п. 3.2, частное решение также ищем в виде суммы частных решений следующих неоднородных уравнений:

$$y'' - y = 2e^x, \quad y'' - y = -x^2. \tag{2}$$

В силу того, что в первом уравнении $\gamma = 1$, а во втором $\gamma = 0$, согласно формуле (4), п. 3.2, частные решения этих уравнений ищем соответственно в виде:

$$\tilde{y}_1 = a_0xe^x, \quad \tilde{y}_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2, \tag{3}$$

где a_0, b_0, b_1, b_2 — пока что неизвестные коэффициенты. Для их определения подставим (3) в (2). Тогда получим тождества

$$2a_0e^x \equiv 2e^x, \quad 2b_0 - b_0x^2 - b_1x - b_2 \equiv -x^2,$$

из которых, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, находим:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 1, \quad -b_1 = 0, \quad 2b_0 - b_2 = 0 \quad \text{или} \quad b_2 = 2.$$

Следовательно, частное решение исходного неоднородного уравнения будет

$$y = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = xe^x + x^2 + 2.$$

Наконец, принимая во внимание (1), записываем и общее решение этого уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2. \blacktriangleright$$

316. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

◀ Сначала запишем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Далее, представляя правую часть исходного уравнения в виде

$$\sin x = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix},$$

замечаем, что $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = -i$. Поскольку $\gamma \neq \lambda$, то, согласно п. 3.2, частное решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1 = a_0 e^{ix}$, $\tilde{y}_2 = b_0 e^{-ix}$. Подставляя функцию $\tilde{y} = a_0 e^{ix} + b_0 e^{-ix}$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при e^{ix} и e^{-ix}, получаем

$$a_0 = \frac{3}{20} - \frac{i}{20}, \quad b_0 = \bar{a}_0 = \frac{3}{20} + \frac{i}{20}.$$

Таким образом, частное решение запишется в виде

$$\tilde{y} = a_0 e^{ix} + \bar{a}_0 e^{-ix} = (a_0 + \bar{a}_0)\cos x + i(a_0 - \bar{a}_0)\sin x = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

а общее — в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x. \blacktriangleright$$

Примечание. Если коэффициенты левой части уравнения действительны, а его правая часть имеет вид

$$e^{\gamma x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x), \tag{1}$$

то частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде

$$\tilde{y} = x^s \left(Q_p^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_p^{(2)}(x)\sin\beta x\right) e^{\gamma x}, \tag{2}$$

где $s = 0$, если $\gamma + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, и s равно кратности этого корня в противном случае, $p = \max\{m, n\}$.

Так, в рассмотренном примере $\gamma = 0$, $P_m(x) \equiv 0$, $Q_n(x) \equiv 1$, $p = 0$, $\beta = 1$, $\lambda_1 \neq \gamma + \beta i$, $\lambda_2 \neq \gamma + \beta i$. Следовательно, $s = 0$ и частное решение имеет вид $\tilde{y} = a_0\cos x + b_0\sin x$, где a_0, b_0 — подлежащие определению коэффициенты. Подставив $\tilde{y}$ в исходное дифференциальное уравнение, находим $a_0 = \frac{3}{10}$, $b_0 = \frac{1}{10}$.

317. $y'' + y = 4\sin x$.

◀ Для нахождения частного решения данного неоднородного уравнения воспользуемся примечанием к примеру 316. В нашем случае $\gamma = 0$, $P_m(x) \equiv 0$, $Q_n(x) \equiv 4$, $\beta = 1$, $p = 0$, $\lambda_1 = i = \gamma + \beta i$. Поэтому $s = 1$ и частное решение, согласно формуле (2) предыдущего примера, представится в виде

$$\tilde{y} = x(a_0\cos x + b_0\sin x). \tag{3}$$

Подставив (3) в исходное дифференциальное уравнение и приравняв коэффициенты при функциях $\sin x$, $\cos x$, находим $a_0 = -2$, $b_0 = 0$. Наконец, принимая во внимание общее решение соответствующего однородного уравнения, записываем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x - 2x\cos x. \blacktriangleright$$

Для каждого из данных уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами.

318. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x$.

◀ Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Далее, поскольку правая часть рассматриваемого уравнения есть сумма двух функций, то частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде суммы частных решений $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ соответствующих уравнений:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x, \quad y'' - 2y' + 2y = x\cos x. \tag{1}$$

Для построения частных решений $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ воспользуемся примечанием к примеру 316. В случае первого из уравнений (1) имеем $\gamma = 1$, $\beta = 0$, $P_m(x) \equiv 1$, $p = 0$. Так как $\gamma + \beta i \neq \lambda_1$, $\gamma + \beta i \neq \lambda_2$, то $s = 0$. Следовательно, согласно формуле (2) указанного примечания,

$$\tilde{y}_1 = C_0 e^x.$$

В случае второго уравнения (1) $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $P_m(x) \equiv x$, $Q_n(x) \equiv 0$, $p = 1$. Поскольку $\gamma + \beta i \neq \lambda_1$, $\gamma + \beta i \neq \lambda_2$, то $s = 0$. Таким образом, согласно формуле (2) из примечания после примера 316,

$$\tilde{y}_2 = (a_0 x + a_1)\cos x + (b_0 x + b_1)\sin x.$$

Итак, частное решение исходного дифференциального уравнения следует искать в виде

$$\tilde{y} = C_0 e^x + (a_0 x + a_1)\cos x + (b_0 x + b_1)\sin x. \blacktriangleright$$

319. $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x$.

◀ Прежде всего находим корни характеристического уравнения $\lambda^2+6\lambda+10=0$: $\lambda_{1,2}=-3\pm i$. Далее, пользуясь примечанием к примеру 316, строим частные решения, соответствующие уравнениям

$$y''+6y'+10y=3xe^{-3x},\quad y''+6y'+10y=-2e^{3x}\cos x. \tag{1}$$

В случае первого из уравнений (1) имеем $\gamma=-3$, $\beta=0$, $P_m(x)\equiv 3x$, $p=1$. Так как $\gamma+\beta i\neq\lambda_{1,2}$, то $s=0$. В случае второго уравнения (1) $\gamma=3$, $\beta=1$, $P_m(x)\equiv -2$, $Q_n(x)\equiv 0$, $p=0$. Далее, поскольку $\gamma+\beta i=3+i\neq\lambda_{1,2}$, то $s=0$.

Для первого из уравнений (1) частное решение имеет вид

$$\tilde{y}_1=(a_0x+a_1)e^{-3x},$$

а для второго —

$$\tilde{y}_2=(b_0\cos x+b_1\sin x)e^{3x}.$$

Сумма этих частных решений и есть искомое частное решение данного уравнения:

$$\tilde{y}=(a_0x+a_1)e^{-3x}+(b_0\cos x+b_1\sin x)e^{3x}.\ \blacktriangleright$$

320. $y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2$.

◀ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-8=0$: $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=\pm 2i$. По аналогии с проделанным в предыдущих примерах устанавливаем, что для каждого из двух уравнений

$$y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x,\quad y'''-2y''+4y'-8y=2x^2$$

имеем $s=0$. Кроме того, для первого из этих уравнений $\gamma=2$, $\beta=2$, $Q_n(x)\equiv 1$, $P_m(x)\equiv 0$, $p=0$, а для второго — $\gamma=0$, $\beta=0$, $P_m(x)=2x^2$, $p=2$. Следовательно,

$$\tilde{y}_1=(a_0\sin 2x+b_0\cos 2x)e^{2x},\quad \tilde{y}_2=C_0x^2+C_1x+C_2,$$
$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=(a_0\sin 2x+b_0\cos 2x)e^{2x}+C_0x^2+C_1x+C_2.\ \blacktriangleright$$

321. $y''-4y'+5y=e^{2x}\sin^2 x$.

◀ Определив корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2\pm i$ и записав правую часть уравнения в виде

$$e^{2x}\sin^2 x=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x,$$

аналогично проделанному выше получим $\tilde{y}_1=a_0e^{2x}$, $\tilde{y}_2=(b_0\cos 2x+b_1\sin 2x)e^{2x}$. Таким образом,

$$\tilde{y}=(a_0+b_0\cos 2x+b_1\sin 2x)e^{2x}.\ \blacktriangleright$$

322. $y^{IV}+5y''+4y=\sin x\cos 2x$.

◀ Так как $\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x$ и $\lambda_{1,2}=\pm 2i$, $\lambda_{3,4}=\pm i$, то, согласно примечанию к примеру 316, имеем $\tilde{y}_1=a_0\sin 3x+a_1\cos 3x$, $\tilde{y}_2=x(b_0\sin x+b_1\cos x)$, где $\tilde{y}_1$ — частное решение уравнения $y^{IV}+5y''+4y=\frac{1}{2}\sin 3x$, а $\tilde{y}_2$ — частное решение уравнения $y^{IV}+5y''+4y=-\frac{1}{2}\sin x$, причем в этом последнем случае $s=1$ в силу того, что $\gamma+\beta i=\lambda_3$. Следовательно,

$$\tilde{y}=a_0\sin 3x+a_1\cos 3x+x(b_0\sin x+b_1\cos x).\ \blacktriangleright$$

323. $y''-3y'+2y=2^x$.

◀ Поскольку $2^x=e^{x\ln 2}$ и $\lambda_1=1\neq\ln 2$, $\lambda_2=2\neq\ln 2$, то, согласно п. 3.2,

$$\tilde{y}=a_0e^{x\ln 2}=a_02^x.\ \blacktriangleright$$

324. $y^{IV}-4y'''+5y''=x^2\cos 2x+xe^x\sin 2x+e^{2x}\sin x$.

◀ Частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде суммы трех частных решений $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_3$, соответствующих дифференциальным уравнениям, левая часть которых совпадает с левой частью дифференциального уравнения в условии примера, а правые части — соответственно функции $f_1(x)=x^2\cos 2x$,

$f_2(x) = xe^x \sin 2x$, $f_3(x) = e^{2x} \sin x$. Поскольку характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm i$, то, согласно примечанию к примеру 316, имеем

$$\tilde{y}_1 = (a_0x^2 + a_1x + a_2)\cos 2x + (b_0x^2 + b_1x + b_2)\sin 2x,$$

$$\tilde{y}_2 = \left((c_0x + c_1)\sin 2x + (d_0x + d_1)\cos 2x\right)e^x,$$

$$\tilde{y}_3 = x(\alpha_0 \sin x + \alpha_1 \cos x)e^{2x}.$$

Заметим, что только в последнем случае $\gamma + \beta i = \lambda_3$, т. е. $s = 1$. ▶

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения.

325. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

◀ Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Затем, предположив, что $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, подбираем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы функция

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \tag{1}$$

была решением неоднородного уравнения. Эффективно такой подбор функций осуществляется с помощью системы уравнений (6), п. 3.3:

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \quad C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x(x + 1) = \frac{e^x}{x}.$$

Отсюда находим $C_1'(x) = -1$, $C_2'(x) = \frac{1}{x}$. Интегрируя полученные уравнения, имеем $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|x| + C_2$, где C_1, C_2 — новые произвольные постоянные. Подставив найденные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (1), окончательно получаем:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + xe^x \ln|x|. \blacktriangleright$$

326. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

◀ Легко находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Согласно п. 3.3, общее решение неоднородного уравнения записывается в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$, а производные функций C_1 и C_2 определяются из системы уравнений

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \quad C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

Решив эту алгебраическую систему, получим:

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)e^{-x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)e^x.$$

Интегрируя последние соотношения, находим

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx + C_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)e^x\,dx + C_2,$$

где C_1, C_2 — новые произвольные постоянные.

Дважды интегрируя по частям, получим

$$C_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + C_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}e^x\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + C_2.$$

Подставив значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу для общего решения неоднородного уравнения, имеем:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{x}. \blacktriangleright$$

Применяя различные методы, решить уравнения.

327. $y'' + 2y' + y = \cos ix$.

◀ Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Поскольку $\cos ix = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ и корень характеристического уравнения $\lambda = -1$ двукратный, то, согласно п. 3.2, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = ae^{x} + bx^2 e^{-x}.$$

Подставив $\tilde{y}$ в данное уравнение, получаем тождество относительно x, из которого следует, что $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$y = \frac{1}{8}e^{x} + \frac{x^2}{4}e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

есть общее решение исходного уравнения. ▶

328. $y'' + 2iy = 8e^{x}\sin x$.

◀ Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 + 2i = 0$ имеет корни

$$\lambda_k = \sqrt{-2i} = \sqrt{2}e^{\frac{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}{2}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k = 0,\ 1,$$

т. е. $\lambda_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$, $\lambda_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения описывается формулой

$$y = C_1 e^{(1-i)x} + C_2 e^{(-1+i)x}.$$

Для получения частного решения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Поскольку $8e^{x}\sin x = \frac{4}{i}e^{(1+i)x} - \frac{4}{i}e^{(1-i)x}$, то, согласно п. 3.2, частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = ae^{(1+i)x} + bxe^{(1-i)x} \tag{1}$$

(заметим, что множитель x во втором слагаемом в (1) появился в связи с тем, что корень λ_0 совпадает с числом $1 - i$). Подставляя (1) в исходное уравнение, получаем тождество относительно x, из которого определяем $a = -1$, $b = -1 + i$.

Таким образом,

$$y = \left(C_1 + (i-1)x\right)e^{(1-i)x} + C_2 e^{(i-1)x} - e^{(1+i)x}$$

— общее решение неоднородного уравнения. ▶

329. $y'' + 2iy' - y = 8\operatorname{ch} ix$.

◀ Общее решение однородного уравнения есть функция

$$y = C_1 e^{-ix} + C_2 x e^{-ix}.$$

Так как $8\operatorname{ch} ix = 4e^{ix} + 4e^{-ix}$, то для нахождения частного решения неоднородного уравнения удобно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. В силу того, что $\lambda = -i$ — двукратный корень характеристического уравнения, согласно п. 3.2 частное решение ищем в виде:

$$\tilde{y} = ae^{ix} + bx^2 e^{-ix}.$$

Подставив $\tilde{y}$ в данное уравнение и приравняв коэффициенты при e^{ix} и e^{-ix}, получаем $a = -1$, $b = 2$. Следовательно,

$$y = \left(C_1 + C_2 x + 2x^2\right)e^{-ix} - e^{ix}$$

есть общее решение исходного уравнения. ▶

330. $y'' + \omega^2 y = \dfrac{1}{x+1}$; $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$.

◀ Решив известным способом соответствующее однородное уравнение, имеем $y = C_1\sin\omega x + C_2\cos\omega x$. Для получения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом Коши. Согласно п. 3.4 можем записать:

$$K(x, s) = C_1(s)\sin\omega x + C_2(s)\cos\omega x,$$

причем $K(x, s)|_{x=s} = 0$, $K'_x(x, s)|_{x=s} = 1$ (в данном случае $n = 2$). Следовательно,

$$C_1(s)\sin\omega s + C_2(s)\cos\omega s = 0, \quad C_1(s)\cos\omega s - C_2(s)\sin\omega s = \frac{1}{\omega} \quad (\omega \neq 0).$$

Из последних двух уравнений находим $C_1(s) = \frac{\cos\omega s}{\omega}$, $C_2(s) = -\frac{\sin\omega s}{\omega}$. Тогда

$$K(x, s) = \frac{1}{\omega}\sin\omega(x - s).$$

Функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ непрерывна при $x \neq -1$, поэтому справедлива формула (10), п. 3.4:

$$y(x) = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} \frac{\sin\omega(x-s)}{s+1}\,ds, \tag{1}$$

где $x_0 \in [a, b]$, $x \in [a, b]$ и $-1 \notin [a, b]$; a, b — произвольные числа.

Приняв во внимание частное решение (1), записываем общее решение:

$$y = C_1\sin\omega x + C_2\cos\omega x + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} \frac{\sin\omega(x-s)}{s+1}\,ds. \tag{2}$$

Теперь, исходя из общего решения, построим частное решение, удовлетворяющее заданным начальном условиям.

Дифференцируя (2), получаем

$$y'(x) = \omega(C_1\cos\omega x - C_2\sin\omega x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\cos\omega(x-s)}{s+1}\,ds. \tag{3}$$

Полагая в (2) и (3) $x = x_0 = 1$ и принимая во внимание начальные условия, имеем

$$2 = C_1\sin\omega + C_2\cos\omega, \quad -3 = \omega(C_1\cos\omega - C_2\sin\omega),$$

откуда $C_1 = 2\sin\omega - \frac{3}{\omega}\cos\omega$, $C_2 = 2\cos\omega + \frac{3}{\omega}\sin\omega$. Подставив значения C_1 и C_2 в (2) и взяв $x_0 = 1$, окончательно находим

$$y = 2\cos\omega(x-1) - \frac{3}{\omega}\sin\omega(x-1) + \frac{1}{\omega}\int_{1}^{x} \frac{\sin\omega(x-s)}{s+1}\,ds. \blacktriangleright$$

331. $y'' + y = f(x)$.

Какие условия достаточно наложить на функцию f, чтобы все решения этого уравнения оставались ограниченными при $x \to +\infty$?

◀ Применив метод вариации произвольных постоянных $C_1(x)$ и $C_2(x)$, входящих в общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x, \tag{1}$$

получим систему

$$C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = 0, \quad C'_1(x)\cos x - C'_2(x)\sin x = f(x),$$

из которой следует, что $C'_1(x) = f(x)\cos x$, $C'_2(x) = -f(x)\sin x$. Интегрируя, будем иметь

$$C_1(x) = \int f(x)\cos x\,dx + C_1, \quad C_2(x) = -\int f(x)\sin x\,dx + C_2. \tag{2}$$

Предположим, что имеют смысл выражения

$$\alpha(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\cos s\,ds, \quad \beta(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\sin s\,ds$$

при любых фиксированных $x > x_0$. Тогда, как следует из (2) и (1), общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \int_{x_0}^{x} f(s) \sin(x-s)\, ds \equiv C_1 \sin x + C_2 \cos x + \alpha(x) \sin x + \beta(x) \cos x =$$

$$= (C_1 + \alpha(x)) \sin x + (C_2 + \beta(x)) \cos x = A(x) \cos(x - \varphi(x)),$$

где

$$A(x) = \sqrt{(C_1 + \alpha(x))^2 + (C_2 + \beta(x))^2}, \quad \sin\varphi(x) = \frac{C_1 + \alpha(x)}{A(x)}, \quad \cos\varphi(x) = \frac{C_2 + \beta(x)}{A(x)}, \quad A(x) \neq 0.$$

Отсюда следует, что для ограниченности решений $y(x)$ при $x \to +\infty$ достаточно потребовать ограниченности функции A (амплитуды) при $x \to +\infty$, т. е. ограниченности функций α и β при $x \to +\infty$. ▶

Построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

332. $y_1 = x^2 e^x$.

◀ Дифференцируя последовательно функцию y_1, получаем:

$$y_1' = x^2 e^x + 2x e^x = y_1 + 2x e^x;$$
$$y_1'' = y_1' + 2e^x + 2x e^x = y_1' + 2e^x + (y_1' - y_1) = 2y_1' - y_1 + 2e^x;$$
$$y_1''' = 2y_1'' - y_1' + 2e^x.$$

Исключив из последних двух соотношений $2e^x$, окончательно имеем

$$y_1''' - 3y_1'' + 3y_1' - y_1 = 0.$$

Заметим, что получить дифференциальное уравнение более низкого порядка нельзя, так как частное решение $y_1 = x^2 e^x$ порождается корнем характеристического уравнения кратности $l = 3$. ▶

333. $y_1 = x e^x$, $y_2 = e^{-x}$.

◀ Частное решение y_1 порождается двукратным корнем $\lambda_1 = 1$ характеристического уравнения, а частное решение y_2 — корнем $\lambda_2 = -1$. Поскольку корни известны, то легко записать и само уравнение:

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Ясно, что такому характеристическому уравнению соответствует дифференциальное уравнение

$$y''' - y'' - y' + y = 0. \blacktriangleright$$

334. $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$.

◀ Так как $x = x e^{0x}$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, то данные решения порождены корнями некоторого характеристического уравнения: $\lambda_1 = 0$ (двукратный корень), $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ соответственно. Следовательно,

$$\lambda^2(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

есть характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному

$$y^{IV} + y'' = 0. \blacktriangleright$$

335. $y_1 = x e^x \cos 2x$.

◀ Поскольку $x e^x \cos 2x = \frac{1}{2} x e^{(1+2i)x} + \frac{1}{2} x e^{(1-2i)x}$, то данное частное решение порождено двукратными комплексно-сопряженными корнями $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ некоторого характеристического уравнения. Оно имеет вид

$$(\lambda - 1 - 2i)^2(\lambda - 1 + 2i)^2 = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = 0.$$

Остается записать требуемое дифференциальное уравнение:

$$y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25 = 0. \blacktriangleright$$

336. При каких a и b все решения уравнения $y''+ay'+by=0$ ограничены на всей числовой оси $-\infty<x<+\infty$?

◀ Прежде всего находим корни характеристического уравнения $\lambda^2+a\lambda+b=0$. Имеем $\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$. Далее рассмотрим различные случаи представления всех решений.

Если $a^2=4b$, то общим решением будет

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{2}x}. \tag{1}$$

Если же $a^2\neq 4b$, то общее решение принимает вид

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что каким бы ни было число a (действительным или комплексным), все решения y ограниченными быть не могут. Действительно, если $\operatorname{Re}a>0$, то функция y не ограничена при $x<0$; если $\operatorname{Re}a<0$, то функция y не ограничена при $x>0$; если $\operatorname{Re}a=0$, то неограниченность функции y также очевидна.

Теперь рассмотрим решения, представленные формулой (2). Пусть $\operatorname{Re}\lambda_1<0$ или $\operatorname{Re}\lambda_2<0$. Тогда решения (2) не все ограничены при $x<0$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_1>0$ или $\operatorname{Re}\lambda_2>0$. Тогда не все решения (2) ограничены при $x>0$. Наконец, если $\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2=0$, т. е. если $\lambda_1=i\gamma_1$, $\lambda_2=i\gamma_2$ ($\gamma_1\neq\gamma_2$), то все решения при всех $x\in(-\infty,+\infty)$ будут ограничены. Действительно, в этом случае все решения представляются в виде произвольной линейной комбинации ограниченных функций $\sin\gamma_1x$, $\cos\gamma_1x$, $\sin\gamma_2x$, $\cos\gamma_2x$.

Итак, для ограниченности всех решений имеем условия:

$$-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=i\gamma_1,\quad -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=i\gamma_2\quad(\gamma_1\neq\gamma_2),$$

откуда находим

$$a=-i(\gamma_1+\gamma_2),\quad b=-\gamma_1\gamma_2,$$

где γ_1 и γ_2 — любые отличные друг от друга действительные числа. В частности, если a — действительный параметр, т. е. $\gamma_1=-\gamma_2$, то все решения будут ограничены при $b>0$ ($a=0$). ▶

337. При каких a и b все решения уравнения $y''+ay'+by=0$ стремятся к нулю при $x\to+\infty$?

◀ Воспользуемся представлениями (1) и (2) всех решений из предыдущего примера. В случае (1) все решения стремятся к нулю при $x\to+\infty$, если $\operatorname{Re}a>0$. В случае (2) все решения стремятся к нулю при $x\to+\infty$, если $\operatorname{Re}\lambda_1<0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2<0$ одновременно.

В частности, если a и b — действительные параметры, то в случае (1) все решения стремятся к нулю при $x\to+\infty$, когда $a>0$ ($b=\frac{a^2}{4}>0$). Эти же условия ($a>0$, $b>0$) пригодны и в случае (2). Действительно, если $b<0$, то один из корней λ_1 или λ_2 независимо от a будет положительным, т. е. e^{λ_1x} или $e^{\lambda_2x}\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Если $b=0$, то уравнение имеет решение $y=C\neq 0$, которое не стремится к нулю. Таким образом, необходимо, чтобы b было положительным. Пусть $b>0$ и $a\leqslant 0$. Тогда действительная часть одного из корней (λ_1 или λ_2) обязательно будет неотрицательной, следовательно, e^{λ_1x} или e^{λ_2x} не будет стремиться к нулю при $x\to+\infty$. Остается рассмотреть случай, когда $a>0$ и $b>0$ одновременно. Если $0<b\leqslant\frac{a^2}{4}$, то оба корня λ_1 и λ_2 отрицательны, поэтому $y\to 0$ при $x\to+\infty$. Если $b>\frac{a^2}{4}$, то корни λ_1, λ_2 комплексно сопряженные и имеют отрицательную действительную часть, поэтому $y\to 0$ при $x\to+\infty$. ▶

338. При каких действительных a и b каждое решение уравнения $y''+ay'+by=0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек x?

◀ Исходим из представления решений (1) и (2) уравнения из примера 336. Ясно, что формула (1) не определяет колеблющихся решений, которые при некотором a обращались бы в нуль на бесконечном множестве точек x.

Рассмотрим решения (2). Если λ_1 и λ_2 — действительные корни, то, как известно, сумма двух экспоненциальных функций может обратиться в нуль только в конечном числе точек x. Пусть

$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, т. е. $4b > a^2$. Тогда

$$y = \left(C_1 \cos\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\, x + C_2 \sin\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\, x\right) e^{-\frac{a}{2}x} = A\cos\left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\, x - \varphi\right) e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Как видим, все решения (при произвольных значениях A и φ) в этом случае обращаются в нуль на бесконечном множестве точек $\{x_k\}$, где

$$x_k = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi + \varphi}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \quad (k \in \mathbb{Z}). \blacktriangleright$$

339. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

◀ Мы должны найти такие значения параметров a и b, чтобы при всех значениях C_1 и C_2 (произвольных постоянных в решениях (1) или (2) уравнения из примера 336) выполнялось условие:

$$\lim_{x\to+\infty} (y(x)e^x) = 0. \tag{1}$$

Если $a^2 = 4b$, то согласно (1) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \left((C_1 + C_2 x)e^{(1-\frac{a}{2})x}\right) = 0.$$

Ясно, что это соотношение может выполняться для произвольных C_1 и C_2 только при условии $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{a}{2}\right) < 0$, или $\operatorname{Re} a > 2$.

В случае, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, условие (1) принимает вид:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(C_1 e^{(\lambda_1+1)x} + C_2 e^{(\lambda_2+1)x}\right) = 0,$$

которое для произвольных C_1 и C_2 эквивалентно соотношениям

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(\lambda_1+1)x} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{(\lambda_2+1)x} = 0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что последнее возможно лишь в случае, когда одновременно выполняются неравенства $\operatorname{Re}(\lambda_1 + 1) < 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_2 + 1) < 0$.

Если a и b — действительные параметры, то последние неравенства можно записать более конкретно.

Пусть $b < \frac{a^2}{4}$. Тогда λ_1 и λ_2 — действительные корни и если $\lambda_1 < 0$, то и $\lambda_2 < 0$. Следовательно, имеем два условия:

$$b < \frac{a^2}{4}, \quad -\frac{a}{2} + 1 + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} < 0, \tag{3}$$

при которых выполняются соотношения (2). Решив совместно неравенства (3), получаем следующее условие выполнения соотношения (1):

$$a > 2, \quad a - 1 < b < \frac{a^2}{4}.$$

Пусть $b > \frac{a^2}{4}$. Тогда $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ и соотношения (2) будут выполнены, если $-\frac{a}{2} + 1 < 0$, или $a > 2$.

Таким образом, если a и b действительные параметры, то указанное в условии задачи соотношение выполняется при $a > 2$ и $b > a - 1$, т. е. при $2 < a < b + 1$. ▶

340. Для заданного $b > 0$ подобрать такое a, при котором решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ возможно быстрее стремится к нулю при $x \to +\infty$.

◀ Рассмотрим три случая. Пусть $b = \frac{a^2}{4}$. Тогда решение задачи имеет вид:

$$y_1 = \left(1 + \frac{ax}{2}\right) e^{-\frac{ax}{2}}. \tag{1}$$

Ясно, что a должно быть положительным, иначе y_1 не будет стремиться к нулю при $x \to +\infty$. Следовательно, $a = 2\sqrt{b}$.

Далее, пусть $a > 2\sqrt{b}$. Тогда задача имеет решение

$$y_2 = \left(-\lambda_2 e^{\omega x} + \lambda_1 e^{-\omega x}\right)\frac{1}{2\omega} e^{-\frac{ax}{2}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \tag{2}$$

Наконец, если $0 < a < 2\sqrt{b}$, то

$$y_3 = \left(\frac{a}{2\omega_1}\sin\omega_1 x + \cos\omega_1 x\right) e^{-\frac{ax}{2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}. \tag{3}$$

Остается сравнить решения (1), (2), (3) при достаточно больших $x > 0$. Пусть $x \to +\infty$. Тогда для решений (1), (2), (3) соответственно имеем асимптотические формулы

$$y_1 = O\left(xe^{-x\sqrt{b}}\right), \quad y_2 = O\left(e^{(\omega - \frac{a}{2})x}\right), \quad y_3 = O\left(e^{-\frac{ax}{2}}\right). \tag{4}$$

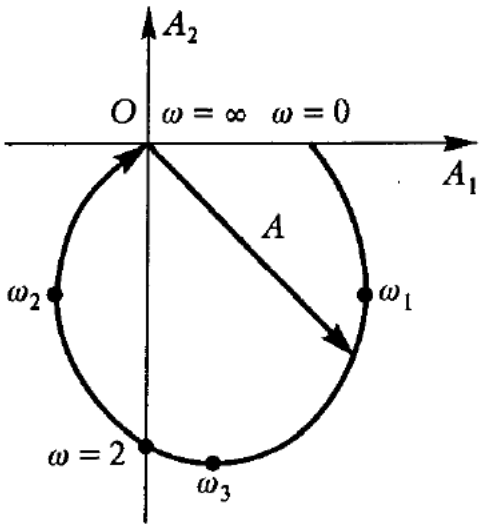


Рис. 26

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x\sqrt{b}}}{e^{-\frac{ax}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x\left(\sqrt{b}-\frac{a}{2}\right)} = 0 \quad \text{при} \quad a < 2\sqrt{b},$$

то $xe^{-x\sqrt{b}} \to 0$ быстрее, чем $e^{-\frac{ax}{2}}$. Далее, в силу того, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x\sqrt{b}}}{e^{\left(\omega-\frac{a}{2}\right)x}} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x\left(\sqrt{b}+\omega-\frac{a}{2}\right)} = 0 \quad \text{при} \quad a > 2\sqrt{b},$$

то $xe^{-x\sqrt{b}} \to 0$ также быстрее, чем $e^{\left(\omega-\frac{a}{2}\right)x}$. Таким образом, из (4) следует, что решение (1), полученное при $a = 2\sqrt{b}$, стремится к нулю при $x \to +\infty$ быстрее остальных решений. ▶

341. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{i\omega t}$ и на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ начертить кривую, которую пробегает амплитудный множитель этого решения при изменении ω от 0 до $+\infty$.

◀ Заметим, что обозначения $\dot{x}$, $\ddot{x}$ используются в механике и имеют смысл первой и второй производной по времени.

Поскольку характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, то среди решений однородного уравнения нет периодического решения, отличного от тождественного нуля. Далее, так как $i\omega \neq -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, то частное решение ищем в виде $x = Ae^{i\omega t}$. Имеем:

$$A = \frac{1}{4 + i\omega - \omega^2}, \quad x = \frac{e^{i\omega t}}{4 + i\omega - \omega^2}.$$

Отделяя действительную и мнимую части, для множителя A получаем выражение

$$A = A_1 + iA_2,$$

где $A_1 = \frac{4 - \omega^2}{(4-\omega^2)^2 + \omega^2}$, $A_2 = -\frac{\omega}{(4-\omega^2)^2 + \omega^2}$, $|A| = \frac{1}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + \omega^2}}$, $0 < \omega < +\infty$.

Исследуя обычным способом функции A_1, A_2 и $|A|$ на экстремум, находим: $A_{1\max} = \frac{1}{3}$ при $\omega_1 = \sqrt{2}$ и $A_{1\min} = -\frac{1}{5}$ при $\omega_2 = \sqrt{6}$; $A_{2\min} \approx -0{,}5$ при $\omega_3 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{241}}{6}} \approx 1{,}94$; $|A|_{\max} \approx 0{,}51$ при $\omega = \sqrt{3{,}5}$.

Вычисляя еще $A_2(\omega_1) \approx -0{,}23$, $A_2(\omega_2) \approx -0{,}22$, $A_1(\omega_3) \approx 0{,}1$, $\lim\limits_{\omega\to+0} A_1 = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty} A_1 = 0$, $\lim\limits_{\omega\to+0} A_2 = 0$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty} A_2 = 0$, получаем необходимые данные для построения эскиза графика кривой на плоскости $\mathbb{C}$ (рис. 26). ▶

342. Дано уравнение $y''+ay'+by=f(x)$, причем $|f(x)|\leqslant m$ $(-\infty<x<\infty)$, а корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $\lambda_2<\lambda_1<0$. Найти решение, ограниченное при $-\infty<x<+\infty$. Показать, что:

а) все остальные решения при $x\to+\infty$ неограниченно приближаются к этому решению;

б) если f периодическая функция, то решение также периодическое.

◀Исходя из общего решения однородного уравнения

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

и применяя метод вариации произвольных постоянных C_1 и C_2, для общего решения неоднородного уравнения получим выражение

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\frac{e^{\lambda_1x}}{\lambda_1-\lambda_2}\int f(x)e^{-\lambda_1x}\,dx-\frac{e^{\lambda_2x}}{\lambda_1-\lambda_2}\int f(x)e^{-\lambda_2x}\,dx. \tag{1}$$

Так как несобственные интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{x}f(s)e^{-\lambda_1s}\,ds,\quad \int\limits_{-\infty}^{x}f(s)e^{-\lambda_2s}\,ds$$

сходятся абсолютно в силу оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\left|f(s)e^{-\lambda_1s}\right|\,ds\leqslant m\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\lambda_1s}\,ds,$$

то решение (1) можно записать более компактно:

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f(s)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{\lambda_1(x-s)}-e^{\lambda_2(x-s)}\right)ds=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\int\limits_{0}^{+\infty}f(x-t)\,\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt. \tag{2}$$

Далее, поскольку справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{0}^{+\infty}f(x-t)\,\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt\right|\leqslant m\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt=\frac{m}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{m}{b},$$

то из (2) следует, что частное решение данного уравнения, ограниченное при $x\in(-\infty,+\infty)$, имеет вид

$$y=\int\limits_{0}^{+\infty}f(x-t)\,\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt. \tag{3}$$

Ясно, что $C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\to0$ при $x\to+\infty$, поэтому из (2) вытекает, что все решения стремятся к частному решению (3) при $x\to+\infty$. Наконец, полагая в (3) $x+T$ вместо x, где T — период функции f, получаем

$$y(x+T)=\int\limits_{0}^{+\infty}f(x+T-t)\,\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt=\int\limits_{0}^{+\infty}f(x-t)\,\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,dt=y(x).$$

Следовательно, функция y также T-периодическая. ▶

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

4.1. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейно зависимые функции. Определитель Вронского.

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=\varphi(x), \tag{1}$$

где φ, a_i $(i = \overline{0, n})$ — известные функции. Если $y_1(x)$ — частное решение уравнения (1) при $\varphi \equiv 0$, то посредством замены $y = y_1 z(x)$, $z'(x) = u(x)$ порядок уравнения (1) при $\varphi \equiv 0$ можно понизить. Функции y_i $(i = \overline{1, n})$ называются *линейно зависимыми* на сегменте $[a, b]$, если существуют такие постоянные α_i $(i = \overline{1, n})$, одновременно не равные нулю, что на $[a, b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0. \tag{2}$$

Если тождество (2) справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то указанные функции называются *линейно независимыми* на сегменте $[a, b]$.

Определитель

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3}$$

называется *определителем Вронского.*

4.2. Критерий линейной независимости функций.

Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на сегменте $[a, b]$, то $W(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = 0, \tag{4}$$

где P_j $(j = \overline{1, n})$ непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции, то $W(x) \neq 0$ на $[a, b]$.

Общее решение уравнения (4) при $x \in [a, b]$ есть линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ линейно независимых частных решений y_i этого уравнения.

4.3. Фундаментальная система решений.

Совокупность n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка называется его *фундаментальной системой*. Фундаментальная система решений вполне определяет линейное однородное уравнение (4). Такое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

4.4. Формула Остроградского—Лиувилля.

Если в (3) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (4), то для определителя Вронского справедлива *формула Остроградского—Лиувилля*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P_1(t)\, dt \right), \tag{6}$$

где $x_0 \in [a, b]$, $x \in [a, b]$.

4.5. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

Если известно общее решение однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения с непрерывной на $[a, b]$ правой частью можно найти, применяя метод вариации произвольных постоянных (см. § 3).

4.6. Уравнение Эйлера. Уравнение Чебышева.

Дифференциальное уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0$$

называется *уравнением Эйлера*. С помощью замены $ax+b = \pm e^t$ его можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами. При $a=1$, $b=0$ уравнение Эйлера переходит в уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

которое также называют уравнением Эйлера.

Уравнение

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

называется *уравнением Чебышева*. Заменив аргумент x по формуле $x = \cos t$, получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

4.7. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Среди уравнений высших порядков, часто встречающихся в приложениях, важное место занимают *дифференциальные уравнения второго порядка*

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \tag{7}$$

где P_1 и P_2 — непрерывные на (a, b) функции. С помощью замены

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx\right) Z(x)$$

его можно привести к *каноническому виду*

$$\frac{d^2z}{dx^2} + J(x)z = 0, \tag{8}$$

где

$$J(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}P_1'(x) - \frac{1}{4}P_1^2(x).$$

При этом считают, что $P_1 \in C^1(a, b)$. Функция J называется *инвариантом* уравнения (7).

Любое уравнение второго порядка

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{9}$$

с непрерывными на (a, b) коэффициентами можно привести к так называемой *самосопряженной форме*

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0 \tag{10}$$

путем почленного умножения уравнения (9) на функцию α, где

$$\alpha(x) = \frac{1}{P_0(x)} \exp\left(\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\,dx\right). \tag{11}$$

4.8. Связь между линейным дифференциальным уравнением второго порядка и уравнением Эйлера—Риккати.

Если в (7) положим $y' = yz(x)$, то получим уравнение Эйлера—Риккати

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 - P_1(x)z - P_2(x). \tag{12}$$

Обратно, уравнение Эйлера—Риккати

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

с помощью замены

$$y = -\frac{u'}{uR(x)} \tag{13}$$

можно привести к линейному уравнению второго порядка.

4.9. Сведение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами.

Иногда уравнение (7) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Если такое сведение возможно, то только с помощью замены

$$t = a\int \sqrt{P_2(x)}\,dx, \tag{14}$$

где t — новый аргумент.

4.10. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений второго порядка.

Если $|f(t)| \leqslant \frac{C}{t^{1+\alpha}}$ при $t_0 \leqslant t < +\infty$, $C > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные, то дифференциальное уравнение

$$y'' + (1 + f(t))y = 0$$

имеет два линейно независимых решения

$$y_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad y_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

а уравнение

$$y'' - (1 - f(t))y = 0$$

— решения

$$y_1(t) = e^t\left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \; y_2(t) = e^{-t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми.

343. $y_1 = x + 2$, $y_2 = x - 2$.

◀ Согласно определению линейной зависимости функций (см. п. 4.1) должны найтись такие числа α_1 и α_2, одновременно не равные нулю, что выполняется тождество относительно x:

$$\alpha_1(x + 2) + \alpha_2(x - 2) \equiv 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда (если такое тождество выполняется) следуют равенства

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

или $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следовательно, функции y_1 и y_2 линейно независимые. ▶

344. $y_1 = 6x + 9$, $y_2 = 8x + 12$.

◀ Пользуясь определением линейной зависимости функций, можем написать:

$$\alpha_1(6x + 9) + \alpha_2(8x + 12) \equiv 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда $6\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0$, $9\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0$. Фактически получили одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому, положив, например, $\alpha_1 = -1$, найдем $\alpha_2 = \frac{3}{4}$. Таким образом, согласно определению, данная система функций линейно зависимая. ▶

345. $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$.

◀ По аналогии с предыдущим составляем тождество по $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\alpha_1(x^2 - x + 3) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(2x - 4) \equiv 0,$$

из которого следует, что должны выполняться равенства

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \quad -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \quad 3\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0.$$

Легко убедиться, что третье уравнение системы является следствием первых двух. Поэтому положив, например, $\alpha_1 = 4$, для α_2 и α_3 получим $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 3$. По определению система функций y_1, y_2, y_3 линейно зависима на числовой прямой. ▶

346. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = xe^x$.

◀ Положив в тождестве по x

$$\alpha_1 x + \alpha_2 e^x + \alpha_3 x e^x \equiv 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$x = 0$, получаем $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 x + \alpha_3 x e^x \equiv 0$ или $\alpha_1 + \alpha_3 e^x \equiv 0$ $(x \neq 0)$. Отсюда следует, что $e^x \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \text{const}$, если $\alpha_3 \neq 0$. Но это, очевидно, невозможно. Если же $\alpha_3 = 0$, то и $\alpha_1 = 0$. Таким образом, система функций y_1, y_2, y_3 при $x \in (-\infty, +\infty)$ линейно независимая. ▶

347. $\ln x^2$, $\ln 3x$, 7.

◀ Из тождества по $x \in (0, +\infty)$:

$$\alpha_1 \ln x^2 + \alpha_2 \ln 3x + 7\alpha_3 \equiv 0,$$

которое можно представить в виде

$$(2\alpha_1 + \alpha_2)\ln x + \alpha_2 \ln 3 + 7\alpha_3 \equiv 0,$$

следует, что $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_2 \ln 3 + 7\alpha_3 \equiv 0$. Положив, например, $\alpha_3 = -\ln 3$, из последних уравнений получаем $\alpha_2 = 7$, $\alpha_1 = -3,5$. Следовательно, данная система функций линейно зависимая при $x > 0$. ▶

348. $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

◀ Составим определитель Вронского для этой системы функций. Имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 3\sin 2x \not\equiv 0.$$

Следовательно, согласно п. 4.2, данные функции линейно независимые (если бы они были линейно зависимыми, то выполнялось бы тождество $W(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$). ▶

349. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+2}$.

◀ Предположим, что выполняется тождество по $x \geqslant 0$:

$$\alpha_1\sqrt{x} + \alpha_2\sqrt{x+1} + \alpha_3\sqrt{x+2} \equiv 0$$

при некоторых α_1, α_2, α_3, одновременно не равных нулю. Тогда, положив в нем последовательно $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, получим систему

$$\alpha_2 + \alpha_3\sqrt{2} = 0, \quad \alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_3 = 0, \quad \sqrt{2}\alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$

Так как определитель этой однородной системы не равен нулю, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Полученное противоречие показывает, что данная система функций линейно независимая при $x \geqslant 0$. ▶

350. x, $|x|$, $2x + \sqrt{4x^2}$.

◀ Из тождества

$$\alpha_1 x + \alpha_2|x| + \alpha_3(2x + 2|x|) \equiv 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

следует, что $\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$. Положив в полученных уравнениях, например, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$, получим $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Это означает, что предложенная система функций линейно зависимая. ▶

351. Являются ли линейно зависимыми на сегменте $[a, b]$ функции, графики которых изображены на рис. 27?

◀ Предположим, что справедливо тождество по $x \in [a, b]$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) \equiv 0, \qquad (1)$$

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$. Полагая в этом тождестве последовательно $x = x_1$, $x = x_2$ и используя равенство $y_3(x_1) = y_3(x_2)$, можем написать

$$\alpha_1 + \alpha_2 y_2(x_1) + \alpha_3 y_3(x_1) = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 y_2(x_2) + \alpha_3 y_3(x_1) = 0.$$

Отсюда следует равенство $\alpha_2(y_2(x_2) - y_2(x_1)) = 0$. Но так как $y_2(x_2) \neq y_2(x_1)$, то $\alpha_2 = 0$ и тождество (1) принимает вид

$$\alpha_1 + \alpha_3 y_3(x) \equiv 0.$$

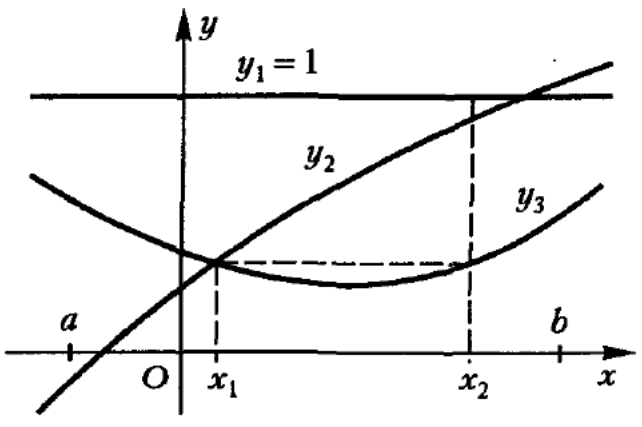


Рис. 27

Последнее, если принять во внимание рис. 27, невозможно при $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \neq 0$. Получили противоречие, источник которого в предположении, что функции y_1, y_2, y_3 — линейно зависимые. Следовательно, они линейно независимые. ▶

352. Если определитель Вронского для функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ тождественно равен нулю, то можно ли утверждать, что эти функции будут линейно зависимыми или линейно независимыми?

◀ Примеры показывают, что если определитель Вронского равен нулю при всех $x \in (a, b)$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

Пусть $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$. Тогда $W(x) \equiv 0$. Легко видеть, что функции y_1 и y_2 линейно зависимые.

Пусть

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^4, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad 1 \leqslant x < 2, \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ (x-1)^4, & \text{если} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Так как $y_1'(x) = y_1(x) = 0$ при $1 \leqslant x < 2$, то

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant x < 2.$$

Аналогично $W(x) = 0$ при $0 < x \leqslant 1$, так как $y_2'(x) = y_2(x) = 0$ при $0 < x \leqslant 1$. Следовательно, $W(x) \equiv 0$ на $(0, 2)$.

Предположим теперь, что при некоторых α_1 и α_2 $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0)$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \quad x \in (0, 2). \tag{1}$$

Пусть $0 < x \leqslant 1$. Тогда из (1) следует, что $\alpha_1 y_1(x) \equiv 0$, т. е. $\alpha_1 = 0$. Аналогично, если $1 \leqslant x < 2$, то из (1) получим $\alpha_2 = 0$. Следовательно, функции y_1 и y_2 линейно независимые. ▶

353. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x|^5$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $x^2y'' + 5xy' + 5y = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1, 1)$?

◀ Из предположения, что

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^5 + \alpha_3 |x|^5 \equiv 0, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0, \tag{1}$$

получаем совокупность тождеств

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^5 + \alpha_3 x^5 \equiv 0, \quad x \geqslant 0,$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^5 - \alpha_3 x^5 \equiv 0, \quad x \leqslant 0,$$

или $\alpha_1 x + \alpha_2 x^5 + \alpha_3 x^5 \equiv 0$ и $-\alpha_1 x - \alpha_2 x^5 + \alpha_3 x^5 \equiv 0$, $x \geqslant 0$. Складывая последние тождества, получаем $2\alpha_3 x^5 \equiv 0$, откуда $\alpha_3 = 0$. А тогда из (1) следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 x^4 \equiv 0$ $(x \neq 0)$, что при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ невозможно. Таким образом, функции y_1, y_2, y_3 линейно независимые на интервале $(-1, 1)$.

С другой стороны, известно, что линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на интервале (a, b) коэффициентами $(P_0(x) \equiv 1)$ имеет только n линейно независимых частных решений на (a, b). В данном случае имеем

$$y'' - \frac{5}{x} y' + \frac{5}{x^2} y = 0.$$

Видим, что коэффициенты $P_1(x) = -\frac{5}{x}$, $P_2(x) = \frac{5}{x^2}$ разрывны в точке $x_0 = 0$ и $x_0 \in (-1, 1)$. Следовательно, нет уверенности, что число линейно независимых частных решений совпадет с порядком уравнения. Этот пример показывает, что требование непрерывности коэффициентов уравнения (4), п. 4.2, которое обеспечивает равенство числа независимых частных его решений порядку уравнения, не является излишним. ▶

354. Доказать, что два решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (p, q — непрерывные на интервале (a, b) функции), имеющие максимум при одном и том же значении $x_0 \in (a, b)$, линейно зависимые на (a, b).

◀ Выберем числа α_1 и α_2 так, чтобы в точке x_0, где решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют максимальное значение, выполнялось равенство

$$\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0. \tag{1}$$

Поскольку частные решения принимают максимальные значения в точке x_0, то

$$\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что решение

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \tag{3}$$

удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Так как функции p и q непрерывные, то задача Коши

$$\begin{cases} y'' = -p(x)y' - q(x)y; \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Очевидно, что этим решением является $y \equiv 0$ на (a, b). В силу этого, из (3) следует, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad (a, b),$$

т.е. частные решения y_1 и y_2 в связи с равенством (1), где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, оказались линейно зависимыми на интервале (a, b). ▶

355. Даны 4 решения уравнения $y''' + xy = 0$, графики которых касаются друг друга в одной точке. Сколько среди этих решений имеется линейно независимых?

◀ В силу условия, для частных решений y_1, y_2, y_3, y_4 в точке x_0 выполняются условия:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = y_4(x_0); \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = y_3'(x_0) = y_4'(x_0). \tag{1}$$

Тогда для функций

$$u_1 = y_1 - y_2, \quad u_2 = y_2 - y_3, \quad u_3 = y_3 - y_4,$$

являющихся решениями данного уравнения, выполняются начальные условия

$$u_1(x_0) = u_2(x_0) = u_3(x_0) = u_1'(x_0) = u_2'(x_0) = u_3'(x_0) = 0. \tag{2}$$

Для произвольных чисел α_1 и α_2 можно выбрать число α_3 так, чтобы

$$\alpha_1 u_1''(x_0) + \alpha_2 u_2''(x_0) + \alpha_3 u_3''(x_0) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0. \tag{3}$$

В силу существования единственного решения задачи Коши

$$y''' = -xy, \quad y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = 0,$$

где $y(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \alpha_3 u_3(x)$, имеем тождество:

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \alpha_3 u_3(x) \equiv 0, \quad x \in X, \quad x_0 \in X, \tag{4}$$

где X — некоторый интервал. Определив α_3 из (3) и подставив в (4), получим

$$\alpha_1(u_1 - \beta_1 u_3) + \alpha_2(u_2 - \beta_2 u_3) \equiv 0, \tag{5}$$

где $\beta_1 = \dfrac{u_1''(x_0)}{u_3''(x_0)}$, $\beta_2 = \dfrac{u_2''(x_0)}{u_3''(x_0)}$ $(u_3''(x_0) \neq 0)$. Так как числа α_1 и α_2 произвольные, то из (5) следует, что

$$u_1(x) - \beta_1 u_3(x) \equiv 0, \quad u_2(x) - \beta_2 u_3(x) \equiv 0, \quad x \in X,$$

откуда $y_1 = y_3 + (\beta_1 + \beta_2)(y_3 - y_4)$, $y_2 = y_3 + \beta_2(y_3 - y_4)$. Следовательно, по меньшей мере два решения линейно зависят от двух остальных, которые могут быть линейно независимыми. Если же $y_4 = \gamma y_3$ ($\gamma = \text{const}$), то тогда имеется три линейно зависимых решения (y_1, y_2, y_4 выражаются линейно через функцию y_3). Предоставляем читателю разобрать случай, когда $u_1''(x_0) = u_2''(x_0) = u_3''(x_0) = 0$. ▶

356. Могут ли графики двух решений уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами на плоскости xOy: а) пересекаться; б) касаться друг друга?

◀ Пусть y_1, y_2 — два различных решения данного уравнения. Тогда и функция $y = y_1 - y_2$ также есть решение этого уравнения, причем в случае а) $y(x_0) = 0$, а в случае б) $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, где x_0 — абсцисса точки пересечения (касания) графиков решений y_1 и y_2.

Если $n = 1$, то, в силу единственности решения задачи Коши, в случае а) имеется только тривиальное решение $y(x) = y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$. Следовательно, двух различных решений нет. Этот вывод справедлив и в случае б).

Пусть $n = 2$. Тогда в случае а) имеем задачу

$$\begin{cases} y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0; \\ y(x_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

в которой $y'(x_0)$ произвольное, поскольку не задано. Следовательно, графики двух решений задачи (1) могут пересекаться при $x = x_0$. Аналогичная ситуация и при $n > 2$.

В случае б) получается задача Коши ($n = 2$):

$$\begin{cases} y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0; \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

имеющая, вследствие непрерывности коэффициентов, единственное решение, проходящее через точку $(x_0, y(x_0))$.

Если же $n > 2$, то задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0, \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

становится неопределенной, так как не заданы значения $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$. Следовательно, в этом случае через точку $(x_0, y(x_0))$ проходит две (и более) кривых, касающихся друг друга в этой точке. ▶

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

357. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

◀ Очевидно, функции y_1 и y_2 линейно независимые, поэтому согласно (5), п. 4.3, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

или $y'' \sin x - y' \cos x = 0$. ▶

358. $y_1 = e^x$, $y_2 = \operatorname{sh} x$, $y_3 = \operatorname{ch} x$.

◀ Функции y_2 и y_3 являются линейными комбинациями функций e^x и e^{-x}. Следовательно, фактически имеется лишь два линейно независимых решения: e^x и e^{-x}. Их простейшее дифференциальное уравнение имеет вид $y'' - y = 0$. ▶

Решить уравнения.

359. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.

◀ Согласно п. 4.1, с помощью замен $y = xz(x)$, $z' = u$ понижаем порядок данного уравнения:

$$x(1 + x^2)u' + 2u = 0.$$

Общее решение его имеет вид $u = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$. Интегрируя уравнение $z' = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, окончательно находим $z = C_1 x - \frac{C_1}{x} + C_2$, или

$$y = C_1 x^2 + C_2 x - C_1. \blacktriangleright$$

360. $xy''' - y'' - xy' + y = -2x^3$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$.

◀ Полагая $y = xz(x)$, $z' = u(x)$, соответствующее однородное уравнение приведем к виду

$$x^2u'' + 2xu' - (2 + x^2)u = 0.$$

Поскольку частному решению y_1 соответствует частное решение z_1, то $z_1 = \frac{y_1}{x} = \frac{e^x}{x}$. Но $z_1' = u_1$, поэтому $u_1(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ есть частное решение последнего уравнения. Согласно

п. 4.1, производим замену $u = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)W(x)$, $W'(x) = \omega(x)$. Тогда получим уравнение

$$(x-1)\omega' + 2\omega\left(\frac{1}{x} - 1 + x\right) = 0,$$

общее решение которого

$$\omega(x) = C_1\frac{x^2}{(x-1)^2}e^{-2x}.$$

Решая затем уравнение

$$W'(x) = C_1\frac{x^2}{(x-1)^2}e^{-2x},$$

находим:

$$W(x) = C_1\int\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2 e^{-2x}\,dx + C_2 =$$

$$= C_1\left(\int e^{-2x}\,dx + 2\int\frac{e^{-2x}}{x-1}\,dx - \int e^{-2x}\,d\left(\frac{1}{x-1}\right)\right) + C_2 = -C_1e^{-2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}\right) + C_2.$$

Тогда

$$u(x) = C_2e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}C_1e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right),$$

$$z(x) = C_2\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx - \frac{C_1}{2}\int e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + C_3 = C_2\frac{e^x}{x} + \overline{C}_1\frac{e^{-x}}{x} + C_3,$$

где $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{2}$. Наконец, $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3x$ есть общее решение однородного уравнения. Для получения общего решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольных постоянных. Тогда получим систему уравнений

$$C_1'e^{-x} + C_2'e^x + C_3'x = 0,$$
$$-C_1'e^{-x} + C_2'e^x + C_3' = 0,$$
$$C_1'e^{-x} + C_2'e^x = -2x^2,$$

из которой находим $C_1' = e^x(x - x^2)$, $C_2' = -e^{-x}(x^2 + x)$, $C_3' = 2x$. Интегрируя последние соотношения и подставив значения C_1, C_2, C_3 в выражение для общего решения однородного уравнения, после некоторых упрощений находим общее решение данного уравнения:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3x + x^3. \blacktriangleright$$

361. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$.

◀ Полагая $y = xz(x)$, $z'(x) = u(x)$, получаем уравнение

$$x^2(2x-1)u'' + 2x(5x-3)u' + 6(x-1)u = 0. \qquad (1)$$

Из соотношений $y_2(x) = xz_2(x)$, $z_2'(x) = u_2(x)$ находим частное решение для последнего уравнения $u_2(x) = \frac{1}{x^3}$. Применив еще раз указанную замену, можем записать:

$$u = \frac{W(x)}{x^3}, \quad W'(x) = \omega(x).$$

Тогда (1) примет вид

$$(1-2x)\omega' + 2\omega = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем $\omega = C_1(1-2x)$, или

$$W'(x) = C_1(1-2x).$$

Из последнего уравнения следует, что $W(x) = C_1(x - x^2) + C_2$. Производя, далее, очевидные подстановки, имеем уравнение

$$z'(x) = C_1\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + \frac{C_2}{x^3},$$

из которого находим

$$z(x) = C_1\left(-\frac{1}{x} - \ln|x|\right) - \frac{C_2}{2x^2} + C_3.$$

Остается записать общее решение данного уравнения:

$$y = C_1(1 + x\ln|x|) + \frac{C_2}{x} + C_3 x. \blacktriangleright$$

362. $xy'' + 2y' + xy = 0;\ y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}\ (x \neq 0).$

◀ Для нахождения второго частного решения y_2 воспользуемся формулой Остроградского—Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 \exp\left(-\int P_1(x)\,dx\right), \quad \text{где} \quad P_1(x) = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0). \tag{1}$$

Тогда получим уравнение относительно y_2:

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C_1}{x^2},$$

решив которое, имеем

$$y_2 = C_1 y_1 \int \frac{dx}{x^2 y_1^2} + \widetilde{C}_2 y_1 = -y_1 C_1 \operatorname{ctg} x + \widetilde{C}_2 \frac{\sin x}{x}. \tag{2}$$

Тогда общим решением будет

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 \frac{\sin x}{x} - \alpha_2 C_1 \frac{\cos x}{x} + \alpha_2 \widetilde{C}_2 \frac{\sin x}{x} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0,$$

где C_1, C_2 — новые произвольные постоянные. Отметим, что формула (2) фактически описывает общее решение. ▶

363. $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$

◀ Попытаемся найти частное решение этого уравнения в виде $y_1 = e^{px}$, где $p = \text{const}$. Подставив y_1 в уравнение и сократив обе части на e^{px}, получаем тождество

$$p^2(2x + 1) + 4px - 4 \equiv 0,$$

возможное лишь тогда, когда одновременно выполняются равенства:

$$2p^2 + 4p = 0 \quad \text{и} \quad p^2 - 4 = 0.$$

Отсюда находим $p = -2$. Следовательно, $y_1 = e^{-2x}$ — частное решение. Исходя из дифференциального уравнения (1) предыдущего примера, легко находим общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

по известному его частному решению $y_1(x)$:

$$y = y_1(x)\left(C_1 \int \frac{\exp\left(-\int P_1(x)\,dx\right)}{y_1^2(x)}\,dx + C_2\right)$$

(*формула Абеля*). Воспользовавшись формулой, сразу напишем общее решение данного уравнения

$$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}. \blacktriangleright$$

364. $x(x-1)y''-xy'+y=0.$

◀ Легко видеть, что $y_1=x$ — частное решение уравнения, поэтому воспользовавшись формулой Абеля (см. предыдущий пример), получаем

$$y=x\left(C_1\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2}+C_2\right)=C_1(x\ln|x|+1)+C_2x.\ \blacktriangleright$$

365. $x(x^2+6)y''+4(x^2+3)y'+6xy=0.$

◀ Поскольку коэффициенты этого уравнения есть многочлены, то целесообразно (хотя и не обязательно) искать частное решение в виде некоторого многочлена. Пусть $y_1=x^n+\ldots$ (пока не найдено натуральное n, выписывать следующие слагаемые не будем). Число n найдем, если это возможно, из условия равенства нулю коэффициента при старшей степени x многочлена, который получается в левой части дифференциального уравнения после подстановки в него частного решения y_1.

Имеем

$$x(x^2+6)(n(n-1)x^{n-2}+\ldots)-4(x^2+3)(nx^{n-1}+\ldots)+6x(x^n+\ldots)=0.$$

Отсюда, согласно сказанному выше, получаем уравнение

$$n(n-1)-4n+6=0,$$

имеющее два решения $n_1=2$, $n_2=3$.

Ищем частное решение в виде $y_1=x^2+ax+b$ (если в таком виде частое решение не существует, то попытаемся найти его среди многочленов третьей степени; если же и в этом случае потерпим неудачу, то данное уравнение вообще не имеет решений среди многочленов).

Подставив y_1 в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a=0$, $b=2$. Следовательно, $y_1=x^2+2$ — частное решение. Аналогичные поиски частного решения среди многочленов третьей степени дают другое частное решение $y_2=x^3$, которое, очевидно, линейно не зависит от первого.

Таким образом, получаем общее решение данного уравнения

$$y=C_1(x^2+2)+C_2x^3. \tag{1}$$

Любопытно отметить, что данное уравнение допускает еще одно частное решение $y_3=|x|^3$, линейно независимое от y_1 и y_2 при $-\infty<x<+\infty$.

Если исходить из общего решения (1), то нельзя решить, например, следующую дифференциальную задачу:

$$x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0,$$
$$y(-1)=1,\quad y(1)=2,\quad y'(-1)=-2.$$

Однако на самом деле существует ее единственное решение

$$y=\frac{1}{7}(x^2+2)+\frac{x^3}{2}+\frac{15}{14}|x|^3,$$

дважды непрерывно дифференцируемое при всех $x\in(-\infty,+\infty)$, и его можно получить из более общего решения данного уравнения

$$y=C_1(x^2+2)+C_2x^3+C_3|x|^3,$$

подчинив последнее заданным дополнительным условиям. ▶

Замечание. *Рассмотренный пример показывает, что если коэффициент $P_0(x)$ при старшей производной обращается в нуль при $x=x_0$, то соответствующее дифференциальное уравнение n-го порядка может иметь больше чем n линейно независимых частных решений. Последнее означает, что некоторые дифференциальные задачи, кажущиеся неразрешимыми с первого взгляда (т. е. переопределенными), вполне могут иметь единственное решение.*

366. Заменой независимой переменной $t = \varphi(x)$ уничтожить член с первой производной в уравнении $x^2\left(1-x^2\right)y'' + 2\left(x-x^3\right)y' - 2y = 0$.

◀ Сначала выразим производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ через производные $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Подставив значения этих производных в уравнение, получим

$$x^2\left(1-x^2\right)\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(2\left(x-x^3\right)\frac{d\varphi(x)}{dx} + x^2\left(1-x^2\right)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)\frac{dy}{dt} - 2y = 0.$$

Замечаем, что если функцию φ выбрать из условия

$$2\frac{d\varphi(x)}{dx} + x\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0,$$

то цель будет достигнута. Последнее уравнение легко решается, и мы имеем

$$\varphi(x) = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Поэтому исходное дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$C_1^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 0,$$

или, если учесть, что $x = \frac{C_1}{\varphi - C_2} = \frac{C_1}{t - C_2}$, в виде

$$\left((t-C_2)^2 - C_1^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 0.$$

Произвольными постоянными можно распорядиться в зависимости от дополнительных условий. ▶

367. Доказать, что в случае $q(x) < 0$ решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не могут иметь положительных максимумов.

◀ Предположим, что в точке $x_0 \in (a, b)$ имеется максимум решения $y = y(x)$, равный $y(x_0) > 0$. Тогда, как известно, в силу дифференцируемости этого решения, обязательно $y'(x_0) = 0$. Подставив в уравнение $x = x_0$ и приняв во внимание последнее условие, имеем

$$y''(x_0) = -p(x_0)y'(x_0) - q(x_0)y(x_0) = -q(x_0)y(x_0) > 0.$$

Следовательно, в точке x_0 имеется минимум функции y. Полученное противоречие и доказывает предложенное утверждение. ▶

368. Могут ли графики двух решений уравнения $y''+q(x)y = 0$, где q — непрерывная функция, располагаться так, как на рис. 28, а)? так, как на рис. 28, б)?

◀ В случае а), очевидно, выполняются равенства

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0).$$

Так как задача Коши

$$\begin{cases} y'' = -q(x)y \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

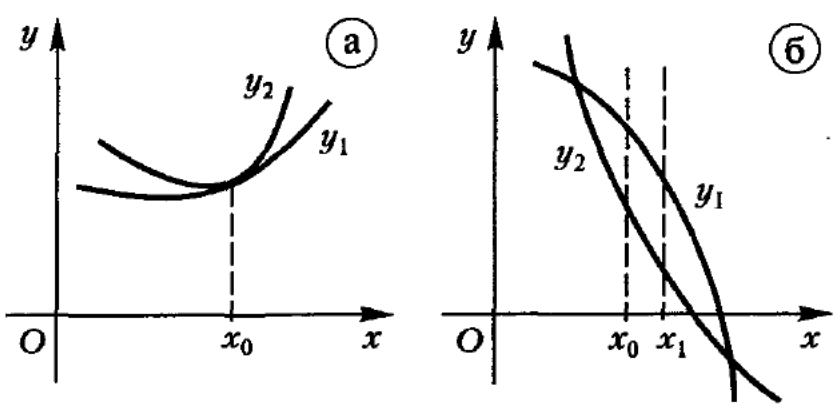


Рис. 28

в силу непрерывности функции q имеет единственное решение, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$, что противоречит рис. 28, а). Следовательно, такое расположение графиков решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ невозможно.

В случае б), исходя из рисунка, можем написать:

$$y_1''(x) = -q(x)y_1(x) < 0, \quad y_2''(x) = -q(x)y_2(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1),$$

откуда следует, что $q(x) < 0$ и $q(x) > 0$ $\forall x \in (x_0, x_1)$ одновременно. Значит, и в этом случае такое расположение графиков решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ невозможно. ▶

369. Доказать, что в случае $q(x) > 0$ для любого решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ отношение $\frac{y'}{y}$ убывает при возрастании x на интервале, где $y(x) \neq 0$.

◀ Вводя в рассмотрение новую функцию u по формуле $u(x) = \frac{y'}{y}$, получаем дифференциальное уравнение

$$u'(x) = -q(x) - u^2(x),$$

из которого, вследствие условия $q(x) > 0$, следует, что $u'(x) < 0$, т. е. функция $u = \frac{y'}{y}$ убывает на интервале, где $y \neq 0$. ▶

370. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ все решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с положительными начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются положительными при всех $x > x_0$.

◀ Дважды интегрируя данное уравнение и используя начальные условия, получаем:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - s)(-q(s))y(s)\,ds. \tag{1}$$

В силу положительности $y(x_0)$ и непрерывности функции y, при достаточно малом $x > x_0$ правая часть уравнения (1) положительная. Покажем, что она останется положительной при увеличении $x > x_0$. Предположим, что при некотором $x_1 > x_0$ функция y все же обратится в нуль (первый нуль справа от точки x_0). Тогда из (1) получим равенство

$$y(x_1) = 0 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)(-q(s))y(s)\,ds. \tag{2}$$

Поскольку $y(s) > 0$ при $x_0 < s < x_1$, то $(x_1 - s)(-q(s))y(s) > 0$ $\forall s \in (x_0, x_1)$. Следовательно, выражение в правой части равенства (2) строго положительно. Полученное противоречие и доказывает, что $\forall x \geqslant x_0$ $y(x) > 0$. ▶

Решить следующие уравнения.

371. $xy'' + y' = 0$

◀ Так как это уравнение Эйлера, то частное решение ищем в виде $y = x^r$, где $r = \text{const}$. Тогда для r получаем уравнение

$$r(r - 1) + r = 0,$$

откуда находим $r_1 = 0$, $r_2 = 0$. Следовательно, частными решениями будут $y_1 = x^0 = 1$, $y_2 = \ln|x|$, а общим решением —

$$y = C_1 + C_2 \ln|x|. \blacktriangleright$$

372. $(x + 1)^3 y''' - 3(x + 1)^2 y'' + 4(x + 1)y' - 4y = 0.$

◀ Это уравнение Эйлера. Его частные решения ищем в виде

$$y = (x + 1)^r \quad (x > -1). \tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение, получаем

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 4.$$

Поэтому частными решениями будут $y_1 = x + 1$, $y_2 = (x + 1)\ln(x + 1)$, $y_3 = (x + 1)^4$, а общим решением —

$$y = C_1(x + 1) + C_2(x + 1)\ln(x + 1) + C_3(x + 1)^4. \blacktriangleright$$

373. $y'' + \dfrac{2xy'}{1+x^2} + \dfrac{y}{(1+x^2)^2} = 0.$

◀ Положим $t = \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cos^2 t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cos^2 t\right) = \cos^2 t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cos^2 t\right) = \cos^2 t\left(\cos^2 t\,\frac{d^2y}{dt^2} - \sin 2t\,\frac{dy}{dt}\right),$$

и уравнение примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

Решая его, получаем

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C_2 x}{\sqrt{1+x^2}}. \blacktriangleright$$

374. $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0.$

◀ Положим $t = \varphi(x)$ и подберем функцию φ так, чтобы после замены отсутствовал член с первой производной. Тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\varphi'(x)\frac{dy}{dt}\right) = \varphi''(x)\frac{dy}{dt} + \varphi'^2(x)\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$x^4\varphi'^2 y'' + \left(x^4\varphi'' + 2x^3\varphi'\right)y' + y = 0. \tag{1}$$

В силу поставленного условия, имеем $x\varphi'' + 2\varphi' = 0$, откуда $t = \varphi(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$. Уравнение (1) принимает вид

$$C_1^2 y'' + y = 0$$

и легко решается. Окончательно можем написать, что

$$y = A\cos\frac{1}{x} + B\sin\frac{1}{x}. \blacktriangleright$$

Представить в канонической форме следующие уравнения второго порядка.

375. $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0.$

◀ Согласно п. 4.7, производим замену

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{5x\,dx}{x^2+1}\right)\cdot z(x) = \frac{z(x)}{(x^2+1)^{\frac{5}{4}}}.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{d^2z}{dx^2} + J(x)z = 0,$$

где $J(x) = \dfrac{x^2+6}{4(x^2+1)^2}$. ▶

376. $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$

◀ Подберем функцию u так, чтобы после замены $y = u(x)z(x)$ дифференциальное уравнение относительно функции z не содержало производную z'. Имеем

$$u\left(1-x^2\right)z'' + \left(2u'\left(1-x^2\right) - 2xu\right)z' + \left(\left(1-x^2\right)u'' - 2xu' + n(n+1)u\right)z = 0. \tag{1}$$

В соответствии с поставленной целью, полагаем $\left(1-x^2\right)u' - xu = 0$, откуда $u = \dfrac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

Подставив полученное значение $u(x)$ в дифференциальное уравнение (1), после упрощений будем иметь окончательно

$$z'' + \frac{\left(n^2+n+1-(n^2+n)x^2\right)}{(1-x^2)^2}z = 0. \blacktriangleright$$

Следующие уравнения привести к самосопряженной форме.

377. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$.

◀ Сравнивая коэффициенты данного уравнения с коэффициентами самосопряженного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y \equiv p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p'(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

получаем соотношения

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\frac{2x+1}{x}, \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0).$$

Из первого соотношения находим $p(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$, а из второго — $q(x) = \frac{2e^{-2x}}{x^2}$.

Таким образом, при $x \neq 0$ данное уравнение приводится к самосопряженной форме

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-2x}}{x}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{2e^{-2x}}{x^2}y = 0. \blacktriangleright$$

378. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0$.

◀ По аналогии с проделанным в предыдущем примере, имеем

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\frac{4(x^2+3)}{x(x^2+6)}, \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{6}{x^2+6},$$

откуда

$$p(x) = \frac{1}{x^2(x^2+6)}, \quad q(x) = \frac{6}{x^2(x^2+6)^2}.$$

Следовательно, при $x \neq 0$ данное уравнение представимо в самосопряженной форме

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2(x^2+6)}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{6y}{x^2(x^2+6)^2} = 0. \blacktriangleright$$

379. Привести к линейному уравнение $xy' - 5y - y^2 - x^2 = 0$.

◀ Согласно замене (13), п. 4.8, можем написать

$$y = -\frac{xu'}{u} \quad (u \neq 0).$$

Тогда

$$y' = \frac{-(u' + xu'')u + xu'^2}{u^2}$$

и данное уравнение преобразуется к виду

$$xu'' - 4u' + xu = 0. \blacktriangleright$$

380. Пусть y и z — решения уравнений $y'' + q(x)y = 0$ и $z'' + Q(x)z = 0$ с совпадающими начальными условиями $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$, и на интервале (x_0, x_1) выполняются неравенства $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Доказать, что на этом интервале отношение $\frac{z}{y}$ убывает.

◀ Умножая первое уравнение на z, а второе — на y и затем почленно вычитая их, получаем

$$(z'y - y'z)' = -(Q - q)yz.$$

Интегрируя полученное соотношение в пределах от x_0 до $x \in (x_0, x_1)$ и принимая во внимание начальные условия, будем иметь

$$z'y - y'z = -\int_{x_0}^{x}\Big(Q(s) - q(s)\Big)y(s)z(s)\,ds, \quad \text{или} \quad \left(\frac{z}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}\int_{x_0}^{x}\Big(Q(s) - q(s)\Big)y(s)z(s)\,ds.$$

Так как $y(s)z(s) > 0$, $Q(s) - q(s) > 0$, то $\left(\frac{z}{y}\right)' < 0$ при $x > x_0$. Следовательно, функция $\frac{z}{y}$ убывающая. ▶

381. Заменой независимого переменного $t = \varphi(x)$ привести уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} \pm \dfrac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ к виду $\dfrac{d^2y}{dt^2} + b(t)\dfrac{dy}{dt} \pm y = 0$, а затем избавиться от первой производной заменой $y = a(t)u$ (*преобразование Лиувилля*).

◀ Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\varphi'(x)\frac{dy}{dt}\right) = \varphi''(x)\frac{dy}{dt} + \varphi'^2(x)\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{y}{(\psi(x))^4} \equiv \varphi'^2(x)\frac{d^2y}{dt^2} + \varphi''(x)\frac{dy}{dt} \pm \frac{y}{(\psi(x))^4} = 0.$$

Следовательно, должно быть

$$b(t) = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi'(x)}\right), \quad \varphi'\psi^2 = 1.$$

Тогда

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi^2(x)}, \quad t = \varphi(x) = \int \frac{dx}{\psi^2(x)} + C, \quad b(t) = -\frac{d}{dx}(\psi^2(x)).$$

Теперь подберем функцию a так, чтобы после замены $y = a(t)u$ в полученном уравнении отсутствовал член с первой производной. Произведя указанную подстановку, имеем

$$\frac{dy}{dt} = a'(t)u + a(t)u', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a''u + 2a'u' + au'',$$

$$au'' + (2a' + ab)u' + (a'' + a'b \pm a)u = 0. \tag{1}$$

Следовательно, мы должны положить $2a' + ab = 0$, откуда находим

$$a = C\exp\left(-\frac{1}{2}\int b(t)\,dt\right). \tag{2}$$

Поскольку $dt = \frac{dx}{\psi^2(x)}$, $b(t) = -\frac{d}{dx}(\psi^2(x))$, то (2) принимает вид

$$a = C\exp\left(-\frac{1}{2}\int -\frac{d}{dx}(\psi^2(x))\frac{dx}{\psi^2(x)}\right) = C\exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{d(\psi^2)}{\psi^2}\right) = C\psi(x) \quad (\psi(x) > 0).$$

Полагая $C = 1$ и вычисляя требуемые производные, приводим уравнение (1) к виду

$$u'' + \left(\psi^3\frac{d^2\psi}{dx^2} \pm 1\right)u = 0, \quad y = \psi u. \ ▶ \tag{3}$$

В следующих задачах исследовать асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ решений данных уравнений, пользуясь преобразованием Лиувилля и утверждениями п. 4.10.

382. $y'' + x^4y = 0$.

◀ Принимая во внимание решение предыдущего примера, имеем

$$\psi(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad y = \frac{u(t)}{x},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(1 + \frac{2}{x^6}\right)u = 0, \quad t = \int \frac{dx}{\psi^2(x)} = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \quad (C = 0).$$

Осюда $x = \sqrt[3]{3t}$ и дифференциальное уравнение для $u(t)$ примет вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(1 + \frac{2}{9t^2}\right)u = 0, \quad y = \frac{u(t)}{\sqrt[3]{3t}}. \tag{1}$$

Далее, поскольку в обозначениях п. 4.10 $f(t) = \frac{2}{9t^2}$, то, согласно этому пункту, уравнение (1) имеет решения

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (\alpha = 1), \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) будет

$$u = C_1 \cos t + C_2 \sin t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \to +\infty.$$

Переходя в этом решении от u и t к y и x, можем написать:

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 \cos \frac{x^3}{3} + C_2 \sin \frac{x^3}{3}\right) + O\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad x \to +\infty. \blacktriangleright$$

383. $xy'' + 2y' + y = 0.$

◀ Полагая $y = a(x)y_1(x)$, подбираем функцию a так, чтобы в уравнении относительно y_1 отсутствовала первая производная y_1'. Тогда получим

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad y_1'' + \frac{1}{x} y_1 = 0 \quad (x \neq 0).$$

Теперь воспользуемся примером 381. Имеем

$$\psi(x) = \sqrt[4]{x} \quad (x > 0), \quad y_1 = u(t)\sqrt[4]{x}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \left(1 - \frac{3}{16x}\right) u = 0, \quad t = \int \frac{dx}{\psi^2(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Следовательно, $x = \frac{t^2}{4}$ и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(1 - \frac{3}{4t^2}\right) u = 0, \quad y_1 = \frac{\sqrt{t}\,u(t)}{2}.$$

В силу п. 4.10, частные решения последнего уравнения имеют вид:

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \to +\infty.$$

А тогда общим решением данного дифференциального уравнения будет

$$y(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}(C_1 \cos 2\sqrt{x} + C_2 \sin 2\sqrt{x}) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right), \quad x \to +\infty. \blacktriangleright$$

384. $y'' + (x^4 + 1)y = 0.$

◀ Применив преобразование Лиувилля, получим (см. пример 381):

$$\psi(x) = (x^4 + 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad y = \psi(x)u(t), \quad u''(t) + \left(1 + \frac{x^2(2x^4 - 3)}{(x^4 + 1)^3}\right) u = 0, \quad t = \int (1 + x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Так как $t = \int (1 + x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int \left(x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) dx = \frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, то $x = O\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$ при $t \to +\infty$. Следовательно,

$$\frac{x^2(2x^4 - 3)}{(x^4 + 1)^3} = O\left(\frac{1}{x^6}\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to +\infty.$$

А тогда, согласно п. 4.10, можем написать, что

$$u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \to +\infty.$$

Наконец, возвращаясь к старым переменным x и y, получаем:

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(C_1 \cos \frac{x^3}{3} + C_2 \sin \frac{x^3}{3}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty. \blacktriangleright$$

Примечание. Следует принять во внимание, что

$$\sin\left(\frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sin \frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Аналогично,

$$\cos\left(\frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \cos \frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

385. $(x^2+1)y''-y=0$.

◀ Применив преобразование Лиувилля, получим уравнение

$$u''(t)-\frac{5}{4}\left(1-\frac{3}{5(1+x^2)}\right)u=0,\quad y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{4}}u(t),$$

где

$$t=\int\frac{dx}{\psi^2(x)}=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\quad x=O(e^t),\quad t\to+\infty.$$

Полагая $\tau=\frac{\sqrt{5}}{2}t$, приводим уравнение для функции u к виду:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2}-\left(1-\frac{3}{5(1+x^2)}\right)u=0,\quad \text{где}\quad x=O\left(e^{\frac{2\tau}{\sqrt{5}}}\right),\quad \tau\to+\infty.$$

Отсюда, согласно п. 4.10, имеем

$$u_1(\tau)=e^{\tau}\left(1+O\left(\frac{\tau}{e^{\frac{4\tau}{\sqrt{5}}}}\right)\right),\quad u_2(\tau)=e^{-\tau}\left(1+O\left(\frac{\tau}{e^{\frac{4\tau}{\sqrt{5}}}}\right)\right).$$

Возвращаясь к переменным x и y и принимая во внимание асимптотическое равенство $t=O(\ln x)$, $x\to+\infty$, окончательно получаем

$$y=(1+x^2)^{\frac{1}{4}}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{5}}{2}\ln x}+C_2e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln x}+O\left(\frac{\ln x}{x^{2-\frac{\sqrt{5}}{2}}}\right)\right)=C_1x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+C_2x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}\right),$$
$$x\to+\infty.$$

Здесь воспользовались тем, что $(1+x^2)^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, $x\to+\infty$. ▶

Примечание. Первые два члена полученного решения легко найти из уравнения $x^2y''-y=0$, являющегося "грубым" приближением данного уравнения.

386. $x^2y''+y\ln^2x=0$.

◀ Имея в виду преобразование Лиувилля, можем написать (см. пример 381):

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{x}{|\ln x|}},\quad u''(t)+\left(1+\frac{3-\ln^2x}{4(\ln x)^4}\right)u(t)=0,\tag{1}$$

$$y=\sqrt{\frac{x}{|\ln x|}}\,u(t),\quad \text{где}\quad t=\int\frac{dx}{\psi^2(x)}=\int\frac{|\ln x|}{x}\,dx=\frac{|\ln x|\ln x}{2},$$

т. е. $t=\frac{\ln^2x}{2}$ при $x\geqslant 1$.

Так как

$$\frac{3-\ln^2x}{4(\ln x)^4}=\frac{3-2t}{16t^2}=O\left(\frac{1}{t}\right),\quad t\to+\infty,$$

то непосредственно воспользоваться здесь результатом примера 381 нельзя, однако к уравнению (1) можно применить преобразование Лиувилля. Тогда получим:

$$\psi_1(t)=2\left(\frac{t^2}{16t^2-2t+3}\right)^{\frac{1}{4}},\quad u_1''(t_1)+(1+f(t))u_1(t_1)=0,$$

где

$$f(t)=\psi_1''(t)\psi_1^3(t)=8\,\frac{32t^3-145{,}5t^2+9t-4{,}5}{(16t^2-2t+3)^3},\quad u(t)=\psi_1(t)u_1(t_1),$$

$$t_1=\int\frac{dt}{\psi_1^2(t)}=\int\left(1-\frac{1}{8t}+\frac{3}{16t^2}\right)^{\frac{1}{2}}dt=\int\left(1-\frac{1}{16t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)dt=t-\frac{1}{16}\ln t+O\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$t\to+\infty.$$

Поскольку $f(t)=O\left(\frac{1}{t^3}\right)=O\left(\frac{1}{t_1^3}\right), t_1\to+\infty$, то, согласно п. 4.10, общее решение последнего дифференциального уравнения представляем в виде:

$$u_1(t_1)=C_1u_{12}(t_1)+C_2u_{22}(t_1),$$

где

$$u_{12}(t_1)=\cos t_1+O\left(\frac{1}{t_1^2}\right),\quad u_{22}(t_1)=\sin t_1+O\left(\frac{1}{t_1^2}\right),\quad t_1\to+\infty.$$

Далее, принимая во внимание соотношения

$$t_1=\frac{1}{2}\ln^2x-\frac{1}{8}\ln\ln x+\frac{\ln 2}{16}+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right),\quad x\to+\infty,$$

$$O\left(\frac{1}{t_1^2}\right)=O\left(\frac{1}{t^2}\right)=O\left(\frac{1}{\ln^4x}\right),\quad x\to+\infty,$$

$$\cos t_1=\cos\gamma(x)\cos C-\sin\gamma(x)\sin C,\quad \sin t_1=\sin\gamma(x)\cos C+\cos\gamma(x)\sin C,$$

где $\gamma(x)=\frac{1}{2}\ln^2x-\frac{1}{8}\ln\ln x$, $C=\frac{\ln 2}{16}+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right)$, а также то, что

$$\sin C=\sin\frac{\ln 2}{16}+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right),\quad \cos C=\cos\frac{\ln 2}{16}+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right),$$

$$\psi_1(t)=1+O\left(\frac{1}{t}\right)=1+O\left(\frac{1}{t_1}\right)\quad \text{при } t_1\to+\infty,$$

и включая в произвольные постоянные $\sin\frac{\ln 2}{16}$, $\cos\frac{\ln 2}{16}$, окончательно получим:

$$y=\sqrt{\frac{x}{\ln x}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right)\right)\left(C_1\cos\gamma(x)+C_2\sin\gamma(x)+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{\ln x}}\left(C_1\cos\gamma(x)+C_2\sin\gamma(x)+O\left(\frac{1}{\ln^2x}\right)\right),\quad x\to+\infty.\ \blacktriangleright$$

387. Применяя преобразование Лиувилля два раза, получить более точное асимптотическое представление решений уравнения $y''-4x^2y=0$.

◀ Применив указанное преобразование, получаем

$$u''(t)-\left(1-\frac{3}{16}x^{-4}\right)u(t)=0,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}u(t),\tag{1}$$

$$t=\int\frac{dx}{\psi^2(x)}=2\int x\,dx=x^2.$$

Так как $\frac{3}{16}x^{-4}=\frac{3}{16}t^{-2}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, то, согласно п. 4.10, для частных решений имеем выражения

$$u_1(t)=e^t\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right),\quad u_2(t)=e^{-t}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right),\quad t\to+\infty.$$

Теперь применим преобразование Лиувилля к уравнению

$$u''(t)-\left(1-\frac{3}{16t^2}\right)u(t)=0.$$

Имеем

$$\psi_1(t)=\left(1-\frac{3}{16}t^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}},\quad u(t)=\psi_1(t)u_1(\tau),$$

$$\tau=\int\frac{dt}{\psi_1^2(t)}=\int\left(1-\frac{3}{16}t^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}dt=\int\left(1-\frac{3}{32}t^{-2}+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)dt=t+\frac{3}{32t}+O\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

$t\to+\infty$.

Дифференциальное уравнение для $u_1(\tau)$ имеет вид:

$$u_1''(\tau) - \left(1 + \frac{9}{32}\left(\frac{1}{32} - t^2\right)\left(t^2 - \frac{3}{16}\right)^{-3}\right) u_1(\tau) = 0. \qquad (2)$$

Поскольку

$$\frac{9}{32}\left(\frac{1}{32} - t^2\right)\left(t^2 - \frac{3}{16}\right)^{-3} = O\left(\frac{1}{t^4}\right) = O\left(\frac{1}{\tau^4}\right), \quad \tau \to +\infty,$$

то для частных решений уравнения (2) получаем:

$$u_{11}(\tau) = e^{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right)\right), \quad u_{12}(\tau) = e^{-\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right)\right).$$

Далее записываем асимптотические выражения для $u(t)$, e^{τ}, $e^{-\tau}$:

$$u(t) = \left(1 + \frac{3}{64t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)(C_1 u_{11}(\tau) + C_2 u_{12}(\tau)), \qquad (3)$$

$$e^{\tau} = e^{t}\left(1 + \frac{3}{32t} + \frac{9}{2048t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) = e^{x^2}\left(1 + \frac{3}{32x^2} + \frac{9}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right), \qquad (4)$$

$$e^{-\tau} = e^{-x^2}\left(1 - \frac{3}{32x^2} + \frac{9}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right). \qquad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), находим:

$$u(t) = \left(1 + \frac{3}{64x^4} + O\left(\frac{1}{x^8}\right)\right)\left(C_1 e^{x^2}\left(1 + \frac{3}{32x^2} + \frac{9}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) + C_2 e^{-x^2}\left(1 - \frac{3}{32x^2} + \frac{9}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right) =$$

$$= C_1 e^{x^2}\left(1 + \frac{3}{32x^2} + \frac{105}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) + C_2 e^{-x^2}\left(1 - \frac{3}{32x^2} + \frac{105}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right). \qquad (6)$$

Наконец, используя (6), на основании (1) имеем для частных решений данного уравнения такие асимптотические представления:

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{x^2}\left(1 + \frac{3}{32x^2} + \frac{105}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right),$$

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-x^2}\left(1 - \frac{3}{32x^2} + \frac{105}{2048x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right), \quad x \to +\infty. \blacktriangleright$$

§ 5. Краевые задачи

5.1. Определение краевой задачи.

Задача вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \\ \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = \omega_0, \\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = \omega_1, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases} \qquad (1)$$

где q, f — известные непрерывные на интервале (x_0, x_1) функции, $p \in C^1(x_0, x_1)$, $p(x) \neq 0$, α, β, γ, δ, ω_0, ω_1 — заданные числа, называется *краевой задачей* для функции y. В отличие от задачи Коши она не всегда имеет решение.

Если $\omega_0 = \omega_1 = 0$, то краевые условия задачи (1) называются *однородными*.

5.2. Функция Грина краевой задачи.

Функция $G = G(x, s)$, где $x \in [x_0, x_1]$, $s \in (x_0, x_1)$, как функция переменной x, удовлетворяет следующим условиям:

1) она непрерывная;

2) при $x \neq s$ она является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}(p(x)G'_x) + q(x)G = 0,$$

а также удовлетворяет однородным краевым условиям задачи (1);

3) ее производная при $x = s$ имеет скачок, равный $\frac{1}{p(s)}$, т. е. справедливо равенство

$$G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}.$$

Если такая функция существует, то решение краевой задачи (1) при $\omega_0 = \omega_1 = 0$ также существует и имеет вид

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)f(s)\,ds.$$

В случае неоднородных краевых условий задачи (1), т. е. при $\omega_0^2 + \omega_1^2 \neq 0$, следует ввести в рассмотрение новую функцию z по формуле $y(x) = z(x) + u(x)$, где вспомогательная функция u выбирается таким образом, чтобы она удовлетворяла неоднородным краевым условиям задачи (1) (часто это линейная функция). Тогда относительно функции z получается краевая задачи вида (1) с однородными краевыми условиями.

5.3. Задача Штурма—Лиувилля.

Задача об отыскании тех значений λ, при которых уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda y,$$

где $p \in C^1[x_0, x_1]$, $p(x) \neq 0$, $q \in C[x_0, x_1]$, имеет ненулевые решения y, удовлетворяющие краевым условиям

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0,$$

где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, называется *задачей Штурма—Лиувилля*. При этом числа λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им функции y — *собственными функциями* рассматриваемой задачи.

5.4. Условие эквивалентности краевой задачи интегральному уравнению.

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма—Лиувилля и $f \in C(x_0, x_1) \cap \cap L_2(x_0, x_1)$, то краевая задача для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda y + f(x)$$

равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_{x_0}^{x} G(x, s)y(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} G(x, s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

Напомним читателю, что символом $L_2(x_0, x_1)$ обозначается класс функций, интегрируемых с квадратом на (x_0, x_1).

Решить следующие краевые задачи.

388. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.

◀ Записываем общее решение данного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^x.$$

Подставляя общее решение в заданные краевые условия, получаем систему уравнений относительно постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2 = -1, \quad C_2 e - C_1 - C_2 e = 2.$$

Отсюда находим $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Следовательно,

$$y = -2 + e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \blacktriangleright$$

389. $y'' - y' - 2y = 0$; $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$.

◀ Легко находим общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x. \tag{1}$$

Так как $y(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, то из (1) следует, что $C_2 = 0$. Из краевого условия $y'(0) = 2$ следует, что $C_1 = -2$. Окончательно имеем

$$y = -2e^{-x}, \quad 0 \leqslant x < +\infty. \blacktriangleright$$

390. $y'' - 2iy = 0$; $y(0) = -1$, $y(+\infty) = 0$.

◀ Известным способом находим:

$$y = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{-(1+i)x} = C_1 e^x (\cos x + i \sin x) + C_2 e^{-x} (\cos x - i \sin x).$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, то $C_1 = 0$. Далее, из условия $y(0) = -1$ получаем $C_2 = -1$. Поэтому

$$y = e^{-x}(i \sin x - \cos x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \blacktriangleright$$

391. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; $\quad y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3$.

◀ Это уравнение Эйлера. Его частные решения ищем в виде $y = x^\lambda$, где λ удовлетворяет характеристическому уравнению $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, из которого находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда

$$y = C_1 x + C_2 x^2$$

есть общее решение данного уравнения.

Первое краевое условие означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x)}{x} = 0$. Поэтому $C_1 = 0$. Из второго краевого условия следует, что $C_2 = 3$. Таким образом,

$$y = 3x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

есть решение данной краевой задачи. ▶

392. При каких a краевая задача $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, не имеет решений?

◀ Записываем общее решение данного уравнения

$$y = \begin{cases} \frac{1}{a} + C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x}, & \text{если} \quad a \neq 0, \\ \frac{x^2}{2} + d_1 x + d_2, & \text{если} \quad a = 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание краевые условия, имеем

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{a} = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-a}} + C_2 e^{-\sqrt{-a}} + \frac{1}{a} = 0 \quad (a \neq 0), \tag{1}$$

$$d_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_2 = 0 \quad (a = 0).$$

Система (1) неоднородная, поэтому, как известно, она не имеет решений в том и только в том случае, когда определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-a}} & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

и хотя бы один из определителей

$$\Delta C_1 = \begin{vmatrix} -1/a & 1 \\ -1/a & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \Delta C_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/a \\ e^{\sqrt{-a}} & -1/a \end{vmatrix} \tag{3}$$

не равен нулю. Из (2) следует, что

$$a = k^2 \pi^2, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Принимая во внимание (4), из (3) следует, что $\cos k\pi \neq 1$, т.е. число k не должно быть четным и $k \neq 0$. Итак, если $a = (2m+1)^2\pi^2$, $m \in \mathbb{Z}$, то система (1) решения не имеет. При этом же условии не имеет решения и предложенная краевая задача. ▶

Для каждой из следующих краевых задач построить функцию Грина.

393. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

◀ Согласно п. 5.2, для функции Грина G имеем задачу:

$$G''_{xx} = 0, \quad G(0, s) = G(1, s) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ x \neq s),$$
$$G'_x\big|_{x=s+0} - G'_x\big|_{x=s-0} = 1.$$

Интегрируя уравнение $G''_{xx} = 0$ один раз, находим

$$G'_x(x, s) = \begin{cases} C_1, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_2, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $C_1 \neq C_2$, так как по условию производная G'_x терпит разрыв при $x = s$. Далее, интегрируя G'_x, получаем

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1x + C_3, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_2x + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку функция G непрерывная, то должно выполняться условие

$$C_1s + C_3 = C_2s + C_4. \tag{3}$$

Из краевых условий для функции G следует, что

$$C_3 = 0, \quad C_2 + C_4 = 0. \tag{4}$$

Условие скачка производной G'_x при $x = s$ приобретает вид

$$C_2 - C_1 = 1. \tag{5}$$

Решив систему уравнений (3)–(5) относительно постоянных C_i $(i = \overline{1, 4})$, получим:

$$C_1 = s - 1, \quad C_2 = s, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -s.$$

Подставив значения C_i в (1), заканчиваем построение функции Грина для предложенной задачи:

$$G(x, s) = \begin{cases} (s-1)x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ s(x-1), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$ ▶

394. $y'' + y = f(x)$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

◀ Решая уравнение $G''_{xx} + G = 0$, $x \neq s$, имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 \sin x + C_4 \cos x, & \text{если} \quad s < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Из краевых условий для функции G получаем:

$$C_2 = -C_4, \quad C_1 = -C_3. \tag{1}$$

Из непрерывности $G(x, s)$ при $x = s$, а также скачка производной G'_x при $x = s$ следуют соотношения

$$C_1 \sin s + C_2 \cos s = C_3 \sin s + C_4 \cos s, \quad C_3 \cos s - C_4 \sin s - C_1 \cos s + C_2 \sin s = 1. \tag{2}$$

Из системы уравнений (1), (2) находим

$$C_1 = -C_3 = -\frac{1}{2}\cos s, \quad C_2 = -C_4 = \frac{1}{2}\sin s.$$

Таким образом, имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s - x), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{1}{2}\sin(x - s), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

или $G(x, s) = \frac{1}{2}\sin|x - s|$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$. ▶

395. $x^3y'' + 3x^2y' + xy = f(x);\ y(1) = 0,\ y(2) + 2y'(2) = 0.$

◀ Из уравнения

$$x^3G''_{xx} + 3x^2G'_x + xG = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad x \neq s,$$

находим

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x}, & \text{если} \quad 1 \leqslant x < s, \\ \frac{C_3}{x} + \frac{C_4 \ln x}{x}, & \text{если} \quad s < x \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Подчиняя функцию G по переменной x краевым условиям, а также пользуясь ее свойствами, перечисленными в п. 5.2, получаем систему уравнений относительно C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$C_1 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_2 \ln s = C_3, \quad -\frac{C_3}{s^2} - C_2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\ln s}{s^2}\right) = \frac{1}{s^3}.$$

Решив систему и подставив значения C_i в (1), окончательно имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{xs}, & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{\ln s}{xs}, & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 2. \end{cases} \blacktriangleright$$

396. $y'' \cos^2 x - y' \sin 2x = f(x); \quad y(0) = y'(0), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

◀ Поскольку

$$G''_{xx} \cos^2 x - G'_x \sin 2x \equiv (G'_x \cos^2 x)'_x,$$

то из уравнения

$$(G'_x \cos^2 x)'_x = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad x \neq s,$$

легко находим

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \operatorname{tg} x + C_2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 \operatorname{tg} x + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Краевые условия приводят к равенствам

$$C_2 = C_1, \quad C_3 + C_4 + \frac{C_3}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 0. \tag{1}$$

Из свойств функции Грина получаем

$$C_1 \operatorname{tg} s + C_2 = C_3 \operatorname{tg} s + C_4, \quad \frac{C_3}{\cos^2 s} - \frac{C_1}{\cos^2 s} = \frac{1}{\cos^2 s}. \tag{2}$$

Решив систему уравнений (1), (2), имеем:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} s - 3), \quad C_3 = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} s + 1), \quad C_4 = -\frac{3}{4}(\operatorname{tg} s + 1).$$

Таким образом,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\operatorname{tg} s - 3)(\operatorname{tg} x + 1), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{1}{4}(\operatorname{tg} s + 1)(\operatorname{tg} x - 3), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases} \blacktriangleright$$

397. $y'' + 4y' + 3y = f(x);\ y(0) = 0,\ y(x) = O(e^{-2x})$ при $x \to +\infty$.

