



Чудненко А.П.

РАЗМЕРНАЯ  
МАТЕМАТИКА

*Чудненко А.П.*

# РАЗМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

*Уральск-2002*

**ББК 22.1**

**Ч 84**

ФИЗИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ИМЕЕТ  
ОПРЕДЕЛЁННУЮ СТРУКТУРУ – ЭТО  
РАЗМЕРНАЯ ФОРМУЛА.

ПРЕВРАЩЕНИЕ ОДНИХ ТАКИХ ФОРМУЛ  
В ДРУГИЕ – ЭТО СУЩЕСТВО ЛЮБОГО  
ФИЗИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА,  
ПРЕДНАЗНАЧЕННАЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ  
ЭТИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ,  
СКОНСТРУИРОВАНА ЗДЕСЬ.

ПРОДЕМОНСТРИРОВАНА ЕЁ  
ДЕЕСПОСОБНОСТЬ НА РЕШЕНИИ  
ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И  
ГИДРОДИНАМИКИ

ЧУДНЕНКО А.П.

**Ч 84 РАЗМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА.** 182 стр., илл.  
“Доминант”. Уральск 2002.

ISBN 9965-00-321-1

Основу книги составляют материалы,  
опубликованные автором в журнале “Эфирная  
Физика и Размерная Математика”.

**ББК 22.1**

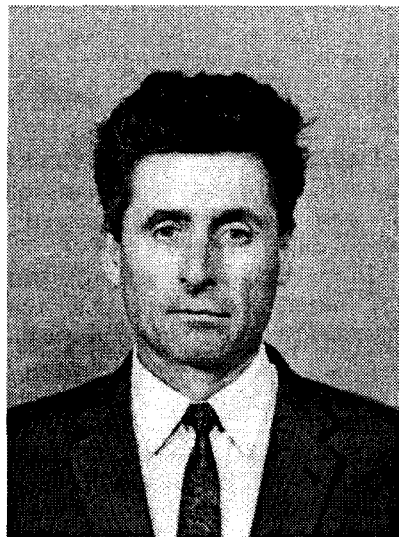
**Ч 84**

**ISBN 9965-00-321-1**

© **А.П.Чудненко, 2002**

Чудненко  
Алексей  
Платонович

(МФТИ – 1965)



“Что есть наш МИР, как он устроен, сейчас не знает никто. Создатель упрятал свои тайны в бесконечно малые и бесконечно большие размеры, до которых трудно дойти.

Мы можем строить только или удобные для нашего здравого смысла модели Мира или, полностью отрицая здравый смысл, строить общие теории. Однако оба направления сходятся в одном – Мир един.

Это может означать, что существует Единственное Правило построения любого физического процесса – Главный Закон Физики.

Физика и математика неразделимы. Наличие Главного закона в физике означает, что существует и Главная математическая процедура, описывающая его. Нужно только уметь распознать это.”

[a\\_chudnenko@nursat.kz](mailto:a_chudnenko@nursat.kz)

## АННОТАЦИЯ

Сконструировано преобразование, преобразующее одну размерную формулу в другую, то есть описывающее Главный Закон Физики. Оно названо здесь Преобразованием А (АП) и является Главной математической процедурой.

Показано, что все общеизвестные математические процедуры, в том числе интегрирование, дифференцирование, интегральные преобразования, задачи с граничными или начальными условиями могут рассматриваться как частные случаи этого преобразования.

Получена реакция АП на элементарные функции в общем виде. Реакция любой математической процедуры, принадлежащей семейству АП может быть определена из общей формулы постановкой в неё некоторого числового индекса.

Приведены многочисленные примеры приложений в теории упругости и гидродинамике. Создан и изучен новый раздел в гидродинамике – немасштабная гидродинамика.

## Часть 1

### БАЗОВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

#### ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ

**I. Главный закон порождения.** *Одна величина не может породить величину иной природы, иного наименования. Для этого необходимо иметь не менее двух исходных величин. При взаимодействии они полностью определяют и модуль и размерность новой величины.*

**II. Закон обязательности и единственности.** *Если какой либо набор величин при своем взаимодействии порождает новую величину, то он порождает ее всегда, как только он образован и при этом единственным образом.*

**III. Закон уникальности.** *Если в двух сложных физических явлениях порождается одна и та же величина, значит в них скрыты одинаковые простые явления, порождающие эту величину.*

#### ПРИНЦИП ОБЪЕКТИВНОСТИ

*Истинное значение величины, как простой, независимой, так и сложной, порождаемой в физическом процессе, не зависит от масштабов измерения.*

## Часть 2

### РАЗМЕРНАЯ ФОРМУЛА

Здесь нас будет интересовать конкретное математическое описание физического процесса и вид результирующей функции при учёте того факта, что все величины в природе размерны, то есть именованы.

Размерная величина характеризуется модулем и размерностью, например,  $A = 5\text{см}$ . В общем виде можно писать, например так:

$$X = x \cdot [x] \tag{1}$$

или так

$$X = \pm |x| \cdot [x],$$

понимая под обозначением  $[ ]$  - размерность величины, наименования ее масштаба. Направление величины, если она направлена, обозначается знаком, плюс или минус. Символ "x" в (1) обозначает неразмерную величину, число. Нет установленного символа для обозначения размерной величины. Мы тоже не будем его вводить, а заранее предупреждать о размерности величины и о представлении ее модуля.

Пусть заданы в форме (1) некоторые начальные (входные, исходные) размерные величины  $X, Y, \dots$ . Их взаимодействие в изолированном процессе может быть описано какими-то математическими процедурами. Предполагается, хотя это нигде и не оговорено, что любая математическая процедура допустима над размерными величинами. Сами же эти процедуры описываются неразмерными числами. В результате мы должны получить некоторую результирующую, тоже размерную величину

$$H = H(X, Y, \dots) \tag{2}$$

В силу того, что эта величина размерна и размерность ее определяют только входные величины, то, представив последние в форме (1), в функции  $H$  должны получить деление размерных и размерных величин

$$H = H(X, Y, \dots) = f(x, y, \dots) \cdot g([x], [y], \dots) \quad (3)$$

так что теперь будет  $f$  модулем результата,  $g$  - размерностью.

Математические процедуры должны быть такими, чтобы результат представлялся в форме (3).

Уже этот факт несет информацию, которая каким-то образом должна отразиться на конструкции результирующей формулы. Считается само собой разумеющимся, что функция  $g$  в (3) есть произведение степенных функций от размерностей. Это воспринимается как экспериментальный факт одними учеными и как необходимость, вытекающая из здравого ума - другими, хотя возвести сантиметр в степень, например, одна третья, не более разумно, чем взять синус от этой размерности. Этим свойством "степенности" часто пользуются при определении решения задачи. Не найдено ни одного примера, где бы размерность была бы не степенной функцией от исходных размерностей. Однако этот факт не доказан и не узаконен. Здесь мы докажем это и получим некоторые сведения о функции  $f$ . В основу доказательства мы положим принципы причинности и объективности, изложенные в части 1.

Не теряя общности, положим, что исходных величин всего две:  $X$  и  $Y$  и, следовательно, чтобы породить новую величину, они должны иметь различные размерности, согласно принципа причинности.

Далее, не подлежит сомнению тот факт, что превращение функции (2) в функцию (3) произошло в результате выноса размерностей из-под знака  $H$  в (2). Следовательно (3) должно иметь вид:

$$H(X, Y) = H(x, y) \cdot g([x], [y]) \quad (4)$$

Но величины  $X$  и  $Y$  имеют разные размерности, т. е. под знаком  $H$  они не сокращаются и не зависят друг от друга, поэтому они должны "выносить" свои размерности за знак  $H$  независимо друг от друга, т. е.

$$g([x], [y]) = g_1([x]) \cdot g_2([y]) \quad (5)$$

Но определение размерной величины в (1) перестановочно, т. е.

$$x \cdot [x] = [x] \cdot x \quad (6)$$

поэтому, поменяв местами  $x$  и  $[x]$  можем вынести вместо размерности модуль, так как они при написании для математических процедур равноценны. То же и для  $y$  и  $[y]$ . В результате получим:

$$H(X, Y) = H([x], [y]) \cdot g_1(x) \cdot g_2(y), \quad (7)$$

а затем, представив

$$[x] = 1 \cdot [x], \quad [y] = 1 \cdot [y]$$

вынести из-под знака  $H$  в (7) и размерности

$$H(X, Y) = H(1, 1) \cdot g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot g_1([x]) \cdot g_2([y]) \quad (8)$$

Но поскольку  $H$  есть все же функция  $X$  и  $Y$ , то в этом равенстве следует считать, введя неизвестные пока функции  $G_1, G_2$

$$g_1(x) \cdot g_1([x]) = G_1(X), \quad \text{где } X = x \cdot [x] \quad (9a)$$

$$g_2(y) \cdot g_2([y]) = G_2(Y), \quad \text{где } Y = y \cdot [y] \quad (9б)$$

Докажем теперь, что если

$$G(X) = g(x) \cdot g([x]), \text{ где } X = x \cdot [x] \quad (10)$$

то

$$G = bg, \text{ где } b = \text{const}.$$

Действительно, эта процедура разделения  $G$  на две функции есть ни что иное, как вынос  $x$  или  $[x]$  за знак  $G$ . Вынося  $[x]$ , имеем:

$$G(X) = G(x) \cdot g([x]),$$

а вынося  $x$ , получим

$$G(X) = G([x]) \cdot g(x).$$

Отсюда (из последних двух равенств):

$$\frac{G([x])}{g([x])} = \frac{G(x)}{g(x)};$$

и так как  $x$  и  $[x]$  имеют разную природу, это отношение следует положить равным константе, откуда и следует (10), из которого получаем:

$$g(X) = bg(x) \cdot g([x]), \quad X = x \cdot [x] \quad (11)$$

Если теперь положим

$$P = \frac{g}{b} \quad (12)$$

то из (11) получим

$$P(X) = P(x) \cdot P([x]), \text{ где } X = x \cdot [x] \quad (13)$$

Это опорное равенство этого параграфа при определении вида неизвестной функции  $P$ , в котором и будет использоваться свойство независимости величины от масштаба измерения.

В этом равенстве аргументы – величины разной природы  $x$  и  $[x]$ . Чтобы устранить эту неприятность, заменим масштаб

$$[x] = a[x']$$

$a$  - любое число. В (13) получим

$$P(xa[x']) = P(x)P(a[x']).$$

Это, согласно того же равенства (13), можно расписать так

$$P(xa)P([x']) = P(x)P(a)P([x'])$$

После сокращения, здесь получим

$$P(xa) = P(x)P(a) \quad (14)$$

Здесь уже аргументы одинаковой природы - числа.

Полагая здесь  $x = a$ , получим

$$P(x^2) = P^2(x),$$

По той же схеме

$$P(x^3) = P(x^2 x) = P(x^2)P(x) = P^3(x).$$

Аналогично, для любого целого  $n$

$$P(x^n) = P^n(x)$$

что можно представить так,

$$P^{\frac{1}{n}}(x^n) = P(x)$$

Заменяя здесь  $x^n \rightarrow x$  получим

$$P(x) = P^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Заменяя затем  $x$  на  $x^m$ , где  $m$  тоже целое, аналогичную формулу получим и для дробного показателя

$$P(x) = P^{\frac{n}{m}}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)$$

а затем, представляя иррациональное число в виде предела рациональной дроби, получим аналогичную формулу для любого показателя

$$P(x) = P^C\left(x^{\frac{1}{C}}\right), \quad C - \text{вещественно.} \quad (15)$$

Обозначим теперь

$$B = x^{\frac{1}{C}}$$

Тогда (15) будет таким

$$P(x) = P^{\frac{\ln x}{\ln B}}(B)$$

Отсюда при  $x \neq 1$

$$\frac{\ln P(x)}{\ln x} = \frac{\ln P(B)}{\ln B}$$

Из независимости “ $x$ ” и “ $B$ ” отсюда следует

$$\frac{\ln P(x)}{\ln x} = c = const$$

Отсюда

$$P(x) = x^c, \quad c = const. \quad (16)$$

При  $x = 1$  из (14), положив  $a = 1$ , получим  $P(1) = 1$  т.е. (16) верно и для  $x = 1$ .