◀ В данном случае

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 e^{-x} + C_4 e^{-3x}, & \text{если} \quad s < x < +\infty. \end{cases}$$

Из условия задачи

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{C_3 e^{-x} + C_4 e^{-3x}}{e^{-2x}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad C_3 = 0, \\ \infty, & \text{если} \quad C_3 \neq 0, \end{cases}$$

следует, что $C_3 = 0$. Из первого краевого условия получаем, что $C_1 + C_2 = 0$. Непрерывность функции Грина и условия скачка ее производной при $x = s$ соответственно дают:

$$C_1 e^{-s} + C_2 e^{-3s} = C_4 e^{-3s}, \quad -3C_4 e^{-3s} + C_1 e^{-s} + 3C_2 e^{-3s} = 1.$$

Следовательно, $C_1 = -C_2 = -\frac{1}{2}e^s$, $C_4 = \frac{e^s}{2}(1 - e^{2s})$, и функция Грина рассмотренной задачи имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^s(e^{-3x} - e^{-x}), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{1}{2}e^s(1 - e^{2s})e^{-3x}, & \text{если} \quad s \leqslant x < +\infty. \end{cases} \blacktriangleright$$

398. При каких a существует функция Грина краевой задачи $y'' + ay = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$?

◀ Пусть $a \neq 0$. В этом случае функция Грина имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1e^{\sqrt{-a}x} + C_2e^{-\sqrt{-a}x}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3e^{\sqrt{-a}x} + C_4e^{-\sqrt{-a}x}, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Из краевых условий и свойств 1)–3), п. 5.2, следует система уравнений относительно C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_3e^{\sqrt{-a}} + C_4e^{-\sqrt{-a}} = 0, \quad C_1e^{\sqrt{-a}s} + C_2e^{-\sqrt{-a}s} = C_3e^{\sqrt{-a}s} + C_4e^{-\sqrt{-a}s},$$
$$\sqrt{-a}\left(C_3e^{\sqrt{-a}s} - C_4e^{-\sqrt{-a}s} - C_1e^{\sqrt{-a}s} + C_2e^{-\sqrt{-a}s}\right) = 1.$$

Полученная система уравнений неоднородная, поэтому для существования ее решения необходимо и достаточно, чтобы для определителя системы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{-a}} & e^{-\sqrt{-a}} \\ e^{\sqrt{-a}s} & e^{-\sqrt{-a}s} & -e^{\sqrt{-a}s} & -e^{-\sqrt{-a}s} \\ e^{\sqrt{-a}s} & e^{-\sqrt{-a}s} & e^{\sqrt{-a}s} & -e^{-\sqrt{-a}s} \end{vmatrix} \neq 0, \quad 0 < s < 1,$$

или $\operatorname{sh}\sqrt{-a} \neq 0$. Очевидно, что если $a < 0$, то последнее условие выполняется. Если $a > 0$, то в силу равенства $\operatorname{sh}(i\sqrt{a}) = i\sin\sqrt{a}$ определитель системы не равен нулю при условии $\sin\sqrt{a} \neq 0$. Следовательно, $\sqrt{a} \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $a \neq k^2\pi^2$.

Пусть $a = 0$. Тогда

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1x + C_2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3x + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Относительно постоянных C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ имеем систему уравнений

$$C_2 = 0, \quad C_3 + C_4 = 0, \quad C_1s = C_3s + C_4, \quad C_3 - C_1 = 1,$$

из которых находим

$$C_1 = s - 1, \quad C_3 = s, \quad C_4 = -s.$$

Следовательно,

$$G(x, s) = \begin{cases} (s - 1)x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ s(x - 1), & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $a \neq k^2\pi^2$ $(k \in \mathbb{N})$, то функция Грина данной задачи существует и единственна. ▶

Найти функцию Грина следующих краевых задач.

399. $(xy')' - (1 + x)y = f(x)$; $\quad y(1) = 0$, $|y(0)| < +\infty$.

◀ Для функции Грина имеем дифференциальное уравнение

$$xG''_{xx} + G'_x - (1 + x)G = 0, \ 0 < x \leqslant 1, \ x \neq s.$$

Применив подстановку $G = \varphi(x)U(x)$, где $\varphi(x) = e^x$, приводим уравнение к виду

$$xu'' + (2x + 1)u' = 0.$$

Последовательно интегрируя его, получаем

$$u' = \frac{C_1}{x} e^{-2x}, \quad u = C_1 \int \frac{e^{-2x}}{x}\, dx + C_2.$$

Если ввести в рассмотрение функцию Φ, где

$$\Phi(x) = \int_x^1 \frac{e^{-2t}}{t}\, dt,$$

то функцию u можно представить также в виде $u = C_1\Phi(x) + C_2$. Следовательно,

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^x \Phi(x) + C_2 e^x, & \text{если} \quad 0 < x < s, \\ C_3 e^x \Phi(x) + C_4 e^x, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Запишем теперь систему уравнений относительно C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$C_1 = 0$ (так как $\lim\limits_{x \to +0} \Phi(x) = +\infty$),

$C_4 = 0$ (поскольку $\Phi(1) = 0$),

$C_2 e^s = e^s C_3 \Phi(s)$ (так как функция G непрерывная),

$C_3 \left(\Phi(s) e^s - \dfrac{e^{-s}}{s} \right) - C_2 e^s = \dfrac{1}{s}$ (скачок производной G'_x).

Решив систему и подставив значения C_i в (1), получим окончательно

$$G(x, s) = \begin{cases} -e^{x+s} \displaystyle\int_s^1 \frac{e^{-2t}}{t}\, dt, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -e^{x+s} \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-2t}}{t}\, dt, & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

400. $\left(e^{-\frac{x^2}{2}} y' \right)' - e^{-\frac{x^2}{2}} y = f(x); \quad y(0) = y(1) = 0.$

◀ Функцию Грина G, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}} G'_x \right)' - e^{-\frac{x^2}{2}} G = 0, \ 0 < x < 1, \ x \neq s,$$

ищем в виде $G = e^{\frac{x^2}{2}} u(x)$, где функция u есть общее решение уравнения $xu' + u'' = 0$. Последовательно интегрируя его, получаем

$$u' = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u = C_1 \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + C_2.$$

Принимая во внимание, что производная G'_x разрывная при $x = s$, имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + C_2 e^{\frac{x^2}{2}}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + C_4 e^{\frac{x^2}{2}}, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Воспользуемся теперь краевыми условиями и известными свойствами функции Грина. Тогда получим следующую систему алгебраических уравнений относительно C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$C_2 = 0, \quad C_3 \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + C_4 = 0, \quad C_1 \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = C_3 \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + C_4,$$

$$C_3\left(1 + se^{\frac{s^2}{2}} \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) + se^{\frac{s^2}{2}} C_4 - C_1\left(1 + se^{\frac{s^2}{2}} \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) = e^{\frac{s^2}{2}},$$

из которой находим

$$C_1 = e^{\frac{s^2}{2}}\left(\frac{\psi(s) - \psi(1)}{\psi(1)}\right), \quad C_3 = e^{\frac{s^2}{2}}\frac{\psi(s)}{\psi(1)}, \quad C_4 = -e^{\frac{s^2}{2}}\psi(s), \quad \psi(s) = \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Подставив найденные значения C_i в (1), завершим этим самым процесс построения функции Грина G. Она имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\psi(1)} \displaystyle\int_1^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\psi(1)} \displaystyle\int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

401. $\left((x^2 - 1)y'\right)' - 2y = f(x)$; $|y(1)| < +\infty$, $y(2) = 0$.

◀ Очевидно, что функция $G = x$ удовлетворяет уравнению

$$\left((x^2 - 1)G'\right)' - 2G = 0, \quad x \in (1, 2), \ x \neq s.$$

Поэтому общее решение уравнения можно искать в виде

$$G = xu(x).$$

В этом случае функция u является решением уравнения

$$(4x^2 - 2)u' + (x^3 - x)u'' = 0, \quad x \neq s,$$

интегрируя которое, находим

$$u = C_1\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C_2, \quad x \neq s.$$

Следовательно,

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1\left(1 + \dfrac{x}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) + C_2x, & \text{если} \quad 1 < x < s, \\ C_3\left(1 + \dfrac{x}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) + C_4x, & \text{если} \quad s < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Из условия ограниченности $G(x, s)$ при $x \to 1$ вытекает, что $C_1 = 0$. Определяя известным способом оставшиеся C_i $(i = 2, 3, 4)$, имеем

$$C_2 = -\frac{\varphi(2)}{2}s + \varphi(s), \quad C_3 = s, \quad C_4 = -\frac{\varphi(2)}{2}s,$$

где $\varphi(s) = 1 + \frac{s}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|$.

Таким образом,

$$G(x, s) = \begin{cases} x\left(\varphi(s) + \frac{s}{2}(\ln 3 - 1)\right), & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant s, \\ s\left(\varphi(x) + \frac{x}{2}(\ln 3 - 1)\right), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 2. \end{cases} \blacktriangleright$$

402. Оценить сверху и снизу решение задачи $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$ и его первую производную, если известно, что y ограничена при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$, а функция f удовлетворяет условию $0 \leqslant f(x) \leqslant m$.

◀ Предоставляем читателю возможность убедиться в том, что функция Грина данной задачи имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x}{3s^2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{s}{3x^2}, & \text{если} \quad s \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Согласно формуле из п. 5.2, записываем решение задачи в виде

$$y(x) = \int_0^{+\infty} f(s)G(x, s)\,ds.$$

Теперь займемся требуемыми оценками. Поскольку

$$-y(x) = \int_0^{+\infty} f(s)(-G(x, s))\,ds \leqslant m \int_0^{+\infty} (-G(x, s))\,ds = m\left(\int_0^x \frac{s\,ds}{3x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{x}{3s^2}\,ds\right) = \frac{m}{2}$$

и $y \leqslant 0$, то для решения y имеем оценку

$$-\frac{m}{2} \leqslant y(x) \leqslant 0.$$

Далее,

$$y'(x) = \int_0^x f(s)G'_x(x, s)\,ds + \int_x^{+\infty} f(s)G'_x(x, s)\,ds = \int_0^x f(s)\,\frac{2s}{3x^3}\,ds - \int_x^{+\infty} \frac{f(s)}{3s^2}\,ds \leqslant m\int_0^x \frac{2s}{3x^3}\,ds = \frac{m}{3x},$$

$$y'(x) = \int_0^x f(s)\,\frac{2s}{3x^3}\,ds - \int_x^{+\infty} \frac{f(s)}{3s^2}\,ds \geqslant -m\int_x^{+\infty} \frac{ds}{3s^2} = -\frac{m}{3x}.$$

Таким образом, производная y' удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{m}{3x} \leqslant y'(x) \leqslant \frac{m}{3x} \quad (x > 0). \blacktriangleright$$

403. Свести к интегральному уравнению задачу Штурма—Лиувилля

$$-(1 + e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0 < x < 1, \; y(0) - 2y'(0) = 0, \; y'(1) = 0.$$

◀ Прежде всего займемся построением функции Грина следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -(1 + e^x)y'' - e^x y' = f(x), & 0 < x < 1, \\ y(0) - 2y'(0) = 0, \; y'(1) = 0. \end{cases}$$

Согласно п. 5.2, искомая функция G удовлетворяет условиям:

$$-(1 + e^x)G''_{xx} - e^x G'_x = 0, \quad x \in (0, 1), \quad x \neq s, \tag{1}$$

$$G(0, s) - 2G'_x(0, s) = 0, \quad G'_x(1, s) = 0, \quad G(s - 0, s) = G(s + 0, s),$$

$$G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = -\frac{1}{1 + e^s}.$$

Из уравнения (1) получаем:

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \ln\frac{e^x}{e^x + 1} + C_2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 \ln\frac{e^x}{e^x + 1} + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Используя краевые условия и свойства функции Грина, вычислим величины C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Затем, подставив их в выражение для функции Грина, закончим процесс ее построения. Она имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} x - \ln(e^x + 1) + 1 + \ln 2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ s - \ln(e^s + 1) + 1 + \ln 2, & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Теперь, в соответствии с п. 5.3, можем записать требуемое интегральное уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 s^2 y(s) G(x, s)\, ds. \blacktriangleright$$

404. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения $-2xy'' - y' = 2\lambda\sqrt{x}y$, $0 < x < 1$, при граничных условиях

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}y'\right) = 0, \quad y(1) = 0.$$

◀ Записав дифференциальное уравнение задачи в форме

$$\left(-\sqrt{x}y'\right)' = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$$

функцию Грина определяем из условий:

$$\left(-\sqrt{x}G'_x\right)'_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad x \neq s, \quad \lim_{x\to+0}\left(\sqrt{x}G'_x\right) = 0, \quad G(1, s) = 0,$$

$$G(s-0, s) = G(s+0, s), \quad G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = -\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} 2(1-\sqrt{s}), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ 2(1-\sqrt{x}), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) y(s)\, ds. \blacktriangleright$$

С помощью функции Грина решить следующие задачи.

405. $-\dfrac{xy''}{1+x} - \dfrac{y'}{(1+x)^2} = f(x)$, $1 < x < e$, $y(1) = 0$, $y(e) - ey'(e) = 0$, где e — основание натуральных логарифмов.

◀ Из уравнения

$$-\frac{xG''_{xx}}{1+x} - \frac{G'_x}{(1+x)^2} \equiv \left(\frac{xG'_x}{1+x}\right)' = 0, \quad x \neq s,$$

получаем:

$$\frac{xG'_x}{1+x} = \begin{cases} C_1, & \text{если} \quad x < s, \\ C_3, & \text{если} \quad x > s, \end{cases} \qquad G(x, s) = \begin{cases} C_1(x + \ln x) + C_2, & \text{если} \quad 1 \leqslant x < s, \\ C_3(x + \ln x) + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant e. \end{cases}$$

Пользуясь заданными краевыми условиями и свойствами функции Грина, находим

$$C_1 = s + \ln s, \quad C_2 = -s - \ln s, \quad C_3 = s + \ln s - 1, \quad C_4 = 0.$$

Следовательно,

$$G(x, s) = \begin{cases} (s + \ln s)(x + \ln x - 1), & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant s, \\ (x + \ln x)(s + \ln s - 1), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant e. \end{cases}$$

В соответствии с формулой (2), п. 5.4, решение поставленной задачи записывается в виде

$$y(x) = \int_1^e f(s) G(x, s)\, ds. \blacktriangleright$$

406. $-(1+\cos x)y'' + \sin x \cdot y' = f(x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y(0) - 2y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

◀ Из уравнения

$$-(1+\cos x)G''_{xx} + \sin x \cdot G'_x \equiv -\left((1+\cos x)G'_x\right)' = 0 \quad (x \neq s)$$

последовательным интегрированием получаем

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C_2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < s, \\ C_3 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C_4, & \text{если} \quad s < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Краевые условия и свойства функции Грина приводят к равенствам

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right), \quad C_3 = -\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right), \quad C_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right).$$

Таким образом,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

а решение поставленной задачи имеет вид

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, s) f(s)\, ds. \blacktriangleright$$

407. Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y'(a) - hy(a) = C_1, \quad y'(b) + Hy(b) = C_2$$

эквивалентна трем задачам Коши:

$$1) \quad -g' + g^2 = q(x); \quad g(a) = -h;$$

$$2) \quad Y' - g(x)Y = -f(x); \quad Y(a) = C_1;$$

$$3) \quad y' + g(x)y = Y(x); \quad y(b) = \frac{C_2 - Y(b)}{H - g(b)}.$$

◄ Дифференцируя уравнение 3) и используя при этом 1) и 2), имеем

$$y'' + g'(x)y + g(x)y' = Y'(x),$$

$$y'' + \left(-q(x) + q^2(x)\right)y + g(x)(Y(x) - g(x)y) = -f(x) + g(x)Y.$$

Отсюда получаем уравнение

$$-y'' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Подставив в 3) $x = a$, находим: $y'(a) + g(a)y(a) = Y(a)$, или

$$y'(a) - hy(a) = C_1. \tag{2}$$

Подставив в 3) $x = b$, имеем

$$y'(b) + g(b)y(b) = Y(b). \tag{3}$$

Но $y(b) = C_2 + y(b)(g(b) - H)$, поэтому из (3) следует

$$y'(b) + Hy(b) = C_2. \tag{4}$$

Таким образом, исходя из трех указанных задач Коши, получили краевую задачу (1), (2), (4). С другой стороны, дифференциальное уравнение краевой задачи можно представить в виде

$$\left(y' + g(x)y\right)' - g(x)\left(y' + g(x)y\right) = -f(x), \tag{5}$$

где

$$-g'(x) + g^2 = q(x). \tag{6}$$

Полагая в (5)

$$y' + g(x)y = Y(x), \tag{7}$$

получаем

$$Y' - g(x)Y = -f(x). \tag{8}$$

Далее, подставляя в (7) $x = a$, $x = b$ и пользуясь краевыми условиями, можем записать

$$C_1 - \Big(h + g(a)\Big)y(a) = Y(a), \quad C_2 - \Big(H - g(b)\Big)y(b) = Y(b).$$

Как видим, условий здесь два, а неизвестных три. Поэтому можно положить

$$g(a) = -h. \tag{9}$$

Тогда

$$Y(a) = C_1, \quad y(b) = \frac{C_2 - Y(b)}{H - g(b)}. \tag{10}$$

Следовательно, получили три задачи Коши (6)-(10). ▶

Примечание. Очевидно, что для справедливости проделанных операций необходимо, чтобы задача Коши (6), (9) имела решение на сегменте $[a, b]$.

408. Найти собственные значения и собственные функции задачи $y'' = \lambda y$; $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

◀ Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}x. \tag{1}$$

Использовав краевые условия, находим $C_2 = 0$, $C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}l = 0$.

Так как мы ищем те значения λ, при которых существуют ненулевые решения, то из последней системы уравнений следует, что $\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}l = 0$ ($\lambda \neq 0$). Отсюда, в силу тождества $\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}l = i \sin \sqrt{-\lambda}l$ получаем $\sqrt{-\lambda}l = k\pi$, $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ ($k \in \mathbb{N}$). Полагая в (1) $C_1 = i$, находим собственные функции $y_k = \sin \frac{k\pi x}{l}$ ($k \in \mathbb{N}$). ▶

Примечание. Собственные функции находятся, вообще говоря, с точностью до произвольного числового множителя. Однако для многих целей удобно записывать собственные функции в так называемом нормированном виде, подбирая каким-либо способом произвольный множитель. В данном случае множитель C_1 был выбран из условий: $\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} |y_k|^2\, dx = 1$ и y_k — действительная функция.

Упражнения для самостоятельной работы

Построить решения следующих задач Коши.

1. $y'' = y + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. **2.** $y''' = \sqrt{1 - y''^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

3. $y^{\mathrm{IV}} = x^{-2}y'' \sin\left(\frac{xy'''}{y''}\right)$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$, $y'''(1) = 1$.

4. $y''' = 6x^{-1}y'' + 16x^{-3}y - 16x^{-2}y' + x^{-3}(xy' - y)^{-1}(x^2y'' - 4xy' + 4y)^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 3$.

Произвести указанную замену переменных в линейных уравнениях:

5. $y'' + y = 0$, $x = t^2$. **6.** $x^3y''' + y'' = 0$, $x = \ln t$. **7.** $2y'' - 3y' + x^2y = 0$, $y = x^2v(x) + x$.

8. $y''' - xy' + xy = 0$, $x = t^3$, $y = tv(t)$.

Методом вариации произвольных постоянных проинтегрировать уравнения:

9. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$. **10.** $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$.

11. $y^{\mathrm{IV}} + y = \sin x$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. **12.** $y''' - 8iy = \cos 2x$.

Построить общее решение однородных и неоднородных уравнений, используя формулу Остроградского—Лиувилля.

13. $y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. **14.** $y''' + x^2y'' - 4xy' + 6y = x + 1$, $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3 - 1$.

15. $y'' + y' \operatorname{th} x - 2y = \operatorname{sh} x$. **16.** $y''' - \frac{1}{2}x^2y'' + xy' - y = x^2 + x$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Методом Эйлера построить общие решения следующих уравнений:

17. $y^{\mathrm{V}} - 10y''' + 9y' = 0$. **18.** $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0$. **19.** $y^{\mathrm{IV}} - y = 0$. **20.** $y^{\mathrm{V}} - 6y^{\mathrm{IV}} + 9y''' = 0$.

Методом неопределенных коэффициентов построить частные решения следующих уравнений:

21. $y'' - y = 2e^x - x^2$. **22.** $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$. **23.** $y'' + y = 4xe^x$. **24.** $y'' + y = x\sin x$.

Решить уравнения Эйлера:
25. $x\ y'' + xy' + 4y = 10x$. **26.** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 11x^2$. **27.** $(2x-1)y'' - 3(2x-1)y' + y = x$.
28. $(2x+3)y''' + 3(2x+3)y' - 3y = x$.

Построить решения следующих краевых задач:
29. $y'' - y' = 0,\ y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2,\ 0 < x < 1$.
30. $y'' + y = -x\cos x,\ 2y(0) - y'(0) + y(1) + 3y'(1) = -1,\ -y(0) + 4y'(0) - 2y(1) + 5y'(1) = 0,\ 0 < x < 1$.
31. $y'' - 2y' + y = e^{-x},\ y(0) + y'(2) = 0,\ y'(0) + 3y(2) = 1,\ 0 < x < 2$.
32. $y^{IV} + y = x^2,\ y'(0) + y'(\pi) = 2,\ y''(0) - 3y(\pi) = 3,\ y'''(0) - 5y'(\pi) = 1,\ y(0) = 0,\ 0 < x < \pi$.

Построить решения задач:
33. $y'' - y = 1,\ y(0) = 0,\ |y| < +\infty$ при $x \to +\infty$. **34.** $y'' - 2iy = 0,\ y(0) = -1,\ y(+\infty) = 0$.
35. $x^2y'' - 6y = 0,\ y(1) = 2,\ |y(0)| < +\infty$. **36.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y(1) = 3,\ y = o(x)$ при $x \to 0$.
37. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2x\sin x + (1+x^2)\cos x,\ x \in [-1, 1],\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty,\ y'(0) = 1$.

Найти собственные числа и собственные функции задач:
38. $y' + 2\lambda xy = 0,\ y(0) - y(1) = 0$. **39.** $y' + 3\lambda x^2y = 0,\ 2y(0) + 3y(2) = 0$.
40. $y' + 6\lambda x^5y = 0,\ y(0) + 6y(3) = 0$. **41.** $y'' + 3\lambda y' + 2\lambda^2y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$.
42. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) + 2y(0) - y(1) = 0,\ y'(1) + 3y(0) + 4y(1) = 0$.
43. $y''' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0,\ y'(0) + 3y(1) = 0$.
44. $y'' + x^{-1}y' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1,\ y(1) = 0,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty$.
45. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,\ -1 < x < 1,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty$.
46. $x^2y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1,\ y(1) = 0,\ y(+0) = 0$.

Следующие уравнения свести к самосопряженному виду:
47. $x^2y'' + xy' - x^3y + \lambda xy = 0$. **48.** $y'' + (x+1)y' - x^2y + \lambda x^3y = 0$.
49. $(x^3+1)y'' - (x+2)y' - x^4y + \lambda(x+5)y = 0$.

Построить особые кривые и особые решения уравнений:
50. $y'^2 - y^2 = 0$. **51.** $y'^2 - 4y^3 = 0$. **52.** $yy''^3 + x - 1 = 0$. **53.** $xy'''^2 - y'' = 0$.

Решить следующие дифференциальные задачи:
54. $\cos y'' = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2\pi$. **55.** $y''(y''^2 - 1) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.
56. $(y'' - 2)(y'' - 3) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 3$.

Понизить порядок следующих уравнений:
57. $6y''^2 - 5y''y^{IV} = 0$. **58.** $xy^{IV} + y''' = e^x$. **59.** $y'''y'^2 - y''^3 = 0$. **60.** $xy''' - y''(1-x) = 0$.
61. $yy'' - y'^2 - y' = 0$. **62.** $yy'' + y'^2 = 1$. **63.** $y'y''' - y''^2 - y'^2y'' = 0$. **64.** $y'''y^2 - y'^3 = 0$.

Проинтегрировать следующие уравнения:
65. $y'''^4 + 3y''' + 2 = 0$. **66.** $3(x^2y''')^2 + x^2y''' - 4 = 0$. **67.** $y''\ln x\sin(y''\ln x) + (y''\ln x)^2 - 2 = 0$.
68. $(xy''' - 1)(xy''' - 5) = 0$. **69.** $x^6 - y''^6 - 1 = 0$. **70.** $\sqrt{x} - y''' - 1 = 0$. **71.** $y'''^2 - y'^2 - 1 = 0$.
72. $y'' = e^{y'}$. **73.** $2y'y'' - y''^2 + 1 = 0$. **74.** $e^y - y'' = 0$. **75.** $y''^4 - y^4 - 1 = 0$. **76.** $y = xy' - y'^2$.
77. $y = 2xy' - \ln y'$. **78.** $x = \frac{1}{y'} + \ln y'$. **79.** $x = y'\sqrt{1+y'^2}$.

Глава 3

Системы дифференциальных уравнений

§ 1. Линейные системы

1.1. Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная матрица уравнения. Определитель Вронского.

Система уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

называется *неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами* $a_{ij}(t)$. Будем считать, что коэффициенты и свободные члены $f_j(t)$ являются непрерывными функциями на (a, b).

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

называется *однородной*. Вводя в рассмотрение векторы

$$x = \Big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\Big), \quad f = \Big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\Big)$$

и матрицу

$$A = (a_{ij}(t)),$$

уравнения (1), (2) можно представить в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f, \tag{1'}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2'}$$

Матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где x_{ij} — координаты линейно независимых решений (векторов) $\overline{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $\overline{x}_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$, $\ldots$, $\overline{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn})$ векторного уравнения (2'), называется *интегральной*, или *фундаментальной матрицей* этого уравнения. Иногда ее называют *матрицей Вронского*.

Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

составленный из частных решений системы (2), называется *определителем Вронского*. Для того чтобы матрица вида (3), где $x_{ij}(t)$ — частные решения системы уравнений (2), была интегральной, необходимо и достаточно, чтобы $\det X(t) = W(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$. При этом общее решение векторного уравнения (2′) представляется в виде

$$x(t) = X(t)C, \tag{5}$$

где C — произвольный постоянный вектор. Общее же решение уравнения (1′) будет

$$x(t) = X(t)C + \overline{x}(t), \tag{6}$$

где $\overline{x}(t)$ — какой-нибудь вектор, являющийся частным решением уравнения (1′).

1.2. Метод вариации произвольного вектора.

Если известна интегральная матрица уравнения (2′), то частное решение $\overline{x}(t)$ уравнения (1′) можно найти, пользуясь *методом вариации произвольного вектора* C. Этот вектор удовлетворяет уравнению

$$X(t)C'(t) = f(t). \tag{7}$$

Поскольку $\det X(t) = W(t) \neq 0$, то $\exists (X(t))^{-1}$ и $C'(t) = X(t)^{-1} f(t)$, откуда

$$C(t) = \int X(t)^{-1} f(t)\, dt + C_0, \tag{8}$$

где C_0 — произвольный постоянный вектор. Подставляя (8) в (5), имеем

$$x(t) = X(t)C_0 + X(t) \int X(t)^{-1} f(t)\, dt. \tag{9}$$

Сравнивая (6) и (9), получаем

$$\overline{x}(t) = X(t) \int X(t)^{-1} f(t)\, dt.$$

1.3. Матрицант.

Фундаментальная матрица Y уравнения (2′), удовлетворяющая начальному условию $Y(t_0) = E$, $a < t_0 < b$, E — единичная матрица, называется *матрицантом*. В общем случае матрицант находится из уравнения (2′) *методом последовательных приближений*:

$$X_{n+1}(t) = E + \int_{t_0}^{t} A(\tau) X_n(\tau)\, d\tau, \quad X_0 \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad t_0, t \in (a, b), \quad Y = \lim_{n \to \infty} X_n(t).$$

Случай Лапо—Данилевского. Если справедливо тождество

$$A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau \cdot A(t), \quad t_0, t \in (a, b),$$

то матрицант можно найти по формуле

$$Y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau \right), \tag{10}$$

где под $\exp(B)$ понимается матричный ряд:

$$\exp(B) = E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \ldots + \frac{1}{n!} B^n + \ldots.$$

Если матрицант известен, то решение начальной задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

находится с помощью формулы Коши:

$$x(t) = Y(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

1.4. Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Если $a_{ij} = \text{const}$, то система (1) называется *линейной неоднородной с постоянными коэффициентами*. Общее решение системы (2) можно найти, пользуясь *методом Эйлера*, который заключается в следующем. Ищем решение уравнения (2′) в виде

$$x = Be^{\lambda t}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — постоянный вектор, } \lambda \text{ — постоянная.}$$

Тогда из (2′) получаем уравнение $F(\lambda)B = 0$, где $F(\lambda) = A - \lambda E$. Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то

$$\det F(\lambda) = 0.$$

Это *характеристическое уравнение*. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — его простые корни. Тогда соответствующие им решения будут

$$x_1 = B_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = B_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_n = B_n e^{\lambda_n t}. \tag{13}$$

Векторы B_k, $k = \overline{1, n}$, являются решениями уравнений

$$F(\lambda_k)B_k = 0. \tag{14}$$

Произвольная линейная комбинация векторов (13)

$$x = \sum_{i=1}^{n} C_i B_i e^{\lambda_i t}, \tag{15}$$

где C_i — постоянные, есть общее решение уравнения (2′).

Далее, если среди корней характеристического уравнения имеется корень λ_s кратности $r \geqslant 2$, то соответствующее ему вектор-решение имеет вид

$$x_s = \left(E + F(\lambda_s)t + \frac{1}{2!}F^2(\lambda_s)t^2 + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}F^{r-1}(\lambda_s)t^{r-1}\right)A_s e^{\lambda_s t}, \tag{16}$$

где A_s — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$F^r(\lambda_s)A_s = 0. \tag{17}$$

В этом случае произвольная линейная комбинация векторов вида (13) и (16) составляет общее решение уравнения (2′).

Применяя метод исключения, решить следующие системы дифференциальных уравнений:

409. $\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y.$

◀ Разрешив первое уравнение относительно y и подставив во второе уравнение системы, получаем

$$y = \dot{x} - 2x, \quad (\dot{x} - 2x)' = 3x + 4(\dot{x} - 2x),$$

или

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ суть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Следовательно, общее решение последнего уравнения будет

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Подставив значение x в первое уравнение системы, найдем

$$y = \left(C_1 e^t + C_2 e^{5t}\right)' - 2\left(C_1 e^t + C_2 e^{5t}\right) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \blacktriangleright$$

410. $\dot{x} + y = t^2 + 6t + 1, \quad \dot{y} - x = -3t^2 + 3t + 1.$

◀ Подставляя значение $y = t^2 + 6t + 1 - \dot{x}$, найденное из первого уравнения системы, во второе уравнение, имеем

$$\ddot{x} + x = 3t^2 - t + 5. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем общее решение $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ — частное решение неоднородного уравнения, которое проще всего найти методом неопределенных коэффициентов. В результате будем иметь

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 3t^2 - t - 1.$$

Далее, подставив значение x в первое уравнение системы, найдем

$$y = C_2 \sin t - C_1 \cos t + t^2 + 2. \blacktriangleright$$

411. $\dot{x} = -x + y + z, \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = x + y - z.$

◀ Дифференцируя первое равенство и используя затем все три уравнения данной системы, имеем

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 3x - y - z = 3x - (\dot{x} + x) = 2x - \dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Далее, вычитая почленно из первого уравнения второе и учитывая уже известное значение для функции x, приходим к уравнению $\dot{y} + 2y = 3C_1 e^t$. Решив его, получим

$$y = C_3 e^{-2t} + C_1 e^t.$$

Наконец, подставляя x и y в первое уравнение системы, находим

$$z = \dot{x} + x - y = \left(C_1 e^t + C_2 e^{-2t}\right)' + \left(C_1 e^t + C_2 e^{-2t}\right) - C_3 e^{-2t} - C_1 e^t = C_1 e^t - (C_2 + C_3) e^{-2t}. \blacktriangleright$$

412. $\dot{x} = -y + z + 2x, \quad \dot{y} = x + 2y - z, \quad \dot{z} = x - y + 2z.$

◀ Продифференцировав третье равенство системы и воспользовавшись всеми уравнениями, имеем:

$$\ddot{z} = \dot{x} - \dot{y} + 2\dot{z} = 2x - y + z + 2(x - y + 2z) - (x + 2y - z) = 3x - 5y + 6z.$$

Дифференцируя полученное соотношение и пользуясь уравнениями системы еще раз, приходим к уравнению

$$\dddot{z} = 3\dot{x} - 5\dot{y} + 6\dot{z} = 7x - 19y + 20z.$$

Остается исключить переменные x и y из системы уравнений:

$$\dot{z} = x - y + 2z, \quad \ddot{z} = 3x - 5y + 6z, \quad \dddot{z} = 7x - 19y + 20z.$$

В результате исключения будем иметь одно уравнение относительно функции z:

$$\dddot{z} - 6\ddot{z} + 11\dot{z} - 6z = 0.$$

При этом

$$x = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{5}{2}\dot{z} - 2z, \quad y = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{3}{2}\dot{z}. \tag{1}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ суть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Следовательно, общее решение

$$z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \blacktriangleright$$

413. $\dot{x} = y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = x + z.$

◀ Путем дифференцирования первого равенства системы и использования двух других получаем уравнение: $\ddot{x} = y - z$, или $\ddot{x} = \dot{x}$. Общее решение полученного уравнения имеет вид:

$$x = C_1 + C_2 e^t.$$

Подставляя значение x в третье уравнение и интегрируя его, будем иметь

$$z = (C_3 + C_2 t) e^t - C_1.$$

Наконец, из первого уравнения получаем

$$y = e^t\left(C_3 + C_2(t+1)\right) - C_1. \blacktriangleright$$

414. $\dot{x} = 3x - y + z, \quad \dot{y} = x + y + z, \quad \dot{z} = 4x - y + 4z.$

◀ Аналогично проделанному в примере 412 имеем:

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} = 3(3x - y + z) - (x + y + z) + (4x - y + 4z) = 12x - 5y + 6z;$$

$$\dddot{x} = 12\dot{x} - 5\dot{y} + 6\dot{z} = 12(3x - y + z) - 5(x + y + z) + 6(4x - y + 4z) = 55x - 23y + 31z.$$

Исключив из системы

$$\dot{x} = 3x - y + z, \quad \ddot{x} = 12x - 5y + 6z, \quad \dddot{x} = 55x - 23y + 31z$$

переменные y, z, получим дифференциальное уравнение относительно функции x:

$$\dddot{x} - 8\ddot{x} + 17\dot{x} - 10x = 0. \tag{1}$$

При этом

$$y = \ddot{x} - 6\dot{x} + 6x, \quad z = \ddot{x} - 5\dot{x} + 3x. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}. \tag{3}$$

Используя (3), из (2) находим

$$y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \quad z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}. \blacktriangleright$$

415. $\ddot{x} = 3x + 4y, \quad \ddot{y} = -x - y.$

◀ Определив x из второго уравнения системы и подставив его в первое уравнение, получим

$$(-\ddot{y} - y)'' = 3(-\ddot{y} - y) + 4y, \quad y^{IV} - 2\ddot{y} + y = 0.$$

Решив последнее уравнение, будем иметь

$$y = (C_1 + C_2t)e^t + (C_3 + C_4t)e^{-t}.$$

Наконец, из второго уравнения находим

$$x = -\ddot{y} - y = 2(C_4 - C_3 - C_4t)e^{-t} - 2(C_1 + C_2 + C_2t)e^t. \blacktriangleright$$

416. $\ddot{x} = 3x - y - z, \quad \ddot{y} = -x + 3y - z, \quad \ddot{z} = -x - y + 3z.$

◀ Дифференцируя первое равенство дважды и учитывая все три уравнения системы, получаем $x^{IV} = 3\ddot{x} - \ddot{y} - \ddot{z} = 3(3x - y - z) - (-x + 3y - z) - (-x - y + 3z) = 11x - 5y - 5z = 11x + 5(\ddot{x} - 3x)$, или

$$x^{IV} - 5\ddot{x} + 4x = 0.$$

Решив это уравнение известным способом, имеем

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-2t}. \tag{1}$$

Вычитая почленно из первого уравнения системы второе и пользуясь решением (1), можем записать:

$$\ddot{y} - 4y = -3C_1e^t - 3C_2e^{-t},$$

откуда

$$y = C_5e^{2t} + C_6e^{-2t} + C_1e^t + C_2e^{-t}. \tag{2}$$

Наконец, подставляя решения (1), (2) в первое уравнение системы, находим

$$z = C_1e^t + C_2e^{-t} - (C_3 + C_5)e^{2t} - (C_4 + C_5)e^{-2t}. \blacktriangleright$$

417. $\ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \quad \dot{x} - \dot{y} + x = 0.$

◀ Складывая почленно оба уравнения системы, имеем $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2y$, откуда находим

$$y = \frac{1}{2}(\ddot{x} + 2\dot{x} + x). \tag{1}$$

Подставляя значение y из (1) во второе уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение относительно функции x:

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0.$$

Решив его, будем иметь $x = C_1e^{-2t} + C_2e^t + C_3e^{-t}$. Учитывая полученное решение, из (1) находим

$$y = \frac{1}{2}C_1e^{-2t} + 2C_2e^t. \blacktriangleright$$

418. $\ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \quad 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0.$

◀ Умножив почленно первое уравнение на 2 и сложив со вторым, приходим к равенству

$$2\dot{y} - \dot{x} - y = 0. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) и учитывая первое уравнение системы, получаем $x = 3y$. Подставляя значение x в (1), имеем дифференциальное уравнение $\dot{y} + y = 0$, из которого легко находим

$$y = Ce^{-t}.$$

А тогда

$$x = 3Ce^{-t}. \blacktriangleright$$

419. $\ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \quad \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0.$

◀ Сложив почленно эти уравнения, получим $(2x - y)'' = 2x - y$, откуда $2x - y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Подставив значение

$$y = 2x - C_1e^t - C_2e^{-t} \tag{1}$$

в первое уравнение системы, будем иметь дифференциальное уравнение для функции x:

$$\ddot{x} - 4x + 3C_1e^t - C_2e^{-t} = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$x = C_3e^{2t} + C_4e^{-2t} + C_1e^t - \frac{1}{3}C_2e^{-t}. \tag{2}$$

Наконец, подставив (2) в (1), имеем

$$y = 2C_3e^{2t} + 2C_4e^{-2t} + C_1e^t - \frac{5}{3}C_2e^{-t}. \blacktriangleright$$

420. $2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \quad \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0.$

◀ Разрешив систему уравнений относительно старших производных, имеем

$$\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y} - 2x - 2y, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} - \dot{y} + x + y. \tag{1}$$

Дифференцируя последовательно два раза первое равеиство системы (1) и пользуясь при этом ее уравнениями, можем записать:

$$\dddot{x} = -\dot{y} - 3x - 3y, \quad x^{IV} = -\dot{x} - 2\dot{y} - x - y. \tag{2}$$

Разрешив систему (2) относительно y и $\dot{y}$ и подставив их значения в первое уравнение системы (1), получим уравнение для функции x:

$$x^{IV} - \dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} = 0.$$

При этом

$$y = \frac{1}{5}\left(x^{IV} - 2\dddot{x} + \dot{x} - 5x\right). \tag{3}$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$x = C_1 + C_2e^t + C_3\cos t + C_4\sin t.$$

Наконец, подставив значение x в (3), окончательно находим

$$y = -C_1 - C_2e^t + \frac{1}{5}(-4C_3 + 3C_4)\cos t - \frac{1}{5}(4C_4 + 3C_3)\sin t. \blacktriangleright$$

Применяя метод Эйлера, решить следующие системы уравнений:

421. $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = y - 4x.$

◀ Согласно методу Эйлера частные решения системы ищем в виде

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}, \quad A, B, \lambda \text{ — постоянные.} \tag{1}$$

Подставив (1) в систему, имеем алгебраическую систему

$$A\lambda = A - B, \quad B\lambda = B - 4A, \tag{2}$$

из которой в силу нетривиальности искомых решений следует, что определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\lambda-1)^2-4=0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$ — простые. Следовательно, частные решения, им соответствующие, имеют вид:

$$x_1=A_1e^{3t},\quad x_2=A_2e^{-t},\quad y_1=B_1e^{3t},\quad y_2=B_2e^{-t}.$$

Связь между постоянными A_k, B_k мы найдем, воспользовавшись системой уравнений (2). Имеем $A_1\lambda_1=A_1-B_1$, $\lambda_2A_2=A_2-B_2$ (вторые уравнения являются следствием записанных), откуда находим $B_1=-2A_1$, $B_2=2A_2$. В силу произвольности A_1 и A_2 можем, например, положить, что $A_1=A_2=1$. Тогда $B_1=-2$, $B_2=2$. Таким образом, фундаментальная матрица запишется в виде:

$$X(t)=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t}\\ -2e^{3t} & 2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Общее решение в векторной форме, согласно (5) п. 1.1, будет

$$x(t)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=X(t)C=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t}\\ -2e^{3t} & 2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{3t}+C_2e^{-t}\\ -2C_1e^{3t}+2C_2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\quad y=-2C_1e^{3t}+2C_2e^{-t}.\ \blacktriangleright$$

422. $\dot x=x-y+z$, $\dot y=x+y-z$, $\dot z=2x-y$.

◀ Ищем решения в виде

$$x=Ae^{\lambda t},\quad y=Be^{\lambda t},\quad z=Ce^{\lambda t}. \tag{1}$$

Подставив (1) в систему, имеем

$$A(\lambda-1)+B-C=0,\quad -A+B(\lambda-1)+C=0,\quad -2A+B+C\lambda=0. \tag{2}$$

Поскольку мы ищем ненулевые решения, то должны положить

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1\\ -2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0,$$

откуда $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ — простые. Поэтому частные решения представляются следующим образом:

$$x_1=A_1e^t,\quad x_2=A_2e^{2t},\quad x_3=A_3e^{-t},$$
$$y_1=B_1e^t,\quad y_2=B_2e^{2t},\quad y_3=B_3e^{-t},$$
$$z_1=C_1e^t,\quad z_2=C_2e^{2t},\quad z_3=C_3e^{-t}.$$

Для установления связи между постоянными A_k, B_k, C_k пользуемся системой (1). Имеем

$$A_k(\lambda_k-1)+B_k-C_k=0,\quad -A_k+B_k(\lambda_k-1)+C_k=0,\quad -2A_k+B_k+C_k\lambda_k=0,\quad k=1,2,3.$$

Нетрудно получить решения последней системы:

$$B_1=A_1=C_1;\quad A_2=C_2,\quad B_2=0;\quad B_3=-3A_3,\quad C_3=-5A_3.$$

Поскольку часть из найденных постоянных произвольна, то можно положить $C_1=1$, $C_2=1$, $A_3=1$. Тогда $B_1=A_1=1$; $A_2=1$; $B_3=-3$, $C_3=-5$. Таким образом, фундаментальная матрица рассматриваемой дифференциальной системы имеет вид:

$$X(t)=\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t}\\ e^t & 0 & -3e^{-t}\\ e^t & e^{2t} & -5e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Общее решение будет

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=X(t)\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}\\ C_1e^t-3C_3e^{-t}\\ C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}\end{pmatrix},$$

откуда

$$x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\quad y=C_1e^t-3C_3e^{-t},\quad z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\ \blacktriangleright$$

423. $\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = x + 3y - z, \quad \dot{z} = -x + 2y + 3z.$

◀ Действуя аналогично предыдущему примеру, имеем $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_3 = 3 - i$. При этом частные решения будут

$$x_1 = A_1 e^{2t}, \quad x_2 = A_2 e^{(3+i)t}, \quad x_3 = A_3 e^{(3-i)t},$$
$$y_1 = B_1 e^{2t}, \quad y_2 = B_2 e^{(3+i)t}, \quad y_3 = B_3 e^{(3-i)t},$$
$$z_1 = C_1 e^{2t}, \quad z_2 = C_2 e^{(3+i)t}, \quad z_3 = C_3 e^{(3-i)t}.$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, $k = 1, 2, 3$, пользуемся системой алгебраических уравнений:

$$A_k(\lambda_k - 2) - B_k = 0, \quad -A_k + B_k(\lambda_k - 3) + C_k = 0, \quad A_k - 2B_k + C_k(\lambda_k - 3) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Решив систему уравнений относительно A_k, B_k, C_k, получаем:

$$B_1 = 0, \quad A_1 = C_1 = 1; \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 1 + i, \quad C_2 = 2 - i; \quad A_3 = 1, \quad B_3 = 1 - i, \quad C_3 = 2 + i.$$

Следовательно, фундаментальную матрицу можно записать в виде:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t}(\cos t + i \sin t) & e^{3t}(\cos t - i \sin t) \\ 0 & (1+i)e^{3t}(\cos t + i \sin t) & (1-i)e^{3t}(\cos t - i \sin t) \\ e^{2t} & (2-i)e^{3t}(\cos t + i \sin t) & (2+i)e^{3t}(\cos t - i \sin t) \end{pmatrix}.$$

А тогда согласно (5), п. 1.1,

$$x = C_1 e^{2t} + \tilde{C}_2 e^{3t}(\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_3 e^{3t}(\cos t - i \sin t),$$
$$y = \tilde{C}_2(1+i)e^{3t}(\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_3 e^{3t}(1-i)(\cos t - i \sin t),$$
$$z = C_1 e^{2t} + \tilde{C}_2(2-i)e^{3t}(\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_3(2+i)e^{3t}(\cos t - i \sin t),$$

где C_1, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ — произвольные (вообще говоря, комплексные) постоянные. В частности, если положить $\tilde{C}_2 = C_2 + iC_3$, $\tilde{C}_3 = C_2 - iC_3$, где C_2, C_3 — действительные постоянные, то из (2), считая что C_1 — действительная постоянная, можно получить общее решение данной системы дифференциальных уравнений уже в действительной форме:

$$x = C_1 e^{2t} + 2e^{3t}(C_2 \cos t - C_3 \sin t),$$
$$y = 2e^{3t}\big((C_2 - C_3)\cos t - (C_2 + C_3)\sin t\big),$$
$$z = C_1 e^{2t} + 2e^{3t}\big((2C_2 + C_3)\cos t + (C_2 - 2C_3)\sin t\big). \blacktriangleright$$

424. $\dot{x} = 2x + 2z - y, \quad \dot{y} = x + 2z, \quad \dot{z} = -2x + y - z.$

◀ Нетрудно найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Они имеют вид: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Поэтому, как и в предыдущих примерах, можно записать частные решения данной системы:

$$x_1 = A_1 e^{t}, \quad x_2 = A_2 e^{it}, \quad x_3 = A_3 e^{-it},$$
$$y_1 = B_1 e^{t}, \quad y_2 = B_2 e^{it}, \quad y_3 = B_3 e^{-it}, \qquad (1)$$
$$z_1 = C_1 e^{t}, \quad z_2 = C_2 e^{it}, \quad z_3 = C_3 e^{-it},$$

где постоянные A_k, B_k, C_k, $k = 1, 2, 3$, связаны соотношениями

$$A_k(\lambda_k - 2) + B_k - 2C_k = 0, \quad -A_k + B_k\lambda_k - 2C_k = 0, \quad 2A_k - B_k + C_k(\lambda_k + 1) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Решив эти алгебраические системы уравнений, имеем:

$$A_1 = 0, \ B_1 = 2C_1; \quad A_2 = B_2, \ C_2 = \frac{1}{2}(-A_2 + iB_2); \quad A_3 = B_3, \ C_3 = \frac{1}{2}(-A_3 - iB_3).$$

В частности,

$$C_1 = 1, \ B_1 = 2; \quad A_2 = B_2 = 2, \ C_2 = i - 1; \quad A_3 = B_3 = 2, \ C_3 = -1 - i.$$

А тогда из (1) следует, что фундаментальную матрицу можно сформировать так:

$$X(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2e^{it} & 2e^{-it} \\ 2e^{t} & 2e^{it} & 2e^{-it} \\ e^{t} & (i-1)e^{it} & -(1+i)e^{-it} \end{pmatrix};$$

а общее решение данной системы будет

$$x=2\tilde{C}_2e^{it}+2\tilde{C}_3e^{-it},\quad y=2C_1e^{t}+2\tilde{C}_2e^{it}+2\tilde{C}_3e^{-it},\quad z=C_1e^{t}+\tilde{C}_2(i-1)e^{it}-\tilde{C}_3(1+i)e^{-it}.$$

Положив здесь $\tilde{C}_2=C_2+iC_3$, $\tilde{C}_3=C_2-iC_3$, где C_2, C_3 — действительные постоянные, общее решение можно получить в действительной форме:

$x=4(C_2\cos t-C_3\sin t)$, $y=2C_1e^{t}+4(C_2\cos t-C_3\sin t)$, $z=C_1e^{t}-2(C_2+C_3)\cos t-2(C_2-C_3)\sin t$. ▶

425. $\dot{x}=-2x+y-2z,\quad \dot{y}=x-2y+2z,\quad \dot{z}=3x-3y+5z.$

◀ Поскольку среди корней характеристического уравнения имеются кратные ($\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$), то, согласно формуле (16), п. 1.4, частное вектор-решение, соответствующее этому корню, ищем в виде:

$$x_2=\left(E+F(\lambda_2)t\right)A_2e^{-t}, \tag{1}$$

где

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F(\lambda_2)=\begin{pmatrix} -2-\lambda_2 & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda_2 & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda_2 \end{pmatrix},$$

а вектор $A_2=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению:

$$F^2(\lambda_2)A_2=0,\quad \text{или}\quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 12 & -12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=0,$$

что соответствует одному скалярному уравнению $a_1-a_2+2a_3=0$, или $a_1=a_2-2a_3$ (a_2, a_3 — произвольные постоянные). Таким образом, приняв во внимание равенство $F(\lambda_2)A_2=0$, согласно (1) имеем вектор-решение

$$x_2=\begin{pmatrix} a_2-2a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}e^{-t}. \tag{2}$$

Вектор-решение, соответствующее корню λ_1, имеет вид $x_1=B_1e^{3t}$, где постоянный вектор B_1 удовлетворяет уравнению (см.(14), п. 1.4):

$$F(\lambda_1)B_1=0$$

или

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=0.$$

Легко получить одно из решений этой системы:

$$b_1=-1,\quad b_2=1,\quad b_3=3.$$

Произвольная линейная комбинация вектор-решений есть общее решение x данной системы дифференциальных уравнений, поэтому

$$x=C_1x_1+\tilde{C}_2x_2=\begin{pmatrix} -C_1e^{3t} \\ C_1e^{3t} \\ 3C_1e^{3t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tilde{C}_2(a_2-2a_3)e^{-t} \\ \tilde{C}_2a_2e^{-t} \\ \tilde{C}_2a_3e^{-t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C_1e^{3t}+\tilde{C}_2(a_2-2a_3)e^{-t} \\ C_1e^{3t}+\tilde{C}_2a_2e^{-t} \\ 3C_1e^{3t}+\tilde{C}_2a_3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Положив здесь $\tilde{C}_2a_2=C_2$, $\tilde{C}_2a_3=C_3$ и приняв во внимание, что $x=(x, y, z)$, окончательно имеем:

$$x=-C_1e^{3t}+(C_2-2C_3)e^{-t},\quad y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\quad z=3C_1e^{3t}+C_3e^{-t}.\ ▶$$

426. $\dot{x} = 2x - y - z, \quad \dot{y} = 2x - y - 2z, \quad \dot{z} = -x + y + 2z.$

◀ Характеристическое уравнение данной системы имеет лишь один трехкратный корень $\lambda = -1$, поэтому, согласно формуле (16), п. 1.4, можем записать:

$$x = \left(E + F(\lambda)t + \frac{1}{2}F^2(\lambda)t^2\right)Ae^t,$$

где

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор A удовлетворяет уравнению $F^2(\lambda)A = 0$ (см. (17), п. 1.4) и в силу тождества $F^2(\lambda) \equiv 0$ является произвольным. Таким образом, общее решение в векторной форме имеет вид:

$$x = (x, y, z) = \left(E + F(\lambda)t\right)Ae^t = \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}e^t.$$

Отсюда находим

$$x = e^t\left(C_1(1+t) - (C_2+C_3)t\right), \quad y = e^t\left(2C_1t + C_2(1-2t) - 2C_3t\right), \quad z = e^t\left(-C_1t + C_2t + C_3(1+t)\right),$$

или

$$x = e^t\left(C_1 + (C_1 - C_2 - C_3)t\right), \quad y = e^t\left(C_2 + 2(C_1 - C_2 - C_3)t\right), \quad z = e^t\left(C_3 + (-C_1 + C_2 + C_3)t\right). \blacktriangleright$$

427. $\dot{x} = 4x - y, \quad \dot{y} = 3x + y - z, \quad \dot{z} = x + z.$

◀ Нетрудно убедиться, что $\lambda = 2$ — трехкратный корень характеристического уравнения, поэтому, согласно формуле (16), п. 1.4, общее решение данной системы имеет вид:

$$x = (x, y, z) = \left(E + F(\lambda)t + \frac{1}{2}F^2(\lambda)t^2\right)Ae^{2t}, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ — произвольный постоянный вектор,

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^3(\lambda) = 0. \tag{2}$$

Из представления (1) на основании (2) следует общее решение в скалярной форме:

$$x = e^{2t}\left(C_1 + (2C_1 - C_2)t + \frac{1}{2}(C_1 - C_2 + C_3)t^2\right),$$

$$y = e^{2t}\left(C_2 + (3C_1 - C_2 - C_3)t + (C_1 - C_2 + C_3)t^2\right),$$

$$z = e^{2t}\left(C_3 + (C_1 - C_3)t + \frac{1}{2}(C_1 - C_2 + C_3)t^2\right). \blacktriangleright$$

428. $\ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0, \quad \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0.$

◀ Ищем частные решения в виде $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Подстановка их в систему дает

$$A(\lambda^2 - 1) + 2B(\lambda^2 - 1) = 0, \quad A(\lambda - 1) + B(\lambda + 1) = 0. \tag{1}$$

Отсюда в силу условия $A \neq 0$ и $B \neq 0$ следует, что

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2(\lambda^2 - 1) \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

или $(\lambda^2 - 1)(3 - \lambda) = 0$. Таким образом, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ — простые корни характеристического уравнения (2). Им соответствуют следующие частные решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1e^t, \quad x_2 = A_2e^{-t}, \quad x_3 = A_3e^{3t}, \\ y_1 &= B_1e^t, \quad y_2 = B_2e^{-t}, \quad y_3 = B_3e^{3t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Связь между коэффициентами A_k, B_k, $k = 1, 2, 3$, мы найдем, последовательно подставляя корни λ_k, $k = 1, 2, 3$, в систему (1). Имеем

$$A_k(\lambda_k^2 - 1) + 2B_k(\lambda_k^2 - 1) = 0, \quad A_k(\lambda_k - 1) + B_k(\lambda_k + 1) = 0.$$

Отсюда находим $B_1 = 0$ (A_1 — произвольно); $A_2 = 0$ (B_2 — произвольно); $B_3 = -1$, $A_3 = 2$. Учитывая эти соотношения и полагая, например, $A_1 = B_2 = 1$, из частных решений (3) комбинируем общее решение данной системы дифференциальных уравнений:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = C_1e^t + 2C_3e^{3t}, \quad y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = C_2e^{-t} - C_3e^{3t}. \blacktriangleright$$

429. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \quad 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0.$

◀ Полагая $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, как и в предыдущем примере, имеем

$$A(\lambda^2 + 5\lambda) + B(2\lambda + 1) = 0, \quad A(3\lambda^2 + 5) + B(\lambda + 3) = 0, \tag{1}$$

откуда, учитывая условие $A \neq 0$ и $B \neq 0$, находим $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Частные решения, соответствующие простому корню, имеют вид:

$$x_3 = A_3e^{-t}, \quad y_3 = B_3e^{-t}.$$

Связь между A_3 и B_3 находим из системы (1) известным способом: $B_3 = -4A_3$. Поэтому, положив, например, $A_3 = -1$, имеем $B_3 = 4$. Следовательно, частные решения, соответствующие корню $\lambda_3 = -1$, будут $x_3 = -e^{-t}$, $y_3 = 4e^{-t}$.

Далее, в силу того, что $\lambda = 1$ — двукратный корень, мы должны искать частные решения, соответствующие этому корню, в виде:

$$x = (a + bt)e^t, \quad y = (c + dt)e^t, \tag{2}$$

где a, b, c, d — пока неизвестные постоянные. Для их определения подставим (2) в данную систему уравнений. После некоторых упрощений, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему уравнений:

$$6a + 7b + 3c + 2d = 0, \quad 2b + d = 0, \quad 8a + 6b + 4c + d = 0,$$

из которой находим $d = -2b$, $c = -2a - b$, где a, b — произвольные постоянные. Таким образом, общее решение представляется следующим образом:

$$x = (a + bt)e^t - C_3e^{-t}, \quad y = (-2a - b - 2bt)e^t + 4C_3e^{-t}. \blacktriangleright$$

Применяя метод вариации, решить следующие системы:

430. $\dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \quad \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}.$

◀ Прежде всего решаем однородную систему уравнений, соответствующую данной системе:

$$\dot{x} = -4x - 2y, \quad \dot{y} = 6x + 3y.$$

Подставив значение $y = -2x - \frac{1}{2}\dot{x}$ во второе уравнение, получаем $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, откуда $x = C_1 + C_2e^{-t}$ А тогда $y = -2C_1 - \frac{3}{2}C_2e^{-t}$. Для определения общего решения неоднородной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем C_1 и C_2 некоторыми дифференцируемыми функциями. Эти функции мы найдем из системы уравнений, которая получается в результате подстановки значений x и y в неоднородную систему. Таким образом, мы имеем:

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1}, \quad -2\dot{C}_1 - \frac{3}{2}\dot{C}_2e^{-t} = -\frac{3}{e^t - 1}.$$

Отсюда находим $\dot{C}_2 = \dfrac{2e^t}{e^t - 1}$, $\dot{C}_1 = 0$. Интегрируя последние уравнения, получаем

$$C_1 = C_{10}, \quad C_2 = 2\ln|e^t - 1| + C_{20},$$

где C_{10}, C_{20} — произвольные постоянные. Наконец, подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение однородной системы, имеем общее решение данной системы:

$$x = C_1 + C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t - 1|,$$

$$y = -2C_1 - \frac{3}{2}C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t - 1|,$$

где C_1, C_2 — новые произвольные постоянные. ▶

431. $\dot{x} = x - y - \dfrac{1}{\cos t}, \quad \dot{y} = 2x - y.$

◀ Легко найти (хотя бы методом исключения) общее решение соответствующей однородной системы

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad y = (C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t. \tag{1}$$

Считая (в согласии с методом вариации произвольных постоянных), что C_1 и C_2 — некоторые дифференцируемые функции, и подставляя значения x и y из (1) в данную систему, будем иметь

$$\dot{C}_1 \cos t - \dot{C}_2 \sin t = \frac{1}{\cos t}, \quad \dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = \frac{1}{\cos t},$$

откуда находим $\dot{C}_1 = 1 + \operatorname{tg} t$, $\dot{C}_2 = 1 - \operatorname{tg} t$. Интегрируя эти уравнения, имеем

$$C_1 = t - \ln|\cos t| + C_{10}, \quad C_2 = t + \ln|\cos t| + C_{20}. \tag{2}$$

Наконец, подставляя (2) в (1), получаем общее решение предложенной системы:

$$x = t(\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t| + C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$
$$y = 2t \sin t + 2\cos t + \ln|\cos t| + (C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t,$$

где C_1, C_2 — новые произвольные постоянные. ▶

Решить следующие системы:

432. $t\dot{x} + 2(x - y) = t, \quad t\dot{y} + x + 5y = t^2.$

◀ Производя замену аргумента t по формуле $\tau = \ln|t|$, $t \neq 0$, приходим к неоднородной системе с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{d\tau} + 2(x - y) = \pm e^{\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} + x + 5y = e^{2\tau}.$$

Определив из второго уравнения системы

$$x = e^{2\tau} - 5y - \frac{dy}{d\tau} \tag{*}$$

и подставив его в первое уравнение, получаем

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 4e^{2\tau} \mp e^{\tau}. \tag{1}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$, поэтому общее решение однородного уравнения $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$ запишется в виде $y = C_1 e^{-4\tau} + C_2 e^{-3\tau}$. Частное решение $\tilde{y}$ рассматриваемого неоднородного уравнения ищем, используя метод неопределенных коэффициентов, в таком виде:

$$\tilde{y} = Ae^{2\tau} + Be^{\tau}.$$

Подставляя $\tilde{y}$ в неоднородное уравнение и приравнивая в полученном тождестве коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа, будем иметь: $A = \frac{2}{15}$, $B = \pm\frac{1}{20}$. Таким образом, $\tilde{y} = \frac{2}{15}e^{2\tau} \pm \frac{1}{20}e^{\tau}$. А тогда общее решение

$$y = C_1 e^{-4\tau} + C_2 e^{-3\tau} + \frac{2}{15}e^{2\tau} \pm \frac{1}{20}e^{\tau}.$$

Подставляя значение y в (*), получаем

$$x = -C_1 e^{-4\tau} - 2C_2 e^{-3\tau} + \frac{7}{3}e^{2\tau} \mp \frac{3}{10}e^{\tau}.$$

Вернувшись к аргументу t, имеем окончательно

$$x = -\frac{C_1}{t^4} - \frac{2C_2}{|t|^3} + \frac{t^2}{15} \mp \frac{3|t|}{10}, \quad y = \frac{C_1}{t^4} + \frac{C_2}{|t|^3} + \frac{2}{15}t^2 \pm \frac{1}{20}|t|, \quad t \neq 0. \blacktriangleright$$

433. $t\dot{x} + 6x - y - 3z = 0, \quad t\dot{y} + 23x - 6y - 9z = 0, \quad t\dot{z} + x + y - 2z = 0.$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем: $\tau = \ln|t|$, $t \neq 0$, и

$$\frac{dx}{d\tau} + 6x - y - 3z = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} + 23x - 6y - 9z = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} + x + y - 2z = 0. \tag{1}$$

Полученную систему уравнений с постоянными коэффициентами будем решать методом Эйлера, положив $x = Ae^{\lambda\tau}$, $y = Be^{\lambda\tau}$, $z = Ce^{\lambda\tau}$. Тогда относительно постоянных A, B, C получим линейную систему

$$A(6+\lambda) - B - 3C = 0, \quad 23A + B(\lambda - 6) - 9C = 0, \quad A + B + C(\lambda - 2) = 0,$$

из которой в силу условий $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ следует, что определитель

$$\begin{vmatrix} 6+\lambda & -1 & -3 \\ 23 & \lambda - 6 & -9 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Легко найти корни этого уравнения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Следовательно, общее решение системы (1) имеет вид:

$$x = C_1e^{2\tau} + 3C_2e^{\tau} - C_3e^{-\tau}, \quad y = C_1e^{2\tau} + 2C_2e^{\tau} + C_3e^{-\tau}, \quad z = C_1e^{2\tau} + 2C_2e^{\tau} + C_3e^{-\tau}.$$

Возвращаясь к переменной t, общее решение данной системы записываем окончательно:

$$x = C_1t^2 + C_2|t| + \frac{C_3}{|t|}, \quad y = -C_1t^2 + C_2|t| + \frac{2C_3}{|t|}, \quad z = 3C_1t^2 + 2C_2|t| + \frac{C_3}{|t|}. \blacktriangleright$$

434. $\dfrac{dx}{dt} = x\varphi(t) + y\psi(t), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x\psi(t) + y\varphi(t).$

◀ Полагая

$$x = \alpha(t)f(t), \quad y = \beta(t)f(t), \tag{1}$$

получаем

$$\alpha' f + \alpha f' = \alpha f\varphi + \beta f\psi, \quad \beta' f + \beta f' = -\alpha f\psi + f\beta\varphi. \tag{2}$$

Пусть $f' = f\varphi \neq 0$. Тогда система (2) примет вид:

$$\alpha' = \beta\psi, \quad \beta' = -\alpha\psi, \tag{3}$$

α, β — неизвестные функции. Производя замену аргумента по формуле

$$\tau = \int \psi(t)\,dt, \tag{4}$$

систему (3) приводим к системе с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \beta, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = -\alpha. \tag{5}$$

Решив систему (5) и вернувшись к переменной t согласно (4), а также приняв во внимание (1) и выбрав функцию $f = \exp(\int \varphi(t)\,dt)$, окончательно имеем

$$x = \left(-C_1\cos\left(\int \psi(t)\,dt\right) + C_2\sin\left(\int \psi(t)\,dt\right)\right)\exp\left(\int \varphi(t)\,dt\right),$$

$$y = \left(C_1\sin\left(\int \psi(t)\,dt\right) + C_2\cos\left(\int \psi(t)\,dt\right)\right)\exp\left(\int \varphi(t)\,dt\right). \blacktriangleright$$

Примечание. В примерах 432–434 мы пользовались заменой аргумента $\tau = \int f(t)\,dt$, которая применяется в общем случае к системе уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t)Ax,$$

где A — постоянная матрица. Указанная замена преобразует приведенную систему к системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax.$$

435. В некоторой области пространства одновременно имеются однородные и стационарные электрическое и магнитное поля с векторами напряженности **E** и **H**, угол между которыми

равен α. Частица с массой m и зарядом e, имеющая начальную скорость $\mathbf{v}_0$, попадает в это пространство. Определить траекторию движения частицы.

◀ На движущуюся в электромагнитном поле заряженную частицу действует сила Лоренца

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + e[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор частицы. Поэтому, согласно второму закону Ньютона, имеем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}]. \tag{1}$$

Если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ расположить в плоскости zOy и направить вектор $\mathbf{H}$ вдоль оси Oz, то векторное уравнение (1) можно представить в координатной форме:

$$m\ddot{x} = e\dot{y}H, \quad m\ddot{y} = eE\sin\alpha - e\dot{x}H, \quad m\ddot{z} = eE\cos\alpha, \tag{2}$$

где $E = |\mathbf{E}|$, $H = |\mathbf{H}|$. Систему уравнений (2), третье из которой интегрируется независимо, решим методом исключения. Тогда получим

$$\begin{aligned} x &= A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{E}{H}t\sin\alpha + C, \\ y &= A\cos\omega t - B\sin\omega t + D, \\ z &= \frac{eE}{2m}t^2\cos\alpha + F_1 t + F_2, \quad \omega = \frac{eH}{m}, \end{aligned} \tag{3}$$

A, B, C, D, F_1, F_2 — произвольные постоянные. Для их определения воспользуемся начальными условиями:

$$x|_{t=0} = y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_{0x}, \quad \dot{y}|_{t=0} = v_{0y}, \quad \dot{z}|_{t=0} = v_{0z}.$$

Тогда на основании (3) получим:

$$B + C = 0, \quad A + D = 0, \quad F_2 = 0, \quad A\omega + \frac{E}{H}\sin\alpha = v_{0x}, \quad -B\omega = v_{0y}, \quad F_1 = v_{0z}. \tag{4}$$

Подставляя значения постоянных, найденных из (4), в (3), окончательно имеем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega}\left(v_{0x} - \frac{E}{H}\sin\alpha\right)\sin\omega t - \frac{v_{0y}}{\omega}\cos\omega t + \frac{Et}{H}\sin\alpha + \frac{v_{0y}}{\omega}, \\ y &= \frac{1}{\omega}\left(v_{0x} - \frac{E}{H}\sin\alpha\right)\cos\omega t + \frac{v_{0y}}{\omega}\sin\omega t + \left(\frac{E}{H}\sin\alpha - v_{0x}\right)\frac{1}{\omega}, \\ z &= \frac{eE}{2m}t^2\cos\alpha + v_{0z}t. \blacktriangleright \end{aligned}$$

436. Пучок электронов влетает в пространство между двумя парами отклоняющих пластин, на которые поданы напряжения: $u_x = u_1\sin\omega t$ — на вертикальные пластины и $u_y = u_2\cos\omega t$ — на горизонтальные. Определить траекторию электронного луча на экране, если все электроны перед влетом имели начальную скорость v_0, параллельную всем пластинам; длина отклоняющих пластин равна l, расстояние от отклоняющих пластин до экрана равно l, расстояние между пластинами равно d.

◀ Направим ось Oz параллельно начальной скорости влета, ось Oy — вертикально вниз. Тогда уравнения движения электрона с массой m запишутся в виде:

$$m\ddot{x} = eE_x = \frac{eu_1}{d}\sin\omega t, \quad m\ddot{y} = eE_y = \frac{eu_2}{d}\cos\omega t, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Интегрируя их, получаем

$$x = -\frac{eu_1}{md\omega^2}\sin\omega t + A_1 t + A_2, \quad y = -\frac{eu_2}{md\omega^2}\cos\omega t + B_1 t + B_2, \quad z = C_1 t + C_2. \tag{1}$$

Пусть $x|_{t=t_0} = y|_{t=t_0} = z|_{t=t_0} = 0$. Согласно условию задачи, $\dot{x}|_{t=t_0} = \dot{y}|_{t=t_0} = 0$, $\dot{z}|_{t=t_0} = v_0$; t_0 — начальный момент. Используя эти начальные условия, из (1) получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{eu_1}{md\omega}\cos\omega t_0, & A_2 &= \frac{eu_1}{md\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t_0 - t_0\cos\omega t_0\right), \\ B_1 &= -\frac{eu_2}{md\omega}\sin\omega t_0, & B_2 &= \frac{eu_2}{md\omega}\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega t_0 + t_0\sin\omega t_0\right), \\ C_1 &= v_0, & C_2 &= -v_0 t_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, формулы (1) и (2) определяют траекторию движения отдельного электрона, находящегося в конденсаторе. Через время $t_1 = \frac{l}{v_0}$ от начала движения электрон вылетает из конденсатора и далее летит по прямой до попадания на экран.

Легко найти координаты точки вылета из конденсатора, а также составляющие скорости электрона в этой точке. На основании (1) имеем:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x|_{t=t_0+t_1} = -\frac{eu_1}{md\omega^2}\sin\omega(t_0+t_1) + A_1(t_0+t_1) + A_2,\\
y_1 &= y|_{t=t_0+t_1} = -\frac{eu_2}{md\omega^2}\cos\omega(t_0+t_1) + B_1(t_0+t_1) + B_2,\\
z_1 &= z|_{t=t_0+t_1} = C_1(t_0+t_1) + C_2,\\
\dot{x}_1 &= -\frac{eu_1}{md\omega}\cos\omega(t_0+t_1) + A_1,\\
\dot{y}_1 &= \frac{eu_1}{md\omega}\sin\omega(t_0+t_1) + B_1,\\
\dot{z}_1 &= v_0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, параметрические уравнения прямой, по которой будет лететь электрон до попадания на экран, запишутся в виде:

$$x = x_1 + \dot{x}_1(t - t_0 - t_1), \quad y = y_1 + \dot{y}_1(t - t_0 - t_1), \quad t_0 + t_1 \leqslant t. \tag{4}$$

В момент $t = t_2 = \frac{2l}{v_0} + t_0$ электрон попадает на экран, поэтому из (4) следует, что координаты его на экране будут

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1\frac{l}{v_0}, \quad y_2 = y_1 + \dot{y}_1\frac{l}{v_0}. \tag{5}$$

Подставляя (2) в (3), а затем (3) в (5), окончательно получаем

$$x_2 = A\cos\omega t_0 + B\sin\omega t_0, \quad y_2 = C\sin\omega t_0 + D\cos\omega t_0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= 2\frac{leu_1}{v_0 m\, d\omega} - \frac{eu_1}{m\, d\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega\frac{l}{v_0} + \frac{l}{v_0}\cos\omega\frac{l}{v_0}\right),\\
B &= \frac{eu_1}{m\, d\omega^2} - \frac{eu_1}{m\, d\omega}\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega\frac{l}{v_0} - \frac{l}{v_0}\sin\omega\frac{l}{v_0}\right),\\
C &= -2\frac{leu_2}{v_0 m\, d\omega} + \frac{eu_2}{m\, d\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega\frac{l}{v_0} + \frac{l}{v_0}\cos\omega\frac{l}{v_0}\right),\\
D &= \frac{eu_2}{m\, d\omega^2} - \frac{eu_2}{m\, d\omega}\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega\frac{l}{v_0} - \frac{l}{v_0}\sin\omega\frac{l}{v_0}\right).
\end{aligned}$$

Будем считать, что у каждого электрона есть свое начальное время и параметр t_0 меняется непрерывно. Тогда формулы (6) описывают кривую встречи пучка с экраном. Нетрудно видеть, что она представляет собой эллипс. ▶

437. Составить и проинтегрировать уравнение движения гармонического осциллятора, находящегося в однородном стационарном магнитном поле $\mathbf{H}$ и обладающего электрическим зарядом e (классический эффект Зеемана).

◀ Уравнение движения гармонического осциллятора, не обладающего электрическим зарядом или не находящегося в магнитном поле, имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = 0,$$

где $k > 0$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы с массой m. Если же такой осциллятор обладает электрическим зарядом e и помещен в магнитное поле $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, то на него будет действовать сила Лоренца $\mathbf{f} = e\mu_0[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}]$. Следовательно, по второму закону Ньютона, можем составить уравнение движения:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \mu_0 e[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}]. \tag{1}$$

Направляя ось Oz вдоль магнитного поля $\mathbf{H}$, векторному уравнению (1) ставим в соответствие три скалярных:

$$m\ddot{x} + kx = e\mu_0 \dot{y}H, \quad m\ddot{y} + ky = -e\mu_0 \dot{x}H, \quad m\ddot{z} + kz = 0.$$

Из последнего уравнения сразу находим

$$z = C\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

C, φ — произвольные постоянные. Систему первых двух уравнений решаем методом Эйлера, положив $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Тогда получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + k & -e\mu_0 H\lambda \\ e\mu_0 \lambda H & m\lambda^2 + k \end{vmatrix} = 0,$$

из которого следует, что $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega^2\omega_H^2$, где $\omega^2 = -\lambda^2$, $\omega_H = \frac{e\mu_0 H}{m}$. Решив последнее уравнение, получаем

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4}\omega_H^2 + \omega_0^2} \pm \frac{\omega_H}{2}, \quad \lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2.$$

Следовательно, частные решения имеют вид:

$$x_k = A_k e^{\lambda_k t}, \quad y_k = B_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Между коэффициентами A_k, B_k существуют связи, определяющиеся уравнениями:

$$A_k(\lambda_k^2 + \omega_0^2) = \lambda_k \omega_H B_k, \tag{1}$$

откуда

$$A_k = \frac{\lambda_k \omega_H}{\lambda_k^2 + \omega_0^2} B_k,$$

где B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение системы будет

$$x = \frac{i\omega_1\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_1^2} B_1 e^{i\omega_1 t} - \frac{i\omega_1\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_1^2} B_2 e^{-i\omega_1 t} + \frac{i\omega_2\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_2^2} B_3 e^{i\omega_2 t} - \frac{i\omega_2\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_2^2} B_4 e^{-i\omega_2 t},$$

$$y = B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{-i\omega_1 t} + B_3 e^{i\omega_2 t} + B_4 e^{-i\omega_2 t}, \quad z = C\cos(\omega_0 t + \varphi). \blacktriangleright$$

438. Частица массы m движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса r. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой, найти закон изменения координат частицы со временем, если в начальный момент времени частица находилась на оси Ox. Ее начальная скорость v_0 составляет угол α с горизонтом.

◀ Кинетическая энергия частицы будет $K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$, или, если учесть, что $x = r\cos\varphi(t)$, $y = r\sin\varphi(t)$, $K = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$. Потенциальная энергия определяется по формуле $\Pi = mgz$. Поэтому функция Лагранжа L для данной частицы будет иметь вид

$$L = K - \Pi = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz. \tag{1}$$

Для составления уравнений движения частицы воспользуемся уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \tag{2}$$

где L — функция Лагранжа, q_i — обобщенные координаты, число которых равно количеству степеней свободы физической системы; F_i — внешние силы. В данном случае $F_i = 0$, $q_1 = \varphi$, $q_2 = z$. Следовательно, на основании (1) имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg.$$

Таким образом, на основании (2) получаем два дифференциальных уравнения:

$$mr^2\ddot{\varphi} = 0, \quad m\ddot{z} + mg = 0.$$

Интегрируя их, находим

$$\varphi = C_1 t + C_2, \quad z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

где $C_i = \text{const}$. Для определения C_i воспользуемся начальными условиями:

$$z|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 = 0;$$

$$\dot{x}|_{t=0} = -r\sin\varphi_0\dot{\varphi}|_{t=0} = 0; \quad \dot{y}|_{t=0} = r\cos\varphi_0\dot{\varphi}|_{t=0} = r\dot{\varphi}|_{t=0} = v_0\cos\alpha; \quad \dot{z}|_{t=0} = v_0\sin\alpha.$$

Отсюда нетрудно найти, что $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{v_0}{r}\cos\alpha$, $C_4 = 0$, $C_3 = v_0\sin\alpha$. Наконец, подставляя значения C_i в выражения для φ и z и используя формулы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, приходим к уравнениям движения:

$$x = r\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right), \quad y = r\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right), \quad z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t\sin\alpha. \blacktriangleright$$

439. Два математических маятника одинаковой длины связаны между собой пружиной с жесткостью k, укрепленной на расстоянии a от точки подвеса. Определить частоты малых колебаний, а также проинтегрировать уравнение движения при условии, что в начальный момент времени первый маятник был отклонен на угол φ_0 от вертикали.

◀ Пусть φ_1, φ_2 — углы, на которые отклоняются маятники от вертикали. Тогда кинетическая энергия системы двух маятников (кинетической энергией пружины пренебрегаем) будет равна $K = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2\right)$. Потенциальная энергия системы состоит из суммы потенциальных энергий трех тел: двух маятников и пружины. Потенциальная энергия маятников равна

$$\Pi_1 = mgl(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_2),$$

а потенциальная энергия пружины $\Pi_2 = \frac{k}{2}a^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2$. Таким образом, функция Лагранжа всей системы

$$L = K - \Pi = \frac{l^2 m}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2\right) - mgl(2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) - \frac{k}{2}a^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2.$$

Используя уравнение Лагранжа, имеем:

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl\sin\varphi_1 + ka^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_1 = 0, \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\sin\varphi_2 - ka^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть углы φ_1, φ_2 малы, т. е. φ_1^2, φ_2^2, $\varphi_1\varphi_2$ пренебрежимо малы. Тогда из (1) можно получить так называемые линеаризованные уравнения:

$$\ddot{\varphi}_1 + p\varphi_1 - r\varphi_2 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + p\varphi_2 - r\varphi_1 = 0, \quad p = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}, \quad r = \frac{ka^2}{ml^2}. \tag{2}$$

Частные решения линеаризованной системы ищем по методу Эйлера, положив $\varphi_1 = A_1 e^{\lambda t}$, $\varphi_2 = A_2 e^{\lambda t}$. Тогда из (2) получим частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + p & -r \\ -r & \lambda^2 + p \end{vmatrix} = 0,$$

решая которое, находим $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_{1,2}$, где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Здесь ω_1, ω_2 — частоты малых колебаний системы маятников. Теперь строим систему частных решений:

$$\begin{aligned} &\varphi_{11} = A_{11}e^{i\omega_1 t}, \quad \varphi_{12} = A_{12}e^{-i\omega_1 t}, \quad \varphi_{13} = A_{13}e^{i\omega_2 t}, \quad \varphi_{14} = A_{14}e^{-i\omega_2 t}, \\ &\varphi_{21} = A_{21}e^{i\omega_1 t}, \quad \varphi_{22} = A_{22}e^{-i\omega_1 t}, \quad \varphi_{23} = A_{23}e^{i\omega_2 t}, \quad \varphi_{24} = A_{24}e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned}$$

Между коэффициентами A_{ij}, B_{ij} существуют связи, определяемые равенствами:

$$A_{1j}(p-\omega_1^2)-rA_{2j}=0,\quad j=1,2;$$
$$A_{1j}(p-\omega_2^2)-rA_{2j}=0,\quad j=3,4.$$

Следовательно, $A_{1j}=-A_{2j}$, $j=1,2$ и $A_{1j}=A_{2j}$, $j=3,4$. Тогда общее решение системы (2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1&=C_1e^{i\omega_1t}+C_2e^{-i\omega_1t}+C_3e^{i\omega_2t}+C_4e^{-i\omega_2t},\\ \varphi_2&=-C_1e^{i\omega_1t}-C_2e^{-i\omega_1t}+C_3e^{i\omega_2t}+C_4e^{-i\omega_2t}.\end{aligned}\tag{3}$$

Так как, по условию, $\varphi_2|_{t=0}=\dot\varphi_2|_{t=0}=\dot\varphi_1|_{t=0}=0$, $\varphi_1|_{t=0}=\varphi_0$, то $C_1=C_2=C_3=C_4=\frac14\varphi_0$. Подставляя значения постоянных в (3), окончательно получаем:

$$\varphi_1=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1t+\cos\omega_2t),\quad \varphi_2=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_2t-\cos\omega_1t).\ \blacktriangleright$$

440. Тело массы M, соединенное с пружиной жесткости k, другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. К телу прикреплен математический маятник массы m и длины l. Найти функцию Лагранжа системы и определить частоты малых колебаний.

◀ Пусть x_0 — длина пружины в свободном состоянии, x — абсцисса тела массы M, (x_m, y_m) — координаты тела массы m, φ — угол отклонения массы m от вертикали. Тогда

$$K=\frac{m}{2}\left(\dot x_m^2+\dot y_m^2\right)+\frac{M}{2}\dot x^2$$

есть кинетическая энергия рассматриваемой системы, а

$$\Pi=\frac{k}{2}(x-x_0)^2+lmg(1-\cos\varphi)$$

потенциальная энергия. Поэтому функция Лагранжа

$$L=K-\Pi=\frac{m}{2}\left(\dot x_m^2+\dot y_m^2\right)+\frac{M}{2}\dot x^2-\frac{k}{2}(x-x_0)^2-lmg(1-\cos\varphi).\tag{1}$$

Но $x_m=x+l\sin\varphi$, $y_m=l\cos\varphi$, поэтому

$$\dot x_m=\dot x+\dot\varphi l\cos\varphi,\quad \dot y_m=-\dot\varphi l\sin\varphi.\tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot x^2+2\dot x\dot\varphi l\cos\varphi+l^2\dot\varphi^2\right)+\frac{M}{2}\dot x^2-\frac{k}{2}(x-x_0)^2-lmg(1-\cos\varphi).$$

Составляем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot x+ml(\ddot\varphi\cos\varphi-\dot\varphi^2\sin\varphi)+k(x-x_0)&=0,\\ m(\ddot x l\cos\varphi+l^2\ddot\varphi)+mgl\sin\varphi&=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Считая угол $|\varphi|$ и разность $|x-x_0|$ малыми, линеаризуем систему (3):

$$(M+m)\ddot x+ml\ddot\varphi+k(x-x_0)=0,\quad \ddot x+l\ddot\varphi+g\varphi=0.$$

Частные решения этой системы ищем в виде: $x=x_0+Ae^{i\omega t}$, $\varphi=Be^{i\omega t}$. Тогда относительно ω получим частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix}-(M+m)\omega^2+k & -ml\omega^2\\ -\omega^2 & -l\omega^2+g\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\omega^4-\left(\frac{k}{M}+\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\right)\omega^2+\frac{kg}{Ml}=0.$$

Решение полученного уравнения и его анализ предоставляем читателю. ▶

441. Найти e^A, где $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

◀ Согласно определению, имеем

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots. \tag{1}$$

Далее, вычисляем

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \frac{1}{2!}\cos 2t + \ldots & \sin t + \frac{1}{2!}\sin 2t + \ldots \\ -\sin t - \frac{1}{2!}\sin 2t - \ldots & 1 + \cos t + \frac{1}{2!}\cos 2t + \ldots \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Так как $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, то $\cos nt = \operatorname{Re} e^{int}$, $\sin nt = \operatorname{Im} e^{int}$. Тогда

$$1 + \cos t + \frac{1}{2!}\cos 2t + \ldots = \operatorname{Re}\left(1 + e^{it} + \frac{e^{2it}}{2!} + \ldots\right) = \operatorname{Re} e^{e^{it}} = \operatorname{Re} e^{\cos t + i \sin t} = e^{\cos t}\cos(\sin t),$$

$$\sin t + \frac{1}{2!}\sin 2t + \ldots = \operatorname{Im}\left(e^{it} + \frac{1}{2!}e^{2it} + \ldots\right) = \operatorname{Im}\left(e^{e^{it}} - 1\right) = e^{\cos t}\sin(\sin t).$$

Используя эти соотношения, из (3) получаем окончательно:

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ -\sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix} e^{\cos t}. \blacktriangleright$$

§ 2. Нелинейные системы

2.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения.

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где f_i, $i = \overline{1, n}$, — известные функции (правая часть системы), называется *нормальной системой дифференциальных уравнений.*

Существует два основных метода интегрирования системы (1). Первый метод, который называется *методом исключения*, состоит в сведении системы (1) к одному уравнению n-го порядка или к одному уравнению m-го ($m < n$) порядка и к системе m независимых уравнений. Такое сведение достигается путем дифференцирования одного из равенств системы (1) и последующего использования всех уравнений этой же системы. Обычно приходится дифференцировать $n - 1$ раз, но бывают случаи, когда достаточно продифференцировать m ($m < n - 1$) раз. В результате получаем некоторое число k тождеств, из которых, исключая $k - 1$ переменную, получаем одно дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной функции. Если это последнее уравнение удается проинтегрировать, то другие неизвестные функции можно найти путем дифференцирования и простейших алгебраических операций.

2.2. Подбор интегрируемых комбинаций.

Второй метод заключается в подборе так называемых интегрируемых комбинаций. *Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение, которое является следствием системы уравнений (1) и интегрируется в квадратурах; например, имеет вид:

$$d\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{2}$$

где $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ суть решения системы (1). Функция $\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая тождественно равна постоянной при подстановке в нее решений $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ системы (1), называется *первым интегралом* системы (1). Если имеется k первых независимых интегралов

$$\begin{aligned} &\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ &\Phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Phi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_k, \qquad k \leqslant n \end{aligned} \tag{3}$$

(интегралы называются *независимыми*, если между функциями Φ_i, $i = \overline{1, k}$, не существует связи вида $\Psi(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k) = 0$), то из системы (3) можно выразить k неизвестных функций через остальные. Подставив их в систему (1), придем к задаче об интегрировании системы уравнений с меньшим числом неизвестных. В частности, если $k = n$, то все неизвестные функции определяются из системы интегралов (3). Аналитическая форма проверки независимости интегралов имеет вид

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})} \neq 0, \tag{4}$$

где $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$ — какие-нибудь k функций из числа неизвестных.

Иногда нахождение интегрируемых комбинаций облегчается с помощью так называемой *симметрической формы записи системы уравнений* (1):

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}, \tag{5}$$

где

$$\varphi_i = \varphi_0 f_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Заметим наконец, что все сказанное о нелинейных системах относится и к системам линейным, записанным в нормальной форме.

Проинтегрировать следующие системы дифференциальных уравнений:

442. $\dfrac{dx}{x-y} = \dfrac{dy}{x+y} = \dfrac{dz}{z}$.

◀ Первый способ. Представляя данную систему в виде

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z} = dt,$$

получаем

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y, \quad \frac{dz}{dt} = z. \tag{1}$$

Третье уравнение системы (1) интегрируется независимо от остальных, и его общее решение имеет вид: $z = C_3 e^t$. К первым двум применяем метод исключения, в результате чего имеем:

$$y = x - \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0. \tag{2}$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$x = (C_1 \sin t + C_2 \cos t)e^t.$$

Подставив x в первое соотношение (2), получим

$$y = (C_2 \sin t - C_1 \cos t)e^t.$$

Если мы хотим получить решение без параметра t, то должны исключить его из выражений для x, y, z. В результате имеем

$$x = \left(C_1 \sin \ln \frac{z}{C_3} + C_2 \cos \ln \frac{z}{C_3}\right) \frac{z}{C_3}, \quad y = \left(C_2 \sin \ln \frac{z}{C_3} - C_1 \cos \ln \frac{z}{C_3}\right) \frac{z}{C_3}.$$

Отсюда, складывая квадраты левой и правой частей соотношений, получаем один первый интеграл:

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \overline{C}_1. \tag{3}$$

А если взять их почленное отношение, то после некоторых преобразований будем иметь

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\ln \frac{z}{C_3} - \alpha\right), \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

или

$$z e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = \overline{C}_2. \tag{4}$$

Очевидно, интегралы (3), (4) являются независимыми.

Второй способ. Сначала интегрируем уравнение

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y}.$$

Переход в нем к полярным координатам дает уравнение $\frac{dr}{d\varphi} = r$, из которого следует, что $r = C_1 e^{\varphi}$. Используя это равенство, уравнение $\frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}$ приводим к виду:

$$\frac{dz}{z} = d\varphi,$$

откуда интегрированием находим

$$z = C_2 e^{\varphi}.$$

Нетрудно проверить, что полученные интегралы являются следствием интегралов (3), (4). ▶

443. $\dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}$.

◀ Пользуясь свойством пропорции, имеем

$$\frac{dx + dy + dz + du}{(y-u) + (z-x) + (u-y) + (x-z)} = \frac{du}{x-z}, \tag{1}$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz + u\,du}{x(y-u) + y(z-x) + z(u-y) + u(x-z)} = \frac{du}{x-z}, \tag{2}$$

$$\frac{dx + dz}{(y-u) + (u-y)} = \frac{du}{x-z}. \tag{3}$$

Из соотношения (1) получаем

$$d(x + y + z + u) = 0. \tag{4}$$

Из второго

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{u^2}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Соотношение (3) дает еще одну интегрируемую комбинацию:

$$d(x + z) = 0. \tag{6}$$

Интегрируя в (4), (5), (6), находим

$$x + y + z + u = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = C_2, \quad x + z = C_3.$$

Это первые интегралы рассматриваемой системы. Так как они независимы и число их совпадает с числом уравнений данной системы, то мы получили все интегралы. ▶

444. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy+z}$.

◀ Из уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ легко находим $\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1$, или

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Это первый интеграл. Далее, решаем уравнение

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$$

с учетом того, что $x = C_1 y$. Таким образом, имеем $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{C_1 y^2 + z}$, или

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = C_1 y.$$

Интегрируя линейное неоднородное уравнение первого порядка, получаем

$$z = C_1 y^2 + C_2 y \quad \text{или} \quad z = xy + C_2 y.$$

Итак, мы имеем два первых интеграла:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{z}{y} - x = C_2.$$

Так как они независимы и число их равно числу уравнений рассматриваемой системы, то других интегралов, которые были бы независимы от полученных (не являлись бы их следствием), нет. ▶

445. $\dfrac{dx}{z^2-y^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}$.

◀ Пользуясь свойством пропорции, имеем:

$$\frac{dx}{z^2-y^2} = \frac{z\,dy + y\,dz}{z^2-y^2} \quad \text{или} \quad dx = d(zy),$$

откуда $x - zy = C_1$. Еще один первый интеграл мы получим из уравнения $\frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$, или

$$y\,dy + z\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$y^2 + z^2 = C_2. \blacktriangleright$$

446. $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$.

◀ Из последнего уравнения системы находим

$$y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}\,d(y^2+z^2) = 0,$$

откуда следует $y^2 + z^2 = C_1^2$ — первый интеграл. Полагая в нем $y = C_1 \sin\varphi$, $z = C_1 \cos\varphi$, из первого уравнения данной системы получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\,d\varphi.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln|x| = -\ln|\cos\varphi - \sin\varphi| + \ln\overline{C}_2,$$

или

$$x = \frac{\overline{C}_2}{\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{C_1\overline{C}_2}{z-y}; \quad x(z-y) = C_2. \blacktriangleright$$

447. $\dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2-xz}$.

◀ Имеем по свойству пропорции:

$$\frac{dx+dz}{x(z-y)+y^2-xz} = \frac{dy}{y(y-x)}; \quad d(x-y+z)=0,$$

откуда находим первый интеграл

$$x-y+z=C_1.$$

Подставив значение $z=C_1-x+y$ в первое уравнение, получим

$$\frac{dx}{x(C_1-x)} = \frac{dy}{y(y-x)}, \quad \text{или} \quad y'+\frac{y}{C_1-x} = \frac{y^2}{x(C_1-x)}.$$

Это уравнение Бернулли. Его общее решение имеет вид

$$y = \frac{x-C_1}{\ln|x|+C_2}.$$

Исключив из него с помощью уже полученного интеграла постоянную C_1, приходим к еще одному первому интегралу

$$1-\frac{z}{y}-\ln|x| = C_2. \blacktriangleright$$

448. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\dfrac{dy}{y(x^2+z^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

◀ В силу свойства пропорции имеем:

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2(y^2-z^2)-y^2(x^2+z^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)},$$

откуда

$$d(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим первый интеграл:

$$x^2+y^2+z^2=C_1.$$

Используя его, последнее уравнение данной системы представляем в виде:

$$\frac{dy}{y(C_1-y^2)}+\frac{dz}{z(C_1-z^2)}=0,$$

откуда интегрированием получаем еще один первый интеграл:

$$\ln\frac{|yz|}{\sqrt{|C_1-y^2||C_1-z^2|}} = \overline{C}_2, \quad \text{или} \quad \frac{y^2z^2}{(x^2+z^2)(x^2+y^2)} = C_2$$

(здесь постоянная C_1 была исключена с помощью ранее найденного первого интеграла).

Полученный интеграл можно упростить следующим образом:

$$\frac{y^2z^2}{x^4+x^2(C_1-x^2)+z^2y^2} = C_2 \Longrightarrow y^2z^2 = \frac{C_1C_2}{1-C_2}x^2 \Longrightarrow yz = C_2x,$$

где C_2 — новая произвольная постоянная. ▶

Замечание. Последний интеграл можно получить сразу, если "увидеть", что

$$\frac{xy\,dz+xz\,dy-yz\,dx}{xyz(x^2+y^2)-xyz(x^2+z^2)-xyz(y^2-z^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$$

Отсюда следует, что $d\left(\dfrac{yz}{x}\right)=0$, или $\dfrac{yz}{x}=C_2$.

449. $\dfrac{dx}{dt} = y^2+\sin t, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{2y}$.