Учитывая этот вид  $P$  теперь из (12), (8) и (I) получим:

$$H(X, Y) = B \cdot X^{c_1} \cdot Y^{c_2} \quad (17)$$

Здесь  $B, c_1, c_2$  - размерные константы.

Получена степенная конструкция формулы для двух разноименных входных величин. Согласно методу доказательства, она легко распространится на произвольное число независимых (нейтральных) величин и, очевидно, будет такой:

$$H(X, Y, Z, \dots) = B \cdot X^{c_1} \cdot Y^{c_2} \cdot Z^{c_3} \dots \quad (18)$$

$B, c_1, c_2, c_3$  - размерные числовые константы.

Теперь рассмотрим случай, когда среди входных величин есть одноименные. Пусть даны входные величины  $X_1, X_2, Y$  так что  $[x_1] = [x_2]$ . В этом случае функция  $H$  может иметь вид

$$H = H(X_1, X_2, \alpha, Y), \quad \alpha = \frac{X_2}{X_1} \quad (19)$$

Здесь размерный параметр не обязан выноситься за знак  $H$ . Очевидно, произведя те же выкладки, мы получим теперь

$$H(X_1, X_2, Y) = f(\alpha) \cdot X_1^{c_1} Y^{c_2}$$

Очевидно, что число одноименных величин и число входных - произвольно, поэтому функция  $f$  может зависеть от нескольких размерных аргументов и в общем случае

$$H = f\left(\frac{X_2}{X_1}, \frac{X_3}{X_1}, \dots, \frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_3}{Y_1}, \dots\right) X_1^\alpha Y_1^\beta \dots \quad (20)$$

Полученная формула – РАЗМЕРНАЯ ФОРМУЛА – общая формула для любого физического процесса. Согласно принципа причинности, в результате должны получить однозначную функцию. Следовательно  $f$  – однозначная функция размерных аргументов.

Размерная формула представляет собой произведение размерного однозначного ядра на размерный степенной «хвост».

Создание размерной формулы или превращение одной размерной формулы в другую происходит при любом физическом процессе, допускающем непрерывное изменение входных величин.

Это явление мы будем называть **Единым Правил**ом построения физического процесса. Это Правило подтверждает единство Мира.

В части 3 строится математическая процедура, которая превращает размерную формулу в размерную формулу.

**Это Главная Математическая Процедура.**

Она содержит в себе, как частные случаи, ранее введённые общеизвестные математические процедуры.

Кроме того, размерная формула используется в приложениях для определения общего вида решения и дальнейшего расчленения исходных уравнений для получения нужного вида решения при дальнейшем исследовании возможностей получения всех видов решения.

## Часть 3

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ "А" - ГЛАВНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА

**Введение.** Физическая формула имеет определённую структуру. Так, если две разноимённые величины  $X, Y$  порождают третью  $Z$ , то должно быть

$$Z = CX^\alpha Y^\beta \quad (1)$$

$\alpha, \beta$  - показатели степени, безразмерные числа,  
 $C$  - безразмерная константа.

Если исходные величины разбиты на группы одноимённых, например, величины группы  $X$  имеют размерность длины, группы  $Y$  - времени, то формула имеет вид:

$$Z = f\left(\frac{X_2}{X_1}, \frac{X_3}{X_1}, \dots, \frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_3}{Y_1}, \dots\right) X_1^\alpha Y_1^\beta \quad (2)$$

$f$  - некоторая однозначная функция безразмерных аргументов. Аналогично, для любого числа групп, физическая формула представляет из себя произведение безразмерного ядра на степенной размерный множитель. Такая формула в части 2 названа **РАЗМЕРНОЙ ФОРМУЛОЙ**. Дан её вывод, основанный на начальных физических постулатах. Мы считаем, что

**превращение размерной формулы в размерную - это**

**Главный Закон, Единое Правило физики.**

Оно проникает во все физические процессы.

**Следовательно, математическое описание этого Закона будет являться Главной математической процедурой,**

так как будет участвовать в описании любых физических процессов, следуя за Главным законом физики. Этот факт, очевидно, будет давать массу дополнительной информации и мы будем пытаться здесь найти эту процедуру с целью повышения эффективности математических методов. Раскрыть скрытую ориентацию этой процедуры на

размерную формулу и научиться использовать этот факт для повышения дееспособности и анализоспособности математических методов – цель данной работы.

Математика, сориентированная на размерную формулу, будет здесь называться РАЗМЕРНОЙ МАТЕМАТИКОЙ.

Нумерация формул – своя в каждой части. При необходимости указывается и номер главы.

## ГЛАВА 1

### СИСТЕМЫ РАСТЯЖЕНИЯ

§1. Размерные процессы на луче. Пусть в описании некоторого физического процесса участвуют две группы величин, одноимённых в каждой группе, но между собой эти группы разноимённые, например, размерность одной группы сантиметр, другой – секунда

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{x_n\} = (x_1, x_2, \dots, x_L) \\ \bar{y} &= \{y_k\} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Здесь использованы три способа записи группы (набора) величин, которые будут употребляться в дальнейшем.

Пусть, в свою очередь, величины группы  $x$  имеют возможность принимать какие – то наборы значений

$$\bar{x}_n = \{x_n^s\} \quad (1-2)$$

таких, что допустимо представление:

$$\bar{x}^s = \bar{c} \cdot t_s, \quad \bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_L) \quad (1-3)$$

то есть:

$$x_n^s = c_n t_s,$$

где  $t$  - безразмерный параметр, принимающий какой либо набор значений,  $s, n, k, L, M$  – индексы.

Любой физический процесс порождает результирующую, зависимую величину согласно размерной формулы (2) (переписанную во введении к этой части из части 2), которая при наших обозначениях величин имеет вид:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots\right) \cdot x_1^\gamma y_1^\theta \quad (1-4)$$

$\gamma, \theta$  показатели степени, размерные числа.

В подпространстве величин  $x$  проведём какой-то луч (1-3), характеризуемый некоторым набором  $\bar{c}$  и будем изучать поведение функции  $F$  на этом луче, то есть её зависимость от  $t$ .

Для двух разных значений  $t_1, t_2$  из (4) получим:

$$F(\bar{c}t_1, \bar{y}) = f\left(\frac{c_2 t_1}{c_1 t_1}, \frac{c_3 t_1}{c_1 t_1}, \dots, \frac{y_2}{y_1}, \dots\right) c_1^\gamma t_1^\gamma y_1^\theta = t_1^\gamma F(\bar{c}, \bar{y})$$

и аналогично

$$F(\bar{c}t_2, \bar{y}) = t_2^\gamma F(\bar{c}, \bar{y})$$

Из этих двух равенств:

$$F(\bar{c}t_2, \bar{y}) = \frac{t_2^\gamma}{t_1^\gamma} F(\bar{c}t_1, \bar{y})$$

или сокращённо

$$F_2 = \frac{t_2^\gamma}{t_1^\gamma} F_1$$

Для произвольных пар  $t_p, t_q$

$$F_p = \frac{t_p^\gamma}{t_q^\gamma} F_q \quad (1-5)$$

Физический процесс может определять сразу несколько независимых величин, так что в общем случае

$$F = \bar{F} = \{F^i\} \quad (1-6)$$

( $i$  - индекс)

и тогда (5) будет:

$$F_p^i = \left(\frac{t_p}{t_q}\right)^{\gamma_i} F_q^i$$

$i$  - индекс,  $\gamma$  - показатель степени.

Введя переменный параметр

$$w = w_{pq} = w(p, q) = \frac{t_p}{t_q} \quad (1-7)$$

последнюю формулу перепишем так:

$$F_p^i = w^{\gamma_i} \cdot F_q^i \quad A$$

$$t_p = w \cdot t_q \quad B$$

$$w = w(p, q) \quad C$$

$i$  - индекс,  $\gamma$  - показатель степени.

Далее, согласно (3)

$$\bar{F} = \bar{F}(\dots, \bar{y})$$

Придавая величине  $\bar{y}$  различные допустимые значения, систему (8) приведём к более сложной системе

$$F_p^{ij} = w^{\gamma_i} F_q^{ij} \quad A$$

$$t_p = w t_q \quad B$$

$$w = w(p, q) \quad (1-9) \quad C$$

$$F_k^{ij} = F^{ij}(t_k) \quad D$$

Показатель степени  $\gamma_i$  определяется согласно (3) только группой величин  $x$  и от  $y$  не зависит, поэтому ему не присваивается индекс  $j$ .

**§2. Системы растяжения.** Система (9) показывает, что при растяжении аргумента  $t$  в  $w$  раз функции  $F^i$  увеличиваются

в  $w^{\gamma_i}$  раз, независимо и от начального значения аргумента  $t$  и от начального значения результата  $F$ .

Множество значений  $t, F^i$ , обладающих этим свойством, а также и систему (1-9), описывающую их взаимосвязь, будем называть СИСТЕМОЙ РАСТЯЖЕНИЯ - (СР).

Для удобства в дальнейших процедурах, представим (1-9) в форме:

$$x_{ij}^p = g_i(w)x_{ij}^q \quad \text{A}$$

$$x_{11}^p = w_{pq}x_{11}^q \quad \text{B}$$

$$g_i(w) = w_{pq}^{\gamma_i} \quad \text{(1-10) C}$$

$\gamma_i$  - показатель степени,  $i, j, p, q$  - индексы,  $w$  - переменный параметр, определяемый из (B). Здесь по сравнению с (9) произведена замена буквенных обозначений.

Поскольку  $\gamma_i$  зависит от одного индекса  $i$ , то из (B)

$$\gamma_i = 1 \quad (\gamma)$$

Величину  $x_{11}$  будем называть определяющей координатой,  $\gamma$  - коэффициентом степенности.

Повторяющиеся индексы не обозначают суммирования, как это принято в тензорном исчислении.

Переменный параметр  $w$  зависит от двух значений определяющей величины  $x_{11}$ , то есть от индексов  $p, q$ , но обычно индексы при  $w$  писаться не будут.

Вообще говоря, привязка  $w$  к координате  $x_{11}$  условна. Можно систему записать в виде одного уравнения

$$x_{ij}^p = (w_{pq})^{\gamma_i} x_{ij}^q \quad \text{(1-10-1)}$$

но в этой записи  $w$  и  $\gamma$  определены неоднозначно, так как

$$w^\gamma = (w^c)^{\frac{\gamma}{c}}$$

Эта система будет называться неопределённой.

Для удобства введём функцию  $g$  в систему (1-10-1), ( $\gamma$ )

$$x_{ij}^p = g_i(w)x_{ij}^q \quad \text{A}$$

$$g_i(w) = (w_{pq})^{\gamma_i} \quad \text{B}$$

$$\gamma_i = 1 \quad \text{(1-11) C}$$

Дадим теперь «математизированное» определение СР.

Набор чисел  $\{x_{ij}^k\}$  считается СИСТЕМОЙ РАСТЯЖЕНИЯ, если существуют такие наборы  $\{w_{pq}\}$  и  $\{Y_i\}$ , что между элементами этих трёх наборов можно установить зависимость (1-10) или (1-11).

Индекс  $j$  введён для дальнейших преобразований, а для понимания и определения СР он необязателен.

Дадим максимально простое определение двухиндексной системы.

Два или несколько наборов чисел  $\{x_1^k\}, \{x_2^k\}, \dots$  образуют СР, если, определив переменный параметр  $w$  по одному из них по формуле

$$w_{pq} = \frac{x_1^p}{x_1^q} \quad (L)$$

значения чисел в остальных наборах можно определить по формуле

$$x_i^p = (w_{pq})^{Y_i} x_i^q \quad (Q)$$

где  $Y_i$  некоторые числа, неизменные в каждом наборе.