◀ Значение $x = 2y\dfrac{dy}{dt}$, найденное из второго уравнения системы, подставим в ее первое уравнение. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\left(2y\frac{dy}{dt}\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}(y^2) = y^2+\sin t.$$

Отсюда находим

$$y^2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

А тогда

$$x = \frac{d}{dt}(y^2) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t. \blacktriangleright$$

450. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y^2 - ax}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2xy}.$

◀ Из второго уравнения следует, что $\frac{d(y^2)}{dt} = \frac{1}{x}$. Деля почленно это уравнение на первое уравнение системы, получаем линейное уравнение относительно функции $t \mapsto y^2$:

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{y^2}{x} - a.$$

Общее решение

$$y^2 = C_1 x - ax\ln|x|.$$

А тогда из первого уравнения системы получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x(C_1 - a - a\ln|x|)}; \quad dt = x(C_1 - a - a\ln|x|)\,dx,$$

откуда

$$t = \int x\left(C_1 - a - a\ln|x|\right)dx + C_2 = \frac{1}{2}(C_1 - a)x^2 - \frac{a}{4}\left(2x^2\ln|x| - x^2\right) + C_2 = \frac{x^2}{4}\left(2C_1 - a - 2a\ln|x|\right) + C_2. \blacktriangleright$$

451. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2x^3 + x^2 - y^2}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2x^2 y}.$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2x + 1 - \frac{y^2}{x^2},$$

откуда

$$y^2 = C_1 e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}\int (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}\,dx = C_1 e^{\frac{1}{x}} + x^2.$$

Подстановка y^2 в первое уравнение системы дает:

$$dt = \left(2x^3 - C_1 e^{\frac{1}{x}}\right)dx,$$

откуда интегрированием находим

$$t + C_1 = \frac{x^4}{2} - C_1\int e^{\frac{1}{x}}\,dx. \blacktriangleright$$

452. $\begin{cases} x = t\dfrac{dx}{dt} + f\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right), \\ y = t\dfrac{dy}{dt} + q\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases}$

◀ Полагая $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, приходим к системе

$$x = tu + f(u, v), \quad y = tv + q(u, v).$$

Дифференцируя по t слева и справа последние равенства и учитывая, что $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, получаем

$$\dot{u}(t + f'_u) + \dot{v}f'_v = 0, \quad \dot{u}q'_u + \dot{v}(t + q'_v) = 0.$$

Отсюда следует две возможности: либо $\dot{u} = \dot{v} = 0$, либо определитель

$$\begin{vmatrix} t + f'_u & f'_v \\ q'_u & t + q'_v \end{vmatrix} = 0.$$

В первом случае имеем $u = C_1$, $v = C_2$. Следовательно,

$$x = C_1 t + f(C_1, C_2), \quad y = C_2 t + q(C_1, C_2)$$

— общее решение рассматриваемой системы. Во втором случае возможны другие решения. Попытаться найти их предоставляем читателю. ▶

453. $y' = \dfrac{z}{x}, \quad z' = \dfrac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}$.

◀ Применяя метод исключения, имеем

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y + 2z - 1}{y - 1} \equiv \frac{2}{y - 1} z + 1.$$

Отсюда $z = C_1(y - 1)^2 - y + 1$. Подставив значение z в первое уравнение системы и разделив переменные, имеем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{(C_1(y - 1) - 1)(y - 1)}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|x| = \ln|C_1(y - 1) - 1| - \ln|y - 1| + \ln C_2,$$

или

$$x = C_2 \left(C_1 - \frac{1}{y - 1}\right) \Rightarrow y = \frac{x + \overline{C}_1}{x + \overline{C}_2}. \tag{1}$$

Подставив (1) в выражение для z, находим

$$z = \frac{\overline{C}_2 - \overline{C}_1}{(x + \overline{C}_2)^2} x. \blacktriangleright$$

454. $2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = z + y$.

◀ Значение $y = z' - z$ из второго уравнения подставим в первое:

$$2zz'' - z'^2 - 1 = 0.$$

Уравнение явно не содержит аргумента, поэтому порядок его можно понизить, положив $z' = p$. Тогда $z'' = p\frac{dp}{dz}$ и уравнение примет вид:

$$2zp\frac{dp}{dz} - p^2 - 1 = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$p = \pm\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}, \quad \frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}.$$

Интегрируя последнее уравнение, после простых преобразований имеем

$$z = C_1 + \frac{1}{4C_1}(x + C_2)^2.$$

А тогда

$$y = z' - z = \frac{1}{2C_1}(x + C_2) - \frac{1}{4C_1}(x + C_2)^2 - C_1. \blacktriangleright$$

Для данных систем дифференциальных уравнений и данных функций φ проверить, являются ли соотношения $\varphi = C$ первыми интегралами этих систем:

455. $\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2; \quad \varphi_1 = x\ln y - x^2 y; \quad \varphi_2 = \dfrac{y^2}{x^2} - 2\ln x$.

◀ Так как $\varphi_1 = C_1$, то $\frac{d}{dt}(\varphi_1) \equiv 0$. Следовательно, $\frac{d}{dt}(x\ln y - x^2 y) \equiv 0$, или

$$\dot{x}\ln y + \frac{x\dot{y}}{y} - 2x\dot{x}y - x^2\dot{y} \equiv 0.$$

Подставив сюда значения $\dot{x}$, $\dot{y}$, определяемые уравнениями системы, имеем

$$xy\ln y + \frac{x}{y}\left(x^2 + y^2\right) - 3x^2y^2 - x^4 \equiv 0.$$

Как видим, полученное тождество невозможно, поэтому равенство $\varphi_1 = C_1$ не является интегралом данного уравнения.

Проверяем второй интеграл. Имеем $\frac{d}{dt}(\varphi_2) \equiv 0$, или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\ln x\right) = \frac{2y\dot{y}x^2 - 2x\dot{x}y^2}{x^4} - \frac{2\dot{x}}{x} \equiv 0.$$

Отсюда в силу уравнений системы получаем:

$$xy(x^2 + y^2) - xy^3 - x^3y \equiv 0, \quad x \neq 0.$$

Последнее означает, что выражение $\varphi_2 = C_2$ является первым интегралом данной системы. ▶

456. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}$; $\varphi = yz - ux$.

◀ Поскольку $\varphi = C$, то должно быть

$$d(yz - ux) \equiv 0, \quad \text{или} \quad y\,dz + z\,dy - u\,dx - x\,du \equiv 0. \tag{*}$$

Из уравнений системы находим

$$dx = -\frac{y}{z}\,du; \quad dy = \frac{x}{z}\,du; \quad dz = -\frac{u}{z}\,du. \tag{1}$$

Подставляя (1) в (*), имеем

$$\left(y\left(-\frac{u}{z}\right) + z\left(\frac{x}{z}\right) - u\left(-\frac{y}{z}\right) - x\right)du \equiv 0.$$

Последнее тождество, очевидно, справедливо, поэтому соотношение $\varphi = C$ действительно является первым интегралом рассматриваемой системы. ▶

457. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{x+z} = C_1$, $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системы $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

◀ Сначала проверим, что указанные соотношения действительно являются интегралами. Имеем

$$d\left(\frac{x+y}{x+z}\right) = \frac{(z-y)\,dx + (x+z)\,dy - (x+y)\,dz}{(x+z)^2}.$$

Подставив сюда значения $dx = \frac{x}{z}\,dz$, $dy = \frac{y}{z}\,dz$, получаем

$$d\left(\frac{x+y}{x+z}\right) = \frac{(z-y)\frac{x}{z} + (x+z)\frac{y}{z} - (x+y)}{(x+z)^2}\,dz \equiv 0.$$

Аналогично устанавливаем, что $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ есть интеграл. Теперь проверяем их независимость. Определив, например, $y = C_1(x+z) - x$ из первого соотношения, подставляем во второе:

$$(x+z)(1 - C_1 - C_1C_2) = 0,$$

или

$$1 - C_1 - C_1C_2 = 0 \quad (x + z \neq 0).$$

Видим, что между функциями $\varphi_1 = \frac{x+y}{x+z}$ и $\varphi_2 = \frac{z-y}{x+y}$ существует зависимость

$$1 - \varphi_1 - \varphi_1\varphi_2 \equiv 0,$$

указывающая на то, что данные первые интегралы являются зависимыми. ▶

458. $x\,dy - y\,dx = s\,ds$, $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

◀ Положим $dx = ds\cos\varphi$, $dy = ds\sin\varphi$. Тогда второе уравнение превратится в тождество, а из первого следует, что

$$s = x\sin\varphi - y\cos\varphi. \tag{1}$$

Отсюда дифференцированием по φ легко получить

$$\frac{ds}{d\varphi} = x\cos\varphi + y\sin\varphi \quad \left(\frac{ds}{d\varphi}\left(\frac{dx}{ds}\sin\varphi - \frac{dy}{ds}\cos\varphi\right) \equiv 0\right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим

$$x = s\sin\varphi + \frac{ds}{d\varphi}\cos\varphi, \quad y = \frac{ds}{d\varphi}\sin\varphi - s\cos\varphi. \tag{3}$$

Остается найти $s = s(\varphi)$. Для этого достаточно продифференцировать по φ равенство (2) и учесть выражения (1), (2) и равенства $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$. Тогда получим:

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi - x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{ds}{d\varphi}\left(\frac{dx}{ds}\cos\varphi + \frac{dy}{ds}\sin\varphi\right) - x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{ds}{d\varphi} - s,$$

или

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} - \frac{ds}{d\varphi} + s = 0.$$

Решив полученное уравнение и подставив значение $s = s(\varphi, C_1, C_2)$ в (3), найдем

$$x = x(\varphi, C_1, C_2), \quad y = y(\varphi, C_1, C_2). \blacktriangleright$$

459. $dx^2 + dy^2 = a^2\,dt^2$, $(d^2x)^2 + (d^2y)^2 = b^2(dt)^4$.

◀ Положив

$$dx = a\cos\varphi\,dt, \quad dy = a\sin\varphi\,dt, \tag{1}$$

из второго уравнения получаем

$$dt = \pm\frac{a}{b}\,d\varphi. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$dx = \pm\frac{a^2}{b}\cos\varphi\,d\varphi, \quad dy = \pm\frac{a^2}{b}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда интегрированием легко находим

$$x + C_1 = \pm\frac{a^2}{b}\sin\varphi, \quad y + C_1 = \mp\frac{a^2}{b}\cos\varphi. \tag{3}$$

Интегрируя (2) и подставляя в (3), окончательно имеем

$$\varphi = \pm\frac{b}{a}t + C_3, \quad x + C_1 = \pm\frac{a^2}{b}\sin\left(\pm\frac{b}{a}t + C_3\right), \quad y + C_2 = \mp\frac{a^2}{b}\cos\left(\pm\frac{b}{a}t + C_3\right). \blacktriangleright$$

460. Доказать, что интегрирование *системы Гессе*:

$$x' = X + xT, \quad y' = Y + yT, \quad z' = Z + zT,$$

где X, Y, Z, T — линейные формы от переменных x, y, z, подстановками $x = \frac{\xi(t)}{\tau(t)}$, $y = \frac{\eta(t)}{\tau(t)}$, $z = \frac{\zeta(t)}{\tau(t)}$ сводится к интегрированию системы линейных однородных уравнений.

◀ Производя указанные подстановки, получаем

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\xi'\tau - \tau'\xi}{\tau^2} = X\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) + \frac{\xi}{\tau}T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right),$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\eta'\tau - \tau'\eta}{\tau^2} = Y\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) + \frac{\eta}{\tau}T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right),$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\zeta'\tau - \tau'\zeta}{\tau^2} = Z\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) + \frac{\zeta}{\tau}T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right).$$

Отсюда находим

$$\xi' = \frac{\tau'}{\tau}\xi + \tau X + \xi T; \quad \eta' = \frac{\tau'}{\tau}\eta + \tau Y + \eta T; \quad \zeta' = \frac{\tau'}{\tau}\zeta + \tau Z + \zeta T. \tag{1}$$

Так как функции X, Y, Z линейны, то функции

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \tau X\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right),$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \tau Y\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right),$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \tau Z\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right)$$

также линейны, поэтому если в (1) положить

$$\frac{\tau'}{\tau} = -T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right),$$

то правая часть системы (1) станет линейной относительно переменных ξ, η, ζ, τ. Таким образом, система уравнений

$$\xi' = \tau X, \quad \eta' = \tau Y, \quad \zeta' = \tau Z, \quad \tau' = -\tau T \tag{2}$$

является линейной и однородной. ▶

С помощью приема Гессе решить следующие системы:

461. $\dfrac{dx}{dt} = y + xz, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + yz, \quad \dfrac{dz}{dt} = x + z^2.$

◀ Так как в данном примере $X = y$, $Y = x$, $Z = x$, $T = z$, то

$$X\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\eta}{\tau}, \quad Y\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\xi}{\tau}, \quad Z\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\xi\eta}{\tau}, \quad T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\zeta}{\tau}.$$

Следовательно, система (2) из предыдущего примера представится в виде:

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \xi, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\zeta.$$

Из первых двух уравнений этой системы находим

$$\xi = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \eta = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

С учетом последнего соотношения из третьего уравнения получаем

$$\zeta = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем:

$$\tau = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 t + C_4.$$

Наконец, возвращаясь к переменным x, y, z,

$$x = \frac{e^t + k_1 e^{-t}}{-e^t - k_1 e^{-t} - k_2 t + k_3}, \quad y = \frac{e^t - k_1 e^{-t}}{-e^t - k_1 e^{-t} - k_2 t + k_3}, \quad z = \frac{e^t - k_1 e^{-t} + k_2}{e^t - k_1 e^{-t} - k_2 t + k_3};$$

$$k_1 = \frac{C_2}{C_1}, \quad k_2 = \frac{C_3}{C_1}, \quad k_3 = \frac{C_4}{C_1}. \blacktriangleright$$

462. $\dfrac{dx}{dt} = x + x(x + y), \quad \dfrac{dy}{dt} = z + y(x + y), \quad \dfrac{dz}{dt} = y + z(x + y).$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем: $X = x$, $Y = z$, $Z = y$, $T = x + y$. Следовательно,

$$X\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\xi}{\tau}, \quad Y\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\zeta}{\tau}, \quad Z\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\eta}{\tau}, \quad T\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = \frac{\xi + \eta}{\tau}.$$

Согласно примеру 460, пишем:

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \zeta, \quad \zeta' = \eta, \quad \tau' = -\xi - \eta.$$

Из первого уравнения получаем:

$$\xi = C_1 e^t;$$

из системы второго и третьего уравнений следует, что

$$\eta = C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \quad \zeta = C_2 e^t - C_3 e^{-t}.$$

Из четвертого уравнения находим

$$\tau = -(C_1 + C_2)e^t + C_3e^{-t} + C_4.$$

Таким образом, общее решение данной системы имеет вид:

$$x = \frac{C_1e^t}{-(C_1 + C_2)e^t + C_3e^{-t} + C_4},$$

$$y = \frac{C_2e^t + C_3e^{-t}}{-(C_1 + C_2)e^t + C_3e^{-t} + C_4},$$

$$z = \frac{C_2e^t - C_3e^{-t}}{-(C_1 + C_2)e^t + C_3e^{-t} + C_4}. \blacktriangleright$$

463. Пусть в пространстве $Oxyz$ задано поле скоростей $\mathbf{v}$ течения жидкости

$$\mathbf{v} = \left((y^2 - x^2y)y,\ (x^2 + xy^2 + 1)y,\ (x^2 + y^2x + 1)z\right).$$

Найти линии тока этой жидкости.

◀ Согласно определению линии тока, $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Следовательно,

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

или с учетом значений v_x, v_y, v_z,

$$\frac{dx}{y(y^2 - x^2y)} = \frac{dy}{y(x^2 + xy^2 + 1)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2x + 1)}.$$

Поскольку выражение $(yx^2 - y^2)\,dy + (x^2 + xy^2 + 1)\,dx$ является полным дифференциалом, то из первого уравнения легко находим первый интеграл

$$2\left(x^3 - y^3\right) + 3x^2y^2 + 6x = C_1.$$

Из второго уравнения следует, что $\frac{y}{z} = C_2$. Таким образом, линии тока представляются в виде пересечения двух однопараметрических семейств поверхностей в пространстве $Oxyz$:

$$2\left(x^3 - y^3\right) + 3x^2y^2 + 6x = C_1, \quad y = C_2z. \blacktriangleright$$

464. Пусть плоское электростатическое поле

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right).$$

Найти его силовые линии.

◀ Исходим из того, что касательная к силовой линии коллинеарна вектору $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор силовой линии), или

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя второе уравнение, имеем $y = C_1x$. Таким образом, силовыми линиями являются лучи, выходящие из начала координат ($x^2 + y^2 \neq 0$). ▶

465. Найти магнитные силовые линии, если напряженность поля $\mathbf{B} = (y, -2x)$.

◀ В каждой точке силовой линии должно выполняться условие: $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$. Следовательно,

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}; \quad \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{2x}.$$

Интегрируя уравнение, имеем $2x^2 + y^2 = C_1^2$. Таким образом, магнитные силовые линии представляют собой эллипсы. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Построить общее решение систем уравнений:

1. $\frac{dx}{dt} = x + 2y$, $\frac{dy}{dt} = 2x - y$. **2.** $\dot{x} = x + y + z$, $\dot{y} = x - y + 2z$, $\dot{z} = x + y - 2z$.

3. $\ddot{x} = x - 3y$, $\ddot{y} = 4x + 5y$. **4.** $\ddot{x} + \ddot{y} + \dot{x} + 3\dot{y} + x - 2y = 0$, $\ddot{x} - 3\ddot{y} + 5\dot{x} + 8\dot{y} + 6x - 4y = 0$.

Методом неопределенных коэффициентов построить общее решение систем:

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y'' + y' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = 0$, $y \in \mathbb{C}^2$. **6.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y = 0$, $y \in \mathbb{C}^2$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = 0$, $y \in \mathbb{C}^3$.

8. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y = 0$, $y \in \mathbb{C}^3$.

Построить частные решения систем:

9. $3\frac{dy}{dx} + 8y - 6z = x + \sin x$, $\frac{dz}{dx} + 6y - 5z = e^x + e^{2x}$. **10.** $\frac{d^2y}{dx^2} + y + z = x\sin x$, $\frac{d^2z}{dx^2} - 6y - 8z = x + x^2$.

Построить общие решения систем:

11. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} y' + x^5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^6 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{C}^3$.

12. $(1 - x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y'' - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = 0$, $y \in \mathbb{C}^3$.

Привести к системам с постоянными коэффициентами и построить общее решение следующих уравнений:

13. $x^3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y''' + x^2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y = 0$.

14. $x^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} y'' + x \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

15. $x^3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y''' + x^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} y = 0$.

16. $(3x + 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} y'' + (3x + 1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \sin^2 x \\ x \end{pmatrix}$.

17. $(4x + 5)^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} y''' + (4x + 5)^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} y'' + (4x + 5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} y' = 0$.

Построить решения задач:

18. $y_1'' - y_2 = x$, $y_2'' + 16y_1 = x^2$, $0 < x < +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(y_{1,2}(x) e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

19. $x^2 y_1'' + x y_2' + 3y_1 = 0$, $x^2 y_2'' + 4x y_1' + 3y_2 = 0$, $1 < x < +\infty$, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 1$, $y_{1,2} = O\left(x^{\frac{1}{6}} \right)$, $x \to +\infty$.

Проинтегрировать следующие нелинейные системы:

20. $y' = \frac{x}{z}$, $z' = -\frac{x}{y}$. **21.** $y' = y^2 z$, $z' = \frac{z}{x} - yz^2$. **22.** $y' = z$, $z' = \frac{z}{y}(y + z)$.

Построить первые интегралы систем:

23. $y' = \frac{z^2}{x}$, $z' = \frac{y^2}{x}$. **24.** $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$. **25.** $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$. **26.** $\frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Построить общий интеграл систем:

27. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$. **28.** $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^3} = \frac{dz}{z^4} = \frac{du}{u^5}$. **29.** $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

Глава 4

Уравнения в частных производных первого порядка

§ 1. Линейные и квазилинейные уравнения

1.1. Основные понятия.

Квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \tag{1}$$

где X_i, R — известные функции, $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, подлежащая определению. Если функции X_i от z не зависят и $R \equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным однородным в частных производных.*

1.2. Решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Для решения уравнения (1) поступают следующим образом. Составляют систему уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{R}, \tag{2}$$

интегрируя которую находят n независимых первых интегралов:

$$\begin{aligned} &\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_1,\\ &\Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Общий интеграл уравнения (1) записывают так:

$$\Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) = 0, \tag{4}$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция. При этом считается, что функции X_i, R — непрерывно дифференцируемые, не обращающиеся в нуль одновременно в рассматриваемой области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

1.3. Задача Коши.

В приложениях часто требуется найти решение уравнения (1) при условии, что

$$z\Big|_{x_k = x_{k0}} = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\right).$$

Схема решения задачи Коши такова. Фиксируя в (3) переменную x_k, получаем

$$\begin{aligned} &\Psi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k0}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \varphi\right) = \overline{C}_1,\\ &\Psi_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k0}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \varphi\right) = \overline{C}_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Psi_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k0}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \varphi\right) = \overline{C}_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Исключив, если это возможно, из (5) переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, имеем зависимость

$$\Gamma\left(x_{k0}, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n\right) = 0. \tag{6}$$

Подставляя $C_i = \Psi_i$, $i = \overline{1, n}$, взятые из (3), в (6) вместо $\overline{C}_i$, имеем окончательно

$$\Gamma\left(x_{k0}, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\right) = 0. \tag{7}$$

Иногда начальное условие задается неявно:

$$\varphi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right) = 0, \quad \varphi_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда, исключив переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ из систем (3), (8), получим уравнение

$$\mathscr{J}\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0. \tag{9}$$

Наконец, подставив в (9) значения интегралов из (3), имеем:

$$\mathscr{J}\left(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\right) = 0. \tag{10}$$

1.4. Уравнение Пфаффа.

Уравнение вида

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0 \tag{11}$$

называется *уравнением Пфаффа*. К нему сводится задача о нахождении семейства поверхностей $u(x, y, z) = C$, ортогональных векторным линиям поля $\mathbf{F} = \left(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\right)$. При этом dx, dy, dz — координаты вектора, лежащего в касательной плоскости к искомым поверхностям.

Если поле $\mathbf{F}$ потенциально, т.е. $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, то искомая поверхность U находится с помощью криволинейного интеграла:

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{12}$$

Если поле $\mathbf{F}$ не потенциально, то в некоторых случаях можно подобрать множитель $\mu = \mu(x, y, z)$ так, что потенциальным окажется поле $\mu\mathbf{F}$. Следовательно,

$$\mu P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям, является равенство $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$. Если это условие выполнено, то уравнение (11) можно интегрировать как с помощью интегрирующего множителя, так и с помощью следующего метода. Считают некоторую переменную в уравнении (11) постоянной и интегрируют оставшуюся часть уравнения. В полученном интеграле постоянную интегрирования принимают за неизвестную функцию от ранее зафиксированной переменной и подбирают ее таким образом, чтобы интеграл удовлетворял уравнению (11).

Если $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$, то говорят, что уравнение (11) интегрируется одним соотношением. Если же $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) \neq 0$, то уравнение Пфаффа интегрируют двумя соотношениями, т.е. ищут не поверхности, ортогональные векторным линиям поля $\mathbf{F}$, а линии, обладающие тем же свойством и лежащие на заданной поверхности $u(x, y, z) = 0$. Исключив одну из переменных из уравнений (11) и $u(x, y, z) = 0$, получают обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Найти общее решение или общий интеграл для каждого из следующих уравнений:

466. $(x + 2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

◀ Согласно формуле (2), п. 1.1, составляем систему уравнений:

$$\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Из второго уравнения получаем первый интеграл $z = C_1$. Первое уравнение

$$y\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, поэтому

$$\int_0^x y\,dx_1 + \int_0^y 2y_1\,dy_1 \equiv xy + y^2 = C_2$$

— его интеграл.

Общий интеграл данного уравнения имеет вид (см. (4), п. 1.1):

$$\Phi\left(z,\ xy + y^2\right) = 0.$$

Разрешив последнее уравнение относительно z, получим общее решение

$$z = \varphi\left(xy + y^2\right),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция. ▶

467. $(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

◀ Составляем систему уравнений:

$$\frac{dx}{x - z} = \frac{dy}{y - z} = \frac{dz}{2z} \tag{1}$$

($u = C_1$ — первый интеграл — очевидно). Из системы (1) получаем две интегрируемые комбинации:

$$\frac{d(x + z)}{x + z} = \frac{dz}{2z},\quad \frac{d(y + z)}{y + z} = \frac{dz}{2z},$$

откуда находим два первых независимых интеграла

$$\frac{(x + z)^2}{z} = C_2,\quad \frac{(y + z)^2}{z} = C_1.$$

Таким образом, общий интеграл представляется в виде:

$$\Phi\left(u,\ \frac{(x + z)^2}{z},\ \frac{(y + z)^2}{z}\right) = 0,$$

откуда следует общее решение

$$u = \varphi\left(\frac{(x + z)^2}{z},\ \frac{(y + z)^2}{z}\right),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция. ▶

468. $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$

◀ Составляем систему

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}.$$

Из первого уравнения находим один первый интеграл $\frac{1}{y} - e^{-x} = C_1$, а из второго с учетом равенства $e^x = \frac{y}{1 - yC_1}$ следует еще один первый интеграл

$$z - \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} = C_2.$$

Таким образом, общий интеграл данного уравнения будет

$$\Phi\left(\frac{1}{y} - e^{-x},\ \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} - z\right) = 0.$$

Общее же решение его имеет вид

$$z = \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right). ▶$$

469. $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0.$

◀ Из системы

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{-z^2}$$

находим два первых независимых интеграла:

$$\frac{x^2}{y}-y=C_1,\quad \frac{x}{x^2-y^2}+\frac{1}{z}=C_2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\frac{1}{z}=\frac{x}{y^2-x^2}+\varphi\left(\frac{x^2-y^2}{y}\right).\ \blacktriangleright$$

470. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

◀ Система уравнений

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{x-2z}=\frac{dz}{yz}$$

дает два независимых интеграла:

$$\frac{z}{x}=C_1,\quad 2x-y^2-4z=C_2.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{z}{x},\,2x-y^2-4z\right)=0.\ \blacktriangleright$$

471. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=u.$

◀ Находим первые интегралы системы:

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}=\frac{du}{u}.$$

Из этой системы образуем три интегрируемые комбинации:

$$\frac{d(x-y)}{y-x}=\frac{du}{u},\quad \frac{d(x-z)}{z-x}=\frac{du}{u},\quad \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{du}{u},$$

интегрируя которые получаем три независимых первых интеграла:

$$u(x-y)=C_1,\quad u(x-z)=C_2,\quad \frac{x+y+z}{u^2}=C_3.$$

А тогда общий интеграл данного уравнения представится в виде:

$$\Phi\left(u(x-y),\,u(x-z),\,\frac{x+y+z}{u^2}\right)=0.\ \blacktriangleright$$

472. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\frac{dx}{u-x}=\frac{dy}{u-y}=\frac{dz}{-z}=\frac{du}{x+y}.$$

На основании свойства пропорции получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{z},$$

откуда следует первый интеграл

$$\frac{x-y}{z}=C_1.$$

Аналогично имеем еще одну комбинацию

$$\frac{d(x+y+2u)}{2u-(x+y)+2(x+y)}=-\frac{dz}{z},$$

или

$$\frac{d(x+y+2u)}{2u+x+y}=-\frac{dz}{z},$$

откуда интегрированием находим $(x+y+2u)z=C_2$ — первый интеграл. Остается найти еще один первый интеграл. Для этого с помощью последнего интеграла исключим сумму $x+y$ из третьего уравнения системы. Тогда придем к уравнению

$$\frac{dz}{z}=\frac{z\,du}{2uz-C_2}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем еще один первый интеграл:

$$u=\frac{C_2}{3z}+C_3z^2 \Longrightarrow \frac{u-x-y}{3z^2}=C_3.$$

Таким образом, общий интеграл имеет вид:

$$\Phi\Big(\frac{x-y}{z},\,(x+y+2u)z,\,\frac{u-x-y}{z^2}\Big)=0.\ \blacktriangleright$$

Найти решения следующих уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

473. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ z=y$ при $x=0$.

◄ Согласно п. 1.2 сначала мы должны найти общее решение. Из уравнения

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{2e^x-y}$$

находим первый интеграл

$$ye^x-e^{2x}=C.$$

Следовательно, общее решение будет

$$z=\varphi\big(ye^x-e^{2x}\big).$$

Теперь найдем функцию φ, пользуясь начальными условиями. Полагая здесь $y-1=u$, получаем $\varphi(u)=u+1$. Таким образом,

$$z=ye^x-e^{2x}+1$$

есть искомое решение. ►

474. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\ u=yz$ при $x=1$.

◄ Из системы уравнений

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

легко находим два первых независимых интеграла:

$$x-y=C_1,\quad 2x-z=C_2.$$

Следовательно, общее решение

$$u=\varphi(x-y,\,2x-z).$$

Начальные условия дают: $yz=\varphi(1-y,\,2-z)$. Полагая здесь $1-y=\xi,\ 2-z=\eta$, получаем выражение для функции $\varphi(\xi,\,\eta)=(1-\xi)(2-\eta)$. Таким образом,

$$u=(1-x+y)(2-2x+z)$$

есть решение задачи. ►

475. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\ u=x^2+y^2$ при $z=0$.

◀ Аналогично предыдущему имеем

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}.$$

Отсюда получаем первые интегралы

$$\frac{x}{y}=C_1,\quad xy-2z=C_2$$

и записываем общее решение

$$u=\varphi\left(\frac{x}{y},\ xy-2z\right).$$

Вид функции φ, отвечающей начальным условиям, находим из уравнения:

$$x^2+y^2=\varphi\left(\frac{x}{y},\ xy\right).$$

Положив в нем $\frac{x}{y}=\xi,\ xy=\eta$, имеем

$$\varphi(\xi,\ \eta)=\frac{\eta}{\xi}+\xi\eta.$$

Стало быть,

$$u=\left(x^2+y^2\right)\left(1-\frac{2z}{xy}\right).\ ▶$$

Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию, если:

476. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2;\ y=1,\ z=x^2$.

◀ Прежде всего находим первые интегралы системы:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Отсюда легко получаем:

$$yx^2=C_1,\quad \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-z=C_2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\varphi\left(yx^2\right). \tag{1}$$

Функция φ, согласно начальным условиям, удовлетворяет уравнению:

$$x^2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}+\varphi\left(x^2\right)\quad\text{при}\quad\varphi(\xi)=\frac{\xi}{2}+\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\varphi\left(yx^2\right)=\frac{yx^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

А тогда из (1) находим требуемое решение

$$z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{yx^2}{2}+\frac{1}{4}.\ ▶$$

477. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y),\ x=1,\ yz+1=0$.

◀ Находим первые интегралы системы:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z^2(x-3y)}.$$

Из первого уравнения получаем сразу

$$xy=C_1.$$

Используя этот интеграл, решаем уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2(x - C_1x^{-1})},$$

или

$$\left(1 - \frac{3C_1}{x^2}\right) dx = \frac{dz}{z^2}.$$

Отсюда находим еще один первый интеграл:

$$x + 3y + \frac{1}{z} = C_2.$$

Далее можно было бы действовать так, как и в предыдущих примерах, однако на этот раз мы поступим согласно формулам (8), (9), (10), п. 1.3, и исключим переменные x, y, z из соотношений:

$$x = 1, \quad yz + 1 = 0, \quad xy = C_1, \quad x + 3y + \frac{1}{z} = C_2.$$

Этим самым мы получим связь между C_1 и C_2 на кривой $x = 1$, $yz + 1 = 0$. Имеем:

$$1 + 2C_1 - C_2 = 0.$$

Наконец, подставляя в это соотношение значения C_1 и C_2, получаем интеграл данного уравнения:

$$1 + 2xy - x - 3y - \frac{1}{z} = 0. \blacktriangleright$$

478. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz;\ x + y = 2,\ yz = 1.$

◀ Первые независимые интегралы системы

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz}$$

имеют вид

$$x^2 - z = C_1, \quad zy^2 = C_2.$$

Исключив переменные x, y, z из соотношений

$$x + y = 2, \quad yz = 1, \quad x^2 - z = C_1, \quad zy^2 = C_2,$$

находим связь между интегралами на данной кривой:

$$(2 - C_2)^2 - C_2^{-1} - C_1 = 0.$$

Подставив сюда значения C_1, C_2, имеем уравнение искомой поверхности:

$$\left(2 - zy^2\right)^2 - z^{-1}y^{-2} - x^2 + z = 0. \blacktriangleright$$

479. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = y;\ y = 2z,\ x + 2y = z.$

◀ Легко находим два первых независимых интеграла:

$$x + y + z = C_1, \quad y^2 - z^2 = C_2.$$

Исключив переменные x, y, z из соотношений:

$$x + y + z = C_1, \quad y^2 - z^2 = C_2, \quad y - 2z = 0, \quad x + 2y - z = 0,$$

получаем связь между C_1 и C_2 на данной кривой:

$$C_1 = 0.$$

Таким образом, искомой поверхностью в данном случае оказалась плоскость

$$x + y + z = 0. \blacktriangleright$$

480. $xy^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^3z;\ x=-z^3,\ y=z^2.$

◄ Из уравнения

$$\frac{dx}{xy^3}=\frac{dz}{y^3z}$$

находим первый интеграл

$$\frac{x}{z}=C_1,$$

используя который из второго уравнения

$$\frac{dy}{x^2z^2}=\frac{dz}{y^3z}$$

находим еще один первый интеграл:

$$y^4-x^2z^2=C_2.$$

Исключая переменные x, y, z из системы

$$\frac{x}{z}=C_1,\quad y^4-x^2z^2=C_2,\quad x+z^3=0,\quad y-z^2=0,$$

получаем $C_2=0$. Таким образом, интеграл (поверхность)

$$y^4-x^2z^2=0$$

является искомой. В силу начального условия $x=-z^3$ переменные x, z не могут иметь одинаковых знаков. Следовательно, множитель $y^2-xz\geqslant 0$, и в уравнении

$$y^4-x^2z^2=(y^2+xz)(y^2-xz)=0$$

можно от него избавиться.

Итак, окончательно имеем

$$xz=-y^2.\ ►$$

481. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy;\ y=x,\ z=x^2.$

◄ Первые интегралы находим без труда:

$$\frac{y}{x}=C_1,\quad xy-z=C_2.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения будет

$$z=xy+\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big),\tag{1}$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция. Для ее нахождения воспользуемся начальными условиями. Это дает $\varphi(1)=0$. Следовательно, функция (1) есть решение поставленной задачи, если $\varphi(1)=0$. ►

482. Среди функций, удовлетворяющих уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

найти такую, которая удовлетворяет и уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2}{x^2+y^2}.\tag{1}$$

◄ Прежде всего, находим общее решение первого уравнения. Имеем

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

откуда

$$\frac{y}{x}=C_1$$

— первый интеграл. Следовательно, имеем общее решение

$$z=\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Подставляя его в (1), получаем дифференциальное уравнение относительно функции φ:

$$\frac{y^2}{x}\varphi'^2\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\varphi'^2\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2+y^2},$$

откуда

$$\varphi'^2(\xi)=\frac{a^2}{(1+\xi^2)^2},\quad \varphi'(\xi)=\frac{|a|}{1+\xi^2}\quad\left(\xi=\frac{y}{x}\right).$$

Из последнего уравнения находим

$$\varphi(\xi)=\pm|a|\operatorname{arctg}\xi+C.$$

Подставляя сюда значение ξ, приходим к искомому решению:

$$z=\pm|a|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.\ \blacktriangleright$$

Решить следующие системы уравнений:

483. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2z}{y}.$

◀ Сначала находим общее решение первого уравнения. Имеем:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{x\,dz}{z},\quad y=C_1,\quad \frac{z}{x}=C_2.$$

Следовательно,

$$\Phi\left(y,\ \tfrac{z}{x}\right)=0,\quad \text{или}\quad z=x\varphi(y).$$

Затем, подставляя найденное z во второе уравнение, относительно функции φ получаем дифференциальное уравнение:

$$x\varphi'(y)=\frac{2}{y}x\varphi(y),\quad \text{или}\quad \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\frac{2}{y}\quad (xy\neq 0).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\varphi(y)=Cy^2.$$

Таким образом, функция

$$z=Cxy^2\quad (xy\neq 0)$$

есть решение данной системы уравнений. ▶

484. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-z,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=xz.$

◀ Покажем, что непрерывно дифференцируемых решений система не имеет. Предполагая противное, на основании данных уравнений имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=1-\frac{\partial z}{\partial y}=1-xz;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z+x\frac{\partial z}{\partial x}=z+x(y-z).$$

Отсюда в силу непрерывности смешанных производных следует тождество:

$$1-xz\equiv z+x(y-z),\quad \text{или}\quad z=1-xy.$$

Следовательно, функция $z=1-xy$ должна быть решением обоих уравнений. Однако нетрудно проверить, что это не так. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. ▶

485. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\ u=z^2$ при $x=y=0.$

◀ На основании первого уравнения составляем, а затем решаем систему:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{1},\quad y=C_1,\quad z-x=C_2.$$

Следовательно, общее решение первого данного уравнения имеет вид:

$$u = \varphi(y, z - x).$$

Требуя, чтобы функция φ удовлетворяла второму уравнению, получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = z - x.$$

Нетрудно получить общее решение последнего уравнения:

$$\varphi = \psi(y - \xi).$$

Таким образом,

$$u = \psi(y - z + x).$$

Остается найти вид функции ψ, использовав начальные условия. Имеем:

$$z^2 = \psi(-z), \quad \psi(z) = z^2.$$

Итак, функция

$$u = (y - z + x)^2$$

есть решение поставленной задачи. ▶

486. Найти поверхность, проходящую через прямую $y = x$, $z = 1$ и ортогональную к поверхностям $x^2 + y^2 + z^2 = Cx$.

◀ Пусть $F(x, y, z) = 0$ — уравнение искомой поверхности. Тогда, приняв во внимание, что вектор нормали $\mathbf{N}$ к поверхности определяется по формуле $\mathbf{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, из условия ортогональности получаем:

$$(2x - C)\frac{\partial F}{\partial x} + 2y\frac{\partial F}{\partial y} + 2z\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Если исключим параметр C из полученного уравнения и уравнения данных поверхностей, то будем иметь уравнение, которое определяет поверхности, ортогональные ко всем поверхностям данного семейства:

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} + 2xz\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Из уравнений

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

находим первые интегралы:

$$\frac{y}{z} = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$F = \varphi\left(\frac{y}{z}, x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Но $F = 0$ на поверхности, поэтому должно быть

$$\varphi\left(\frac{y}{z}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$y = z\psi(x^2 + y^2 + z^2).$$

Для определения функции ψ воспользуемся начальными условиями. Тогда получим $x = \psi(1 + 2x^2)$, откуда

$$\psi(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{\alpha - 1}{2}}.$$

Таким образом,

$$y = \pm z\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}}, \quad \text{или} \quad z^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - 2y^2 = 0,$$

есть уравнение искомой поверхности. ▶

487. Найти уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору $(1, -1, 1)$, и направляющей $x + y + z = 0$, $x^2 + xy + y^2 = 1$.

◀ Пусть

$$F(x, y, z) = 0$$

— уравнение искомой поверхности. По условию, векторы $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ и $(1, -1, 1)$ должны быть ортогональны; следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Первые интегралы системы $dx = -dy = dz$ суть

$$x + y = C_1, \quad y + z = C_2.$$

Исключив переменные x, y, z из соотношений

$$x + y = C_1, \quad y + z = C_2, \quad x + y + z = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1,$$

получаем уравнение, связывающее C_1 и C_2:

$$C_1^2 + C_1C_2 + C_2^2 = 1.$$

Подставив сюда значения C_1 и C_2, имеем окончательно

$$x^2 + 3(y^2 + xy + yz) + xz + z^2 = 1. \blacktriangleright$$

Примечание. Можно было бы провести решение, аналогичное предыдущему; однако, как нетрудно убедиться самому читателю, такой путь технически является более длинным, нежели предложенный в данном примере.

488. Найти поверхности, у которых любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

◀ Если $F(x, y, z) = 0$ — уравнение искомой поверхности, то

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

есть уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке (x, y, z); X, Y, Z — координаты произвольной точки на плоскости. Положив в (1) $Y = Z = 0$, найдем абсциссу X_1 пересечения касательной плоскости с осью Ox:

$$X_1 = x + \frac{yF_y + zF_z}{F_x} \quad (F_x \neq 0). \tag{2}$$

По условию, $x = 2X_1$, поэтому из (2) получаем уравнение

$$xF_x + 2yF_y + 2zF_z = 0,$$

интегрируя которое, находим общее решение:

$$F = \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x^2}\right).$$

Таким образом, искомые поверхности имеют вид:

$$\varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x^2}\right) = 0. \blacktriangleright$$

489. Найти асимптотические линии поверхности, проходящей через кривую $y = x$, $z = x^3$ и удовлетворяющую уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

зная, что асимптотические линии поверхности $f(x, y, z) = 0$ определяются уравнением:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = 0.$$

◀ Прежде всего, ищем нужную поверхность, решая задачу

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} - y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad z = x^3, \quad y = x.$$

Общее решение этого уравнения

$$z = \frac{1}{y}\varphi(xy)$$

подчиняем начальным условиям:

$$x^3 = \frac{1}{x}\varphi(x^2),$$

откуда

$$\varphi(\alpha) = \alpha^2.$$

Таким образом,

$$z = x^2 y$$

есть уравнение искомой поверхности.

Далее, подставляя значение $z = x^2 y$ в уравнение асимптотических линий, получаем

$$y\,dx^2 + 2x\,dx\,dy = 0, \quad \text{или} \quad d(x^2 y)\,dx = 0.$$

Отсюда следуют решения:

$$x = C_1, \quad x^2 y = C_2.$$

Значит, на рассматриваемой поверхности имеется два семейства асимптотических линий:

$$\begin{cases} z = x^2 y; \\ x = C_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x^2 y; \\ x^2 y = C_2. \end{cases} \quad ▶$$

490. Найти линии кривизны поверхности, проходящей через прямую $z = 1$, $x = y\sqrt{2}$ и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z},$$

зная, что линии кривизны поверхности $z = f(x, y)$ определяются уравнением:

$$\frac{\left(1 + p^2\right)dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + \left(1 + q^2\right)dy}{s\,dx + t\,dy}, \tag{1}$$

где p, q, r, s, t — частные производные z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

◀ Сначала находим поверхность. Интегрируя уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z},$$

получаем

$$z^2 = x^2 + \varphi(x^2 - y^2).$$

В силу начальных условий имеем $1 = 2y^2 + \varphi(y^2)$, откуда

$$\varphi(\alpha) = 1 - 2\alpha.$$

Таким образом, искомая поверхность описывается уравнением

$$z = \sqrt{1 - x^2 + 2y^2}.$$

Далее, для нахождения линий кривизны полученной поверхности вычисляем нужные производные и, подставляя их в уравнение (1), получаем

$$\left(\left(x^2 + z^2\right)dx - 2xy\,dy\right)(3z^2 + 4y^2 - 4yz)\,dy = 0.$$

Отсюда находим два семейства решений:

$$y = C_1, \quad x^2 = C_2(1 + 2y^2).$$

Последнее совместно с уравнением поверхности дает:

$$z = C_3 x.$$

Легко видеть, что кривые $y = C_1$, $z = \sqrt{1 - x^2 + 2y^2}$ являются параллелями, а кривые $z = C_3 x$, $z = \sqrt{1 - x^2 + 2y^2}$ — меридианами. ▶

Примечание. Было бы неточностью считать, что поставленной задаче удовлетворяет поверхность $z^2 = 1 - x^2 + 2y^2$, поскольку на плоскости $z = 0$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ не определены.

Проинтегрировать одним (если это возможно) соотношением следующие уравнения Пфаффа:

491. $3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0$.

◀ Согласно п. 1.4

$$\mathbf{F} = (3yz,\ 2xz,\ xy).$$

Так как

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = -\mathbf{i}x + 2\mathbf{j}y - \mathbf{k}z \quad \text{и} \quad \Big(\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\mathbf{F}\Big) = 0,$$

то данное уравнение интегрируется одним соотношением. Следовательно, существует множитель $\mu = \mu(x, y, z)$ такой, что $\operatorname{rot}\mu\mathbf{F} = 0$, т. е. поле $\mu\mathbf{F}$ потенциально. Таким образом, для множителя μ имеем уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu xy) = \frac{\partial}{\partial z}(2x\mu z), \quad \frac{\partial}{\partial x}(2xz\mu) = \frac{\partial}{\partial y}(3yz\mu), \quad \frac{\partial}{\partial x}(xy\mu) = \frac{\partial}{\partial z}(3yz\mu),$$

или

$$y\frac{\partial\mu}{\partial y} - 2z\frac{\partial\mu}{\partial z} = \mu, \quad 2x\frac{\partial\mu}{\partial x} - 3y\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu, \quad x\frac{\partial\mu}{\partial x} - 3z\frac{\partial\mu}{\partial z} = 2\mu.$$

Интегрируя первое уравнение, получаем общее решение:

$$\mu = y\varphi(x, \xi), \quad \xi = yz^2.$$

Подставляя полученное значение μ во второе уравнение, имеем:

$$2x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 3\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 4\varphi,$$

откуда находим

$$\varphi = x^2\psi(x^3y^2z^4).$$

А тогда

$$\mu = yx^2\psi(\eta), \quad \eta = x^3y^2z^4.$$

Остается найти функцию ψ. Для этого воспользуемся третьим уравнением. Имеем

$$-9x^5y^3z^4\psi'(\eta) = 0.$$

Отсюда

$$\psi(\eta) = C.$$

Таким образом,

$$\mu = yx^2$$

(C полагаем равным единице). Умножая почленно данное уравнение на yx^2, получаем уравнение

$$3x^2y^2z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3y^2\,dz = 0,$$

левая часть которого есть полный дифференциал функции $u = u(x, y, z)$, которую мы найдем, вычислив криволинейный интеграл (см. (12), п. 1.4):

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z,)} 3x^2y^2z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3y^2\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} 3x_1^2y_0z_0\,dx_1 + \int\limits_{y_0}^{y} 2x^3y_1z_0\,dy_1 + \int\limits_{z_0}^{z} x^3y^2\,dz_1 = y_0^2z_0\Big(x^3 - x_0^3\Big) + x^3z_0\Big(y^2 - y_0^2\Big) + x^3y^2(z - z_0).$$

Следовательно,

$$x^3y^2z = C$$

есть искомый интеграл данного уравнения. ▶

492. $(z+xy)\,dx-(z+y^2)\,dy+y\,dz=0$.

◀ Так как $(\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\mathbf{F})=z+x-y^2\neq 0$, то данное уравнение не может быть проинтегрировано одним соотношением. Значит, остается проверить, будет ли функция $z=y^2-xy$ решением этого уравнения. Вычислив $dz=2y\,dy-x\,dy-y\,dx$ и подставив значения z и dz в уравнение, получаем тождество. Следовательно, поверхность

$$z=y^2-xy$$

является единственной, которая ортогональна полю $\mathbf{F}=(z+xy,\ -z-y^2,\ y)$. ▶

493. $(2yz+3x)\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$.

◀ Здесь $\mathbf{F}=(2yz+3x,\ xz,\ xy)$. Поскольку $(\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\mathbf{F})=0$, но $\operatorname{rot}\mathbf{F}\neq 0$, то поле $\mathbf{F}$ не потенциально, однако существует множитель μ такой, что $\operatorname{rot}\mu\mathbf{F}=0$, т. е. потенциальным является поле $\mu\mathbf{F}$. Из уравнения $\operatorname{rot}\mu\mathbf{F}=0$ следует три скалярных уравнения:

$$y\frac{\partial\mu}{\partial y}-z\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\quad xy\frac{\partial\mu}{\partial x}-(2yz+3x)\frac{\partial\mu}{\partial z}=\mu y,\quad xz\frac{\partial\mu}{\partial x}-(2yz+3x)\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu z.$$

Из первого уравнения находим

$$\mu=\varphi(x,\ \xi),\quad \xi=yz.$$

Подставив значение μ во второе уравнение, получим:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-(2\xi+3x)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\varphi,$$

откуда

$$\varphi=x\psi(x^2yz+x);$$

поэтому

$$\mu=x\psi(x^2yz+x).$$

Наконец, подставив μ в третье уравнение, имеем $\psi'=0$, т. е. $\psi=C$. Таким образом,

$$\mu=x.$$

После умножения данного уравнения на μ, получаем уравнение

$$(2xyz+3x^2)\,dx+x^2z\,dy+x^2y\,dz=0,$$

интеграл которого имеет вид

$$x^3+x^2yz=C.$$

Решение $x=0$ входит в него при $C=0$. ▶

494. $(z^2-y^2+yz)\,dx+(xz-2xy)\,dy+(2xz+2z+xy)\,dz=0$.

◀ Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, где $\mathbf{F}=(z^2-y^2+yz,\ xz-2xy,\ 2xz+2z+xy)$, то поле $\mathbf{F}$ потенциально. Следовательно, левая часть данного уравнения является полным дифференциалом функции

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=z^2(x+1)+xyz-xy^2.$$

Поэтому

$$z^2(x+1)+xyz-xy^2=C$$

есть искомый интеграл. ▶

495. $\left(4x^2yz^2-2y^2z^3-3xyz\right)dx+\left(2x^3yz^3-3xyz^3-2x^2z\right)dy+\left(3x^3yz^3-4xy^2z^2-2x^2y\right)dz=0$.

◀ Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{F}\neq 0$, то поле $\mathbf{F}$ не потенциально; однако в силу того, что $(\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\mathbf{F})=0$, существует множитель $\mu=\mu(x,\ y,\ z)$ такой, что потенциальным будет поле $\mu\mathbf{F}$. Легко найти, что $\mu=xyz$. Выполняя интегрирование

$$\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(\mu\mathbf{F},\ d\mathbf{r})=x^2y^2z^2(x^2z-yz^2-x),$$

получаем интеграл данного уравнения:

$$x^2y^2z^2(x^2z-yz^2-x)=C.\ ▶$$

496. $3xy^2z\,dx + 3x^2yz\,dy + 2x^2y^2\,dz = 0.$

◀ Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{F} \neq 0$, но $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$, то данное уравнение интегрируется одним соотношением. Найдем интеграл уравнения, используя метод, изложенный в конце п. 1.4. Считая переменную z временно постоянной, интегрируем соотношение:

$$3xy^2z_0\,dx + 3x^2yz_0\,dy = 0, \quad \text{или} \quad d(xy) = 0.$$

Отсюда следует, что $xy = C$. Далее, принимая $C = C(z)$, подбираем функцию C таким образом, чтобы соотношение

$$xy = C(z) \tag{1}$$

стало интегралом данного уравнения. Вычислив

$$dx = \frac{C'\,dz - x\,dy}{y}$$

и подставив в указанное уравнение значения $xy = C$ и dx, после некоторых упрощений получим уравнение:

$$3C'z + 2C = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$C = C_0z^{-\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, из равенства (1) следует, что

$$x^3y^3z^2 = C_0$$

есть интеграл исходного уравнения. ▶

497. $(1 + x^2y^2z^2 - yz)\,dx - xz\,dy - xy\,dz = 0.$

◀ Непосредственно проверяем, что $\operatorname{rot}\mathbf{F} \neq 0$, но $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$, поэтому уравнение интегрируется одним соотношением. Считая переменную x временно постоянной, интегрируем уравнение:

$$x_0z\,dy + x_0y\,dz = 0, \quad \text{или} \quad d(yz) = 0.$$

Следовательно,

$$yz = C(x). \tag{1}$$

Подберем функцию C так, чтобы данному уравнению удовлетворял интеграл $yz = C(x)$. Из последнего соотношения находим

$$dy = \frac{C'\,dx}{z} - \frac{C\,dz}{z^2}$$

и подставляем в рассматриваемое уравнение значения y и dy. После упрощений имеем дифференциальное уравнение:

$$1 - C - x^2C^2 - xC' = 0, \quad \text{или} \quad (xC)' = 1 + (xC)^2,$$

интегрируя которое, получаем

$$\operatorname{arctg}(xC) = x + C_1. \tag{2}$$

А тогда из равенства (1) с учетом (2) находим интеграл данного уравнения:

$$\operatorname{arctg}(xyz) - x = C_1. \blacktriangleright$$

498. $(x - y)\,dx + z\,dy - x\,dz = 0.$

◀ Поскольку $(\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F}) = z - 2x + y$ и функция $z = 2x - y$ не является решением данного уравнения, то оно не может быть проинтегрировано одним соотношением. Проинтегрируем его двумя соотношениями, положив, например, $z = x + y$. Тогда получим уравнение

$$dx - dy = 0,$$

откуда

$$y = x + C_1.$$

Следовательно, однопараметрическое семейство прямых

$$x = t, \quad y = t + C_1, \quad z = 2t + C_1$$

удовлетворяет данному уравнению. ▶

499. $\left(y+3z^2\right)dx+(x+y)\,dy+6xz\,dz=0.$

◀ Векторное поле $\mathbf{F}=(y+3z^2,\ x+y,\ 6xz)$ потенциально, поэтому

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(\mathbf{F},\ d\mathbf{r})=xy+\frac{y^2}{2}+3xz^2.$$

Следовательно,

$$y^2+2xy+6xz^2=C$$

есть интеграл данного уравнения. ▶

Найти поверхности, ортогональные векторным линиям векторного поля $\mathbf{F}$, если:

500. $\mathbf{F}=(2xy-3yz)\mathbf{i}+(x^2-3xz)\mathbf{j}-3xy\mathbf{k}.$

◀ Если $d\mathbf{r}=(dx,\ dy,\ dz)$ — вектор, лежащий в касательной плоскости к искомой поверхности, то согласно условию должно быть $(\mathbf{F},\ d\mathbf{r})=0$, или

$$(2xy-3yz)\,dx+(x^2-3xz)\,dy-3xy\,dz=0.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, то поле $\mathbf{F}$ потенциально. Следовательно,

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(\mathbf{F},\ d\mathbf{r})=x^2y-3xyz.$$

Таким образом,

$$x^2y-3xyz=C$$

— искомые поверхности. ▶

501. $\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}+(3y-z)\mathbf{j}+(x-2y)\mathbf{k}.$

◀ Поскольку $(\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\mathbf{F})=z-x-4y$ и функция $z=x+4y$ уравнению $(\mathbf{F},\ d\mathbf{r})=0$ не удовлетворяет, то не существует ни одной гладкой поверхности, ортогональной данному векторному полю $\mathbf{F}$. ▶

502. Найти векторные линии, векторные поверхности и поверхности, ортогональные векторным линиям поля

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}.$$

◀ Векторные линии в каждой своей точке касаются вектора $\mathbf{F}$. Следовательно, $\mathbf{F}\parallel d\mathbf{r}$, где $d\mathbf{r}$ — дифференциал радиуса-вектора линии.

В координатной форме условие касания в данном случае имеет вид:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-z}. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем

$$\frac{x}{y}=C_1,\quad yz=C_2.$$

Таким образом, пересечение семейств поверхностей $\frac{x}{y}=C_1$, $yz=C_2$ дает нам двухпараметрическое семейство векторных линий. Поскольку векторные поверхности состоят из векторных линий, то в каждой точке такой поверхности должно выполняться условие: $(\mathbf{N},\ \mathbf{F})=0$, где $\mathbf{N}$ — вектор нормали к поверхности. Пусть $u(x,\ y,\ z)=0$ — уравнение поверхности; тогда указанное условие в координатной форме приобретает вид:

$$F_x\frac{\partial u}{\partial x}+F_y\frac{\partial u}{\partial y}+F_z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Подставив сюда значения координат вектора $\mathbf{F}$, имеем

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Используя интегралы системы (1), получаем общий интеграл последнего уравнения:

$$u\Big(\frac{x}{y}, yz\Big) = 0,$$

откуда

$$z = \frac{1}{y}\varphi\Big(\frac{x}{y}\Big),$$

где φ — произвольная функция. Итак, векторные поверхности найдены.

Поверхности, ортогональные данным векторным линиям, ищем из уравнения:

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = 0, \quad \text{или} \quad x\,dx + y\,dy - z\,dz = 0.$$

Интеграл этого уравнения усматривается непосредственно

$$x^2 + y^2 - z^2 = C. \blacktriangleright$$

§ 2. Нелинейные уравнения первого порядка

2.1. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Уравнение вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

где $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, называется *нелинейным уравнением в частных производных первого порядка.*

Для интегрирования уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{2}$$

применяется *метод Лагранжа и Шарпи*, заключающийся в следующем. Соответственно уравнению (2) подбирают уравнение

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad a = \text{const}, \tag{3}$$

таким образом, чтобы оно удовлетворяло двум основным условиям: 1) систему уравнений (2), (3) можно разрешить относительно переменных p, q; 2) уравнение Пфаффа

$$dz = p(x, y, z, a)\,dx + q(x, y, z, a)\,dy$$

интегрируется одним соотношением $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, $b = \text{const}$. Тогда интеграл $\Phi = 0$ будет также интегралом уравнения (2) (интеграл $\Phi = 0$ носит название *полного*). Функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial y} + \Big(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\Big)\frac{\partial u}{\partial z} - \Big(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\Big)\frac{\partial u}{\partial p} - \Big(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\Big)\frac{\partial u}{\partial q} = 0. \tag{4}$$

2.2. Решение задачи о нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую.

Если известен полный интеграл $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ уравнения (2), то можно решить задачу о нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{5}$$

Считая $b = b(a)$, определяем функцию b из системы уравнений:

$$\begin{cases} \Phi\Big(x(t), y(t), z(t), a, b(a)\Big) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}y'(t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}z'(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

После того, как функция b будет найдена, искомую интегральную поверхность определяем, исключая параметр a из системы уравнений:

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0, \quad \frac{d}{da}\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0. \tag{7}$$

2.3. Метод Коши.

Предыдущую задачу можно решить по-другому. Сначала определяем функции $p_0 = p_0(s)$, $q_0 = q_0(s)$ из уравнений:

$$\begin{gathered} F\Big(x_0(s),\, y_0(s),\, z_0(s),\, p_0(s),\, q_0(s)\Big) = 0, \\ p_0(s)x_0'(s) + q_0(s)y_0'(s) - z_0'(s) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$ — параметрические уравнения данной кривой. Затем интегрируем систему с учетом найденных функций p_0, q_0:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \tag{9}$$

с начальными условиями:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s). \tag{10}$$

Тогда три функции $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $z = z(t, s)$, являющиеся решением задачи (9), (10), представляют собой параметрические уравнения искомой интегральной поверхности.

2.4. Обобщение метода Коши.

Метод Коши обобщается на уравнения вида (1), когда требуется найти интегральную n-мерную поверхность $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (1), проходящую через заданную $(n-1)$-мерную поверхность:

$$\begin{gathered} x_{i0} = x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}, \\ z_0 = z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}). \end{gathered} \tag{11}$$

Схема решения задачи (1), (11) следующая. Сначала определяем функции $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ из уравнений

$$\begin{gathered} F\Big(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}\Big) = 0, \\ \frac{\partial z_0}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_{i0}\frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Далее интегрируем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{dz}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}} = -\frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_z} = -\frac{dp_2}{F_{x_2} + p_2 F_z} = \ldots = -\frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_z} = dt \tag{13}$$

с начальными условиями:

$$\begin{gathered} x_i\Big|_{t=0} = x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ z\Big|_{t=0} = z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ p_i\Big|_{t=0} = p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{14}$$

В результате получаем параметрические уравнения искомой интегральной поверхности:

$$\begin{cases} x_i = x_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}, \\ z = z(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}). \end{cases} \tag{15}$$

Найти полный интеграл в каждом из следующих уравнений:

503. $pq = x^2y^2$.

◀ Согласно п. 2.1, сначала составляем и решаем уравнение (4) ($F \equiv pq - x^2y^2$):

$$q\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y} + 2pq\frac{\partial u}{\partial z} + 2xy^2\frac{\partial u}{\partial p} + 2x^2y\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{2xy^2} = \frac{dq}{2x^2y}.$$

Используя равенство $pq = x^2y^2$, последние уравнения приводим к виду

$$x\,dp = y\,dq = dz = 2p\,dx = 2q\,dy.$$

Отсюда получаем два первых интеграла:

$$\frac{p}{x^2} = C_1, \quad \frac{q}{y^2} = C_2. \tag{1}$$

Но так как $pq = x^2y^2$, то $C_1C_2 = 1$. Следовательно, обозначив $C_1 = a$, интеграл (1) можно представить так:

$$p = ax^2, \quad q = \frac{1}{a}y^2.$$

Далее, подставив значения p, q в уравнение Пфаффа $dz = p\,dx + q\,dy$, имеем

$$dz = ax^2\,dx + \frac{1}{a}y^2\,dy.$$

Отсюда находим

$$z - \frac{a}{3}x^3 + \frac{y^3}{3a} + b = 0.$$

Таким образом, мы получили полный интеграл данного уравнения. ▶

504. $z = px + qy + p^3q^3$.

◀ Пользуемся методом Лагранжа и Шарпи. Вычислив производные $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, где $F = z - px - qy - p^3q^3$, и подставив их значения в уравнение (4), п. 2.1, решаем уравнение:

$$\left(x + 3p^2q^3\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(y + 3p^3q^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(px + qy + 6p^3q^3\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Из системы уравнений

$$\frac{dx}{x + 3p^2q^3} = \frac{dy}{y + 3p^3q^2} = \frac{dz}{px + qy + 6p^3q^3} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

следуют интегралы: $p = a$, $q = b$. Из первого уравнения получаем:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \text{или} \quad dz = a\,dx + b\,dy.$$

Следовательно,

$$z = ax + by + C_3.$$

Но $z = px + qy + p^3q^3$, поэтому

$$C_3 = a^3b^3.$$

Итак, полный интеграл имеет вид:

$$z = ax + by + a^3b^3. \blacktriangleright$$

505. $pq = 9z^2$.

◀ Вычислив необходимые производные от функции $F = pq - 9z^2$, составляем и решаем уравнение (4):

$$q\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y} + 2pq\frac{\partial u}{\partial z} + 18pz\frac{\partial u}{\partial p} + 18qz\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{18pz} = \frac{dq}{18qz}.$$

Из последнего уравнения получаем один первый интеграл:

$$\frac{p}{q} = C_1^2.$$

Из системы

$$\frac{p}{q} = C_1^2, \quad pq = 9z^2$$

находим

$$p = 3az, \quad q = \frac{3}{a}z$$

(мы ввели обозначение $C_1 = a$). Подставив значения p, q в уравнение Пфаффа, получим

$$dz = 3az\,dx + \frac{3}{a}z\,dy.$$

Интегрируя это уравнение, находим полный интеграл:

$$\ln|z| - 3ax - \frac{3}{a}y - b = 0. \blacktriangleright$$

506. $p = \sin q$.

◀ В данном случае $F = p - \sin q$, поэтому уравнение (4), п. 2.1, принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \cos q \frac{\partial u}{\partial y} + (p - q\cos q)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Из системы уравнений

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\cos q} = \frac{dz}{p - q\cos q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

находим два первых интеграла:

$$p = C_1, \quad q = C_2.$$

В силу уравнения $p = \sin q$ имеем $C_1 = \sin C_2$. А тогда соответствующее уравнение Пфаффа будет иметь вид

$$dz = \sin C_2\, dx + C_2\, dy;$$

интегрируя его, легко находим полный интеграл данного уравнения:

$$z = x\sin a + ay + b \quad (a = C_2). \blacktriangleright$$

507. $z = p^2 + q^2$.

◀ Из системы уравнений

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2+q^2)} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

которая соответствует уравнению (4), п. 2.1,

$$2p\frac{\partial u}{\partial x} + 2q\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(p^2+q^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} + p\frac{\partial u}{\partial p} + q\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

находим один первый интеграл:

$$\frac{p}{q} = a.$$

Далее, решив систему:

$$p^2 + q^2 = z, \quad p = qa,$$

имеем

$$p = \frac{a\sqrt{z}}{\pm\sqrt{1+a^2}}, \quad q = \frac{\sqrt{z}}{\pm\sqrt{1+a^2}}.$$

Подставив значения p и q в уравнение Пфаффа $dz = p\,dx + q\,dy$, можем записать:

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{a\,dx + dy}{\pm\sqrt{1+a^2}},$$

откуда интегрированием находим $\pm 2\sqrt{1+a^2}\sqrt{z} - ax - y - b = 0$, или

$$4(1+a^2)z - (ax + y + b)^2 = 0.$$

Это есть полный интеграл данного уравнения. ▶

508. $p^2 + zpq = z^2$.

◀ Уравнение (4), п. 2.1, в данном случае имеет вид:

$$(2p+zq)\frac{\partial u}{\partial x} + zp\frac{\partial u}{\partial y} + 2p(p+zq)\frac{\partial u}{\partial z} - p(pq-2z)\frac{\partial u}{\partial p} - q(pq-2z)\frac{\partial u}{\partial q} = 0.$$

Далее решаем систему уравнений:

$$\frac{dx}{2p+zq} = \frac{dy}{zp} = \frac{dz}{2p(p+zq)} = \frac{dp}{(2z-pq)p} = \frac{dq}{(2z-pq)q}.$$

Из последнего уравнения находим первый интеграл

$$\frac{p}{q} = a.$$

Из системы

$$p^2 + zpq = z^2, \quad p = qa$$

имеем:

$$p = \pm\frac{az}{\sqrt{a(a+z)}}, \quad q = \pm\frac{z}{\sqrt{a(a+z)}}.$$

Используя значения p, q, уравнение Пфаффа $dz = p\,dx + q\,dy$ представляем в виде:

$$\sqrt{a(a+z)}\frac{dz}{z} = \pm(a\,dx + dy) = \pm d(ax + y).$$

Интегрируя уравнение Пфаффа, после некоторых преобразований получаем полный интеграл:

$$\left(2\sqrt{a(a+z)} + a\ln\left|\frac{\sqrt{a(a+z)} - a}{\sqrt{a(a+z)} + a}\right|\right)^2 - (ax + y + b)^2 = 0. \blacktriangleright$$

509. $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = z^2.$

◀ От переменных x, y перейдем к переменным u, v, положив $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \frac{y^2}{2}$. Тогда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial u} \equiv xp_1, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = y\frac{\partial z}{\partial v} \equiv yq_1$$

и данное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{q_1^2} = z^2. \tag{1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде: $z = z(w)$, где $w = au + v$, $a = \text{const}$. Тогда из (1) получим уравнение

$$(zz')^2 = 1 + \frac{1}{a^2},$$

интегрируя которое, находим

$$z^2 = \pm 2\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}\,(au + v) + b \quad (b = \text{const}).$$

Таким образом,

$$(z^2 - b)^2 - \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(ax^2 + y^2\right)^2 = 0$$

есть полный интеграл исходного уравнения. ▶

Примечание. Для интегрирования уравнения $F(p, q, z) = 0$ целесообразно применять следующий способ. Ищем решение в виде $z = z(w)$, где $w = ax + y$ ($a = \text{const}$). Тогда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = z'\frac{\partial w}{\partial x} = z'a, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = z'.$$

Следовательно,

$$F(p, q, z) = F(z'a, z', z) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем его общий интеграл

$$\Phi(z, w, a, b) = 0 \quad (b = \text{const}),$$

который по отношению к исходному уравнению будет полным.

510. $p^2x^2 + q^2y^2 = z.$

◀ Сначала переходим к новым переменным по формулам $u = \ln|x|$, $v = \ln|y|$:

$$p = \frac{p_1}{x}, \quad q = \frac{q_1}{y},$$

где

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad q_1 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Исходное уравнение принимает вид:

$$p_1^2 + q_1^2 = z.$$

Далее, поскольку последнее уравнение не содержит явно независимых переменных, то к нему применяют способ, указанный в предыдущем примере. В результате получаем обыкновенное

дифференциальное уравнение

$$z'^2(a^2+1)=z, \quad z \geqslant 0,$$

процесс решения которого можно представить следующим образом:

$$z'=\pm\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{dw}{\pm\sqrt{1+a^2}}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\pm\int\frac{dw}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$2\sqrt{z}=\frac{\pm w}{\sqrt{1+a^2}}+b, \quad (2\sqrt{z}-b)^2=\frac{w^2}{1+a^2}, \quad w=au+v=a\ln|x|+\ln|y|.$$

Итак, полный интеграл получен. ▶

511. $\frac{p}{y}-\frac{q}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

◀ Перепишем уравнение в виде:

$$xp-x=yq+y \quad (x\neq 0,\ y\neq 0).$$

Далее, полагая $xp-x=a$, $yq+y=a$, где a — произвольная постоянная, из последних двух уравнений находим

$$p=1+\frac{a}{x}, \quad q=-1+\frac{a}{y}.$$

Подставляя эти значения p и q в уравнение Пфаффа $dz=p\,dx+q\,dy$ и интегрируя его, получаем полный интеграл

$$z=x+a\ln|x|-y+a\ln|y|+b=x-y+a\ln|xy|+b. \blacktriangleright$$

Примечание. Если уравнение имеет вид

$$F_1(p,x)=F_2(q,y),$$

то его полный интеграл можно найти, пользуясь следующей схемой. Из системы

$$F_1(p,x)=a, \quad F_2(q,y)=a$$

находим

$$p=\varphi_1(a,x), \quad q=\varphi_2(a,y),$$

подставляя которые в уравнение Пфаффа $dz=p\,dx+q\,dy$, имеем

$$dz=\varphi_1(a,x)\,dx+\varphi_2(a,y)\,dy.$$

Интегрирование этого уравнения и дает полный интеграл:

$$z-\int\varphi_1(a,x)\,dx-\int\varphi_2(a,y)\,dy-b=0.$$

512. $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$.

◀ Поскольку уравнение можно представить в виде

$$p^2-2px+1=2qy-q^2,$$

то вполне применим способ, указанный в выше приведенном примечании. Из уравнений

$$p^2-2px+1=a, \quad 2qy-q^2=a$$

находим

$$p=x\pm\sqrt{a-1+x^2}, \quad q=y\pm\sqrt{y^2-a}, \quad \left(|x|\geqslant\sqrt{1-a},\ |y|\geqslant a\right).$$

Следовательно,

$$dz=\left(x\pm\sqrt{x^2+a-1}\right)dx+\left(y\pm\sqrt{y^2-a}\right)dy,$$

откуда следует, что

$$z-\int\left(x\pm\sqrt{x^2+a-1}\right)dx-\int\left(y\pm\sqrt{y^2-a}\right)dy-b=0$$

есть полный интеграл. ▶

513. $p^2+q+x+z=0$.

◀ Вводя новую функцию $\omega=x+z$ и обозначения $p_1=\omega'_x$, $q_1=\omega'_y$, данное уравнение представляем в виде:

$$(p_1-1)^2+q_1+\omega=0.$$

Поскольку это уравнение не содержит явно независимых переменных, то применяем способ, изложенный в примере 509. Имеем

$$\omega = \omega(u), \quad u = ax + y.$$

Тогда

$$p_1 = \omega'(u)a, \quad q_1 = \omega'(u), \quad (p_1 - 1)^2 + q_1 = \omega = (\omega' a - 1)^2 + \omega' + \omega = 0.$$

Для решения последнего уравнения применяем метод введения параметра. Полагая $\omega' = t$, имеем

$$\omega = -t - (ta - 1)^2, \quad du = \frac{d\omega}{t} = -\frac{dt}{t} - \frac{2(ta-1)a}{t}\,dt, \quad u = (2a - 1)\ln|t| - 2a^2 t + b.$$

Таким образом, система уравнений

$$z + x = -t - (ta - 1)^2, \quad ax + y = (2a - 1)\ln|t| - 2a^2 t + b$$

определяет полный интеграл. ▶

Примечание. В данном случае можно исключить параметр t и получить полный интеграл в виде

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

однако предоставляем это читателю.

В следующих задачах найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую:

514. $z = pq + 1$, $z = 2x + 1$ при $y = 2$.

◀ Прежде всего находим полный интеграл данного уравнения, пользуясь примечанием к примеру 509. Решение ищем в виде $z = z(u)$, $u = ax + y$. Тогда $p = z'a$, $q = z'$ и $z = z'^2 a + 1$. Интегрируя это уравнение, получаем полный интеграл исходного уравнения:

$$\Phi \equiv 4a(z - 1) - (ax + y + b)^2 = 0.$$

Далее, для определения поверхности, которая проходит через указанную прямую, поступаем согласно изложенному в п. 2.2. Именно, полагая $x = x$, $y = 2$, $z = 2x + 1$ и считая $b = b(a)$, относительно функции $b = b(a)$ записываем систему уравнений (6), п. 2.2:

$$8ax - (ax + b + 2)^2 = 0, \quad 8a - 2a(ax + 2 + b) = 0.$$

Затем решение этой системы $b = 0$ подставляем в систему уравнений (7), п. 2.2. Тогда получим

$$4a(z - 1) - (ax + y)^2 = 0, \quad 4z - 2x(ax + y) = 0.$$

Отсюда, исключив параметр a, после упрощений окончательно находим уравнение искомой поверхности

$$z = xy + 1. \blacktriangleright$$

515. $2z = pq - 3xy$, $z = 15y$ при $x = 5$.

◀ Предположим, что решение имеет вид $z = \varphi(xy)$. Тогда относительно функции φ получаем уравнение:

$$2\varphi = \varphi'^2 u - 3u, \quad u = xy,$$

которое среди прочих решений имеет и такое:

$$\varphi = \alpha u,$$

где $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$. Следовательно,

$$z_1 = -xy, \quad z_2 = 3xy.$$

В силу начальных условий имеем

$$z = 3xy. \blacktriangleright$$

516. $4z = p^2 + q^2$, $z = y^2$ при $x = 0$.

◀ Поскольку функция $F \equiv 4z - p^2 - q^2$ явно от переменных x, y не зависит, то решение уравнения ищем в виде $z = \varphi(ax + y)$. Тогда относительно φ получим уравнение

$$4\varphi = (a^2 + 1)\varphi'^2,$$

интегрируя которое, находим:

$$\pm\sqrt{\varphi} = \frac{ax + y}{\sqrt{a^2 + 1}} + b, \quad \text{или} \quad \Phi \equiv z - \left(\frac{ax + y}{\sqrt{a^2 + 1}} + b\right)^2 = 0.$$

Далее в силу (5), (6), п. 2.2, имеем уравнения:

$$x=0,\quad y=y,\quad z=y^2,$$

$$\Phi\equiv y^2-\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+1}}+b\right)^2=0,\quad y-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+1}}+b\right)+y=0.$$

Отсюда, исключив переменную y, получаем $b=0$. Используя теперь уравнение (7), п. 2.2, и $b=0$, имеем систему:

$$z-\frac{(ax+y)^2}{a^2+1}=0,\quad \frac{2(ax+y)(ay-x)}{(a^2+1)^2}=0.$$

Из второго уравнения находим $a=\frac{x}{y}$ и подставляем в первое. В результате приходим к искомой поверхности

$$z=x^2+y^2.\ \blacktriangleright$$

Примечание. Равенство $ax+y=0$ не подходит, так как из первого уравнения следовало бы, что $z=0$.

517. $px+qy-pq=0$, $z=y$ при $x=0$.

◀ Для нахождения полного интеграла воспользуемся методом Лагранжа и Шарпи. Из системы уравнений

$$\frac{dx}{x-q}=\frac{dy}{y-p}=\frac{dz}{p(x-q)+q(y-p)}=\frac{dp}{-p}=\frac{dq}{-q},$$

соответствующей уравнению (4), п. 2.1, находим один первый интеграл

$$p=qa.$$

Далее, решив систему уравнений $p=qa$, $px+qy-pq=0$, получаем

$$p=ax+y,\quad q=x+\frac{y}{a}.$$

Подставляя значения p и q в уравнение Пфаффа $dz=p\,dx+q\,dy$ и интегрируя его, будем иметь

$$z=\frac{1}{2}\left(ax^2+\frac{y^2}{a}\right)+xy+b.$$

Это есть полный интеграл. Для нахождения поверхности, проходящей через указанную в условии кривую, применяем схему, изложенную в п. 2.2. Записываем уравнение кривой в виде $x=0$, $y=y$, $z=y$, составляем систему вида (6), п. 2.2:

$$z-\frac{1}{2}\left(ax^2+\frac{y^2}{a}\right)-xy-b(a)=0,\quad 1-x-\frac{y}{a}=0.$$

Подставляя сюда $x=0$, $y=y$, $z=y$ и исключая параметр y, находим $b(a)=\frac{1}{2}a$. Наконец, исключая параметр a из системы уравнений, соответствующей системе (7), п. 2.2:

$$z-\frac{1}{2}\left(ax^2+\frac{y^2}{a}\right)-xy-\frac{a}{2}=0,\quad -\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2a^2}-\frac{1}{2}=0.$$

Таким образом,

$$z=y\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\ \blacktriangleright$$

518. $z-px-qy-3p^2+q^2=0$, $z=y^2$ при $x=0$.

◀ Нетрудно проверить, что полным интегралом данного уравнения будет

$$\Phi\equiv z-ax-by-3a^2+b^2=0.$$

Аналогично проделанному в предыдущем примере имеем: $x=0$, $y=y$, $z=y^2$ (параметрические уравнения данной в условии кривой),

$$z-ax-yb-3a^2+b^2=0,\quad 2y-b=0.$$

Подставляя сюда $x=0$, $y=y$, $z=y^2$ и исключая переменную y, находим $b=\pm 2a$. Далее, найденное значение b подставляем в систему (7), п. 2.2:

$$z-ax\mp 2ay-3a^2+4a^2=0,\quad -x\mp 2y+2a=0.$$

Исключив параметр a из этой системы, получаем окончательно:

$$z = \left(\frac{x}{2} \pm y\right)^2. \blacktriangleright$$

Пользуясь методом Коши, найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую:

519. $z = pq$, $x_0 = s$, $y_0 = s^2$, $z_0 = s^3$.

◀ Применяем метод Коши, изложенный в п. 2.3. Согласно методу, сначала составляем и решаем систему уравнений (8), п. 2.2:

$$F\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \equiv s^3 - p_0(s)q_0(s) = 0, \quad p_0(s) + 2sq_0(s) - 3s^2 = 0,$$

$$p_0^{(1)}(s) = s^2, \quad q_0^{(1)}(s) = s, \quad p_0^{(2)}(s) = 2s^2, \quad q_0^{(2)}(s) = \frac{s}{2}.$$

Затем, учитывая найденные значения $p_0(s)$, $q_0(s)$, составляем и интегрируем систему уравнений (9), п. 2.2,

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dz}{-2pq} = \frac{dp}{-p} = \frac{dq}{-q} = dt, \tag{1}$$

с начальными условиями: $x = s$, $y = s^2$, $z = s^3$, $p = s^2$, $q = s$ при $t = 0$, а также $x = s$, $y = s^2$, $z = s^3$, $p = 2s^2$, $q = \frac{s}{2}$ при $t = 0$. Таким образом, возможны два варианта.

Из системы (1) легко находим

$$p = C_1e^{-t}, \quad q = C_2e^{-t}, \quad x = \int(-q)\,dt + C_3 = C_2e^{-t} + C_3,$$

$$y = \int(-p)\,dt + C_4 = C_1e^{-t} + C_4, \quad z = -2\int pq\,dt + C_5 = C_1C_2e^{-2t} + C_5.$$

Исходя из начальных условий, определяем постоянные интегрирования:

$$C_1 = s^2, \quad C_2 = s, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0$$

(для первого решения);

$$C_1 = 2s^2, \quad C_2 = \frac{s}{2}, \quad C_3 = \frac{s}{2}, \quad C_4 = -s^2, \quad C_5 = 0$$

(для второго решения). Итак, имеем две интегральные поверхности:

$$x = se^{-t}, \quad y = s^2e^{-t}, \quad z = s^3e^{-2t};$$

$$x = \frac{s}{2}(e^{-t} + 1), \quad y = s^2(2e^{-t} - 1), \quad z = s^3e^{-2t}. \blacktriangleright$$

520. $p^2 + q^2 = 1$; $x_0 = \cos s$, $y_0 = \sin s$, $z_0 = \frac{s}{2}$.

◀ Как и в предыдущем примере, сначала находим функции p_0, q_0 из системы уравнений (см. (8), п. 2.3):

$$p_0^2 + q_0^2 - 1 = 0, \quad -p_0\sin s + q_0\cos s - \frac{1}{2} = 0.$$

Имеем $p_0 = \cos\alpha$, $q_0 = \sin\alpha$, где $\alpha = s + (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Из системы уравнений (см. (9), п. 2.3):

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2+q^2)} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = dt$$

следуют также решения:

$$p = C_1, \quad q = C_2, \quad x = 2C_1t + C_3, \quad y = 2C_2t + C_4, \quad z = 2(C_1^2 + C_2^2)t + C_5.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия:

$$x = \cos s, \quad y = \sin s, \quad z = \frac{s}{2}, \quad p = \cos\alpha, \quad q = \sin\alpha$$

при $t = 0$.

Тогда получим

$$C_1 = \cos\alpha, \quad C_2 = \sin\alpha, \quad C_3 = \cos s, \quad C_4 = \sin s, \quad C_5 = \frac{s}{2}.$$

Следовательно, три функции

$$x = 2t\cos\alpha + \cos s, \quad y = 2t\sin\alpha + \sin s, \quad z = 2t + \frac{s}{2}$$

описывают искомую интегральную поверхность. ▶

521. $z = px + qy + pq$, $x_0 = 1$, $y_0 = s$, $z_0 = s^3$.

◀ Из системы уравнений (см. (8), п. 2.3)

$$s^3 - p_0 - q_0 s - p_0 q_0 = 0, \quad q_0 - 3s^2 = 0$$

находим

$$p_0 = -\frac{2s^3}{1+3s^2}, \quad q_0 = 3s^2.$$

Далее, составляем и решаем систему уравнений (см. (9), п. 2.3):

$$\frac{dx}{x+q} = \frac{dy}{y+p} = \frac{dz}{z+pq} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = dt;$$

$$p = C_1, \quad q = C_2, \quad x = C_3 e^t - C_2, \quad y = C_4 e^t - C_1, \quad z = C_5 e^t - C_1 C_2.$$

Исходя из начальных условий

$$x\big|_{t=0} = 1, \quad y\big|_{t=0} = s, \quad z\big|_{t=0} = s^3, \quad p\big|_{t=0} = -\frac{2s^3}{1+3s^2}, \quad q\big|_{t=0} = 3s^2,$$

определяем постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\frac{2s^3}{1+3s^2}, \quad C_2 = 3s^2, \quad C_3 = 1+3s^2, \quad C_4 = \frac{s+s^3}{1+3s^2}, \quad C_5 = \frac{s^3-3s^5}{1+3s^2}.$$

Таким образом, параметрические уравнения поверхности имеют вид:

$$x = \left(1+3s^2\right)e^t - 3s^2, \quad y = \frac{\left(s+s^3\right)e^t + 2s^3}{1+3s^2}, \quad z = \frac{\left(s^2-3s^5\right)e^t + 6s^5}{1+3s^2}. \blacktriangleright$$

522. $z = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$; $x_{10} = s_1 + s_2$, $x_{20} = s_1 - s_2$, $x_{30} = 0$, $z_0 = 1 - s_1 + s_2$ ($p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$).

◀ Действуем по методу Коши, изложенному в п. 2.4. Именно, сначала определяем функции P_{10}, P_{20}, P_{30} из системы уравнений (см. (12)):

$$z_0 - P_{10}^2 - P_{20}^2 - P_{30}^2 = 0, \quad -1 - P_{10} - P_{20} = 0, \quad 1 - P_{10} + P_{20} = 0.$$

Имеем:

$$P_{10} = 0, \quad P_{20} = -1, \quad P_{30} = \pm\sqrt{s_2 - s_1}.$$

Затем интегрируем вспомогательную систему дифференциальных уравнений (см. (13), п. 2.4):

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{dx_3}{2p_3} = \frac{dz}{2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} = -\frac{dp_1}{-p_1} = -\frac{dp_2}{-p_2} = -\frac{dp_3}{-p_3} = dt.$$

Из последних трех уравнений этой системы получаем:

$$p_1 = C_1 e^t, \quad p_2 = C_2 e^t, \quad p_3 = C_3 e^t.$$

Из первых трех уравнений с учетом полученных значений для p_k, $k = 1, 2, 3$, находим

$$x_1 = 2C_1 e^t + C_4, \quad x_2 = 2C_2 e^t + C_5, \quad x_3 = 2C_3 e^t + C_6,$$
$$z = (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)e^{2t} + C_7.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями (см. (14), п. 2.4):

$$x_1\big|_{t=0} = s_1 + s_2, \quad x_2\big|_{t=0} = s_1 - s_2, \quad x_3\big|_{t=0} = 0,$$

$$p_1\big|_{t=0} = 0, \quad p_2\big|_{t=0} = -1, \quad p_3\big|_{t=0} = \pm\sqrt{s_2 - s_1}, \quad z\big|_{t=0} = 1 - s_1 + s_2.$$

В результате находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -1, \quad C_3 = \pm\sqrt{s_2 - s_1}, \quad C_4 = s_1 + s_2, \quad C_5 = s_1 - s_2 + 2, \quad C_6 = \mp 2\sqrt{s_2 - s_1}, \quad C_7 = 0.$$

Таким образом, параметрические уравнения искомой поверхности имеют вид (см. (15), п. 2.4):

$$x_1 = s_1 + s_2, \quad x_2 = -2e^t + 2 + s_1 - s_2,$$

$$x_3 = \pm 2\sqrt{s_2 - s_1}\, e^t \mp 2\sqrt{s_2 - s_1} = \pm 2\sqrt{s_2 - s_1}\,(e^t - 1), \quad z = (1 + s_2 - s_1)e^{2t}. \blacktriangleright$$

523. $z = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$; $x_{10} = 1$, $x_{20} = s_1$, $x_{30} = s_1 + s_2$, $z_0 = 1 + s_1^2$.

◀ Как и в предыдущем примере, применяем метод Коши (см. п. 2.4). Составляем и решаем систему уравнений относительно p_{10}, p_{20}, p_{30}:

$$1 + s_1^2 = p_{10} + s_1p_{20} + (s_1 + s_2)p_{30} + p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_{30}^2, \quad 2s_1 - p_{20} - p_{30} = 0, \quad p_{30} = 0.$$

Отсюда находим

$$p_{20} = 2s_1, \quad p_{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 20s_1^2}}{2}.$$

Далее составляем и решаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1 + 2p_1} = \frac{dx_2}{x_2 + 2p_2} = \frac{dx_3}{x_3 + 2p_3} = \frac{dz}{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + 2\sum\limits_{k=1}^{3} p_k^2} = -\frac{dp_1}{0} = -\frac{dp_2}{0} = -\frac{dp_3}{0} = dt.$$

Из последних трех уравнений следует, что $p_k = C_k$, $k = 1, 2, 3$, а из первых трех —

$$x_1 = C_4e^t - 2C_1, \quad x_2 = C_5e^t - 2C_2, \quad x_3 = C_6e^t - 2C_3, \quad z = \left(C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6\right)e^t + C_7.$$

Используя начальные условия

$$x_1\big|_{t=0} = 1, \quad x_2\big|_{t=0} = s_1, \quad x_3\big|_{t=0} = s_1 + s_2, \quad z\big|_{t=0} = 1 + s_1^2,$$

$$p_3\big|_{t=0} = 0, \quad p_2\big|_{t=0} = 2s_1, \quad p_1\big|_{t=0} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 20s_1^2}}{2},$$

определяем постоянные C_i, $i = \overline{1, 7}$:

$$C_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 20s_1^2}}{2}, \quad C_2 = 2s_1, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1 + 2C_1 = \pm\sqrt{5 - 20s_1^2}, \quad C_5 = s_1 + 2C_2 = 5s_1,$$

$$C_6 = s_1 + s_2 + 2C_3 = s_1 + s_2, \quad C_7 = 1 + s_1^2 - C_1C_4 - C_2C_5 - C_3C_6 = \frac{-3 \pm \sqrt{5 - 20s_1^2}}{2} + s_1^2.$$

Итак, параметрические уравнения искомой поверхности имеют вид:

$$x_1 = \pm\sqrt{5 - 20s_1^2}e^t + 1 \mp \sqrt{5 - 20s_1^2} = \pm\sqrt{5 - 20s_1^2}(e^t - 1) + 1,$$

$$x_2 = (5e^t - 4)s_1, \quad x_3 = (s_1 + s_2)e^t, \quad z = \frac{1}{2}\left(5 \mp \sqrt{5 - 20s_1^2}\right)e^t + s_1^2 + \frac{-3 \pm \sqrt{5 - 20s_1^2}}{2}. \blacktriangleright$$

524. $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - 1 = 0$; $x_{10} = 1$, $x_{20} = s_1$, $x_{30} = s_1 + s_2$, $x_{40} = s_1 + s_2 + s_3$, $z_0 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$.

◀ Поступаем аналогично проделанному в примерах 521–523, т. е. действуем по следующей схеме.

а) Решаем систему уравнений:

$$p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_{30}^2 + p_{40}^2 - 1 = 0, \quad 2s_1 - p_{20} - p_{30} - p_{40} = 0, \quad 2s_2 - p_{30} - p_{40} = 0, \quad 2s_3 - p_{40} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$p_{40} = 2s_3, \quad p_{30} = 2(s_2 - s_3), \quad p_{20} = 2(s_1 - s_2), \quad p_{10} = \pm\sqrt{1 - 4(s_1 - s_2)^2 - 4s_3^2 - 4(s_2 - s_3)^2}.$$

б) Интегрируем вспомогательную систему:

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{dx_3}{2p_3} = \frac{dx_4}{2p_4} = \frac{dz}{2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)} = -\frac{dp_1}{0} = -\frac{dp_2}{0} = -\frac{dp_3}{0} = -\frac{dp_4}{0} = dt.$$

Из последних четырех уравнений следует, что $p_k = C_k$, $k = \overline{1, 4}$; а из первых четырех —

$$x_k = 2C_k t + D_k, \quad k = \overline{1, 4}, \quad z = 2\sum_{k=1}^{4} C_k^2 t + D_5.$$

в) Исходя из начальных условий

$$x_k\Big|_{t=0} = x_{k0}, \quad p_k\Big|_{t=0} = p_{k0}, \quad k = \overline{1, 4}, \qquad z\Big|_{t=0} = z_0,$$

определяем постоянные интегрирования C_k, D_k:

$$C_k = p_{k0}, \quad D_k = x_{k0}, \quad D_5 = z_0, \quad k = \overline{1, 4}.$$

г) Записываем параметрические уравнения искомой поверхности:

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm 2\sqrt{1 - 4(s_1 - s_2)^2 - 4s_3^2 - 4(s_2 - s_3)^2}\,t + 1, \\ x_2 &= 4(s_1 - s_2)t + s_1, \\ x_3 &= 4(s_2 - s_3)t + s_1 + s_2, \\ x_4 &= 4s_3 t + s_1 + s_2 + s_3, \\ z &= 2t + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Упражнения для самостоятельной работы

Построить общие решения следующих уравнений:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. **2.** $2\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. **3.** $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **4.** $y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

5. $x^2 u\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u\frac{\partial u}{\partial y} = x + y$. **6.** $yu\frac{\partial u}{\partial x} - xu\frac{\partial u}{\partial y} = e^u$.

Построить решения следующих задач Коши:

7. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{y=1} = 2x$. **8.** $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $u|_{x=0} = y^2$.

9. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u|_{x=2} = 1 + y^2$.

Построить решения следующих дифференциальных задач:

10. $(y - u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u - x)\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u = y = -x$. **11.** $\left(y + 2u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - 2x^2 u\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $x = u$, $y = x^2$.

12. $(x - u)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - u)\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$, $x - y = 2$, $u + 2x = 1$. **13.** $\operatorname{tg} x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$, $y = x$, $u = x^3$.

Глава 5

Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

§ 1. Зависимость решения от начальных условий и параметров

1.1. Об оценке погрешности приближенного решения.

Пусть $y = y(t)$ — вектор-функция, являющаяся приближенным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x|_{t=0} = x(0), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Здесь и далее будем считать, что вектор-функция f непрерывна по переменным t, x и удовлетворяет условию Липшица по переменной x:

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leqslant K\|y - x\|, \quad K = \text{const}, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает какую-либо норму вектора:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Пусть, далее, приближенное решение $y(t)$ задачи (1) удовлетворяет неравенствам:

$$\left\| \frac{dy}{dt} - f(t, y) \right\| \leqslant \varepsilon, \quad \|y(0) - x(0)\| \leqslant \delta. \tag{3}$$

Тогда справедлива оценка погрешности:

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta e^{K|t|} + \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K|t|} - 1\right). \tag{4}$$

1.2. Об отыскании производных от решений по параметру.

Пусть в задаче

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu), \tag{5}$$

$$x_i(0) = a_i(\mu), \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

(μ — параметр) функции f_i, a_i — непрерывны и имеют непрерывные производные. Тогда решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывную производную по параметру μ и его частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$, $i = \overline{1, n}$, являются решениями следующей задачи:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \tag{7}$$

$$u_i(0) = a_i'(\mu), \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Отметим, что частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ вычисляются при $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, где $x_i(t)$ — решение задачи (5), (6).

В частности, если $a_k(\mu) = \mu$, $a_i(\mu) = \text{const}$ при $i \neq k$ и функции f_i, $i = \overline{1, n}$ от μ не зависимы, то из (7), (8) следует, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad u_i(0) = 0, \quad i \neq k, \quad u_k(0) = 1, \tag{9}$$

где $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_k}$.

В следующих задачах (525–528) оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

525. $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = 1 - \frac{x}{2}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

◀ Действуем согласно изложенному в п. 1.1. Правая часть этого уравнения, очевидно, непрерывна по совокупности переменных x, y ($|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $-\infty < y < +\infty$) и имеет непрерывную же по y производную

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

причем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2|y|}{1+|y|^2} \cdot \frac{1}{1+|y|^2} \leqslant \frac{2|y|}{1+|y|^2} \leqslant 1.$$

Следовательно, в качестве постоянной Липшица K можем взять единицу. Далее, по формулам (3), п. 1.1, имеем оценки:

$$\left|\tilde{y}' - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{4}{8-4x+x^2}\right| = \left|\frac{x^2(x-2)}{4(8-4x+x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{16} \max_{|x| \leqslant \frac{1}{2}} \left|\frac{x-2}{8-4x+x^2}\right| = \frac{1}{64},$$

$$|\tilde{y}(0) - y(0)| = 0.$$

Поэтому $\varepsilon = \frac{1}{64}$, $\delta = 0$. Таким образом, согласно (4), п. 1.1, получаем оценку погрешности:

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| = |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \frac{1}{64}(e^{|x|} - 1) \leqslant \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{64} < 0{,}011. \blacktriangleright$$

526. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = tx_1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$; $\tilde{x}_1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}t^2$, $|t| \leqslant 0{,}1$.

◀ Пусть $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Тогда согласно (3), п. 1.1, имеем

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t, \tilde{x})\right\| = \left|\frac{d\tilde{x}_1}{dt} - f_1(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right| + \left|\frac{d\tilde{x}_2}{dt} - f_2(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right|,$$

где

$$f_1(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \quad f_2(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = t\tilde{x}_1.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t, \tilde{x})\right\| = \left|1 + t - (1+t)\right| + \left|t - t\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)\right| = \left|t\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)\right| \leqslant t^2 + |t|\frac{t^2}{2} < 0{,}0105;$$

$$\varepsilon = 0{,}0105, \quad \delta = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = t, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

то постоянная Липшица $K = 2$. А тогда по формуле (4), п. 1.1, имеем:

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant 0{,}0053(e^{2|t|} - 1) \leqslant 0{,}0053(e^{0{,}2} - 1) < 0{,}0012. \blacktriangleright$$

Примечание. Если в области определения правой части $f(t, x)$, выпуклой по переменной x, выполняются неравенства $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant C$, то в качестве постоянной Липшица можно взять число $K = nC$.