Пример:

$$\{x_1^k\} = (1, 2, 6, 24)$$

По этим элементам определим  $w_{pq}$  согласно (L)

$$w_{21} = 2, \quad w_{32} = 3, \quad w_{43} = 4$$

Пусть  $Y_2 = 2$  и начальный элемент  $x_2^1 = 2$ . Тогда второй набор определится из (Q):

$$x_2^2 = x_2^1 (w_{21})^{Y_2} = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$x_2^3 = x_2^2 (w_{32})^{Y_2} = 8 \cdot 3^2 = 72$$

$$x_2^4 = x_2^3 (w_{43})^{Y_2} = 72 \cdot 4^2 = 1152$$

Здесь при  $x$  обе цифры – индексы,  $\gamma$  – показатель степени.

При этом возникает вопрос, как изменится второй набор, если значения  $w$  будут определяться по другим парам  $x$ , например, если найти  $w_{21}, w_{31}, w_{41}$  ?

Легко проверить, что получим тот же набор. Это связано с тем, что степенная функция обладает свойством:

$$a^y b^y = (ab)^y \quad (N)$$

Можно ставить проблему шире: определять СР по условию:  $g(w)$  - однозначная функция, независимо от того, по каким парам элементов определяется  $w$ . Это условие независимости однозначности приведёт к условию:

$$g(w_1) \cdot g(w_2) = g(w_1 \cdot w_2) \quad (M)$$

При непрерывном изменении  $w$  из этого условия следует

$$g(w) = w^\gamma \quad (K)$$

где  $\gamma$  - произвольное число, показатель степени.

Это доказано в части 2 при получении размерной формулы.

**§3. Матрицы растяжения.** Набор элементов  $\{x_{ij}^k\}$  при всех значениях индексов образует матрицу растяжения (МР). Её начертание будет:

$$\{\{X\}\} = \{x_{ij}^k\} \quad (1-12)$$

Набор элементов МР при фиксированном верхнем индексе будет называться листом. Его множественное начертание будет:

$$[X] = \{x_{ij}^{k_0}\} \quad (1-13)$$

Если требуется уточнение номера листа, то будем писать  $[X^{k_0}]$ . Будут использоваться также следующие наименования наборов МР (рис.1)

$\{x_{i_0 i_0}^k\}$  строка,  $\{x_{ij}^{k_0}\}$  - столбец,  $\{x_{i_0 j}^{k_0}\}$  - ильгак.

Пример МР:

$$x_{11} = (1,2,6), \quad x_{21} = (2,16,432), \quad x_{12} = (2,4,12), \quad x_{22} = (3,24,648)$$

Значения  $w$ , вычисленные по значениям  $x_{11}$ , таковы:

$$w_{21} = 2, \quad w_{32} = 3$$

Коэффициенты степенности:  $\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2$

Если в строку записать размерный набор какой-то величины, то в равенствах (10) размерности сократятся, то есть система (10) пригодна и для размерных величин. А при этом в каждой строке могут быть различные наименования, но так как в (10) размерности сокращаются, будем для простоты считать, что матрица состоит из неразмерных чисел. Также будем предполагать, что эти числа – действительны, так как только действительное число может изображать модуль какой-то величины.

#### §4. Изображение элементов МР в Эвклидовом пространстве

Пусть индекс  $i$  принимает значения

$$i=1,2,\dots,N$$

Множество значений МР при фиксированных индексах  $j_0, k_0$ , то

есть каждый столбец, будем изображать точкой в пространстве  $R^N$

$$\bar{x} = \{x_{i_0}^{k_0}\}$$

Множество этих точек при всех значениях  $k$  будем называть ТРЕКОМ. Множество треков при всех значениях  $j$  и будет изображать МР в пространстве  $R^N$ . Это изображение будем называть СИСТЕМОЙ РАСТЯЖЕНИЯ. На рис. 2 изображена

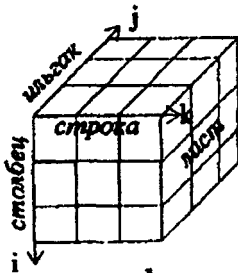


рис. 1

система, состоящая из двух треков. Множество точек с одинаковым индексом  $k$  будет изображением листа.

В листе, согласно определению, по одной точке от каждого трека. На рисунке в каждом листе по две точки.

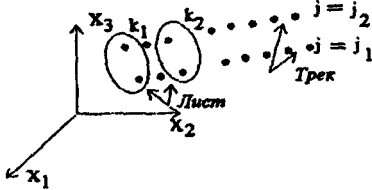


Рис.2

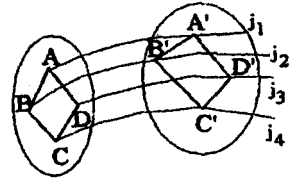


Рис.3

Каковы картины треков ? Изобразим “тени” трека, то есть его проекции на плоскости  $x_l, x_m$ , а для этого определим зависимость координаты  $x_l$  от  $x_m$  на треке  $j$  при движении от листа к листу вдоль этого трека, то есть при изменении верхнего индекса. Из (10):

$$x_{lj}^p = w^{\gamma_l} x_{lj}^q$$

$$x_{mj}^p = w^{\gamma_m} x_{mj}^q$$

Здесь  $\gamma$  – показатель степени, остальные буквенные указатели – индексы. Из этой системы:

$$x_{lj}^p = \left( \frac{x_{mj}^p}{x_{mj}^q} \right)^{\theta_{lm}} x_{lj}^q \quad (1-14 A)$$

$$\theta_{lm} = \frac{\gamma_l}{\gamma_m}$$

Здесь  $\gamma, \theta$ , – показатели степени, в отличие от индексов  $p, q$ . Фиксируя начальный лист  $q$  и считая номер листа  $p$  переменным, это же можно записать так:

$$x_{lj}^p = (x_{mj}^p)^{\theta_{lm}} c_{lmj}, \quad c_{lmj} = \frac{x_{lj}^q}{(x_{mj}^q)^{\theta_{lm}}} \quad (1-14B)$$

И если переменный номер листа  $p$  знать не нужно, обозначив начальный лист  $q$  индексом  $0$ , любую координату  $x_{ij}$  по этой формуле можно выразить через любую  $x_{mj}$  в общем виде

$$x_{ij} = (x_{mj})^{\theta_{lm}} c_{lmj} \quad (C)$$

$$c_{lmj} = \frac{x_{ij}^0}{(x_{mj}^0)^{\theta_{lm}}} \quad (D)$$

$\theta$  — определено в (A),  $c_{lmj}$  — константа на треке, так как она в любом листе определяется одинаково. Это следует из формул (C) и (D).

Формулы немного проще, если рассматривается зависимость любой координаты  $x_i$  на треке  $j$  от  $x_1$ , так как  $\gamma_1 = 1$ :

$$x_{ij} = (x_{1j})^{\gamma_1} c_{11j}, \quad c_{11j} = \frac{x_{ij}^0}{(x_{1j}^0)^{\gamma_1}} \quad (E)$$

### §5. О конформности при переходе от листа к листу вдоль треков

Пусть  $CP$  содержит не менее четырёх треков. Выберем в некотором, например,  $q$  - ом листе четыре точки (рис. 3), принадлежащие различным трекам. Соединим их прямыми линиями, образовав некоторую геометрическую фигуру  $ABCD$ . Перемещаясь вдоль треков от заданных точек в другой лист  $p$  окажемся в точках, соответственных исходным, то есть лежащих с ними на одинаковых треках. Соединив аналогично эти точки прямыми линиями, получим некоторую фигуру  $A'B'C'D'$

**Теорема.** Если отрезки прямых, соединяющих точки системы растяжения в одном листе параллельны, то при перемещении вдоль трека, они, соединяя соответственные точки, останутся параллельными и в другом листе. Если эти параллельные отрезки были равны, то они останутся равными и в другом листе.

**Доказательство.** Пусть в листе  $q$   $AB \parallel CD$ . Это значит, эти отрезки имеют пропорциональные разности координат (рис.3):

$$x_{ij_1}^q - x_{ij_2}^q = b(x_{ij_3}^q - x_{ij_4}^q), \quad b = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

( $p, q$  – индексы)

Если в этих равенствах все  $x^q$  заменить на  $x^p$  по формуле (10) то есть перейти к листу  $p$ , то все  $g_i$  сократятся и получим такую же формулу для  $x_{ij}^p$ , то есть полученные отрезки параллельны. Если параллельные отрезки были равны ( $b = 1$ ), то, очевидно, будут равны и соответственные в другом листе.

**Следствие.** Если фигуры совмещаются при сдвиге без поворота в одном листе, то они совмещаются таким же образом и в другом. Это происходит оттого, что совмещающиеся фигуры состоят из параллельных и равных отрезков.

#### §6. Системы рактяжения с совмещающимися листами – Е системы.

Может представиться случай при задании СР, такой что листы частично или полностью перекрываются, то есть точка одного листа при движении по треку переходит в точку другого, которая одновременно принадлежит и первому. Рассмотрим сначала случай, когда каждая точка любого листа принадлежит одновременно и всем листам. Такую систему назовём Е-СИСТЕМОЙ, (ЕС).

Для неё выполнено:

$$[X] = \{ \{X\} \} \quad (1-15)$$

Пример ЕС: Лист системы занимает всё открытое пространство. Нетрудно доказать, пользуясь представлением (10) любого листа, что точка  $\bar{x}$  принадлежит одновременно всем листам, если  $\gamma \neq 0$ .

**Теорема** Множество значений любой координаты в ЕС или как угодно приближается к нулю с одной стороны и стремится к бесконечности с другой, или эта координата принимает одинаковое значение во всех листах.

**Доказательство.** Возьмём произвольную  $x_i$  координату какой то точки  $x^q$  листа  $q$ . При переходе к другому листу  $p$  вдоль трека получим точку  $x''$ , у которой:

$$x_j^{11} = w^{\gamma_i} x_j^1 \quad (1-16)$$

И так как имеем ЕС, эта вторая точка принадлежит и листу  $q$  и должна иметь соответственную точку  $x^{111}$  в листе  $p$ . Переход осуществляется по формулам (16) с тем же значением  $w$ , так как это  $w$  определено между теми же листами – первым и вторым:

$$x_i^{111} = w^{\gamma_i} x_i^{11}$$

Используя (16), получим

$$x_i^{111} = w^{2\gamma_i} x_i^1$$

Продолжая этот процесс, получим после  $M$  шагов

$$x_i^M = w^{(M-1)\gamma_i} x_i^1 \quad (1-17)$$

Если оказалось, что  $w > 1$ , то координата  $x_i$  уходит в бесконечность, тогда за начальную координату возьмём точку  $x^{11}$  листа  $p$  и, определяя по ней точку  $x^1$  листа  $q$ , получим:

$$w' = \frac{1}{w}$$

Произведя те же рассуждения, по формуле (17) найдём, что  $x_i$  стремится к нулю. Если окажется, что  $\gamma_i = 0$  или  $w = 1$ , то получим неизменность координаты  $x_i$  во всех листах.

Доказательство закончено.

### §7. Системы растяжения с частично совмещающимися листами.

При растяжении ограниченных множеств – листов может быть случай, когда листы только частично совпадают. Так, если имеется возможность выбирать произвольно безразмерный параметр  $w$ , то, беря его как угодно близким к единице, всегда можно при сплошном непрерывном задании начального листа получить частичное совпадение листов. Обозначим такую систему  $E_p$  ( $p$  – от part).

Примечание к главе 1. Возможно, удобнее было бы начать определение СР с поведения функции не на луче, а на притреке в подпространстве каких-то независимых величин, но это будет проанализировано в дальнейшем.

## Глава 2

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ НАД НАБОРАМИ ЧИСЕЛ

#### §1. Процедуры над одноиндексными наборами.

Пусть задано два набора чисел

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (a_1, a_2, \dots) = \{a_\xi\} \\ \bar{b} &= (b_1, b_2, \dots) = \{b_\eta\}\end{aligned}\quad (2-1)$$

Количество элементов в наборах может быть различно, их может быть и бесконечное количество. Индексы могут быть и целые и нецелые. Для таких наборов определим следующие математические процедуры:

#### 1.Общее произведение.

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = \{a_\xi b_\eta\} = (a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_2 b_1, a_2 b_2, \dots) \quad (2-2)$$

Получаем новый набор с элементами, равными произведению каждого элемента из  $\bar{a}$  на каждый элемент из  $\bar{b}$  по одному разу.