527. $y'' - x^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;\ \tilde{y} = e^{\frac{x^4}{12}},\ |x| \leqslant 0{,}5.$

◀ Переходя от уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, имеем:

$$x = t, \quad y = x_1, \quad y' = x_2, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = t^2 x_1,$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0; \quad \tilde{x}_1 = e^{\frac{t^4}{12}}, \quad \tilde{x}_2' = \tilde{y}' = \frac{1}{3} t^3 e^{\frac{t^4}{12}}, \quad |t| \leqslant 0{,}5.$$

Пусть $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Тогда согласно (3), п. 1.1, имеем:

$$\left\| \frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t, \tilde{x}) \right\| = \left| \tilde{x}_1' - f_1(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| + \left| \tilde{x}_2' - f_2(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right|. \tag{1}$$

Поскольку

$$\tilde{x}_1' = \frac{t^3}{3} e^{\frac{t^4}{12}}, \quad f_1(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_2 - \frac{1}{3} t^3 e^{\frac{t^4}{12}}, \quad \tilde{x}_2' = e^{\frac{t^4}{12}} \left(t^2 + \frac{1}{9} t^6 \right), \quad f_2(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = t^2 \tilde{x}_1 = t^2 e^{\frac{t^4}{12}},$$

то из (1) следует, что

$$\left\| \frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t, \tilde{x}) \right\| = \left| \frac{t^6}{9} e^{\frac{t^4}{12}} \right| \leqslant \max_{|t| \leqslant \frac{1}{2}} \frac{t^6}{9} e^{\frac{t^4}{12}} = \frac{(0{,}5)^6}{9} e^{\frac{(0{,}5)^4}{12}} = 0{,}0017 \ldots$$

Поэтому $\varepsilon = 0{,}0017;\ \delta = 0$.

Далее, так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = t^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

то постоянная Липшица $K = 2 \max\limits_{|t| \leqslant 0{,}5} (1;\ t^2) = 2$ (см. примечание после примера 526). В силу оценки (4), п. 1.1, и имеющихся значений для ε, δ, K справедливо неравенство

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant \frac{0{,}0017}{2} (e^{2|t|} - 1) < 0{,}009(e - 1) < 0{,}002.$$

Отсюда следует, что тем более $|x_1 - \tilde{x}_1| < 0{,}002$. ▶

528. $y' = 2xy^2 + 1,\ y(0) = 1;\ \tilde{y} = \dfrac{1}{1 - x},\ |x| \leqslant \dfrac{1}{4}.$

◀ Сначала находим числа ε, δ. По формуле (3), п. 1.1, имеем:

$$\left| \tilde{y}' - 2x\tilde{y}^2 - 1 \right| = \frac{x^2}{(1 - x)^2} \leqslant \frac{1}{9}, \quad |y(0) - \tilde{y}(0)| = 0,$$

поэтому $\varepsilon = \frac{1}{9}$, $\delta = 0$.

Предположим, что решение $y(x)$ существует в прямоугольнике

$$R = \left\{ (x, y) : |x| \leqslant \tfrac{1}{4},\ |y - 1| \leqslant \tfrac{1}{3} \right\}$$

($\tilde{y}(x) \in R$). Тогда для постоянной Липшица K имеем оценку

$$K \leqslant \max_R \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_R |4xy| = \frac{4}{3}.$$

Используя полученные оценки, по формуле (4), п. 1.1, получаем

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \frac{1}{12} \left(e^{\frac{4|x|}{3}} - 1 \right) \leqslant \frac{1}{12} \left(e^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = 0{,}034 \ldots .$$

Остается проверить, действительно ли точное решение $y(x)$ содержится в указанном прямоугольнике. Поскольку функции $f(x, y) = 2xy^2 + 1$ и $f_y' = 4xy$ непрерывны в любом прямоугольнике $R_1 = \{(x, y) : |x| \leqslant a,\ |y - 1| \leqslant b\}$, то, согласно теореме существования, на отрезке $|x| \leqslant h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{R_1} (2xy^2 + 1)$, существует единственное решение рассматриваемой задачи. Найдем h. Для этого оцениваем $M \leqslant 2a(b + 1)^2 + 1$ и ищем $\max \min\left(a, \frac{b}{2a(b+1)^2 + 1}\right)$. Из уравнений

$$a = \frac{b}{2a(b + 1)^2 + 1}, \quad \left(\frac{b}{2a(b + 1)^2 + 1} \right)_b' = 0$$

получаем

$$b=\sqrt{1+\frac{1}{2a}},\quad a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=0{,}308\ldots,\quad b=1{,}617\ldots.$$

Следовательно, в R_1 существует единственное решение $y(x)$, где

$$R_1=\{(x,\,y):|x|\leqslant 0{,}308,\ |y-1|\leqslant 1{,}617\}.$$

Поскольку $R<R_1$, то оно существует и в R. ▶

Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач:

529. $y'=y+\mu(x+y^2)$, $y(0)=1$; найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

◀ Дифференцируя по параметру μ тождества

$$y'_x(x,\,\mu)\equiv y(x,\,\mu)+\mu\Big(x+y^2(x,\,\mu)\Big),\quad y(0,\,\mu)=1,$$

имеем:

$$\frac{du}{dx}=u+x+y^2(x,\,\mu)+2\mu y(x,\,\mu)u,\quad u(0,\,\mu)=0,$$

где $u=\dfrac{\partial y(x,\,\mu)}{\partial \mu}$. Полагая здесь $\mu=0$, получаем задачу для функции $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=u(x,\,0)$:

$$\frac{du(x,\,0)}{dx}=u(x,\,0)+x+y^2(x,\,0),\quad u(0,\,0)=0. \tag{1}$$

Функция $x\mapsto y(x,\,0)$ является решением задачи:

$$y'(x,\,0)=y(x,\,0),\quad y(0,\,0)=1,$$

что непосредственно следует из данной задачи при $\mu=0$. Поскольку $y(x,\,0)=e^x$, то, решая задачу (1), получаем окончательно

$$u(x,\,0)=\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=e^{2x}-x-1.\ ▶$$

530. $y'=y+y^2+xy^3$, $y(2)=y_0$; найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

◀ Пусть $y=y(x,\,y_0)$ — решение данной задачи. Тогда, дифференцируя тождества

$$y'_x(x,\,y_0)\equiv y(x,\,y_0)+y^2(x,\,y_0)+xy^3(x,\,y_0),\quad y(2,\,y_0)=y_0$$

по параметру y_0, имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,\,y_0)}{\partial x}=u(x,\,y_0)+2y(x,\,y_0)u(x,\,y_0)+3xy'(x,\,y_0)u(x,\,y_0),\\ u(2,\,0)=1,\quad u(x,\,y_0)=\dfrac{\partial y(x,\,y_0)}{\partial y_0}.\end{cases}$$

Полагая здесь $y_0=0$, получаем задачу для функции $x\mapsto \left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,\,0)}{\partial x}=u(x,\,0)+2y(x,\,0)u(x,\,0)+3xy^2(x,\,0)u(x,\,0),\\ u(2,\,0)=1,\end{cases} \tag{1}$$

где $y(x,\,0)$ — решение следующей задачи:

$$y'_x(x,\,0)=y(x,\,0)+y^2(x,\,0)+xy^3(x,\,0),\quad y(2,\,0)=0.$$

Очевидно, $y(x,\,0)\equiv 0$, поэтому задача (1) принимает вид:

$$\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial x}=u(x,\,0),\quad u(2,\,0)=1.$$

Отсюда находим $u(x,\,0)=e^{x-2}$. Итак,

$$\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}=u(x,\,0)=e^{x-2}.\ ▶$$

531. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3$, $x(0) = 1 + \mu$; найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

◀ Дифференцированием по μ из данной задачи получаем задачу для функции $u(t, \mu) = \dfrac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}$:

$$\frac{\partial u(t, \mu)}{\partial t} = t\left(x^3 + 3x^2 \mu u(t, \mu)\right) + 2x u(t, \mu), \quad u(0, \mu) = 1.$$

Положив здесь $\mu = 0$, имеем:

$$\frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} = t x^3(t, 0) + 2x(t, 0) u(t, 0), \quad u(0, 0) = 1, \tag{1}$$

где функция $t \mapsto x(t, 0)$ является решением задачи:

$$\frac{dx(t, 0)}{dt} = x^2(t, 0), \quad x(0, 0) = 1, \tag{2}$$

получающейся из исходной при $\mu = 0$. Из (2) находим $x(t, 0) = \dfrac{1}{1-t}$. Подставив $x(t, 0)$ в (1), получаем задачу для искомой функции:

$$\frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} = \frac{t}{(1-t)^3} + \frac{2u(t, 0)}{1-t}, \quad u(0, 0) = 1,$$

откуда

$$u(t, 0) = \frac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(t, 0) = \frac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}. \blacktriangleright$$

532. $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, & x(1) = x_0, \\ 2\dot{y} = -y^2, & y(1) = y_0; \end{cases}$ найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$.

◀ Дифференцируя по параметру y_0 каждое равенство данной задачи, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t, x_0, y_0)}{\partial t} = x(t, x_0, y_0) v(t, x_0, y_0) + u(t, x_0, y_0) y(t, x_0, y_0), \\ u(1, x_0, y_0) = 0, \\ 2\dfrac{\partial v(t, x_0, y_0)}{\partial t} = -2y(t, x_0, y_0) v(t, x_0, y_0), \\ v(1, x_0, y_0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где введены обозначения:

$$u(t, x_0, y_0) = \frac{\partial x(t, x_0, y_0)}{\partial y_0}, \quad v(t, x_0, y_0) = \frac{\partial y(t, x_0, y_0)}{\partial y_0}.$$

Функции x, y являются решениями исходной задачи. Полагая в ней $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ и интегрируя соответствующие уравнения, получаем:

$$x(t, 3, 2) = t^3 + 2t^2, \quad y(t, 3, 2) = \frac{2}{t}.$$

Подставляя в (1) найденные функции, а также $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t, 3, 2)}{\partial t} = \left(t^3 + 2t^2\right) v(t, 3, 2) + \dfrac{2}{t} u(t, 3, 2), \\ u(1, 3, 2) = 0, \\ \dfrac{\partial v(t, 3, 2)}{\partial t} = -\dfrac{2}{t} v(t, 3, 2), \\ v(1, 3, 2) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Из второго уравнения системы (2) находим:

$$v(t, 3, 2) = \frac{1}{t^2}.$$

Подставив $v(t, 3, 2)$ в первое уравнение системы (2), после интегрирования имеем:

$$u(t, 3, 2) = t^2 \ln t - 2t + 2t^2.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2}} = t^2 \ln t - 2t + 2t^2. \blacktriangleright$$

533. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2, & y(0) = -2; \end{cases}$ найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

◀ С помощью дифференцирования каждого равенства данной задачи по параметру μ и последующей подстановки $\mu = 0$ получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{du(t, 0)}{dt} = u(t, 0) + v(t, 0), && u(0, 0) = 1, \\ &\frac{dv(t, 0)}{dt} = 2u(t, 0) + y^2(t, 0), && v(0, 0) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(t, \mu) = \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}$, $v(t, \mu) = \frac{\partial y(t, \mu)}{\partial \mu}$. Функцию $y(t, 0)$ находим из задачи:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t, 0) = x(t, 0) + y(t, 0), && x(0, 0) = 1, \\ &\dot{y}(t, 0) = 2x(t, 0), && y(0, 0) = -2, \end{aligned}$$

которая получается из данной при $\mu = 0$. Подставив $x(t, 0) = \frac{1}{2}\dot{y}(t, 0)$ в первое уравнение, имеем задачу:

$$\ddot{y}(t, 0) - \dot{y}(t, 0) - 2y(t, 0) = 0, \quad y(0, 0) = -2, \quad \dot{y}(0, 0) = 2,$$

из которой находим $y(t, 0) = -2e^{-t}$. Используя этот результат, из системы (1) методом исключения получаем задачу:

$$\ddot{v}(t, 0) - \dot{v}(t, 0) - 2v(t, 0) = -12e^{-2t}, \quad v(0, 0) = 0, \quad \dot{v}(0, 0) = 6,$$

решение которой имеет вид:

$$v(t, 0) = 2e^{-t} + e^{2t} - 3e^{-2t}.$$

Это и есть искомое решение. ▶

534. $\ddot{x} - \dot{x} = (x + 1)^2 - \mu x^2$; $x(0) = \dfrac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = -1$; найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$

◀ Дифференцируя равенства данной задачи и полагая затем в каждом из них $\mu = 1$, получаем:

$$\frac{d^2u(t, 1)}{dt^2} - \frac{du(t, 1)}{dt} - 2u = -x^2(t, 1), \quad u(0, 1) = 0, \quad \left.\frac{du(t, 1)}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

где $u(t, \mu) = \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}$. Функция $t \mapsto x(t, 1)$ является решением задачи:

$$\frac{d^2x(t, 1)}{dt^2} - \frac{dx(t, 1)}{dt} = 2x(t, 1) + 1, \quad x(0, 1) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0, 1) = -1,$$

которую можно получить из данной при $\mu = 1$. Решив последнюю задачу, имеем:

$$x(t, 1) = e^{-t} - \frac{1}{2}.$$

Учитывая это решение, задачу (1) представляем в виде:

$$\ddot{u}(t, 1) - \dot{u}(t, 1) - 2u(t, 1) = -\left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2, \quad u(0, 1) = \dot{u}(0, 1) = 0.$$

Наконец, интегрируя последнее уравнение и используя начальные условия, получаем:

$$u(t, 1) = \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1} = \frac{1}{8} + e^{-t}\left(\frac{5}{36} - \frac{t}{3}\right) - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{72}e^{2t}. \blacktriangleright$$

535. Оценить, насколько может измениться при $0 \leqslant x \leqslant 1$ решение уравнения $y' = x + \sin y$ с начальным условием $y(0) = y_0 = 0$, если число y_0 изменить меньше, чем на 0,01.

◀ Пользуемся неравенством (4), п. 1.1. В данном примере $\varepsilon = 0$, так как сравниваются между собой решения $y(x)$ и $z(x)$ одного и того же уравнения, т. е. $y' = x + \sin y$, $z' = x + \sin z$, где решение $y(x)$ удовлетворяет начальному условию $y_0 = 0$, а решение $z(x)$ — условию $z(0) = z_0$, для которого, согласно условию, справедлива оценка $|y_0 - z_0| \leqslant 0{,}01$, или $|z_0| \leqslant 0{,}01$. Следовательно, по формуле (3), п. 1.1, $\delta = 0{,}01$.

Далее, так как $|\sin y - \sin z| \leqslant |y - z|$, то постоянная Липшица $K = 1$, и, согласно оценке (4), п. 1.1, имеем окончательно:

$$|y(x) - z(x)| \leqslant 0{,}01e^{|x|} \leqslant 0{,}01e \approx 0{,}0271. \blacktriangleright$$

536. Чтобы приближенно найти решение уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$, его заменили уравнением $\tilde{x} + x = 0$. Оценить при $0 \leqslant t \leqslant 2$ возникающую от этого погрешность в решении с начальными условиями $x(0) = 0{,}25$, $\dot{x}(0) = 0$, если известно, что $|x - \sin x| < 0{,}003$ при $|x| \leqslant 0{,}25$.

◀ Пусть $y(t)$ — решение задачи

$$\ddot{y} + \sin y = 0, \quad y(0) = 0{,}25, \quad \dot{y}(0) = 0, \tag{1}$$

а $x(t)$ — решение задачи:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0{,}25, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Тогда для погрешности $u(t) = x(t) - y(t)$ путем почленного вычитания из равенств (1) равенств (2) получаем задачу:

$$\ddot{u}(t) + u(t) = \sin y - y, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$u(t) = \int_0^t \Big(\sin y(\tau) - y(\tau)\Big) \sin(t - \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Умножив почленно уравнение (1) на $\dot{y}$ и проинтегрировав, а также приняв во внимание начальные условия, получим:

$$\dot{y}^2 = 2(\cos y - \cos 0{,}25).$$

Отсюда следует, что $|y| \leqslant 0{,}25$. Поэтому $|\sin y - y| \leqslant 0{,}003$, и из (3) находим нужную задачу:

$$|u(t)| \leqslant \int_0^t |\sin y(\tau) - y(\tau)|\, |\sin(t - \tau)|\, d\tau \leqslant 0{,}003 \int_0^t |\sin(t - \tau)|\, d\tau \leqslant 0{,}003 \int_0^2 d\tau = 0{,}006. \blacktriangleright$$

§ 2. Аналитические приближенные методы

2.1. Метод степенных рядов.

Если коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ дифференциального уравнения

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

в окрестности точки $x = x_0$ являются аналитическими функциями, т. е. разлагающимися в ряд по степеням $x - x_0$, и $p_0(x_0) \neq 0$, то решения этого уравнения в некоторой окрестности указанной точки также аналитичны. Если же точка $x = x_0$ является s-кратным нулем функции p_0, $s - 1$-кратным (или выше) нулем функции p_1 (если $s > 1$) и $s - 2$-кратным (или выше) нулем функции p_2 (если $s > 2$), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (1) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где r — некоторое число.

Если функция f является аналитической в окрестности точки (x_0, y_0), то решение задачи

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

также является аналитической функцией в окрестности точки $x = x_0$. Аналогично, если функция $f = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ является аналитической в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, то существует решение задачи

$$y^{(n)} = f, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

в виде ряда по степеням $(x - x_0)$. Для отыскания коэффициентов ряда часто используется формула Тейлора.

2.2. Метод малого параметра.

Если в задаче

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu), \quad x_i(t_0) = a_i(\mu), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

функции f_i, a_i являются аналитическими по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu$, то вектор-решение ее $x(t, \mu)$ разлагается в сходящийся при малых значениях μ (малых по сравнению с единицей, т. е. $|\mu| \ll 1$) степенной ряд по μ:

$$x(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots. \tag{3}$$

Для того чтобы найти функции $y_0, y_1, \ldots$, следует разложить правые части в задаче (2) по степеням μ и, подставив туда разложение (3), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ. В результате получаем систему дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями, интегрируя которую последовательно определяем функции $y_0, y_1, \ldots$. При этом произвольные постоянные находим, используя начальные условия:

$$y_i(t_0) = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}), \quad \text{где } \alpha_{ki} = \text{const}.$$

Пользуясь методом малого параметра, можно приближенно находить периодические решения уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{4}$$

где F — известная периодическая функция по t. В этом случае постоянные интегрирования, возникающие при решении дифференциальных уравнений относительно функций $y_0, y_1, \ldots$, находятся из условий периодичности функций, заключающихся в отсутствии резонирующих членов в правых частях указанных дифференциальных уравнений.

Если правая часть уравнения (4) явно от t не зависит, то период решения $x(t, \mu)$ заранее не известен. В таком случае в уравнении (4) следует сделать замену

$$\tau = t\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right), \tag{5}$$

где τ — новая независимая переменная, и искать решение $x(\tau, \mu)$ периода $\frac{2\pi}{a}$. При этом коэффициенты $b_1, b_2, \ldots$ определяются из условий периодичности решений $y_0(\tau), y_1(\tau), \ldots$.

В каждой из задач 537–542 найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда.

537. $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$.

◀ Функция $f(x, y) = y^2 - x$ является аналитической по совокупности переменных x, y в окрестности точки $(0, 1)$, поэтому существует аналитическое решение этой задачи

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подставив его в данное уравнение, получаем тождество по x:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right)^2 - x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь систему уравнений относительно чисел a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$a_1 = a_0^2, \quad 2a_2 = 2a_0a_1 - 1, \quad 3a_3 = a_1^2 + 2a_0a_2, \quad 4a_4 = 2a_1a_2 + 2a_0a_3, \ \ldots.$$

Так как $y(0) = 1$, то $a_0 = 1$. А тогда из уравнений полученной системы последовательно находим:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{7}{12}, \quad \ldots.$$

Таким образом, приближенное решение имеет вид:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4. \blacktriangleright$$

538. $y' = y + xe^y;\ y(0) = 0.$

◀ Функцию $f(x, y) = y + xe^y$ разложим в степенной ряд в окрестности точки $(0, 0)$ по степеням x, y:

$$f(x, y) = y + x\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \ldots\right).$$

Далее, принимая во внимание начальное условие, ищем решение в виде ряда

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots.$$

Подставив его в уравнение

$$y' = y + x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = 1, \quad 3a_3 = a_2, \quad 4a_4 = a_3 + a_2, \ldots,$$

откуда находим

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{6}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots. \blacktriangleright$$

539. $y'' = xy' - y^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

◀ Как и в предыдущих задачах, приближенное решение $y(x)$ можно было бы получить в виде частичной суммы степенного ряда, находя коэффициенты его из некоторой системы рекуррентных уравнений. Однако в данном случае мы поступим по-другому. Именно, зная, что искомый степенной ряд является рядом Тейлора, путем последовательного дифференцирования правой части данного уравнения по x вычисляем нужного порядка производные в точке $x = 0$. Таким образом, учитывая начальные условия, имеем:

$$y''(0) = -y^2(0) = -1,$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(xy' - y^2\right) = y' + xy'' - 2yy', \qquad y'''(0) = -2,$$

$$y^{IV}(x) = 2y'' + xy''' - 2y'^2 - 2yy'', \qquad y^{IV}(0) = -8, \ldots.$$

Следовательно, по формуле Тейлора,

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \ldots. \blacktriangleright$$

540. $\dfrac{dx}{dt} = t + x - y^2,\ \dfrac{dy}{dt} = -1 + t^2 + x^2 + y;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

◀ Поскольку правые части уравнений являются аналитическими функциями переменных x, y, t в совокупности, то решение ищем в виде

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots,$$

$$y(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots.$$

Подставив их в данные уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений относительно чисел a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots$:

$$a_1 = a_0 - b_0^2, \qquad 2a_2 = 1 + a_1 - 2b_0b_1, \qquad 3a_3 = a_2 - b_1^2 - 2b_0b_2, \ldots,$$

$$b_1 = -1 + b_0 + a_0^2, \qquad 2b_2 = b_1 + 2a_0a_1, \qquad 3b_3 = 1 + b_2 + a_1^2 + 2a_0a_2, \ldots.$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия, которые дают $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, последовательно находим:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{5}{6}, \quad b_3 = -\frac{1}{6}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \ldots, \quad y(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \ldots. \blacktriangleright$$

541. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t + x^2 + y^2}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{xy \ln\left(t + x^2 + y^2\right)}{1 + (t + \operatorname{tg} y)^2}$; $x(1) = 0$, $y(1) = 1$.

◀ Сначала, пользуясь формулой Тейлора, разложим правые части уравнений по степеням $(t-1)$, x, $y-1$:

$$f_1(t, x, y) = \frac{1}{2} + (t-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial t}\right|_M + x\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_M + (y-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_M +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left((t-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right|_M + 2(t-1)x\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial x}\right|_M + 2(t-1)(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial y}\right|_M +\right.$$
$$\left. + 2x(y-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x\,\partial y}\right|_M + x^2\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right|_M + (y-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right|_M\right) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{t-1}{4} - \frac{3(y-1)}{4} + \frac{(t-1)^2}{8} + \frac{3(t-1)(y-1)}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}(y-1)^2 + \ldots,$$

$$f_2(t, x, y) = (t-1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial t}\right|_M + x\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_M + (y-1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_M +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left((t-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\right|_M + 2x(t-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t\,\partial x}\right|_M + 2(t-1)(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t\,\partial y}\right|_M +\right.$$
$$\left. + 2x(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial y}\right|_M + x^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right|_M + (y-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right|_M\right) + \ldots =$$
$$= ax + x(t-1)b + cx(y-1) + \ldots,$$

где

$$f_1(t, x, y) = \frac{1}{t + x^2 + y^2}, \quad f_2(t, x, y) = \frac{xy \ln\left(t + x^2 + y^2\right)}{1 + (t + \operatorname{tg} y)^2},$$
$$a = \frac{\ln 2}{1 + (1 + \operatorname{tg} 1)^2}, \quad b = \frac{1}{2\left(1 + (1 + \operatorname{tg} 1)^2\right)} - 2(1 + \operatorname{tg} 1)\frac{\ln 2}{\left(1 + (1 + \operatorname{tg} 1)^2\right)^2},$$
$$c = \frac{\ln 2 + 1}{1 + (1 + \operatorname{tg} 1)^2} - \frac{\ln 2}{\left(1 + (1 + \operatorname{tg} 1)^2\right)^2}.$$

Таким образом, имеем задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t-1}{4} - \dfrac{3(y-1)}{4} + \dfrac{(t-1)^2}{8} + \dfrac{3(t-1)(y-1)}{8} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{8}(y-1)^2 + \ldots, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax + bx(t-1) + cx(y-1) + \ldots, \quad x(1) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Далее, ищем решение задачи (1) в виде:

$$x(t) = a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 + \ldots,$$
$$y(t) = 1 + b_1(t-1) + b_2(t-1)^2 + b_3(t-1)^3 + \ldots.$$

Подставляя последние ряды в уравнения (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t-1$, получаем систему уравнений, из которой находим

$$a_1=\frac{1}{2},\quad b_1=0,\quad a_2=-\frac{1}{8},\quad b_2=\frac{a}{4},\quad a_3=\frac{1-3a}{48},\quad b_3=\frac{4b-a}{24},\quad \ldots.$$

Следовательно,

$$x(t)=\frac{t-1}{2}-\frac{(t-1)^2}{8}+\frac{1-3a}{48}(t-1)^3+\ldots,$$

$$y(t)=1+\frac{a}{4}(t-1)^2+\frac{4b-a}{24}(y-1)^3+\ldots.\ \blacktriangleright$$

542. $\dfrac{dx}{dt}=t+e^{x+y},\ \dfrac{dy}{dt}=1+\sin xy,\ x(0)=y(0)=1.$

◀ Поскольку

$$x(t)=x(0)+x'(0)t+\frac{x''(0)}{2}t^2+\frac{x'''(0)}{6}t^3+\ldots,$$

$$y(t)=y(0)+y'(0)t+\frac{y''(0)}{2}t^2+\frac{y'''(0)}{6}t^3+\ldots,$$

то остается только найти значения производных в точке $t=0$. Из уравнений системы имеем:

$$x'(0)=e^2,\quad x''(t)=1+e^{x+y}(x'+y')=1+e^{x+y}(x'+1+\sin xy),\quad x''(0)=1+e^2(e^2+1+\sin 1),$$

$$y'(0)=1+\sin 1,\quad y''(t)=\cos xy\cdot(x'y+xy'),\quad y''(0)=\cos 1\cdot(e^2+1+\sin 1).$$

Далее,

$$x'''=e^{x+y}(x'+y')^2+e^{x+y}(x''+y''),$$

$$x'''(0)=e^2\Big((e^2+1+\sin 1)^2+1+e^4+e^2+e^2\sin 1+e^2\cos 1+\cos 1+\cos 1\cdot\sin 1\Big);$$

$$y'''(t)=-\sin xy\cdot(x'y+xy')^2+\cos xy\cdot(x''y+2x'y'+xy''),$$

$$y'''(0)=-\sin 1\cdot(e^2+1+\sin 1)^2+\cos 1\cdot\Big(1+e^4+e^2+e^2\sin 1+2e^2(1+\sin 1)+\cos 1\cdot(e^2+1+\sin 1)\Big).\ \blacktriangleright$$

543. Оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y'=y^2-x$ с начальным условием $y(0)=1$.

◀ Используя уравнение и начальное условие, последовательно находим:

$$y'(0)=1,\quad y''(x)=2yy'-1,\quad y''(0)=2y(0)y'(0)-1=1,$$

$$y^{(n)}(x)=2(yy')^{(n-2)}=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(y')^{(n-2-k)}=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(x)y^{(n-1-k)}(x),$$

$$y^{(n)}(0)=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(0)y^{(n-k-1)}(0),\quad n\geqslant 3.$$

Покажем, что $|y^{(n)}(0)|\leqslant n!$, $n\in\mathbb{N}$. С этой целью воспользуемся методом математической индукции. Имеем $|y'(0)|\leqslant 1$, $|y''(0)|\leqslant 1$. Предположив, что $|y^{(k)}(0)|\leqslant k!$ для $k=3,4,\ldots,(n-1)$, оценим

$$|y^{(n)}(0)|\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k\left|y^{(k)}(0)\right|\left|y^{(n-k-1)}(0)\right|\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k k!(n-k-1)!=2(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)=n!.$$

Следовательно, согласно указанному методу, $|y^{(n)}(0)|\leqslant n!\ \forall n\in\mathbb{N}$.

С учетом доказанного неравенства для коэффициентов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, представляющего решение в некоторой окрестности точки $x=0$, справедлива оценка:

$$|a_n|=\frac{1}{n!}\left|y^{(n)}(0)\right|\leqslant 1. \tag{1}$$

Наконец, используя формулы Коши—Адамара $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, а также неравенство (1), для радиуса R сходимости степенного ряда получаем требуемую оценку:

$$R \geqslant 1. \blacktriangleright$$

В задачах 544–549 найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов.

544. $y'' - x^2 y = 0.$

◀ Поскольку функции $p_0 = p_0(x) \equiv 1$, $p_1 = p_1(x) \equiv 0$, $p_2 = p_2(x) = -x^2$ аналитичны $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и $p_0(x) \neq 0$, то согласно п. 2.1 существует аналитическое решение $y = y(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Ищем его в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1}$$

Подставив $y(x)$ в уравнение, получим тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

Заменив во второй сумме индекс суммирования по формуле $n = n' - 4$ ($n' = 4, 5, \ldots$), имеем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n'=4}^{\infty} a_{n'-4} x^{n'-2} = 0,$$

или

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} \Big(n(n-1)a_n - a_{n-4}\Big) x^{n-2} = 0.$$

Отсюда следует, что $a_2 = a_3 = 0$, $n(n-1)a_n - a_{n-4} = 0$. Из рекуррентной формулы $a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$ последовательно находим:

$$a_4 = \frac{a_0}{4\cdot 3}, \quad a_5 = \frac{a_1}{5\cdot 4}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{a_4}{8\cdot 7} = \frac{a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3},$$

$$a_9 = \frac{a_5}{9\cdot 8} = \frac{a_1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}, \quad a_{10} = a_{11} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Поскольку a_0, a_1 — произвольные постоянные, то можем положить $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ или $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда согласно (1), (2), имеем два частных решения:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^8}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \frac{x^{12}}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^5}{5\cdot 4} + \frac{x^9}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \frac{x^{13}}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \ldots.$$

Очевидно, полученные степенные ряды сходятся $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы, так как тождество $y_1(x) \equiv k y_2(x)$, $k = \text{const}$, невозможно (например, $y_1(0) = 0$, что противоречит определению $y_1(x)$). Таким образом, решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему и общее решение данного уравнения представляется в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleright$$

545. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

◀ Поскольку функция

$$f = f(x, y, y') = \frac{4xy' + 2y}{1 - x^2}, \quad x \neq \pm 1,$$

является аналитической по совокупности переменных x, y, y' ($x \neq \pm 1$), то существуют аналитические решения данного уравнения при $x \neq \pm 1$. Найдем эти решения сначала в некоторой окрестности нуля ($x = 0$), т. е. будем искать их в виде

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Подставив написанный ряд в данное уравнение, получим тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0.$$

Заменив в первой сумме индекс суммирования n на $n+2$, перепишем тождество в таком виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0,$$

или

$$2a_2 + 6a_3 x - 2a_0 - 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4n a_n - 2a_n\Big)x^n \equiv 0.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$a_2 = a_0, \quad a_3 = a_1, \quad a_{n+2} = a_n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, тогда $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = 0$, $k = \overline{0, \infty}$. Следовательно,

$$y_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

Аналогично, если $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, то получим $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = 1$. Поэтому

$$y_2(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

Нетрудно видеть, что функции y_1, y_2 являются решениями данного уравнения и при $|x| > 1$. ►

546. $(1-x)y'' - 2y' + y = 0$.

◄ Как и в предыдущем примере, сначала ищем решения в некоторой окрестности точки $x = 0$, т. е. в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Подставив ряд в уравнение, получаем тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1} - 2a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0.$$

Заменив в первой сумме индекс суммирования n на $n+2$, а во второй — n на $n+1$, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^n - 2a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0,$$

откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получаем:

$$2a_2 - 2a_1 + a_0 = 0, \quad (n+2)(n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Пусть $a_1 = 0$, $a_0 = 1$. Тогда из уравнений (1) найдем:

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = -\frac{11}{24}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{11}{24}x^4 - \ldots.$$

Положив $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, аналогично получаем:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{3}{4}, \quad \ldots,$$

поэтому

$$y_2(x) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \ldots.$$

Поскольку функция $x \mapsto \frac{2y'-y}{1-x}$ аналитична при $x \neq 1$, то полученные ряды сходятся только при $|x| < 1$. Для получения частных решений при произвольных $x \neq 1$ произведем замену $x = t + x_0$, где $x_0 \neq 1$, и будем искать частные решения в виде:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t = x - x_0.$$

После выкладок, аналогичных проделанным выше, приходим к таким частным решениям:

$$y_1(x) = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{2(1-x_0)} - \frac{(x-x_0)^3}{2(1-x_0)^2} - \frac{11+x_0}{24(1-x_0)^3}(x-x_0)^4 - \dots,$$

$$y_2(x) = (1-x_0)(x-x_0) + (x-x_0)^2 + \frac{5+x_0}{6(1-x_0)}(x-x_0)^3 + \frac{3+x_0}{4(1-x_0)^2}(x-x_0)^4 + \dots.$$

Поскольку радиус сходимости R полученных рядов определяется расстоянием от точки $t=0$ до особой точки функции $t \mapsto \frac{2y_t' - y(t)}{1-x_0-t}$, то $R = |1-x_0|$. Следовательно, функции y_1, y_2 определены при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0| < |1-x_0|$. Из этого неравенства следует, что функции y_1, y_2 описывают все частные решения данного уравнения при любых $x \neq 1$. ▶

Замечание. В предыдущем примере нам удалось просуммировать степенные ряды и, таким образом, найти аналитические функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения и при других возможных x.

547. $y'' - xy' + xy = 0$.

◀ Поскольку $p_0(x) \equiv 1 \neq 0$, функции $p_1 = p_1(x) = -x$, $p_2 = p_2(x) = x$ — аналитические, то уравнение имеет частные решения, которые образуют фундаментальную систему и являются аналитическими функциями при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Степенной ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

в виде которого мы будем искать частные решения, сходится при всех x. Подставляя в данное уравнение ряд и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему относительно чисел a_n:

$$a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{na_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Отсюда, полагая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, находим:

$$a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{1}{40}, \quad \dots.$$

Аналогично, полагая $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, имеем:

$$a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = -\frac{1}{12}, \quad a_5 = \frac{1}{40}, \quad \dots.$$

Следовательно, частные решения представляются в виде:

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \dots, \quad y_2(x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \dots. \blacktriangleright$$

548. $xy'' + y\ln(1-x) = 0$.

◀ Пользуемся разложением

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right), \quad -1 \leqslant x < 1$$

и ищем частные решения в виде

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots.$$

Относительно коэффициентов известным путем получаем систему уравнений:

$$2a_2 - a_0 = 0, \quad 6a_3 - a_1 - \frac{1}{2}a_0 = 0, \quad 12a_4 - \frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{3}a_0 = 0, \dots,$$

из которой, полагая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, получаем

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{12}, \quad a_4 = \frac{5}{72}, \quad \dots.$$

Следовательно, первое частное решение имеет вид:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{72}x^4 + \ldots.$$

Для получения второго частного решения полагаем $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда из этой же системы найдем

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{24}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots.$$

Радиус сходимости степенных рядов, представляющих $y_1(x)$, $y_2(x)$, равен единице. Для получения частных решений, пригодных $\forall x \in (-\infty, 1)$, сделаем замену $x = t - x_0$ ($x_0 > 0$). Тогда данное уравнение примет вид

$$(t - x_0)y'' + y\ln(1 + x_0 - t) = 0, \quad \text{или} \quad (t - x_0)y'' + y\ln(1 + x_0) + y\ln\left(1 - \frac{t}{1 + x_0}\right) = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение разложения

$$\ln\left(1 - \frac{t}{1 + x_0}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(1 + x_0)^n}, \quad y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$2b_2 x_0 - b_0\ln(1 + x_0) = 0, \quad 2b_2 - 6b_3 x_0 + b_1\ln(1 + x_0) - \frac{b_0}{1 + x_0} = 0,$$

$$-12b_4 x_0 + 6b_3 + b_2\ln(1 + x_0) - \frac{b_1}{1 + x_0} - \frac{b_0}{2(1 + x_0)^2} = 0, \quad \ldots. \tag{1}$$

Пусть $b_0 = 1$, $b_1 = 0$. Тогда из полученной системы последовательно найдем

$$b_2 = \frac{\ln(1 + x_0)}{2x_0}, \quad x_0 \neq 0, \qquad b_3 = \frac{1}{6x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right), \quad x_0 \neq 0,$$

$$b_4 = \frac{1}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0^2} - \frac{1}{x_0(1 + x_0)} + \frac{\ln^2(1 + x_0)}{2x_0} - \frac{1}{2(1 + x_0)^2}\right), \quad x_0 \neq 0, \quad \ldots.$$

Пусть $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Тогда из системы (1) получим:

$$b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{\ln(1 + x_0)}{6x_0}, \quad x_0 \neq 0, \qquad b_4 = \frac{1}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right), \quad x_0 \neq 0.$$

Заметим, что из выражений для b_i, $i = 1, 2, 3, 4$, предельным переходом $x_0 \to +0$ можно получить значения соответствующих a_i, $i = 1, 2, 3, 4$, вычисленных в случае $x_0 = 0$.

Таким образом, частные решения при $x_0 > 0$ можно записать так:

$$y_1(x) = 1 + \frac{(x + x_0)^2}{2}\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} + \frac{(x + x_0)^3}{6x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right) +$$

$$+ \frac{(x + x_0)^4}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0^2} - \frac{1}{x_0(1 + x_0)} + \frac{\ln^2(1 + x_0)}{2x_0} - \frac{1}{2(1 + x_0)^2}\right) + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + x_0 + \frac{(x + x_0)^3}{6}\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} + \frac{(x + x_0)^4}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right) + \ldots. \blacktriangleright$$

549. $y''' - xy'' + (x - 2)y' + y = 0$.

◀ Поскольку $p_0(x) \equiv 1 \neq 0$ и функции $p_1 = p_1(x) = -x$, $p_2 = p_2(x) = x - 2$, $p_3 = p_3(x) \equiv 1$ являются аналитическими при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то фундаментальная система состоит из аналитических на всей числовой оси функций. Следовательно, соответствующие им степенные ряды

сходятся при всех x. Подставляя в данное уравнение ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и приравнивая коэффициенты при $x^0, x, x^2, \ldots$, получаем:

$$6a_3 - 2a_1 + a_0 = 0, \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - (n+2)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$. Тогда из последних уравнений найдем:

$$a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{1}{30}, \quad a_6 = \frac{1}{180}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{180} + \ldots.$$

Пусть $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда из указанных выше уравнений следует, что

$$a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{12}, \quad a_5 = \frac{1}{15}, \quad \ldots.$$

Поэтому второе частное решение имеет вид:

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{15} + \ldots.$$

Наконец, если положим $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, то получим:

$$a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = -\frac{1}{20}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} - \ldots. \blacktriangleright$$

В следующих задачах найти те решения данных уравнений, которые выражаются степенными (или обобщенными степенными) рядами.

550. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

◀ Поскольку функция $p_0 = p_0(x) = x$ имеет в точке $x = 0$ нуль 1-го порядка, функция $p_1 = p_1(x) = 2$ нулей не имеет, а функция $p_2 = p_2(x) = x$ имеет в этой точке нуль 1-го порядка, то, согласно п. 2.1, существует по крайней мере одно нетривиальное решение данного уравнения в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подставив ряд в данное уравнение и приравняв коэффициенты при $x^0, x, \ldots$, получим:

$$a_0 r(r+1) = 0, \quad a_1(r+1)(r+2) = 0, \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)}. \tag{1}$$

Ясно, что нетривиальное решение возможно только при условии $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$. Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тогда из первого уравнения (1) следует, что $r(r+1) = 0$. Взяв $r = 0$, из третьего уравнения (1) последовательно находим:

$$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{1}{6!}, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0; \quad y_1(0) = 1.$$

Далее, положив $r = -1$ ($a_0 = 1$, $a_1 = 0$), из (1) получаем:

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{4!}, \quad \ldots.$$

Поэтому второе частное решение имеет вид:

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0.$$

Пусть $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда из второго уравнения (1) следует, что $(r+1)(r+2) = 0$. Полагая, например, $r = -1$, из третьего уравнения (1) последовательно находим:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad \ldots .$$

Таким образом,

$$y_3(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$

Если же положим $r = -2$, то аналогично будем иметь

$$y_4(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots\right) = \frac{\cos}{x}, \quad x \neq 0.$$

Итак, если $x \neq 0$, то два линейно независимых частных решения представятся в виде:

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2(x) = \frac{\cos x}{x}. \blacktriangleright$$

Примечание. Можно было бы обойтись рассмотрением случая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

551. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$.

◀ Подставляя в уравнение ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$a_n(9(n+r)(n+r-1)+2) - a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

$$a_0(9r^2 - 9r + 2) = 0, \quad a_1(9r^2 + 9r + 2) = 0. \tag{2}$$

Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тогда из первого уравнения (1) следует, что $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{2}{3}$. Подставив в (2) сначала $r = \frac{1}{3}$, а затем $r = \frac{2}{3}$, для каждого из этих двух случаев найдем:

$$a_2^{(1)} = \frac{1}{5 \cdot 6}, \quad a_3^{(1)} = 0, \quad a_4^{(1)} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12}, \quad \ldots,$$

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{6 \cdot 7}, \quad a_3^{(2)} = 0, \quad a_4^{(2)} = \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13}, \quad \ldots .$$

Таким образом,

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{5 \cdot 6} + \frac{x^4}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12} + \ldots\right),$$

$$y_2(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{6 \cdot 7} + \frac{x^4}{6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13} + \ldots\right), \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

Примечание. Рассмотрение случая $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ приводит к такому же результату.

552. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$.

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$(r^2 + r - 2)a_0 = 0, \quad r(r+3)a_1 - 2a_0 = 0,$$

$$\big((n+r)(n+r+1) - 2\big)a_n - a_{n-2} - 2a_{n-1} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{1}$$

Поскольку мы ищем нетривиальные решения, то $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$. Следовательно, определитель первых двух однородных уравнений должен быть равен нулю, т. е.

$$(r-1)r(r+2)(r+3) = 0.$$

Отсюда находим возможные варианты:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = -3.$$

Пусть $r = 1$, $a_0 = 1$, тогда из указанных уравнений получаем $a_1 = \frac{1}{2}$, а из третьего уравнения (1) последовательно находим

$$a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{20}, \quad a_4 = \frac{3}{280}, \quad \ldots .$$

Соответственно этому запишем первое частное решение:

$$y_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{20} + \frac{3x^5}{280} + \ldots .$$

Пусть $r = -2$, $a_0 = 1$, тогда аналогичным образом можем получить

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку при отыскании a_3 приходим к неопределенности $\frac{0}{0}$, то поступаем следующим образом. Считая, что $r \neq -2$, из уравнений (1) находим:

$$a_1 = \frac{2}{r^2 + 3r}, \quad a_2 = \frac{r^2 + 3r + 4}{(r^2 + 3r)(r^2 + 5r + 4)}, \quad a_3 = \frac{4(r+2)}{(r^2 + 3r)(r^2 + 5r + 4)(r + 5)}.$$

Отсюда, устремив $r \to -2$, получим:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0.$$

Коэффициенты a_4, a_5 и т. д. находим обычным способом. Таким образом, второе частное решение запишется в виде:

$$y_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{40} + \frac{7x^4}{120} + \ldots .$$

Рассмотрение случаев $r = 0$ и $r = -3$ приводит к таким же результатам. ▶

553. $xy'' + y' - xy = 0$.

◀ Подставив ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_0 r^2 = 0, \qquad a_1 (1 + r)^2 = 0, \qquad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n + r)^2}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Пусть $r = 0$, тогда $a_1 = 0$, а коэффициент a_0 можем приравнять единице. Из третьего соотношения последовательно находим:

$$a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}, \quad \ldots .$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots . \blacktriangleright$$

Найти общее решение уравнений:

554. $x^2 y'' + xy' + (1 - x)y = 0$.

◀ Частное решение ищем в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Подставив ряд в уравнение, получим тождество по x, из которого известным способом находим:

$$a_0 (r^2 + 1) = 0, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + (n + r)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $a_0 \neq 0$ (при $a_0 = 0$ получается тривиальное решение), то из первого уравнения следует, что $r = \pm i$. Пусть $r = i$, $a_0 = 1$, тогда из второго уравнения последовательно получаем:

$$a_1 = \frac{1}{1 + 2i}, \quad a_2 = \frac{1}{(1 + 2i)(1 + i)}, \quad a_3 = \frac{1}{12(1 + 2i)(1 + i)(3 + 2i)}, \quad \ldots .$$

Таким образом, частные решения имеют вид:

$$y_1(x) = x^i\left(1 + \frac{x}{1+2i} + \frac{x^2}{4(1+2i)(1+i)} + \frac{x^3}{12(1+2i)(1+i)(3+2i)} + \dots\right),$$

$$y_2(x) = x^{-i}\left(1 + \frac{x}{1-2i} + \frac{x^2}{4(1-2i)(1-i)} + \frac{x^3}{12(1-2i)(1-i)(3-2i)} + \dots\right).$$

Общее же решение

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1(u+iv) + C_2(u-iv) = au + bv,$$

где $a = C_1 + C_2$, $b = i(C_1 - C_2)$. Функции u, v легко получить из представления $y_1(x)$, если воспользоваться формулами Эйлера. Имеем:

$$y_1(x) = u(x) + iv(x) = e^{i\ln x}\left(1 + \frac{x}{5}(1-2i) - \frac{x^2}{40}(1+3i) + \frac{x^3}{520}\left(i - \frac{3}{2}\right) + \dots\right) =$$

$$= \left(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)\right)\left(1 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{40} - \frac{3x^3}{1040} + \dots + i\left(-\frac{2x}{5} - \frac{3x^2}{40} + \frac{x^3}{520} + \dots\right)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{40} - \frac{3x^3}{1040} + \dots\right)\cos(\ln x) + \left(\frac{2x}{5} + \frac{3x^2}{40} - \frac{x^3}{520} + \dots\right)\sin(\ln x) +$$

$$+ i\left(\left(1 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{40} - \frac{3x^3}{1040} + \dots\right)\sin(\ln x) - \left(\frac{2x}{5} + \frac{3x^2}{40} - \frac{x^3}{520} + \dots\right)\cos(\ln x)\right).$$

Следовательно,

$$u(x) = \alpha(x)\cos(\ln x) + \beta(x)\sin(\ln x), \quad v(x) = \alpha(x)\sin(\ln x) - \beta(x)\cos(\ln x),$$

$$\alpha(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{40} - \frac{3x^3}{1040} + \dots, \quad \beta(x) = \frac{2x}{5} + \frac{3x^2}{40} - \frac{x^3}{520} + \dots. \blacktriangleright$$

555. $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$.

◀ Будем искать частное решение в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Тогда для коэффициентов a_n способом, изложенным в примере 539, получим:

$$a_2 = \frac{(1-3x_0)a_1 - a_0}{2x_0^2}, \quad a_3 = \frac{1}{6x_0^4}\left(a_1\left(1 - 8x_0 + 11x_0^2\right) - a_0(1-5x_0)\right), \dots$$

Коэффициенты a_0, a_1 произвольны, $x_0 \neq 0$. Если $x_0 = 0$, то решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)x^{\alpha}.$$

Подставив ряд в уравнение и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях x, найдем

$$\alpha a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+2)+1}{\alpha+n+1}a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1}$$

В силу того, что мы ищем нетривиальное решение, следует положить $\alpha = 0$. Пусть $a_0 = 1$, тогда из (1) последовательно определяем

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2!, \quad a_3 = 3!, \quad \dots, \quad a_n = n!, \quad \dots.$$

Следовательно,

$$y(x) = 1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots.$$

Очевидно, что этот ряд сходится лишь в точке $x = 0$. ▶

В следующих задачах найти в виде тригонометрических рядов периодические решения данных уравнений:

556. $y'' - 3y = f(x)$, $f(x) = |x|$ при $|x| \leqslant \pi$, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$.

◀ Поскольку функция f при $|x| \leqslant \pi$ непрерывна, дифференцируема при $0 < |x| < \pi$, $f(\pi) = f(-\pi)$, то она разлагается в равномерно сходящийся к ней в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

В силу равенства $f(x + 2\pi) = f(x)$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_n x}{\lambda_n}, \quad \lambda_n = 2n - 1.$$

Далее, приняв во внимание 2π-периодичность функции f, решение ищем также в виде 2π-периодической функции y:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Подставляя этот ряд в уравнение и приравнивая коэффициенты при функциях $x \mapsto \sin kx$, $x \mapsto \cos kx$, имеем:

$$a_0 = -\frac{\pi}{3}, \qquad a_{2k-1} = \frac{1}{\pi(2k-1)^2(k^2-k+1)}, \quad a_{2k} = b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$y(x) = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \blacktriangleright$$

557. $y''' - y' - y = \dfrac{2\sin x}{5 - 4\cos x}$.

◀ Очевидно, функция

$$x \mapsto f(x) = \frac{2\sin x}{5 - 4\cos x}$$

2π-периодическая, поэтому частное периодическое решение уравнения ищем в виде

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Подставив этот ряд в уравнение и приняв во внимание, что функция f нечетная, получим

$$a_0 = 0, \qquad a_k + b_k(k^3 + k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx = \frac{2\sin x}{5 - 4\cos x}, \quad c_k = (k^3 + k)a_k - b_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Умножив тождество на $5 - 4\cos x$, представим его в виде:

$$5\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx - 2\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}\sin kx - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\sin kx = 2\sin x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, находим

$$5c_1 - 2c_2 = 2, \quad 5c_k - 2c_{k-1} - 2c_{k+1} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Из второго уравнения (2) следует

$$c_k = \alpha 2^k + \frac{\beta}{2^k}, \tag{3}$$

где α, β — произвольные постоянные. Использовав первое уравнение (2), получим $\alpha + \beta = 1$. Решив систему уравнений (1), (3), будем иметь:

$$a_k = (k^3 + k)\frac{\alpha 2^k + (1-\alpha)2^{-k}}{1 + (k^3 + k)^2}, \quad b_k = -\frac{\alpha 2^k + (1-\alpha)2^{-k}}{1 + (k^3 + k)^2}.$$

Поскольку $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ при $k \to +\infty$, то в последних соотношениях следует положить $\alpha = 0$. Итак, окончательно имеем:

$$a_k = \frac{k^3 + k}{2^k(1 + (k^3 + k)^2)}, \quad b_k = -\frac{1}{2^k(1 + (k^3 + k)^2)};$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^3 + k)\cos kx - \sin kx}{2^k(1 + (k^3 + k)^2)}. \blacktriangleright$$

558. $\begin{cases} y'' - 3y - 5z = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k^2}, \\ z'' + 6y + 8z = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^2}. \end{cases}$

◀ Поскольку правые части являются π-периодическими функциями, то периодические решения $y(x)$, $z(x)$ ищем с тем же периодом в виде

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2kx + b_k \sin 2kx,$$

$$z(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos 2kx + d_k \sin 2kx.$$

Подставив написанные ряды в уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях, получаем:

$$\left(4k^3 + 3\right)a_k + 5c_k = 0, \quad -\left(4k^2 + 3\right)b_k - 5d_k = \frac{1}{k^2},$$

$$\left(8 - 4k^2\right)c_k + 6a_k = \frac{1}{k^2}, \quad \left(8 - 4k^2\right)d_k + 6b_k = 0, \quad a_0 = c_0 = 0,$$

откуда находим

$$a_k = \frac{5}{2k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)}, \qquad b_k = \frac{4 - 2k^2}{k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)},$$

$$c_k = -\frac{3 + 4k^2}{2k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)}, \qquad d_k = -\frac{3}{k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)}.$$

Таким образом,

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\cos 2kx + 4\left(2 - k^2\right)\sin 2kx}{2k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)},$$

$$z(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(3 + 4k^2\right)\cos 2kx + 6\sin 2kx}{2k^2(8k^4 - 10k^2 + 3)}. \blacktriangleright$$

В задачах 559–562 найти 2–3 члена разложения решения по степеням малого параметра μ.

559. $y' = 4\mu x - y^2$, $y(1) = 1$.

◀ Поскольку правая часть аналитична по y, μ, то, согласно п. 2.2 решение ищем в виде

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots.$$

Подставив ряд в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$y_0' = -y_0^2, \quad y_1' = 4x - 2y_0y_1, \quad y_2' = -y_1^2 - 2y_0y_2, \quad \ldots. \tag{1}$$

Приняв во внимание начальное условие, имеем:

$$y_0(1) = 1, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 0, \quad \ldots. \tag{2}$$

Теперь последовательно решаем рекуррентную систему (1), используя начальные условия (2):

$$y_0(x) = \frac{1}{x}, \quad y_1(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad y_2(x) = -\frac{x^5}{7} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{x^3} - \frac{32}{21x^2}, \quad \ldots.$$

Итак,

$$y(x)=\frac{1}{x}+\mu\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\mu^2\left(-\frac{x^5}{7}+\frac{2x}{3}-\frac{32}{21x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+\ldots$$

есть решение поставленной задачи. ▶

560. $xy'=\mu x^2+\ln y,\ y(1)=1.$

◀ Принимая во внимание аналитичность правой части как функции переменных y, μ при $y>0$ и пользуясь методом малого параметра, решение задачи ищем в виде

$$y(x,\mu)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\mu^2 y_2(x)+\ldots. \tag{1}$$

Далее, учитывая соотношения: $y(x,0)=y_0(x)$,

$$\left.\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=y_1(x),\quad \left.\frac{\partial^2 y(x,\mu)}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=0}=2y_2(x),\quad \ldots,$$

$$y'_x(x,0)=y'_0(x),\quad \left.\frac{\partial}{\partial\mu}y'_x(x,\mu)\right|_{\mu=0}=y'_1(x),\quad \left.\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}y'_x(x,\mu)\right|_{\mu=0}=2y'_2(x),\quad \ldots,$$

из данного уравнения дифференцированием по параметру μ находим:

$$xy'_0=\ln y_0,\quad xy'_1=x^2+\frac{y_1}{y_0},\quad xy'_2=\frac{y_2}{y_0}-\frac{y_1^2}{2y_0^2},\quad \ldots. \tag{2}$$

Исходя из начального условия $y(1)=1$, из (1) получаем начальные условия для функций y_i, $i=\overline{0,\infty}$:

$$y_0(1)=1,\quad y_1(1)=y_2(1)=\ldots=0. \tag{3}$$

Последовательно интегрируя уравнения (2) и пользуясь условиями (3), находим:

$$y_0=1,\quad y_1=x^2-x,\quad y_2=\frac{x}{6}(1-x)^3,\quad \ldots. \tag{4}$$

Наконец, подставляя (4) в (1), приходим к решению поставленной задачи:

$$y(x,\mu)=1+\mu(x^2-x)+\mu^2\frac{x}{6}(1-x)^3+\ldots. ▶$$

561. $y'=e^{y-x}+\mu y,\ y(0)=-\mu.$

◀ Как и в предыдущем примере, имеем:

$$y(x,\mu)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\mu^2 y_2(x)+\ldots,$$

где

$$y_0(x)=y(x,0),\quad y_1(x)=\left.\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0},\quad y_2(x)=\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=0},\quad \ldots,$$

$$y'_0(x)=y'_x(x,0),\quad y'_1(x)=\left.\frac{\partial}{\partial\mu}y'_x(x,\mu)\right|_{\mu=0},\quad y'_2(x)=\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}y'_x\right|_{\mu=0},\quad \ldots.$$

Используя эти соотношения, из данного уравнения находим:

$$y'_0=e^{y_0-x},\quad y'_1=e^{y_0-x}y_1+y_0,\quad y'_2=e^{y_0-x}y_2+y_1+\frac{1}{2}e^{y_0-x}y_1^2,\quad \ldots. \tag{1}$$

При этом начальные условия имеют вид:

$$y_0(0)=y_2(0)=\ldots=0,\quad y_1(0)=-1. \tag{2}$$

Из первого уравнения (1) следует, что $e^{-y_0}=e^{-x}+C_1$. В силу первого начального условия (2) $C_1=0$, поэтому $y_0=x$. Далее, из второго уравнения (1) нетрудно найти $y_1=C_2e^x-x-1$. Постоянную C_2 определяем, пользуясь последним условием (2), что дает $C_2=0$. Следовательно, $y_1=-x-1$. Аналогично решаем задачу:

$$y'_2=y_2-x-1+\frac{(x+1)^2}{2},\quad y_2(0)=0.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$y(x, \mu) = x - \mu(x+1) + \frac{\mu^2}{2}(e^x - x^2 - 2x - 1) + \ldots . \blacktriangleright$$

562. $\begin{cases} \dot{x} = x + \mu(x^2 - y^2), & x(0) = 1 - \mu, \\ \dot{y} = y - \mu(x^2 + y^2), & y(0) = \mu^2. \end{cases}$

◀ Подставляя в данные уравнения ряды

$$\begin{cases} x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \\ y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots \end{cases} \tag{1}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\dot{x}_0 = x_0, \quad x_0(0) = 1, \qquad \dot{x}_1 = x_1 + x_0^2 - y_0^2, \quad x_1(0) = -1, \qquad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_0x_1 - 2y_0y_1, \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{y}_0 = y_0, \quad y_0(0) = 0, \qquad \dot{y}_1 = y_1 - x_0^2 - y_0^2, \quad y_1(0) = 0, \qquad \dot{y}_2 = y_2 - 2x_0x_1 - 2y_0y_1, \quad y_2(0) = 1.$$

Отсюда интегрированием последовательно находим:

$$x_0 = e^t, \qquad y_0 = 0;$$

$$x_1 = e^{2t} - 2e^t, \qquad y_1 = e^t - e^{2t};$$

$$x_2 = e^{3t} - 4e^{2t} + 3e^t, \qquad y_2 = 4e^{2t} - e^{3t} - 2e^t.$$

Таким образом, ряды (1) можно записать в виде:

$$x = e^t + \mu\left(e^{2t} - 2e^t\right) + \mu^2\left(e^{3t} - 4e^{2t} + 3e^t\right) + \ldots,$$

$$y = \mu\left(e^t - e^{2t}\right) + \mu^2\left(4e^{2t} - e^{3t} - 2e^t\right) + \ldots . \blacktriangleright$$

В задачах 563–566 с помощью малого параметра найти приближенно периодические решения с периодом, равным периоду правой части уравнения.

563. $\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2$.

◀ Согласно методу малого параметра, периодическое решение ищем в виде:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \tag{1}$$

где x_i $(i = \overline{0, \infty})$ — 2π-периодические функции. Подставляя разложение (1) в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\ddot{x}_0 + 3x_0 = 2\sin t, \quad \ddot{x}_1 + 3x_1 = \dot{x}_0^2, \quad \ddot{x}_2 + 3x_2 = 2\dot{x}_0\dot{x}_1, \quad \ldots . \tag{2}$$

Первое уравнение имеет общее решение

$$x_0(t) = C_{10}\sin\sqrt{3}t + C_{20}\cos\sqrt{3}t + \sin t.$$

Поскольку требуется найти 2π-периодическое решение, то в последнем равенстве следует положить $C_{10} = C_{20} = 0$. Следовательно,

$$x_0(t) = \sin t.$$

Принимая во внимание это значение, из второго уравнения системы (2) находим

$$x_1(t) = C_{11}\sin\sqrt{3}t + C_{21}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Отсюда в силу требования 2π-периодичности функции x_1 имеем:

$$x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Аналогичным образом из третьего уравнения системы (2) получаем

$$x_2(t) = -\frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Подставляя $x_0, x_1, x_2, \ldots$ в (1), приходим к искомому решению:

$$x(t, \mu) = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{2}\sin t\right) + \ldots . \blacktriangleright$$

564. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\mu\cos t.$

◀ Подставляя ряд

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots$$

в данное уравнение, известным способом получаем систему уравнений:

$$\ddot{x}_0 + 3x_0 + x_0^3 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 + 3x_0^2 x_1 = 2\cos t,$$

$$\ddot{x}_2 + 3x_2 + 3x_0 x_1^2 + 3x_0^2 x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + 3x_3 + x_1^3 + 3x_0^2 x_3 = 0, \quad \ldots,$$

из которой последовательно находим 2π-периодические решения:

$$x_0(t) \equiv 0, \quad x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) \equiv 0, \quad x_3(t) = -\frac{3}{8}\cos t + \frac{1}{24}\cos 3t.$$

Следовательно,

$$x(t, \mu) = \mu\cos t + \frac{\mu^3}{8}\left(\frac{1}{3}\cos 3t - 3\cos t\right) + \ldots. \blacktriangleright$$

Примечание. Нетривиальные решения уравнения $\ddot{x}_0 + 3x_0 + x_0^3 = 0$ выражаются через эллиптические функции, не являющиеся 2π-периодическими.

565. $\ddot{x} + \sin x = \mu\sin 2t.$

◀ Как и в предыдущем примере, степенной ряд

$$x(\mu, t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots$$

подставляем в данное уравнение и получаем тождество по параметру μ, из которого следует система уравнений:

$$\ddot{x}_0 + \sin x_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + x_1\cos x_0 = \sin 2t,$$

$$\ddot{x}_2 + x_2\cos x_0 - \frac{x_1^2}{2}\sin x_0 = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{x}_3 + \left(x_3 - \frac{x_1^3}{6}\right)\cos x_0 - x_1 x_2 \sin x_0 = 0, \quad \ldots.$$

Первое уравнение в (1) имеет серию π-периодических решений:

$$x_{0k} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Второе уравнение дает

$$x_{1k} = \frac{\sin 2t}{(-1)^k - 4},$$

а третье —

$$x_2 = 0.$$

Из четвертого, имеющего вид

$$\ddot{x}_3 + (-1)^k x_3 = \frac{(-1)^k}{6}\,\frac{\sin^3 2t}{((-1)^k - 4)^3},$$

следует π-периодическое решение

$$x_{3k} = \frac{(-1)^k}{24((-1)^k - 4)^3}\left(\frac{\sin 6t}{36 - (-1)^k} - \frac{4 + (-1)^k}{5}\sin 2t\right).$$

Таким образом,

$$x(\mu, t) = k\pi + \frac{\mu\sin 2t}{(-1)^k - 4} + \frac{(-1)^k\mu^3}{24((-1)^k - 4)^3}\left(\frac{\sin 6t}{36 - (-1)^k} - \frac{4 + (-1)^k}{5}\sin 2t\right) + \ldots. \blacktriangleright$$

Примечание. Для получения системы (1) удобно пользоваться разложением

$$\sin(x_0 + u) = \sin x_0\cos u + \sin u\cos x_0,$$

где $u = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots$, а также

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 - \ldots, \quad \sin u = u - \frac{1}{3!}u^3 + \ldots.$$

В результате имеем

$$\sin(x_0 + u) = A\sin x_0 + B\cos x_0,$$

$$A = 1 - \frac{\mu^2}{2}x_1^2 - \mu^3 x_1 x_2 + \ldots, \quad B = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots - \frac{\mu^3}{6}x_1^3 + \ldots.$$

566. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \mu x^2$.

◀ Представляя решение в виде ряда $x = x_0 + \mu x_1 + \ldots$ относительно функций $x_0, x_1 \ldots$, известным способом получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + x_0 = \sin 3t - \sin 2t, \\ &\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^2, \\ &\ddot{x}_2 + x_2 = 2x_0 x_1, \quad \ldots. \end{aligned} \tag{1}$$

Из первого уравнения системы (1) имеем:

$$x_0 = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 3t, \quad \ldots, \tag{2}$$

где A, B — постоянные интегрирования. Эти постоянные мы определим, исходя из требования, чтобы в правой части второго уравнения системы (1) отсутствовали так называемые резонирующие члены. В данном случае резонирующими членами будут функции $t \mapsto \sin t$, $\cos t$, поэтому в правой части

$$\begin{aligned} \left(A\cos t + B\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 3t\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{2} + \frac{A^2-B^2}{2}\cos 2t + \\ + \frac{1}{18} - \frac{\cos 4t}{18} + \frac{1}{128} - \frac{\cos 6t}{128} + AB\sin 2t + \frac{A}{3}(\sin 3t + \sin t) - \\ - \frac{A}{8}(\sin 4t + \sin 2t) - \frac{B}{8}(\cos 2t - \cos 4t) - \frac{1}{24}(\cos t - \cos 5t) + \frac{B}{3}(\cos t - \cos 3t) \end{aligned}$$

следует положить $A = 0$, $B = \frac{1}{8}$. Тогда из (2) получим

$$x_0(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \sin 3t) + \frac{1}{3}\sin 2t.$$

Аналогично находятся функции x_1 и т. д. ▶

В следующих задачах с помощью метода малого параметра приближенно найти периодические решения данных уравнений.

567. $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$.

◀ Поскольку правая часть от t явно не зависит, то, согласно п. 2.2, сначала сделаем замену

$$\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots),$$

где b_i, $i \in \mathbb{N}$ — постоянные, подлежащие определению. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right)^2 + x = \mu\left(\frac{dx}{d\tau}\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right) - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right)^3\right). \tag{1}$$

Далее, приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + x_1 = \dot{x}_0 - \dot{x}_0^3 - 2b_1\ddot{x}_0, \\ &\ddot{x}_2 + x_2 = b_1\dot{x}_0 - 2b_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 - 3b_1\dot{x}_0^3 - 3\dot{x}_0^2\dot{x}_1 - b_1^2\ddot{x}_0 - 2b_2\ddot{x}_0, \quad \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение первого уравнения

$$x_0(\tau) = A\cos(\tau + \varphi)$$

(A, φ — произвольные постоянные) подставляем во второе уравнение (3):

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -A\sin(\tau+\varphi)\left(1 - A^2\sin^2(\tau+\varphi)\right) + 2b_1 A\cos(\tau+\varphi) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}A^3 - A\right)\sin(\tau+\varphi) - \frac{A^3}{4}\sin 3(\tau+\varphi) + 2b_1 A\cos(\tau+\varphi). \qquad (4)$$

Поскольку мы ищем периодические нетривиальные решения, то в (4) должны положить

$$\frac{3}{4}A^3 - A = 0, \quad 2b_1 A = 0.$$

Отсюда следует, что $b_1 = 0$, $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. А тогда из уравнения (4) нетрудно найти, что

$$x_1(\tau) = A_1\cos(\tau+\varphi_1) + \frac{1}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi), \quad A_1,\ \varphi_1 \text{ — постоянные.}$$

Учитывая найденное, третье уравнение системы (3) представляем в виде:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \dot{x}_1 - 3\dot{x}_0^2\dot{x}_1 - 2b_2\ddot{x}_0 =$$

$$= -A_1\left(1 - 4\sin^2(\tau+\varphi)\right)\sin(\tau+\varphi_1) + \frac{4}{\sqrt{3}}b_2\cos(\tau+\varphi) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(1 - 4\sin^2(\tau+\varphi)\right)\cos 3(\tau+\varphi) =$$

$$= A_1\left(\sin(\tau+\varphi_1) + \sin(\tau-\varphi_1+2\varphi) - \sin(3\tau+2\varphi+\varphi_1)\right) +$$

$$+ \left(\frac{4b_2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\cos(\tau+\varphi) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\cos 5(\tau+\varphi) - \cos 3(\tau+\varphi)\right).$$

Отсюда видим, что условием отсутствия резонирующих членов является выполнение равенств:

$$A_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом,

$$x_1(\tau) = \frac{1}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi),$$

и

$$x(\tau,\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\tau+\varphi) + \frac{\mu}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi) + O(\mu^2), \quad \tau = t\left(1 - \frac{\mu^2}{16} + \dots\right). \blacktriangleright$$

568. $\ddot{x} + x = x^2$.

◀ Считая, что x мало, в качестве малого параметра возьмем амплитуду колебаний, являющихся решением уравнения $\ddot{x} + x = 0$. Полагая, для определенности, $x\big|_{t=0} = \mu$ (μ — малый параметр), периодическое решение данного уравнения ищем в виде:

$$x = \mu x_0(\tau) + \mu^2 x_1(\tau) + \mu^3 x_2(\tau) + \dots, \qquad (1)$$

где

$$\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \dots).$$

Подставив эти разложения в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad \ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\tau + 2b_1\cos\tau, \quad \ddot{x}_2 + x_2 = 2x_1\cos\tau + 2b_2\cos\tau, \quad \dots. \qquad (2)$$

Из первого уравнения с учетом начального условия находим

$$x_0(\tau) = \cos\tau.$$

Поскольку функция x_1 должна быть периодической, то в правой части второго уравнения системы (2) следует положить $b_1 = 0$. Тогда из этого уравнения нетрудно получить, что

$$x_1(\tau) = A\cos\tau + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2\tau.$$

Учитывая условие $x_1(0) = 0$, находим $A = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$x_1(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\tau - \frac{1}{6}\cos 2\tau.$$

Подставив значение $x_1(\tau)$ в правую часть третьего уравнения системы (2) и потребовав, чтобы она не содержала резонирующих членов, получаем

$$b_1 = -\frac{5}{12}, \quad x_2 = A - \frac{A}{3}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau.$$

Так как $x_2(0) = 0$, то $A = -\frac{1}{32}$. Поэтому

$$x_2 = -\frac{1}{32} + \frac{1}{96}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau.$$

Таким образом,

$$x = \mu\cos\tau + \mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\tau - \frac{1}{6}\cos 2\tau\right) + \mu^3\left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{96}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau\right) + \ldots;$$

$$\tau = t\left(1 - \frac{5}{12}\mu^2 + \ldots\right). \blacktriangleright$$

Примечание. Такой же результат получится, если проделать аналогичные выкладки для уравнения $\ddot{x} + x = \mu x^2$, а затем в решении положить $\mu = 1$.

§ 3. Численные методы решения дифференциальных уравнений

3.1. Метод Эйлера k-го порядка.

Для численного решения дифференциальной задачи

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

где

$$y = y(x) = \Big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)\Big), \quad f(x, y) = \Big(f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots\Big)$$

— достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции, отрезок интегрирования $[x_0, b]$ делят на равные части длиной $h = \frac{b - x_0}{n}$ и по значению $y(x_0 + lh) = y_l$ приближенно вычисляют $y\Big(x_0 + (l+1)h\Big) = y_{l+1}$ с помощью формулы

$$y_{l+1} = y_l + hy_l' + \frac{h^2}{2!}y_l'' + \ldots + \frac{h^k}{k!}y_l^{(k)}, \tag{2}$$

где

$$y_l' = f(x_l, y_l), \quad y_l'' = \frac{d}{dx}f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_l \\ y=y_l}} = \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial y}f(x_l, y_l),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}, \quad x_l = x_0 + lh, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Погрешность на шаге интегрирования $[x_l, x_{l+1}]$ имеет порядок $O(h^{k+1})$.

3.2. Метод Рунге—Кутта 4-го порядка.

Сначала определяются числа

$$\begin{aligned} k_{i1} &= f_i(x_l, y_{1l}, y_{2l}, \ldots, y_{ml}), \\ k_{i2} &= f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{11}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{21}}{2}, \ldots, y_{ml} + \frac{hk_{l1}}{2}\right), \\ k_{i3} &= f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{12}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{22}}{2}, \ldots, y_{ml} + \frac{hk_{l2}}{2}\right), \\ k_{i4} &= f_i\left(x_l + h, y_{1l} + hk_{13}, y_{2l} + hk_{23}, \ldots, y_{ml} + hk_{l3}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

а затем приближенные значения $y_{i,l+1}$ находятся по формуле

$$y_{i,l+1} = y_{i,l} + \frac{h}{6}\left(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}\right), \quad i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Погрешность на шаге интегрирования $[x_l, x_{l+1}]$ имеет порядок $O(h^5)$.

3.3. Метод Штермера.

Приближенное значение $y_{i,l+1}$ в задаче (1) ищется по одной из формул:

$$y_{i,l+1} = y_{il} + q_{il} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,l-1}, \tag{5}$$

$$y_{i,l+1} = y_{il} + q_{il} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,l-2}, \tag{6}$$

$$y_{i,l+1} = y_{il} + q_{il} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,l-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i,l-3}, \tag{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где

$$i = \overline{1, n}, \quad y_{il} = y_i(x_l), \quad x_l = x_0 + lh, \quad q_{il} = y_i'(x_l)h,$$

$$\Delta q_{i,l-1} = q_{il} - q_{i,l-1}, \quad \Delta^2 q_{i,l-2} = \Delta q_{i,l-1} - \Delta q_{i,l-2}, \quad \Delta^3 q_{i,l-3} = \Delta^2 q_{i,l-2} - \Delta^2 q_{i,l-3}.$$

Погрешность формул (5), (6), (7) на одном шаге интегрирования составляет $O(h^3)$, $O(h^4)$, $O(h^5)$ соответственно. Для начала интегрирования по формулам (5), (6), (7) требуется знать несколько первых значений $y_i(x_l)$, которые предварительно можно найти, использовав либо метод Эйлера, либо метод Рунге—Кутта, либо метод степенных рядов.

С помощью метода Эйлера k-го порядка найти приближенно на указанном отрезке решения следующих дифференциальных задач:

569. $y' = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y_0 = y(0) = 0{,}3$.

◀ Пусть $k = 2$, $h = 0{,}2$. Поскольку погрешность на каждом шаге имеет величину $O(h^3) \approx$ $\approx 0{,}008$, то вычисления по формуле (2), п. 3.1, будем вести с тремя знаками после запятой. Имеем:

$$y_{l+1} = y_l + hy_l' + \frac{h^2}{2}y_l'' = y_l + hf(x_l, y_l) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial y}f(x_l, y_l)\right) =$$

$$= y_l + h(x_l + y_l^2) + \frac{h^2}{2}\left(1 + 2y_l(x_l + y_l^2)\right), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4,$$

или

$$y_{l+1} = y_l + 0{,}2\left(0{,}2l + y_l^2\right) + 0{,}02\left(1 + 0{,}4ly_l + 2y_l^3\right).$$

Полагая здесь последовательно $l = 0, 1, \ldots$ и принимая во внимание начальное условие, получаем:

$$y_1 = 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}09 + 0{,}02(1 + 0{,}054) = 0{,}339;$$

$$y_2 = 0{,}339 + 0{,}2\left(0{,}2 + (0{,}339)^2\right) + 0{,}02\left(1 + 0{,}4 \cdot 0{,}339 + 2(0{,}339)^3\right) = 0{,}426;$$

$$y_3 = 0{,}426 + 0{,}2\left(0{,}4 + (0{,}426)^2\right) + 0{,}02\left(1 + 0{,}8 \cdot 0{,}426 + 2(0{,}426)^3\right) = 0{,}572;$$

$$y_4 = 0{,}572 + 0{,}2\left(0{,}6 + (0{,}572)^2\right) + 0{,}02\left(1 + 1{,}2 \cdot 0{,}572 + 2(0{,}572)^3\right) = 0{,}799;$$

$$y_5 = 0{,}799 + 0{,}2\left(0{,}8 + (0{,}799)^2\right) + 0{,}02\left(1 + 1{,}6 \cdot 0{,}799 + 2(0{,}799)^3\right) = 1{,}153. \blacktriangleright$$

570. $y' = \dfrac{x}{y} - y,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ y_0 = y(0) = 1.$

◀ Пусть $k = 1$, $h = 0{,}1$. Погрешность на шаге интегрирования имеет величину $O(h^2) \approx 0{,}01$, поэтому вычисления будем вести с двумя знаками после запятой. Согласно формуле Эйлера 1-го порядка имеем:

$$y_{l+1} = y_l + 0{,}1\left(\frac{x_l}{y_l} - y_l\right), \quad \text{или} \quad y_{l+1} = y_l + 0{,}1\left(\frac{0{,}1l}{y_l} - y_l\right),$$

$l = 0, 1, \ldots, 9$, откуда находим:

$$y_1 = y_0 - 0{,}1y_0 = 0{,}9y_0 = 0{,}9; \quad y_2 = y_1 + 0{,}1\left(\frac{0{,}1}{y_1} - y_1\right) = 0{,}9 + 0{,}1\left(\frac{1}{9} - 0{,}9\right) = 0{,}82;$$

$$y_3 = 0{,}9y_2 + \frac{0{,}02}{y_2} = 0{,}76; \quad y_4 = 0{,}9y_3 + \frac{0{,}03}{y_3} = 0{,}72; \quad y_5 = 0{,}9y_4 + \frac{0{,}04}{y_4} = 0{,}70;$$

$$y_6 = 0{,}9y_5 + \frac{0{,}05}{y_5} = 0{,}70; \quad y_7 = 0{,}9y_6 + \frac{0{,}06}{y_6} = 0{,}72; \quad y_8 = 0{,}74; \quad y_9 = 0{,}78; \quad y_{10} = 0{,}81. \blacktriangleright$$

571. $\dot{x} = t + 2x - y,\ \dot{y} = 1 - x + 2y;\ 0 \leqslant t \leqslant 0{,}5;\ x(0) = y(0) = 0.$

◀ Возьмем $h = 0{,}1$; $k = 2$ (метод Эйлера второго порядка). Вычисления ведем с тремя знаками после запятой. Согласно формуле (2), п. 3.1, имеем:

$$x_{l+1} = x_l + h\dot{x}_l + \frac{h^2}{2!}\ddot{x}_l = x_l + h(t_l + 2x_l - y_l) + \frac{h^2}{2}(1 + 2\dot{x}_l - \dot{y}_l) =$$

$$= x_l + h(t_l + 2x_l - y_l) + \frac{h^2}{2}\left(1 + 2(t_l + 2x_l - y_l) - (1 - x_l + 2y_l)\right) =$$

$$= h^2 l(1 + h) + \left(1 + 2h + \frac{5}{2}h^2\right)x_l - (h + 2h^2)y_l = 0{,}011l + 1{,}225x_l - 0{,}12y_l,$$

$$y_{l+1} = y_l + h\dot{y}_l + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_l = y_l + h(1 - x_l + 2y_l) + \frac{h^2}{2}(-\dot{x}_l + 2\dot{y}_l) =$$

$$= y_l + h(1 - x_l + 2y_l) + \frac{h^2}{2!}\left(-t_l - 2x_l + y_l + 2(1 - x_l + 2y_l)\right) =$$

$$= h\left(1 + \frac{h}{2}(2 - hl)\right) - (h + 2h^2)x_l + \left(2h + \frac{5}{2}h^2 + 1\right)y_l =$$

$$= 0{,}110 - 0{,}0005l - 0{,}12x_l + 1{,}225y_l, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда, учитывая иачальные условия, находим:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0{,}110;$$
$$x_2 = -0{,}002, \qquad y_2 = 0{,}244;$$
$$x_3 = -0{,}009, \qquad y_3 = 0{,}408;$$
$$x_4 = -0{,}027, \qquad y_4 = 0{,}609;$$
$$x_5 = -0{,}062, \qquad y_5 = 0{,}857. \blacktriangleright$$

С помощью метода Рунге—Кутта 4-го порядка вычислить приближенно решения следующих дифференциальных задач (вычисления вести с тремя знаками после запятой):

572. $y' = y^2 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$; $y(0) = 0{,}5$.

◀ Пусть $h = 0{,}1$. Тогда согласно п. 3.2 имеем:

$$k_{1l} = y_l^2 - x_l, \qquad k_{2l} = (y_l + 0{,}05k_{1l})^2 - x_l - 0{,}05,$$

$$k_{3l} = (y_l + 0{,}05k_{2l})^2 - x_l - 0{,}05, \qquad k_{4l} = (y_l + 0{,}1k_{3l})^2 - x_l - 0{,}1,$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{0{,}1}{6}\left(k_{1l} + 2k_{2l} + 2k_{3l} + k_{4l}\right), \quad x_l = 0{,}1l, \quad y_0 = 0{,}5, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда, последовательно полагая $l = 0, 1 \ldots$, получаем:

$$k_{10} = 0{,}25; \qquad k_{20} = (0{,}512)^2 - 0{,}05 = 0{,}212;$$

$$k_{30} = 0{,}210; \qquad k_{40} = (0{,}521)^2 - 0{,}1 = 0{,}171;$$

$$y_1 = 0{,}5 + \frac{0{,}1}{6}\left(0{,}25 + 0{,}424 + 0{,}420 + 0{,}171\right) = 0{,}521;$$

$$k_{11} = (0{,}521)^2 - 0{,}1 = 0{,}171; \qquad k_{21} = (0{,}53)^2 - 0{,}150 = 0{,}131;$$

$$k_{31} = (0{,}528)^2 - 0{,}150 = 0{,}129; \qquad k_{41} = (0{,}534)^2 - 0{,}2 = 0{,}085;$$

$$y_2 = 0{,}521 + \frac{0{,}1}{6}\left(0{,}171 + 0{,}262 + 0{,}256 + 0{,}085\right) = 0{,}534;$$

$$k_{12} = (0{,}534)^2 - 0{,}2 = 0{,}085; \qquad k_{22} = (0{,}538)^2 - 0{,}25 = 0{,}039;$$

$$k_{32} = (0{,}536)^2 - 0{,}25 = 0{,}037; \qquad k_{42} = (0{,}538)^2 - 0{,}3 = -0{,}011;$$

$$y_3 = 0{,}534 + \frac{0{,}1}{6}\left(0{,}085 + 0{,}078 + 0{,}074 - 0{,}011\right) = 0{,}538;$$

$$k_{13} = (0{,}538)^2 - 0{,}3 = -0{,}011; \qquad k_{23} = (0{,}538)^2 - 0{,}35 = -0{,}061;$$

$$k_{33} = (0{,}535)^2 - 0{,}35 = -0{,}064; \qquad k_{43} = (0{,}532)^2 - 0{,}4 = -0{,}117;$$

$$y_4 = 0{,}538 + \frac{0{,}1}{6}\left(-0{,}011 - 0{,}122 - 0{,}128 - 0{,}117\right) = 0{,}532;$$

$$k_{14} = (0{,}532)^2 - 0{,}4 = -0{,}117; \qquad k_{24} = (0{,}526)^2 - 0{,}45 = -0{,}173;$$

$$k_{34} = (0{,}521)^2 - 0{,}45 = -0{,}175; \qquad k_{44} = (0{,}515)^2 - 0{,}5 = -0{,}235;$$

$$y_5 = 0{,}532 + \frac{0{,}1}{6}\left(-0{,}117 - 0{,}346 - 0{,}350 - 0{,}235\right) = 0{,}515. \blacktriangleright$$

573. $y' = x^2 - y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; $y(1) = 1$.

◀ Пусть $h = 0{,}2$. Тогда, как и в предыдущем примере, имеем:

$$k_{1l} = x_l^2 - y_l^2, \qquad k_{2l} = (x_l + 0{,}1)^2 - (y_l + 0{,}1k_{1l})^2,$$

$$k_{3l} = (x_l + 0{,}1)^2 - (y_l + 0{,}1k_{2l})^2, \qquad k_{4l} = (x_l + 0{,}2)^2 - (y_l + 0{,}2k_{3l})^2;$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{1l} + 2k_{2l} + 2k_{3l} + k_{4l}\right), \quad x_l = 1 + 0{,}2l.$$

Полагая в этих равенствах последовательно $l = 0, 1, 2, 3, 4$, получаем:

$$k_{10} = x_0^2 - y_0^2 = 0; \qquad k_{20} = (1{,}1)^2 - 1 = 0{,}21;$$

$$k_{30} = (1{,}1)^2 - (1{,}021)^2 = 0{,}168; \qquad k_{40} = (1{,}2)^2 - (1{,}034)^2 = 0{,}371;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}\right) = 1 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}42 + 0{,}336 + 0{,}371\right) = 1{,}037;$$

$$k_{11} = x_1^2 - y_1^2 = (1{,}2)^2 - (1{,}037)^2 = 0{,}365; \qquad k_{21} = (1{,}3)^2 - (1{,}073)^2 = 0{,}538;$$

$$k_{31} = (1{,}3)^2 - (1{,}091)^2 = 0{,}500; \qquad k_{41} = 0{,}667;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}\right) = 1{,}037 + \frac{0{,}1}{6}\left(0{,}365 + 1{,}076 + 1{,}0 + 0{,}667\right) = 1{,}141;$$

$$k_{12} = x_2^2 - y_2^2 = (1{,}4)^2 - (1{,}141)^2 = 0{,}658; \qquad k_{22} = (1{,}5)^2 - (1{,}207)^2 = 0{,}793;$$

$$k_{32} = (1{,}5)^2 - (1{,}220)^2 = 0{,}761; \qquad k_{42} = (1{,}6)^2 - (1{,}293)^2 = 0{,}888;$$

$$y_3 = 1{,}141 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}658 + 1{,}586 + 1{,}522 + 0{,}888\right) = 1{,}296;$$

$$k_{13} = x_3^2 - y_3^2 = (1{,}6)^2 - (1{,}296)^2 = 0{,}880; \qquad k_{23} = (1{,}7)^2 - (1{,}384)^2 = 0{,}975;$$

$$k_{33} = (1{,}7)^2 - (1{,}393)^2 = 0{,}949; \qquad k_{43} = (1{,}8)^2 - (1{,}486)^2 = 1{,}032;$$

$$y_4 = 1{,}296 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}880 + 1{,}950 + 1{,}898 + 1{,}032\right) = 1{,}488;$$

$$k_{14} = x_4^2 - y_4^2 = (1{,}8)^2 - (1{,}488)^2 = 1{,}026; \qquad k_{24} = (1{,}9)^2 - (1{,}591)^2 = 1{,}079;$$

$$k_{34} = (1{,}9)^2 - (1{,}536)^2 = 1{,}063; \qquad k_{44} = 4 - (1{,}701)^2 = 1{,}109;$$

$$y_5 = 1{,}488 + \frac{0{,}1}{3}\left(1{,}026 + 2{,}158 + 2{,}126 + 1{,}109\right) = 1{,}702. \blacktriangleright$$

574. $y'' = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}6$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Вводя новую переменную $z(x) = y'(x)$, переходим к системе дифференциальных уравнений:

$$z' = xy, \quad z(0) = 0; \quad y' = z, \quad y(0) = 1; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Пусть $h = 0{,}2$, тогда, согласно методу Рунге—Кутта 4-го порядка, по формулам (3), (4), п. 3.2, получаем:

$$k_{1l} = x_l y_l, \qquad p_{1l} = z_l,$$

$$k_{2l} = (x_l + 0{,}1)(y_l + 0{,}1p_{1l}), \qquad p_{2l} = z_l + 0{,}1k_{1l},$$

$$k_{3l} = (x_l + 0{,}1)(y_l + 0{,}1p_{2l}), \qquad p_{3l} = z_l + 0{,}1k_{2l},$$

$$k_{4l} = (x_l + 0{,}2)(y_l + 0{,}2p_{3l}), \qquad p_{4l} = z_l + 0{,}2k_{3l},$$

$$z_{l+1} = z_l + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{1l} + 2k_{2l} + 2k_{3l} + k_{4l}\right), \quad y_{l+1} = y_l + \frac{0{,}1}{3}\left(p_{1l} + 2p_{2l} + 2p_{3l} + p_{4l}\right),$$

$$x_l = 0{,}2l, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0, \quad l = 0, 1, 2.$$

Отсюда, полагая последовательно $l = 0, 1, \ldots$ и учитывая начальные условия, находим:

$$k_{10} = 0, \qquad p_{10} = 0, \qquad k_{20} = 0{,}1, \qquad p_{20} = 0,$$

$$k_{30} = 0{,}1, \qquad p_{30} = 0{,}01, \qquad k_{40} = 0{,}2, \qquad p_{40} = 0{,}02,$$

$$z_1 = \frac{0{,}1}{3}(0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2) = 0{,}02, \quad y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{3}(0{,}02 + 0{,}02) = 1{,}001,$$

$$k_{11} = x_1 y_1 = 0{,}20, \qquad p_{11} = z_1 = 0{,}02,$$

$$k_{21} = (x_1 + 0{,}1)(y_1 + 0{,}1p_{11}) = 0{,}3 \cdot 1{,}003 = 0{,}30, \qquad p_{21} = z_1 + 0{,}1k_{11} = 0{,}04,$$

$$k_{31} = 0{,}3 \cdot 1{,}005 = 0{,}301, \qquad p_{31} = z_1 + 0{,}1k_{21} = 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}05,$$

$$k_{41} = (x_1 + 0{,}2)(y_1 + 0{,}2p_{31}) = 0{,}404, \qquad p_{41} = z_1 + 0{,}2k_{31} = 0{,}080,$$

$$z_2 = z_1 + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}\right) = 0{,}02 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}20 + 0{,}60 + 0{,}602 + 0{,}404\right) = 0{,}080,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0{,}1}{3}\left(p_{11} + 2p_{21} + 2p_{31} + p_{41}\right) = 1{,}001 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}10 + 0{,}08\right) = 1{,}010,$$

$k_{12} = x_2 y_2 = 0{,}4 \cdot 1{,}010 = 0{,}404,$ $\quad p_{12} = z_2 = 0{,}080,$

$k_{22} = (x_2 + 0{,}1)(y_2 + 0{,}1p_{12}) = 0{,}5 \cdot 1{,}018 = 0{,}509,$ $\quad p_{22} = z_2 + 0{,}1k_{12} = 0{,}080 + 0{,}1 \cdot 0{,}404 = 0{,}120,$

$k_{32} = (x_2 + 0{,}1)(y_2 + 0{,}1p_{22}) = 0{,}5 \cdot 1{,}022 = 0{,}511,$ $\quad p_{32} = z_2 + 0{,}1k_{22} = 0{,}080 + 0{,}1 \cdot 0{,}509 = 0{,}131,$

$k_{42} = (x_2 + 0{,}2)(y_2 + 0{,}2p_{32}) = 0{,}6 \cdot 1{,}036 = 0{,}622,$ $\quad p_{42} = z_2 + 0{,}2k_{32} = 0{,}080 + 0{,}2 \cdot 0{,}511 = 0{,}182,$

$$z_3 = z_2 + \frac{0{,}1}{3}\left(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}\right) = 0{,}080 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}404 + 1{,}018 + 1{,}022 + 0{,}622\right) = 0{,}182,$$

$$y_3 = y_2 + \frac{0{,}1}{3}\left(p_{12} + 2p_{22} + 2p_{32} + p_{42}\right) = 1{,}010 + \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}080 + 0{,}240 + 0{,}262 + 0{,}364\right) = 1{,}041. \blacktriangleright$$

В следующих задачах с помощью метода Штермера вычислить приближенно их решения. Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Для нахождения недостающих значений искомых функций использовать метод степенных рядов или метод Рунге—Кутта 4-го порядка.

575. $y' = y,\ 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5,\ y(0) = 1.$

◀ Применим формулу (5), п 3.3, взяв $h = 0{,}1$. Тогда

$$y_{l+1} = y_l + q_l + \frac{1}{2}\Delta q_{l-1} = y_l + hy_l' + \frac{h}{2}(y_l' + y_{l-1}') = y_l + hy_l + \frac{h}{2}(y_l - y_{l-1}) = 1{,}15y_l - 0{,}05y_{l-1}. \quad (1)$$

Для вычисления значения y_1 воспользуемся методом Рунге—Кутта. Имеем:

$$k_1 = y_0 = 1, \quad k_2 = y_0 + \frac{h}{2}k_1 = 1{,}05, \quad k_3 = y_0 + \frac{h}{2}k_2 = 1{,}052, \quad k_4 = y_0 + hk_3 = 1{,}105,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0{,}1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 1{,}105.$$

Поскольку погрешность на шаге составляет величину $O(h^5) \approx 10^{-5}$, то все знаки в выражении для y_1 можно считать верными. Далее, полагая в (1) последовательно $l = 1, 2, \ldots$ и учитывая найденное значение y_1, а также начальное условие $y_0 = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1{,}15y_1 - 0{,}05y_0 = 1{,}15 \cdot 1{,}105 - 0{,}05 = 1{,}221, \\ y_3 &= 1{,}15y_2 - 0{,}05y_1 = 1{,}15 \cdot 1{,}221 - 0{,}05 \cdot 1{,}105 = 1{,}349, \\ y_4 &= 1{,}15y_3 - 0{,}05y_2 = 1{,}15 \cdot 1{,}349 - 0{,}05 \cdot 1{,}221 = 1{,}490, \\ y_5 &= 1{,}15y_4 - 0{,}05y_3 = 1{,}15 \cdot 1{,}490 - 0{,}05 \cdot 1{,}349 = 1{,}649. \end{aligned} \quad (2)$$

Погрешность этих результатов имеет величину $O(h^3)$, т. е. можно считать, что в каждом из равенств (2) два знака после запятой верны. ▶

576. $y' = \dfrac{x^2}{x + y},\ 1 \leqslant x \leqslant 1{,}5,\ y(1) = 0.$

◀ Применяя формулу (6), п. 3.3, выбрав шаг интегрирования $h = 0{,}1$,

$$y_{l+1} = y_l + q_l + \frac{1}{2}\Delta q_{l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{l-2}, \quad (1)$$

где

$$q_l = 0{,}1\,\frac{x_l^2}{x_l + y_l}, \quad \Delta q_{l-1} = q_l - q_{l-1}, \quad \Delta^2 q_{l-2} = \Delta q_{l-1} - \Delta q_{l-2}, \quad (2)$$

$x_l = 1 + 0{,}1l,\ y_0 = 0,\ l = 2, 3, 4$. Недостающие значения y_1 и y_2 мы вычислим, использовав метод степенных рядов. С этой целью найдем $y'(1),\ y''(1),\ y'''(1), \ldots$, исходя из данного уравнения.

Имеем:

$$y'(1) = 1,$$

$$y''(x) = \frac{(x+y)(x^2+2xy) - x^4}{(x+y)^3}, \qquad y''(1) = 0,$$

$$y'''(x) = \frac{(2x+2y-x^2y'')(x+y) - 2(1+y')(x^2+2xy-x^2y')}{(x+y)^3}, \qquad y'''(1) = 2, \quad \ldots$$

Поэтому по формуле Тейлора,

$$y(x) = x - 1 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + O\left((x-1)^4\right). \tag{3}$$

Отсюда находим

$$y_1 = y(1{,}1) \approx 0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} = 0{,}100, \quad y_2 = y(1{,}2) \approx 0{,}2 + 0{,}003 = 0{,}203.$$

Заметим, что погрешность формулы (1) на шаге интегрирования составляет величину $O(h^4)$, поэтому в формуле Тейлора (3) мы взяли только три первых члена разложения.

Далее, полагая в формулах (2) $l = 2$, получаем:

$$q_2 = \frac{0{,}1x_2^2}{x_2+y_2} = 0{,}103, \quad \Delta q_1 = q_2 - q_1, \quad \Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0,$$

где

$$q_1 = \frac{0{,}1x_1^2}{x_1+y_1} = 0{,}101, \quad q_0 = \frac{0{,}1x_0^2}{x_0+y_0} = 0{,}1.$$

Следовательно, $\Delta q_1 = 0{,}002$, $\Delta q_0 = 0$, $\Delta^2 q_0 = 0{,}002$, а из (1) находим $y_3 = 0{,}309$. Аналогично при $l = 3$ имеем

$$q_3 = \frac{0{,}1x_3^2}{x_3+y_3} = 0{,}105, \quad \Delta q_2 = q_3 - q_2 = 0{,}002, \quad \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1 = 0,$$

$$y_4 = y_3 + q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 = 0{,}415.$$

Наконец, при $l = 4$ из формул (1), (2) с учетом уже имеющихся величин получаем:

$$q_4 = \frac{0{,}1x_4^2}{x_4+y_4} = 0{,}108, \quad \Delta q_3 = q_4 - q_3 = 0{,}003, \quad \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2 = 0{,}001,$$

$$y_5 = y_4 + q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 = 0{,}525. \blacktriangleright$$

577. $xy'' + y' + xy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Вводя новую переменную $z = y'$, приходим к задаче:

$$y' = z, \quad y(0) = 1, \quad z' = -y - \frac{z}{x}, \quad z(0) = 0.$$

Применяем формулу (5), п. 3.3, и выбираем шаг $h = 0{,}1$. Имеем:

$$y_{l+1} = y_l + 0{,}1p_l + 0{,}05\Delta p_{l-1}, \quad z_{l+1} = z_l + 0{,}1q_l + 0{,}05\Delta q_{l-1}, \tag{1}$$

где

$$p_l = z_l, \quad q_l = -y_l - \frac{z_l}{x_l}, \quad \Delta p_{l-1} = p_l - p_{l-1}, \quad \Delta q_{l-1} = q_l - q_{l-1},$$

$$x_l = 0{,}1l, \quad l = \overline{0,9}, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0. \tag{2}$$

Для начала счета нам нужно иметь значения $y(0{,}1) = y_1$, $z(0{,}1) = z_1 = y'(0{,}1)$, а также (в силу неопределенности $\frac{0}{0}$) q_0. Все эти величины мы найдем, обратившись к методу степенных рядов. Ищем решение данной задачи в виде

$$y(x) = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots. \tag{3}$$

Подставляя ряд (3) в рассматриваемое уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = 0, \quad \ldots.$$

Следовательно,

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \ldots.$$

Отсюда находим

$$y_1 = y(0{,}1) = 0{,}998, \quad z_1 = y'(0{,}1) = -0{,}05, \quad q_0 = y''(0) = -0{,}5.$$

Далее считаем по формулам (1), (2). Полагая в них $l = 1, 2, \ldots$, последовательно заполняем следующую таблицу:

l	x_l	y_l	z_l	p_l	q_l	Δp_{l-1}	Δq_{l-1}
0	0,0	1	0	0	−0,500		
1	0,1	0,998	−0,050	−0,050	−0,498	−0,050	0,002
2	0,2	0,991	−0,100	−0,100	−0,491	−0,050	0,007
3	0,3	0,983	−0,149	−0,149	−0,486	−0,049	0,005
4	0,4	0,966	−0,197	−0,197	−0,476	−0,048	0,010
5	0,5	0,944	−0,244	−0,244	−0,456	−0,047	0,020
6	0,6	0,918	−0,289	−0,289	−0,438	−0,045	0,018
7	0,7	0,889	−0,332	−0,332	−0,419	−0,044	0,019
8	0,8	0,854	−0,373	−0,373	−0,394	−0,041	0,025
9	0,9	0,815	−0,411	−0,411	−0,359	−0,038	0,035
10	1,0	0,772					

▶

Упражнения для самостоятельной работы

Построить решения следующих задач Коши, используя разложения в степенные ряды:
1. $y' = x + y$, $y(0) = 1$. **2.** $y' = xy$, $y(0) = 1$. **3.** $y' = x - 2xy$, $y(0) = 3$.
4. $y'' = xy' - y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. **5.** $y''' = -x^2y'' + y' + 2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Построить приближенные решения в виде многочлена четвертой степени:
6. $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$. **7.** $y' = xe^y + y$, $y(0) = 0$. **8.** $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1$.
9. $y'' = x - y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. **10.** $y''' = y''^2 + y' + y - x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

Построить приближенные решения следующих краевых задач:
11. $y' = x^2 - y^2$, $y(1) + y(2) = 1$, $1 < x < 2$. **12.** $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) - 4y(1) = 5$, $0 < x < 1$.
13. $y'' = xy' + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 2$, $0 < x < 1$. **14.** $y'' = y'^2 + y$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{4}{3}$, $1 < x < 2$.