Запись процедуры:  $\otimes$

#### 2.Общее деление:

$$\bar{a} \ominus \bar{b} = \left\{ \frac{a_\xi}{b_\eta} \right\} = \left( \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_2}, \dots, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots \right) \quad (2-3)$$

Запись процедуры:  $\ominus$

#### 3.Строчное произведение

$$\bar{a} * \bar{b} = \{a_\xi b_\xi\} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots) \quad (2-4)$$

Элементы результата – это произведение одинаково индексированных элементов. Если таковых нет, значит произведение не определено. Если хотя бы частично наборы перекрываются общими индексами – уже произведение определено. Запись процедуры:  $*$

4. Строчное деление:

$$\bar{a} \div \bar{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \left\{ \frac{a_{\xi}}{b_{\xi}} \right\} = \left( \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots \right) \quad (2-5)$$

И здесь в образовании новых элементов участвуют только одинаково-индексированные элементы. Запись процедуры:  $\div$  или  $_$

5. Общее возведение в степень.

$$\bar{a}^{\bar{b}} = \left\{ (a_{\xi})^{b_{\eta}} \right\} = (a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_2 b_1, a_2 b_2, \dots) \quad (2-6)$$

Все элементы из  $\bar{a}$  возводятся во все элементы из  $\bar{b}$ .  
Запись процедуры:  $^{\circ}$  перед показателем степени.

6. Строчное возведение в степень.

$$\bar{a}^{\circ \bar{b}} = \left\{ (a_{\xi})^{b_{\xi}} \right\} = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots) \quad (2-7)$$

Новый набор образуется только из одинаково индексированных элементов.

Запись процедуры:  $\diamond$  перед показателем степени.

**§2 Процедуры над многоиндексными наборами.**

Общие процедуры без всяких осложнений и изменений распространяются и на многоиндексные наборы. Наборы могут иметь и разное число индексов. В результате, каждый элемент одного набора взаимодействует с каждым другого.

При строчных процедурах выставляется требование:  
для обоих наборов должен быть указан общий индекс, (если он не подразумевается сам собой) по которому производится операция, например,  $*_{\rho}$ . Этот индекс будет указываться в случае необходимости рядом с изображением процедуры. Если он не указан, значит общий индекс только один и неопределённость исключена.  
Процедура производится при всех значениях прочих индексов.

**§3. Процедуры с одномерной константой –неиндексированным числом.** Пусть дано число  $c$  без индексов. Введённые выше процедуры могут использоваться при взаимодействии этого числа с набором в форме общих процедур, если положить

$$c = \bar{c} = (c_1)$$

1. Умножение:

$$c\bar{b} = c \otimes \bar{b} = (cb_1, cb_2, \dots) \quad (2-8)$$

2. Деление:

$$\frac{c}{\bar{b}} = c + \bar{b} = \left(\frac{c}{b_1}, \frac{c}{b_2}, \dots\right) \quad (2-9)$$

$$\frac{\bar{b}}{c} = \bar{b} + c = \left(\frac{b_1}{c}, \frac{b_2}{c}, \dots\right) \quad (2-10)$$

3. Возведение в степень:

$$\bar{b}^c = \bar{b} \diamond c = (b_1^c, b_2^c, \dots) \quad (2-11)$$

$$c^{\bar{b}} = c \diamond \bar{b} = (c^{b_1}, c^{b_2}, \dots) \quad (2-12)$$

**§4. Смешанное возведение в степень.** Пусть

$$\bar{c} = \{c_j\}, \quad \bar{a} = \{a_j\}, \quad \bar{b} = \{b_j\}$$

Тогда

$$\bar{c} \diamond (\bar{a} * \bar{b}) = (\bar{c} \diamond \bar{a}) * \bar{b} \quad (2-13)$$

Это легко проверить при поэлементной записи.

**§5. Сложение (суммирование) наборов.**

Суммирование определим как строчную процедуру.

1. Если

$$\bar{a} = \{a_\xi\}, \quad \bar{b} = \{b_\xi\}$$

A

то

$$\bar{a} + \bar{b} = \{a_\xi + b_\xi\} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \quad (2-14)$$

2. Сложение с константой:

$$\bar{a} + b = \{a_\xi + b\}$$

B

## ГЛАВА 3

## ФУНКЦИИ РАСТЯЖЕНИЯ

**§1. Запись системы растяжения с помощью новых математических процедур.** Формулы (1-10), (1-11) записаны для элементов наборов. С помощью новых математических процедур можно представить запись этих формул в виде математических процедур между наборами. Введём дополнительные обозначения.

**Определение.** Два набора будем считать равными, если они одинаково индексированы и все элементы с равными индексами равны.

$\bar{a} = \bar{b}$  тогда и только тогда, если  $a_i = b_i$  при любом  $i$ .

Примем также что запись  $\bar{x}^p$  или  $\bar{x}_i$  будет обозначать набор при фиксации указанного индекса.

Пусть имеем наборы

$$\bar{y} = \{y_i\}, \quad \bar{g} = \{g_i\}, \quad \{x_{ij}^p\} = \bar{x}$$

С помощью новых математических процедур и введённых выше обозначений основные равенства можно представить так:

$$\bar{x}^p = \bar{g} * \bar{x}^q \quad \text{A}$$

$$x_{ij}^p = w_{pq} \cdot x_{ij}^q \quad \text{B}$$

(3-1)

$$\bar{g} = (w_{pq}) \bar{y} = w \bar{y} \quad \text{C}$$

Здесь в строчном произведении в (A) индекс над знаком произведения можно не ставить, так как имеет всего один индекс

Запись равенства (A) можно сократить

$$\bar{x} = \bar{g} * \bar{x}^0 \quad (3-2)$$

не указывая номера листа в левой стороне равенства, подчёркивая его общность. Эта запись при фиксации  $j$ , то есть при указании номера трека, будет описывать трек

$$\bar{x}_j = \bar{g} * \bar{x}_j^0 \quad (3-3)$$

Аналогично, можно изобразить систему в полистовой записи

$$[X] = \bar{g} * [X^0] \quad (3-4)$$

§2. О разделении систем растяжения на две части.