Построить приближенные решения в виде многочлена третьей степени относительно малого параметра μ для следующих задач Коши:
15. $y' = \frac{2}{y} - 5\mu x$, $y(1) = 2$. **16.** $y' = \frac{6\mu}{x} + y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$. **17.** $y' = \mu x^3 + y^2$, $y(0) = e^{-\mu}$.
18. $y' = 1 + x + \mu y^3$, $y(0) = \sin\mu$. **19.** $y' = \cos x + \mu\ln(1 + y)$, $y(0) = \mu$.
20. $y' = \sin x + \mu e^y$, $y(0) = 1 - \mu$.

Построить асимптоты интегральных кривых следующих уравнений (ε — малый параметр, $x \to +\infty$):
21. $\varepsilon y' = 1 - y^2$. **22.** $\varepsilon y' = x^2 - y^2$. **23.** $\varepsilon y' = y^2 - (1 + x)^2$. **24.** $\varepsilon y' = 1 - y^3$. **25.** $\varepsilon y' = x^3 - y^3$.

Глава 6

Устойчивость и фазовые траектории

§ 1. Устойчивость

1.1. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

имеет при $t \in [t_0, +\infty)$ решения $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Определение 1. *Решение $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ дифференциальной задачи (1), (2) называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ этой же задачи, удовлетворяющего неравенству*

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon), \tag{3}$$

$\forall t > t_0$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \tag{4}$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма вектора.

Геометрически это определение означает, что близкие в начальный момент времени траектории $x(t)$ и $\varphi(t)$ остаются близкими $\forall t \geqslant t_0$.

Чаще всего используются следующие нормы:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2}, \quad \|x(t)\| = \max_k |x_k(t)|, \quad \|x(t)\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)|. \tag{5}$$

Определение 2. *Если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists t > t_0$ такое, что из неравенства (3) не следует неравенство (4), то решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым в смысле Ляпунова.*

Определение 3. *Если решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0, \tag{6}$$

то оно называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения $\varphi(t)$ может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения (точки покоя) с помощью замены $y = x - \varphi(t)$.

1.2. Исследование на устойчивость по первому приближению: первая теорема Ляпунова.

Первая теорема Ляпунова. *Пусть система*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + g_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ik} = \text{const}, \tag{7}$$

где функции g_i удовлетворяют условию

$$|g_i| \leqslant \alpha_i(x)\|x\|, \tag{8}$$

$\alpha_i(x) \to 0$ при $\|x\| \to 0$, $i = \overline{1, n}$, имеет тривиальное решение. Тогда: если собственные значения λ матрицы $A = (a_{ik})$ имеют отрицательные действительные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), *то тривиальное решение системы* (7) *асимптотически устойчиво; если же хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть* ($\operatorname{Re}\lambda > 0$), *то тривиальное решение неустойчиво.*

1.3. Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова: вторая теорема Ляпунова.

Вторая теорема Ляпунова. *Если существует дифференцируемая функция*

$$v = v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

называемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая в окрестности точки $x = 0$ следующим условиям:

1) $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ *при* $t \geqslant t_0$, *где непрерывная функция W имеет строгий минимум в точке $x = 0$, причем $v(t, 0, \ldots, 0) = W(0, \ldots, 0) = 0$;*

2) *полная производная*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0,$$

то тривиальное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ устойчиво.

Если же вместо условия 2) *выполняется неравенство*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant -\beta < 0$$

при $t \geqslant t_1 > t_0$ и $0 < \delta_1 \leqslant \|x\| \leqslant \delta_2$, где $\delta_1, \delta_2, \beta$ — постоянные, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Теорема Четаева о неустойчивости. *Пусть*:

1) *система* (1) *обладает тривиальным решением*;

2) *в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^n$ существует дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*;

3) *точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ принадлежит границе области V*;

4) *$\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $v = 0$ на той части границы области V, где $\|x\| \leqslant \varepsilon_0$*;

5) *в области V выполняется неравенство $v > 0$, а при $t > t_0$ также и неравенство*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \geqslant w(x) > 0, \quad x \in V,$$

где функция w непрерывна.

Тогда тривиальное решение системы (1) *неустойчиво.*

1.4. Условия отрицательности всех действительных частей корней уравнения $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, $a_0 > 0$, с действительными коэффициентами.

Необходимым условием отрицательности всех действительных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \tag{9}$$

являются неравенства $a_i > 0$, $i = \overline{0, n}$.

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

получаемая заменой чисел a_i с индексами $i > n$ или $i < 0$ нулями, называется ***матрицей Гурвица.***

Критерий Рауса—Гурвица. *Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (9) необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots. \tag{11}$$

Критерий Льенара—Шипара. *Необходимо и достаточно, чтобы все* $a_i > 0$ *и чтобы* $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0, \ldots$.

Критерий Михайлова. *Необходимо и достаточно, чтобы* $a_n a_{n-1} > 0$ *и чтобы корни многочленов*

$$\begin{aligned} p(\xi) &= a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots, \\ q(\eta) &= a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

удовлетворяли неравенствам:

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots. \tag{13}$$

Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения следующих дифференциальных задач:

578. $\dot{x} = 4x - t^2 x, \ x(0) = 0.$

◀ Очевидно, $\varphi(t) \equiv 0$ является решением данной задачи. Разделяя переменные и интегрируя, находим все другие решения:

$$x(t) = C \exp\left(4t - \frac{t^3}{3}\right).$$

Далее, согласно определению 1 из п. 1.1, имеем:

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| = |x(0) - \varphi(0)| = |C|, \quad \|x(t) - \varphi(t)\| = |x(t) - \varphi(t)| = |x(t)| = |C| e^{4t - \frac{t^3}{3}}.$$

Пусть любое $\varepsilon > 0$ задано. Тогда ясно, что из неравенства (3) будет следовать неравенство (4) (см. п. 1.1), если в данном случае в качестве числа $\delta(\varepsilon)$ взять $\frac{\varepsilon}{M}$, $M = \max\limits_{t \geqslant 0} e^{4t - \frac{1}{3}t^3} = e^{\frac{16}{3}}$, т. е. $\delta(\varepsilon) = \varepsilon e^{-\frac{16}{3}}$. Таким образом, решение $\varphi(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Кроме того, поскольку

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} C \exp\left(4t - \frac{t^3}{3}\right) = 0,$$

то согласно определению 3, п. 1.1, заключаем, что это решение асимптотически устойчиво. ▶

579. $3(t-1)\dot{x} = x, \ x(2) = 0.$

◀ Здесь функция $\varphi = \varphi(t) \equiv 0$ есть решение задачи, которое требуется исследовать на устойчивость. Все другие решения данного уравнения описываются формулой

$$x(t) = C(t-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Далее, пусть $\delta > 0$ задано. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда, несмотря на выполнение неравенства

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| = |x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x(t_0)| = |C| < \delta,$$

все равно имеем неравенство

$$\|x(t) - \varphi(t)\| = \|x(t)\| = |x(t)| = |C|(t-1)^{\frac{1}{3}} > 1$$

при $t > 1 + \frac{1}{|C|^3}$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. ▶

580. $\dot{x}_1 = -x_1, \ \dot{x}_2 = -2x_2; \ x_1(0) = x_2(0) = 0.$

◀ Очевидно, нужно исследовать на устойчивость нулевое решение $\varphi_1(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv 0$. Интегрируя систему, получаем $x_1 = C_1 e^{-t}$, $x_2 = C_2 e^{-2t}$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Найдем $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства

$$\|x(0) - \varphi(0)\| = \sqrt{(x_1(0) - \varphi_1(0))^2 + (x_2(0) - \varphi_2(0))^2} < \delta$$

следует неравенство

$$\sqrt{(x_1(t)-\varphi_1(t))^2+(x_2(t)-\varphi_2(t))^2}<\varepsilon$$

$\forall t>0$ одновременно. Поскольку из неравенства

$$C_1^2+C_2^2<\delta^2$$

следует

$$C_1^2e^{-2t}+C_2^2e^{-4t}\leqslant C_1^2+C_2<\delta^2,$$

то при $t>0$ для произвольного $\varepsilon>0$, полагая $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, получаем

$$\|x(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon \quad \text{при} \quad \|x(0)-\varphi(0)\|<\delta.$$

Поэтому согласно определению нулевое решение устойчиво. Более того, так как

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)-\varphi(t)\|=0,$$

то это решение устойчиво асимптотически. ▶

581. $\dot{x}=-y,\ \dot{y}=2x^3;\ x(0)=y(0)=0.$

◀ Разделив второе уравнение на первое и проинтегрировав, получаем семейство траекторий движения материальной точки на плоскости Oxy:

$$y^2+x^4=C,$$

где C — произвольный параметр. Для исследования на устойчивость материальной точки, находящейся в покое в начале координат, с помощью произвольно малого возмущения переведем ее из точки (0, 0) в точку с координатами $x=x_0,\ y=y_0$. Тогда из полученного семейства решений следует, что материальная точка будет двигаться по траектории

$$x^4+y^2=x_0^4+y_0^2.$$

Поскольку эта траектория замкнута и при достаточно малых x_0, y_0 не выходит за пределы круга радиуса $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ ($y_0^2+x_0^4\leqslant y_0^2+x_0^2$ при $|x_0|\leqslant 1$), то точка покоя (0, 0) устойчива (асимптотической устойчивости нет). ▶

582. $\dot{x}=-y\cos x,\ \dot{y}=\sin x;\ x(0)=y(0)=0.$

◀ Аналогично проделанному в предыдущем примере имеем:

$$\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\cos x=\exp\left(-\frac{y_0^2}{2}\right)\cos x_0,$$

где $|x_0|\leqslant\delta<\frac{\pi}{2}$, $|y_0|\leqslant\delta$. Составив функцию Лагранжа

$$L=x^2+y^2-\lambda\left(\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\cos x-C\right)$$

(λ — постоянная, $C=\exp\left(-\frac{y_0^2}{2}\right)\cos x_0$) и исследовав ее обычным способом на экстремум, убеждаемся, что функция $\varphi=\varphi(x,y)=x^2+y^2$ (квадрат расстояния от начала координат) принимает экстремальные значения в точках $(0, y_1)$ и $(x_1, 0)$ (заметим, что исследуемая кривая симметрична относительно координатных осей, поэтому считаем, что $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$). Легко найти, что

$$y_1=\sqrt{\ln\frac{1}{C^2}},\quad x_1=\arccos C.$$

Так как $C\to 1$ при $x_0^2+y_0^2\to 0$, то $x_1\to 0$, $y_1\to 0$. Следовательно, точка покоя устойчива, поскольку сколь угодно малым возмущениям соответствуют замкнутые траектории, вкладывающиеся в круги сколь угодно малого радиуса). ▶

583. Траектории системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

изображены на фазовой плоскости (рис. 29). Что можно сказать о поведении решений при $t \to +\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?

◀ Как видно из рис. 29, все решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$, так как все траектории входят в начало координат. Далее, пусть выполняется неравенство $|y(t_0)| < \delta$ (в данном случае $\varphi(t) \equiv 0$), где $\delta > 0$ может быть сколь угодно малым числом. Тогда, взяв момент времени $t = t_2$, имеем:

$$|y(t_2)| > |y(t_1)| = \varepsilon_0 > 0,$$

где ε_0 уменьшено быть не может. Следовательно, нулевое решение не является устойчивым по Ляпунову. Наконец, поскольку оно неустойчиво по Ляпунову, то его нельзя считать и асимптотически устойчивым, хотя $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. ▶

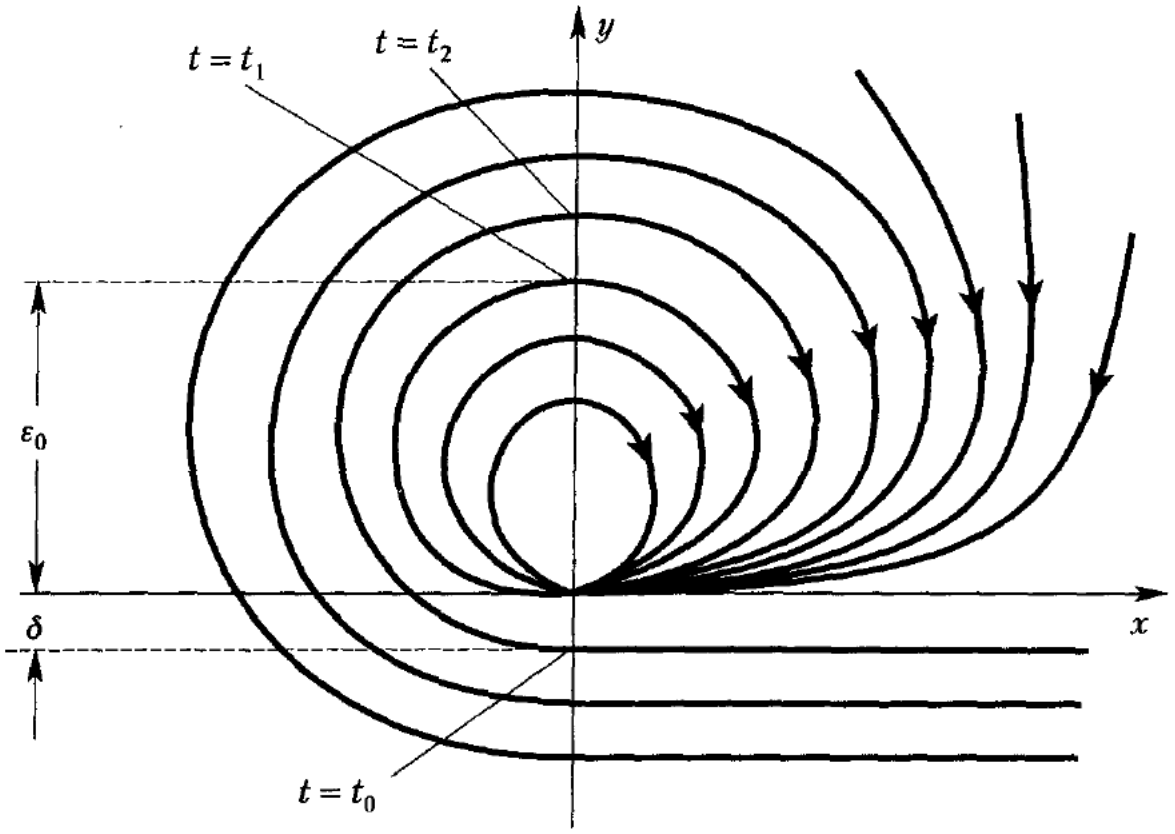


Рис. 29

В следующих задачах выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно, что общее решение этой системы имеет указанный вид.

584. $x_1(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}$, $x_2(t) = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2$.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ задано, t_0 — произвольный момент времени. По заданному ε найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| = \sqrt{(x_1(t_0) - \varphi_1(t_0))^2 + (x_2(t_0) - \varphi_2(t_0))^2} < \delta$$

вытекало бы неравенство

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Положив для простоты $t_0 = 0$, имеем:

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| = \|x(t_0)\| = \left((C_1 \cos^2 t_0 - C_2 e^{-t_0})^2 + (C_1 t_0^4 e^{-t_0} + 2C_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{(C_1 - C_2)^2 + 4C_2^2} \leqslant \sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + 4C_2^2} < \delta; \qquad (1)$$

$$\|x(t) - \varphi(t)\| = \|x(t)\| = \sqrt{(C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t})^2 + (C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + (256|C_1|e^{-4} + 2|C_2|)^2}. \qquad (2)$$

Но, как следует из (1), $|C_1| < \delta$, $|C_2| < \delta$, поэтому оценку (2) можно продолжить следующим образом:

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{4\delta^2 + (256e^{-4} + 2)^2\delta^2} = \sqrt{4 + (256e^{-4} + 2)^2}\,\delta.$$

Отсюда следует, что если возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4 + (256e^{-4} + 2)^2}},$$

то получим неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ $\forall t > 0$ одновременно. Таким образом, согласно определению, нулевое решение устойчиво по Ляпунову. ▶

585. $x_1(t) = (C_1 - C_2 t)e^{-t}$, $x_2(t) = \dfrac{C_1\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)} + C_2$.

◀ Из равенства

$$\|x(t_0)\| = \sqrt{(C_1 - C_2 t_0)^2 e^{-2t_0} + \left(\frac{C_1\sqrt[3]{t_0}}{\ln(t_0^2+2)} + C_2\right)^2}$$

следует, что если $C_1^2 + C_2^2 \to 0$, то $\|x(t_0)\| \to 0$. Далее, так как

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)} = +\infty,$$

то, какими бы малыми ни взять $|C_1| \neq 0$ и $|C_2|$, найдется такое $t_1 > 0$, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство:

$$\|x(t_1)\| = \left((C_1 - C_2 t_1)^2 e^{-2t_1} + \left(\frac{C_1\sqrt[3]{t_1}}{\ln(2+t_1^2)} + C_2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon.$$

Поэтому, согласно определению, нулевое решение неустойчиво. ▶

586. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

◀ Пусть решение $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))$ — $n \times n$-матрица, а $x(t)$ и $f(t)$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$, устойчиво по Ляпунову. Тогда, положив $x(t) = \varphi(t) + \varepsilon(t)$, из данной системы получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\varepsilon \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} \equiv A\varphi + f\right). \tag{1}$$

Так как решение $\varphi(t)$ устойчиво, то нулевое решение системы (1) также устойчиво. Далее, пусть $\psi(t)$ — любое решение данной системы. Тогда аналогично проделанному выше относительно малого возмущения $\delta(t)$ (отклонения от решения $\psi(t)$) получаем систему

$$\frac{d\delta}{dt} = A\delta,$$

нулевое решение которой устойчиво. Следовательно, все решения данной системы устойчивы по Ляпунову. ▶

587. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы остается ограниченным при $t \to +\infty$, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

◀ Пусть Y — интегральная матрица системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{*}$$

т. е.

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad Y(t_0) = E.$$

Тогда все решения системы (*) представляются в виде $X = YC$ (C — произвольный постоянный вектор). В силу ограниченности каждого решения системы (*) справедливо неравенство $\|Y\| \leqslant M$ (M — постоянная, $M \neq 0$). Следовательно,

$$\|X\| \leqslant \|Y\|\,\|C\| \leqslant M\|C\|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, из неравенства $\|x(t_0)\| = \|C\| < \delta$ получаем неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant M\|C\| \leqslant M\delta = \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0. \blacktriangleright$$

588. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$ при условии, что $a_{11}(t) + a_{22}(t) \to b > 0$ при $t \to +\infty$.

◀ Воспользовавшись формулой Остроградского, имеем:

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}(a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau))\,d\tau\right) \tag{1}$$

(считаем, что a_{ij} — непрерывные на $(t_0, +\infty)$ функции). Из (1) в силу условия $a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau) \to b > 0$ при $\tau \to +\infty$ следует, что $|W(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$. А тогда одно из решений $x_{11}(t)$, $x_{12}(t)$, $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$, образующих фундаментальную систему, как вытекает из соотношения $W(t) = x_{11}(t)x_{22}(t) - x_{12}(t)x_{21}(t)$, при $t \to +\infty$ не ограничено. Следовательно, решения данной системы

$$x_1(t) = x_{11}C_1 + x_{12}C_2, \quad x_2(t) = x_{21}C_1 + x_{22}C_2$$

при $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ и $t \to +\infty$ будут также неограниченными, что указывает на неустойчивость нулевого решения рассматриваемой системы. ▶

В задачах 589–593 с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение.

589. $\dot{x}_1 = 2x_1x_2 - x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 + 5x_1^4 + x_2^5$.

◀ Поскольку для нелинейных членов $g_1(t, x_1, x_2) = 2x_1x_2$, $g_2(t, x_1, x_2) = 5x_1^4 + x_2^5$ справедливы оценки:

$$|g_1| = 2|x_1x_2| \leqslant x_1^2 + x_2^2 = \alpha_1(x_1, x_2)\|X\|, \quad |g_2| = |5x_1^4 + x_2^5| \leqslant \alpha_2(x_1, x_2)\|X\|,$$

где

$$\alpha_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \alpha_2(x_1, x_2) = \frac{5x_1^4 + |x_2|^5}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \alpha_1 \to 0, \quad \alpha_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \|X\| \to 0,$$

то согласно указанной теореме будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2.$$

Составив и решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 1; \quad \lambda_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{3},$$

видим, что $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Следовательно, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво. ▶

590. $\dot{x}_1 = \ln\left(4x_2 + e^{-3x_1}\right)$, $\dot{x}_2 = 2x_2 - 1 + (1 - 6x_1)^{\frac{1}{3}}$.

◀ Для выделения линейных членов разложим правые части данных уравнений, пользуясь формулой Маклорена:

$$\ln(4x_2 + e^{-3x_1}) = \ln\left(4x_2 + 1 - 3x_1 + \frac{9}{2}x_1^2 + o(x_1^2)\right) = -3x_1 + 4x_2 - 8x_2^2 + 12x_1x_2 + o(x_1^2 + x_2^2);$$

$$2x_2 - 1 + (1 - 6x_1)^{\frac{1}{3}} = 2x_2 - 1 + \left(1 - 2x_1 - 4x_1^2\right) + o(x_1^2 + x_2^2) = 2x_2 - 2x_1 - 4x_1^2 + o(x_1^2 + x_2^2).$$

Поскольку

$$|g_1| = \left|-8x_2^2 + 12x_1x_2 + o(x_1^2 + x_2^2)\right| \leqslant 16\left|x_1^2 + x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)\right| = \alpha_1(x_1, x_2)\|X\|,$$

$$|g_2| = \left|-4x_1^2 + o(x_1^2 + x_2^2)\right| \leqslant 4\left|x_1^2 + x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)\right| = \alpha_2(x_1, x_2)\|X\|,$$

где

$$\alpha_1(x_1, x_2) = 16\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + o\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \quad \alpha_2(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + o\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

и

$$\alpha_1 \to 0, \quad \alpha_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \|X\| \to 0,$$

то можно применять первую теорему Ляпунова, т. е. исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2.$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, где $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, то налицо асимптотическая устойчивость. ►

591. $\dot{x}_1 = \operatorname{tg}(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = 2^{x_2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x_1\right).$

◄ Пользуясь формулой Маклорена, выделяем линейную часть в каждой из правых частей данных уравнений:

$$\operatorname{tg}(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 + o(x_1^2 + x_2^2),$$

$$2^{x_2} - 2\cos\left(\tfrac{\pi}{3} - x_1\right) = 1 + x_2\ln 2 + \frac{x_2^2}{2}\ln^2 2 + o(x_2^2) - 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3}\cdot\left(1 - \frac{x_1^2}{2} + o(x_1^2)\right) + \sin\tfrac{\pi}{3}\cdot\left(x_1 + o(x_1^2)\right)\right) =$$

$$= -\sqrt{3}x_1 + x_2\ln 2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\ln^2 2\right) + o(x_1^2 + x_2^2).$$

Поэтому соответствующая линейная система запишется в виде:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2\ln 2 - \sqrt{3}x_1.$$

Характеристическое уравнение полученной системы $\lambda^2 + \lambda(1 - \ln 2) + \sqrt{3} - \ln 2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2}$, где $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, т. о., нулевое решение асимптотически устойчиво. ►

592. $\dot{x}_1 = e^{x_1} - e^{-3x_3}, \ \dot{x}_2 = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2), \ \dot{x}_3 = \ln(1 + x_3 - 3x_1).$

◄ Как и в предыдущих примерах, пользуясь формулой Маклорена, представляем правые части в виде:

$$e^{x_1} - e^{-3x_3} = x_1 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{9}{2}x_3^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 4x_3 - 3(x_1 + x_2) + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\ln(1 + x_3 - 3x_1) = x_3 - 3x_1 - \frac{1}{2}(x_3 - 3x_1)^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Далее, исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_3, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2 + 4x_3, \quad \dot{x}_3 = -3x_1 + x_3.$$

Корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{суть} \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 3i.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) > 0$, то по первой теореме Ляпунова нулевое решение данной системы неустойчиво. ►

593. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3, \ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 3x_3, \ \dot{x}_3 = x_1 - 5x_2 - 3x_3.$

◄ Поскольку один из корней характеристического уравнения

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

удовлетворяет неравенствам $3 < \lambda < 4$ ($F(3) > 0$, $F(4) < 0$), то нулевое решение неустойчиво. ►

594. При каких действительных значениях a точка покоя $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ системы $\dot{x}_1 = ax_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = ax_2 - x_3,\ \dot{x}_3 = ax_3 - x_1$ устойчива?

◀ Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3 - 1 = 0$$

получаем $\lambda_1 = a-1$, $\lambda_2 = a+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = a+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из условия $a-1<0 \wedge a+\frac{1}{2}<0$ находим те значения a, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво: $a < -\frac{1}{2}$. Далее, если $a > -\frac{1}{2}$, то $\operatorname{Re}\lambda_{2,3} > 0$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. Наконец, если $a = -\frac{1}{2}$, то $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_{2,3} = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, и общее решение данной системы будет линейно выражаться через функции

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{3}{2}t\right), \quad \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Таким образом, мы имеем неасимптотическую устойчивость (вообще говоря, в некоторой окрестности точки покоя будет наблюдаться колебательный процесс). ▶

В задачах 595–597 исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение.

595. $\dot{x}_1 = ax_1 - 2x_2 + x_1^2,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

◀ Поскольку $x_1^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 = \alpha_1(x_1, x_2)\|X\|$, $|x_1x_2| \leqslant \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \alpha_2(x_1, x_2)\|X\|$, $\alpha_1(x_1, x_2) = 2\alpha_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|X\| \to 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \to 0$, то пользуемся первой теоремой Ляпунова (см. п. 1.2). Для асимптотической устойчивости, согласно указанной теореме, нужно потребовать, чтобы $\operatorname{Re}\lambda < 0$, где λ удовлетворяет характеристическому уравнению соответствующей линейной системы:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+1) + a + 2 = 0.$$

Из выражения для корней видим, что $\operatorname{Re}\lambda < 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\frac{a+1}{2} < 0 \ \wedge\ D \leqslant 0 \ \vee D \geqslant 0 \ \wedge\ \sqrt{D} + \frac{a+1}{2} < 0, \quad \text{где} \quad D = \frac{(a+1)^2}{4} - a - 2.$$

Отсюда следует, что $-2 < a < -1$. ▶

596. $\dot{x}_1 = x_1 + ax_2 + x_2^2,\ \dot{x}_2 = bx_1 - 3x_2 - x_1^2$.

◀ Легко видеть, что исследование на асимптотическую устойчивость нулевого решения данной системы сводится к выявлению условий, при которых $\operatorname{Re}\lambda < 0$, где λ — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ b & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - ab = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4+ab}.$$

Ясно, что при $ab + 4 \leqslant 0$ либо при $ab + 4 \geqslant 0$ и $\sqrt{ab+4} < 1$ будет $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Решив последние неравенства, окончательно имеем: $ab < -3$. ▶

597. $\dot{x}_1 = \ln(e + ax_1) - e^{x_2},\ \dot{x}_2 = bx_1 + \operatorname{tg} x_2$.

◀ Предварительно разложив правые части уравнений в ряд Маклорена и отбросив нелинейные члены, будем исследовать на асимптотическую устойчивость линейную систему:

$$\dot{x}_1 = \frac{a}{e}x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = bx_1 + x_2.$$

Корни характеристического уравнения этой системы суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}+1\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{e}+1\right)^2 - b}.$$

Отсюда следует, что неравенства $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ будут выполняться, если

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}+1\right)<0 \wedge b \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a}{e}+1\right)^2\right) \vee \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}+1\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{e}+1\right)^2-b}<0 \wedge b \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a}{e}+1\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < -e \wedge b > 0. \blacktriangleright$$

598. Исследовать, устойчиво ли решение $x_1 = \cos t$, $x_2 = 2\sin t$ системы

$$\dot{x}_1 = \ln\left(x_1 + 2\sin^2\frac{t}{2}\right) - \frac{x_2}{2}, \quad \dot{x}_2 = (4 - x_1^2)\cos t - 2x_1\sin^2 t - \cos^3 t.$$

◀ Сделав замену $x_1 = \cos t + \varepsilon_1(t)$, $x_2 = 2\sin t + \varepsilon_2(t)$, будем исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \ln(1+\varepsilon_1) - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\cos t. \tag{1}$$

Далее, имея в виду теорему Ляпунова об исследовании на устойчивость по первому приближению, от системы (1) переходим известным образом к соответствующей ей линейной системе:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -2\varepsilon_1.$$

Поскольку один из корней характеристического уравнения этой системы положителен ($\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$), то согласно первой теореме Ляпунова нулевое решение системы (1) неустойчиво. Следовательно, также неустойчивыми являются указанные решения данной системы. ▶

В задачах 599–604 для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

599. $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^2 - x_1$, $\dot{x}_2 = 3x_1 - x_1^2 - x_2$.

◀ Сначала на плоскости Ox_1x_2 находим точки, в которых $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ (точки покоя или положения равновесия), т. е. решаем систему уравнений

$$x_2 - x_1 - x_1^2 = 0, \quad 3x_1 - x_1^2 - x_2 = 0.$$

Имеем две точки равновесия: (0, 0) и (1, 2). Для исследования на устойчивость применяем первую теорему Ляпунова (см. п. 1.2). В случае точки (0, 0) отбрасываем нелинейные члены в правых частях данных уравнений и для полученной таким образом линейной системы составляем характеристическое уравнение, из которого находим корни: $\lambda_1 = -1 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}$. Видим, что точка равновесия (0, 0) неустойчива.

Для исследования на устойчивость точки равновесия (1, 2) сделаем замену переменных $x_1 = 1 + \varepsilon_1$, $x_2 = 2 + \varepsilon_2$. Тогда получим систему

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2.$$

Далее, удерживая лишь линейные члены ε_1 и ε_2, приходим к соответствующей линейной системе $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$, $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, характеристическое уравнение которой $\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$, указывающие на асимптотическую устойчивость точки равновесия (1, 2). ▶

600. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2)$.

◀ Из системы уравнений $x_2 = 0$, $\sin(x_1 + x_2) = 0$ находим точки равновесия: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее, полагая $x_1 = k\pi + \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2$, получаем систему:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = (-1)^k \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

которой ставим в соответствие линейную систему:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = (-1)^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (-1)^k\lambda + (-1)^{k+1} = 0$$

этой системы имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{(-1)^k}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (-1)^k}$. Отсюда на основании первой теоремы Ляпунова, п. 1.2, следует, что если $k = 2n+1$, то положение равновесия асимптотически устойчиво; если же $k = 2n$, то положение равновесия неустойчиво. ▶

601. $\dot{x}_1 = 3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2}$, $\dot{x}_2 = \ln(x_1^2 - 3)$.

◀ Решая систему уравнений

$$3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2} = 0, \quad \ln(x_1^2 - 3) = 0,$$

находим точки равновесия: $(-2, 1)$; $(2, 1)$. Сделав замену $x_1 = 2(-1)^k + \varepsilon_1$, $x_2 = 1 + \varepsilon_2$, $k = 1, 2$, приходим к системе уравнений с малыми возмущениями ε_1, ε_2:

$$\dot{\varepsilon}_1 = 3 - \sqrt{9 + \varepsilon_2 + 4 \cdot (-1)^k \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \ln\left(1 + 4(-1)^k \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2\right).$$

Выделяя с помощью формулы Тейлора линейные члены в правых частях этих уравнений, получаем соответствующую линейную систему:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{2}{3}(-1)^{k+1}\varepsilon_1 - \frac{1}{6}\varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 4(-1)^k \varepsilon_1,$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 - \frac{2}{3}(-1)^{k+1} + \frac{2}{3}(-1)^k = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{(-1)^{k+1}}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}(-1)^{k+1}}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ при $k = 2$; а при $k = 1$ один из корней положителен. Поэтому точка равновесия $(2, 1)$ устойчива, а точка $(-2, 1)$ — нет. ▶

602. $\dot{x}_1 = \ln(1 + x_2 + \sin x_1)$, $\dot{x}_2 = 2 + (3\sin x_1 - 8)^{\frac{1}{3}}$.

◀ Система уравнений

$$\ln(1 + x_2 + \sin x_1) = 0, \quad 2 + (3\sin x_1 - 8)^{\frac{1}{3}} = 0$$

имеет следующие пары действительных корней: $(k\pi, 0)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Далее, как и в предыдущих примерах, делаем замену $x_1 = k\pi + \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2$, а затем уже известным способом получаем линейную относительно малых возмущений ε_1, ε_2 систему уравнений:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 + (-1)^k \varepsilon_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = (-1)^k \frac{1}{4}\varepsilon_1,$$

корни характеристического уравнения которой имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((-1)^k \pm \sqrt{1 + (-1)^k}\right).$$

Далее применяем первую теорему Ляпунова, п. 1.2. Именно, если $k = 2n + 1$, то $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Следовательно, точки равновесия $((2n + 1)\pi, 0)$ асимптотически устойчивы. Если же $k = 2n$, то $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$. Поэтому точки равновесия $(2n\pi, 0)$ неустойчивы. ▶

Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений:

603. $\ddot{x} + 9x = \sin t$.

◀ Пусть $\varepsilon(t)$ — малое возмущение общего решения

$$x = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t + \frac{1}{8}\sin t$$

данного уравнения. Тогда, произведя замену $x = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t + \frac{1}{8}\sin t + \varepsilon(t)$, относительно функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$ известным путем получим уравнение

$$\ddot{\varepsilon} + 9\varepsilon = 0,$$

общее решение которого

$$\varepsilon(t) = A\sin 3t + B\cos 3t.$$

Отсюда следует, что если в начальный момент t_0 возмущение мало ($\sqrt{A^2 + B^2} < \delta$), то в силу оценки $|\varepsilon(t)| \leqslant \sqrt{A^2 + B^2} < \delta = \varepsilon$ оно останется малым $\forall t > t_0$. Таким образом, все решения данного уравнения устойчивы (асимптотической же устойчивости нет, поскольку $\varepsilon(t) \not\to 0$ при $t \to +\infty$). ▶

604. $\dddot{x}+4\ddot{x}+5\dot{x}=t$.

◀ Для проверки устойчивости общего решения

$$x(t)=C_1+e^{-2t}(C_2\cos t+C_3\sin t)+\frac{t^2}{10}-\frac{4}{25}t$$

предложенного уравнения введем функцию возмущения $\varepsilon=\varepsilon(t)$, положив

$$x=C_1+e^{-2t}(C_2\cos t+C_3\sin t)+\frac{t^2}{10}-\frac{4}{25}t+\varepsilon(t).$$

Тогда относительно $\varepsilon(t)$ получим уравнение:

$$\dddot{\varepsilon}+4\ddot{\varepsilon}+5\dot{\varepsilon}=0,$$

из которого следует

$$\varepsilon(t)=A_1+e^{-2t}(A_2\cos t+A_3\sin t).$$

Отсюда видим, что если $|A_1|+\sqrt{A_2^2+A_3^2}<\delta$ (начальные возмущения малы), то и при $t>t_0$ будет $|\varepsilon(t)|\leqslant|A_1|+\sqrt{A_2^2+A_3^2}<\delta=\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число. Следовательно, все решения исходного уравнения устойчивы (асимптотической устойчивости нет, так как $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)\neq 0$). ▶

605. Найти периодическое решение уравнения $\dddot{x}+x=\cos t$ и исследовать его на устойчивость.

◀ Из общего решения уравнения следует периодическое решение

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}(\cos t-\sin t).$$

Сделав замену $x=\tilde{x}(t)+\varepsilon(t)$, относительно функции $\varepsilon=\varepsilon(t)$ получаем уравнение

$$\dddot{\varepsilon}+\varepsilon=0,$$

общее решение которого

$$\varepsilon(t)=C_1e^{-t}+e^{\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

неограничено в окрестности $t=\infty$. Следовательно, найденное периодическое решение неустойчиво. ▶

Построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева, исследовать устойчивость нулевого решения в следующих задачах.

606. $\dot{x}_1=x_2-x_1+x_1x_2$, $\dot{x}_2=x_1-x_2-x_1^2-x_2^3$.

◀ Дифференцируемая функция $v=v(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ удовлетворяет условиям:

а) $v(x_1,x_2)>0$ при $x_1^2+x_2^2\neq 0$, $v(0,0)=0$;

б) $\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2=2x_1(x_2-x_1+x_1x_2)+2x_2(x_1-x_2-x_1^2-x_2^3)=-2\left((x_1-x_2)^2+x_2^4\right)\leqslant 0$.

Следовательно, согласно второй теореме Ляпунова (п. 1.3) можем утверждать, что нулевое решение устойчиво. Более того, так как поверхность

$$z=2((x_1-x_2)^2+x_2^4)$$

имеет чашеобразный вид, то существует достаточно малая окрестность $0<\delta_1<\|x\|\leqslant\delta_2$ такая, что $\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0$, где β — число. Поэтому в данном случае нулевое решение устойчиво асимптотически. ▶

607. $\dot{x}_1=2x_2^3-x_1^5$, $\dot{x}_2=-x_1-x_2^3+x_2^5$.

◀ Поскольку дифференцируемая функция $v=v(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^4$ удовлетворяет условиям:

а) $v(x_1,x_2)>0$ при $x_1^2+x_2^2\neq 0$, $v(0,0)=0$;

б) $\frac{dv}{dt}=2x_1(2x_2^3-x_1^5)+4x_2^3(-x_1-x_2^3+x_2^5)=-2(x_1^6+x_2^6-2x_2^8)\leqslant 0$ в некоторой малой окрестности точки (0, 0), то по второй теореме Ляпунова (п. 1.3) нулевое решение устойчиво. ▶

608. $\dot{x}_1 = 2x_2 - x_1 - x_2^3,\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$.

◀ Функция $v = v(x_1, x_2) = (x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^4$ дифференцируема, неотрицательна при $x_1^2+x_2^2 \neq 0$ и $v(0, 0) = 0$. Ее полная производная $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений данной системы имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_2^3\dot{x}_2 = -6x_2^4 \leqslant 0.$$

Следовательно, согласно второй теореме Ляпунова (п. 1.3), нулевое решение устойчиво. ▶

609. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1x_2^2,\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 - x_2^3$.

◀ Проверим, что дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$ удовлетворяет условиям второй теоремы Ляпунова (п. 1.3). Действительно, $v(x_1, x_2) > 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ ($2v = (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 > 0$) и $v(0, 0) = 0$;

$$\frac{dv}{dt} = (2x_1 - x_2)\dot{x}_1 + (x_2 - x_1)\dot{x}_2 = -x_2^2\left((x_1 - x_2)^2 + x_1^2\right) \leqslant 0.$$

Таким образом, нулевое решение устойчиво. ▶

610. $\dot{x}_1 = -\sin x_2,\ \dot{x}_2 = x_1$.

◀ В данном случае можно подобрать функцию Ляпунова в виде:

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + 1 - \cos x_2.$$

Очевидно, в некоторой малой окрестности точки $(0, 0)$, исключая саму эту точку, будет $v(x_1, x_2) > 0$. Далее, полная производная $\frac{dv}{dt}$ в силу данной системы имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = x_1\dot{x}_1 + \sin x_2 \cdot \dot{x}_2 = x_1(-\sin x_2) + x_1 \sin x_2 \equiv 0.$$

Следовательно, нулевое решение устойчиво. ▶

611. $\dot{x}_1 = -f_1(x_1) - f_2(x_2),\ \dot{x}_2 = f_3(x_1) - f_4(x_2)$, где $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z,\ i = 1, 2, 3, 4$.

◀ Возьмем функцию Ляпунова v в виде

$$v(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f_3(z)\,dz + \int_0^{x_2} f_2(z)\,dz.$$

Очевидно, $v(0, 0) = 0$. Далее, в силу условия $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z$, интегралы

$$\int_0^{x_1} f_3(z)\,dz, \quad \int_0^{x_2} f_2(z)\,dz$$

положительны при $x_1 \neq 0$ у $x_2 \neq 0$ соответственно (считаем, что функции f_i непрерывны). Наконец, полная производная

$$\frac{dv}{dt} = f_3(x_1)\dot{x}_1 + f_2(x_2)\dot{x}_2 = -f_3(x_1)\Big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\Big) + f_2(x_2)\Big(f_3(x_1) - f_4(x_2)\Big) =$$

$$= -\Big(f_3(x_1)f_1(x_1) + f_2(x_2)f_4(x_2)\Big) \leqslant 0$$

(произведение функций, имеющих один и тот же знак, неотрицательно). Следовательно, нулевое решение устойчиво. ▶

612. $\dot{x}_1 = x_1^3 - x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3$.

◀ Функция $v = v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям:

а) $v(x_1, x_2) > 0$ в области V: $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. На границе области V (в точке $(0, 0)$) $v(0, 0) = 0$.

б) $\frac{dv}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 + x_2^3) = 2(x_1^4 + x_2^4) > 0$ при $(x_1, x_2) \in V$.

Следовательно, согласно теореме Четаева (см. п. 1.3) нулевое решение неустойчиво (заметим, что в качестве функции $w = w(x)$ здесь можно взять выражение $w = 2(x_1^4 + x_2^4)$). ▶

613. $\dot{x}_1 = x_1x_2 - x_1^3 + x_2^3,\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^3$.

◀ В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $v(x_1, x_2) = x_1x_2$ в области V:

$$x_1 > 0 \ \wedge\ 0 < x_2 < 1.$$

Очевидно, $v(0, x_2) = v(x_1, 0) = 0$ и точка покоя $(0, 0)$ принадлежит границе области V. Далее, $v > 0$ в области V (при всех t). Полная производная

$$\frac{dv}{dt} = x_1(1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2) + x_2^4 \equiv w(x_1, x_2) > 0 \quad \text{в} \quad V.$$

Следовательно, по теореме Четаева, нулевое решение неустойчиво. ▶

614. $\dot{x}_1 = -x_1 - x_1x_2$, $\dot{x}_2 = x_2^3 - x_1^3$.

◀ Рассмотрим функцию $v = v(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ в области V: $x_1 < 1 \wedge x_2 > |x_1|$. На части границы этой области (при $\|x\| \leqslant \varepsilon_0 = 1$) $v = 0$, причем точка $(0, 0)$ принадлежит границе V. Далее, в V функция $v = v(x_1, x_2) > 0$. Полная производная в силу системы

$$\frac{dv}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^4 + (1 - x_1)x_2x_1^2) > 0 \quad \text{в} \quad V.$$

Таким образом, поскольку все условия теоремы Четаева здесь выполнены, то нулевое решение данной системы неустойчиво. ▶

615. При каких значениях α система уравнений $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1 - x_1^5$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^5$ имеет устойчивую точку покоя $x_1 = 0$, $x_2 = 0$?

◀ Отбросив нелинейные члены в правых частях уравнений, применим теорему Ляпунова об исследовании на устойчивость по первому приближению. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0$ линейной системы $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1$, $\dot{x}_2 = -x_1$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\lambda < 0$, если $\alpha < 0$. При этом, согласно теореме Ляпунова, нулевое решение устойчиво асимптотически. Если же $\alpha > 0$, то по указанной теореме решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ будет неустойчиво. Наконец, при $\alpha = 0$ об устойчивости ничего сказать нельзя, если пользоваться только этой теоремой.

Итак, пусть $\alpha = 0$. Возьмем функцию $v = v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ в области V: $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Поскольку $v(x_1, x_2) > 0$ в V, $v(0, 0) = 0$ и $\frac{dv}{dt} = -x_1^6 - x_2^6 \leqslant -\beta < 0$ вне некоторой окрестности начала координат, то, согласно второй теореме Ляпунова (п. 1.3), нулевое решение асимптотически устойчиво. Таким образом, при $\alpha \leqslant 0$ тривиальное решение асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ оно будет неустойчивым. ▶

В задачах 616–623 исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь условиями отрицательности действительных частей всех корней многочлена с действительными коэффициентами.

616. $x^{IV} + 2\dddot{x} + 4\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$.

◀ Для исследования устойчивости нулевого решения воспользуемся критерием Рауса—Гурвица. Матрица Гурвица в данном случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ее главные миноры

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

то, согласно указанному критерию, действительные части всех корней характеристического многочлена $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ отрицательны. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво. ▶

617. $x^V + 2x^{IV} + 5x''' + 6x'' + 5x' + 2x = 0$.

◀ Как и в предыдущем примере, применим критерий Рауса—Гурвица. Матрица Гурвица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет главные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0, \quad \Delta_5 = 2\Delta_4 = 32 > 0.$$

Поэтому согласно критерию действительные части всех корней многочлена $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 2$ отрицательны. Значит, нулевое решение асимптотически устойчиво. ►

618. $x^{V} + 4x^{IV} + 16x''' + 25x'' + 13x' + 9x = 0.$

◄ Применяем критерий Льенара—Шипара. Поскольку нужные нам главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 16 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 25 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

все положительны:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 39 > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 16 & 4 & 1 \\ 9 & 13 & 25 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} = 5210 > 0,$$

и, кроме того, все коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 16\lambda^3 + 25\lambda^2 + 13\lambda + 9 = 0$$

положительны, то согласно указанному критерию действительные части всех корней отрицательны. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво. ►

619. $x^{IV} + 2x''' + 6x'' + 5x' + 6x = 0.$

◄ Матрица Гурвица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

имеет положительные главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 11 > 0.$$

Поскольку, кроме того, все коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

положительны, то по критерию Льенара—Шипара действительные части всех корней этого уравнения отрицательны. Таким образом, мы имеем асимптотическую устойчивость. ►

620. $x^{V} + x^{IV} + 4x''' + 3x'' + \frac{15}{4}x' + 2x = 0.$

◄ Для исследования на устойчивость воспользуемся критерием Михайлова. В данном случае корни многочленов

$$p(\xi) = 2 - 3\xi + \xi^2, \quad q(\eta) = \eta^2 - 4\eta + \frac{15}{4}$$

имеют вид: $\xi_{1,2} = 1, 2$; $\eta_{1,2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. Следовательно, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. Как видим, здесь выполнены условия критерия Михайлова (см. п. 1.4), поэтому нулевое решение асимптотически устойчиво. ►

621. $x''' + x'' + x' + 2x = 0$.

◀ Испытаем здесь уже рассмотренные критерии. Так как $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, то главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Следовательно, по критерию Рауса—Гурвица, не все действительные части корней уравнения

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

отрицательны. Значит, асимптотической устойчивости нулевого решения нет.

Далее, поскольку корни многочленов

$$p(\xi) = 2 - \xi, \quad q(\eta) = 1 - \eta$$

не удовлетворяют неравенству $0 < \xi_1 < \eta_1$, то по критерию Михайлова можем утверждать, что не все корни уравнения $f(\lambda) = 0$ имеют отрицательные действительные части.

Предположим теперь, что хотя бы один из корней уравнения $f(\lambda) = 0$ чисто мнимый. Тогда, очевидно, оба уравнения $2 - \omega^2 = 0$ и $\omega(1 - \omega^2) = 0$ должны иметь общие действительные корни. Однако, поскольку общих корней нет, то мы пришли к противоречию.

Таким образом, уравнение $f(\lambda) = 0$ обязательно имеет корень с положительной действительной частью. Последнее означает, что нулевое решение неустойчиво. ▶

622. $x^{IV} + 2x''' + 3x'' + 7x' + 2x = 0$.

◀ Составляя и вычисляя первые главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

замечаем, что не все корни уравнения

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

имеют отрицательные действительные части. Предположим, что один из корней имеет нулевую действительную часть: $\lambda = i\omega$. Тогда должно быть: $\omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 7i\omega + 2 = 0$, или $\omega^4 - 3\omega^2 + 2 = 0 \ \wedge \ -2\omega^3 + 7\omega = 0$. Последнее соотношение показывает, что это невозможно. Следовательно, хотя бы один корень имеет положительную действительную часть. Значит, нулевое решение неустойчиво. ▶

623. $x^V + 5x^{IV} + 15x''' + 48x'' + 44x' + 74x = 0$.

◀ Пользуемся критерием Михайлова. Здесь $p(\xi) = 74 - 48\xi + 5\xi^2$, $q(\eta) = 44 - 15\eta + \eta^2$, $a_n = 74 > 0$, $a_{n-1} = 44 > 0$. Кроме того, корни уравнений $p(\xi) = 0$, $q(\eta) = 0$, имеющие вид:

$$\xi_{1,2} = \frac{24 \mp \sqrt{206}}{5} \approx 1{,}9;\ 5{,}7; \qquad \eta_{1,2} = 4;\ 11,$$

удовлетворяют неравенствам: $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво. ▶

В следующих примерах (624—628) выяснить, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво.

624. $x''' + 3x'' + ax' + bx = 0$.

◀ Составив матрицу Гурвица

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 3 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix},$$

видим, что все ее главные диагональные миноры положительны, если $3a - b > 0$ и $b(3a - b) > 0$. Следовательно, если $3a > b > 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво. ▶

625. $ax^{IV} + x''' + x'' + x' + bx = 0.$

◀ Как и в предыдущем примере, составляем матрицу Гурвица

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

и вычисляем ее главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 - a - b; \quad \Delta_4 = b(1 - a - b).$$

Согласно критерию Рауса—Гурвица, для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$1 - a > 0 \ \wedge \ 1 - a - b > 0 \ \wedge \ b(1 - a - b) > 0 \ \wedge \ a > 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим требуемые условия: $a > 0,\ b > 0,\ a + b < 1.$ ▶

626. $x^{IV} + ax''' + 4x'' + 2x' + bx = 0.$

◀ Применяя критерий Льенара—Шипара, получаем:

$$\Delta_1 = a > 0, \quad b > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 4 & a \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix} = 8a - a^2 b - 4 > 0.$$

Отсюда находим, что асимптотическая устойчивость наблюдается при выполнении неравенств:

$$a_1 < a < a_2, \quad 0 < b < 4; \quad a_{1,2} = \left(4 \mp 2\sqrt{4 - b}\right) b^{-1}.$$ ▶

627. $x^{IV} + ax''' + 4x'' + bx' + x = 0.$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad b > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 4 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 4ab - a^2 - b^2 > 0.$$

Отсюда находим условия асимптотической устойчивости:

$$2 - \sqrt{3} < \frac{a}{b} < 2 + \sqrt{3} \quad (a > 0,\ b > 0).$$ ▶

628. $x''' + x'' + a^2 x' + 5ax = 0.$ Найти область устойчивости.

◀ Применяем критерий Льенара—Шипара. Поскольку

$$a > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5a & a^2 \end{vmatrix} = a(a - 5) > 0,$$

то нулевое решение асимптотически устойчиво, если $a > 5$.

Далее, пусть $0 < a < 5$. Тогда, предположив, что один из корней уравнения

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + a^2\lambda + 5a = 0$$

чисто мнимый, приходим к противоречию, так как

$$f(i\omega) = -i\omega^3 - \omega^2 + ia^2\omega + 5 = 0 \ \Rightarrow \ \omega^2 = 5a \ \wedge \ \omega^2 = a^2.$$

Значит при $a < 5$ устойчивости нет. Если $a = 5$, из последних соотношений следует, что $\lambda_{1,2} = \pm 5i$. Нетрудно найти, что $\lambda_3 = -1$. Таким образом, при $a = 5$ нулевое решение устойчиво (асимптотической устойчивости нет, так как $\lim\limits_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$ не существует, где $\varepsilon(t)$ — возмущенное решение). ▶

629. Маятник состоит из жесткого стержня длины l и массы m на конце (рис. 30). К стержню прикреплены две пружины с жесткостью k на расстоянии a от точки крепления. Определить условие равновесия маятника в верхнем положении.

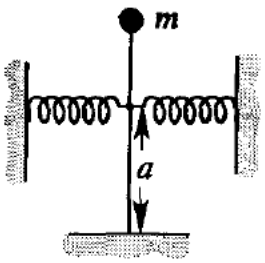


Рис. 30

◀ Пусть φ — угол отклонения стержня от вертикали. Тогда, считая угол φ малым, легко составить функцию Лагранжа $L = K - \Pi$, где K, Π — кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно. Имеем

$$K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = ka^2\varphi^2 + mgl\cos\varphi, \quad L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ka^2\varphi^2 - mgl\cos\varphi$$

(кинетической энергией пружин пренебрегаем).

Далее, пользуясь уравнениями Лагранжа, составляем дифференциальное уравнение, описывающее малые колебания стержня около вертикального положения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} \equiv ml^2\ddot{\varphi} + 2ka^2\varphi - mgl\sin\varphi = 0,$$

или (ввиду малости угла φ):

$$\ddot{\varphi} + A\varphi = 0,$$

где $A = \dfrac{2ka^2 - mgl}{ml^2}$. Очевидно, при $A \leqslant 0$ устойчивости не будет (угол φ увеличивается неограниченно). При $A > 0$ стержень совершает малые колебания около вертикали. Следовательно, если $2ka^2 > mgl$, то вертикальное положение стержня устойчиво. ▶

630. Механическая система, изображенная на рис. 31, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси AB. Тело массы M может двигаться вдоль вертикальной оси AB. Определить положение равновесия этой системы (массами стержней пренебречь).

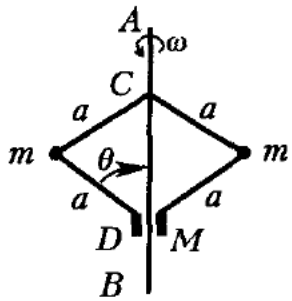


Рис. 31

◀ Для составления функции Лагранжа вычислим кинетическую и потенциальную энергию системы. Имеем:

$$K = ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{M\dot{x}^2}{2} + I\omega^2,$$

где $I = ma^2\sin^2\theta$, $x = |CD| = 2a\cos\theta$. Поэтому

$$K = ma^2\dot{\theta}^2 + 2Ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + ma^2\omega^2\sin^2\theta.$$

Потенциальную энергию системы рассматриваем относительно точки B ($|CB| = 2a$), поскольку ниже точки B система расположиться не сможет. Легко видеть, что

$$\Pi = 2mg|KB| + Mg|DB| = 2mg(2a - a\cos\theta) + Mg(2a - 2a\cos\theta).$$

Таким образом, функция Лагранжа

$$L = (m + 2M\sin^2\theta)a^2\dot{\theta}^2 + ma^2\omega^2\sin^2\theta + 2ga(m + M)\cos\theta - 2ag(2m + M).$$

Составляем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} \equiv 2a^2\ddot{\theta}(m + 2M\sin^2\theta) + 2a^2M\dot{\theta}^2\sin 2\theta + 2ga(M + m)\sin\theta - ma^2\omega^2\sin 2\theta = 0. \quad (1)$$

Поскольку в положении равновесия $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$, то из (1) можно найти угол равновесия θ_0, удовлетворяющий соотношению

$$\sin\theta_0(g(M + m) - ma\omega^2\cos\theta_0) = 0.$$

Отсюда следуют физически возможные значения угла θ_0:

$$\theta_0 = 0, \quad \cos\theta_0 = \frac{g(M + m)}{ma\omega^2} < 1.$$

Вводя обозначения $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, уравнение (1) представляем в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \left(\dfrac{m\omega^2}{2}\sin 2x_1 - \dfrac{g}{a}(M + m)\sin x_1 - Mx_2^2\sin 2x_1\right)(m + 2M\sin^2 x_1)^{-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим устойчивость точки равновесия (0, 0). Ставя в соответствие системе (2) линеаризованную систему уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\left(\frac{M}{a} + 1\right)\right) x_1$$

и вычисляя корни ее характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{a}\left(\frac{M}{m} + 1\right)},$$

видим, что при условии $ma\omega^2 > g(M+m)$, согласно первой теореме Ляпунова, точка равновесия (0, 0) неустойчива.

Пусть $ma\omega^2 \leqslant g(M+m)$. Тогда, подобрав функцию Ляпунова

$$v = x_2^2(m + 2M\sin^2 x_1) + 2(1 - \cos x_1)\left(\frac{g}{a}(M+m) - m\omega^2\cos^2\frac{x_1}{2}\right),$$

удовлетворяющую условиям:

$$v(0, 0) = 0, \quad v(x_1, x_2) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4},$$

$$\dot{v}(x_1, x_2) \equiv 0 \quad \text{(в силу теоремы (2))},$$

заключаем, что точка равновесия (0, 0) устойчива.

Рассмотрим теперь устойчивость равновесия точки $(\theta_0, 0)$. Сделав замену переменных $x_1 = \theta_0 + y_1$, $x_2 = y_2$ выражении для функции Ляпунова из предыдущего случая, а также потребовав, чтобы $v(0, 0) = 0$, получаем

$$v(y_1, y_2) = y_2^2\left(m + 2M\sin^2(\theta_0 + y_1)\right) + \left(\cos(\theta_0 + y_1) - \cos\theta_0\right)\left(m\omega^2\left(\cos(\theta_0 + y_1) + \cos\theta_0\right) - \frac{2g}{a}(M+m)\right).$$

Поскольку производная

$$f'(y_1) = m\omega^2\left(\frac{g}{am\omega^2}(M+m) - \cos(\theta_0 + y_1)\right)\sin(\theta_0 + y_1),$$

где

$$f(y_1) = (\cos(\theta_0 + y_1) - \cos\theta_0)\left(m\omega^2\left(\cos(\theta_0 + y_1) + \cos\theta_0\right) - \frac{2g}{a}(M+m)\right),$$

удовлетворяет условиям: $f'(0) = 0$, $f'(y_1) > 0$ при $\delta > y_1 > 0$ и $f'(y_1) < 0$ при $-\delta < y_1 < 0$, то функция f имеет строгий минимум в начале координат. Следовательно, функция $v = v(y_1, y_2)$ также имеет строгий минимум в точке (0, 0).

Далее, поскольку $\dot{v}(y_1, y_2) \equiv 0$ в силу системы

$$\dot{y}_1 = y_2,$$

$$\dot{y}_2 = \left(\frac{m\omega^2}{2}\sin 2(\theta_0 + y_1) - \frac{g}{a}(M+m)\sin(\theta_0 + y_1) - My_2^2\sin 2(\theta_0 + y_1)\right)\frac{1}{m + 2M\sin^2(\theta_0 + y_1)},$$

то по теореме Ляпунова точка (0, 0) на плоскости y_1Oy_2 устойчива, т. е. устойчива точка $(\theta_0, 0)$ (на плоскости x_1Ox_2). ►

§ 2. Особые точки

2.1. Определение особых точек и их классификация.

Пусть в системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = M(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = N(x, y) \tag{1}$$

функции M, N непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где они одновременно обращаются в нуль, т. е. $M(x_0, y_0) = 0$, $N(x_0, y_0) = 0$.

Определение. *Точка* (x_0, y_0), *в окрестности которой функции* M, N *непрерывно дифференцируемы и* $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$, *называется особой точкой системы* (1) *на плоскости* Oxy.

В простейшем случае, когда M, N линейны, т.е. $M(x, y) = ax + by$, $N(x, y) = cx + dy$, где a, b, c, d — постоянные, исследование особых точек проводится по следующей схеме. Сначала находят корни $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Если корни действительные, $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то особая точка называется *узлом* (картина интегральных кривых в окрестности начала координат напоминает собой семейство парабол, вершины которых совпадают с точкой (0, 0)). Если корни имеют разные знаки, то особая точка называется *седлом*, а интегральные кривые представляют собой несколько деформированные гиперболы. Далее, если корни комплексные, но $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка называется *фокусом*, а интегральные кривые имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат. Если же $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, но $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка — *центр*. Интегральные кривые в этом случае замкнуты и охватывают начало координат.

Кроме этих (основных) особых точек различают еще точки: *вырожденный узел* ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$), *дикритический узел* (имеет место лишь в случае, когда система имеет вид $\frac{dx}{dt} = ax$; $\frac{dy}{dt} = ay$, $a \neq 0$).

В случае особых точек узла и седла система уравнений (1) имеет решения, изображаемые прямыми, проходящими через начало координат. Направления прямых определяются собственными векторами матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

причем в случае узла интегральные кривые касаются собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине λ.

Для выяснения направления движения по траектории достаточно построить в какой-нибудь точке (x, y) вектор скорости $(\dot{x}, \dot{y})$.

2.2. Практические приемы исследования особых точек.

Предположим, что в некоторой окрестности особой точки (x_0, y_0) системы (1), где введена декартова система координат Ox_1y_1 по формулам $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, правые части можно представить в виде

$$M(x, y) \equiv M(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = ax_1 + by_1 + \alpha(x_1, y_1),$$
$$N(x, y) \equiv N(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = cx_1 + dy_1 + \beta(x_1, y_1),$$

где a, b, c, d — постоянные, а функции α, β таковы, что справедливы следующие оценки:

$$\frac{\alpha(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0, \quad \frac{\beta(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0 \quad (\varepsilon > 0), \; r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Тогда, если $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, где λ определяется из уравнения (2), то особая точка (x_0, y_0) системы (1) будет того же типа, что особая точка (0, 0) системы

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = cx_1 + dy_1. \tag{3}$$

Если для системы (3) особая точка — центр, то для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1 + \alpha(x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = cx_1 + dy_1 + \beta(x_1, y_1) \tag{4}$$

она может быть центром или фокусом. Если траектории системы (4) имеют ось симметрии, проходящую через исследуемую особую точку, то последняя будет центром и для системы (4). Перейдя от системы (4) к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \tag{5}$$

легко обнаружить ось симметрии. Если уравнение (5) не меняет своего вида при замене x на $-x$ или y на $-y$, то центр сиситемы (3) будет центром системы (4). Фокус имеется тогда и только тогда, когда нулевое решение системы (1) (после параллельного переноса системы координат в особую точку) будет асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

В задачах 631—640 исследовать особые точки и изобразить графически семейство интегральных кривых в окрестности особой точки.

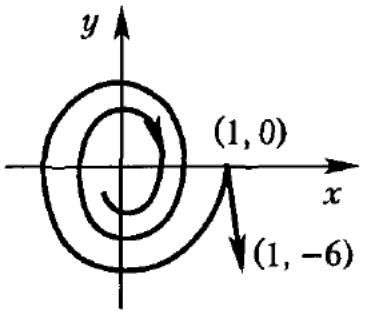


Рис. 32

631. $\dot{x} = x + 3y,\ \dot{y} = -6x - 5y.$

◀ Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, то точка $(0, 0)$ является устойчивым фокусом (рис. 32).

Для выяснения направления закручивания интегральных кривых (спиралей) построим вектор скорости в точке $(1, 0)$:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -6. \blacktriangleright$$

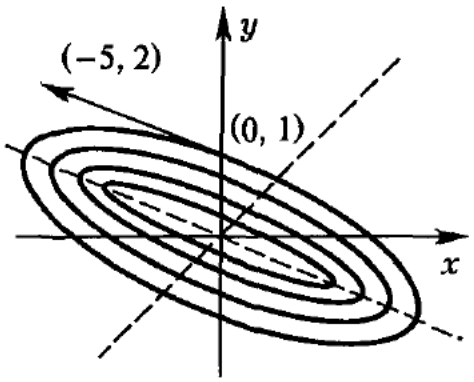


Рис. 33

632. $\dot{x} = -2x - 5y,\ \dot{y} = 2x + 2y.$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$. Следовательно, особая точка — центр. Направление движения по траекториям определяем по вектору скорости:

$$\big(\dot{x}(0, 1);\ \dot{y}(0, 1)\big) = (-5; 2)$$

(рис. 33). Далее, для установления уравнений прямых $y = kx$, на которых расположены оси эллипсов, найдем экстремумы функции $f = f(x, y) = x^2 + y^2$ при условии, что $\frac{y}{x} = k$ и $\dot{x} = -2x - 5y,\ \dot{y} = 2x + 2y$. Из необходимого условия экстремума получаем уравнение

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$$

подставив в которое значения $\dot{x},\ \dot{y},\ y = kx$, после сокращения на x^2 приходим к уравнению

$$2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Следовательно, на прямых $y = 2x,\ y = -\frac{x}{2}$ расположены оси всех эллипсов. ▶

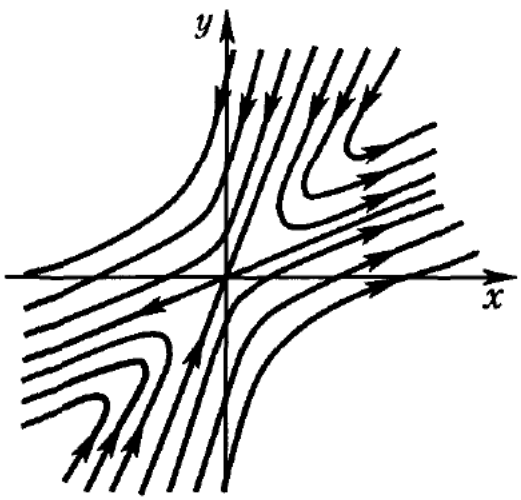


Рис. 34

633. $\dot{x} = 3x - 4y,\ \dot{y} = x - 2y.$

◀ Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$. Так как корни $\lambda_{1,2}$ действительны и имеют разные знаки, то особая точка — седло. В этом случае семейство интегральных кривых (гипербол) имеет две прямые, проходящие через начало координат $x = t,\ y = kt$ (t — параметр). Для нахождения углового коэффициента k подставим параметрические уравнения прямых в систему дифференциальных уравнений.

После исключения параметра t получим уравнение для k:

$$4k^2 - 5k + 1 = 0,$$

откуда $k_1 = 1$; $k_2 = \frac{1}{4}$. Следовательно, среди интегральных кривых имеются две прямые: $y = x$, $y = \frac{x}{4}$ (рис. 34). Наконец, построив четыре вектора скорости

$$v_1(0, -1) = (4, 2); \quad v_2(0, 1) = (-4, -2); \quad v_3\left(1, \tfrac{1}{2}\right) = (1, 0); \quad v_4\left(-1, -\tfrac{1}{2}\right) = (-1, 0),$$

устанавливаем направление движения по траекториям. ▶

634. $\dot{x} = 2x + 3y$, $\dot{y} = x + 4y$.

◀ Решив характеристическое уравнение

$$(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = 0$$

($\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$), видим, что особая точка — узел. Далее, находим интегральные прямые путем подстановки $x = t$, $y = kt$ в данную систему. В результате получаем уравнение

$$3k^2 - 2k - 1 = 0,$$

корни которого суть $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{3}$. Следовательно, прямые $y = x$, $y = -\frac{x}{3}$ являются искомыми (рис. 35).

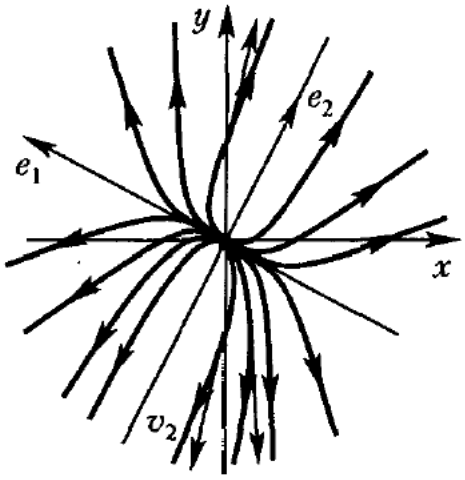


Рис. 35

Подставляя в уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

значение $\lambda = \lambda_2 = 1$ (меньшего по абсолютной величине собственного значения матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$), для координат e_{11}, e_{12} собственного вектора указанной матрицы, соответствующего значению λ_2, получаем соотношение $e_{11} + 3e_{12} = 0$. Отсюда, положив $e_{12} = 1$, находим $e_{11} = -3$. Следовательно, вектор $e_1 = (-3, 1)$ направлен по прямой $y = -\frac{x}{3}$ и все интегральные кривые, имеющие вид парабол, своими вершинами с обеих сторон касаются указанной прямой.

Наконец, положив в данных уравнениях $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$, найдем два вектора скорости

$$v_1(1, 2) = (8, 9); \quad v_2(-1, -2) = (-8, -8),$$

указывающие направления движения по траекториям. ▶

635. $\dot{x} = 3x + y$, $\dot{y} = y - x$.

◀ Сначала находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

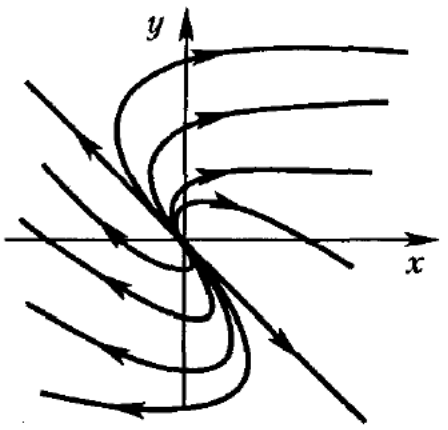


Рис. 36

Следовательно, точка (0, 0) — вырожденный узел. Из уравнения $(3 - \lambda)e_{11} + e_{12} = 0$, положив произвольно $e_{12} = 1$, при $\lambda = 2$ получаем $e_{11} = -1$. Таким образом, прямая $y = -x$ является интегральной и ее касаются все интегральные кривые в начале координат (рис. 36). Далее, пользуясь таблицей

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	1	2	-2	-1	1	2
y	-4	-2	0	2	4	-2	-1	1	2	0	0	0	0
$\dot{x}$	-10	-5	0	5	10	-8	-4	4	8	-6	-3	3	6
$\dot{y}$	-2	-1	0	1	2	0	0	0	0	2	1	-1	-2

строим векторы скорости (поле направлений), а затем по ним чертим интегральны кривые. ▶

636. $\dot{x} = y - 2x$, $\dot{y} = 2y - 4x$.

◀ Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

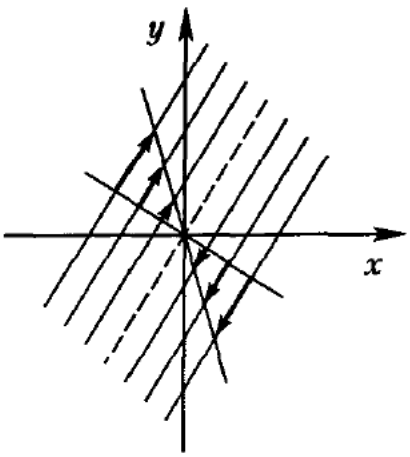


Рис. 37

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это значит, что коэффициенты данных уравнений пропорциональны. Следовательно, прямая $y = 2x$ состоит из особых точек. Семейство интегральных кривых легко найти из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow y = 2x + C, \quad C \neq 0.$$

Физически семейство кривых, изображенных на рис. 37, можно интерпретировать как картину ламинарного течения двух противоположно направленных потоков жидкости, причем скорость течения в обоих случаях растет по абсолютной величине по мере удаления от линии их раздела ($y = 2x$), где она равна нулю. ►

637. $\dot{x} = x, \ \dot{y} = y.$

◄ Составив и решив характеристическое уравнение, найдем его корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Значит, точка $(0, 0)$ — дикритический узел. Разделив почленно одно уравнение на другое и проинтегрировав результат, получим семейство прямых

$$y = kx, \quad x = 0$$

(рис. 38). Поскольку $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$, то узел неустойчив. ►

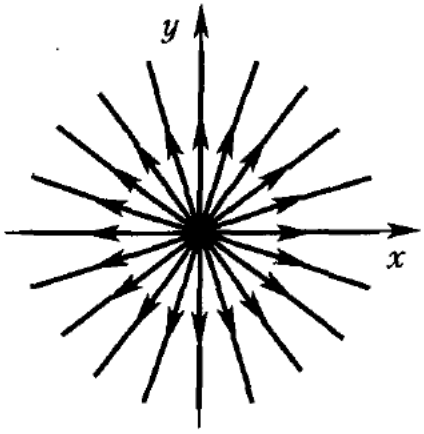


Рис. 38

638. $\dot{x} = 0, \ \dot{y} = 0.$

◄ Очевидно, вся плоскость Oxy состоит из особых точек. Семейство же интегральных кривых на плоскости Oxy не существует. ►

Примечание. *В пространстве $Oxyt$ интегральные кривые представляют собой прямые, параллельные оси Ot.*

639. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}.$

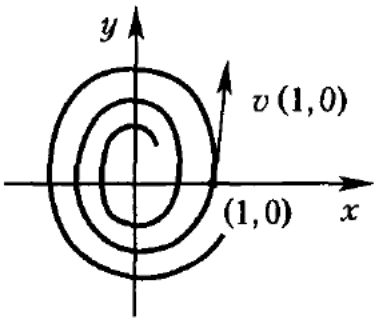


Рис. 39

◄ Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим корни

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Следовательно, особая точка — фокус. Для выяснения вопроса о направлении закручивания интегральных кривых (спиралей) положим $x = 1$, $y = 0$ в системе уравнений:

$$\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x - y.$$

Тогда, приняв во внимание, что для этой системы фокус будет неустойчивым, а также направление вектора скорости $v(1, 0) = (3, 4)$, заключаем, что при удалении от начала координат движение по спирали осуществляется против хода часовой стрелки (рис. 39). ►

Примечание. *Об устойчивости особой точки исходного уравнения ничего сказать нельзя, так как при замене t на $-t$ уравнение вида не меняет, траектории движения (интегральные кривые) не замкнуты и устойчивость в данном случае зависит от направления движения по траекториям.*

640. $y' = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}.$

◄ Составив и решив уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1,$$

видим, что особая точка — седло. Путем подстановки $y = kx$ в дифференциальное уравнение находим интегральные прямые (асимптоты семейства деформированных гипербол).

Имеем

$$k = \frac{2+k}{3+4k} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -1.$$

Таким образом, две прямые

$$y = \frac{x}{2}, \quad y = -x$$

— искомые. Далее, ясно, что особая точка неустойчива (в данном случае, в отличие от предыдущего примера, характер тривиального решения не зависит от направления движения по траекториям). Примерный вид семейства изображен на рис. 40. ▶

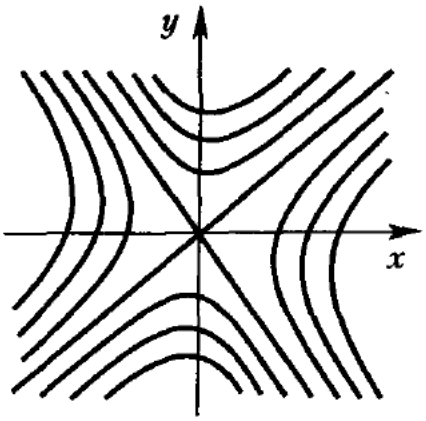


Рис. 40

В задачах 641–647 найти и исследовать особые точки данных уравнений и систем.

641. $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y-5}$.

◀ Из системы уравнений

$$2x + y = 0, \quad x - 2y - 5 = 0$$

находим координаты особой точки: $x = 1$, $y = -2$. Далее делаем перенос начала координат в эту точку:

$$x = 1 + \xi, \quad y = -2 + \eta.$$

В результате приходим к уравнению:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi + \eta}{\xi - 2\eta}.$$

Поскольку корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеют вид: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, то утверждаем, что особая точка — фокус. Положив в системе

$$\dot{\xi} = \xi - 2\eta, \quad \dot{\eta} = 2\xi + \eta$$

$\xi = 1$, $\eta = 0$, получим вектор скорости $v(1, 0) = (1, 2)$. Если принять еще во внимание, что для этой системы точка $(0, 0)$ — неустойчивый фокус, то легко видеть, что при движении по спиралям от начала координат $O_1\xi\eta$ будет происходить вращение против хода часовой стрелки (рис. 41).

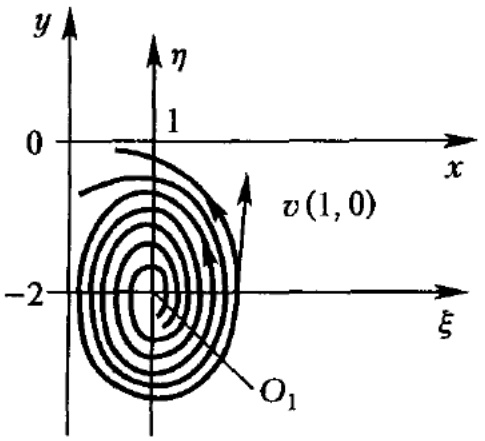


Рис. 41

Заметим, что, как в примере 639, об устойчивости фокуса ничего сказать нельзя. ▶

642. $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

◀ Из системы

$$2y = 0, \quad x^2 - y^2 - 1 = 0$$

находим координаты особых точек: $(-1, 0)$; $(1, 0)$. Сделав замену $x = -1 + \xi$, $y = \eta$, приведем данное уравнение к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi^2 - \eta^2 - 2\xi}. \tag{1}$$

Наряду с уравнением (1) рассматриваем "укороченное" уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{-\xi},$$

полученное, очевидно, путем отбрасывания нелинейных членов из уравнения (1). Поскольку действительные части корней характеристического уравнения, соответствующего последнему дифференциальному, отличны от нуля ($\lambda_{1,2} = \pm 2$), а также функция

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi^2 - \eta^2 = o\left((\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

при $\xi^2 + \eta^2 \to 0$ ($\varepsilon > 0$), то согласно п. 2.2 особая точка уравнения (1) будет того же типа, что особая точка укороченного уравнения. Более того, картины расположения интегральных кривых уравнения (1) и укороченного уравнения в малой окрестности особой точки будут примерно одинаковы (точнее, чем меньше окрестность, тем больше совпадение картин).

Таким образом, точка $(-1, 0)$ — седло для исходного уравнения.

Далее, сделав замену $x = 1 + \xi$, $y = \eta$, приходим к уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi^2 - \eta^2 + 2\xi}$$

и соответствующему ему укороченному

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Укороченное уравнение имеет особую точку $(0, 0)$, которая, как следует из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

является дикритическим узлом. По причине, изложенной выше, точка $(1, 0)$ будет дикритическим узлом и для исходного уравнения. ▶

643. $y' = \dfrac{y + \sqrt[4]{1 + 20x^2}}{x + y + 1}$.

◀ Из системы уравнений

$$y + \sqrt[4]{1 + 20x^2} = 0, \quad x + y + 1 = 0$$

находим особые точки: $(0, -1)$; $(2, -3)$. Исследуем каждую из них. С помощью замены $x = \xi$, $y = -1 + \eta$ данное уравнение приводим к виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - 1 + (1 + 20\xi)^{\frac{1}{4}}}{\xi + \eta} = \frac{\eta + 5\xi - \frac{75}{2}\xi^2 + o(\xi^2)}{\xi + \eta}.$$

Укороченное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta + 5\xi}{\xi + \eta},$$

как следует из соответствующего ему характеристического

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

имеет седло ($\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$). Далее, функция

$$\xi \mapsto -\frac{75}{2}\xi^2 + o(\xi^2) = o(r^{1+\varepsilon}), \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\ \varepsilon > 0;$$

поэтому, согласно п. 2.2, точка $(0, -1)$ является седлом и для исходного дифференциального уравнения.

Положив $x = 2 + \xi$, $y = -3 + \eta$, из данного уравнения аналогично предыдущему получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta + \frac{20}{27}\xi + O(\xi^2)}{\xi + \eta}.$$

Составив и решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \frac{20}{27} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{20}{27}},$$

убеждаемся в том, что $(0, 0)$ — узел. Учитывая еще соотношение $O(\xi^2) = o(r^{1+\varepsilon})$, согласно п. 2.2 заключаем, что точка $(2, -3)$ является узлом и для данного дифференциального уравнения. ▶

644. $\dot{x} = \ln(2 - y^2)$, $\dot{y} = e^x - e^y$.

◀ Сначала находим действительные решения системы уравнений $\ln(2-y^2) = 0$ и $e^x - e^y = 0$. Из первого уравнения получаем $y = \pm 1$; из второго — $x = \pm 1$. Следовательно, точки $(-1, -1)$ и $(1, 1)$ — особые.

Далее, исследуем каждую из этих точек. Полагая в данных дифференциальных уравнениях $x = \pm 1 + \xi$, $y = \pm 1 + \eta$, приводим их к виду:

$$\dot{\xi} = \ln(1 \mp 2\eta - \eta^2), \quad \dot{\eta} = e^{\pm 1}(e^{\xi} - e^{\eta}).$$

Отсюда, применяя формулу Маклорена, имеем:

$$\dot{\xi} = \mp 2\eta + O(\eta^2), \quad \dot{\eta} = e^{\pm 1}(\xi - \eta) + O(r^2).$$

Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mp 2 \\ e^{\pm 1} & -e^{\pm 1} - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = -\frac{e^{\pm 1}}{2} + \sqrt{\frac{e^{\pm 2}}{4} \mp 2e^{\pm 1}}, \quad \lambda_2 = -\frac{e^{\pm 1}}{2} - \sqrt{\frac{e^{\pm 2}}{4} \mp 2e^{\pm 1}},$$

соответствующее укороченной системе

$$\dot{\xi} = \mp 2\eta, \quad \dot{\eta} = e^{\pm 1}(\xi - \eta),$$

видим, что первая особая точка (ей соответствует везде верхний знак) — устойчивый фокус, а вторая — седло. В силу п. 2.2 утверждения относятся и к исследуемой системе. ▶

645. $\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2$, $\dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy)$.

◀ Система уравнений

$$\sqrt{x^2 - y + 2} = 2, \quad x^2 + xy = 0$$

имеет решения: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ и $y_1 = -2$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$. Следовательно, точки $(0, -2)$; $(-2, 2)$; $(1, -1)$ — особые.

Сделав замену $x = \xi$, $y = -2 + \eta$, приводим данную систему уравнений к виду:

$$\dot{\xi} = \sqrt{\xi^2 - \eta + 4} - 2, \quad \dot{\eta} = \operatorname{arctg} \xi(-2 + \xi + \eta).$$

Разлагая правые части этих уравнений по формуле Маклорена и удерживая лишь линейные члены, получаем укороченную систему

$$\dot{\xi} = -\eta, \quad \dot{\eta} = -2\xi.$$

Поскольку корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, то особая точка — седло. А тогда по п. 2.2 точка $(0, -2)$ является седлом и для исходной системы.

Теперь переносим начало координат в точку $(-2, 2)$, положив $x = -2 + \xi$, $y = 2 + \eta$. Тогда данная система принимает вид:

$$\dot{\xi} = -2 + \sqrt{(2 - \xi)^2 - \eta}, \quad \dot{\eta} = -\operatorname{arctg}(2\eta + 2\xi - \xi^2).$$

Применяя к правым частям этой системы формулу Маклорена и отбрасывая нелинейные члены, получаем укороченную систему:

$$\dot{\xi} = -\xi - \frac{\eta}{4}, \quad \dot{\eta} = -2\xi - 2\eta.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ действительны и имеют одинаковые знаки, поэтому особая точка — узел. Следовательно, согласно п. 2.2, точка $(-2, 2)$ является узлом и для данной системы.

Наконец, полагая $x = 1 + \xi$, $y = -1 + \eta$, данные уравнения после аналогичных выкладок приводим к укороченным:

$$\dot{\xi} = \frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{4}, \quad \dot{\eta} = \xi + \eta.$$

Поскольку корни характеристического уравнения $\left(\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{4}\right)$ комплексны и $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка — фокус. Такой же она будет и для данной системы. ▶

646. $\dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}$, $\dot{y} = x^2 - y^2$.

◀ Из системы уравнений

$$y^2 - y - 2 = 0, \quad x^2 = y^2$$

находим координаты особых точек: $(-1, -1)$; $(-2, 2)$; $(1, -1)$; $(2, 2)$. Полагая $x = \pm 1 + \xi$, $y = -1 + \eta$, приводим систему дифференциальных уравнений к укороченному виду:

$$\dot{\xi} = -\eta, \quad \dot{\eta} = \pm 2\xi + 2\eta.$$

Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \pm 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

на основании п. 2.2 следует, что точка $(1, -1)$ — фокус ($\lambda_{1,2} = 1 \pm i$), а точка $(-1, -1)$ — седло ($\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$). Аналогично, положив $x = \pm 2 + \xi$, $y = 2 + \eta$ и удержав линейные члены, из данной системы получаем укороченную:

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \pm 4\xi - 4\eta.$$

Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \pm 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и приняв во внимание п. 2.2, заключаем, что точка $(2, 2)$ — седло ($\lambda_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$), а точка $(-2, 2)$ — вырожденный узел ($\lambda_{1,2} = -2 \neq 0$). ▶

647. $\dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2$, $\dot{y} = e^{y^2 - x} - e$.

◀ Из системы уравнений

$$y^2 - x = 1, \quad (x - y)^2 = 1$$

находим координаты четырех особых точек $(0, 1)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(3, 2)$. Сделав замену $x = \xi$, $y = \pm 1 + \eta$, данные уравнения известным способом приводим к укороченным:

$$\dot{\xi} = \mp(\xi - \eta), \quad \dot{\eta} = e(-\xi \pm 2\eta).$$

Корни характеристического уравнения для этой системы имеют вид:

$$\lambda_1 = \frac{\mp 1 \pm 2e}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4e(1 \pm 1) + 4e^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mp 1 \pm 2e}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4e(1 \pm 1) + 4e^2}}{2}.$$

Поскольку $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (λ_1, λ_2 — действительные корни), то на основании п. 2.2 точки $(0, 1)$; $(0, -1)$ являются седлами. Аналогично, перенеся начало координат в точку $(-1, 0)$ по формулам $x = -1 + \xi$, $y = \eta$ и удержав в правых частях линейные члены, получаем укороченную систему:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}(\eta - \xi), \quad \dot{\eta} = -e\xi.$$

Поскольку корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{e}{2}}$$

комплексны, то согласно п. 2.2 особая точка $(-1, 0)$ — фокус. Наконец, полагая в данных уравнениях $x = 3 + \xi$, $y = 2 + \eta$ и используя формулу Маклорена, получаем укороченную систему:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \dot{\eta} = e(4\eta - \xi),$$

характеристическое уравнение которой имеет корни $\lambda_{1,2} = 2e + \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(2e + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3e}{2}}$. Поскольку корни действительные и одинаковые по знаку, то особая точка $(3, 2)$ — узел. ▶

В задачах 648–650 дать примерную картину расположения интегральных кривых в окрестности начала координат.

648. $y' = \dfrac{xy}{x+y}$.

◀ Сначала на плоскости Oxy выделяем области знакопостоянства производных y', y'', а также кривые, на которых эти производные либо равны нулю, либо неограничены.

Решив неравенства

$$y' = \frac{xy}{x+y} \gtrless 0,$$

приходим к следующему результату. Если

$$(x>0 \wedge y>0) \vee (x>0 \wedge x+y<0) \vee (y>0 \wedge x+y<0),$$

то $y'>0$, а если

$$(x<0 \wedge x+y>0) \vee (x<0 \wedge y<0) \vee (y<0 \wedge x+y>0),$$

то $y'<0$.

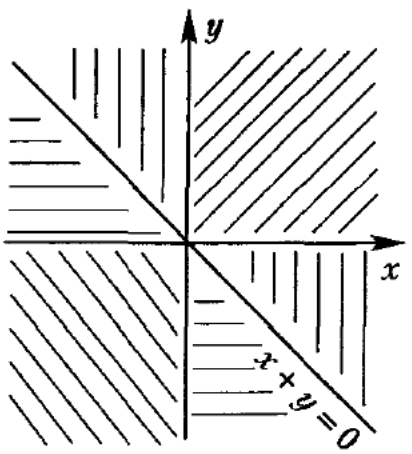


Рис. 42

Поскольку $y'=0$ при $x=0$ или $y=0$, то интегральные кривые пересекают ось Oy под прямым углом, а ось Ox является интегральной кривой. Далее, поскольку на прямой $x+y=0$ производная y' не ограничена (точнее было бы сказать, что производная y' на прямой $x+y=0$ не определена и $y' \to \infty$ при $x+y \to 0$), то интегральные кривые подходят к этой прямой с обеих ее сторон под прямым углом к оси Ox. Таким образом, если интегральную кривую с отрицательной производной изображать наклонной чертой \, а кривые с положительной производной — чертой вида /, то картину интегральных кривых в первом приближении можно представить так, как показано на рис. 42. Для установления областей определенной выпуклости интегральных кривых решаем неравенства

$$y'' = \frac{y(y-y_1)(y-y_2)}{(x+y)^3} \gtrless 0,$$

где

$$y_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\left(-x \pm \sqrt{x^2-4x^3}\right).$$

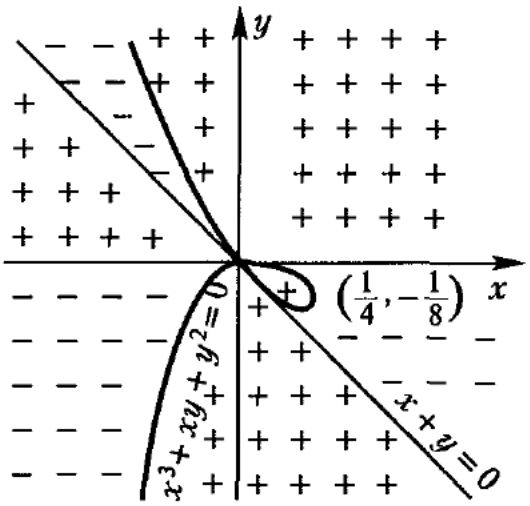


Рис. 43

Решив эти неравенства и обозначив области, где $y''>0$, знаком "+", а области, где $y''<0$ — знаком "−", получаем картину, изображенную на рис. 43.

Таким образом, на кривых $y=0$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ вторая производная обращается в нуль, а на прямой $x+y=0$ она не ограничена (вернее сказать, на прямой $x+y=0$ она не определена, а в окрестности ее не ограничена).

Теперь, имея такую информацию о поведении интегральных кривых, можем представить их картину во втором приближении (рис. 44). Остается выяснить некоторые детали в поведении интегральных кривых.

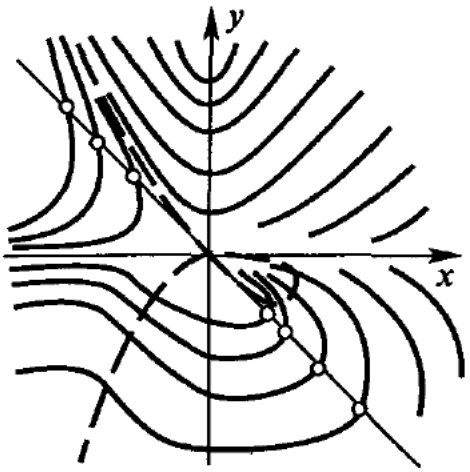


Рис. 44

Поскольку функция $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x+y}$ вместе со своей частной производной по y непрерывна при $x+y \neq 0$, то через каждую точку плоскости ($x+y \neq 0$) проходит единственная интегральная кривая. Далее, поскольку $y=0$ ($x \neq 0$) есть решение данного дифференциального уравнения, то ни одна интегральная кривая не может касаться оси Ox. Является очевидным факт, что все интегральные кривые, заходящие в угол $x+y>0 \wedge y<0$, обязательно попадают в начало координат (вернее было бы говорить об асимптотическом стремлении кривых в начало координат, поскольку при $x=y=0$ правая часть данного уравнения не определена). Отметим также, что существует интегральная кривая, расположенная между семейством параболообразных и семейством гиперболообразных интегральных кривых (см. второй квадрант) и входящая в начало координат.

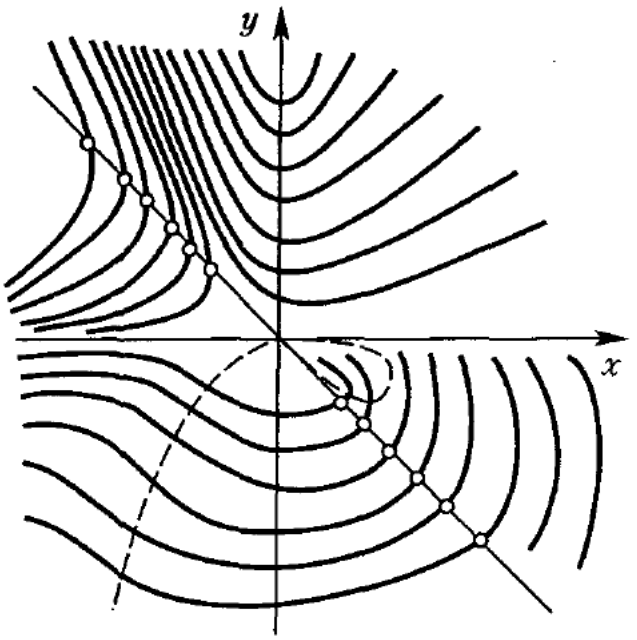


Рис. 45

Наконец, покажем, что ни одна интегральная кривая не входит в начало координат со стороны $x > 0$, $y > 0$. Предполагая противное, записываем интегральное уравнение для кривой, входящей в точку (0, 0) при $x > 0$, $y > 0$:

$$y(x) = \int_0^x \frac{ty(t)\,dt}{t + y(t)}.$$

В силу неравенства

$$\frac{y(t)}{t + y(t)} \leqslant 1 \quad (t > 0,\ y(t) > 0)$$

из последнего уравнения получаем оценку:

$$y(x) \leqslant \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

В свою очередь,

$$\frac{y(t)}{t + y(t)} \leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant \frac{t^2}{2}} \frac{y(t)}{t + y(t)} = \frac{t}{t+2}, \quad y(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^2\,dt}{t+2} \leqslant \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{x^3}{3!}$$

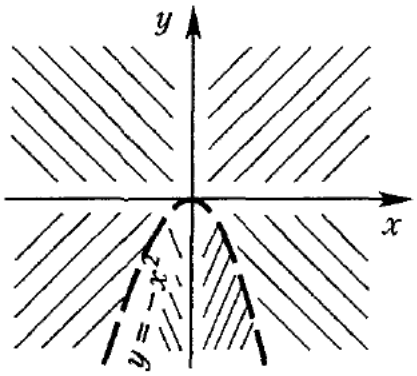


Рис. 46

и т. д. Продолжая оценки, на n-ом шаге получаем

$$y(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что $y(x) \leqslant 0$ при $n \to \infty$. Пришли к противоречию. После этих замечаний строим третье приближение к истинной картине интегральных кривых (рис. 45). ►

649. $y' = \dfrac{2xy}{y + x^2}$.

◄ Из неравенств

$$\frac{2xy}{y + x^2} \gtrless 0$$

находим области знакопостоянства производной y'. Именно, если

$$(x > 0 \ \wedge\ y > 0) \ \vee\ (y + x^2 < 0 \ \wedge\ x > 0) \ \vee\ (x < 0 \ \wedge\ y < 0 \ \wedge\ y + x^2 > 0),$$

то $y' > 0$. На остальной части плоскости, исключая прямые $y = 0$, $x = 0$, где производная равна нулю, а также параболу $y = -x^2$, где производная не определена, интегральные кривые имеют отрицательную производную. Таким образом, в первом приближении картина интегральных кривых имеет вид (рис. 46). Далее, из выражения для второй производной

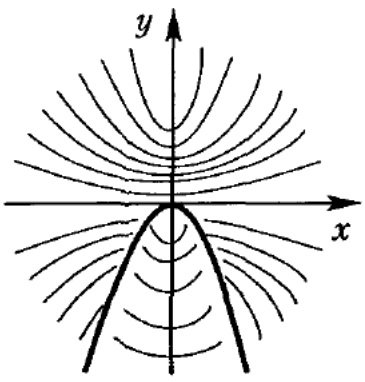


Рис. 47

$$y'' = 2y\,\frac{x^4 + y^2}{(y + x^2)^3}$$

следует, что интегральные кривые при $(y > 0) \ \vee\ (y < 0 \ \wedge\ x^2 + y < 0)$ выпуклы вниз, а при $y < 0 \ \wedge\ x^2 + y > 0$ они выпуклы вверх. Поэтому с учетом выпуклости картину, изображенную на рис. 46, можем уточнить (второе приближение) (рис. 47).

Заметим еще, что при построении кривых на рис. 47 мы принимали во внимание соотношение

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} \frac{2xy}{y + x^2} = 0,$$

геометрически означающее, что интегральные кривые при удалении от начала координат по любой горизонтали распрямляются. Кроме того, при замене x на $-x$ уравнение вида не меняет, поэтому все интегральные кривые симметричны относительно оси Ox.

Наконец, выясним вопрос о том, какие из интегральных кривых стремятся в начало координат. Ясно, что любая интегральная кривая , выходящая из области $y + x^2 < 0$, попадает в угол $(x > 0 \ \wedge y < 0) \ \vee (y + x^2 > 0)$. С другой стороны, через каждую точку (x, y), где $y + x^2 \neq 0$, согласно теореме о существовании единственного решения, проходит единственная интегральная кривая. Следовательно, ни одна интегральная кривая, вышедшая из области $y + x^2 < 0$, не может остановиться в указанном угле. В силу этой же теоремы ни одна из кривых не может пересечь ось Ox, поскольку прямая $y = 0$ является интегральной. Далее, ни одна из интегральных кривых не может уйти вдоль оси Ox на бесконечность, поскольку в рассматриваемом угле $y'' < 0$. Итак, остается единственная возможность, когда все указанные интегральные кривые стремятся попасть в точку $(0, 0)$.

Покажем теперь, что ни одна интегральная кривая не может попасть в начало координат со стороны $y > 0$. Для этого, предполагая противное, для некоторой кривой $y(x) > 0$ при $x > 0$ от дифференциального уравнения перейдем к интегральному

$$y(x) = 2\int_0^x \frac{ty(t)\,dt}{t^2 + y(t)}.$$

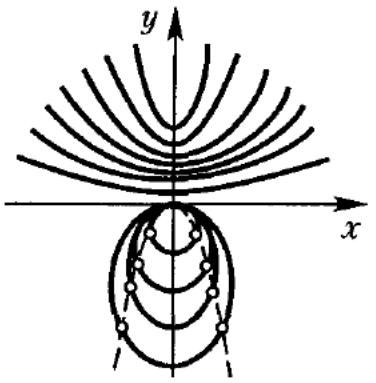


Рис. 48

Отсюда в силу оценки $\dfrac{y(t)}{t^2 + y(t)} \leqslant 1$, находим

$$y(x) \leqslant 2\int_0^x t\,dt = x^2.$$

Аналогично,

$$y(x) \leqslant 2\int_0^x t \max_{0 \leqslant y \leqslant t^2} \frac{y}{t^2 + y}\,dt = \frac{x^2}{2}$$

и т. д. На n-ом шаге получаем неравенство $y(x) \leqslant \dfrac{x^2}{n}$. Следовательно, $y(x) \leqslant 0$ — противоречие.

Учитывая все замечания, строим картину интегральных кривых в третьем приближении (рис. 48). ►

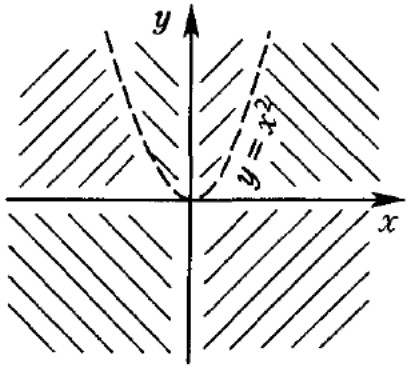


Рис. 49

650. $y' = \dfrac{xy}{y - x^2}$.

◄ Аналогично предыдущим примерам из неравенств

$$\frac{xy}{y - x^2} \gtrless 0$$

находим области монотонного возрастания и убывания интегральных кривых, а затем строим грубую картину поведения их на плоскости Oxy (рис. 49). Далее, из выражения для второй производной

$$y'' = \frac{y(y^2 - 2x^4)}{(y - x^2)^3}$$

видим, что на графиках функций $y = \pm\sqrt{2}x^2$ интегральные кривые меняют направление выпуклости. Области знакопостоянства второй производной изображены на рис. 50.

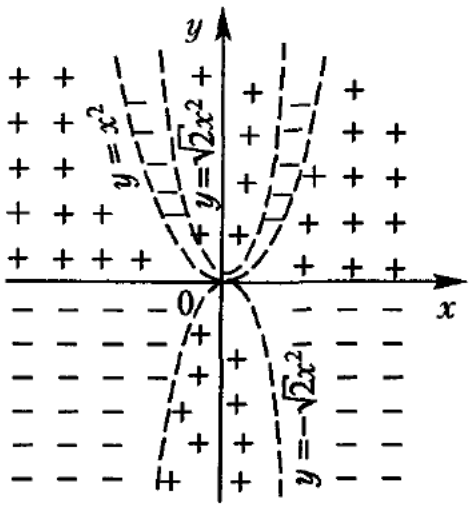


Рис. 50

Проследим за интегральной кривой, идущей из области

$$x < 0 \ \wedge \ y > 0 \ \wedge y < x^2.$$

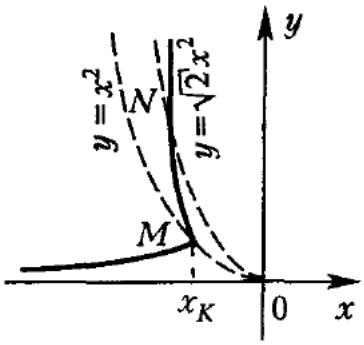


Рис. 51

Поскольку в этой области $y' > 0$ и $y'' > 0$, то ордината кривой растет при увеличении x, а выпуклость кривой направлена вниз (рис. 51). Ясно, что

$$\lim_{x \to x_k - 0} y' = +\infty,$$

а

$$\lim_{x \to x_k + 0} y' = -\infty,$$

поэтому кривая пойдет вверх и левее точки $x = x_k$. В точке M перегиба нет, однако, как следует из рис. 51, кривая поменяет направление выпуклости. Далее, в точке N она должна иметь перегиб, поскольку эта точка лежит на кривой перегибов интегральных кривых $y = \sqrt{2}x^2$. Наконец, поменяв еще раз направление выпуклости, интегральная кривая в силу отрицательности производной уйдет налево вверх (к $+\infty$).

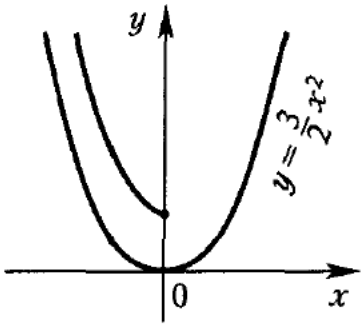


Рис. 52

Теперь проследим за интегральной кривой, выходящей из точки $(0, y)$ и идущей в сторону $x < 0$. Поскольку $y' < 0$ при $y > x^2$, то ордината кривой будет возрастать (рис. 52). Однако, в силу того, что парабола $y = \frac{3}{2}x^2$ является решением данного дифференциального уравнения, наблюдаемая нами интегральная кривая не может ее пересечь, а значит, и уйти из области $y > \frac{3}{2}x^2$.

Следовательно, пространство между параболами

$$y = \sqrt{2}x^2 \quad \text{и} \quad y = \frac{3}{2}x^2$$

будет заполнено гиперболообразными кривыми, одна из которых рассмотрена выше. Парабола же $y = \frac{3}{2}x^2$ служит разделителем указанных кривых.

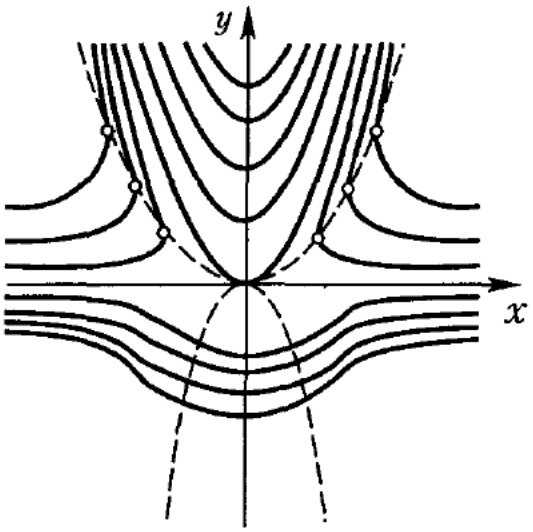


Рис. 53

Далее, поскольку при фиксированном $y \neq x^2$ будет

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xy}{y - x^2} = 0,$$

то все интегральные кривые в области $y < x^2$ приближаются к оси Ox и ее не пересекают (в силу того, что $y = 0$ есть решение и при $y = x^2$ выполняются условия теоремы о единственности интегральной кривой). При $y < -\sqrt{2}x^2$ все интегральные кривые выпуклы вниз, поэтому попасть в точку $(0, 0)$ не могут. Таким образом, в начало координат заходит только две интегральные кривые:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{3}{2}x^2.$$

Итак, принимая во внимание проведенное исследование, строим окончательную картину интегральных кривых (рис. 53). ►

651. Доказать, что если

1) уравнение

$$(ax + by)\,dx + (mx + ky)\,dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах;

2) особая точка $(0, 0)$ этого уравнения — седло,

то оно имеет непрерывный в окрестности начала координат интегрирующий множитель.

◄ Интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y)$, удовлетворяющий в данном случае уравнению

$$(mx + ny)\frac{\partial \mu}{\partial x} - (ax + by)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(b - m), \tag{1}$$

будем искать в виде $\mu = \varphi(\omega)$, где $\omega = \alpha x + \beta y$, α, β — постоянные, подлежащие определению. Подставив значение μ в (1), получим

$$\varphi'(\omega)\Big((m\alpha - a\beta)x + (n\alpha - b\beta)y\Big) = (b - m)\varphi(\omega). \tag{2}$$

Положим $(m\alpha - a\beta)x + (n\alpha - b\beta)y \equiv \lambda(\alpha x + \beta y)$, где λ — некоторая постоянная. Тогда из последнего тождества найдем:

$$\begin{cases} (m-\lambda)\alpha - a\beta = 0, \\ n\alpha - (b+\lambda)\beta = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$, то в силу однородности системы (3) приходим к условию:

$$\begin{vmatrix} m-\lambda & -a \\ n & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(m - b \pm \sqrt{(m-b)^2 - 4(an-bm)}\right).$$

Далее, так как особая точка $(0, 0)$ — седло, то корни λ_1, λ_2 действительные. Следовательно, числа α, β также действительны, и мы имеем, вообще говоря, два интегрирующих множителя, получающихся путем интегрирования уравнения (2):

$$\mu_1 = C_1|\omega_1|^{\frac{b-m}{\lambda_1}}, \quad \mu_2 = C_2|\omega_2|^{\frac{b-m}{\lambda_2}}, \tag{4}$$

где $\omega_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y$, $\omega_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y$, C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Заметим, что так как $b \neq m$ (это следует из условия 1) теоремы), то множители (4) отличны от постоянных.

Поскольку $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то независимо от знака $b - m$ один из показателей в (4) является положительным. Последнее означает, что один из множителей непрерывен. ▶

§ 3. Фазовая плоскость

3.1. Основные понятия.

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

в которую переменная t (время) явно не входит, а функции f_i непрерывно дифференцируемы в некоторой области, называется *автономной*. Каждому решению $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ системы (1) поставим в соответствие движение точки в n-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Кривая, описываемая точкой в процессе движения, называется *траекторией*. Таким образом, $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ суть параметрические уравнения этой траектории. Пространство размерности n, в котором решения системы (1) изображаются в виде траекторий, называется *фазовым пространством*. В частности, если $n = 2$, то фазовое пространство называется *фазовой плоскостью*. Вектор $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ называется *фазовой скоростью*. Положения равновесия автономной системы находятся из условия $f = 0$, т. е. как решения системы конечных уравнений:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

3.2. Построение фазового портрета.

Для того, чтобы начертить на фазовой плоскости картину траекторий автономной системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{2}$$

нужно, во-первых, исследовать особые точки этой системы, а во-вторых, с помощью производных y'_x, y''_{x^2} изучить поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

(заметим, что иногда решения этого уравнения находятся в замкнутом виде).

В том случае, когда требуется построить траектории уравнения

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}),$$

нужно ввести переменную $y = \dot{x}$ и от этого уравнения перейти к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g(x, y),$$

которая является частным случаем системы (2).

3.3. Предельные циклы.

Предельным циклом системы (1) называется замкнутая изолированная траектория этой системы, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, по которым фазовая точка неограниченно приближается к этой замкнутой кривой при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Если траектории системы (1) приближаются к предельному циклу только при $t \to +\infty$, то последний называется *устойчивым*. Если же траектории системы (1) приближаются к предельному циклу только при $t \to -\infty$, то он называется *неустойчивым*. В случае $n = 2$ (фазовая плоскость) рассматривают так называемые полуустойчивые предельные циклы. Именно, предельный цикл на фазовой плоскости называется *полуустойчивым*, если траектории системы (2) с одной стороны приближаются к нему при $t \to +\infty$, а с другой — при $t \to -\infty$. Следовательно, возможны полуустойчивые циклы двух типов.

Теорема. *Пусть K — предельный цикл системы (2), правая часть которой непрерывна вместе со своими частными производными по x и по y. Тогда все внутренние траектории, начинающиеся вблизи K, наматываются на него, как спирали, либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Высказанное утверждение справедливо и для внешних относительно предельного цикла траекторий.*

3.4. Признаки отсутствия предельных циклов.

Признак Бендиксона. *Если правые части уравнений (2) имеют непрерывные частные производные первого порядка в односвязной области D и выражение*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \tag{3}$$

нигде не меняет знак и не равно тождественному нулю, то в области D нет предельных циклов.

Признак Пуанкаре. *Пусть $v(x, y) = C$ — семейство гладких замкнутых кривых, покрывающих плоскость Oxy. Тогда если выражение*

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} f + \frac{\partial v}{\partial y} g \tag{4}$$

в некоторой области D сохраняет постоянный знак, то в ней нет предельных циклов.

Односвязная область D на плоскости Oxy не содержит предельных циклов, если в этой области нет особых точек системы (2).

3.5. Признаки наличия предельных циклов.

Теорема Левинсона—Смита. *Пусть в дифференциальном уравнении*

$$\ddot{x} + \dot{x} f(x) + g(x) = 0, \tag{5}$$

функции f и g непрерывны при всех x и обеспечивают единственное решение задачи Коши, непрерывно зависящее от начальных условий. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:

1) $xg(x) > 0$ *для* $x \neq 0$;

2) f, g *—дифференцируемые функции;*

3) $f(x) < 0$ *на* $(-x_1, x_2)$, *где* x_1, x_2 *положительны,* $f(x) \geqslant 0$ *для всех остальных значений* x, *причем* $F(\infty) = \infty$, *где* $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$;

4) $G(\pm\infty) = \infty$;

5) $G(-x_1) = G(x_2)$, *где* $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$.

Тогда уравнение (5) имеет единственный устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$.

Теорема Рейссига. *Рассмотрим уравнение*

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0, \tag{6}$$

где f, g — непрерывные функции, $f(0) = 0$, $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$. Пусть функции f, g для всех их аргументов непрерывны и обеспечивают существование единственного решения уравнения (6), удовлетворяющего заданным начальным условиям и непрерывно зависящего от этих условий. Пусть, кроме того,

1) $yf(y) \leqslant 0$ *при* $|y| \leqslant \eta_1, \quad \eta_1 > 0;$
2) $f(y)\operatorname{sgn} y \geqslant \varepsilon > 0$ *при* $|y| \geqslant \eta_2 > \eta_1;$
3) $\max\limits_{|y| \leqslant \eta_1} f(y) = M > 0;$
4) $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant M + \varepsilon$ *при* $|x| \geqslant \delta > 0.$

Тогда на фазовой плоскости системы

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -g(x) - f(y)$$

существует по меньшей мере один устойчивый предельный цикл.

В задачах 652–666 для данных уравнений начертить траектории на фазовой плоскости.

652. $\ddot{x} - x + x^2 = 0.$

◀ Полагая $\dot{x} = y$, переходим к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2,$$

из которой почленным делением ее уравнений получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y} \qquad (*)$$

или (при $y \neq 0$)

$$y\,dy = \left(x - x^2\right) dx.$$

Общий интеграл уравнения (*) имеет вид:

$$3\left(y^2 - x^2\right) + 2x^3 = C.$$

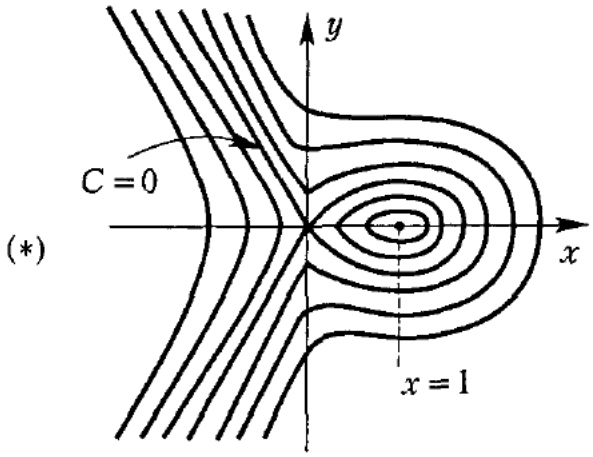


Рис. 54

Поскольку при замене y на $-y$ интегральные кривые вида своих уравнений не меняют, то все они симметричны относительно оси Ox. Давая параметру C конкретные значения и используя обычные средства математического анализа, строим картину траекторий на фазовой плоскости (рис. 54).

Заметим, что кривым, охватывающим точку (1, 0), соответствуют значения C, удовлетворяющие неравенству $-1 \leqslant C < 0$.

Далее, уравнение (*) имеет две особые точки: (0, 0) и (1, 0). Отбрасывая x^2 в указанном уравнении, получаем укороченное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Поскольку его характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни с отличными от нуля действительными частями, то согласно п. 2.2, особая точка (0, 0), являющаяся седлом для укороченного уравнения, будет седлом и для уравнения (*).

Для исследования особой точки (1, 0), как обычно, сначала перенесем начало системы координат в эту точку: $x = 1 + \xi$, $u = \eta$. Отбрасывая в полученном уравнении нелинейные члены, приходим к укороченному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\eta},$$

для которого особая точка (0, 0) является центром. Таким образом, точка (1, 0) для исходной системы может быть фокусом или центром. В силу симметрии интегральных кривых относительно оси Ox (см. п. 2.2), точка (1, 0) — центр. ▶

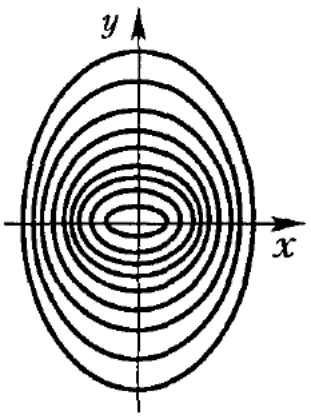


Рис. 55

653. $\ddot{x} + 2x^3 = 0.$

◀ Переходя к системе Oxy, положив $\dot{x} = y$, получаем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x^3.$$

Отсюда почленным делением уравнений, а затем интегрированием находим семейство траекторий на фазовой плоскости: $y^2 + x^4 = C$. Каждая траектория представляет собой деформированную окружность (рис. 55). Очевидно, точка (0, 0) — центр. ▶

654. $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0$.

◀ Полагая $\dot{x} = y$, приходим к уравненню

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x - x^3)}{y},$$

общее решение которого имеет вид:

$$y = \pm\sqrt{C + x^2(2 - x^2)}. \tag{1}$$

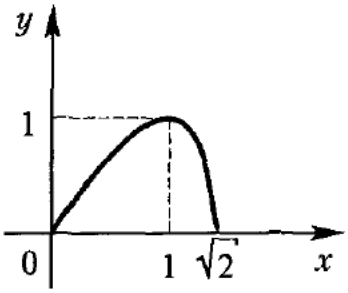


Рис. 56

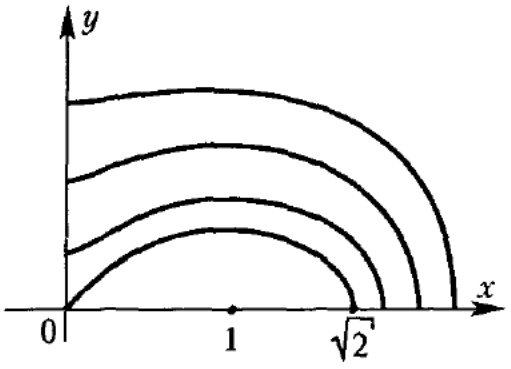


Рис. 57

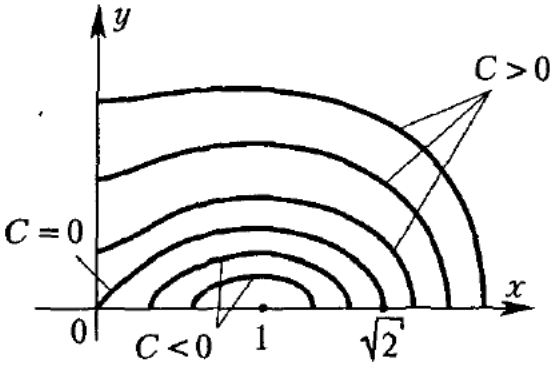


Рис. 58

Поскольку траектории симметричны относительно обеих координатных осей, то далее считаем $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Если в (1) положим $x = y = 0$, то получим $C = 0$. Следовательно, кривая

$$y = \sqrt{x^2(2 - x^2)}$$

проходит через начало координат (рис. 56).

При $C > 0$ все траектории проходят выше этой кривой (рис. 57); причем в точке $x = 0$ производная $y' = 0$, а при $y = 0$ она не ограничена (точнее, $y' \to -\infty$ при $y \to +0$).

Далее, при $C < 0$ из неравенства

$$x^2(2 - x^2) \geqslant -C$$

следует, что

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 + C}} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 + \sqrt{1 + C}} \quad (C \geqslant -1).$$

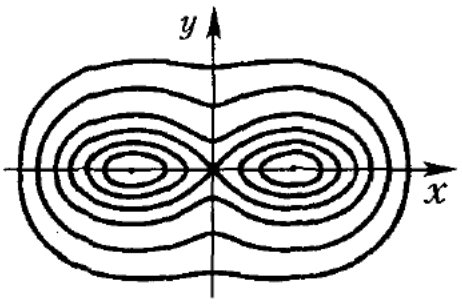


Рис. 59

Значит, при уменьшении C область существования семейства траекторий сужается и при $C = -1$ траектории вырождаются в точку (1, 0) (рис. 58). Наконец, зеркально отобразив кривые, изображенные на рис. 58, относительно оси Ox, а затем полученную картину — относительно оси Oy, будем иметь полную картину траекторий (рис. 59). Очевидно, точки (1, 0) и (−1, 0) — центры, а точка (0, 0) — седло. ▶

655. $\ddot{x} - 2^x + x + 1 = 0$.

◀ Перейдя на фазовую плоскость, имеем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2^x - x - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2^x - x - 1}{y}. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем семейство траекторий:

$$y^2 = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - x^2 - 2x + C. \tag{2}$$

Далее, используя обычные методы математического анализа, строим картину интегральных кривых (2) (рис. 60). Отметим, что кривой, проходящей через точку (1, 0), соответствует значение

$$C = 3 - \frac{4}{\ln 2}.$$

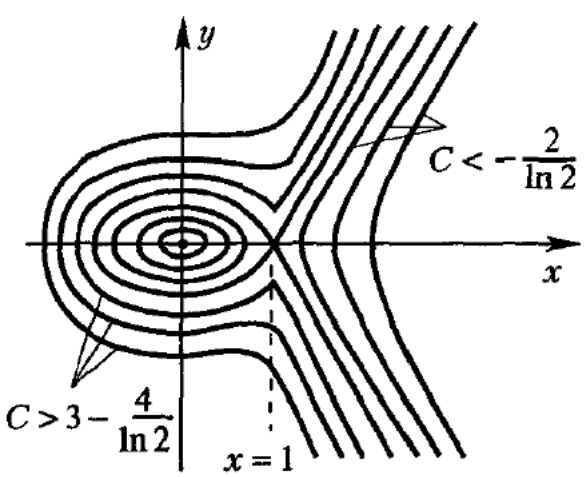


Рис. 60

Замкнутым кривым, охватывающим начало координат, соответствуют значения C, определяемые неравенством

$$-\frac{2}{\ln 2} \leqslant C < 3 - \frac{4}{\ln 2}.$$

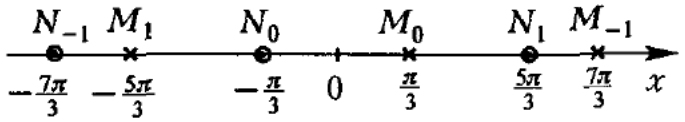


Рис. 61

Значения C для остальных кривых указаны на рис. 60. ▶

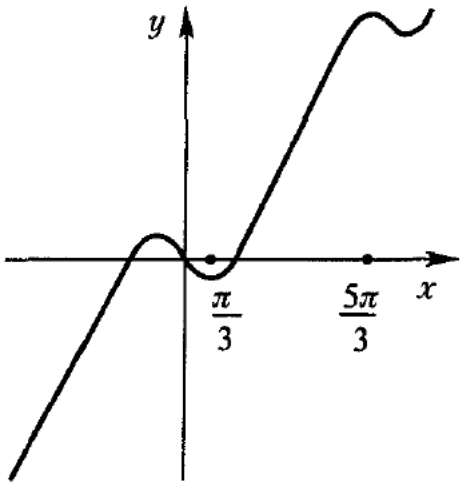


Рис. 62

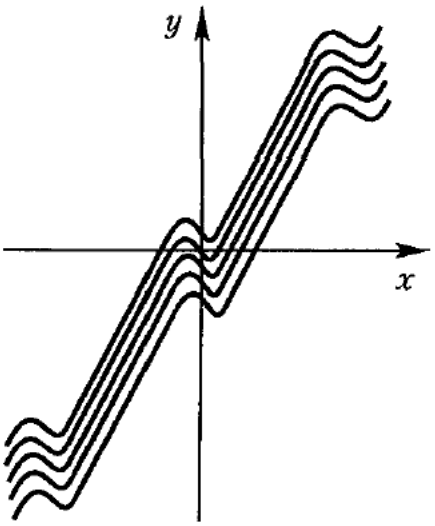


Рис. 63

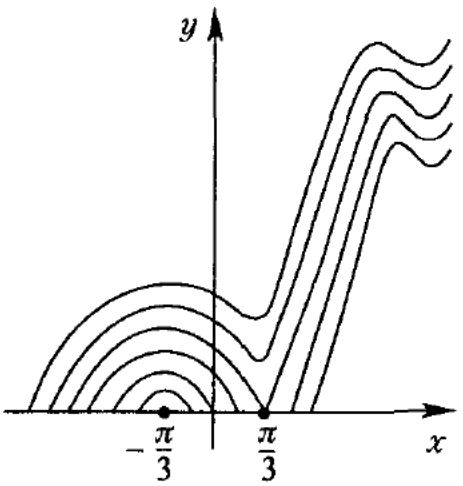


Рис. 64

656. $\ddot{x} + 2\cos x - 1 = 0$.

◀ Из системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 1 - 2\cos x$ получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2\cos x}{y}; \quad y^2 = 2x - 4\sin x + C. \tag{1}$$

Решив конечную систему $y = 0$, $1 - 2\cos x = 0$, находим особые точки: $M_k\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 0\right)$, $N_k\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 0\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Далее, нетрудно установить, что M_k — седла, а N_k — центры (рис. 61). Для построения картины семейства (1) сначала строим кривую

$$\varphi(x) = 2x - 4\sin x$$

(рис. 62), а затем картину семейства

$$\psi(x) = 2x - 4\sin x + C$$

путем параллельного переноса графика функции φ (рис. 63).

Теперь построим семейство кривых

$$\psi_1(x) = 2x - 4\sin x + C \geqslant 0$$

(рис. 64).

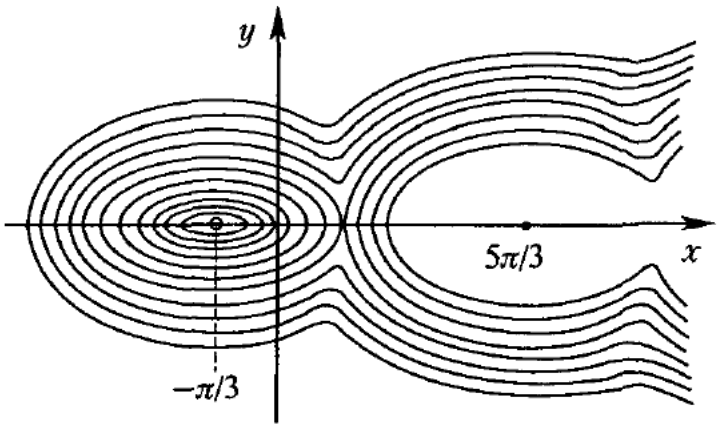


Рис. 65

Далее строим семейство кривых

$$y = \pm\sqrt{\psi_1(x)}$$

(рис. 65) (точнее, на рис. 65 изображена только часть этого семейства в окрестности двух особых точек $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ — центра и седла соответственно).

Для получения всей картины семейства траекторий на фазовой плоскости Oxy следует картину, изображенную на рис. 65, периодически (с периодом 2π) продолжить как влево, так и вправо относительно ее первоначального положения. Тогда получим следующую картину (рис. 66). ▶

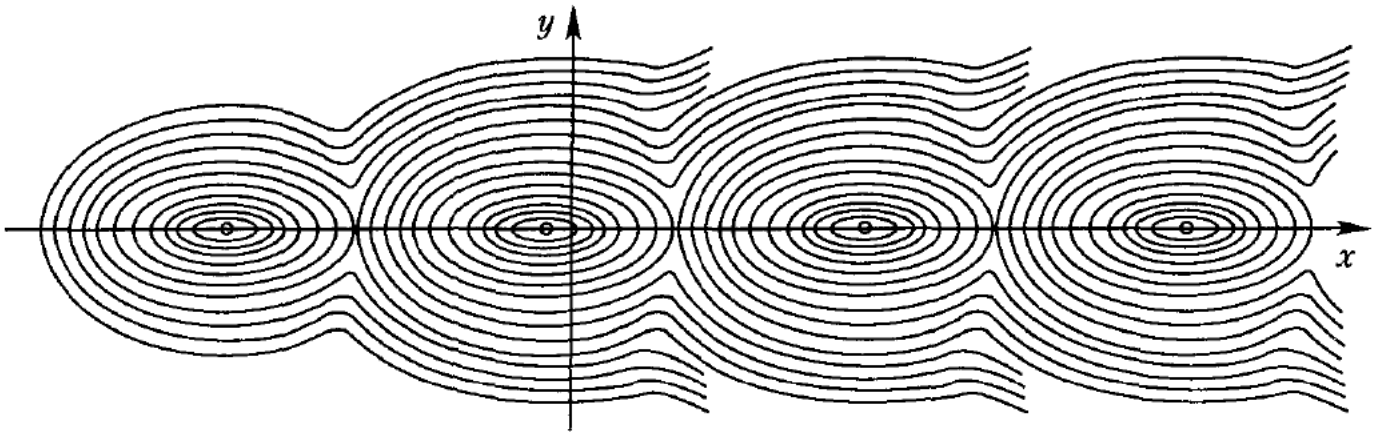


Рис. 66

657. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$

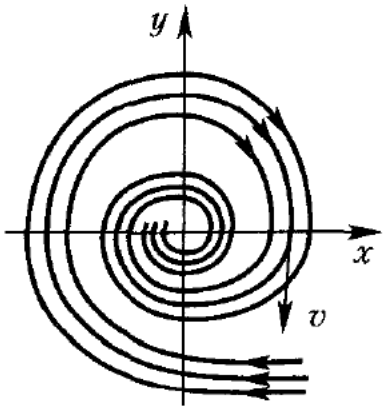


Рис. 67

◀ Сделав замену $\dot{x} = y$, приходим к линейной системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2y - 5x$$

с особой точкой (0, 0). Поскольку корни характеристического уравнения этой системы равны $-1 \pm 2i$, то особая точка — устойчивый фокус. Положив в системе $x = 1$, $y = 0$, находим вектор фазовой скорости $v = (0; -5)$, с помощью которого мы, учитывая устойчивость фокуса, устанавливаем направление закручивания траекторий на фазовой плоскости (рис. 67). ▶

658. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0.$

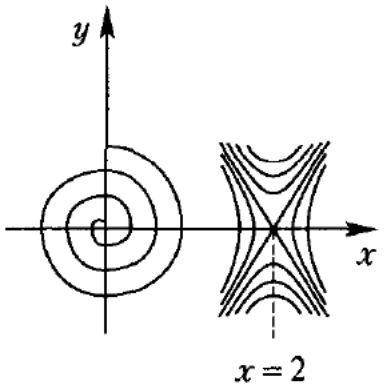


Рис. 68

◀ Полагая в данном уравнении $\dot{x} = y$, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - 2x - y,$$

из которой следует, что точки (0, 0), (2, 0) — особые. Обычное исследование их показывает, что точка (0, 0) — устойчивый фокус, а точка (2, 0) — седло, причем прямые

$$y_1 = x - 2, \quad y_2 = -2x + 4$$

являются касательными к интегральным кривым, входящим в него (рис. 68). Далее, судя по знаку производной

$$y' = \frac{x^2 - 2x - y}{y},$$

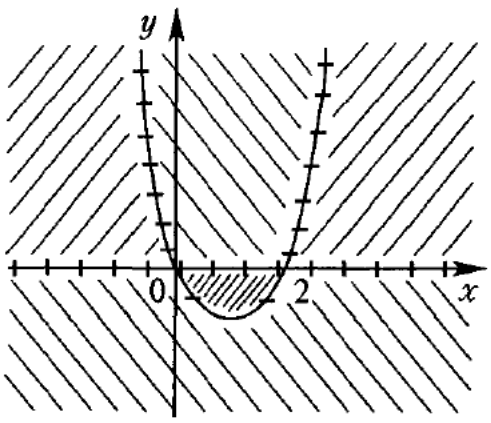


Рис. 69

устанавливаем грубую картину интегральных кривых (рис. 69). Заметим, что на параболе

$$y = x^2 - 2x$$

интегральные кривые достигают экстремальных значений; ось Ox они пересекают под прямым углом, а ось Oy — под углом 45°. Используя эти данные, строим картину интегральных кривых (рис. 70). ▶

659. $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0.$

◀ Из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{y} \qquad (*)$$

находим области возрастания и убывания интегральных кривых на фазовой плоскости Oxy (рис. 71). Кривые

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

пересекаются интегральными кривыми под нулевым, а ось Ox — под прямым углом.

Далее, известным способом находим две особые точки: $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Поскольку корни характеристического уравнения, соответствующего укороченной линейной системе

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -2\xi,$$

мнимы, то особая точка $(-1, 0)$ может быть для системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - y^2 - 1$$

либо фокусом, либо центром. Принимая во внимание то, что при замене y на $-y$ уравнение (*) вида не меняет, убеждаемся, что рассматриваемая особая точка является центром для указанной системы.

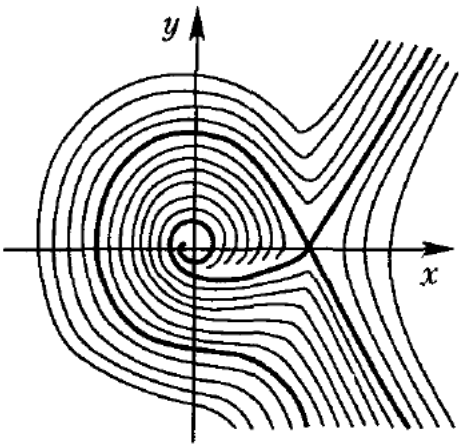


Рис. 70

Точка $(1, 0)$ является седлом, а прямые

$$y_1 = \sqrt{2}(x - 1), \; y_2 = -\sqrt{2}(x - 1)$$

служат касательными к интегральным кривым, входящим в него. Особые точки показаны на рис. 72.

Таким образом, исходя из сказанного и рисунков 71, 72, строим фазовый портрет (рис. 73). ▶

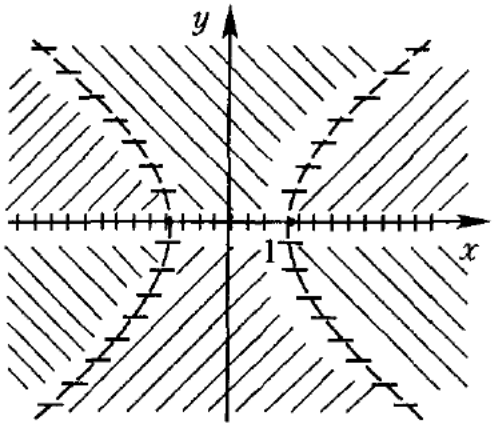


Рис. 71

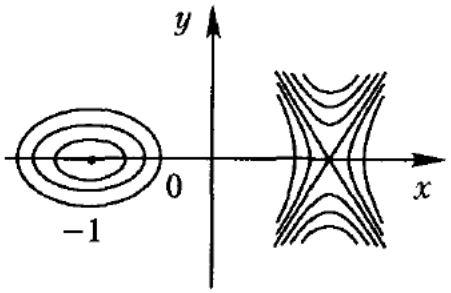


Рис. 72

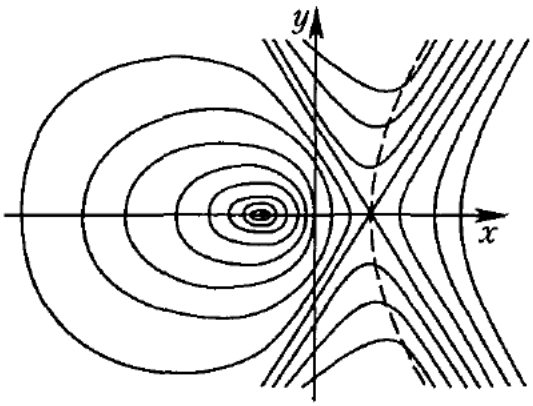


Рис. 73

660. $\ddot{x} + 5\dot{x} - 4\ln\dfrac{x^2+1}{2} = 0.$

◀ Исключив параметр t из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 4\ln\frac{x^2+1}{2} - 5y, \qquad (*)$$

придем к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\ln\frac{x^2+1}{2} - 5y}{y} \qquad (1)$$

с особыми точками: $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Решая неравенства

$$\frac{4\ln\frac{x^2+1}{2} - 5y}{y} \gtrless 0,$$

устанавливаем области монотонности интегральных кривых уравнения (1) на фазовой плоскости (рис. 74). Кривую

$$y = \frac{4}{5}\ln\frac{x^2+1}{2}$$

интегральные кривые пересекают под нулевым углом, а кривую $y = 0$ — под прямым. Теперь исследуем особые точки.

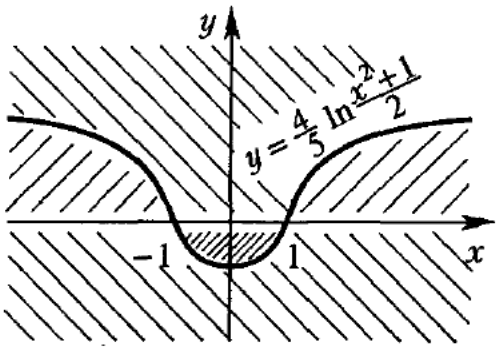


Рис. 74

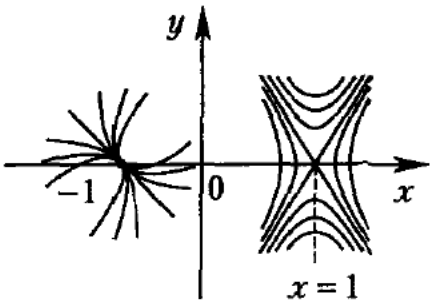


Рис. 75

Полагая в системе (*) $x = 1+\xi$, $y = \eta$ и отбрасывая нелинейные члены, получаем укороченную систему:

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = 4\xi - 5\eta.$$

Поскольку корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2} \quad (\lambda_1 \approx 0{,}70; \quad \lambda_2 \approx -5{,}7),$$

то особая точка (1, 0) — седло. Прямые

$$y = \lambda_1(x-1), \quad y = \lambda_2(x-1)$$

являются касательными к интегральным кривым, входящим в эту точку. Аналогично, полагая в (*) $x = -1+\xi$, $y = \eta$, получаем укороченную систему:

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -4\xi - 5\eta,$$

характеристический определитель которой имеет нули

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4.$$

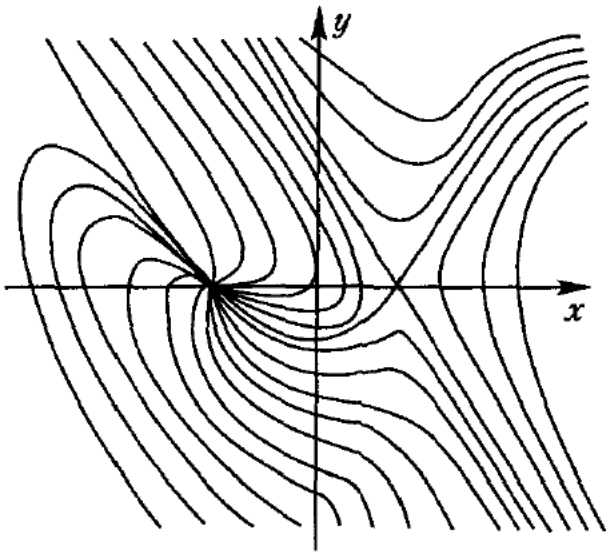


Рис. 76

Следовательно, особая точка (−1, 0) — узел. Из уравнения

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -4 & -5-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

находим, что все интегральные кривые, проходящие через узел, касаются прямой $y = -x - 1$, а из уравнения

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -4 & -5-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

следует, что все указанные кривые пересекаются интегральной кривой, проходящей через узел и имеющей в нем касательную $y = -4x - 4$. Окрестности особых точек изображены на рис. 75.

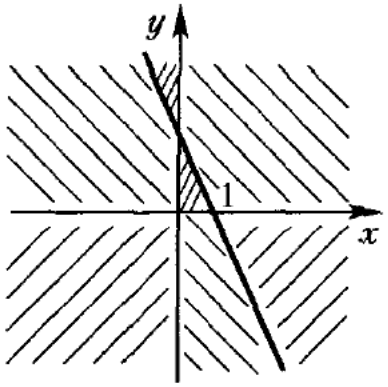


Рис. 77

Наконец, учитывая все полученные данные, строим полную фазовую картину (рис. 76). ▶

661. $\dot{x} = 4 - 4x - 2y, \quad \dot{y} = xy.$

◀ Из системы

$$4 - 4x - 2y = 0, \quad xy = 0$$

находим особые точки: (1, 0), (0, 2). Известным способом (см. выше) устанавливаем, что (1, 0) — седло, а точка (0, 2) — вырожденный узел; причем в седло входят интегральные кривые под углом $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Далее, ось Oy интегральные кривые пересекают горизонтально, а прямую $4-4x-2y=0$ — вертикально. Решая неравенства

$$\frac{xy}{4-4x-2y} \gtrless 0,$$

устанавливаем области монотонности интегральных кривых (рис. 77). Для более четкого представления о поведении интегральных кривых рассмотрим знак второй производной

$$y'' = \frac{4y(y-y_1)(y-y_2)}{(4-4x-2y)^3},$$

где $y_1 = 2 - x + x^{\frac{3}{2}}$, $y_2 = 2 - x - x^{\frac{3}{2}}$ $(x \geqslant 0)$. Если $x < 0$, то

$$y'' = \frac{4y\left(y^2 + y(2x-4) + (1-x)(4+x^2)\right)}{(4-4x-2y)^3}.$$

Решая неравенства

$$\frac{y(y-y_1)(y-y_2)}{(4-4x-2y)^3} \gtrless 0 \quad \text{при } x \geqslant 0$$

и

$$\frac{y}{(4-4x-2y)^3} \gtrless 0 \quad \text{при } x < 0,$$

находим области выпуклости интегральных кривых (рис. 78). Заметим, что на прямой $4-4x-2y=0$ и на кривых $y=y_1$, $y=y_2$ часть траекторий меняет направление выпуклости. Теперь проследим за интегральными кривыми, проходящими через особые точки. Через седло проходит прямая $y=0$ и кривая, пересекающая ось Ox под углом $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$. Эта кривая на параболе $y=y_1$ имеет точку перегиба и пересекает ось Oy горизонтально, а прямую $4-4x-2y=0$ — вертикально. Наконец, под углом 135° к оси Ox она входит в узел. Нижняя часть ее (при $y<0$) проходит под параболой $y=y_2$, поскольку: 1) $y' \sim -\frac{x}{2}$ при $y \to -\infty$, а $y_2' \sim -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; 2) попасть в область между кривыми $y=y_2$ и $4-4x-2y=0$ при $y<0$ рассматриваемая кривая не может, ибо в противном случае, имея выпуклость, направленную вниз, ей бы пришлось либо пересечь прямую $4-4x-2y=0$, что невозможно, либо остаться в этой области, что в силу 1) также невозможно (рис. 79).

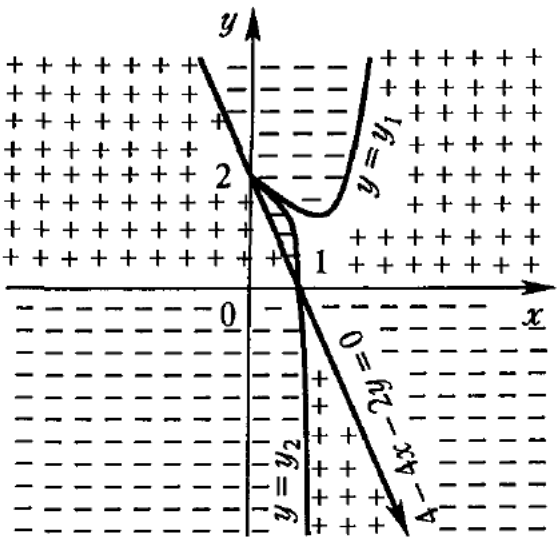


Рис. 78

Рассмотрим узел. Выйдя из угловой точки по касательной к кривым $y=y_1$ и $y=y_2$, траектория (α) может попасть лишь в область III, поскольку в области I выпуклость направлена вверх, что для этой траектории невозможно, а в области II выпуклость направлена вниз и поэтому траектория должна пересечь интегральную кривую (a), что также невозможно. Таким образом, попав в область III, фазовая траектория пересекает прямую $4-4x-2y=0$ вертикально, затем ось Oy — горизонтально и, имея выпуклость, направленную вниз, уйдет налево вверх. Теперь рассмотрим траектории, выходящие из узловой точки и идущие вверх налево. Здесь имеется две возможности. Первая состоит в том, что фазовая траектория (β) сначала попадает в область I, затем в области II, III и, наконец, уходит налево вверх. Вторая возможность: фазовая траектория (γ) попадает в область IV, затем пересекает прямую $4-4x-2y=0$ вертикально, ось Oy — горизонтально, меняет направление выпуклости на кривой $y=y_1$ и, наконец, асимптотически стремится к оси Ox. Возможные выходы фазовых траекторий из узловой точки представлены на рис. 80.

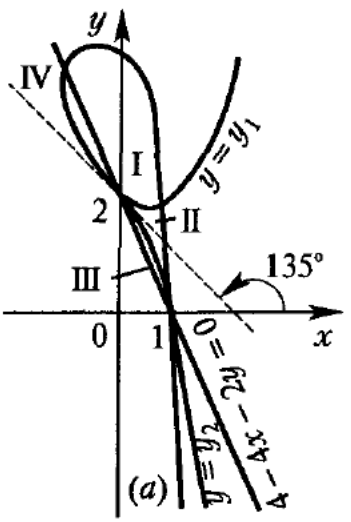


Рис. 79

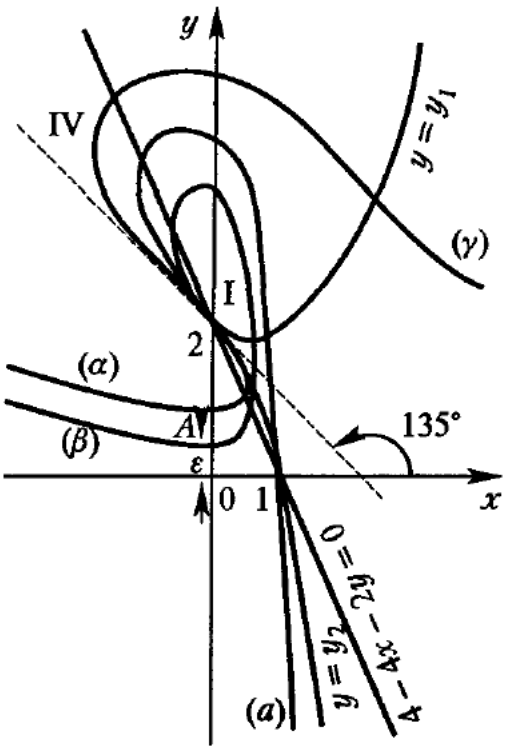


Рис. 80

Покажем наконец, что все выходящие из узла интегральные кривые, за исключением кривой (a), асимптотически стремятся к оси Ox при $x \to +\infty$. Очевидно, для этого достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x$ такое, что интегральная кривая (β) обязательно пересечет прямую $4-4x-2y=0$. С этой целью, заменив в дифференциальном уравнении

$$y' = \frac{xy}{4-4x-2y} \qquad (*)$$

x на $-x$ (ради удобства), перейдем к интегральному уравнению кривой (β):

$$y(x) = \varepsilon + \int_0^x \frac{ty(t)\,dt}{4+4t-2y(t)} \quad (x \geqslant 0). \qquad (1)$$

Очевидно, $y(x) > \varepsilon > 0$ при $x > 0$. Пусть $y(x) < 2(1+x)$ при

$x > 0$. Тогда из (1) следует оценка:

$$y(x) > \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4}\int_0^x \frac{t\,dt}{1+t} = \varepsilon\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\ln(1+x)\right).$$

С учетом последнего неравенства из (1) получаем более точную оценку:

$$y(x) > \varepsilon\left(1 + \frac{1}{16}\int_0^x \frac{4t + t^2 - t\ln(1+t)}{t+1}\,dt\right) \geqslant \varepsilon\left(1 + \frac{1}{16}\int_0^x \frac{4t + t^2 - t\ln(1+t)}{t+4}\,dt\right) =$$

$$= \varepsilon\left(1 + \frac{x^2}{32} - \frac{1}{16}\int_0^x \frac{t\ln(1+t)}{t+4}\,dt\right) \geqslant \varepsilon\left(1 + \frac{x^2}{32} - \frac{1}{16}\int_0^x \ln(1+t)\,dt\right) =$$

$$= \varepsilon\left(1 + \frac{x^2}{32} + \frac{x}{16} - \frac{1+x}{16}\ln(1+x)\right), \quad x \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 < \varepsilon\left(1 + \frac{x^2}{32} + \frac{x}{16} - \frac{1+x}{16}\ln(1+x)\right) < y(x) < 2(1+x).$$

Отсюда уже нетрудно видеть, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0$ такое, что кривая (β) пересечет указанную прямую. Действительное, такое x_0 удовлетворяет неравенству $0 < x_0 < x$, где x есть решение уравнения:

$$\varepsilon\left(1 + \frac{x^2}{32} + \frac{x}{16} - \frac{1+x}{16}\ln(1+x)\right) = 2(1+x), \quad x > 0.$$

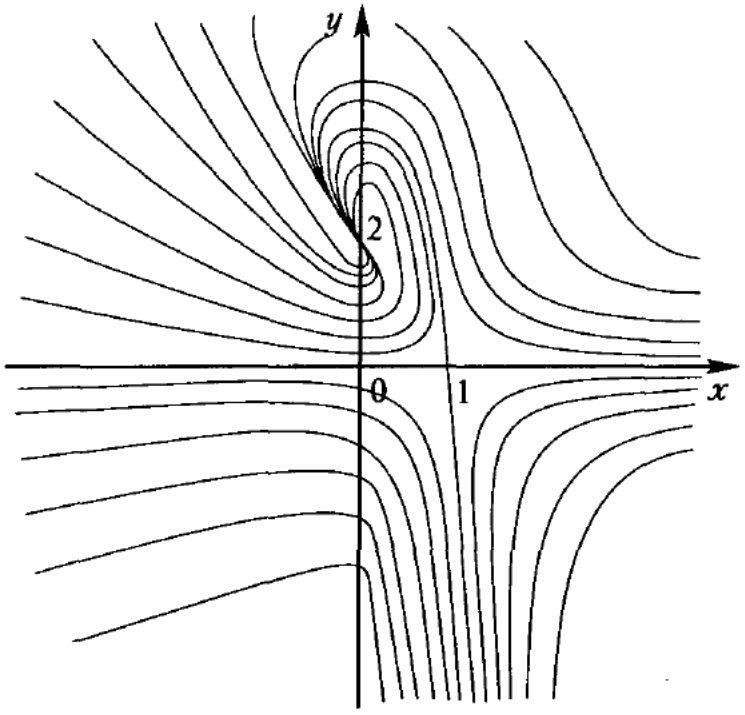


Рис. 81

Далее, при $x \to +\infty$ и ограниченном y из дифференциального уравнения (*) следует, что

$$y'(x) \sim -\frac{y}{4} \Rightarrow y(x) \sim Ce^{-\frac{x}{4}},$$

т. е. при $x \to +\infty$ все интегральные кривые асимптотически стремятся к оси Ox. Поведение интегральных кривых при $y < 0$ не требует детального исследования. Примерный вид фазовых траекторий изображен на рис. 81. ▶

662. $\dot{x} = 2x + y^2 - 1,\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1.$

◀ Из неравенств

$$\frac{6x - y^2 + 1}{2x + y^2 - 1} \gtrless 0$$

определяем области монотонности фазовых траекторий (рис. 82). Отметим при этом, что за исключением двух особых точек (0, 1) и (0, −1) параболу $2x + y^2 - 1 = 0$ траектории пересекают вертикально, а параболу $6x - y^2 + 1 = 0$ горизонтально.

Далее, известным способом нетрудно установить, что точка (0, −1) — неустойчивый фокус, а точка (0, 1) — седло, причем прямые $y = 1 - 3x$ и $y = 1 + x$ являются касательными к интегральным кривым в этой точке (рис. 83). Покажем теперь, что любая траектория, проходящая через точку $(x_0, 0)$, обязательно пересечет параболу $2x + y^2 - 1 = 0$ $(x_0 < 0)$. Поменяв, ради удобства, в уравнении

$$y' = \frac{6x - y^2 + 1}{2x + y^2 - 1}$$

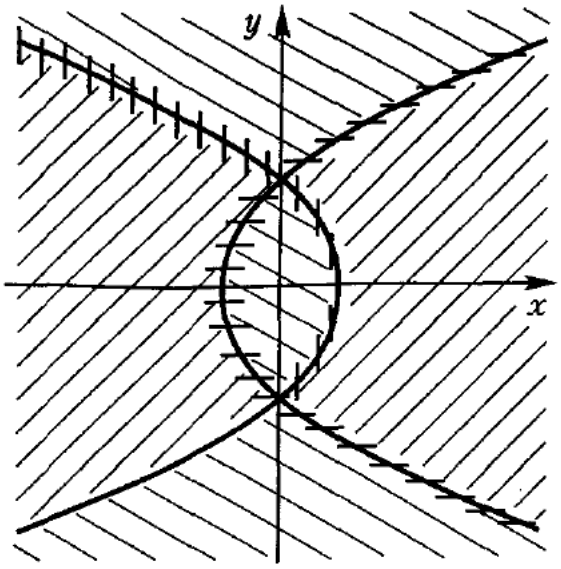


Рис. 82

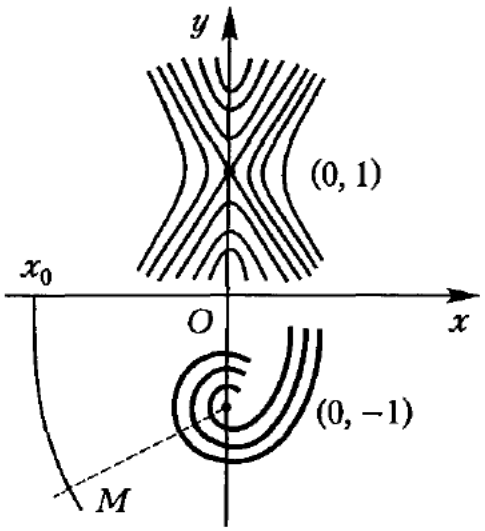


Рис. 83

x на $-x$, а y на $-y$, запишем интегральное уравнение указанной траектории:

$$y(x) = \int\limits_{-x_0}^{x} \frac{6t - 1 + y^2(t)}{2t + 1 - y^2(t)}\, dt. \qquad (1)$$

Поскольку $y^2(t) \geqslant 0$, то из (1) следует неравенство:

$$y(x) \geqslant \int\limits_{-x_0}^{x} \frac{6t - 1}{2t + 1}\, dt = 3(x + x_0) - 8 \ln \frac{2x + 1}{1 - 2x_0},$$

указывающее на возрастание ординаты исследуемой кривой. Поскольку это возрастание происходит быстрее, чем по прямолинейному закону, то обязательно найдется такое x_1, что

$$y(x_1) = \sqrt{1 + 2x_1}.$$

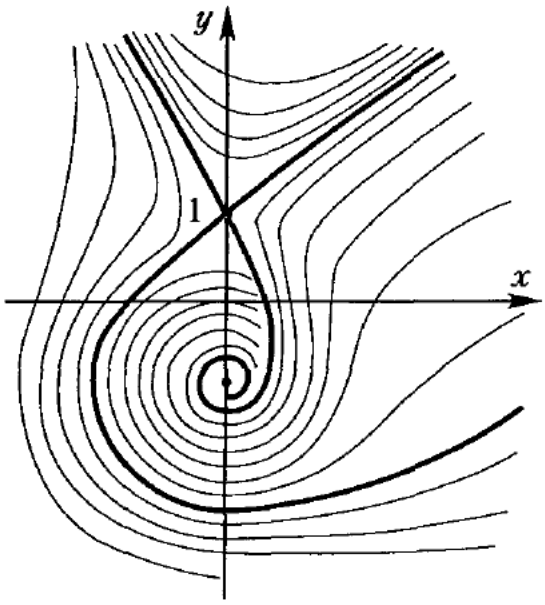


Рис. 84

Далее, из выражения для второй производной

$$y'' = \frac{8}{(2x + y^2 - 1)^2}\left(y^2 - 1 - 2xyy'\right) = \frac{8}{(2x + y^2 - 1)^3}\left((y^2 - 1)(2x + y^2 - 1 + 2xy) - 12x^2y\right)$$

видно, что между параболами $6x - y^2 + 1 = 0$ и $2x + y^2 - 1 = 0$ при $y < 0$ все траектории имеют выпуклость, направленную вниз. Поэтому интегральные кривые пересекут параболу $6x - y^2 + 1 = 0$ и далее уйдут вверх направо.

Таким образом, учитывая все приведенное, строим семейство фазовых траекторий (рис. 84). ►

663. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2,\ \dot{y} = 2xy.$

◄ Поскольку дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1 - x^2 - y^2}$$

при замене x на $-x$, y на $-y$ вида не меняет, то картина фазовых траекторий симметрична как относительно оси Ox, так и оси Oy. Далее, легко найти, что особые точки $(0, \pm 1)$ — центры, а точки $(\pm 1, 0)$ — седла, через которые проходит эллиптическая траектория

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1.$$

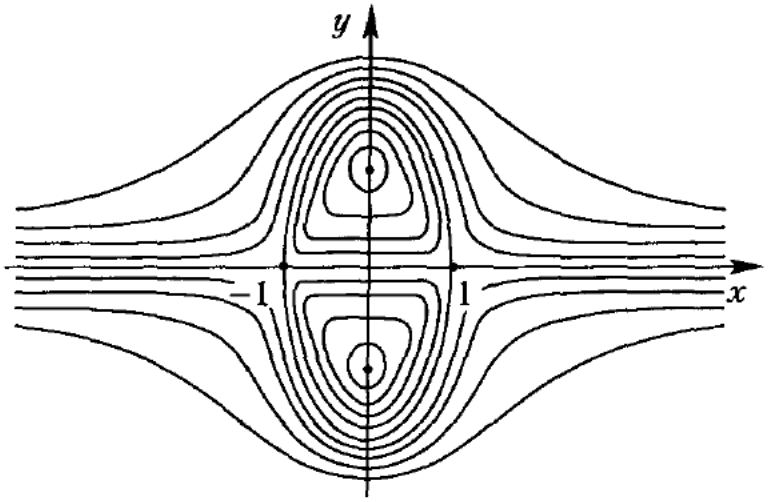


Рис. 85

Далее, решив неравенства

$$\frac{xy}{1-x^2-y^2} \gtrless 0,$$

находим участки монотонного убывания (возрастания) фазовых траекторий (рис. 85). ▶

664. $\dot{x} = (x+y)^2 - 1$, $\dot{y} = -y^2 - x + 1$.

◀ Как и в предыдущих примерах, сначала находим области монотонности интегральных кривых (рис. 86), а затем выявляем особые точки и их характер: $(0, -1)$ — седло, $(1, 0)$ — неустойчивый фокус, $(-3, 2)$ — узел, $(0, 1)$ — седло. Из укороченной системы дифференциальных уравнений следует, что в точку $(0, -1)$ интегральные кривые входят, касаясь прямых

$$y = \left(-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)x - 1 \quad \text{и} \quad y = -\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)x - 1;$$

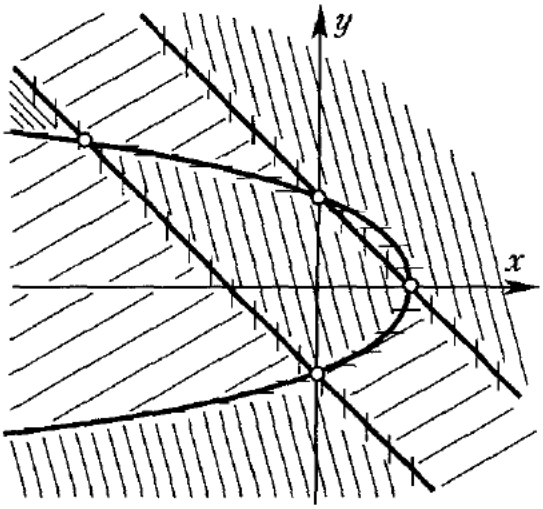


Рис. 86

в точку $(0, 1)$ — прямых

$$y = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + 1 \quad \text{и} \quad y = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + 1.$$

В узловой точке траектории касаются прямой

$$y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(x+3) + 2.$$

Через эту точку проходит также интегральная кривая с касательной

$$y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(x+3) + 2.$$

Особые точки и их малые окрестности представлены на рис. 87.

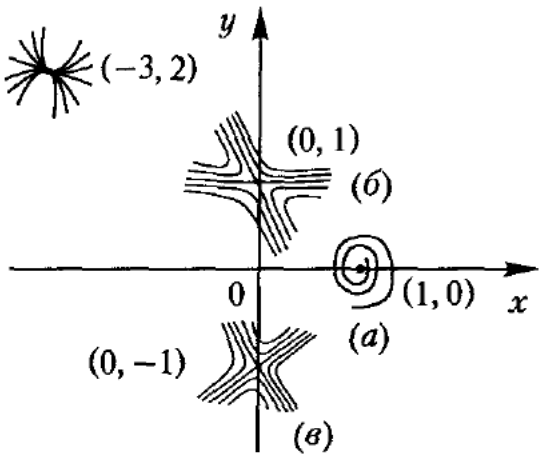


Рис. 87

Наконец, представляется интересным выяснить поведение интегральных кривых, проходящих через особые точки. В частности, покажем, что кривая $(а)$ перейдет в одну из спиралей полюса $(1, 0)$, а кривая $(б)$ обойдет полюс и в полосе $(x+y)^2 \leqslant 1$ пройдет ниже кривой $(а)$.

Записав интегральное уравнение кривой $(б)$ при $x > 0$, $y \geqslant 0$:

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{1 - t - y^2(t)}{(t + y(t))^2 - 1}\,dt \qquad (1)$$

и приняв во внимание неравенства $0 \leqslant y(t) \leqslant 1$ и $t + y(t) > 1$, из (1) имеем оценку:

$$y(x) \geqslant 1 - \int_0^x \frac{1 - (t + y(t))}{1 - (t + y(t))^2}\,dt = 1 - \int_0^x \frac{dt}{1 + t + y(t)} > 1 - \int_0^x \frac{dt}{2} = 1 - \frac{x}{2}.$$

Отсюда следует, что кривая $(б)$ пересечет ось Ox в точке $x_0 \geqslant 2$. Далее, в полосе $(x+y)^2 < 1$ производная $y' > 0$, значит, ордината кривой $(а)$ возрастает и поэтому последняя может пересечь прямую $x + y = 1$ в точке (x_1, y_1), где $x_1 < 2$. Таким образом, траектории $(а)$ и $(б)$ "разминутся": траектория $(а)$, как видно из рис. 88, превратится в спираль, а траектория $(б)$, обогнув полюс и совершив вертикальное пересечение прямых $x + y = 1$ и $x + y = -1$, станет асимптотически сближаться с кривой $(в)$.

Изучить поведение других из указанных выше интегральных кривых, примерный вид которых изображен на рис. 88, предоставляем читателю.

Таким образом, исходя из проведенных исследований, строим эскизный портрет фазовых траекторий (рис. 89). ►

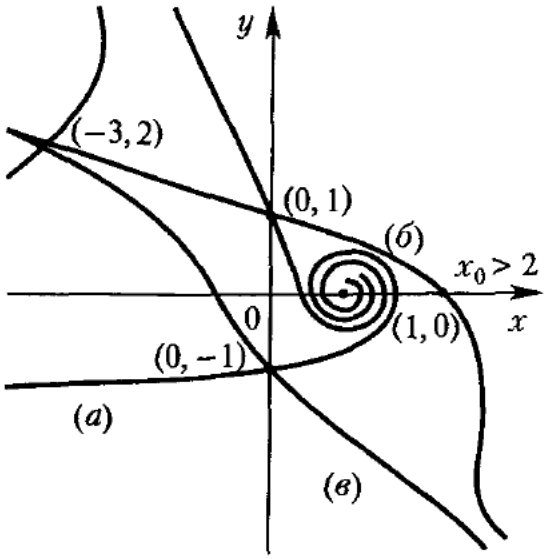


Рис. 88

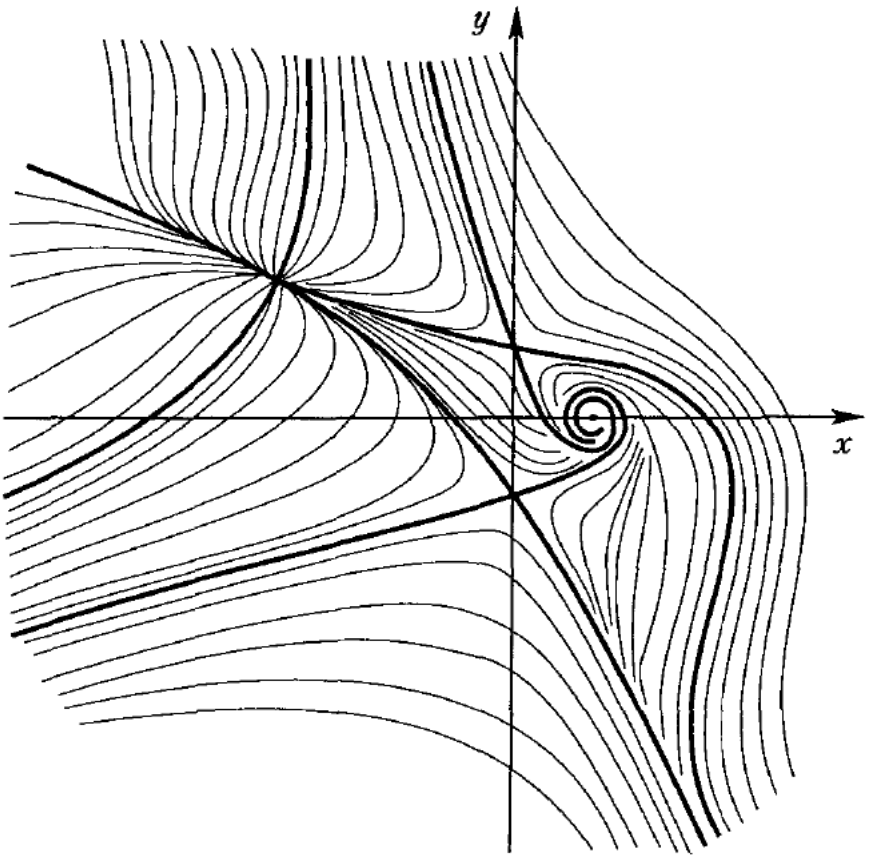


Рис. 89

665. $\dot{x} = (2x - y)^2 - 9,\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9.$

◄ Из неравенств

$$\frac{(x-2y)^2-9}{(2x-y)^2-9} \gtrless 0$$

находим области монотонности интегральных кривых (рис. 90). Заметим, что кривые

$$2x - y = \pm 3$$

интегральные кривые пересекают вертикально, а прямые

$$x - 2y = \pm 3$$

— горизонтально. Далее, легко обнаружить, что особые точки $(-1, 1)$ и $(1, -1)$ — седла, а точки $(3, 3)$ и $(-3, -3)$ — узлы; причем интегральная прямая $y = x$ проходит через узловые точки, а две другие интегральные кривые проходят через них перпендикулярно указанной прямой. Угловые коэффициенты касательных к интегральным кривым в точке $(-1, 1)$ равны $k_1 = 2+\sqrt{3}$, $k_2 = 2-\sqrt{3}$. Перейдя к переменным $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2y)^2-9}{(2x-y)^2-9}$$

преобразуем к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{uv}{\alpha + \beta u^2 + \gamma v^2}.$$

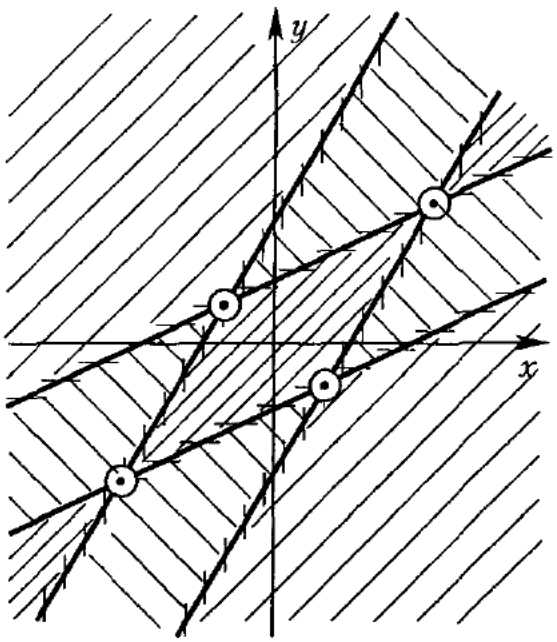


Рис. 90

Поскольку при замене u на $-u$ или v на $-v$ последнее уравнение вида не меняет, то интегральные кривые расположены симметрично как относительно прямой $x + y = 0$, так и прямой $x - y = 0$.

Таким образом, учитывая все сказанное, строим семейство фазовых траекторий (рис. 91). ►

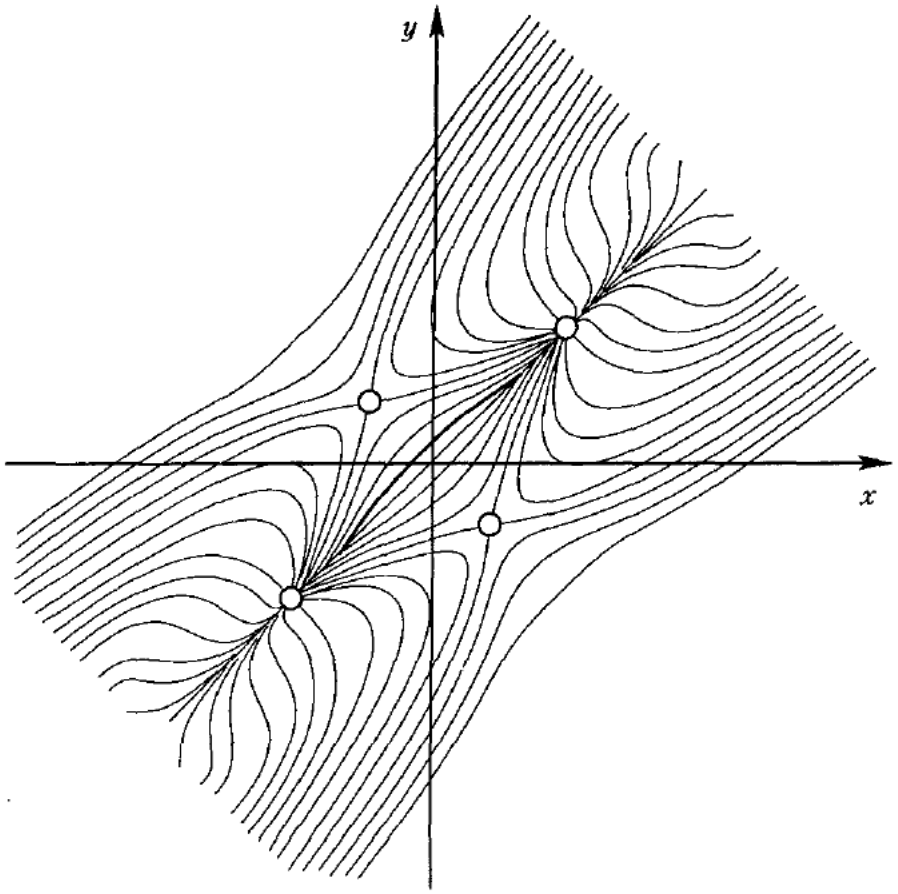


Рис. 91

666. $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = (x - y)(x - y + 2)$.

◀ Переходя к новой системе координат Ouv по формулам $x = v$, $y = 1 - u$, из данной системы получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2 - u}{(u + v)^2 - 1},$$

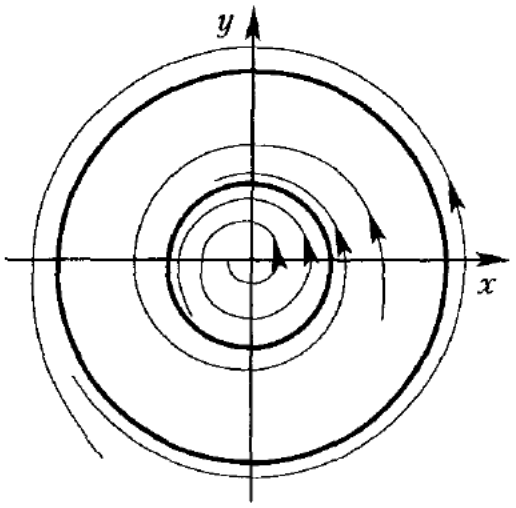


Рис. 92

интегральные кривые которого уже изучены в примере 664. Следовательно, если изображенную на рис. 89 систему координат сначала параллельно перенести вправо на единицу, а затем повернуть ее на угол 90° против хода часовой стрелки, то мы получим портрет семейства фазовых траекторий данной системы дифференциальных уравнений. ▶

Начертить на фазовой плоскости траектории систем 667–669, записанных в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы.

667. $\frac{dr}{dt} = r(r - 1)(r - 2)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

◀ Почленно разделив одно уравнение на другое, получаем

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(r - 1)(r - 2). \tag{1}$$

Отсюда, если $0 < r < 1$, то $\frac{dr}{d\varphi} > 0$, т. е. $r = r(\varphi)$ монотонно возрастает при $\varphi \to +\infty$ ($t \to +\infty$); если $1 < r < 2$, то $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, т. е. $r = r(\varphi)$ монотонно убывает при $t \to +\infty$. Далее, очевидно, что $r = 1$ есть решение уравнения (1). Следовательно, согласно п. 3.3, окружность $r = 1$ есть устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим еще одну замкнутую траекторию $r = 2$. Поскольку при $1 < r < 2$ производная $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, а при $r > 2$ будет $\frac{dr}{d\varphi} > 0$, то траектории $r = r(\varphi)$ при $t \to +\infty$ удаляются от окружности $r = 2$. Следовательно, замкнутая кривая $r = 2$ — неустойчивый предельный цикл (рис. 92). Других замкнутых траекторий данная система не имеет. ▶

668. $\frac{dr}{dt} = \sin r$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

◀ Из уравнения $\sin r = 0$ следует, что $r = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$ есть изолированные замкнутые траектории данной системы.

Если $0 < r < \pi$, то $\sin r > 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0$. Поэтому все траектории, выходящие из достаточно малой окрестности начала координат, приближаются к окружности $r = \pi$ при $t \to +\infty$. Если же

$\pi < r < 2\pi$, то $\frac{dr}{dt} < 0$. Следовательно, $r \to \pi + 0$ при $t \to +\infty$, т. е. окружность $r = \pi$ является устойчивым предельным циклом.

Далее, пусть $2\pi < r < 3\pi$. Тогда $\frac{dr}{dt} > 0$ и при $t \to +\infty$ спирали удаляются от окружности $r = 2\pi$. Таким образом, цикл

$$r = 2\pi$$

является неустойчивым.

Аналогичным образом устанавливаем, что окружность

$$r = 3\pi$$

— устойчивый цикл. Вообще, окружности

$$r = (2k+1)\pi, \quad k = \overline{0, \infty}$$

представляют собой устойчивые, а окружности

$$r = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

— неустойчивые циклы (рис. 93). ▶

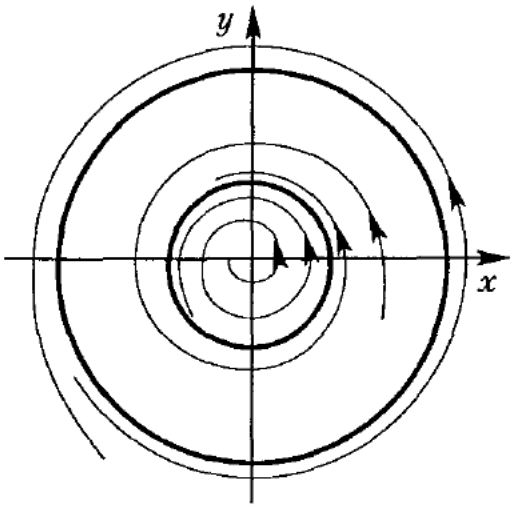


Рис. 93

669. $\frac{dr}{dt} = r(1-r)\sin\frac{1}{1-r}$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

◀ Очевидно, окружности

$$r = 1 - \frac{1}{k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

являются изолированными траекториями данной системы. Исследуем их на устойчивость.

Пусть $0 < r < 1 - \frac{1}{\pi}$. Тогда $\frac{dr}{dt} > 0$, значит, спирали приближаются к окружности $r = 1 - \frac{1}{\pi}$ изнутри. Если $1 - \frac{1}{\pi} < r < 1 - \frac{1}{2\pi}$, то $\frac{dr}{dt} < 0$. Следовательно, фазовые траектории навиваются на эту окружность извне. Таким образом,

$$r = 1 - \frac{1}{\pi}$$

— устойчивый предельный цикл.

Аналогичные рассуждения показывают, что цикл

$$r = 1 - \frac{1}{2\pi}$$

неустойчив. Вообще, циклы

$$r = 1 - \frac{1}{(2n+1)\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— устойчивые, а циклы

$$r = 1 - \frac{1}{(2n+2)\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— неустойчивые. Точно также находим, что циклы

$$r = 1 + \frac{1}{2\pi}, \quad 1 + \frac{1}{4\pi}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{(2n+2)\pi}, \quad \ldots$$

устойчивы, а циклы

$$r = 1 + \frac{1}{\pi}, \quad 1 + \frac{1}{3\pi}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, неустойчивы. Начертить фазовые траектории предоставляем читателю. ▶

670. При каких условиях система

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

где функция f непрерывна, имеет предельный цикл? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив? Полуустойчив?

◀ Пусть уравнение $f(r) = 0$ имеет изолированное положительное решение $r = R$, т. е. $\exists \varepsilon > 0$ такое, что на сегменте $[R - \varepsilon, R + \varepsilon]$ других решений нет. Пусть функция f определена на этом

отрезке. Интегрируя систему, получаем

$$\varphi = C_1 + \int_{R-\varepsilon}^{r} \frac{d\rho}{f(\rho)}, \quad R-\varepsilon < r < R,$$

$$\varphi = C_2 + \int_{r}^{R+\varepsilon} \frac{d\rho}{f(\rho)}, \quad R < r < R+\varepsilon.$$

Отсюда видим, что если несобственные интегралы

$$\int_{R-\varepsilon}^{r} \frac{d\rho}{f(\rho)} \quad \text{и} \quad \int_{r}^{R+\varepsilon} \frac{d\rho}{f(\rho)} \tag{1}$$

расходятся к $\pm\infty$, то при $r \to R+0$ или $r \to R-0$ полярный угол φ стремится к бесконечности определенного знака, т. е. окружность, уравнение которой $r = R$, является предельным циклом.

Далее, если $f(r) < 0$ при $R < r < R+\varepsilon$ и $f(r) > 0$ при $R-\varepsilon < r < R$, то все достаточно близкие траектории при $t \to +\infty$ приближаются как изнутри, так и извне к окружности $r = R$, т. е. предельный цикл будет устойчивым. Очевидно, цикл $r = R$ будет неустойчивым, если функция f при переходе через нуль меняет знак с "$-$" на "$+$". Наконец, полуустойчивость наблюдается в том случае, когда с какой-либо стороны траектории приближаются к циклу при $t \to +\infty$, а с другой — удаляются. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\operatorname*{sgn}_{(R,\,R+\varepsilon)} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname*{sgn}_{(R-\varepsilon,\,R)} \frac{dr}{d\varphi},$$

т. е. в окрестности $r = R$ функция f знака не меняет.

Разбор вариантов, когда функция f существует только в одной из полуокрестностей точки $r = R$ или когда только один из интегралов (1) является расходящимся, предоставляем читателю. ▶

671. При каких значениях постоянной a система

$$\frac{dr}{dt} = (r-1)(a+\sin^2\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1$$

имеет устойчивый предельный цикл? Неустойчивый?

◀ Разделив одно уравнение почленно на другое и проинтегрировав, получаем:

$$|r-1| = C\exp\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right).$$

Отсюда видим, что замкнутые кривые возможны только при $C = 0$ (любом $a \neq -\frac{1}{2}$), а также при $a = -\frac{1}{2}$ (любом C). Однако в последнем случае мы имеем семейство замкнутых, но не изолированных кривых, поскольку значение параметра C можно менять непрерывно. Таким образом, окружность $r = 1$ — единственное изолированное периодическое решение $\left(a \neq -\frac{1}{2}\right)$. Ясно, что $r = r(\varphi) \to 1$ при $\varphi \to +\infty$ только в случае, когда $a < -\frac{1}{2}$, т. е. предельный цикл устойчив лишь при $a < -\frac{1}{2}$. ▶

В задачах 672–678 установить, имеются ли предельные циклы.

672. $\dot{x} = x^5 + 3x^3 + y^2$, $\dot{y} = x^3 + y^5 + y^3 + y$.

◀ Поскольку функции $f = f(x, y) = x^5 + 3x^3 + y^2$, $g = g(x, y) = x^3 + y^5 + y^3 + y$ имеют непрерывные частные производные и выражение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 5x^4 + 9x^2 + 5y^4 + 3y^2 + 1 > 0,$$

то согласно признаку Бендиксона на фазовой плоскости нет предельных циклов. ▶

673. $\dot{x} = x^3 - 2y^3$, $\dot{y} = 3x + y$.

◀ Возьмем семейство гладких замкнутых линий, покрывающих плоскость Oxy, в виде

$$v(x, y) \equiv 3x^2 + y^4 = C.$$

Поскольку выражение

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} f + \frac{\partial v}{\partial y} g = 6x\left(x^3 - 2y^3\right) + 4y^3(3x + y) = 6x^4 + 4y^4 > 0,$$

то согласно признаку Пуанкаре данная система дифференциальных уравнений предельных циклов не имеет. ▶

674. $\dot{x} = x^2 + y^2 + 1,\ \dot{y} = xy.$

◀ Поскольку система не имеет особых точек, то согласно п. 3.4 никакая односвязная область на плоскости Oxy предельных циклов не имеет.▶

675. $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x}^3 + x = 0.$

◀ Переходим к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2y - y^3 - x$$

и применяем признак Бендиксона:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(-2y - y^3 - x) = -2 - 3y^2 < 0;$$

значит, предельных циклов нет. ▶

676. $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$

◀ Пользуемся теоремой Левинсона—Смита. Здесь функции $f = f(x) = x^2 - 1$, $g = g(x) = x^3$ непрерывны при всех x и обеспечивают, очевидно, единственность решения задачи Коши, непрерывно зависящего от начальных условий. Кроме того, выполняются условия:

1) $xg(x) = x^4 > 0\ \forall x \neq 0$;

2) f, g — дифференцируемые функции;

3) $x^2 - 1 < 0$ на $(-1, 1)$ и $x^2 - 1 \geqslant 0$ при $|x| \geqslant 1$;

4) $F(x) = \int\limits_0^x (s^2 - 1)\,ds = \frac{x^3}{3} - x$ и $F(\infty) = \infty$;

5) $G(x) = \int\limits_0^x s^3\,ds = \frac{x^4}{4}$ и $G(\pm\infty) = \infty$;

6) $G(-1) = G(1) = \frac{1}{4}$.

Следовательно, согласно указанной теореме, на фазовой плоскости Oxy имеется единственный устойчивый предельный цикл. ▶

677. $\ddot{x} + \dot{x}^3 - \dot{x} + x = 0.$

◀ Применяем теорему Рейссига. Поскольку

1) $f(0) = 0$, где $f(y) = y^3 - y$;

2) $xg(x) > 0$, где $g(x) = x$ при $x \neq 0$;

3) $yf(y) = y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) \leqslant 0$ при $|y| \leqslant 1$;

4) $f(y)\operatorname{sgn} y = |y|(y^2 - 1) \geqslant \varepsilon > 0$ при $|y| \geqslant \eta_2 > 1$;

5) $\max\limits_{|y|\leqslant 1} |y^3 - y| = M = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$;

6) $g(x)\operatorname{sgn} x = |x| \geqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} + \varepsilon$ при $|x| \geqslant \delta = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \varepsilon$;

7) функции f и g непрерывны и обеспечивают выполнение условий существования единственного и локально устойчивого решения задачи Коши, то по указанной теореме на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ существует по меньшей мере один устойчивый предельный цикл. ▶

678. $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, где F — непрерывная функция и $F(y) > 0$ при $y > 0$, $F(y) < 0$ при $y < 0$.

◀ Возьмем семейство гладких замкнутых кривых $v(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C$ и составим выражение

$$\Omega = f\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial v}{\partial y},$$

где $f = f(x, y) = y$, $g = g(x, y) = -x - F(y)$ — правые части системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - F(y).$$

Тогда, поскольку $\Omega = -2yF(y) < 0$, то согласно признаку Пуанкаре предельных циклов на фазовой плоскости нет. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на устойчивость решения уравнений и систем:

1. $x^2y'' - 2xy' + y = 0$. **2.** $(2x+1)^2y'' + 3(2x+1)y' - 4y = 0$.

3. $x^3y''' + xy' - y = 0$. **4.** $(1+x^2)y'' + xy' + 2y = 0$.

5. $\begin{cases} x' - 2ty = 0, \\ y' + 2tx = 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x' + t(2x - y) = 0, \\ y' - t(x - y) = 0. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} t^2x'' + tx' + x - y = 0, \\ t^2y'' + ty' - 2x + y = 0. \end{cases}$

8. $y'' + 2y' + 5y = 0$. **9.** $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' = 0$. **10.** $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$.

11. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0$. **12.** $x' + x + 5y = 0$, $y' - x - y = 0$.

13. $x' = x + z - y$, $y' = x + y - z$, $z' = 2x - y$. **14.** $x' = 2x - z$, $y' = x - y$, $z' = 3x - y - z$.

15. $x' = 3x - 3y + z$, $y' = 3x - 2y + 2z$, $z' = -x + 2y$.

Пользуясь первым методом Ляпунова, исследовать на устойчивость указанную точку покоя следующих систем:

16. $x' = x^2 + y^2 - 2x$, $y' = 3x^2 - x + 3y$; $(0, 0)$.

17. $x' = e^{x+2y} - \cos 3x$, $y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y$; $(0, 0)$.

18. $x' = \ln(3e^y - 2\cos x)$, $y' = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}$; $(0, 0)$.

19. $x' = \operatorname{tg}(z - y) - \frac{22}{9}x$, $y' = \sqrt{9 + 2x} - 3$, $z' = -\frac{10}{3}y$; $(0, 0, 0)$.

Исследовать на устойчивость указанную точку покоя систем:

20. $x'' = 2x - 3y + xy$, $y'' = x - 2y + x^2 + y^2$; $(0, 0)$. **21.** $x'' = e^y - 1$, $y'' = \ln(1 + x)$; $(0, 0)$.

22. $x'' + 3y'' - x + \cos y = 0$, $x' + 3y' - e^{2y} + 1 = 0$; $(1, 0)$.

23. $x'' - 2y'' + e^{y'} - 1 + \sin(x - 3y) = 0$, $4y'' - 2x'' - \sin x' + 2\sqrt{1 - 2x + 5y} - 2 = 0$; $(0, 0)$.

24. $x'' = -4\sqrt{1 - 2x} - \sin y + 4$, $y'' = \ln(1 + x)$; $(0, 0)$. **25.** $x'' = x - y$, $y' = e^{2x} - e^y$; $(0, 0)$.

Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость нулевую точку покоя следующих систем:

26. $x' = y - 3x - x^3$, $y' = 6x - 2y$. **27.** $x' = -xy$, $y' = -x^3$. **28.** $x' = -y - xy^2$, $y' = 2x - y - y^3$.

29. $x' = 2y - x^3$, $y' = 2x - y^3$. **30.** $x' = 3y^2 - x^5$, $y' = -3x^3 - y^5$. **31.** $x'' = -y^3, y'' = x'^3$.

32. $x'' = y^2, y' = -x'^2$. **33.** $x' = -x + 3y' + x^2$, $y'' = -y' - y - 3x$.

34. $x'' = x^3 - y + x' - x$, $y' = x'^2 + y^2 + y$. **35.** $x' = -y' - x - xy^3$, $y'' = x - y - y'$.

36. $x' = -x - xy$, $y'' = -y^3 + x^3$. **37.** $x'' = -x' - y - x - xy^2$, $y' = -y + x' - y^3$.

Глава 7

Метод интегральных преобразований Лапласа решения линейных дифференциальных уравнений

При построении решения задачи Коши для определения соответствующих произвольных постоянных необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений. Этого можно избежать, если для построения решения указанной задачи применить метод интегральных преобразований Лапласа. Тогда получим решение задачи, не используя общего решения уравнения. Этот метод, который получил название операционного или символического исчисления, широко применяется для решения многих классов линейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, а также линейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. К этим классам уравнений приводят многие задачи электротехники, радиотехники, теории автоматического регулирования и ряда других областей науки и техники.

§ 1. Преобразование Лапласа. Основные понятия и свойства

1.1. Оригинал и изображение.

Функцией-оригиналом будем называть любую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определенную на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1) f — непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными n-го порядка на всей числовой прямой;

2) $\forall t < 0\ f(t) = 0$;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $a > 0$, что $\forall t > 0$ справедлива оценка

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}.$$

Показателем роста функции f называется число $\alpha = \inf\{a\}$. Для ограниченных функций считаем, что $\alpha = 0$.

Условия 1) и 3) выполняются для большинства функций f, описывающих физические процессы. С физической точки зрения условие 2) вполне естественное, поскольку для физики безразлично, как ведут себя искомые функции до начального момента времени, который всегда можно принять за момент $t = 0$. Операционный метод приспособлен к решению дифференциальных уравнений с начальными условиями, о чем упоминалось выше.

Простейшей функцией-оригиналом является *функция Хевисайда* η, где

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Если функция φ удовлетворяет условиям 1) и 3) и не удовлетворяет условию 2), то произведение

$$f(t) = \eta(t)\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ \varphi(t), & \text{если} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию 2), т. е. будет оригиналом. В дальнейшем множитель η будем опускать в записи функций, считая их равными нулю при $t < 0$.

Определение. *Изображением функции f по Лапласу называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{1}$$

Связь между функциями f и F символически обозначается знаком $\doteqdot$, т. е. $f \doteqdot F$. Смысл этого обозначения состоит в том, оригиналу f сопоставлено изображение F, а изображение F имеет своим оригиналом f.

Если функция f — оригинал с показателем роста α, то функция F существует в полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > \alpha\}$ и является в ней аналитической функцией.

1.2. Свойства преобразования Лапласа.

Теорема 1 (свойство однородности). *Если $f \doteqdot F$ и $a \in \mathbb{C}$, то $af \doteqdot aF$.*

Теорема 2 (свойство линейности). *Если $f_j \doteqdot F_j$, $\operatorname{Re} p > \alpha_j$ $(j = \overline{1, n})$, то*

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j \doteqdot \sum_{j=1}^{n} \mu_j F_j, \quad \operatorname{Re} p > \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_j,$$

где μ_j — заданные постоянные числа, действительные или комплексные, α_j — показатели роста функций f_j.

Теорема 3 (свойство подобия). *Пусть $f \doteqdot F$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда $\forall \beta > 0$*

$$f(\beta t) \doteqdot \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right).$$

Теорема 4 (запаздывания). *Если $f \doteqdot F$ и $\tau > 0$, то*

$$f(t - \tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p).$$

Смысл этого соотношения состоит в том, что смещению аргумента в классе оригиналов соответствует операция умножения на экспоненту в классе изображений.

Теорема 5 (опережения). *Если $f \doteqdot F$ и $\tau > 0$, то*

$$f(t + \tau) \doteqdot e^{p\tau}\left(F(p) - \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)\,dt\right).$$

Следствие. *Если f — T-периодическая функция, то*

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^{T} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Теорема 6 (смещения). *Если $f \doteqdot F$, $p_0 \in \mathbb{C}$, то*

$$e^{p_0 t} f \doteqdot F(p - p_0).$$

Теорема 7 (о дифференцировании оригинала). *Если $f \doteqdot F$ и функции $f^{(k)}$ $(k = \overline{1, n})$ являются оригиналами, то*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0);$$

$$f^{(2)}(t) \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$ $(k = \overline{0, n-1})$ в общем случае.

Теорема 8 (о дифференцировании изображения). *Если* $F \doteqdot f$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, *то*

$$F'(p) \doteqdot -tf(t);$$
$$F^{(2)}(p) \doteqdot t^2 f(t);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t).$$

Теорема 9 (об интегрировании оригинала). *Если* $f \doteqdot F$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема 10 (об интегрировании изображения). *Если* $f \doteqdot F$, $\operatorname{Re} p > \alpha$ *и интеграл* $\int_q^{+\infty} F(q)\,dq$ *сходится в полуплоскости* $P = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > \alpha_1 > \alpha\}$, *то*

$$\int_p^{+\infty} F(q)\,dq \doteqdot \frac{f(t)}{t}.$$

Теорема 11 (о предельных соотношениях). *Если* f *является оригиналом вместе со своей производной* f' *и* $F \doteqdot f$, *то* $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$, *где* $p \to \infty$ *внутри угла* $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ *и* $f(0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$. *Если, кроме того, существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty)$, *то* $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$.

Найти изображения функций.

679. Функции Хевисайда η.

◀ Согласно формуле (1), п. 1.1, имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \eta(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-pt}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{t=x}^{t=0} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-px}}{p}\right).$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-px} = 0$. Следовательно,

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \blacktriangleright$$

680. $f(t) = e^{at}$.

◀ Согласно определению, получаем:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(p-a)t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\Big|_{t=x}^{t=0} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)x}}{p-a}\right) = \frac{1}{p-a}, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Таким образом,

$$e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a. \blacktriangleright$$

681. $f(t) = a^t$ $(a > 0)$.

◀ Представим функцию f в виде $a^t = e^{t\ln a}$ и воспользуемся решением предыдущего примера. Получим

$$a^t \doteqdot \frac{1}{p - \ln a}, \quad \operatorname{Re} p > \ln a. \blacktriangleright$$

682. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$.

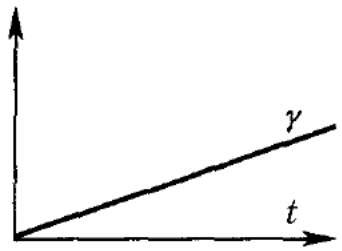


Рис. 94

◀ По определению изображения имеем

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}\, dt.$$

Полагая $pt = \tau$, получим

$$F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int\limits_\gamma e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau,$$

где γ — луч с направлением $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ (рис. 94). Функция $\tau \mapsto e^{-\tau}\tau^\alpha$ аналитическая в полуплоскости $T = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\tau > 0\}$. Рассмотрим замкнутый контур L, составленный из упорядоченного набора $(\gamma_1, \gamma_R, \gamma^-)$ ориентированных частей (см. рис. 95). По теореме Коши для аналитических функций имеем

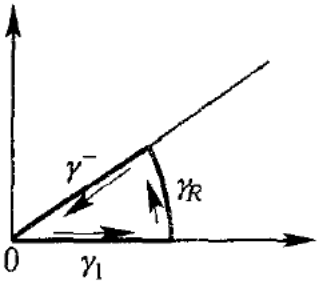


Рис. 95

$$\int\limits_L e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = \int\limits_{\gamma_1} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau + \int\limits_{\gamma_R} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau + \int\limits_{\gamma^-} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = 0,$$

откуда

$$\int\limits_\gamma e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = \int\limits_{\gamma_1} e^{-t}t^\alpha\, dt + \int\limits_{\gamma_R} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau$$

(принимая во внимание, что $\int\limits_\gamma e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = -\int\limits_{\gamma^-} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau$ и что $\tau = t$ на γ_1). Поскольку $\lim\limits_{|\tau|\to+\infty} e^{-\tau}\tau^\alpha = 0$, то $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\gamma_R} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_\gamma e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^\alpha\, dt = \Gamma(\alpha+1), \quad \alpha+1 > 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Таким образом,

$$t^\alpha \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,\ \operatorname{Re} p > 0. \tag{1}$$

Полученный результат можно распространить и на случай, когда $\alpha < -1 \wedge \alpha \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Для этого воспользуемся известным свойством Γ-функции, выраженным формулой:

$$\Gamma(n+\alpha) = (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0,$$

которая позволяет продолжить ее на отрицательную полуось с выброшенными точками $x_n = -n$ ($n \in \mathbb{N}$), полагая

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}, \quad -n < \alpha < -n+1.$$

Для рассматриваемого случая $\alpha < -1 \wedge \alpha \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, имеем

$$t^\alpha \doteqdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)p^{\alpha+1}}. \tag{2}$$

В последнем случае оригинал и изображение будем называть *обобщенными*. ▶

683. $f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}$.

◀ В соответствии с формулой (1) из примера 682, имеем

$$t^{n+\frac{1}{2}} \doteqdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Воспользуемся известными свойствами Γ-функции:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}.$$

Получаем

$$\Gamma\left(n+\tfrac{3}{2}\right)=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{(2n+1)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi},\quad t^{n+\frac{1}{2}}\doteq\frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n+1}p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

В частности, $\sqrt{t}\doteq\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$. ▶

684. $f(t)=\dfrac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}$.

◀ Применим формулу (2) из примера 682. Получим

$$\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}\doteq\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)\left(-n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)p^{-n+\frac{1}{2}}}=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,2^n}{(2n-1)!!p^{-n+\frac{1}{2}}}=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,2^{2n}n!}{(2n)!p^{-n+\frac{1}{2}}}.$$

В частности, $\frac{1}{\sqrt{t}}\doteq\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. ▶

685. $f(t)=\begin{cases}t, & \text{если}\quad 0\leqslant t\leqslant a,\\ 2a-t, & \text{если}\quad a<t<2a,\\ 0, & \text{если}\quad t\geqslant 2a,\ t<0.\end{cases}$

◀ Применим формулу (1), п. 1.1. Получим, интегрируя по частям:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt=\int\limits_0^a te^{-pt}\,dt+\int\limits_a^{2a}(2a-t)e^{-pt}\,dt=$$

$$=\left(\frac{te^{-pt}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=0}+\left(\frac{2a-t}{p}e^{-pt}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Bigg|_{t=2a}^{t=a}=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}e^{-ap}+\frac{1}{p^2}e^{-2ap}=\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)^2.$$

Таким образом,

$$f(t)\doteq\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)^2.\ \blacktriangleright$$

686. а) $f(t)=\sin t$; б) $f(t)=\operatorname{sh}t$; в) $f(t)=\cos t$; г) $f(t)=\operatorname{ch}t$.

◀ Воспользуемся решением примера 680: $e^{at}\doteq\frac{1}{p-a}$, если $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$.

а) $\sin t=\dfrac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\doteq\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i}-\dfrac{1}{p+i}\right)=\dfrac{1}{p^2+1}$;

б) $\operatorname{sh}t=\dfrac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\doteq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}\right)=\dfrac{1}{p^2-1}$;

в) $\cos t=\dfrac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\doteq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i}+\dfrac{1}{p+i}\right)=\dfrac{p}{p^2+1}$;

г) $\operatorname{ch}t=\dfrac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)\doteq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{p+1}\right)=\dfrac{p}{p^2-1}$.

При решении примера применяли свойство линейности преобразования Лапласа. ▶

687. а) $f(t)=\sin\alpha t$; б) $f(t)=\operatorname{sh}\alpha t$; в) $f(t)=\cos\alpha t$; г) $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t$.

◀ Воспользуемся теоремой подобия и предыдущим примером. Имеем

а) $\sin\alpha t\doteq\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\frac{p^2}{\alpha^2}+1}=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$;

б) $i\operatorname{sh}\alpha t=\sin i\alpha t\doteq\dfrac{i\alpha}{p^2+(i\alpha)^2}$, $\operatorname{sh}\alpha t\doteq\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$;

в) $\cos\alpha t\doteq\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$;

г) $\operatorname{ch}\alpha t=\cos i\alpha t\doteq\dfrac{p}{p^2+(i\alpha)^2}$, $\operatorname{ch}\alpha t\doteq\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$. ▶

688. а) $f(t)=\cos^2\alpha t$; б) $f(t)=\operatorname{ch}^2\alpha t$; в) $f(t)=\sin^2\alpha t$; г) $f(t)=\operatorname{sh}^2\alpha t$; д) $f(t)=\sin\alpha t\cos\beta t$; е) $f(t)=\sin\alpha t\operatorname{ch}\beta t$; ж) $f(t)=\cos\alpha t\operatorname{sh}\beta t$.

◀ а) Представим функцию f в виде $f(t)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha t)$ и воспользуемся изображениями функций $f_1(t)=1$ (см. пример 679), функции $f_2(t)=\cos 2\alpha t$ (в примере 687, в) вместо α берем 2α), а также свойством линейности преобразования Лапласа. Получим:

$$\cos^2\alpha t\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right)=\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}.$$

б) Запишем функцию f в виде $f(t)=\cos^2 i\alpha t$ и воспользуемся решением примера а). Находим

$$\operatorname{ch}^2\alpha t\doteqdot\frac{p^2+2(i\alpha)^2}{p(p^2+4(i\alpha)^2)}=\frac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}.$$

в) Поскольку $\sin^2\alpha t=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha t)$, то

$$\sin^2\alpha t\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right)=\frac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}.$$

г) Воспользуемся равенством $i^2\operatorname{sh}^2\alpha t=\sin^2 i\alpha t$ и решением примера в). Имеем

$$i^2\operatorname{sh}^2\alpha t=\sin^2 i\alpha t\doteqdot\frac{(i)^2 2\alpha^2}{p(p^2+4(i\alpha)^2)}=i^2\frac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)},\quad \operatorname{sh}^2\alpha t\doteqdot\frac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}.$$

д) Представим функцию f в виде $f(t)=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)t+\sin(\alpha+\beta)t\right)$ и воспользуемся решением примера 687, а). Получим

$$\sin\alpha t\cos\beta t\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{p^2+(\alpha-\beta)^2}+\frac{\alpha+\beta}{p^2+(\alpha+\beta)^2}\right)=\frac{\alpha\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(p^2+(\alpha-\beta)^2\right)\left(p^2+(\alpha+\beta)^2\right)}.$$

е) Запишем функцию f в виде $\sin\alpha t\operatorname{ch}\beta t=\sin\alpha t\cos i\beta t$. Тогда, согласно д), имеем

$$\sin\alpha t\operatorname{ch}\beta t\doteqdot\frac{\alpha\left(p^2+\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(p^2+(\alpha-i\beta)^2\right)\left(p^2+(\alpha+i\beta)^2\right)}=\frac{\alpha\left(p^2+\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

ж) Представим функцию f в виде $\cos\alpha t\operatorname{sh}\beta t=-i\sin i\beta t\cos\alpha t$. Решение примера сводится к случаю д). Получаем

$$\cos\alpha t\operatorname{sh}\beta t\doteqdot-\frac{i}{2}\left(\frac{i\beta-\alpha}{p^2+(i\beta-\alpha)^2}+\frac{i\beta+\alpha}{p^2+(i\beta+\alpha)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta+i\alpha}{p^2+\alpha^2-\beta^2-i2\alpha\beta}+\frac{\beta-i\alpha}{p^2+\alpha^2-\beta^2+i2\alpha\beta}\right)=\frac{\beta(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)^2+4\alpha^2\beta^2}.\ \blacktriangleright$$

689. а) $f(t)=\sin(\omega t-\varphi_0)$; б) $f(t)=\operatorname{sh}(\omega t-\varphi_0)$; в) $f(t)=\cos(\omega t-\varphi_0)$; г) $f(t)=\operatorname{ch}(\omega t-\varphi_0)$; д) $f(t)=(at-b)^\alpha$.

◀ Применим теоремы подобия и запаздывания для нахождения изображения оригинала вида $f(at-t_0)$, где $t_0>0$ и a — комплексное число. Пусть $f\doteqdot F$, тогда по теореме подобия $f(at)\doteqdot\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$. По теореме запаздывания имеем

$$f(at-t_0)=f\left(a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right)\doteqdot\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-\frac{pt_0}{a}}. \tag{1}$$

а) Воспользуемся решением примера 687, а) и формулой (1). Получим

$$\sin(\omega t-\varphi_0)\doteqdot e^{-\frac{p\varphi_0}{\omega}}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

б) Аналогично, принимая во внимание решение примера 687, б), имеем

$$\operatorname{sh}(\omega t-\varphi_0)\doteqdot e^{-\frac{p\varphi_0}{\omega}}\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

в) Согласно 687, в), $\cos\omega t\doteqdot\frac{p}{p^2+\omega^2}$. По формуле (1) находим:

$$\cos(\omega t-\varphi_0)\doteqdot e^{-\frac{p\varphi_0}{\omega}}\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

г) Воспользуемся решением 687, г) и формулой (1). Получим

$$\operatorname{ch}(\omega t-\varphi_0)=e^{-\frac{p\varphi_0}{\omega}}\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

д) Принимая во внимание формулу (1) из примера 682, а также формулу (1) из настоящего примера, имеем

$$(at-b)^\alpha\doteqdot\frac{1}{a}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{p}{a}\right)^{\alpha+1}}e^{-\frac{pb}{a}}=\frac{a^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}e^{-\frac{pb}{a}}.\ \blacktriangleright$$

690. $f(t)=\eta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geqslant t_0,\\ 0, & t<t_0\end{cases}$ — обобщенная единичная функция Хевисайда.

◀ Согласно решению примера 679 и формуле (1) из примера 689, получаем:

$$\eta(t-t_0)\doteqdot\frac{e^{-pt_0}}{p}.\ \blacktriangleright$$

691. $f(t)=\begin{cases}a, & \text{если}\quad 0<t<\tau,\\ 0, & \text{если}\quad t<0\text{ или }t>\tau.\end{cases}$

◀ Представим функцию f в виде $f(t)=(\eta(t)-\eta(t-\tau))a$. Тогда

$$f(t)\doteqdot a\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-p\tau}}{p}\right)=a\frac{1-e^{-p\tau}}{p}.\ \blacktriangleright$$

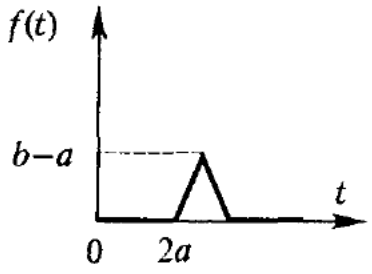


Рис. 96

692. $f(t)=\begin{cases}t-2a, & \text{если}\quad 2a<t\leqslant a+b,\\ 2b-t, & \text{если}\quad a+b<t\leqslant 2b,\\ 0, & \text{если}\quad t>2b\text{ или }t\leqslant 2a\end{cases}$ (рис. 96).

◀ Поскольку функцию f можно представить в виде

$$f(t)=(t-2a)\eta(t-2a)-(t-2a)\eta(t-a-b)+(2b-t)\eta(t-a-b)+(t-2b)\eta(t-2b)=$$
$$=(t-2a)\eta(t-2a)-2(t-a-b)\eta(t-a-b)+(t-2b)\eta(t-2b),$$

то

$$f(t)\doteqdot\frac{e^{-2ap}}{p^2}-\frac{2e^{-(a+b)p}}{p^2}+\frac{e^{-2bp}}{p^2}=\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p^2}$$

(см. решение примера 689, д)). ▶

693. $f(t)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad t<0,\\ n, & \text{если}\quad n\leqslant t<n+1,\ n\in\mathbb{Z}_0\end{cases}$ (см. рис. 97).

◀ Записав функцию f в виде

$$f(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)+2\eta(t-2)-2\eta(t-3)+3\eta(t-3)-$$
$$-3\eta(t-4)+\ldots+(n-1)\eta(t-(n-1))-(n-1)\eta(t-n)+n\eta(t-n)+\ldots=$$
$$=\eta(t-1)+\eta(t-2)+\eta(t-3)+\ldots+\eta(t-n)+\ldots,$$

получаем

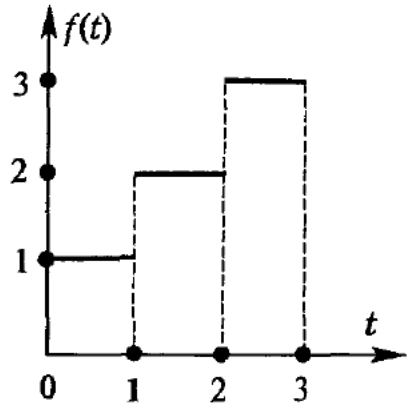


Рис. 97

$$f(t)\doteqdot\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kp}=\frac{1}{p(e^p-1)}.\ \blacktriangleright$$

694. $f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<a,\\ 1-e^{-b(t-a)}, & \text{если } t\geqslant a\end{cases}$ (рис. 98).

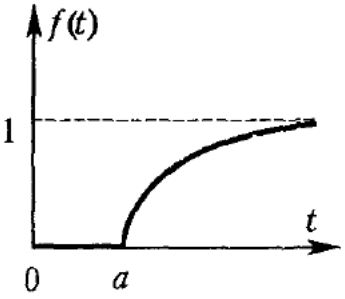


Рис. 98

◀ Очевидно, что функцию f можно представить в виде

$$f(t)=\left(1-e^{-b(t-a)}\right)\eta(t-a).$$

Следовательно,

$$f(t)\doteqdot\frac{e^{-pa}}{p}-\frac{e^{-pa}}{p+b}=\frac{be^{-pa}}{p(p+b)}.\ \blacktriangleright$$

Найти изображения периодических оригиналов.

695. $f(t)=f(t+2\pi)=\begin{cases}\sin t, & \text{если } 2n\pi<t\leqslant(2n+1)\pi,\\ 0, & \text{если } (2n+1)\pi<t\leqslant(2n+2)\pi,\ n\in\mathbb{Z}_0\end{cases}$ (рис. 99).

◀ Воспользуемся следствием из теоремы 5 п. 1.2: если f является T-периодической функцией, то

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}\,dt.$$

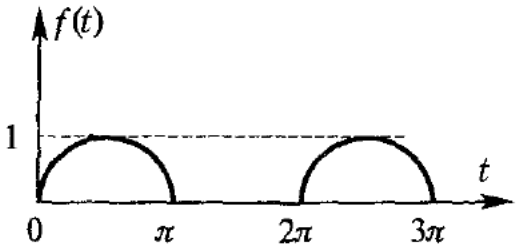


Рис. 99

В рассматриваемом случае получаем:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{2\pi}e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\operatorname{Im}\int\limits_0^{\pi}e^{(-p+i)t}\,dt=\frac{e^{-pt}(\cos t+p\sin t)}{(1-e^{-2\pi p})(p^2+1)}\Bigg|_{\pi}^{0}=$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{(1-e^{-2\pi p})(p^2+1)}=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

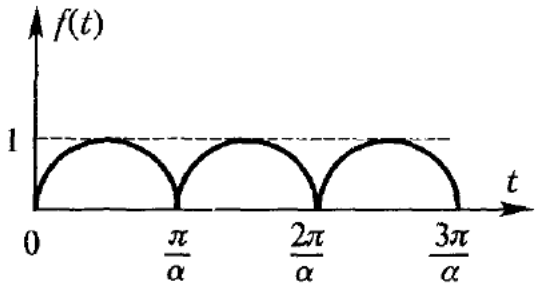


Рис. 100

Таким образом,

$$f(t)\doteqdot\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.\ \blacktriangleright$$

696. $f(t)=|\sin at|$ (рис. 100).

◀ Функция f — $\frac{\pi}{a}$-периодическая, следовательно

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}}e^{-pt}\sin at\,dt=\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\operatorname{Im}\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}}e^{(-p+ia)t}\,dt=\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\,\frac{e^{-pt}(a\cos at+p\sin at)}{p^2+a^2}\Bigg|_{\frac{\pi}{a}}^{0}=$$

$$=\frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{1+e^{-p\frac{\pi}{a}}}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}=\frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{e^{p\frac{\pi}{2a}}+e^{-p\frac{\pi}{2a}}}{e^{p\frac{\pi}{2a}}-e^{-p\frac{\pi}{2a}}}=\frac{a}{p^2+a^2}\operatorname{cth}p\,\frac{\pi}{2a},\quad|\sin at|\doteqdot\frac{a}{p^2+a^2}\operatorname{cth}p\,\frac{\pi}{2a}.\ \blacktriangleright$$

697. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{|\sin t|}=\begin{cases}1, & \text{если } 2n\pi<t<(2n+1)\pi,\\ -1, & \text{если } (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi,\end{cases} & n\in\mathbb{Z}_0\\ 0, \text{ если } t<0\end{cases}$ (рис. 101).

◀ Сужение функции f на положительную полуось есть 2π-периодическая функция, поэтому

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{2\pi}e^{-pt}\operatorname{sgn}(\sin t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\int\limits_0^{\pi}e^{-pt}\,dt-\int\limits_{\pi}^{2\pi}e^{-pt}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\left(e^{-pt}\Big|_{\pi}^{0}+e^{-pt}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{2p\pi}}=\frac{(1-e^{-p\pi})^2}{p(1-e^{-2p\pi})}=\frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})}=\frac{e^{\frac{p\pi}{2}}-e^{-\frac{p\pi}{2}}}{p\left(e^{\frac{p\pi}{2}}+e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)}=\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{p\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \doteqdot \frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{p\pi}{2}. \blacktriangleright$$

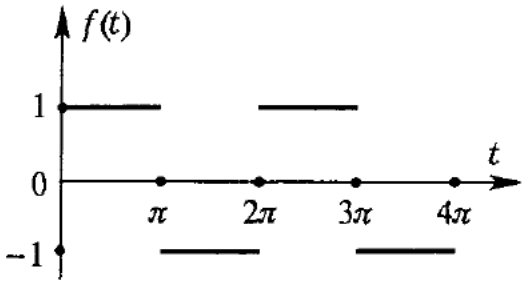


Рис. 101

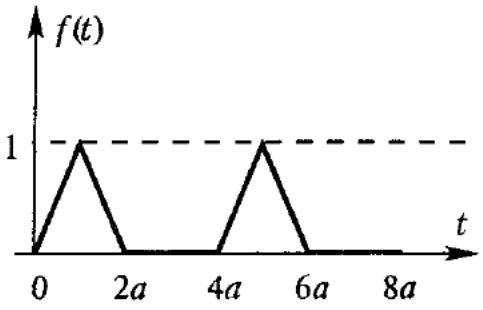


Рис. 102

698. $f(t) = f(t+4a) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 4n, & \text{если} \quad 4na < t \leqslant (4n+1)a, \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2, & \text{если} \quad (4n+1)a < t \leqslant (4n+2)a, \\ 0, & \text{если} \quad (4n+2)a < t \leqslant (4n+4)a, \ t < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_0$

(рис. 102).

◀ Функция f $4a$-периодическая, и ее изображение найдем по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-4ap}}\int_0^{4a} e^{-pt} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-4ap}}\left(\int_0^a e^{-pt}\frac{t}{a}\,dt + \int_a^{2a} e^{-pt}\left(2-\frac{t}{a}\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{a(1-e^{-4ap})}\left(\left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} - \frac{2ae^{-pt}}{p}\right)\Big|_a^{2a}\right) = \frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})} =$$

$$= \frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-2ap})(1+e^{-2ap})} = \frac{1-e^{-ap}}{ap^2(1+e^{-ap})(1+e^{-2ap})} = \frac{\operatorname{th}\frac{ap}{2}}{ap^2\,(1+e^{-2ap})}.$$

Таким образом,

$$f(t) \doteqdot \frac{\operatorname{th}\frac{ap}{2}}{ap^2(1+e^{-2ap})}. \blacktriangleright$$

Пользуясь теоремой смещения, найти изображения функций.

699. а) $f(t) = e^{-\alpha t}\sin\omega t$; б) $f(t) = e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$; в) $f(t) = e^{-\alpha t}\cos\omega t$;
г) $f(t) = e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$; д) $f(t) = t^\alpha e^{\beta t}$; е) $f(t) = t^\alpha \sin\beta t$; ж) $f(t) = \frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\sin\alpha t$;
з) $f(t) = \frac{t^n}{n!}\operatorname{sh}\alpha t$; и) $f(t) = \frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{sh}\alpha t$; к) $f(t) = t^\alpha\cos\beta t$;
л) $f(t) = \frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\cos\alpha t$; м) $f(t) = \frac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t$; н) $f(t) = \frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{ch}\alpha t$.

◀ В случаях а)–д) можно непосредственно применять теорему смещения. В общем же случае, если требуется найти изображение функции φ, следует, если это возможно, представить ее в виде $\varphi(t) = e^{p_0 t}\psi(t)$, $p_0 = \text{const}$ и применить теорему смещения. Тогда

$$\varphi \doteqdot \Psi(p - p_0),$$

где Ψ — изображение функции ψ. Имеем:

а) $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (см. пример 687, а)). По теореме смещения

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2};$$

б) $\operatorname{sh}\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ (см. пример 687, б)). Следовательно,

$$e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2};$$

в) $\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$ (см. пример 687, в)). Тогда

$$e^{-\alpha t}\cos\omega t \doteqdot \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2};$$

г) $\operatorname{ch}\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}$ (см. пример 687, г)). По теореме смещения

$$e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t \doteqdot \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2};$$

д) $t^\alpha \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ (см. пример 682). Тогда

$$t^\alpha e^{\beta t} \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}}.$$

В частности, $t^n e^{\beta t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\beta)^{n+1}}$;

е) решение сводится к случаю д). Действительно, $t^\alpha \sin\beta t = \frac{1}{2i}(t^\alpha e^{i\beta t} - t^\alpha e^{-i\beta t})$.

$$t^\alpha \sin\beta t \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)((p+\beta i)^{\alpha+1} - (p-\beta i)^{\alpha+1})}{2i(p^2+\beta^2)^{\alpha+1}}.$$

Если $\alpha = n$, то

$$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t \doteqdot \frac{1}{2i}\,\frac{(p+\beta i)^{n+1} - (p-\beta i)^{n+1}}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}.$$

Если $\alpha = -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{\sin\beta t}{\sqrt{t}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\frac{\sqrt{p+\beta i} - \sqrt{p-\beta i}}{\sqrt{p^2+\beta^2}}.$$

В частности, $\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \doteqdot \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}$;

ж) Решение сводится к случаю е). Имеем

$$\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\sin\alpha t \doteqdot \frac{1}{2i}\,\frac{(p-\beta+\alpha i)^{n+1} - (p-\beta-\alpha i)^{n+1}}{((p-\beta)^2+\alpha^2)^{n+1}}.$$

з) Представим функцию f в виде $f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t} - \frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\right)$ и воспользуемся случаем ж). Получим

$$\frac{t^n}{n!}\operatorname{sh}\alpha t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}} - \frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right) = \frac{(p+\alpha)^{n+1} - (p-\alpha)^{n+1}}{2(p^2-\alpha^2)^{n+1}}.$$

и) Воспользуемся решением з) и теоремой смещения. Имеем

$$\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{sh}\alpha t \doteqdot \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1} - (p-\beta-\alpha)^{n+1}}{2((p-\beta)^2-\alpha^2)^{n+1}}.$$

к) Из представления функции $f(t) = \frac{1}{2}\left(t^\alpha e^{i\beta t} + t^\alpha e^{-i\beta t}\right)$, решения д) и теоремы смещения находим:

$$t^\alpha\cos\beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-i\beta)^{\alpha+1}} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+i\beta)^{\alpha+1}}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\,\frac{(p+i\beta)^{\alpha+1} + (p-i\beta)^{\alpha+1}}{(p^2+\beta^2)^{\alpha+1}}.$$

В частности, $\frac{t^n}{n!}\cos\beta t \doteqdot \frac{(p+i\beta)^{n+1} + (p-i\beta)^{n+1}}{2(p^2+\beta^2)^{n+1}}$, $\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} \doteqdot \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2\sqrt{p^2+1}}$.

л) Поскольку, согласно д), $\frac{t^n}{n!}\cos\alpha t \doteqdot \frac{(p+i\alpha)^{n+1} + (p-i\alpha)^{n+1}}{2(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$, то по теореме смещения имеем

$$\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\cos\alpha t \doteqdot \frac{(p-\beta+i\alpha)^{n+1} + (p-\beta-i\alpha)^{n+1}}{2((p-\beta)^2+\alpha^2)^{n+1}}.$$

м) Так как $\frac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t = \frac{1}{2}\left(\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t} + \frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\right)$ и, согласно д), $t^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, то

$$\frac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}} + \frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right) = \frac{(p+\alpha)^{n+1} + (p-\alpha)^{n+1}}{2(p^2-\alpha^2)^{n+1}}.$$

н) Воспользуемся решением м) и теоремой смещения. Находим:

$$\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{ch}\alpha t \doteqdot \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1} + (p-\beta-\alpha)^{n+1}}{2((p-\beta)^2-\alpha^2)^{n+1}}. \blacktriangleright$$

Найти изображения дифференциальных выражений.

700. $Ly = y^{IV}(t) - 5y'''(t) - 4y''(t) + 2y'(t) - y(t) + 8$ при условиях $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 2$.

◀ Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Тогда по теореме 7, п. 1.2, получаем, принимая во внимание начальные условия:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - 5; \quad y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - 5p; \quad y'''(t) \doteqdot p^3Y(p) - 5p^2 + 1; \quad y^{IV}(t) \doteqdot p^4Y(p) - 5p^3 + p - 2.$$

Применим свойство линейности преобразования Лапласа. Имеем

$$Ly \doteqdot p^4Y(p) - 5p^2 + p - 2 - 5\left(p^3Y(p) - 5p^2 + 1\right) - 4\left(p^2Y(p) - 5p\right) + 2\left(pY(p) - 5\right) - Y(p) + \frac{8}{p} =$$

$$= \left(p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1\right)Y(p) - 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}. \blacktriangleright$$

701. $Ly = y'''(t) - 2y''(t) + 3y'(t) - y(t)$ при условиях $y'(0) = y(0) = 0$, $y''(0) = 1$ и $y(t) \doteqdot Y(p)$.

◀ Действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера. Получаем:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p); \quad y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - y(0)p - y'(0) = p^2Y(p);$$
$$y'''(t) \doteqdot p^3Y(p) - y(0)p^2 - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p) - 1.$$

Следовательно,

$$Ly \doteqdot p^3Y(p) - 1 - 2p^2Y(p) + 3pY(p) - Y(p) = \left(p^3 - 2p^2 + 3p - 1\right)Y(p) - 1. \blacktriangleright$$

702. Найти изображение производной функции $f(t) = \sqrt{t}$.

◀ Имеем

$$f(t) \doteqdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}.$$

Функция $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ существует $\forall t > 0$ и не существует при $t = 0$. Изображение таких функций находим по теореме дифференцирования оригинала, в которой предполагается, что $f^{(n)}(t)$ существует $\forall t > 0$, а при $t = 0$ $f^{(n)}(t)$ вообще может не существовать. Таким образом,

$$f'(t) \doteqdot p\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}} - f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(так как } f(0) = 0\text{)}. \blacktriangleright$$

703. $Ly = y^{V} + 2y^{IV} + 4y$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = y^{IV}(0) = -1$.

◀ Принимая во внимание начальные условия, получаем:

$$y^{V}(t) \doteqdot p^5Y(p) + p + 1, \quad y^{IV}(t) \doteqdot p^4Y(p) + 1,$$
$$Ly \doteqdot \left(p^5 + 2p^4 + 4\right)Y(p) + p + 3. \blacktriangleright$$

С помощью теоремы о дифференцировании изображения найти изображения функций.

704. а) $f(t)=t\sin\alpha t$; б) $f(t)=t\cos\alpha t$; в) $f(t)=t\operatorname{sh}\alpha t$; г) $f(t)=t\operatorname{ch}\alpha t$.

◀ а) Согласно теореме 8, п. 1.2, $F'(p)\doteqdot -tf(t)$. Поскольку $\sin\alpha t\doteqdot\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, то

$$-t\sin\alpha t\doteqdot\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)'=-\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2},\quad t\sin\alpha t\doteqdot\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

б) Так как $\cos\alpha t\doteqdot\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ и $-t\cos\alpha t\doteqdot\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)'=-\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$, то

$$t\cos\alpha t\doteqdot\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

в) В примере 687, б) получили, что $\operatorname{sh}\alpha t\doteqdot\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$. Тогда $\left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)'=-\frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}$,

$$t\operatorname{sh}\alpha t\doteqdot\frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}.$$

г) Поскольку $\operatorname{ch}\alpha t\doteqdot\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ и $\left(\frac{p}{p^2-\alpha^2}\right)'=-\frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$, то

$$t\operatorname{ch}\alpha t\doteqdot\frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}.\ ▶$$

705. $f(t)=t\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t$.

◀ Из представления $f(t)=-i\sin i\alpha t\sin\alpha t=-\frac{i}{2}\left(\cos(1-i)\alpha t-\cos(1+i)\alpha t\right)$ и решения примера 687, в), получаем:

$$\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t\doteqdot-\frac{i}{2}\left(\frac{p}{p^2+(1-i)^2\alpha^2}-\frac{p}{p^2+(1+i)^2\alpha^2}\right)=\frac{2p\alpha^2}{p^4+4\alpha^4}.$$

Согласно теореме 8, п. 1.2, имеем:

$$-t\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t\doteqdot\left(\frac{2p\alpha^2}{p^4+4\alpha^4}\right)'=\frac{2\alpha^2(4\alpha^4-3p^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}=-\frac{2\alpha^2(3p^4-4\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}.$$

Таким образом,

$$t\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t\doteqdot\frac{2\alpha^2(3p^4-4\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}.\ ▶$$

706. $f(t)=t^2\cos^2\alpha t$.

◀ По теореме 8, п. 1.2, $F''(p)\doteqdot t^2f(t)$, где $F\doteqdot f$. При решении примера 688, а) получили, что $\cos^2\alpha t\doteqdot\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$. Следовательно,

$$t^2\cos^2\alpha t\doteqdot\left(\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}\right)''=2\frac{p^6+24p^2\alpha^4+32\alpha^6}{p^3(p^2+4\alpha^2)^3}.\ ▶$$

707. Найти изображения функций:

а) $S(t)=\int\limits_0^t\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\,dx$ — синус-интеграл Френеля; б) $C(t)=\int\limits_0^t\frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\,dx$ — косинус-интеграл Френеля.

◀ Произведя замену $x=u^2$, получаем:

$$S(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{t}}\sin u^2\,du,\quad C(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{t}}\cos u^2\,du.$$

Как известно из курса математического анализа,

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin u^2\,du=\int\limits_0^{+\infty}\cos u^2\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\quad\text{(интегралы Френеля).}$$

Следовательно, $S(0) = C(0) = 0$, $S(+\infty) = C(+\infty) = \frac{1}{2}$. Согласно теореме 9 об интегрировании оригинала

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p},$$

где $F \doteqdot f$. Поэтому $S(t) \doteqdot \frac{F(p)}{p}$, $C(t) \doteqdot \frac{\Phi(p)}{p}$, где $F(p) \doteqdot \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}$, $\Phi(p) \doteqdot \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}$. При решении примеров 699, е), к), получили: $F(p) = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}$, $\Phi(p) = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2\sqrt{p^2+1}}$. Окончательно имеем

$$S(t) \doteqdot \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}, \quad C(t) \doteqdot \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}. \blacktriangleright$$

708. Найти изображения функций:

а) $\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ (интегральный синус);

б) $\mathrm{si}(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ (интегральный синус);

в) $\mathrm{shi}(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{sh}\,\tau}{\tau}\,d\tau$ (интегральный гиперболический синус).

◀ Воспользуемся теоремой 10 об интегрировании изображения. Поскольку $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, то, согласно указанной теореме, получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

Применим теорему об интегрировании оригинала. Находим:

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

Далее, поскольку $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{si}(t) = \mathrm{Si}(t) - \frac{\pi}{2}$. Следовательно

$$\mathrm{si}(t) \doteqdot \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{p} \quad \left(\text{так как } \frac{\pi}{2}\cdot 1 \doteqdot \frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right).$$

Представив интегральный гиперболический синус в виде

$$i\,\mathrm{shi}(t) = \mathrm{Si}(it),$$

получим, приняв во внимание решение в случае а):

$$i\,\mathrm{shi}(t) \doteqdot \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{i}{p} = \frac{i}{p}\operatorname{arth}\frac{1}{p}, \quad \mathrm{shi}(t) \doteqdot \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}.$$

Действительно, обозначив $\operatorname{arctg}\frac{i}{p} = i\alpha$, получим:

$$\frac{i}{p} = \operatorname{tg} i\alpha = \frac{\sin i\alpha}{\cos i\alpha} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i(i\alpha)} - e^{-i(i\alpha)}}{e^{i(i\alpha)} + e^{-i(i\alpha)}} = i\operatorname{th}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{th}\alpha = \frac{1}{p}, \quad \alpha = \operatorname{arth}\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{i}{p} = \frac{i}{p}\alpha = \frac{i}{p}\operatorname{arth}\frac{1}{p}. \blacktriangleright$$

709. $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}$.

◀ Согласно решению примера 699, а), имеем $e^{-\alpha t}\sin t \doteqdot \dfrac{1}{(p+\alpha)^2+1}$. По теореме об интегрировании изображения получаем:

$$\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^{+\infty} \frac{dq}{(q+\alpha)^2+1} = \operatorname{arctg}(q+\alpha)\Big|_{q=p}^{q=+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+\alpha) = \operatorname{arctg}\frac{1}{p+\alpha}. \blacktriangleright$$

710. $f(t)=\dfrac{\sin 7t \sin 3t}{t}$.

◀ Сначала найдем изображение функции $\varphi(t)=\sin\alpha t\sin\beta t=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)t-\cos(\alpha+\beta)t\big)$. Согласно решению примера 685, в) и по свойству линейности изображения, имеем

$$\varphi(t) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(\alpha-\beta)^2}-\frac{p}{p^2+(\alpha+\beta)^2}\right)=\frac{2\alpha\beta p}{\big(p^2+(\alpha-\beta)^2\big)\big(p^2+(\alpha+\beta)^2\big)}.$$

В рассматриваемом случае $\sin 7t\sin 3t \doteqdot \dfrac{42p}{(p^2+16)(p^2+100)}$. Далее применяем теорему об интегрировании изображения. Из представления

$$\frac{1}{(p^2+16)(p^2+100)}=\frac{1}{84}\left(\frac{(p^2+100)-(p^2+16)}{(p^2+100)(p^2+16)}\right)=\frac{1}{84}\left(\frac{1}{p^2+16}-\frac{1}{p^2+100}\right)$$

находим:

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{2}\int\limits_p^{+\infty}\left(\frac{q}{q^2+16}-\frac{q}{q^2+100}\right)dq=\frac{1}{4}\ln\frac{q^2+16}{q^2+100}\Big|_p^{+\infty}=-\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+16}{p^2+100}=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}. \blacktriangleright$$

§ 2. Свертка функций. Теоремы разложения

2.1. Определение свертки.

Сверткой $\varphi * f$ непрерывных функций φ и f, заданных на положительной полуоси числовой прямой $\mathbb{R}$, называется интеграл

$$\varphi * f = \int\limits_0^t \varphi(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Свертка коммутативна (т. е. $\varphi * f = f * \varphi$), ассоциативна (т. е. $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$), дистрибутивна относительно операции сложения (т. е. $\varphi * (f+\psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$).

2.2. Теорема умножения (Э. Бореля).

Если $f \doteqdot F$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, $\varphi \doteqdot \Phi$, $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, *где* α_0 *и* α_1 — *показатели роста функций* f *и* φ, *то* $f * \varphi \doteqdot F\Phi$.

2.3. Обобщенная теорема умножения (А. М. Эфроса).

Если $f \doteqdot F$, $\varphi(t,\tau) \doteqdot \Phi(p)e^{-\tau q(p)}$, *где* Φ *и* q — *аналитические функции, то*

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau \doteqdot \Phi(p)F(q(p)).$$

2.4. Формулы Дюамеля.

Если $f * \varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot F(p)\Phi(p)$, то

$$f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'_t(t-\tau)\,d\tau \doteqdot pF(p)\Phi(p), \tag{2}$$

или

$$\varphi(t)f(0) + \int_0^t \varphi(\tau)f'_t(t-\tau)\,d\tau \doteqdot pF(p)\Phi(p). \tag{3}$$

Левые части соотношений (2) и (3) называют *интегралами Дюамеля.*

711. Найти $\varphi * f$, где $\varphi(t) = t^2$, $f(t) = \cos\omega t$.

◀ Согласно определению,

$$\varphi * f = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos\omega\tau\,d\tau.$$

Поскольку $\cos\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}$, то по теореме Бореля получаем

$$\varphi * f \doteqdot \frac{2\omega}{p^3(p^2+\omega^2)}. \blacktriangleright$$

712. Найти изображение функции $f(t) = C(t)\cos t + S(t)\sin t$, где $C(t)$ и $S(t)$ соответственно косинус-интеграл и синус-интеграл Френеля (см. пример 707).

◀ Функция f имеет вид

$$f(t) = \cos t \int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau + \sin t \int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau = \int_0^t \cos(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau.$$

Таким образом, $f = \varphi * \psi$, где $\varphi(t) = \cos t$, $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$. По теореме Бореля $f(t) \doteqdot F(p)\Phi(p)$, где $F(p) = \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t$, $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$. Таким образом,

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{p}{p^2+1}. \blacktriangleright$$

713. Найти изображение функции $f(t) = C(t)\sin t - S(t)\cos t$.

◀ Поскольку $f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau$, то по теореме Бореля

$$f(t) \doteqdot F(p)\Phi(p), \quad F(p) = \frac{1}{1+p^2} \doteqdot \sin t, \quad \Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Итак,

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{1}{1+p^2}. \blacktriangleright$$

714. Найти свертку $\varphi * f$, где $\varphi(t) = t^\alpha$, $f(t) = t^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и ее изображение.

◀ Согласно примеру 682 имеем

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\alpha+1}}, \quad \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\beta+1}}.$$

По теореме Бореля получаем

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}}\,\frac{1}{p^{\beta+1}} \doteqdot \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} * \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$$

или

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \doteqdot \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha * t^\beta.$$

Поскольку $\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \doteqdot \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$, то $\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^{\alpha} * t^{\beta}$, откуда

$$t^{\alpha} * t^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Полученный результат позволяет установить связь между Γ- и B-функциями Эйлера. Действительно, согласно определению свертки, имеем

$$\int_0^t \tau^{\alpha}(t-\tau)^{\beta}\,d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Полагая в интеграле $\tau = tx$, получаем $d\tau = t\,dx$, $\tau^{\alpha} = t^{\alpha}x^{\alpha}$, $(t-\tau)^{\beta} = t^{\beta}(1-x)^{\beta}$,

$$\int_0^t \tau^{\alpha}(t-\tau)^{\beta}\,d\tau = t^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = t^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \quad \text{или} \quad \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} B(\alpha,\beta). \blacktriangleright$$

Функция $\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}\,d\tau$ называется *интегралом вероятности*. Ряд $e^{-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$ равномерно сходящийся, поэтому его можно почленно интегрировать. Имеем

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\tau^{2n}}{n!}\,d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Очевидно, $\operatorname{erf}(-t) = -\operatorname{erf} t$, $(\operatorname{erf} t)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2} > 0$, $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$. Следовательно, функция erf — нечетная, непрерывная, возрастающая.

При больших значениях аргумента t рассматривают функцию

$$\operatorname{Erf} t = 1 - \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

Функция Erf — убывающая, непрерывная.

715. Найти изображение функции $f(t) = \operatorname{erf}(\sqrt{t})$.

◀ Воспользуемся соотношениями $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}}$ и теоремой Бореля. Получим:

$$\frac{1}{p-1}\frac{1}{\sqrt{p}} \doteqdot \int_0^t e^{t-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau}\,d(\sqrt{\tau}) = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx, \quad \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} \doteqdot e^t\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right).$$

По теореме смещения имеем

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right) \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{p+1}}. \blacktriangleright$$

716. Найти изображение функции $f(t) = \operatorname{Erf}\left(\sqrt{t}\right)$.

◀ Согласно определению, $\operatorname{Erf}\left(\sqrt{t}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)$. Следовательно,

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}} = \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}. \blacktriangleright$$

717. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t^2}$.

◀ Применим преобразование Лапласа. Получим:

$$e^{-t^2} \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-t^2}\,dt = e^{\frac{p^2}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2}\,dt = e^{\frac{p^2}{4}}\int_{\frac{p}{2}}^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right). \blacktriangleright$$

718. Найти изображение функции $f(t) = \operatorname{erf} t$.

◀ Воспользуемся решением примера 717 и теоремой об интегрировании оригинала: если $f \doteqdot F$, то $\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$. Находим:

$$\operatorname{erf} t \doteqdot \frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right). \blacktriangleright$$

719. Найти оригинал функции F, где $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

◀ Разлагая функцию F на простые дроби, получаем:

$$F(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Поскольку $\frac{1}{p+1} \doteqdot e^{-t}$, $\frac{1}{p+2} \doteqdot e^{-2t}$, то решение примера сводится к отысканию оригинала функции $\varphi(p) = \frac{1}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{p+2}$. По теореме Бореля

$$\varphi(p) \doteqdot \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-2\tau}\,d\tau = e^{-2t} \int_0^t d\tau = e^{-2t} t.$$

Окончательно имеем

$$f(t) = e^{-t} - (1+t)e^{-2t}. \blacktriangleright$$

720. Найти оригинал функции F, где $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$.

◀ Записав $F(p)$ в виде $F(p) = \frac{p}{p^2+9} \frac{p}{p^2+4}$ и приняв во внимание, что $\frac{p}{p^2+9} \doteqdot \cos 3t$, $\frac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, по теореме Бореля получаем:

$$f(t) = \int_0^t \cos 3(t-\tau)\cos 2\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\cos(5\tau - 3t) + \cos(3t - \tau)\Big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(5\tau - 3t)}{5} - \sin(3t - \tau)\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2t}{5} + \frac{\sin 3t}{5} - \sin 2t + \sin 3t\right) = \frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t). \blacktriangleright$$

721. Найти оригинал функции F, где $F(p) = \frac{1}{p^3(p^2+1)}$.

◀ Запишем функцию F в виде $F(p) = p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{p^2+1} = p\varphi(p)\psi(p)$, где $\varphi(p) = \frac{1}{p^4}$, $\psi(p) = \frac{1}{p^2+1}$. Из соотношений $\frac{1}{p^4} \doteqdot \frac{t^3}{6} = f(t)$, $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t = g(t)$, по формуле (2), п. 2.4, получаем (записав ее в виде $\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot F(p)\Phi(p)$):

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \doteqdot \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \sin\tau\,d\tau = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1. \blacktriangleright$$

§ 3. Обратное преобразование Лапласа

3.1. Формула обращения Римана—Меллина.

Теорема (формула обращения Римана—Меллина). *Если функция f является оригиналом, т.е. удовлетворяет условиям* 1), 2), 3) *п.* 1.1, *а F служит ее изображением, то в любой*

точке непрерывности функции f выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \tag{1}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p = a > \alpha\}$ и понимается в смысле главного значения по Коши. В точках разрыва функции f вместо $f(t)$ в левой части формулы (1) *следует взять* $\frac{1}{2}\big(f(t+0) + f(t-0)\big)$.

3.2. Сведения из теории функций комплексного переменного.

Напомним читателю, что функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется *аналитической* (иначе, *регулярной* или *моногенной*) в этой области.

Если функция f аналитическая в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, то она может быть представлена своим *рядом Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

равномерно сходящимся в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу K.

Ряд (1) можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \tag{2}$$

При этом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ — *главной его частью.*

Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0, за исключением, быть может, самой точки z_0, то z_0 называется *особой точкой однозначного характера.*

Если главная часть ряда Лорана тождественно равна нулю, то z_0 называется *устранимой особой точкой.*

Если главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов, то точка z_0 называется *полюсом.* Число m называется *порядком полюса*, если $c_{-m} \neq 0$, а $c_{-m-j} = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Точка z_0 является полюсом m-го порядка тогда и только тогда, когда существует такая непрерывно дифференцируемая функция φ, что*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in O_{z_0} \setminus \{z_0\} \quad \text{и} \quad \varphi(z_0) \neq 0, \tag{3}$$

где $O_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$.

Если $c_{-n} \neq 0$ для бесконечного множества значений $n \in \mathbb{N}$, то точка z_0 называется *существенно особой.* Например, функции $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$, $z \mapsto \cos\frac{1}{z}$ имеют в начале координат существенно особую точку.

Функция f называется *целой* или *голоморфной*, если она вовсе не имеет особых точек. Например, функции $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$ являются целыми.

Функция f называется *дробной* или *мероморфной,* если она не имеет других особенностей, кроме полюсов.

Согласно определению, мероморфная функция есть частное двух аналитических на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций, причем функция в знаменателе имеет хотя бы один изолированный нуль на плоскости $\mathbb{C}$, а если нулей бесконечное множество, то оно не имеет предельных точек.

Вычетом функции f в изолированной особой точке a называется число

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz, \tag{4}$$

где γ — достаточно малая окружность $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \delta\}$.

Если функцию f можно представить рядом Лорана (2) в окрестности изолированной особой точки a, то

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{5}$$

В устранимой особой точке вычет всегда равен нулю. В полюсе порядка m вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right). \tag{6}$$

Для полюсов первого порядка формула (6) принимает вид

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{7}$$

Если при этом в окрестности точки a $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ и ψ — аналитические функции в точке a, причем $\varphi(a)\neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке a нуль первого порядка (т. е. $\psi(a)=0$ и $\psi'(a)\neq 0$), то вместо формулы (7) можно пользоваться формулой

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{8}$$

3.3. Теоремы разложения.

Непосредственное применение формулы (1), п. 3.1, затруднительно. Мы рассмотрим здесь так называемые *первую* и *вторую теоремы разложения*, которые значительно упрощают процесс восстановления оригинала по его изображению.

Теорема 1. *Если изображение F допускает в окрестности точки $p_0=0$ разложение в сходящийся ряд Лорана по степеням $\frac{1}{p}$*

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{p^{k+1}}, \tag{1}$$

то ему соответствует функция-оригинал

$$\eta(t)f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!}. \tag{2}$$

Прежде чем формулировать вторую теорему разложения, приведем наводящие соображения.

Если f — аналитическая функция внутри области D всюду, кроме конечного числа особых точек a_j $(j=\overline{1,n})$ и непрерывна на границе C этой области, то справедлива *формула Коши о вычетах*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_j} f. \tag{3}$$

Подынтегральная функция $F(p)e^{pt}$ в формуле (1), п. 3.1, аналитическая и ее особые точки находятся на плоскости p слева от прямой, уравнение которой $\bar{s}=a=\alpha$. Справа от этой прямой функция $F(p)e^{pt}$ аналитическая, поскольку оба сомножителя — аналитические функции. Если применить теорему о вычетах к интегралу

$$\oint_C e^{pt}F(p)\,dp=\int_{a-bi}^{a+bi}e^{pt}F(p)\,dp+\int_{C_R}e^{pt}F(p)\,dp$$

по контуру $C=C_1\cup C_R$ (рис. 103) и перейти к пределу при $b\to\infty$, то оказывается, что

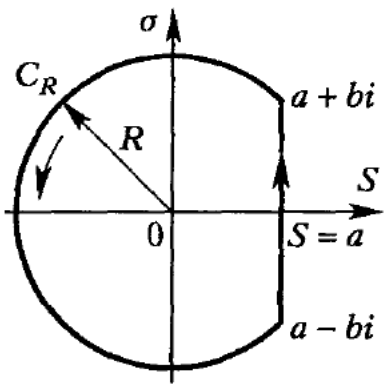


Рис. 103

$$\int_{C_R}e^{pt}F(p)\,dp\to 0,\qquad \int_{a-bi}^{a+bi}e^{pt}F(p)\,dp\to f(t)2\pi i=2\pi i\sum_j\operatorname*{res}_{p_j}(e^{pt}F(p)),$$

т. е.

$$\eta(t)f(t)=\sum_j\operatorname*{res}_{p_j}(e^{pt}F(p)).$$

Этот результат известен в теории операционного исчисления как *вторая теорема разложения*. Сформулируем эту теорему.

Теорема 2. *Если изображение F есть мероморфная функция на комплексной плоскости p и аналитическая на полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и если существует последовательность окружностей $C_n = \{p \in \mathbb{C} : |p| = R_n\}$, $R_1 < R_2 < \ldots$, $R_n \to +\infty$, на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, а также $\forall a > \alpha$ интеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$ абсолютно сходится, то оригиналом изображения $F(p)$ является функция*

$$\eta(t)f(t) = \sum_j \operatorname*{res}_{p_j}(e^{pt}F(p)). \tag{4}$$

Если для точки z_0 можно указать такую δ-окрестность, что при однократном обходе точки z_0 по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой δ-окрестности, одна ветвь многозначной функции переходит в другую, то точка z_0 называется *точкой разветвления* данной многозначной функции.

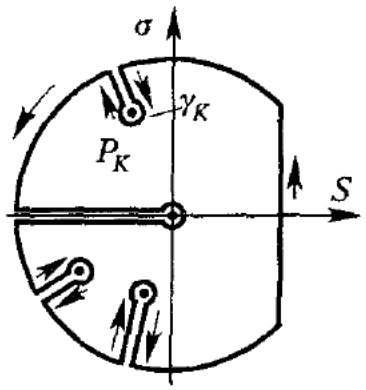


Рис. 104

Если среди особых точек функции $e^{pt}F(p)$ кроме полюсов и существенно особых точек p_k $(k = \overline{1, n})$ имеются точки разветвления p'_j $(j = \overline{1, m})$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p_k}(e^{pt}F(p)) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma'_j} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{5}$$

где γ'_j — контуры, состоящие из окружностей C'_j малого радиуса с центрами в точках разветвления, верхнего и нижнего края разрезов плоскости по лучам, проведенным из этих точек (рис. 104).

Найти оригиналы данных функций F.

722. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}, \quad a > 0.$

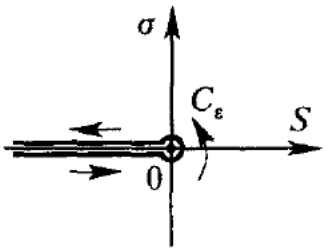


Рис. 105

◀ Функция F — аналитическая на плоскости p с разрезом по отрицательной полуоси. На верхнем крае разреза $p = \rho e^{i\pi}$ и $\sqrt{p} = i\sqrt{\rho}$, а на нижнем его крае $p = \rho e^{-i\pi}$ и $\sqrt{p} = -i\sqrt{\rho}$. Поскольку $p = 0$ — точка разветвления функции F, то, согласно формуле (5), имеем

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_0} e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp,$$

где γ'_0 — контур, изображенный на рис. 105, ориентированный против хода часовой стрелки, состоящий из двух лучей и окружности радиуса $\varepsilon > 0$.

Оценим

$$\left|\int_{C_\varepsilon} e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp\right| \leqslant \int_{C_\varepsilon} |e^{pt}|\left|\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right||dp|.$$

Полагая $p = \varepsilon e^{i\varphi}$, получим

$$\int_{C_\varepsilon} |e^{pt}|\left|\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right||dp| = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon t\cos\varphi}\frac{e^{-a\sqrt{\varepsilon}\cos\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\varepsilon\,d\varphi \leqslant e^{\varepsilon t}\sqrt{\varepsilon}2\pi \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому

$$-\int_{\gamma'_0} e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp = -\int_{+\infty}^{0} e^{-\rho t}\frac{e^{ia\sqrt{\rho}}}{-i\sqrt{\rho}}\,d\rho - \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\rho t}e^{-ia\sqrt{\rho}}}{i\sqrt{\rho}}\,d\rho = -\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho t}\frac{\left(e^{ia\sqrt{\rho}} + e^{-ia\sqrt{\rho}}\right)}{i\sqrt{\rho}}\,d\rho,$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\frac{\cos a\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\,d\rho = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u^2 t}\cos au\,du$$

(после подстановки $\sqrt{p} = u$). Обозначим $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos au\, du$. Интегрируя по частям, находим:

$$I(a) = \frac{\sin au}{a} e^{-u^2 t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2t}{a} \int\limits_0^{+\infty} u e^{-u^2 t} \sin au\, du = -\frac{2t}{a} \frac{dI}{da}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$I(a) = Ce^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Постоянную C находим из условия

$$C = I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2 t}\, du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(u\sqrt{t})^2}\, d(u\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Следовательно,

$$I(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \blacktriangleright$$

723. $F(p) = e^{-a\sqrt{p}}$, $a > 0$.

◀ Пусть $f(t) \doteqdot e^{-a\sqrt{p}}$. Тогда по теореме дифференцирования изображения получим

$$-tf(t) \doteqdot \left(e^{-a\sqrt{p}}\right)', \quad \text{или} \quad \frac{2}{a} tf(t) \doteqdot \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}.$$

Согласно решению предыдущего примера $\frac{2}{a} tf(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$. Поэтому

$$f(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}, \quad e^{-a\sqrt{p}} \doteqdot \frac{a}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \blacktriangleright$$

724. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$, $a > 0$.

◀ Воспользуемся решением предыдущего примера и теоремой интегрирования оригинала. Получим

$$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \doteqdot \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}.$$

Произведя замену $\frac{a^2}{4\tau} = u^2$, находим:

$$\int\limits_0^t \frac{a}{2\sqrt{\pi\tau^3}} e^{-\frac{a^2}{4\tau}}\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \operatorname{Erf}\left(\frac{u}{2\sqrt{t}}\right).$$

Имеем

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \doteqdot \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right). \blacktriangleright$$

725. $F(p) = \dfrac{p^2 + p - 1}{(p-2)(p^2 - p - 20)}$.

◀ Поскольку $(p-2)(p^2-p-20) = (p-2)(p+4)(p-5)$, то функция F имеет простые полюсы в точках $p_1 = 2$, $p_2 = -4$, $p_3 = 5$. Эти же полюсы имеет и функция $e^{pt}F(p)$. Для нахождения оригинала функции F воспользуемся формулой (4), п. 3.3. Вычеты функции $p \mapsto e^{pt}F(p)$ найдем с помощью формулы (8), п. 3.2. Имеем

$$\operatorname*{res}_{p=2} e^{pt}F(p) = \frac{e^{pt}(p^2 + p - 1)}{3(p^2 - 2p - 6)}\Big|_{p=2} = -\frac{5e^{2t}}{18},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-4} e^{pt}F(p) = \left.\frac{e^{pt}(p^2+p-1)}{3(p^2-2p-6)}\right|_{p=-4} = \frac{11}{54}e^{-4t},$$

$$\operatorname*{res}_{p=5} e^{pt}F(t) = \left.\frac{e^{pt}(p^2+p-1)}{3(p^2-2p-6)}\right|_{p=5} = \frac{29}{27}e^{5t}.$$

Подставив полученное в формулу (4), п. 3.3, находим:

$$f(t) = \frac{1}{54}(11e^{-4t} + 58e^{5t} - 15e^{2t}). \blacktriangleright$$

726. $F(p) = \dfrac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

◀ Функция $e^{pt}F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p = \pm 2i$ и $p = \pm i$. По формуле (8), п. 3.2, находим

$$\operatorname*{res}_{p=i} e^{pt}F(p) = \left.\frac{e^{pt}(p^2-p+2)}{2p(2p^2+5)}\right|_{p=i} = -\frac{(1+i)}{6}e^{it},$$

$$\operatorname*{res}_{p=2i} e^{pt}F(p) = \left.\frac{e^{pt}(p^2-p+2)}{2p(2p^2+5)}\right|_{p=2i} = \frac{1-i}{6}e^{2it}.$$

В точках $p = -i$ и $p = -2i$ получим комплексно сопряженные выражения. Следовательно,

$$f(t) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{6}e^{2it} - \frac{1+i}{6}e^{it}\right) = \frac{1}{3}(\cos 2t + \sin 2t - \cos t + \sin t). \blacktriangleright$$

727. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

◀ Функция $e^{pt}F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p = 2$, $p = \pm i$ и полюс 3-го порядка в точке $p = 1$. Согласно формуле (4), п. 3.3, имеем

$$f(t) = \operatorname*{res}_{p=2} e^{pt}F(p) + \operatorname*{res}_{p=i} e^{pt}F(p) + \operatorname*{res}_{p=-i} e^{pt}F(p) + \operatorname*{res}_{p=1} e^{pt}F(p).$$

Вычислим вычеты по формулам (6) и (7), п. 3.2, получим:

$$\operatorname*{res}_{p=2} e^{pt}F(p) = \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)^3(p^2+1)}\right|_{p=2} = \frac{1}{5}e^{2t},$$

$$\operatorname*{res}_{p=i} e^{pt}F(p) + \operatorname*{res}_{p=-i} e^{pt}F(p) = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{res}_{p=i} e^{pt}F(p)\right) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^3(p+i)(p-2)}\right)_{p=i} = \frac{1}{20}(\cos t - 3\sin t),$$

$$\operatorname*{res}_{p=1} e^{pt}F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{pt}}{(p^2+1)(p-2)}\right)''_{p=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2(6p^4-16p^3+15p^2-3)}{(p^2+1)^3(p-2)^3}e^{pt} - 2\frac{3p^2-4p+1}{(p+1)^2(p-2)^3}te^{pt} + \frac{t^2e^{pt}}{(p^2+1)(p-2)}\right)_{p=1} = -\frac{e^t}{4}(t^2+5).$$

Таким образом,

$$f(t) = \frac{e^{2t}}{5} + \frac{1}{20}(\cos t - 3\sin t) - \frac{e^t}{4}(t^2+1). \blacktriangleright$$

728. $F(p) = \dfrac{1}{p\operatorname{ch} p}$.

◀ Поскольку $\operatorname{ch} p = \cos ip$, то функция $e^{pt}F(p)$ имеет бесконечное множество простых полюсов $p_0 = 0$, $p_k = \pm i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно второй теореме разложения имеем

$$f(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} p}\right)_{p=0} + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p\operatorname{sh} p}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=p_k} =$$

$$= 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t}}{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\operatorname{sh} i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Легко показать, что получено разложение в ряд Фурье на сегменте $[0, 4]$ функции

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 4k-1<t<4k+1,\\ 2, & \text{если} \quad 4k+1<t<4k+3,\end{cases}$$

по косинусам кратных дуг. Действительно, коэффициенты Фурье a_k для функции f вычисляются по формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt \quad (k\in\mathbb{Z}_0).$$

В рассматриваемом случае $l=4$, поэтому

$$a_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 2\,dt=2, \quad a_k=\frac{1}{2}\int\limits_1^3\cos\frac{k\pi}{4}t\,dt=2\,\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}}.$$

Так как $\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4}=(-1)^k$ при $n=4k-2$ $(k\in\mathbb{N})$, то $a_k=2\frac{(-1)^k}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}$, и

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 4k-1<t<4k+1,\\ 2, & \text{если} \quad 4k+1<t<4k+3.\end{cases}$$

С помощью единичной функции η можем представить функцию f в виде

$$f(t)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\eta(t-2k-1).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p\operatorname{ch}p}\doteqdot 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\eta(t-2k-1).\ \blacktriangleright$$

Найти изображения функций.

729. $f(t)=\sin 2\sqrt{t}$.

◀ Воспользуемся теоремой 1, п. 3.3. Разлагая функцию f в степенной ряд, получаем

$$\sin 2\sqrt{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{n+\frac{1}{2}}\doteqdot F(p).$$

Согласно решению примера 683, имеем

$$t^{n+\frac{1}{2}}\doteqdot\frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n+1}p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно,

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{n!p^{n+\frac{3}{2}}}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n}{n!}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}.\ \blacktriangleright$$

730. $f(t)=\dfrac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.

◀ Из разложения

$$\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k}t^{k-\frac{1}{2}}}{(2k)!}$$

и соотношения

$$t^{k-\frac{1}{2}}\doteqdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{p^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^kp^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{k!2^{2k}p^{k+\frac{1}{2}}}$$

находим

$$\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\doteqdot\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^k}{k!}=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}.\ \blacktriangleright$$

731. $f(t)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$, где $J_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\frac{1}{k!(n+k)!}$ — цилиндрическая (бесселева) функция 1-го рода n-го порядка.

◀ Подставляя в формулу для $J_n(x)$ вместо x аргумент $2\sqrt{t}$, получим

$$f(t)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})=t^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\sqrt{t})^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{n+k}}{k!\Gamma(n+k+1)}.$$

Принимая во внимание решение примера 682, имеем

$$t^{n+k}\doteq\frac{\Gamma(n+k+1)}{p^{n+k+1}}.$$

Следовательно,

$$f(t)\doteq\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{p^{n+k+1}}}{k!}=\frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^k}{k!}=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}},\quad n\in\mathbb{Z}_0.\ \blacktriangleright$$

732. $f(t)=\dfrac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

◀ Воспользуемся решением предыдущего примера, полагая там $n=1$. Получаем

$$t^{\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{t})\doteq\frac{1}{p^2}e^{-\frac{1}{p}}.$$

По формуле интегрирования изображения (теорема 10, п. 1.2) находим

$$\frac{t^{\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{t})}{t}\doteq\int_p^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{q}}\,dq}{q^2}=e^{-\frac{1}{q}}\Big|_p^{+\infty}=1-e^{-\frac{1}{p}}.$$

Таким образом,

$$f(t)\doteq1-e^{-\frac{1}{p}}.\ \blacktriangleright$$

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы

4.1. Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Ly=a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=f(t)\tag{1}$$

и начальные условия

$$y(0)=y_0,\quad y_0'(0)=y_0',\quad\ldots,\quad y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.\tag{2}$$

Считаем, что $a_0\neq0$ и функция f, а также решение $y(t)$ вместе с его производными до n-го порядка являются оригиналами. Обозначим $Y(p)\doteq y(t)$, $F(p)\doteq f(t)$.

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение

$$\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\right)Y(p)=$$

$$=F(p)+y_0\left(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right)+y_0'\left(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2}\right)+\ldots+y_0^{(n-1)}a_0,$$

или

$$A(p)Y(p)=F(p)+B(p),\tag{3}$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — известные многочлены. Решая это уравнение, найдем операторное решение

$$Y(p)=\frac{F(p)+B(p)}{A(p)}.\tag{4}$$

Если уравнение (1) при начальных условиях (2) допускает решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям, наложенным на оригиналы, то это решение является оригиналом для $Y(p)$.

4.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Аналогично применяется операционный метод к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть требуется решить систему n дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}\frac{d^2y_k}{dt^2}+b_{\nu k}\frac{dy_k}{dt}+c_{\nu k}y_k\right)=f_\nu(t)\quad(\nu=\overline{1,n}) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y_k(0)=\alpha_k,\quad \frac{dy_k(0)}{dt}=\beta_k. \tag{2}$$

Если $y_k(t)$ и $f_\nu(t)$ — оригиналы, а $Y_k(p)$ и $F_\nu(p)$ — их изображения, то система (1) с начальными условиями (2) заменится операторной системой

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k}\right)Y_k(p)=F_\nu(p)+\sum_{k=1}^{n}\Big((a_{\nu k}p+b_{\nu k})\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k\Big). \tag{3}$$

Решая ее как алгебраическую линейную систему уравнений, найдем $Y_k(p)$, а потом и их оригиналы $y_k(t)$.

4.3. Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля.

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения

$$Ly=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу

$$Ly=1;\quad y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0, \tag{3}$$

где Ly — левая часть уравнения (1). Поскольку операторные уравнения, соответствующие задачам (1), (2) и (3), имеют вид

$$A(p)Y(p)=F(p),\quad A(p)Y_1(p)=\frac{1}{p},$$

где $F\doteqdot f$, то $Y(p)=pY_1(p)F(p)$. Таким образом, если известно решение задачи (3), то, согласно формуле Дюамеля, имеем

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)\,d\tau \tag{4}$$

(приняли во внимание, что $y_1(0)=0$ согласно начальным условиям). Формула (4) принимает вид

$$y(t)=y_1(t)f(0)+\int_0^t y_1(t)f'(t-\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Решить следующие дифференциальные задачи.

733. $y''+a^2y=b\sin at;\ y(0)=y_0,\ y_0'(0)=y_0'$.

◀ Операторное уравнение, соответствующее дифференциальной задаче, имеет вид

$$(p^2+a^2)Y=\frac{ab}{p^2+a^2}+y_0p+y_0'.$$

Таблица оригиналов и их изображений

	Оригинал	Изображение
1	$\eta(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 1, \text{ если } t \geqslant 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$t^a \ (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
3	$e^{\sigma t}, \ \sigma = \text{const}$	$\frac{1}{p-\sigma}$
4	$t^n e^{\sigma t}, \ n \in \mathbb{N}, \ \sigma = \text{const}$	$\frac{n!}{(p-\sigma)^{n+1}}$
5	$\sin \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$e^{\sigma t} \sin \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \sigma = \text{const}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{\omega}{(p-\sigma)^2+\omega^2}$
7	$t^n \sin \omega t, \ n \in \mathbb{N}, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$n! \frac{\operatorname{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
8	$\cos \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9	$e^{\sigma t} \cos \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \sigma = \text{const}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{p-\sigma}{(p-\sigma)^2+\omega^2}$
10	$t^n \cos \omega t, \ n \in \mathbb{N}, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$n! \frac{\operatorname{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
11	$\operatorname{sh} \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
12	$\operatorname{ch} \omega t, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
13	$\frac{\sin \omega t}{t}, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$
14	$\lvert \sin \omega t \rvert, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{const}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \operatorname{cth} \frac{\pi p}{2\omega}$
15	$e^{-\alpha^2 t^2}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha = \text{const}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4\alpha^2}} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)$
16	$\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha = \text{const}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi+\alpha}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha = \text{const}$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$
19	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$
20	$\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha = \text{const}$	$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$

Приводим таблицу изображений для некоторых функций и соответствующие указания для пользования ею.

Если требуется по заданному оригиналу найти соответствующее ему изображение, то таблицу читают слева направо; если известно изображение и требуется найти соответствующий ему оригинал — справа налево.

Таблицы более подробные, чем предложенная здесь, приводятся в специальной литературе по операционному исчислению.

Решив его, находим:

$$Y(p) = \frac{ab}{(p^2+a^2)^2} + y_0\frac{p}{p^2+a^2} + \frac{y_0'}{p^2+a^2}.$$

Из таблицы изображений функций находим:

$$y_0\frac{p}{p^2+a^2} \doteqdot y_0\cos at, \quad \frac{y_0'}{p^2+a^2} \doteqdot \frac{y_0'}{a}\sin at.$$

Поскольку $\frac{ab}{(p^2+a^2)^2} = \frac{b}{2}\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}\frac{1}{p}$, то по формуле 7 таблицы и теореме об интегрировании оригинала имеем

$$\frac{ab}{(p^2+a^2)^2} \doteqdot \frac{b}{2}\int_0^t \tau\sin a\tau\, d\tau = \frac{b}{2a^2}(\sin at - at\cos at).$$

Окончательно получаем:

$$y(t) = \left(y_0' + \frac{b}{2a}\right)\frac{\sin at}{a} + \left(y_0 - \frac{bt}{2a}\right)\cos at. \blacktriangleright$$

734. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t);\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

◀ Перейдем к изображениям:

$$y \doteqdot Y, \quad y' \doteqdot pY + 1, \quad y'' \doteqdot p^2Y + p - 1, \quad \cos t + 2\sin t \doteqdot \frac{p+2}{p^2+1}.$$

По теореме смещения получим

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \doteqdot \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Дифференциальной задаче соответствует операторное уравнение

$$p^2Y + p - 1 + 4pY + 4 + 4Y = \frac{p+4}{(p+2)^2+1},$$

решение которого имеет вид

$$Y(p) = -\frac{p^3+7p^2+16p+11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}.$$

Разлагая правую часть этого равенства на простые дроби, находим:

$$Y(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Перейдем к оригиналу, воспользовавшись свойством линейности, теоремой смещения и таблицей изображений. Имеем

$$y(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t). \blacktriangleright$$

735. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

◀ Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Переходя к изображениям, получим операторное уравнение, соответствующее дифференциальной задаче:

$$(p+1)^3Y = \frac{1}{p}.$$

Его решение —

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Оригинал изображения Y находим по формулам 1, 3 и 4 таблицы:

$$y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right). \blacktriangleright$$

736. $y''' + y = 1;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

◀ Дифференциальной задаче соответствует операторное уравнение, решением которого является функция Y, где

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Оригинал найдем с помощью второй теоремы разложения: $y(t) = \sum\limits_j \operatorname{res}\limits_{p_j} (e^{pt}Y(p))$. Функция Y имеет простые полюсы в точках $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ и $p_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $p_4 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычисляя вычеты функции $p \mapsto e^{pt}Y(p)$ в указанных точках, находим

$$\operatorname*{res}_{p_1} e^{pt}\frac{1}{p(p^3+1)} = \lim_{p\to 0} e^{pt}\frac{1}{p^3+1} = 1, \quad \operatorname*{res}_{p_2} e^{pt}Y(p) = \lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}}{p(p^2-p+1)} = -\frac{e^{-t}}{3},$$

$$\operatorname*{res}_{p_3} e^{pt}Y(p) + \operatorname*{res}_{p_4} e^{pt}Y(p) = 2\operatorname{Re}\frac{\exp\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t\right)}{-3} = -\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Окончательно имеем

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t. \blacktriangleright$$

737. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = \sin t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

◀ Решение операторного уравнения, соответствующего дифференциальной задаче, находим после перехода от функции, ее производных и правой части уравнения к изображениям. Оно имеет вид

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

Оригинал $y(t)$ находим как вычет функции $p \mapsto e^{pt}Y(p)$ в точке $p = i$:

$$y(t) = \operatorname{Re}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+1)^3}\right)\Bigg|_{p=i} = \frac{1}{8}(3-t^2)\sin t - \frac{3}{8}t\cos t. \blacktriangleright$$

738. $y^{\mathrm{V}} - y' = 8\sin t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, $y^{\mathrm{IV}}(0) = 1$.

◀ Поскольку $y(t) \doteqdot Y(p)$, $y'(t) \doteqdot pY(p)$, $y^{\mathrm{V}}(t) \doteqdot p^5Y(p) - 1$, $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, то операторное уравнение, соответствующее дифференциальной задаче, имеет вид

$$p^5Y - 1 - pY = \frac{8}{p^2+1},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p^2+1)^2}.$$

Оригинал будем находить с помощью второй теоремы разложения. Функция Y имеет простые полюсы $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm 1$ и комплексно сопряженные полюсы второго порядка $p_{4,5} = \pm i$. Обозначим $p^2 + 9 = F_1(p)$, $(p^2-1)(p^2+1)^2 = F_3(p)$. Тогда

$$Y(p) = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Найдем вычеты функции $e^{pt}Y(p)$ в ее полюсах. Имеем

$$\operatorname*{res}_{p_1} e^{pt}Y(p) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} = -9, \quad \operatorname*{res}_{p_2} e^{pt}Y(p) = \frac{F_1(p_2)e^{p_2t}}{p_2F_3'(p_2)} = \frac{10e^t}{8} = \frac{5}{4}e^t, \quad \operatorname*{res}_{p_3} e^{pt}Y(p) = \frac{F_1(p_3)e^{p_3t}}{p_3F_3'(p_3)} = \frac{5}{4}e^{-t},$$

$$\operatorname*{res}_{p_4} e^{pt}Y(p) + \operatorname*{res}_{p_5} e^{pt}Y(p) = 2\operatorname{Re}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{(p-i)^2(p^2+9)e^{pt}}{p(p^2+1)(p^2-1)^2}\right) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{(p^2+9)e^{pt}}{p(p^2-1)(p^2+i)^2}\right)'_{p=i} =$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{-3p^5-44p^3+27p-p^4i-28p^2i+9i}{p^2(p^2-1)^2(p+i)^3} + \frac{(p^2+9)t}{p(p^2-1)(p+i)^2}\right)e^{pt}\Bigg|_{p=i} =$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{13}{4} + \frac{t}{i}\right)e^{it} = \frac{13}{2}\cos t + 2t\sin t.$$

Окончательно находим:

$$y(t) = -9 + \frac{5}{2}\operatorname{ch} t + \frac{13}{2}\cos t + 2t\sin t. \blacktriangleright$$

739. $y'' + \omega^2 y = a\big(\eta(t) - \eta(t-b)\big);\ y(0) = y'(0) = 0.$

◀ Перейдем к изображениям. Имеем $y \doteqdot Y$, $y'' \doteqdot p^2 Y$, $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, $\eta(t-b) \doteqdot \frac{e^{-bp}}{p}$ (по теореме запаздывания). Дифференциальной задаче соответствует операторное уравнение

$$(p^2 + \omega^2)Y = \frac{a}{p}\left(1 - e^{-bp}\right),$$

решением которого является функция Y, где

$$Y = \frac{a}{p(p^2+\omega^2)}(1 - e^{-bp}).$$

По второй теореме разложения получаем

$$\frac{a}{p(p^2+\omega^2)} \doteqdot \frac{a}{\omega^2} - \frac{a}{\omega^2}\cos\omega t = \frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2},$$

а по теореме запаздывания находим:

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)} \doteqdot \frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\,\eta(t-b).$$

Таким образом,

$$y(t) = \frac{2a}{\omega^2}\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t) - \sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\,\eta(t-b)\right). \blacktriangleright$$

740. $y'' + 4y = f(t);\ y(0) = y'(0) = 0$, где

$$f(t) = \begin{cases} t - 2n\pi, & \text{если } 2n\pi < t \leqslant (2n+1)\pi, \\ -t + 2(n+1)\pi, & \text{если } (2n+1)\pi < t \leqslant (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_0.$$

◀ Сужение функции на положительную полуось является 2π-периодической функцией. Имеем (см. следствие из теоремы 5, п. 1.2)

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\int_0^{\pi} te^{-pt}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}(-t+2\pi)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi} + \left(\frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} - \frac{2\pi e^{-pt}}{p}\right)\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi}\right) = \frac{1-e^{-\pi p}}{p^2(1+e^{-\pi p})} = \frac{1}{p^2}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

Функция f непрерывная $\forall t \in \mathbb{R}_0$. Ее производная

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & \text{если } (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_0,$$

имеет разрывы 1-го рода в точках $t_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Операторное уравнение, соответствующее данной дифференциальной задаче, имеет вид

$$p^2 Y + 4Y = \frac{1}{p^2}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

Оригинал изображения $Y(p)$ найдем по теореме умножения. Изображение функции f' по теореме дифференцирования оригинала имеет вид

$$f'(t) \doteqdot p\,\frac{1}{p^2}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2} - f(0) = \frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

Имеем

$$\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2} \doteqdot \begin{cases} 1, & \text{если } 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & \text{если } (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_0, \qquad \frac{1}{p^2(p^2+4)} \doteqdot \frac{1}{4}(1 - \cos 2t).$$

Оригинал функции Y на различных интервалах изменения выражается следующими формулами:

$$Y(p)=\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}\,\frac{1}{p(p^2+4)}\doteqdot\int_0^t\frac{1}{4}(1-\cos 2\tau)\,d\tau=\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right),\quad\text{если}\quad 0<t<\pi,$$

$$Y(p)\doteqdot\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(1-\cos 2\tau)\,d\tau+\int_{\pi}^t\frac{1}{4}(-1+\cos 2\tau)\,d\tau=\frac{1}{4}\left(-t+\frac{\sin 2t}{2}+2\pi\right),\quad\text{если}\quad \pi<t<2\pi,$$

$$Y(p)\doteqdot\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(1-\cos 2\tau)\,d\tau+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{4}(-1+\cos 2\tau)\,d\tau+\int_{2\pi}^t\frac{1}{4}(1-\cos 2\tau)\,d\tau=\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}-2\pi\right),$$

если $2\pi<t<3\pi$,

. . . . . .

$$Y(p)\doteqdot\begin{cases}\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}-2\pi n\right), & \text{если}\quad 2n\pi<t<(2n+1)\pi,\\ \frac{1}{4}\left(-t+\frac{\sin 2t}{2}+(2n+1)\pi\right), & \text{если}\quad (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi.\end{cases}$$

Окончательно имеем

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}-2\pi n\right), & \text{если}\quad 2n\pi<t\leqslant(2n+1)\pi,\\ \frac{1}{4}\left(-t+\frac{\sin 2t}{2}+(2n+1)\pi\right), & \text{если}\quad (2n+1)\pi<t\leqslant(2n+2)\pi,\\ 0, & \text{если}\quad t<0,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{Z}_0.\ \blacktriangleright$$

741. $y'''+6y''+11y'+6y=f(t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=y''(0)=1$, где

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad t<1,\\ 1, & \text{если}\quad 1<t<2,\\ t^2-4t+5, & \text{если}\quad t>2.\end{cases}$$

◀ Представим функцию f в виде

$$f(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)+(t^2-4t+5)\eta(t-2)=\eta(t-1)+(t-2)^2\eta(t-2).$$

Тогда

$$f(t)\doteqdot\frac{e^{-p}}{p}+\frac{2e^{-2p}}{p^3}$$

(по теореме запаздывания). Далее,

$$y(t)\doteqdot Y(p),\quad y'(t)\doteqdot pY(p),\quad y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-1,\quad y'''(t)\doteqdot p^3Y(p)-p-1,$$

$$p^3Y-p-1+6p^2Y-6+11pY+6Y=\frac{e^{-p}}{p}+\frac{2e^{-2p}}{p^3},$$

или

$$(p^3+6p^2+11p+6)Y=p+7+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{2e^{-2p}}{p^3},$$

откуда

$$Y(p)=\frac{p+7}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\frac{e^{-p}}{p(p+1)(p+2)(p+3)}+\frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)}=Y_1(p)+Y_2(p)+Y_3(p).$$

Для определения оригиналов функций Y_1, Y_2, Y_3 применим вторую теорему разложения. Функция Y_1 имеет простые полюсы $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$, поэтому

$$Y_1(p)\doteqdot\sum_{k=1}^3\left(\frac{(p+7)e^{pt}}{\big((p+1)(p+2)(p+3)\big)'}\right)_{p=-k}=\sum_{k=1}^3\left(\frac{(p+7)e^{pt}}{3p^2+12p+11}\right)_{p=-k}=3e^{-t}-5e^{-2t}+2e^{-3t}.$$

Функция Y_2 имеет простые полюсы в точках $p_0 = 0$, $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$. Имеем

$$Y_2(p) \doteqdot \frac{e^{p(t-1)}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\bigg|_{p=0} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{p(t-1)}}{\big(p(p+1)(p+2)(p+3)\big)'}\right)_{p=-k} =$$

$$= \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{p(t-1)}}{p(3p^2+12p+11)}\right)_{p=-k} = \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-2(t-1)}}{2} - \frac{1}{6}e^{-3(t-1)}\right)\eta(t-1).$$

Функция Y_3 имеет полюс 3-го порядка $p_0 = 0$ и простые полюсы $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, следовательно,

$$Y_3(p) \doteqdot \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left(p^3\frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)}e^{pt}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{2e^{-2p}}{\big(p^3(p+1)(p+2)(p+3)\big)'}e^{pt}\right)_{p=-k} =$$

$$= \left(\frac{e^{p(t-2)}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right)''_{p=0} + 2\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{p(t-2)}}{6p^5+30p^4+44p^3+18p^2}\right)_{p=-k} =$$

$$= \left(2\frac{(3p^2+12p+11)^2 - 3(p+1)(p+2)^2(p+3)}{((p+1)(p+2)(p+3))^3}e^{p(t-2)} - 2\frac{(t-2)(3p^2+12p+11)}{((p+1)(p+2)(p+3))^2}e^{p(t-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-2)^2}{(p+1)(p+2)(p+3)}e^{p(t-2)}\right)_{p=0} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{p(t-2)}}{p^2(3p^3+15p^2+22p+9)}\right)_{p=-k} =$$

$$= \left(\frac{85}{108} - \frac{11(t-2)}{18} + \frac{(t-2)^2}{6} - e^{-(t-2)} + \frac{e^{-2(t-2)}}{4} - \frac{e^{-3(t-2)}}{27}\right)\eta(t-2).$$

Решением дифференциальной задачи является функция y, где

$$y(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t} + \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-2(t-1)}}{2} - \frac{e^{-3(t-1)}}{6}\right)\eta(t-1) +$$

$$+ \left(\frac{85}{108} - \frac{11}{18}(t-2) + \frac{1}{6}(t-2)^2 + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} - \frac{1}{27}e^{-3(t-2)}\right)\eta(t-2). \blacktriangleright$$

742. $y'' - a^2y = be^{-t^2}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Решать задачу будем с помощью интеграла Дюамеля, как указано в п. 4.3. Сначала решим задачу

$$y'' - a^2y = 1; \quad y(0) = y'(0) = 0, \tag{1}$$

а затем воспользуемся формулой (4), п. 4.3. Обозначим через y_1 решение задачи (1), а через Y_1 — его изображение. Тогда $Y_1 = \frac{1}{p(p^2-a^2)}$. Воспользуемся формулой 11 таблицы изображений и теоремой об интегрировании оригинала. Получим

$$Y_1 \doteqdot \frac{1}{a}\int_0^t \operatorname{sh} a\tau\, d\tau = \frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at - 1) = y_1(t).$$

По формуле (4), п. 4.3, находим:

$$y(t) = \frac{b}{a}\int_0^t e^{-\tau^2}\operatorname{sh} a(t-\tau)\, d\tau.$$

Подставив в интеграл $\operatorname{sh} a(t-\tau) = \frac{1}{2}\left(e^{a(t-\tau)} - e^{-a(t-\tau)}\right)$, после несложных преобразований, связанных с выделением полных квадратов, получим решение задачи в виде

$$y(t) = \frac{b}{4a}\sqrt{\pi}e^{\frac{a^2}{4}}\left(e^{at}\operatorname{erf}\left(t + \frac{a}{2}\right) - e^{-at}\operatorname{erf}\left(t - \frac{a}{2}\right)\right). \blacktriangleright$$

743. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos t;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$

◀ Найдем решение y_1 задачи $y^{IV} + 2y'' + y = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. Имеем $y_1(t) \doteqdot Y_1(p)$, $y_1^{IV}(t) \doteqdot p^4 Y_1(p)$, $y_1''(p) \doteqdot p^2 Y_1(p)$, $1 \doteqdot \frac{1}{p}$. Получаем операторное уравнение

$$p^4 Y_1 + 2p^2 Y_1 + Y_1 = \frac{1}{p},$$

решив которое, находим

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)^2}.$$

Оригинал функции Y_1 находим с помощью торой теоремы разложения. Функция Y_1 имеет простой полюс $p = 0$ и комплексно сопряженные полюсы 2-го порядка $p = \pm i$. По второй теореме разложения имеем

$$y_1(t) = \left.\frac{1}{(p^2+1)^2}\right|_{p=0} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{d}{dp}\left((p-i)^2 \frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}\right)\right)_{p=i} =$$

$$= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{tp^2 - 3p + (tp-1)i}{p^2(p+i)^3}\, e^{pt}\right)_{p=i} = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

Согласно формуле (4), п. 4.3, решение исходной задачи имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot \frac{1}{2}\big(\sin(t-\tau) - (t-\tau)\cos(t-\tau)\big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tau \sin t + \frac{\cos(t-2\tau)}{2} - (t-\tau)\left(\tau\cos t - \frac{\sin(t-2\tau)}{2}\right) - \frac{\tau^2}{2}\cos t + \frac{\cos(t-2\tau)}{4}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{8}\,t\,(\sin t - t\cos t). \blacktriangleright$$

744. $y'' + 3y' + 2y = e^t;\ y(0) = y'(0) = 0.$

◀ Действуем по той же схеме, что и при решении двух предыдущих примеров. Имеем

$$y(t) = \int_0^t e^\tau y_1'(t-\tau)\,d\tau,$$

где y_1 — решение задачи

$$y'' + 3y' + 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{1}$$

Составим операторное уравнение, соответствующее задаче (1). Получим:

$$y_1(t) \doteqdot Y_1(p), \quad y_1''(t) \doteqdot p^2 Y_1(p), \quad y_1'(t) \doteqdot pY_1(p), \quad 1 \doteqdot \frac{1}{p},$$

$$Y_1 = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}.$$

Функция Y_1 имеет простые полюсы в точках $p_0 = 0$, $p_1 = -1$, $p_2 = -2$. По второй теореме разложения

$$y_1(t) = \left.\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right|_{p=0} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p+2)}\right|_{p=-1} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p+1)}\right|_{p=-2} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}.$$

Поскольку $y_1'(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}$, то

$$y(t) = \int_0^t e^\tau \left(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right) d\tau = \int_0^t \left(e^{-t+2\tau} - e^{-2t+3\tau}\right) d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,e^{-t+2\tau} - \frac{1}{3}\,e^{-2t+3\tau}\right)\Bigg|_0^t = \mathrm{sh}\,t - \frac{1}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right). \blacktriangleright$$

745. Точечная масса m совершает прямолинейные колебания, причем сопротивлением среды пренебрегаем, а восстанавливающая сила $m\omega^2 x$ пропорциональна смещению. В моменты времени $t_k = k\tau$ ($k \in \mathbb{Z}_0$) массе сообщаются импульсы величины a. Найти движение частицы, если начальное отклонение и начальная скорость равны нулю.

◀ Положение равновесия точки принимаем за начало координат. Согласно второму закону Ньютона уравнение колебаний точки имеет вид

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau),$$

где δ — импульсная функция или функция Дирака.

Применив к этому уравнению интегральное преобразование Лапласа, получим уравнение относительно изображения $X(p) \doteqdot x(t)$

$$m(p^2+\omega^2)X(p) = a\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t-k\tau)\,dt.$$

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{t}\delta(s-k\tau)\,ds = \eta(t-k\tau)$, т. е. $\eta'(t-k\tau) = \delta(t-k\tau)$, а по свойству оригинала $\eta(t-k\tau) \doteqdot \frac{e^{-pk\tau}}{p}$, то

$$\delta(t-k\tau) = \eta'(t-k\tau) \doteqdot p\frac{e^{-pk\tau}}{p} = e^{-pk\tau}.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t-k\tau)\,dt = e^{-pk\tau}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-pk\tau} = (1-e^{-p\tau})^{-1}$, в силу чего окончательно находим

$$X(p) = \frac{a}{m(p^2+\omega^2)(1-e^{-p\tau})}.$$

Совершив восстановление оригинала $x(t) \doteqdot X(p)$, получим решение задачи. Для восстановления оригинала применим вторую теорему разложения. Функция x мероморфная, она имеет полюсы в точках $p_{1,2} = \pm i\omega$ и $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}$ ($k \in \mathbb{Z}_0$). Если τ не является целым кратным $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ (что и предполагается), то все полюсы простые, и, найдя вычеты, получим согласно второй теореме разложения

$$x(t) = \frac{a}{m\omega^2}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{\omega}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t\right). \blacktriangleright$$

Решить системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

746. $\begin{cases}(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,\\(2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0,\\x(0)=x'(0)=1,\ y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$

◀ Операторная система, соответствующая поставленной задаче, имеет вид

$$\begin{cases}(2p^2-p+9)X-(p^2+p+3)Y = 2p+1,\\(2p^2+p+7)X-(p^2-p+5)Y = 2p+3,\end{cases}$$

где $X(p) \doteqdot x(t)$, $Y(p) \doteqdot y(t)$. Взяв сумму и разность этих уравнений, получим

$$2X - Y = 2\frac{p+1}{p^2+4}, \quad X+Y = \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$X = \frac{1}{3(p-1)} + \frac{2p}{3(p^2+4)} + \frac{2}{3(p^2+4)}, \quad Y = \frac{2}{3(p-1)} - \frac{2p}{3(p^2+4)} - \frac{2}{3(p^2+4)}.$$

Перейдем к оригиналам. Имеем

$$x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t). \blacktriangleright$$

747. $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, \\ x + y + z'' - z = 0, \\ x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$

◀ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$, $z(t) \doteqdot Z(p)$. Операторная система, соответствующая дифференциальной, имеет вид

$$\begin{cases} (p^2 - 1)X + Y + Z = p, \\ X + (p^2 - 1)Y + Z = 0, \\ X + Y + (p^2 - 1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера, получим

$$X = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}, \quad Y = Z = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

По второй теореме разложения находим оригиналы

$$x(t) = \frac{2}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\cos t, \quad y(t) = z(t) = -\frac{1}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\cos t. \blacktriangleright$$

748. $x_0' = -ax_0$, $x_k' - ax_k = ax_{k-1}$ $(k = \overline{1, n})$; $x_0(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ $(k = \overline{1, n})$.

◀ Пусть $x_0(t) \doteqdot X(p)$, $x_k(t) \doteqdot X_k(p)$ $(k = \overline{1, n})$. Операторная система, соответствующая дифференциальной, имеет вид

$$(p + a)X_0 = 1, \quad (p + a)X_k - aX_{k-1} = 0,$$

откуда

$$X_k = \frac{a^k}{(p + a)^{k+1}} \quad (k = \overline{0, n}).$$

Оригиналы находим по формуле 4 таблицы:

$$x_k(t) = \frac{1}{k!}(at)^k e^{-at}. \blacktriangleright$$

749. $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

◀ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$. Поскольку выполняются соотношения

$$x'(t) \doteqdot pX, \quad x''(t) \doteqdot p^2X - 1, \quad e^t \doteqdot \frac{1}{p - 1}, \quad y'(t) \doteqdot pY, \quad y''(t) \doteqdot p^2Y, \quad e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p + 1},$$

то операторная система, соответствующая дифференциальной, имеет вид

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \frac{1}{p - 1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p + 1}, \end{cases}$$

решив которую, получим:

$$X(p) = \frac{2p - 1}{2(p - 1)(p + 1)^2} = \frac{1}{8(p - 1)} + \frac{3}{4(p + 1)^2} - \frac{1}{8(p + 1)}, \quad Y(p) = \frac{3p}{2(p^2 - 1)^2}.$$

Из соотношений $\frac{1}{p + 1} \doteqdot e^t$, $\frac{1}{p^2 - 1} \doteqdot \operatorname{sh} t$ по теореме дифференцирования изображений находим

$$\left(\frac{1}{p + 1}\right)' \doteqdot -te^{-t} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{p^2 - 1}\right)' \doteqdot -t\operatorname{sh} t,$$

или

$$\frac{1}{(p + 1)^2} \doteqdot te^{-t} \quad \text{и} \quad \frac{2p}{(p^2 - 1)^2} \doteqdot t\operatorname{sh} t.$$

Окончательно получаем

$$x(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4}te^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{4}t\operatorname{sh} t. \blacktriangleright$$

750. Три одинаковые точечные массы m закреплены на струне так, что расстояния между ними и расстояния от крайних масс до закрепленных концов струны равны l. В начальный момент все массы находятся в положении равновесия, причем средней массе сообщается скорость v_0. Найти движение системы (рис. 106).

◄ Дифференциальные уравнения движения системы найдем с помощью уравнений Лагранжа, которые для малых свободных колебаний имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}=0,$$

где T — кинетическая, Π — потенциальная энергия системы, q_k — обобщенные координаты, а точка означает производную во времени. Если $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ — отклонения масс от положения равновесия, то

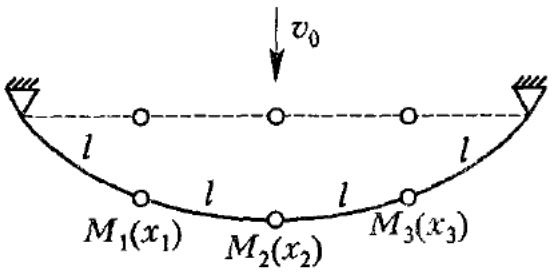


Рис. 106

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right),\quad \Pi=\frac{P}{l}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3\right),$$

где P — натяжение струны. Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x}_1+\lambda(2x_1-x_2)=0,$$
$$\ddot{x}_2+\lambda(2x_2-x_1-x_3)=0,$$
$$\ddot{x}_3+\lambda(2x_3-x_2)=0,$$

где $\lambda=\frac{P}{ml}$. Принимая во внимание начальные условия $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_3(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=v_0$, получаем операторные уравнения

$$(p^2+2\lambda)X_1-\lambda X_2=0,$$
$$-\lambda X_1+(p^2+2\lambda)X_2-\lambda X_3=v_0,$$
$$-\lambda X_2+(p^2+2\lambda)X_3=0,$$

где $X_1(p)\doteqdot x_1(t)$, $X_2(p)\doteqdot x_2(t)$, $X_3(p)\doteqdot x_3(t)$. Решив эту систему, имеем

$$X_2=\frac{p^2+2\lambda}{(p^2+2\lambda)^2-2\lambda^2}v_0,\quad X_1=X_3=\frac{\lambda}{(p^2+2\lambda)^2-2\lambda^2}v_0.$$

Применив вторую теорему разложения, находим:

$$x_1(t)=x_3(t)=-\frac{v_0}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}-\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right),\quad x_2(t)=\frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}+\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right),$$

где $\omega_1=\sqrt{(2+\sqrt{2})\lambda}$, $\omega_2=\sqrt{(2-\sqrt{2})\lambda}$. ►.

§ 5. Интегральные уравнения типа свертки. Особые уравнения

5.1. Интегральные уравнения типа свертки.

Уравнение вида

$$af(t)=\varphi(t)+\lambda\int_\alpha^\beta K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{1}$$

где f — неизвестная функция, φ и K — заданные функции, a, λ, α, β — постоянные, называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода,* если $a=0$, или *второго рода,* если $a\neq 0$.

Функция K, определенная в квадрате $D_K=\left\{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha<t<\beta,\ \alpha<\tau<\beta\right\}$, называется *ядром интегрального уравнения.* Если $\varphi(t)=0$, то уравнение называется *однородным.*

Уравнение

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t K(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода*, если $a = 0$, или *второго рода*, если $a \neq 0$.

Если ядро уравнения K зависит только от разности $t-\tau$, т. е. $K(t, \tau) = K(t-\tau)$, то интеграл

$$\int_0^t K(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = K(t) * f(t) \tag{3}$$

является сверткой функций K и f. В этом случае уравнение Вольтерра

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t K(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

будет уравнением типа свертки, и его решение можно найти операционным методом, пользуясь теоремой умножения Э. Бореля.

5.2. Интегральные уравнения второго рода.

Если интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) * f(t)\, dt$$

абсолютно сходится, то преобразование Лапласа переводит свертку по теореме умножения Э. Бореля в произведение изображений, т. е.

$$K(t) * f(t) \doteqdot \widetilde{K}(p) F(p),$$

где $\widetilde{K}(p) \doteqdot K(t)$. Поэтому уравнение (4), п. 5.1, после перехода к изображениям $f(t) \doteqdot F(p)$, $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$, $K(t) \doteqdot \widetilde{K}(p)$, перейдет в операторное уравнение

$$aF(p) = \Phi(p) + \lambda \widetilde{K}(p) F(p),$$

откуда

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{a - \lambda \widetilde{K}(p)},$$

или

$$F(p) = \frac{1}{a} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\widetilde{K}(p)}{a - \lambda \widetilde{K}(p)} \Phi(p).$$

Обозначим $\frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \widetilde{K}(p)} = \Psi(p)$, и пусть $\Psi(p) \doteqdot \psi(t)$. Тогда равенству

$$F(p) = \frac{1}{a} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \Psi(p) \Phi(p)$$

соответствует в классе оригиналов решение

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \psi(t) * \varphi(t).$$

В частности, если функция K есть многочлен $K(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, то ее изображение $\widetilde{K}(p)$ принимает вид

$$\widetilde{K}(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \ldots + a_n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Тогда

$$\Psi(p) = \frac{\widetilde{K}(p)}{a - \lambda \widetilde{K}(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + n! a_n}{a p^{n+1} - \lambda a_0 p^n - \lambda a_1 p^{n-1} - \ldots - \lambda a_n n!}.$$

Функция Ψ является дробно-рациональной и ее оригинал ψ можно найти по второй теореме разложения.

Таким образом, решение $F(p)$ операторного уравнения, соответствующего интегральному уравнению второго рода типа свертки, всегда можно преобразовать в пространство оригиналов.

5.3. Интегральные уравнения первого рода.

Интегральному уравнению первого рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

соответствует операторное уравнение

$$\Phi(p) = \lambda \widetilde{K}(p) F(p),$$

решение которого

$$F(p) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\widetilde{K}(p)} \Phi(p) \tag{2}$$

нельзя перевести при помощи теоремы умножения в пространство оригиналов, так как функция $\frac{1}{K}$ не является изображением, поскольку необходимым условием существования изображения является выполнение соотношения $\lim\limits_{p\to\infty} (\widetilde{K}(p))^{-1} = 0$. Однако, в некоторых случаях решение существует. Если функции K и φ дифференцируемы и $K(0) \neq 0$, то, продифференцировав уравнение (1), получим интегральное уравнение 2-го рода

$$\varphi'(t) = \lambda \int_0^t K'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + K(0) f(t), \tag{3}$$

решение которого существует

Если $K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(n-1)}(0) = 0$, а $K^{(n)}(0) \neq 0$, то после $(n+1)$-кратного дифференцирования уравнения (1) получим интегральное уравнение второго рода

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \lambda \int_0^t K^{(n+1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + K^{(n)}(0) f(t). \tag{4}$$

5.4. Особые интегральные уравнения. Интегральное уравнение Абеля.

Интегральные уравнения (1) и (2), п. 5.1, называются *особыми*, если ядро $K(t, \tau)$ обращается в бесконечность в одной или нескольких точках сегмента $[\alpha, \beta]$, либо один или оба предела интегрирования α и β бесконечны. Примером особого интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода служит *интегральное уравнение Абеля*

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau = \varphi(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Уравнение получено Абелем для случая $\alpha = \frac{1}{2}$ при решении *задачи о таутохроне*: найти кривую, скользя вдоль которой без трения, тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время, независимо от ее начального положения.

Пусть ядро K уравнения (1), п. 5.3, при $t = 0$ обращается в бесконечность и не имеет производных. Рассмотрим свертку $f(t) * 1 = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = g(t)$. По свойству интегрирования оригинала имеем

$$g(t) \doteqdot G(p) = \frac{1}{p} F(p)$$

и равенство (2), п. 5.3, принимает вид

$$G(p) = \frac{1}{\lambda p \widetilde{K}(p)} \Phi(p). \tag{1}$$

Согласно теореме 11, п. 1.2, $\lim\limits_{p\to\infty} p\widetilde{K}(p) = \lim\limits_{t\to 0} K(t) = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{p\widetilde{K}(p)} = 0$. Поэтому функция $\frac{1}{p\widetilde{K}(p)}$ является изображением. С помощью теоремы умножения равенство (1) можно перевести в пространство оригиналов.

Решить интегральные уравнения второго рода.

751. $f(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau.$

◀ Перейдем к изображениям. Имеем

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}, \quad \int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau = t^2 * f(t) \doteqdot \frac{2}{p^3}F(p).$$

Операторное уравнение, соответствующее интегральному, принимает вид

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{p^3}\,F(p),$$

откуда

$$F(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Представим функцию F как сумму простых дробей:

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{p^2+p+1}.$$

Из тождества

$$p^3 \equiv A(p^2+1)(p^2+p+1) + (Bp+C)(p^3-1) + (Dp+E)(p-1)(p^2+1)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ A+C-D+E=1, \\ 2A+D-E=0, \\ A-B-D+E=0, \\ A-C-E=0, \end{cases}$$

решив которую, получим: $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=-\frac{2}{3}$, $E=-\frac{1}{3}$. Согласно второй теореме разложения имеем

$$f(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}\operatorname*{res}_i \frac{(p+1)e^{pt}}{(p^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname*{res}_{-i} \frac{(p+1)e^{pt}}{(p^2+1)} - \frac{1}{3}\operatorname*{res}_{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{(2p+1)e^{pt}}{(p^2+p+1)} - \frac{1}{3}\operatorname*{res}_{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{(2p+1)e^{pt}}{(p^2+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{6}e^t + \operatorname{Re}\left(\frac{(p+1)e^{pt}}{2p}\right)_{p=i} - \frac{2}{3}\operatorname{Re}\left(\frac{(2p+1)e^{pt}}{2p+1}\right)_{p=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). ▶$$

752. $f(t) = e^{-2t} + 3\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau.$

◀ Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$. В правой части уравнения перейдем к изображениям. Получим

$$e^{-2t} \doteqdot \frac{1}{p+2}, \quad 3\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \doteqdot 3F(p)\,\frac{1}{p+1}$$

(по теореме Э. Бореля). Тогда $F(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p-2)} = \frac{1}{4(p+2)} + \frac{3}{4(p-2)}$, откуда находим

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t} + 3e^{2t}\right). ▶$$

753. $f(t) = \sin 2t - \frac{8}{3}\int\limits_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$.

◀ Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$. По таблице изображений $\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$, $\operatorname{sh} 3t \doteqdot \frac{3}{p^2-9}$, а по теореме умножения Э. Бореля

$$\int\limits_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \doteqdot F(p)\,\frac{3}{p^2-9}.$$

Интегральному уравнению соответствует операторное уравнение

$$F(p) = \frac{2}{p^2+4} - \frac{8}{p^2-9}F(p),$$

решением которого является функция F, где

$$F(p) = \frac{2(p^2-9)}{(p^2-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Из тождества

$$A(p+1)(p^2+4) + B(p-1)(p^2+4) + (Cp+D)(p^2-1) \equiv 2(p^2-9)$$

находим $A = -\frac{8}{5}$, $B = \frac{8}{5}$, $C = 0$, $D = \frac{26}{5}$. Таким образом,

$$F(p) = -\frac{8}{5(p-1)} + \frac{8}{5(p+1)} + \frac{13}{5}\,\frac{2}{p^2+4}.$$

По таблице находим

$$f(t) = -\frac{8}{5}e^t + \frac{8}{5}e^{-t} + \frac{13}{5}\sin 2t = \frac{1}{5}(13\sin 2t - 16\operatorname{sh} t). \blacktriangleright$$

754. $f(t) = t^3 + \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$.

◀ Для получения операторного уравнения перейдем к изображениям:

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad t^3 \doteqdot \frac{6}{p^4}, \quad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}, \quad \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p^2+1},$$

$$F(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{F(p)}{p^2+1}, \quad F(p) = \frac{6(p^2+1)}{p^6} = \frac{6}{p^6} + \frac{6}{p^4}.$$

По таблице изображений находим:

$$f(t) = \frac{t^5}{20} + t^3. \blacktriangleright$$

Проинтегрировать уравнения Вольтерра первого рода.

755. $1 - \cos t = \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$.

◀ Здесь ядро $K(t) = \operatorname{sh} t$ является дифференцируемой функцией и $K'(0) \neq 0$, поэтому уравнение имеет решение. Перейдем к изображениям:

$$1 - \cos t \doteqdot \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \operatorname{sh} t * f(t) \doteqdot \frac{F(p)}{p^2-1}.$$

Операторное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{F(p)}{p^2-1},$$

откуда

$$F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = 2\,\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

Из таблицы изображений находим:

$$f(t) = 2\cos t - 1. \blacktriangleright$$

756. $\sin t = \int\limits_0^t \cos(t-\tau) f(\tau) d\tau.$

◄ Здесь $K(0) \neq 0$, где $K(t) = \cos t$. Посредством формулы (3), п. 5.3, получаем интегральное уравнение второго рода

$$\cos t = -\int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + f(t).$$

Перейдем к изображениям:

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad \cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}, \quad \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p^2+1}.$$

Операторное уравнение принимает вид

$$\frac{p}{p^2+1} = -\frac{F(p)}{p^2+1} + F(p).$$

Отсюда $F(p) = \frac{1}{p}$. Следовательно,

$$f(t) = 1. \blacktriangleright$$

757. $1 - \cos t = \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$

◄ Поскольку $\operatorname{ch} 0 = 1$, то, аналогично проделанному в предыдущем примере, сводим данное интегральное уравнение первого рода к уравнению второго рода

$$\sin t = \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + f(t).$$

Решение соответствующего операторного уравнения имеет вид

$$F(p) = \frac{p^2-1}{p^2(p^2+1)} = \frac{2}{p^2+1} - \frac{1}{p^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) = 2\sin t - t. \blacktriangleright$$

758. $t^3 = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\, d\tau.$

◄ Здесь $K(t) = t^2$, $K(0) = K'(0) = 0$, $K''(0) = 2$. Применив формулу (4), п. 5.3, находим:

$$6 = 2f(t), \quad f(t) = 3. \blacktriangleright$$

Решить системы интегральных уравнений.

759.
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau, \\ y(t) = t + \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau, \\ z(t) = 1 + \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau. \end{cases}$$

◄ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$, $z(t) \doteqdot Z(p)$. Тогда получим:

$$\int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau = 1 * y(t) \doteqdot \frac{Y(p)}{p}, \quad \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau = 1 * z(t) \doteqdot \frac{Z(p)}{p}, \quad \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau = 1 * x(t) \doteqdot \frac{X(p)}{p}.$$

Система соответствующих операторных уравнений имеет вид

$$X(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{Y(p)}{p},\quad Y(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{Z(p)}{p},\quad Z(p)=\frac{1}{p}+\frac{X(p)}{p}.$$

Решая эту систему, находим

$$X(p)=\frac{4}{3(p-1)}-\frac{4(p+2)}{3(p^2+p+1)}=-\frac{4}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{4}{3(p-1)},$$

$$Y(p)=-\frac{2}{p^2}+\frac{4}{3(p-1)}-\frac{4}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

$$Z(p)=-\frac{3}{p}+\frac{4}{3(p-1)}+\frac{8}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Перейдем в пространство оригиналов. Получим

$$x(t)=\frac{4}{3}e^t-\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$y(t)=-2t+\frac{4}{3}e^t-\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$z(t)=-3+\frac{4}{3}e^t+\frac{8}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.\ \blacktriangleright$$

760. $\begin{cases} x(t)=t+\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t)=1+\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$

◄ Пусть $x(t)\doteqdot X(p)$, $y(t)\doteqdot Y(p)$. Тогда

$$\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau=1*y(t)\doteqdot\frac{Y(p)}{p},\quad \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau=1*x(t)\doteqdot\frac{X(p)}{p},\quad t\doteqdot\frac{1}{p^2},\quad 1\doteqdot\frac{1}{p},$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{Y(p)}{p},\quad Y(p)=\frac{1}{p}+\frac{X(p)}{p}.$$

Решая эту систему, получим:

$$X(p)=\frac{2}{p^2-1},\quad Y(p)=\frac{2p}{p^2-1}-\frac{1}{p}.$$

Из таблицы изображений находим:

$$x(t)=2\operatorname{sh}t,\quad y(t)=2\operatorname{ch}t-1.\ \blacktriangleright$$

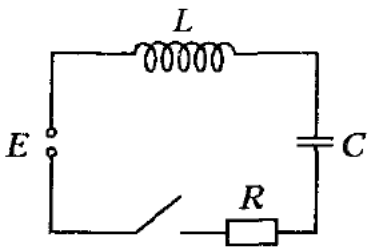


Рис. 107

761. В контур, состоящий из последовательно соединенных индуктивности L, емкости C и сопротивления R (рис. 107) включается э.д.с. E. Ток в контуре и заряд q_0 конденсатора в начальный момент времени равны нулю. Определить зависимость тока в контуре от времени.

◄ Как известно, ток $i(t)$ и напряжение $U(t)$ на концах элемента цепи, содержащего активное сопротивление R, самоиндукцию L или емкость C, связаны соответственно соотношениями

$$u(t)=Ri(t),\quad u(t)=L\frac{di(t)}{dt},\quad u(t)=\frac{1}{C}\left(\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau+q_0\right),$$

где q_0 — начальный заряд на обкладках конденсатора. На основании закона Кирхгофа имеем уравнение

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=E \tag{1}$$

(принято во внимание, что $q_0=0$).

Пусть $i(t)\doteq I(p)$. Интегро-дифференциальному уравнению (1) соответствует операторное уравнение

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I(p)=\frac{E}{p},$$

решение которого имеет вид

$$I(p)=\frac{E}{L\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}\right)}. \tag{2}$$

Уравнение

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

имеет корни $p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$. Обозначим $\frac{R}{2L}=\alpha$, $\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}}=\beta$. Тогда $p_1=-\alpha+\beta$, $p_2=-\alpha-\beta$. Тогда $I(p)$ из (2) запишем в форме

$$I(p)=\frac{E}{L}\,\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{E}{L(p_1-p_2)}\left(\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p-p_2}\right)=\frac{E}{2L\beta}\left(\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p-p_2}\right).$$

Перейдя к оригиналам, получим:

$$i(t)=\frac{E}{2\beta L}e^{-\alpha t}(e^{\beta t}-e^{-\beta t})=\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t. \tag{3}$$

Если $\alpha^2>\frac{1}{LC}$, т. е. $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то корни p_1, p_2 действительные и формула (3) пригодна для вычислений. Если $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то корни p_1 и p_2 комплексные. Обозначим $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$. Тогда $\beta=i\omega$, и принимая во внимание, что $\operatorname{sh}(i\omega t)=i\sin\omega t$, имеем

$$i(t)=\frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

В этом случае в контуре происходит затухающий колебательный процесс с частотой ω. В критическом случае, т. е. когда $\beta=0$, значение $i(t)$ можно получить из формулы (3) с помощью предельного перехода при $\beta\to 0$. Используя правила Лопиталя, находим:

$$i(t)=\lim_{\beta\to 0}\frac{Ee^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t}{\beta L}=\frac{E}{L}te^{-\alpha t}.\ \blacktriangleright$$

Решить особые интегральные уравнения.

762. $\displaystyle\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau=\varphi(t),\ 0<\alpha<1.$

◀ Поскольку $K(t)=t^{-\alpha}$, то $K(t)\doteq\frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}=\widetilde{K}(p)$ (см. пример 682). Ядро K в точке $t=0$ обращается в бесконечность, поэтому операторное уравнение, соответствующее интегральному, определяем по формуле (1), п. 5.4:

$$G(p)=\frac{1}{\lambda p\widetilde{K}(p)}\Phi(p)=\frac{1}{p^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\Phi(p).$$

Оригинал изображения $G(p)$ найдем по теореме умножения:

$$g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}t^{\alpha-1}*\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^t\tau^{\alpha-1}\varphi(t-\tau)\,d\tau$$

(воспользовались формулой дополнения $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, $0<\alpha<1$). Полагая, что функция g дифференцируемая, находим решение уравнения Абеля

$$f(t)=g'(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^t\tau^{\alpha-1}\varphi'(t-\tau)\,d\tau+\varphi(0)t^{\alpha-1}\right).\blacktriangleright$$

763. $\int\limits_0^t\frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\frac12}}=\sin t.$

◀ Полагая в предыдущем примере $\alpha=\frac12$, $\varphi(t)=\sin t$, находим:

$$f(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^t\tau^{-\frac12}\cos(t-\tau)\,d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos t\int_0^t\frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau+\sin t\int_0^t\frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(C(t)\cos t+S(t)\sin t),$$

где $C(t)$ и $S(t)$ — интегралы Френеля (см. пример 707). ▶

764. $f(t)=t^\alpha+\lambda\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}f(\tau)\,d\tau$, $|\lambda|\neq1$, $\alpha>-1$.

◀ Пусть $f\doteqdot F$. Согласно решению примера 682, $t^\alpha\doteqdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. При решении примера 727 нашли, что $\sin2\sqrt{t}\doteqdot\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\frac1p}$. По теореме подобия имеем $\frac{\sin2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\doteqdot\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{\tau}{p}}$. Изображение интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}f(\tau)\,d\tau$ найдем с помощью теоремы Эфроса (см. п. 2.3), в которой следует взять $\Phi(p)=\frac{1}{p\sqrt{p}}$, $q(p)=\frac1p$. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}f(\tau)\,d\tau\doteqdot\frac{1}{p\sqrt{p}}F\left(\frac1p\right).$$

Операторное уравнение, соответствующее данному интегральному, имеет вид

$$F(p)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}+\frac{\lambda}{p\sqrt{p}}F\left(\frac1p\right).\qquad(1)$$

Заменим в (1) p на $\frac1p$. Получим

$$F\left(\frac1p\right)=\Gamma(\alpha+1)p^{\alpha+1}+\lambda p\sqrt{p}F(p).\qquad(2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$F(p)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}+\frac{\lambda p^{\alpha+1}}{p\sqrt{p}}\Gamma(\alpha+1)+\lambda^2F(p),$$

откуда

$$F(p)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}+\frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{p^{\frac12-\alpha}}\right).$$

Перейдем от изображений к оригиналам. Получаем:

$$\frac{1}{p^{\frac12-\alpha}}\doteqdot\frac{1}{t^{\alpha+\frac12}\Gamma\left(\frac12-\alpha\right)},\quad f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left(t^\alpha+\frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac12-\alpha\right)t^{\alpha+\frac12}}\right).\blacktriangleright$$

765. $\varphi(t) = \int\limits_0^t \ln(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$.

◀ Ядро $K(t) = \ln t$ имеет особенность в точке $t = 0$, поскольку $\lim\limits_{t\to+0} K(t) = -\infty$. Следовательно, интегральное уравнение особое. Найдем изображение функции $t \mapsto \ln t$. Для этого воспользуемся решением примера 682, где показано, что $t^\alpha \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$. Дифференцируя это соотношение по параметру α, получим

$$t^\alpha \ln t \doteqdot \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Big(\Gamma'(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1)\ln p\Big).$$

Полагая здесь $\alpha = 0$ и принимая во внимание равенство $\Gamma(1) = 1$, имеем

$$\ln t \doteqdot \frac{\Gamma'(1) - \ln p}{p}. \tag{1}$$

Из курса математического анализа известно, что $\Gamma'(1) = -C$, где $C = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\Big) = 0{,}577216\ldots$ — постоянная Эйлера. Обозначим $\gamma = e^C = 1{,}781072\ldots$. Тогда $\ln t \doteqdot -\frac{\ln(\gamma p)}{p} = \widetilde{K}(p)$. Воспользуемся полученным ранее равенством $G(p) = \frac{1}{\lambda p \widetilde{K}(p)}\Phi(p)$, являющимся следствием из формулы (2), п. 5.3. В рассматриваемом случае

$$G(p) = -\frac{1}{\ln(\gamma p)}\Phi(p), \quad \lambda = 1.$$

Найдем оригинал функции $p \mapsto \frac{1}{\ln(\gamma p)}$. Интегрируя по параметру α функцию $\alpha \mapsto \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ в пределах от 0 до $+\infty$, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{1}{p^{\alpha+1}\ln p}\Big|_{+\infty}^{0} = \frac{1}{p\ln p}.$$

По теореме подобия находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha \doteqdot \frac{1}{p\ln(\gamma p)}.$$

Таким образом, $g(t) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha * \varphi(t)$, т. е. $g(t) = -\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha\Big)\varphi(t-\tau)\, d\tau$. Решение уравнения имеет вид

$$f(t) = g'(t) = -\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha\Big)\varphi'(t-\tau)\, d\tau - \varphi(0)\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, d\alpha$$

(см. формулу (2), п. 2.4). ▶

§ 6. Применение операционного исчисления к решению уравнений с частными производными

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

где a, b, c, a_1, b_1 — непрерывные функции, зависящие только от x, заданные на сегменте $[0, l]$. Считаем, что $a > 0$ и будем рассматривать два случая: 1) $a_1 < 0$ (*гиперболический случай*); 2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$ (*параболический случай*).

Требуется найти решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (1) для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{(для параболического случая)},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad \text{(для гиперболического случая)},$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t),$$

где α, β, γ — постоянные.

Такие задачи называются *нестационарными.*

Предполагая, что u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, рассматриваемые как функции переменной t, являются оригиналами, обозначим через

$$U(p, x) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt}\, dt$$

изображение функции u. Тогда, вследствие сделанных предположений, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt}\, dt = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt}\, dt = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2 U - u(x, 0)p - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

или, принимая во внимание начальные условия,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Предполагаем также, что $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \doteqdot f(t)$. Тогда из граничных условий имеем

$$U\Big|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi)\right)\Big|_{x=l} = \gamma U\Big|_{x=l}.$$

Операционный метод приводит решение нестационарной задачи для уравнения (1) с частными производными к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \tag{2}$$

где

$$A = c + a_1 p^2 + b_1 p, \quad B = -a_1 p\varphi - a_1 \psi - b_1 \varphi,$$

p — комплексный параметр, при следующих граничных условиях:

$$U\Big|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + (\beta p - \gamma)U - \beta\varphi\right)\Big|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Решить следующие задачи.

766. Температура $u(x, t)$ в тонком стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \text{const}. \tag{1}$$

Найти распределение температур в полупространстве $x > 0$, если известен закон изменения температуры его левого конца, а начальная температура стержня равна нулю:

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{x=0} = f(t). \tag{2}$$

◀ Перейдем к изображениям. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}, \tag{3}$$

которое решаем при выполнении условия

$$U\Big|_{x=0} = F(p). \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) находим без труда:

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Согласно условию задачи функции u и U должны быть ограниченными при $x \to +\infty$, поэтому $C_2 = 0$ и общее решение уравнения (3) записывается в виде

$$U(x, p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из условия (4) следует, что $C_1 = U(0, p) = F(p)$. Следовательно,

$$U(x, p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Для нахождения оригинала рассмотрим сначала частный случай $f(t) = 1$. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$, $U_1(x, p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. Воспользуемся решением примера 724. Получим:

$$u_1(x, t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2}\, d\tau. \tag{5}$$

В случае произвольных граничных данных (2) воспользуемся интегралом Дюамеля (см. формулу (2), п. 2.4), полагая там $\varphi(t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$. Поскольку $U(p) = pF(p)U_1(p)$ (см. п. 3.3), то

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2}\, d\xi$$

(после замены переменной $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$). ▶

767. Стержень длины l находится в состоянии покоя и его конец $x = 0$ закреплен, а к свободному концу $x = l$ приложена сила $A \sin \omega t$, направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня.

◀ Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ — продольное смещение, a^2 — постоянный коэффициент, зависящий от материала стержня. Начальные и граничные условия следующие:

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \tag{2}$$

где E — модуль упругости. Дифференциальной задаче соответствует операторная задача

$$p^2 U = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}, \tag{3}$$

$$U\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) записывается в виде

$$U(x, p) = C_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x.$$

Из условий (4) находим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{b}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l},$$

где $b = \frac{Aa\omega}{E}$. Получаем решение операторного уравнения в виде

$$U(x, p) = \frac{b}{p(p^2+\omega^2)} \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}p}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}p} = \frac{X(x, p)}{Y(x, p)}. \tag{5}$$

Для нахождения оригинала $u(x, t)$ воспользуемся второй теоремой разложения. Функция U имеет один действительный полюс $p = 0$ и бесконечное множество попарно сопряженных чисто мнимых полюсов. Полюсы, лежащие в верхней полуплоскости $p = i\omega$, $p_k = i\frac{\pi a}{l}\left(k - \frac{1}{2}\right) = i\omega_k$ ($k \in \mathbb{N}$) все первого порядка и различны, если $\omega_k \neq \omega \ \forall k \in \mathbb{N}$ (условие отсутствия резонанса). По второй теореме разложения находим:

$$u(x, t) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{X(x, i\omega)}{Y_p'(x, i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X(x, p_k)}{Y_p'(x, p_k)} e^{i\omega_k t}\right) = \frac{1}{\omega^2 \cos\frac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega}{a} x \sin\omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}. \blacktriangleright$$

768. Два одинаковых стержня длины l с одинаковой скоростью v_0 движутся навстречу друг другу вдоль своих осей. Определить смещение точек стержней после удара.

◄ Пусть удар происходит при $t = 0$ в начале координат (отсчет времени начинаем с момента удара). В силу симметрии достаточно рассмотреть смещение $u(x, t)$ точек одного стержня, например, правого. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -v_0, \quad u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Дифференциальной задаче (1), (2) соответствует операторная задача

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}U = \frac{v_0}{a^2}, \tag{3}$$

$$U\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=l} = 0, \tag{4}$$

решение которой имеет вид

$$U(x, p) = -\frac{v_0}{p^2} + \frac{v_0}{p^2} \frac{e^{-p\frac{x}{a}} + e^{-p\frac{2l-x}{a}}}{1 + e^{-\frac{2pl}{a}}}. \tag{5}$$

Поскольку $\left|e^{-\frac{2pl}{a}}\right| < 1$, то функция $p \mapsto \left(1 + e^{-\frac{2pl}{a}}\right)^{-1}$ может быть представлена сходящимся рядом

$$\left(1 + e^{-\frac{2pl}{a}}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-p\frac{2kl}{a}},$$

поэтому получаем:

$$U(x, p) = -\frac{v_0}{p^2} + \frac{v_0}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(e^{-p\frac{2kl+x}{a}} + e^{-p\frac{2(k+1)l-x}{a}}\right).$$

С помощью теоремы запаздывания находим оригинал

$$u(x, t) = v_0\left(-t + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right)\eta\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right) + \left(t - \frac{(2k+1)l-x}{a}\right)\eta\left(t - \frac{(2k+1)l-x}{a}\right)\right)\right).$$

Решение пригодно, пока стержни соприкасаются, т. е. пока $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} < 0$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Найти изображения функций:

1. $\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{ch}\beta t$. **2.** $\cos\alpha t \cos\beta t$. **3.** $\operatorname{ch}\alpha t \operatorname{ch}\beta t$. **4.** $\sin\alpha t \sin\beta t$. **5.** $\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{sh}\beta t$. **6.** $\operatorname{sh}\alpha t - \sin\alpha t$.
7. $\operatorname{ch}\alpha t - \cos\alpha t$. **8.** $\operatorname{sh}\alpha t + \sin\alpha t$. **9.** $\operatorname{ch}\alpha t + \cos\alpha t$. **10.** $\cos\alpha t \operatorname{ch}\beta t$. **11.** $\sin\alpha t \operatorname{sh}\beta t$.

12. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ e^{-b(t-a)}, & t \geqslant a. \end{cases}$ **13.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n, & na < t \leqslant (n+1)a, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_0.$

14. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n+1, & n < t \leqslant n+1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_0.$

15. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \frac{2t}{a} - (4n+1), & 2na < t \leqslant (2n+1)a, \\ -\frac{2t}{a} + 4n + 3, & (2n+1)a < t \leqslant (2n+2)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_0.$

16. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \frac{2t}{a} - (2n+1), & na < t \leqslant (n+1)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_0.$

17. $f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{2n\pi}{a} < t \leqslant \frac{(2n+1)\pi}{a},\ t < 0, \\ -\sin at, & \frac{(2n+1)\pi}{a} < t \leqslant \frac{(2n+2)\pi}{a}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_0.$

18. $e^{-4t}\sin 3t \cos 2t$. **19.** $e^{3t}\cos 3t \cos 4t$. **20.** $\operatorname{sh} t \cos 2t \sin 3t$.
21. $\operatorname{ch} t \sin 2t \sin 3t$. **22.** $\operatorname{ch} 3t \sin^2 t$. **23.** $\operatorname{sh} 4t \cos^2 3t$.

Найти изображения следующих дифференциальных выражений:

24. $Ly = y^{IV}(t) + 4y'''(t) + 4y''(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 3$.
25. $Ly = 3y'''(t) - 2y''(t) + 5$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -3$.
26. $Ly = 4y^{IV}(t) + 3y''(t) + y(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -1$.
27. $Ly = y^{V}(t) + 2y^{IV}(t) + 4y(t)$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = y^{IV}(0) = -1$.

Применяя теорему дифференцирования изображения, найти изображения функций:

28. $t^2 \cos\alpha t$. **29.** $t^2 \sin\alpha t$. **30.** $t \sin\alpha t \operatorname{sh}\alpha t$. **31.** $t \cos\alpha t \operatorname{ch}\alpha t$.

Применяя теорему об интегрировании изображения, найти изображения функций:

32. $\frac{e^{-at}\sin t}{t}$. **33.** $\frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}$. **34.** $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$. **35.** $\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{t}$. **36.** $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$.
37. $\frac{\cos bt - \cos at}{t}$. **38.** $\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$. **39.** $\frac{1-e^{at}}{te^t}$. **40.** $\frac{e^{at}\sin^2 bt}{t}$.

Пользуясь теоремой умножения Э. Бореля найти оригиналы функций $F(p)$:

41. $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$. **42.** $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$. **43.** $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$.
44. $F(p) = \frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$. **45.** $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.
46. $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$. **47.** $F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$.

Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы функций F.

48. $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$. **49.** $F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$. **50.** $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.
51. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3(p+3)}$. **52.** $F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)^4}$. **53.** $F(p) = \frac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$.
54. $F(p) = \frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$.

Решить дифференциальные задачи:

55. $4y'' + 12y' + 9y = 144e^{-\frac{3}{2}t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$. **56.** $y'' - 2y' = e^t(t^2+t-3)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
57. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{sh} t \sin t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **58.** $y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
59. $y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
60. $y^{IV} - y = 2\cos^3 t(\sec^2 t - 1)$; $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
61. $y^{V} - 6y''' + 9y'' = 54t + 18$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 1$.

62. $y'' + 6y' + 8y = \sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos t;\ y(0) = y'(0) = 1.$

63. $y'' + 4y' + 20y = \eta\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\cos\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right);\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Решить системы дифференциальных уравнений:

64. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0; \\ x(0) = x'(0) = 1,\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$ **65.** $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, \\ x + y + z'' - z = 0; \\ x(0) = 1,\ x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t; \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{cases}$

Решить интегральные уравнения:

67. $f(t) = \sin t + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. **68.** $f(t) = t + \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$. **69.** $f(t) = t + 2 - 2\cos t - \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$.

70. $f(t) = t^2 + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. **71.** $f(t) = \cos t + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. **72.** $f(t) = 1 + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau)\,d\tau$.

73. $f(t) = e^{3t} + \frac{9}{4}\int_0^t \operatorname{sh} 4(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$. **74.** $f(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$.

75. $\sin^2 t = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$. **76.** $t^4 = \int_0^t (2t^3 - 3t^2\tau + \tau^3) f(\tau)\,d\tau$.

Решить системы интегральных уравнений:

77. $\begin{cases} x(t) = 2t - \int_0^t (t-\tau) x(\tau)\,d\tau + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = -2 - 4\int_0^t x(\tau)\,d\tau + 3\int_0^t (t-\tau) y(\tau)\,d\tau. \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} x(t) = 2 + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 9t - t^2 - t^4 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = 15 + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x(t) = 1 - \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = \cos t - 1 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 1 - t^3 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = 2t^2 + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$

Найти решение особых интегральных уравнений.

81. $\int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = t^n$. **82.** $\int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \cos t$. **83.** $f(t) = t - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\,d\tau,\ |\lambda| \neq 1.$

84. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\,d\tau - \ln t = 0$. **85.** $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\,d\tau = \sin^2\frac{t}{2}$.

Решить следующие задачи.

86. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2};\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = B\sin\frac{n\pi x}{l},\ 0 \leqslant x \leqslant l,$ $a^2 > 0$.

87. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t};\ u(0,t) = A,\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ x \geqslant 0.$

Ответы

Введение

1. $y - \operatorname{tg}\left(\frac{xy'}{1+y^2}\right) = 0$. **2.** $y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$. **3.** $\left(yy'' + y'^2\right)x - yy' = 0$. **4.** $y'' + yf - f'y' = 0$. **5.** $y' = \frac{x - y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}{y - x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **6.** $y' = \frac{y\operatorname{arctg} z - x(x^2+y^2)}{x\operatorname{arctg} z + y(x^2+y^2)}$, $z = \frac{y}{x}$. **7.** $\frac{\cos y}{z'} - \frac{\sin y}{y'} - e^{-z}z\cos y - \frac{y}{z} = 0$. **8.** $y''z'(z-1)(2x - x^2) + (2z - z^2)y''(y-x) + z'z''(y^2 - 2y)(y-x) = 0$, $\left(z'^2 + zz''\right)\frac{y-x}{z'(z-1)} - \frac{z''(y-x)}{y''z'(z-1)}\left(y'^2 + yy''\right) + 1 = 0$.

Глава 1

1. $2y + x^2 - 2x = C$. **2.** $y = x\,\mathrm{si}(x) + \cos x$. **3.** $2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) - \ln y = 4$. **4.** $y = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. **5.** $y = 0$. **6.** $y = x^{\frac{1-k}{k}}$. **7.** $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y^2}{2x^2} - 2\int \frac{e^x}{x}\,dx = C$. **8.** $\sin\frac{y}{x} = Ce^{\mathrm{si}(x)}$. **9.** $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$. **10.** $\left|y - x - 30 + \sqrt{3}(x+17)\right|^{1-\sqrt{3}} = C\left|x - y + 308 + \sqrt{3}(x+17)\right|^{1+\sqrt{3}}$. **11.** $\arcsin\frac{y^2}{|x|^3} = \ln(Cx^3)$, $|x|^3 = y^3$. **12.** $x = \int_4^{x+4y} \frac{\sin\left(2 - \frac{3}{u}\right)du}{\sin\left(2-\frac{3}{u}\right) - 4e^{5+u}}$. **13.** $\ln x = \int_1^{\frac{1}{xy}} \frac{2t - 1 - 6t^3}{t(5t^3 - t + 1)}\,dt$. **14.** $\ln x = \int_1^{\frac{y}{x}} \frac{\left(u^{\frac{\pi}{2}} - u^x\right)}{u^{x+1} - u^{\frac{\pi}{2}+1} + u^x - 1}\,du$. **15.** $\ln x = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) - 1$. **16.** $y = x(c + \sin x)$. **17.** $y = 1 + Ce^{\cos x}$. **18.** $y = e^x(C + \ln x)$, $x = 0$. **19.** $x = Cy^3 + y^2$, $y = 0$. **20.** $y\left(e^x + Ce^{2x}\right) = 1$, $y = 0$. **21.** $y = x^4\ln^2 Cx$, $y = 0$. **22.** $y = y_0e^{u(x_0)-u(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{u(t)-u(x)+t}\,dt$, $u(x) = \frac{2}{3}\ln|1+x| + \frac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **23.** $y = y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt\right) + \int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{\tau}^{t} u(\xi)\,d\xi\right)\cos t\,dt$, $u(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$. **24.** $y = \left(\frac{y_0}{\cos x_0} + x - x_0\right)\cos x$. **25.** $y = \frac{x_0}{x}\left(y_0 - \frac{x_0^2}{3}\right) + \frac{x^2}{3}$. **26.** $y = \exp(i\ln\ln x)\left(2 - 5i + \int_e^x \exp(i\ln\ln t)\left(1 - \frac{1}{\ln t}\right)dt\right)$. **27.** $y = e^{x^{-1}}\int_x^{+\infty} \frac{\left(t^3-1\right)dt}{t^2\left(t^3+1\right)^2}$. **28.** $y = x^{\frac{4}{3}}$. **29.** $y = -x - x^{-1} + e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{x}\,dx\right)x^{-1}$. **30.** $y = x\left(1 + \left(Ce^{2x} - \frac{1}{2}\right)^{-1}\right)$. **31.** $y = x + 2 + 4\left(ce^{4x} - 1\right)^{-1}$, $c = \frac{e \pm 1}{e^{-\frac{1}{8}} \pm 1}$. **32.** $y_1 = x + 1$, $y_2 = x + 2(2-3x)^{-1}$. **33.** $x - y^2\cos^2 x = C$. **34.** $x^3 - y^2 + x^3\ln|y| = C$. **35.** $4x + \frac{x^2+1}{\sin y} = C$. **36.** $2x^3y^3 - 3x^2 = C$. **37.** $\left(x^2 + \ln y\right)x^{-3} = C$, $x = 0$. **38.** $x + 2\ln|x| + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} = C$, $x = 0$. **39.** $x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = C$, $x = 0$. **40.** $y = 0$ — особое решение. **41.** $y = 0$ — особое решение. **42.** $y = 0$ — особая кривая. **43.** $(0, 0)$ — особая точка. **44.** $(0, 0)$ — особая точка. **45.** $y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 1\right) + \frac{x}{2}$. **46.** $y = \left(cx^{\frac{8}{3}} - 2x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

Глава 2

1. $x = \int_1^y \left(\frac{3}{2}e^{2(t-1)} - t - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dt$. **2.** $y = 1 - \cos x$. **3.** $x = \exp\left(\int_{0,5}^{u} \left(t - t^2 + \sin t\right)^{-1} dt\right)$, $y = 1 + \int_{0,5}^{u} \varphi(u_4)\psi(u_4)\,du_4$, $\varphi(u_4) = 2\int_{0,5}^{u_4} \exp\left(\int_{0,5}^{u_3} u_2 \exp\left(-\int_{0,5}^{u_2} \left(t - t^2 + \sin t\right)^{-1} dt\right) du_2\right) g(u_3)\,du_3$, $\psi(u_4) = \exp\left(\int_{0,5}^{u_4} \left(t - t^2 + \sin t\right)^{-1} dt\right) \frac{du_4}{u_4 - u_4^2 + \sin u_4}$, $g(u_3) = \exp\left(\int_{0,5}^{u_3} \left(t - t^2 + \sin t\right)^{-1} dt\right)$. **4.** $y = \frac{x}{2}\left(1 + x^2\right)$. **9.** $y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(1 + e^x\right) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$. **10.** $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c_1 + c_2 x\right)$. **11.** $y = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)x} + c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)x} + c_3 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)x} + c_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)x} + \frac{1}{2}\sin x$. **12.** $y = c_1 e^{(\sqrt{3}+i)x} + c_2 e^{(i-\sqrt{3})x} + \left(c_3 - \frac{x}{24}\right)e^{-2ix} + \frac{i}{32}e^{2ix}$. **13.** $y = c_2 x + c_1 x^2 \int e^{-\frac{x^3}{3}} x^{-2} dx + c_3 x^2$. **14.** $y = c_1 x^2 + c_2\left(x^3 - 1\right) + c_3\varphi(x)$, $\varphi(x) = x^2 \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) e^{-\frac{x^3}{3}} \left(x^3 + 2\right)^{-2} dx + \left(x^3 - 1\right) \int e^{-\frac{x^3}{3}} \left(x^3 + 2\right)^{-2} dx$, $c_1 = \int \frac{x^3+2}{x^2}\alpha(x)dx + c_{10}$, $\alpha(x) = \frac{(2x^3 - 2x^2 - x)\varphi + x(1-x^3)\varphi'}{(4x^3+2)\varphi' - \varphi''\left(x^4+2x\right) - 6x^2\varphi}$, $c_2 = \int \frac{(x^3+2)\left(x\varphi' - 2\varphi\right)dx}{\left(x^3+2\right)\left(\varphi' - x\varphi''\right) + 3x^2\left(x\varphi' - 2\varphi\right)} + c_{20}$, $c_3 = \int \frac{x(x+1)(x^3+2)dx}{(4x^3-2)\varphi' - 6x^2\varphi - \left(x^4+2x\right)\varphi''} + c_{30}$. **17.** $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x} + c_4 e^x + c_5 e^{-x}$. **18.** $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + c_4 x\sin 2x + c_5 x\cos 2x$. **19.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$. **20.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^{3x}(c_4 + c_5 x)$. **21.** $xe^x + x^2 + 2$. **22.** $(0{,}1x - 0{,}12)\cdot\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$. **23.** $2(x-1)e^x$. **24.** $\frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x$. **25.** $c_1\sin(2\ln x) + c_2\cos(2\ln x) + 2x$. **28.** $c_1 + c_2\cos\left(\sqrt{2}\ln(2x+3)\right) + c_3\sin\left(\sqrt{2}\ln(2x+3)\right) + \frac{1}{2} + e^{2x+3}\ln(2x+3)$. **29.** $y = e^x - 2$. **31.** $y = (c_1 x + c_2)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$, $c_1 = \frac{1}{24e^2}\left(5 - e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{6e^2} + \frac{1}{2}\right)\frac{5e^{-2}-13}{4-12e^2}$, $c_2 = \frac{5e^{-2}-13}{4-12e^2}$. **32.** $y = x^2 + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}(c_3\cos x + c_4\sin x)$, $c_1 = \frac{bm_2 - am_4}{\Delta}$, $c_2 = \frac{am_3 - bm_1}{\Delta}$, $\Delta = m_2 m_3 - m_1 m_4$, $m_1 = 10 - 5e^{-\sqrt{2}\pi} + e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + 5e^{-\frac{\pi}{12}}$, $m_2 = 10\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $m_3 = e^{-\pi\sqrt{2}} + 4\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 1$, $m_4 = 2\left(1 - \operatorname{ch}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$, $c_3 = -c_1$, $c_4 = \frac{3e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\Delta}(bm_2 - am_4) - \frac{m_1 b - am_3}{\Delta} - \frac{1+3\pi^2}{\sqrt{2}}$. **33.** $y = e^{-x} - 1$. **34.** $y = -e^{-x}(\cos x - i\sin x)$. **35.** $y = 2x^3$. **36.** $y = \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^2 - 2e}$. **37.** $y = \cos x + P_1(x)$. **38.** $y_k = c_k e^{-2k\pi i x^2}$. **39.** $y_k = c_k e^{-\lambda_k x^3}$, $\lambda_k = \frac{1}{8}\left(\ln\frac{3}{2} + (2k+1)\pi\right)$ **41.** $y_k = c_k\left(e^{-\lambda_k x} - e^{-2\lambda_k x}\right)$, $\lambda_k = 2k\pi i$. **42.** $y_k = c_k\left(e^{-\omega_k x} + \frac{e^{-\omega_k} - 2 + \omega_k}{2 + \omega_k - e^{\omega_k}}e^{\omega_k x}\right)$, $11\operatorname{sh}\omega_k - 2\omega_k\operatorname{ch}\omega_k - 4\omega_k = 0$. **43.** $y = \sum_{i=1}^{3} c_i e^{z_i x}$, $c_2 = c_3\frac{z_1 e^{z_1} - z_3 e^{z_3}}{\Delta}$, $c_1 = c_3\frac{z_3 e^{z_3} - z_2 e^{z_2}}{\Delta}$, $\Delta = z_2 e^{z_2} - z_1 e^{z_1}$, $z_1 = \mu + i\omega$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mu + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\omega}{2}\right)$, $z_3 = -\frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega + i\left(-\frac{\omega}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)$, $z_2 e^{z_2}\left(z_1 + 3e^{z_3}\right) - z_3 e^{z_3}\left(z_2 + 3e^{z_2}\right) - z_1 e^{z_1}\left(z_3 + 3e^{z_3}\right) + z_3 e^{z_3}\left(z_1 + 3e^{z_1}\right) + z_1 e^{z_1}\left(z_2 + 3e^{z_2}\right) - z_2 e^{z_2}\left(z_1 + 3e^{z_1}\right) = 0$. **44.** $y_k = c_k J_0\left(x\sqrt{\lambda_k}\right)$, $J_0\left(\sqrt{\lambda_k}\right) = 0$, $c_k \neq 0$. **45.** $y_k = P_k(x)$, $\lambda_k = k(k+1)$. **46.** $y = C\left(x^7 - x^{-7}\right)\sqrt{x}$, $z = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$, $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}$. **47.** $(xy')' - x^2 y + \lambda y = 0$. **48.** $\left(e^{\frac{x^2}{2}+x}y'\right)' + e^{\frac{x^2}{2}+x}\left(\lambda x^3 - x^2\right)y = 0$. **50.** $y = 0$. **51.** $y = 0$. **52.** $y = c_1 x + c_2$. **53.** $y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. **54.** $y = (\pi x + 1)x$. **55.** $y = x$. **56.** $y = x\left(\frac{3}{2}x + 5\right)$. **57.** $y'' = z$, $6z'^2 - 5zz'' = 0$. **58.** $y''' = z$, $xz' + z = e^x$. **59.** $y' = z$, $z''z^2 - z^3 = 0$. **60.** $y'' = z$, $xz' - z(1-x) = 0$. **61.** $y^{-1} + \frac{y'}{y} = z$, $z' = 0$. **62.** $yy' = z$, $z' = 1$. **63.** $y' = p$, $p = 0$, $p'' - p'p = 0$. **64.** $y' = p$, $p = 0$, $\left(p''p + p'^2\right)y^2 - p^2 = 0$. **65.** $\left(6\frac{y - c_1 x^2 - c_2 x - c_3}{x^3}\right)^4 + 48\frac{y - c_1 x^2 - c_2 x - c_3}{x^3} + 2 = 0$. **66.** $3z^2 + z - 4 = 0$, $z = \left(c_1 x^2 + c_2 x + c_3 - y\right)\left(\int \ln|x|\,dx\right)^{-1}$. **67.** $z\sin z + z^2 - 2 = 0$, $z = (y - c_1 x - c_2)\left(\int\int \frac{(dx)^2}{\ln x}\right)^{-1}$. **68.** $(z-1)(z-5) = 0$, $z = \left(y - c_1 x^2 - c_2 x - c_3\right)\left(\int\int \ln|x|(dx)^2\right)^{-1}$. **69.** $x = \pm\sqrt{\cos t}$, $y =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{3}{2}t\,dt}{\sqrt{\cos t}} + c_2$. **70.** $x = \operatorname{ch}^4 t$, $y = c_1 \operatorname{ch}^8 t + c_2 \operatorname{ch}^4 t + c_3 + \int\left(\int\left(\frac{\operatorname{ch} 8t}{4} - 3\operatorname{ch} 2t\right)\operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t\,dt\right) \times$ $\times \operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t\,dt$. **71.** $x = t + C_1$, $y = \operatorname{sh} t + C_2 t + C_3$. **72.** $x = C_1 - e^{-t}$, $y = e^{-t}(1-t) + c_2$. **73.** $x = C_1 - \ln|1-t^2|$, $y = -2t + \ln\frac{1+t}{1-t} + C_2$. **74.** $y = t$, $x = \pm\int\left(2e^t + C_1\right)^{-\frac{1}{2}} dt + C_2$. **75.** $y = t$, $x = \pm\int\left(2\int\left(1+t^4\right)^{\frac{1}{4}} dt + C_1\right)^{-\frac{1}{2}} dt + C_2$. **76.** $y = Cx - C^2$, $y = \frac{x^2}{4}$. **77.** $xp^2 = p + C$, $y = 2 + Cp^{-1} - \ln p$. **78.** $x = \ln p + p^{-1}$, $y = p - \ln p + C$. **79.** $x = p\sqrt{p^2+1}$, $y = \frac{1}{3}\left(2p^2 - 1\right)\sqrt{p^2+1} + C$.

Глава 3

1. $x = A_1 e^{\sqrt{5}t} + A_2 e^{-\sqrt{5}t}$, $y = A_1\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\sqrt{5}t} - A_2\frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{-\sqrt{5}t}$. **2.** $x = \frac{5}{2}c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t}$, $y = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-t} -$ $- c_3 e^{-3t}$, $z = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}$. **3.** $x = \sum\limits_{k=1}^{4} A_k e^{\lambda_k t}$, $y = \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{4} A_k\left(1 - \lambda_k^2\right)e^{\lambda_k t}$, $\lambda_k = \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}i}$. **4.** $x = \sum\limits_{k=1}^{4} A_k e^{\lambda_k t}$, $y = -\sum\limits_{k=1}^{4} A_k \frac{\lambda_k^2+3\lambda_k-2}{\lambda_k^2+3\lambda_k+1}e^{\lambda_k t}$, λ_k — корни уравнения $4\lambda^4 + 14\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda -$ $- 8 = 0$. **5.** $y = \begin{pmatrix} -c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$. **6.** $y = \begin{pmatrix} c_1\gamma_1 & c_2\gamma_2 & c_3\gamma_3 & c_4\gamma_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}\left(e^{\lambda_1 x}\ e^{\lambda_2 x}\ e^{\lambda_3 x}\ e^{\lambda_4 x}\right)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_k = \frac{\lambda_k^2+6}{\lambda_k^2+5}$, $\lambda_k = \sqrt{\frac{-2\pm\sqrt{114}}{10}}$. **7.** $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{pmatrix}\left(1\ x\ e^{ix}\ e^{-ix}\ e^{i\sqrt{2}x}\ e^{-i\sqrt{2}x}\right)^{\mathrm{T}}$, $A_k = -\frac{\lambda_k^2+1}{\lambda_k^2+3}C_k$, $B_k = -\lambda_k^{-2}\frac{\lambda_k^4+4\lambda_k^2+7}{\lambda_k^2+3}C_k$, $k = \overline{1,6}$. **9.** $\bar{y} = \frac{46}{35}\sin x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{5}{4}x - \frac{39}{16} - \frac{3}{4}e^x -$ $- 2e^{2x}$, $\bar{z} = \frac{9}{7}\sin x + \frac{10}{7}\cos x + \frac{3}{2}x - \frac{99}{40} - \frac{11}{8}e^x - \frac{14}{3}e^{2x}$. **10.** $\bar{y} = x(a\sin x + b\cos x) + \alpha\cos x +$ $+ \beta\sin x + mx + nx^2 + k$, $\bar{z} = x(a_1\sin x + b_1\cos x) + \alpha_1\cos x + \beta_1\sin x + m_1 x + n_1 x^2 + k_1$. **14.** $y =$ $= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}\left(x^{\lambda_1}\ x^{\lambda_2}\ x^{\lambda_3}\ x^{\lambda_4}\right)^{\mathrm{T}} + \bar{y}$, $A_k = -B_k\frac{-\lambda_k^2+4\lambda_k+3}{2\lambda_k^2-\lambda_k+2}$, $\begin{vmatrix} 2\lambda_k^2 - \lambda_k + 2 & -\lambda_k^2 + 4\lambda_k + 3 \\ -3\lambda_k - 4 & -5\lambda_k^2 + 4\lambda_k + 5 \end{vmatrix} =$ $= 0$, $x = e^t$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27}e^t + \frac{311197}{107\cdot 27\cdot 540}e^{2t} \\ \frac{7}{54}e^t + \frac{916}{214\cdot 27}e^{2t} \end{pmatrix}$. **15.** $y = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_9 \\ B_1 & \dots & B_9 \\ C_1 & \dots & C_9 \end{pmatrix}\left(x^{\lambda_1}\dots x^{\lambda_9}\right)^{\mathrm{T}}$, $A_k = C_k\frac{\Delta_1}{\Delta_k}$, $B_k = C_k\frac{\Delta_2}{\Delta_k}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_k^2 + \lambda_k - 4 & -\lambda_k^3 + 3\lambda_k^2 - 2\lambda_k + 3 \\ \lambda_k^2 + \lambda_k & \lambda_k^3 - \lambda_k^2 + 2\lambda_k + 3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_k^3 - 5\lambda_k^2 + 1 & \lambda_k^2 + \lambda_k - 4 \\ -\lambda_k^3 + 5\lambda_k^2 - 2 & \lambda_k^2 + \lambda_k \end{vmatrix}$, $\Delta_k = \begin{vmatrix} \lambda_k^3 - 5\lambda_k^2 + 1 & -\lambda_k^3 + 3\lambda_k^2 - 2\lambda_k + 3 \\ -\lambda_k^3 + 5\lambda_k^2 - 2 & \lambda_k^3 - \lambda_k^2 + 2\lambda_k + 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \lambda_k^3 - 5\lambda_k^2 + 1 & -\lambda_k^3 + 3\lambda_k^2 - 2\lambda_k + 3 & -\lambda_k^2 - \lambda_k + 4 \\ -\lambda_k^3 + 5\lambda_k^2 - 2 & \lambda_k^3 - \lambda_k^2 + 2\lambda_k + 3 & -\lambda_k^2 - \lambda_k \\ -3\lambda_k^2 - 3\lambda_k + 1 & -\lambda_k^3 + 3\lambda_k^2 - 2\lambda_k - 1 & \lambda_k^3 - 2\lambda_k^2 + 3\lambda_k + 1 \end{vmatrix} = 0$. **18.** $y_1 = \frac{x^2}{16} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x}$, $y_2 = 4i\left(A_3 e^{\lambda_3 x} - A_4 e^{\lambda_4 x}\right) - x + \frac{1}{8}$, $\lambda_{3,4} = \sqrt{2}(-1 \pm i)$, $A_3 = \frac{i}{64} + \frac{1}{2}$, $A_4 = \frac{1}{2} - \frac{i}{64}$. **19.** $y_1 =$ $= x^{\frac{1}{6}}\left(x^{i\frac{\sqrt{35}}{6}} - x^{-i\frac{\sqrt{35}}{6}}\right)\frac{1}{\gamma_3 - \gamma_4}$, $y_2 = x^{\frac{1}{6}}\left(\gamma_3 x^{i\frac{\sqrt{35}}{6}} - \gamma_4 x^{-i\frac{\sqrt{35}}{6}}\right)\frac{1}{\gamma_3 - \gamma_4}$, $\gamma_k = \frac{-3+\mu_k-\mu_k^2}{\mu_k}$, $k = 3, 4$; $\mu_{3,4} =$ $= \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{35}}{6}$, $A_3 = \frac{m_{11}+m_{31}}{\Delta}$, $B_1 = \frac{m_{12}m_{31} - m_{11}m_{32}}{\Delta}$, $\Delta = m_{11}(m_{22}+m_{32}) + m_{31}m_{22} - m_{12}(m_{21}+m_{31}) - m_{32}m_{21}$, $m_{11} = 1 + \frac{4\lambda_2 - 5}{\lambda_2}\left(1 - e^{\lambda_2}\right)$, $m_{12} = 1 + \frac{4\lambda_3 - 5}{\lambda_3}\left(1 - e^{\lambda_3}\right)$, $m_{21} = 1 - 2e^{\lambda_2}\frac{4\lambda_2 - 5}{\lambda_2}$, $m_{22} = 1 - 2e^{\lambda_3}\frac{4\lambda_3 - 5}{\lambda_3}$, $m_{31} = \frac{e^{\lambda_2} - 1}{\lambda_2}$, $m_{32} = \frac{e^{\lambda_3} - 1}{\lambda_3}$. **20.** $y = c_2 e^{c_1 x^2}$, $z = (c_1 c_2)^{-1} e^{-c_1 x^2}$. **21.** $y = c_2 e^{c_1 x^2}$, $z = 2c_1 c_2^{-1} x e^{-c_1 x^2}$. **22.** $y = c_1\exp\left(c_1 e^x\right)$, $z = y'$. **23.** $y^3 - z^3 = C_1$, $\int\left(C_1 + z^3\right)^{-\frac{2}{3}} dz - \ln|x| = C_2$. **24.** $y^2 + z^2 = C_1$, $x - zy = C_2$. **25.** $xz = C_1$, $xy + z^2 = C_2$. **26.** $\frac{y}{z} = C_1$, $x - 2y + z = C_2$. **27.** $x^2 - z^2 = C_1$, $y^2 - u^2 = C_2$. **28.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{2y^2} = C_1$, $\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3z^3} = C_2$, $\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4u^4} = C_3$. **29.** $xz = C_1$, $xy + z^2 = C_2$.

Глава 4

1. $u = f\left(ye^x - e^{2x}\right)$. **2.** $u = f\left(ye^{\sqrt{x}}\right)$. **3.** $u = f\left(\frac{x}{y},\, xy - 2z\right)$. **4.** $F\left(xe^{-u},\, y^2 - 2x(u-1)\right) = 0$. **5.** $F\left(\frac{x-y}{xy},\, \ln|x-y| - \frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \pm\left(2\left(\ln|x-y| + f\left(\frac{x-y}{xy}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. **6.** $F\left(x^2+y^2,\, \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-u}\right) = 0$. **7.** $u = f(xy)$, $u = 2xy$. **8.** $F\left(x^2-y^2,\, u - \ln|y|\right) = 0 \Rightarrow u = \ln|y| + f(x^2-y^2)$, $u = y^2 - x^2 + \ln\frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}}$. **9.** $F\left(\frac{y}{x},\, \frac{u+xy}{\sqrt{xy}}\right) = 0 \Rightarrow u = \sqrt{xy}\,f\left(\frac{y}{x}\right) - xy$, $u = \left(2xy(2-x) + x^2 + 4y^2\right)(2x)^{-1}$. **10.** $3(x+y+u)^2 = x^2+y^2+u^2$. **11.** $2\left(x^3 - 4u^3 - 3yu\right)^2 = 9\left(y+u^2\right)^3$. **12.** $(x-y)(3x+y+4u) = 4u$. **13.** $\sqrt{\frac{u}{y^3}}\sin x = \sin\sqrt{\frac{u}{y}}$.

Глава 5

1. $y = 1+x+2\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$. **2.** $y = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^j\frac{1}{j!}$. **3.** $y = 3+\frac{5}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{j!}$. **4.** $y = 1-\frac{x^2}{2}-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!}x^{2k}$. **5.** $y = a_0+a_1x+\ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{2}{3!}$, $a_4 = 0$, $a_j = \left(\left(2-(j-3)(j-4)\right)a_{j-3} + (j-2)a_{j-2}\right)\times$ $\times\left(j(j-1)(j-2)\right)^{-1}$, $j = 5, 6, \ldots$. **6.** $y = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{12}x^4+O\left(x^5\right)$. **7.** $y = \frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{x(1+x)}{3}\right)+$ $+O\left(x^5\right)$. **8.** $y = 1+2(x-1)+3(x-1)^2+\frac{11}{3}(x-1)^3+\frac{29}{6}(x-1)^4+O\left((x-1)^5\right)$. **9.** $y = 2+\frac{x^3}{6}+O\left(x^5\right)$. **10.** $y = 1+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+O\left(x^5\right)$. **11.** $y = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+O\left((x-1)^3\right)$, $a_1 = 1-a_0^2$, $a_2 = 1-a_0+a_0^3$, $a_0^3-a_0^2+a_0+3 = 0 \Rightarrow \tilde{a}_0 = -1$, $\tilde{a}_1 = 0$, $\tilde{a}_2 = 2$. **12.** $y = a_0+a_1x+a_2x^2+O\left(x^3\right)$, $\tilde{a}_0 = -1$, $\tilde{a}_1 = 1$, $\tilde{a}_2 = -\frac{1}{2}$. **13.** $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+O\left(x^4\right)$, $\tilde{a}_0 = 0$, $\tilde{a}_1 = \frac{4}{3}$, $\tilde{a}_2 = 0$, $\tilde{a}_3 = \frac{2}{3}$. **14.** $y = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+O\left((x-1)^4\right)$, $\tilde{a}_0 = 2$, $\tilde{a}_1 = -1$, $\tilde{a}_2 = \frac{3}{2}$, $\tilde{a}_3 = -\frac{7}{6}$. **15.** $y = a_0+a_1\mu+O\left(\mu^2\right)$, $a_0 = x^{-\frac{1}{2}}$, $a_1 = 2\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^2\right)$. **16.** $y = a_0+a_1\mu+O\left(\mu^2\right)$, $a_0 = x^{-1}$, $a_1 = 3$. **17.** $a_0 = (1-x)^{-2}$, $a_1 = (1-x)^{-2}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^4}{4}-1\right)$. **18.** $a_0 = x+\frac{x^2}{2}$, $a_1 = \frac{x^7}{56}+\frac{x^6}{8}+\frac{3}{10}x^5+\frac{x^4}{4}+1$, $y = a_0+\mu a_1+O\left(\mu^2\right)$. **19.** $y = a_0+a_1\mu+O\left(\mu^2\right)$, $a_0 = \sin x$, $a_1 = \int\limits_0^x\ln(1+\sin s)\,ds+1$. **20.** $y = a_0+\mu a_1+O\left(\mu^2\right)$, $a_0 = 2-\cos x$, $a_1 = \int\limits_0^x e^{a_0(s)}ds-1$. **21.** $y = 1$. **22.** $y = x$. **23.** $y = -1-x$. **24.** $y = 1$. **25.** $y = x$.

Глава 6

1. Неустойчивы. **2.** Неустойчивы. **3.** Неустойчивы. **4.** Неустойчивы. **5.** Устойчивы. **6.** Асимптотически устойчивы. **7.** Неустойчивы. **8.** Асимптотически устойчивы. **9.** Неустойчивы. **10.** Асимптотически устойчивы. **11.** $0 < a < 2$. **12.** Устойчивы. **13.** Неустойчивы. **14.** Асимптотически устойчивы. **15.** Асимптотически устойчивы. **16.** Неустойчива. **17.** Неустойчива. **18.** Неустойчива. **19.** Неустойчива. **20.** Неустойчива. **21.** Неустойчива. **22.** Неустойчива. **23.** Неустойчива. **25.** Неустойчива. **26.** Устойчива. **27.** Неустойчива. **28.** Устойчива. **29.** Асимптотически устойчива. **30.** Асимптотически устойчива. **31.** Устойчива, $v = x'^4+y^4$. **32.** Неустойчива, $v = x'-y$. **33.** Асимптотически устойчива, $v = x^2+y^2+y'^2$. **34.** Неустойчива, $v = x^2+x'^2+y^2$. **35.** Асимптотически устойчива, $v = x^2+y'^2+y^2$. **36.** Асимптотически устойчива, $v = \frac{1}{2}\left(x^2+y'^2\right)+\frac{1}{4}y^4$. **37.** Асимптотически устойчива, $v = x^2+x'^2+y^2$.

Глава 7

1. $\frac{\alpha\left(p^2-\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(p^2-(\alpha-\beta)^2\right)\left(p^2-(\alpha+\beta)^2\right)}$. **2.** $\frac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{\left(p^2+(\alpha-\beta)^2\right)\left(p^2+(\alpha+\beta)^2\right)}$. **3.** $\frac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{\left(p^2-(\alpha-\beta)^2\right)\left(p^2-(\alpha+\beta)^2\right)}$. **4.** $\frac{2\alpha\beta p}{\left(p^2+(\alpha-\beta)^2\right)\left(p^2+(\alpha+\beta)^2\right)}$.

5. $\frac{2\alpha\beta p}{\left(p^2-(\alpha+\beta)^2\right)\left(p^2-(\alpha-\beta)^2\right)}$. **6.** $\frac{2a^3}{p^4-a^4}$. **7.** $\frac{2a^2p}{p^4-a^4}$. **8.** $\frac{2ap^2}{p^4-a^4}$. **9.** $\frac{2p^3}{p^4-a^4}$. **10.** $\frac{p\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

11. $\frac{2\alpha\beta p}{\left(p^2+\alpha^2-\beta^2\right)^2+4\alpha^2\beta^2}$. **12.** $e^{-b(t-a)}\eta(t-a)$. **13.** $\frac{1}{p\left(e^{ap}-1\right)}$. **14.** $\frac{1}{p\left(1-e^{-p}\right)}$. **15.** $\frac{2}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{2}-\frac{1}{p}$.

16. $\frac{2+ap+(2+ap)e^{-ap}}{ap^2\left(e^{-ap}-1\right)}$. **17.** $\frac{a}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi p}{a}}-1}$. **18.** $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+8p+41}+\frac{1}{p^2+8p+17}\right)$. **19.** $\frac{1}{2}\left(\frac{p-3}{(p-3)^2+49}+\frac{p-3}{(p-3)^2+1}\right)$.

20. $\frac{p}{p^4+4}+\frac{5p}{p^4+48p^2+676}$. **21.** $\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{\left(p^2-2\right)^2}-\frac{p^3+24p}{p^4+48p^2+676}\right)$. **22.** $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-9}-\frac{p^3+13p}{p^4-10p^2+169}\right)$. **23.** $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{p^2-16}+\right.$

$\left.+\frac{2p^2-104}{p^4+40p^2+2704}\right)$. **24.** $\left(p^4+4p^3+4p^2\right)Y(p)-p^3-6p^2-10p-3$. **25.** $\left(3p^3-2p^2\right)Y(p)+3p^2-8p+$

$+13+\frac{5}{p}$. **26.** $\left(4p^4+3p^2+1\right)Y(p)-12p^2-5$. **27.** $\left(p^5+2p^4+4\right)Y(p)+p+3$. **28.** $\frac{2p\left(p^2-3a^2\right)}{\left(p^2+a^2\right)^3}$.

29. $\frac{2a\left(3p^2-a^2\right)}{\left(p^2+a^2\right)^3}$. **30.** $\frac{2a^2\left(3p^4-4a^4\right)}{\left(p^4+4a^4\right)^2}$. **31.** $\frac{p^2\left(p^4-12a^4\right)}{\left(p^4+4a^4\right)^2}$. **32.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+a}$. **33.** $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$. **34.** $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}$.

35. $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2-b^2}{p^2-a^2}$. **36.** $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$. **37.** $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$. **38.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(p+1)^2+1}{(p+1)^2}$. **39.** $\ln\frac{p+1-a}{p+1}$. **40.** $\frac{1}{4}\ln\frac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}$.

41. $e^{-t}-(1+t)e^{-2t}$. **42.** $\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$. **43.** $\frac{1}{5}\left(2\sin 2t-\cos 2t+e^t\right)$. **44.** $\frac{1}{6}e^{3t}(2\sin t-\sin 2t)$.

45. $\frac{1}{2}e^{2t}\left(t^2-4t+6\right)-e^{-t}(t+3)$. **46.** $\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$. **47.** e^t-t-1. **48.** $-\frac{3}{4}-\frac{t}{2}+\frac{2e^t}{3}+\frac{e^{-2t}}{12}$.

49. $\frac{1}{6}-e^{-t}+\frac{5e^{-2t}}{2}-\frac{5e^{-3t}}{3}$. **50.** $\frac{1}{2}\left(t^2e^{2t}-4te^{2t}+6e^{2t}-2te^t-6e^t\right)$. **51.** $\frac{1}{8}\left(\left(2t^2-2t+1\right)e^{-t}-e^{-3t}\right)$.

52. $\frac{t^2}{2}-4t+10-e^{-t}\left(\frac{t^3}{6}+\frac{3}{2}t^2+6t+10\right)$. **53.** $\frac{e^t}{27}(t-1)+\frac{e^{-2t}}{18}\left(t^2+\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}\right)$. **54.** $1-\cos at-\frac{at}{2}\sin at$.

55. $e^{-\frac{3}{2}t}\left(18t^2+2t+1\right)$. **56.** $e^t\left(e^t-t^2-t+1\right)$. **57.** $-\frac{79}{170}e^{-3t}+0{,}3e^{-t}-\frac{3}{85}e^t\cos t+\frac{7}{170}e^t\sin t+$

$+0{,}2e^{-t}\cos t+0{,}1e^{-t}\sin t$. **58.** $2e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-t}t^3-e^{-t}\cos t$. **59.** $2te^{-t}+te^t-e^t+e^{-2t}$. **60.** $\frac{3}{5}\operatorname{ch}t-$

$-\frac{19}{32}\cos t-\frac{1}{160}\cos 3t-\frac{1}{8}t\sin t$. **61.** $t^3+3t^2+\frac{37}{9}t+\frac{59}{27}+\frac{e^{3t}}{9}\left(22t-\frac{59}{3}\right)$. **62.** $\frac{3}{5}e^{-2t}-\frac{9}{17}e^{-4t}-\frac{6}{85}\cos t+$

$+\frac{7}{85}\sin t+\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{6}{85}\sin t-\frac{7}{85}\cos t+\frac{1}{10}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{34}e^{-4\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$. **63.** $e^{-2t}\left(\cos 4t+\frac{1}{2}\sin 4t\right)+$

$+\eta\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\left(\frac{19}{377}\cos\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)+\frac{4}{377}\sin\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)-\frac{e^{-2t}}{377}\left(19\cos 4\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)-\frac{21}{2}\sin 4\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\right)\right)$. **64.** $x(t)=$

$=\frac{1}{3}\left(e^t+2\cos 2t+\sin 2t\right)$, $y(t)=\frac{1}{3}\left(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t\right)$. **65.** $x(t)=\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$, $z(t)=$

$=y(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$. **66.** $x(t)=2\sin t-3t$, $y(t)=6t+3-2\cos t-3\sin t$. **67.** $\frac{1}{2}\left(e^t-\cos t+\sin t\right)$.

68. $\operatorname{sh}t$. **69.** $(1+t)\sin t$. **70.** $2\left(e^t-t-1\right)$. **71.** $\frac{1}{2}\left(e^t+\cos t+\sin t\right)$. **72.** $\frac{1}{2}\left(1+e^{2t}\right)$. **73.** $\frac{1}{80}\left(35e^{3t}+\right.$

$\left.+45\operatorname{ch}5t+27\operatorname{sh}5t\right)$. **74.** $\frac{1}{36}\left(45e^{2t}+32\cos 3t-18t-5\right)$. **75.** $\frac{1}{2}(1+3\cos 2t)$. **76.** $\frac{4}{3}$. **77.** $x(t)=$

$=2e^{-t}(1-t)$, $y(t)=e^{-t}(1-t)$. **78.** $x(t)=2(1+6t^2)$, $y(t)=24t$, $z(t)=15+2t(1+2t^2)$. **79.** $x(t)=\cos t$,

$y(t)=\sin t$, $z(t)=\sin t+\cos t$. **80.** $x(t)=2t$, $y(t)=1$, $z(t)=3t^2$. **81.** $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{t^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$. **82.** $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+$

$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos tS(t)-\sin tC(t))$. **83.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n t^{\frac{1}{2^n}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}$. **84.** $\ln(\gamma t^2)$. **85.** $\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. **86.** $U(x,p)=$

$=\frac{B}{p^2+\frac{n^2\pi^2a^2}{e^2}}\sin\frac{n\pi x}{e}$, $u(x,t)=\frac{Bl}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{e}\sin\frac{n\pi x}{e}$. **87.** $U(x,p)=\frac{A}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}x}$, $u(x,t)=A\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha x}{2\sqrt{t}}\right)$.

Предметный указатель

Настоящий предметный указатель призван облегчить поиск терминов по алфавитному признаку. Для поиска терминов по тематическому признаку пользуйтесь подробно составленным оглавлением.

В указателе, как правило, приводятся ссылки только на страницу, содержащую определение термина; составитель указателя не ставил своей целью отследить все упоминания приведенных терминов в тексте. Исключение составляют термины, описывающие методы, приемы, практические результаты: для них в некоторых случаях после номеров страниц курсивом указаны также задачи, в которых они используются существенным образом.

С целью уменьшения громоздкости указателя вместо термина "дифференциальное(ые) уравнение(я)"применяется сокращение "д. у.".

А

Абеля
— уравнение интегральное, 359
— — формула, 159, *363*, *364*
астроида, 111

Б

Бендиксона признак отсутствия предельных циклов, 306, *672*, *675*
Бернулли уравнение, 39, 115, *97*, *99*, *101*, *103*, *106*, *168*, *265*, *447*
Бихари лемма, 83, *201*, *202*
Бореля теорема умножения, 336, *711–715*, *719*, *720*, *740*, *752*, *753*, *762*

В

вид канонический линейного д. у. 2-го порядка, 152
Вольтерра уравнение интегральное
— 1-го рода, 358
— 2-го рода, 358
— особое, 359
Вронского
— матрица, 182
— определитель, 151, 183
вычет функции, 340

Г

Гессе
— прием, 208, *460–462*
— система, 208
гипербола вырожденная, 18
Грина функция краевой задачи, 170, *393–406*
Гурвица матрица, 275, *616–619*, *621*, *622*, *624–627*

Д

Дюамеля
— интегралы, 337
— формулы, 337, 347, *721*, *742–744*, *766*

З

задача
— *Коши*, 4
— — векторная, 83
— краевая, 169
— — нестационарная, 367
— *Штурма—Лиувилля*, 170
— — , собственные значения, 170
— — , собственные функции, 170
значения собственные задачи *Штурма—Лиувилля*, 170

И

инвариант линейного д. у. 2-го порядка, 152
интеграл
— вероятности, 338, *715–718*, *724*, *733*
— полный, 228
— системы д. у. первый, 201
интегралы
— *Дюамеля*, 337
— независимые, 201
интегрируемая комбинация, 201
интегрирующий множитель, 53

К

канонический вид линейного д. у. 2-го порядка, 152
Клеро уравнение, 78, *191*, *194*
косинус-интеграл *Френеля*, 334, *707*, *712*, *713*, *763*
Коши
— задача, 4
— — векторная, 83
— метод
— — отыскания интегральной поверхности, 229, *519–521*
— — — , обобщение, 229, *522–524*
— — отыскания частного решения неоднородного д. у., 137
— формула о вычетах, 341
краевая задача, 169
— нестационарная, 367
кривая дискриминантная, 99
критерий
— линейной независимости функций, 151
— *Льенара—Шипара*, 276, *618*, *619*, *626–628*
— *Михайлова*, 276, *620*, *621*, *623*
— *Рауса—Гурвица*, 276, *616*, *617*, *621*, *625*

Л

Лагранжа
— уравнение, 78, *192*, *193*
— — второго рода, *438–440*, *629*, *630*, *750*
— функция, *582*, *629*, *630*
Лагранжа—Шарпи метод, 228, *504*, *517*
Лапласа преобразование, 324
— , линейность, 324, *686*, *688*, *710*, *734*
— , однородность, 324
Левинсона—Смита теорема о наличии предельных циклов, 306, *676*
лемма *Бихари*, 83, *201*, *202*
Липшица условие, 82, 240
Лиувилля преобразование, 165, *381–387*
Лорана ряд, 340
— , главная часть, 340
— , правильная часть, 340
Льенара—Шипара критерий, 276, *618*, *619*, *626–628*
Ляпунова
— теорема
— — вторая, 275, *606–609*, *611*, *615*
— — первая (об устойчивости по первому приближению), 274–275, *589–593*, *595*, *598–600*, *602*, *615*, *630*
— функция, 275, *606–615*, *630*

М

матрица

— векторного д. у.
— — интегральная, 182
— — фундаментальная, 182
— *Вронского*, 182
— *Гурвица*, 275, *616–619*, *621*, *622*, *624–627*
матрицант, 183
метод
— вариации
— — произвольного вектора, 183, *429–431*
— — произвольных постоянных, 39, 136, 151, *87–89*, *91–93*, *97*, *108*, *325*, *326*, *331*, *342*, *360*, *431*
— исключения, 200, *408–420*, *431*, *435*, *442*, *449–451*, *453*, *454*
— *Коши*
— — отыскания интегральной поверхности, 229, *519–521*
— — —, обобщение, 229, *522–524*
— — отыскания частного решения неоднородного д. у., 137
— *Лагранжа—Шарпи*, 228, *504*, *517*
— малого параметра, 247, *559–566*, *568*
— неопределенных коэффициентов, 136, 141, *315–324*, *328*, *329*, *410*, *432*
— подбора интегрируемых комбинаций, 201, *443–448*
— последовательных приближений, 183
— разбиения данного уравнения на две части, 53, *149*, *154–156*, *158–160*
— *Рунге—Кутта* численного решения д. у., 267, *572–575*
— степенных рядов, 245–247, *537–555*, *576*, *577*
— *Штермера* численного решения д. у., 267, *575–577*
— *Эйлера*
— — отыскания общего решения неоднородной системы д. у., 184, *420–429*, *433*, *437*, *439*
— — численного решения д. у., 266, *569–571*
Миндинга—Дарбу уравнение, 40, *106–109*
Михайлова критерий, 276, *620*, *621*, *623*
множитель интегрирующий, 53

О

определитель *Вронского*, 151, 183
Осгуда теорема, 82
Остроградского—Лиувилля формула, 151, *362*, *363*

П

Пеано теорема, 82
Пикара теорема, 82, *199–204*, *207*
плоскость фазовая, 305
показатель роста функции, 323
полюс, 340
порядок полюса, 340
преобразование
— *Лапласа*, 324
— —, линейность, 324, *686*, *688*, *710*, *734*
— —, однородность, 324
— *Лиувилля*, 165, *381–387*
прием *Гессе*, 208, *460–462*
признак отсутствия предельных циклов
— *Бендиксона*, 306, *672*, *675*
— *Пуанкаре*, 306, *673*, *678*
пространство фазовое, 305
Пуанкаре признак отсутствия предельных циклов, 306, *673*, *678*
Пфаффа уравнение, 213, 233, *491–500*, *503*, *505–508*, *511*, *517*

Р

Рауса—Гурвица критерий, 276, *616*, *617*, *621*, *625*
Рейссига теорема о наличии предельных циклов, 306–307, *677*
решение
— дифференциального уравнения
— — изолированное, 105
— — особое, 99
— задачи *Коши*
— — общее, 4
— — частное, 4
— неустойчивое в смысле *Ляпунова*, 274
— обыкновенного д. у. n-го порядка, 4
— устойчивое
— — асимптотически, 274
— — по *Ляпунову*, 274
Риккати уравнение специальное, 67, 70–71, *164–167*, *169–171*
Римана—Меллина формула обращения, 339–340
Рунге—Кутта метод численного решения д. у., 267, *572–575*
ряд
— *Лорана*, 340
— —, главная часть, 340
— —, правильная часть, 340
— *Фурье*, *556–558*, *728*

С

самосопряженная форма линейного д. у. 2-го порядка, 152
седло, 293
синус интегральный, 335
— гиперболический, 335
синус-интеграл *Френеля*, 334, *707*, *712*, *713*, *763*
система
— *Гессе*, 208
— линейных д. у.
— — автономная, 305
— — неоднородная, 182, 184
— — нормальная, 200
— — однородная, 182
— решений однородного д. у. фундаментальная, 151
скорость фазовая, 305

Т

теорема
— запаздывания, 324, *689*, *739*, *741*, *768*
— *Левинсона—Смита* о наличии предельных циклов, 306, *676*
— *Ляпунова*
— — вторая, 275, *606–609*, *611*, *615*
— — первая (об устойчивости по первому приближению), 274–275, *589–593*, *595*, *598–600*, *602*, *615*, *630*
— о дифференцировании
— — изображения преобразования *Лапласа*, 325, *704–706*, *723*, *749*
— — оригинала преобразования *Лапласа*, 324, *700–702*, *740*
— о линейности преобразования *Лапласа*, 324, *686*, *688*, *710*, *734*
— о предельных соотношениях, 325
— о существовании и единственности решения задачи *Коши*, 82
— об интегрировании
— — изображения преобразования *Лапласа*, 325, *708–710*, *732*
— — оригинала преобразования *Лапласа*, 325, *707*, *708*, *718*, *724*, *733*, *742*
— об однородности преобразования *Лапласа*, 324
— опережения, 324
— *Осгуда*, 82
— *Пеано*, 82
— *Пикара*, 82, *199–204*, *207*
— подобия, 324, *687*, *689*, *765*
— разложения
— — вторая, 342, *725*, *727*, *728*, *736*, *738*, *739*, *741*, *743–745*, *747*, *750*, *751*, *767*
— — первая, 341, *729*
— *Рейссига* о наличии предельных циклов, 306–307, *677*
— смещения, 324, *699*, *715*, *734*
— умножения
— — обобщенная А. М. *Эфроса*, 336, *764*
— — Э. *Бореля*, 336, *711–715*, *719*, *720*, *740*, *752*, *753*, *762*
— *Четаева* о неустойчивости, 275, *612–614*
точка
— разветвления многозначной функции, 342

— системы двух д. у. первого порядка особая, 293
— функции особая
— — однозначного характера, 340
— — устранимая, 340
— функции существенно особая, 340
траектории
— изогональные, 106
— на фазовой плоскости, 305
— ортогональные, 106

У

узел, 293
— вырожденный, 293
— дикритический, 293
уравнение
— *Бернулли*, 39, 115, *97*, *99*, *101*, *103*, *106*, *168*, *265*, *447*
— в частных производных
— — гиперболического типа, 366
— — квазилинейное 1-го порядка, 212
— — нелинейное 1-го порядка, 228
— — параболического типа, 366
— дифференциальное
— — n-го порядка, 4
— — — каноническое, 4
— — в полных дифференциалах, 53
— — для интегрирующего множителя, 54
— — линейное
— — — 1-го порядка, 39
— — — 2-го порядка, 152
— — — —, инвариант, 152
— — — —, канонический вид, 152
— — — —, самосопряженная форма, 152
— — — n-го порядка, 135, 150
— — — — неоднородное, 135
— — — — однородное, 135
— — не разрешенное относительно производной, 73
— — обобщенно-однородное, 30, 122
— — однородное, 29
— — однородное относительно функции и ее производных, 122
— — с разделяющимися переменными, 11
— интегральное
— — *Абеля*, 359
— — *Вольтерра* линейное
— — — 1-го рода, 358
— — — 2-го рода, 358
— — — особое, 359
— — *Фредгольма*
— — — 1-го рода, 357
— — — 2-го рода, 357
— — — однородное, 357
— — — особое, 359
— *Клеро*, 78, *191*, *194*
— *Лагранжа*, 78, *192*, *193*
— — второго рода, *438—440*, *629*, *630*, *750*
— *Миндинга—Дарбу*, 40, *106—109*
— *Пфаффа*, 213, 233, *491—500*, *503*, *505—508*, *511*, *517*
— *Риккати* специальное, 67, 70—71, *164—167*, *169—171*
— характеристическое, 136, 184
— *Чебышева*, 152
— *Эйлера*, 152, *371*, *372*, *391*
— *Эйлера—Риккати*, 67, 152, *163*, *282*
— — каноническое, 67, *172*
условие *Липшица*, 82, 240

Ф

фокус, 293
форма
— векторная системы линейных д. у., 182
— самосопряженная линейного д. у. 2-го порядка, 152
— симметрическая нормальной системы д. у., 201
формула
— *Абеля*, 159, *363*, *364*
— *Коши* о вычетах, 341
— обращения *Римана—Меллина*, 339—340
— *Остроградского—Лиувилля*, 151, *362*, *363*
— *Циолковского*, 29
формулы *Дюамеля*, 337, 347, *721*, *742—744*, *766*
Фредгольма уравнение интегральное линейное
— 1-го рода, 357
— 2-го рода, 357
— однородное, 357
— особое, 359
Френеля
— косинус-интеграл, 334, *707*, *712*, *713*, *763*
— синус-интеграл, 334, *707*, *712*, *713*, *763*
фундаментальная матрица векторного д. у., 182
фундаментальная система решений однородного д. у., 151
функции
— линейно зависимые, 151
— линейно независимые, 151
— собственные задачи *Штурма—Лиувилля*, 170
функция
— аналитическая в области, 340
— влияния для задачи *Коши*, 137
— голоморфная, 340
— *Грина* краевой задачи, 170, *393—406*
— дробная, 340
— *Лагранжа*, *582*, *629*, *630*
— *Ляпунова*, 275, *606—615*, *630*
— мероморфная, 340
— моногенная в области, 340
— однородная степени m, 29
— регулярная в области, 340
— *Хевисайда*, 323, *679*, *733*
— — обобщенная, 329, *690—694*, *728*
— целая, 340
функция-изображение преобразования *Лапласа*, 324
— обобщенная, 326
функция-оригинал преобразования *Лапласа*, 323
— обобщенная, 326
Фурье ряд, *556—558*, *728*

Х

характеристическое уравнение, 136, 184
Хевисайда функция, 323, *679*, *733*
— обобщенная, 329, *690—694*, *728*

Ц

центр, 293
цепная линия, 110
цикл предельный, 306
— неустойчивый, 306
— полуустойчивый, 306
— устойчивый, 306
циклоида, 111
Циолковского формула, 29

Ч

часть ряда *Лорана*
— главная, 340
— правильная, 340
Чебышева уравнение, 152
Четаева теорема о неустойчивости, 275, *612—614*

Ш

Штермера метод численного решения д. у., 267, *575—577*
Штурма—Лиувилля задача, 170
— , собственные значения, 170
— , собственные функции, 170

Э

эвольвента, 106
эволюта, 106
Эйлера
— метод
— — отыскания общего решения неоднородной системы д. у., 184, *420—429*, *433*, *437*, *439*
— — численного решения д. у., 266, *569—571*
— уравнение, 152, *371*, *372*, *391*
Эйлера—Риккати уравнение, 67, 152, *163*, *282*
— каноническое, 67, *172*
Эфроса теорема умножения обобщенная, 336, *764*

Я

ядро интегрального уравнения, 357

Оглавление

Предисловие 3

Введение 4

Основные понятия. Составление дифференциальных уравнений 4

Основные определения (*4*) Задача Коши (*4*) Построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых (*5*) *Примеры* (*5*)

Упражнения для самостоятельной работы 10

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка 11

§ 1. Уравнения с разделяющимися переменными 11

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (*11*) Разделение переменных линейной заменой аргумента (*11*) *Примеры* (*11*)

§ 2. Геометрические и физические задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными 15

Использование геометрического смысла производной (*15*) Использование физического смысла производной (*15*) *Примеры* (*15*)

§ 3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним 29

Однородное уравнение (*29*) Уравнение, сводимое к однородному (*30*) Обобщенно-однородное уравнение (*30*) *Примеры* (*30*)

§ 4. Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним 39

Линейное уравнение первого порядка (*39*) Обмен ролями между функцией и аргументом (*39*) Уравнения, приводимые к линейным (*39*) Уравнение Миндинга—Дарбу (*40*) *Примеры* (*40*)

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 53

Уравнение в полных дифференциалах (*53*) Интегрирующий множитель (*53*) Дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя (*54*) *Примеры* (*54*)

§ 6. Уравнение Эйлера—Риккати 67

Уравнение Эйлера—Риккати. Специальное уравнение Риккати (*67*) Каноническое уравнение Эйлера—Риккати (*67*) *Примеры* (*67*)

§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной 73

Уравнение, не разрешенное относительно производной (*73*) Общий интеграл уравнения $F(y') = 0$ (*73*) Представление решения в параметрической форме. Разрешение неполных уравнений (*73*) *Примеры* (*74*)

§ 8. Существование и единственность решения 82

Теоремы Пикара, Пеано и Осгуда (*82*) Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной (*82*) Продолжение решения задачи Коши (*82*) Существование и единственность решения векторной задачи Коши (*83*) *Примеры* (*83*)

§ 9. Особые решения **99**

Особое решение. Дискриминантная кривая (*99*) Огибающая как особое решение (*100*) *Примеры* (*100*)

§ 10. Задачи на траектории **106**

Изогональные и ортогональные траектории (*106*) Эволюта и эвольвента (*106*) *Примеры* (*107*)

Упражнения для самостоятельной работы **112**

Глава 2. Дифференциальные уравнения высших порядков **114**

§ 1. Виды интегрируемых нелинейных уравнений **114**

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$ (*114*) Дифференциальное уравнение вида $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ (*114*) Дифференциальное уравнение вида $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$ (*114*) *Примеры* (*115*)

§ 2. Уравнения, допускающие понижение порядка **122**

Дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (*122*) Дифференциальное уравнение вида $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (*122*) Однородное дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (*122*) Обобщенно однородное дифференциальное уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (*122*) Уравнение, приводимое к виду $\left(\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right)' = 0$ (*123*) *Примеры* (*123*)

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами **135**

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение (*135*) Поиск частного решения линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов (*136*) Метод вариации произвольных постоянных (*136*) Метод Коши нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (*137*) *Примеры* (*137*)

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами **150**

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейно зависимые функции. Определитель Вронского (*150*) Критерий линейной независимости функций (*151*) Фундаментальная система решений (*151*) Формула Остроградского—Лиувилля (*151*) Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (*151*) Уравнение Эйлера. Уравнение Чебышева (*152*) Дифференциальные уравнения второго порядка (*152*) Связь между линейным дифференциальным уравнением второго порядка и уравнением Эйлера—Риккати (*152*) Сведение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами (*153*) Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений второго порядка (*153*) *Примеры* (*153*)

§ 5. Краевые задачи **169**

Определение краевой задачи (*169*) Функция Грина краевой задачи (*170*) Задача Штурма—Лиувилля (*170*) Условие эквивалентности краевой задачи интегральному уравнению (*170*) *Примеры* (*170*)

Упражнения для самостоятельной работы **180**

Глава 3. Системы дифференциальных уравнений **182**

§ 1. Линейные системы **182**

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная матрица уравнения. Определитель Вронского (*182*) Метод вариации произвольного вектора (*183*) Матрицант (*183*) Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (*184*) *Примеры* (*184*)

§ 2. Нелинейные системы **200**

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения (*200*) Подбор интегрируемых комбинаций (*201*) *Примеры* (*201*)

Упражнения для самостоятельной работы **211**

Глава 4. Уравнения в частных производных первого порядка 212

§ 1. Линейные и квазилинейные уравнения **212**

Основные понятия (*212*) Решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка (*212*) Задача Коши (*212*) Уравнение Пфаффа (*213*) *Примеры* (*213*)

§ 2. Нелинейные уравнения первого порядка **228**

Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка (*228*) Решение задачи о нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую (*228*) Метод Коши (*229*) Обобщение метода Коши (*229*) *Примеры* (*229*)

Упражнения для самостоятельной работы **239**

Глава 5. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений 240

§ 1. Зависимость решения от начальных условий и параметров **240**

Об оценке погрешности приближенного решения (*240*) Об отыскании производных от решений по параметру (*240*) *Примеры* (*241*)

§ 2. Аналитические приближенные методы **246**

Метод степенных рядов (*246*) Метод малого параметра (*247*) *Примеры* (*247*)

§ 3. Численные методы решения дифференциальных уравнений **266**

Метод Эйлера k-го порядка (*266*) Метод Рунге—Кутта 4-го порядка (*267*) Метод Штермера (*267*) *Примеры* (*267*)

Упражнения для самостоятельной работы **273**

Глава 6. Устойчивость и фазовые траектории 274

§ 1. Устойчивость **274**

Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость (*274*) Исследование на устойчивость по первому приближению: первая теорема Ляпунова (*274*) Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова: вторая теорема Ляпунова (*275*) Условия отрицательности всех действительных частей корней уравнения $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, $a_0 > 0$, с действительными коэффициентами (*275*) *Примеры* (*276*)

§ 2. Особые точки **292**

Определение особых точек и их классификация (*292*) Практические приемы исследования особых точек (*293*) *Примеры* (*294*)

§ 3. Фазовая плоскость **305**

Основные понятия (*305*) Построение фазового портрета (*305*) Предельные циклы (*306*) Признаки отсутствия предельных циклов (*306*) Признаки наличия предельных циклов (*306*) *Примеры* (*307*)

Упражнения для самостоятельной работы **322**

Глава 7. Метод интегральных преобразований Лапласа решения линейных дифференциальных уравнений **323**

§ 1. Преобразование Лапласа. Основные понятия и свойства **323**

Оригинал и изображение (*323*) Свойства преобразования Лапласа (*324*) *Примеры* (*325*)

§ 2. Свертка функций. Теоремы разложения **336**

Определение свертки (*336*) Теорема умножения (Э. Бореля) (*336*) Обобщенная теорема умножения (А. М. Эфроса) (*336*) Формулы Дюамеля (*337*) *Примеры* (*337*)

§ 3. Обратное преобразование Лапласа **339**

Формула обращения Римана—Меллина (*339*) Сведения из теории функций комплексного переменного (*340*) Теоремы разложения (*341*) *Примеры* (*342*)

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы **346**

Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами (*346*) Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (*347*) Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля (*347*) *Примеры* (*347*)

§ 5. Интегральные уравнения типа свертки. Особые уравнения **357**

Интегральные уравнения типа свертки (*357*) Интегральные уравнения второго рода (*358*) Интегральные уравнения первого рода (*359*) Особые интегральные уравнения. Интегральное уравнение Абеля (*359*) *Примеры* (*360*)

§ 6. Применение операционного исчисления к решению уравнений с частными производными **366**

Примеры (*367*)

Упражнения для самостоятельной работы **370**

Ответы **372**

Предметный указатель **377**

Список опечаток, замеченных в предыдущих томах "Справочного пособия по высшей математике"

Стр.	Строка*	Напечатано	Должно быть
		Том 1	
96	3-я снизу	**120.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(\cos^2 x+1)\sim\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x}$	**120.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(\cos^2 x+1)-\frac{1}{2}\sin 2x}{2\cos x}$
191	9-я снизу	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\exp\left\{x\left(\frac{1}{x}-tfrac12x^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right\}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\exp\left\{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right\}\right)$
198	8-я снизу	Область определения функции $-\lvert x\rvert > 1$.	Область определения функции: $\lvert x\rvert > 1$.
		Том 4	
23	2-я снизу	$x \notin f^1(B')$	$x \notin f^{-1}(B')$
25	9-я сверху	$y_n \to x_0$ при $k \to \infty$	$y_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$
36	13-я сверху	$x^{2m} - a^{2m}$ 242се	$x^{2m} - a^{2m}$, все
50	14-я снизу	прият на замкнутом ограниченном множестве D $_f \subset \mathbb{R}^2$	принимает на замкнутом ограниченном множестве $D_f \subset \mathbb{R}^2$
53	4-я снизу	$e^{n\ln\left(1+\frac{z_n}{n}\right)} - 1$	$e^{n\ln\left(1+\frac{\lvert z_n\rvert}{n}\right)} - 1$
54	4-я сверху	$z_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n}$	$z_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n^2}$
56	5-я снизу	$\lvert z_{n+1} - z_n\rvert = \lvert z_n\rvert\left\lvert 1 + i\sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}\right\rvert$	$\lvert z_{n+1} - z_n\rvert = \lvert z_n\rvert\left\lvert i\sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}\right\rvert$
86	22-я снизу	*проходящая че-их*	*проходящая через них*
91 92 93 347	1- и 22-я св. 7-я сверху 1-я сверху 17- и 18-я св.	$w = \sqrt[n]{z}$	$z = \sqrt[n]{w}$
98	17-я снизу	две ветки	две ветви
186	11-я сверху	Задаф2елась	Задача свелась
231	13-я сверху	трасцендентной	трансцендентной
237	8-я сверху	не зависит то выбора	не зависит от выбора
278	1-я снизу	получим формулу (3).	получим формулу (3). ▶
339	2-я колонка, 5-я снизу	одног(6жества	одного множества

* Первой строкой сверху считается строка колонтитула.

Боярчук Алексей Климентьевич, Головач Григорий Петрович

Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. — М.: Эдиторнал УРСС, 2001. — 384 с.

ISBN 5–8360–0213–4

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 5 охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики. Наряду с минимальными теоретическими сведениями в нем содержится более семисот детально разобранных примеров. Среди вопросов, нестандартных для такого рода пособий, следует отметить примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.