Очевидно, любой одномерный одноиндексный набор чисел есть система СР, состоящая только из одной строки. Поэтому мы можем рассматривать набор значений одной координаты фиксированного

трека  $\{x_{i_0 j_0}^k\}$  - строку – системой СР. Очевидно, будет системой и

каждый отдельно взятый трек  $j$ . За определяющую координату в нём можно принять  $x_{1j}$  согласно (1-11С). Так мы можем разделить систему на две, определяя принадлежность каждого трека к одной из этих систем:

$$\{X\} = \{X\}_1 \cup \{X\}_2 \quad (3-5)$$

Это потрековое разделение.

Ещё можно набор координат каждого трека разделить на два набора, так что каждый трек разделится, расщепится на два, один с

координатами  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  в подпространстве  $R^K$ , другой с

координатами  $x_i$ ,  $i = K + 1, K + 2, \dots, N$  в подпространстве  $R^{N-K}$

Верхние символы обозначают размерность пространства.. Так же верхними символами, записанными крупным шрифтом мы будем здесь и далее изображать размерность любого набора. Так, запись  $\bar{x}^K$  обозначает, что набор  $\bar{x}$  имеет  $K$  элементов и как точка он изобразится в пространстве  $K$  измерений. Это покоординатное расщепление. Если обозначить трек буквой  $T$ , то для этого случая, то есть покоординатного расщепления,

$$T^N = T^{N-K} \cup T^K \quad (3-6)$$

То есть пространство  $R^N$  расщепляется на два подпространства размерностей  $K$  и  $N - K$  вместе с содержащейся в нём системой точек СР. Такое расщепление системы в множественной записи можно изобразить так:

$$\{X\}^N = \{X\}^{N-K} \cup \{X\}^K \quad (3-7)$$

Та часть, в которую вошла определяющая координата, есть СР, другая система может оказаться в общем случае неприведённой СР, то есть ни на одной из координат не выполняется условие ( $\gamma$ ). Для приведения её можно использовать любую координату  $z_i$ , не равную константе  $n$ , введя обозначение,

$$g_{i_0} = w^{\gamma_{i_0}} = b, \quad (3-8)$$

привести все  $g$  к параметру  $b$  :

$$g_i = w^{\gamma_i} = b^{\theta_i}, \quad \theta_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_{i_0}} \quad (3-9)$$

Каждый лист при таком расщеплении разделится на два :

$$[X]^N = [X]^{N-K} \cup [X]^K \quad (3-10)$$

и каждая точка разрывается на две:

$$\bar{x}^N = \bar{x}^{N-K} \cup \bar{x}^K \quad (3-11)$$

$$\bar{x}^{N-K} = \{x_i\}, i = K+1, K+2, \dots,$$

$$\bar{x}^K = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, K$$

Напоминаем, что верхние символы, данные крупным шрифтом, указывают размерность пространства (число координат).

**§3. Функции растяжения.** Можно считать набор координат  $\bar{x}^{N-K}$  при покоординатном расщеплении (3-10), (3-11) независимыми координатами, а набор  $\bar{x}^K$  - зависимыми и ввести  $K$ -мерную функцию  $V$  точки в пределах одного листа. Символически это можно записать так:

$$\bar{x}^K = \bar{V}^K (\bar{x}^{N-K}), \quad \bar{x}^{N-K} \in [X]^{N-K}, \quad \bar{x}^K \in [X]^K \quad (3-12)$$

Координаты, изображающие функцию, назовём амплитудными, а набор  $\bar{g}$  разделим на две части

$$\bar{g} = \{\bar{g}_v, \bar{g}_x\} \quad (3-13)$$

И теперь система растяжения может быть записана в форме:

$$\begin{aligned}\bar{V}'(\bar{x}') &= \bar{g}_v * \bar{V}(\bar{x}) & \text{A} \\ \bar{x}' &= \bar{g}_x * \bar{x} & \text{(3-14)} \\ & & \text{B}\end{aligned}$$

Штрих обозначает принадлежность к другому листу.

Систему можно свести к одному равенству

$$\bar{V}'(\bar{x}') = \bar{g}_v * \bar{V}\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x}\right) \quad (3-15)$$

$\bar{g}$  - набор степенных функций. Здесь использованы строчные процедуры умножения и деления. Равенства (3-14), (3-15) изображают СР в функциональной форме. Функцию, удовлетворяющую этим равенствам, будем называть **ФУНКЦИЕЙ РАСТЯЖЕНИЯ (ФР)**.

**§4. Обобщающая функция.** Функция растяжения  $V$ , как было сказано, задана в листе и изображает лист. Функцию, которая представляет объединение всех этих функций по всем листам, назовём **ОБОБЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ (ОФ)**. Здесь она обозначена буквой  $F$ :

$$\bar{F}(\bar{x}) = \{\bar{V}(\bar{x})\} = \{[X]\}^K, \quad \bar{x} \in \{[X]\}^{N-K} \quad (3-16)$$

Так же как и  $\bar{V}$ ,  $\bar{F}$   $K$ - мерна. В общем случае и функция  $\bar{V}$  и функция  $\bar{F}$  неоднозначны. Если они однозначны, то систем ы растяжени, их задающие, будем называть **функциональными  $\bar{V}$  -  $\bar{F}$  системами**. Функция  $\bar{F}$  в общем случае произвольна, однако обобщающая функция может быть описана с помощью формул (1-14E), даже если она неоднозначна.

$$F_{ij} = x_{ij} = c_{ij} (x_{1j})^{\gamma_{1j}} \quad (3-17)$$

или в общем виде:

$$\bar{F}_j = \bar{c}_{1j} * (x_{1j})^{\bar{\gamma}}, \quad \bar{\gamma} = (\gamma_{N-K+1}, \dots, \gamma_N) \quad (3-18)$$

Для более ясного восприятия формул будем различать записи амплитудных и аргументных элементов наборов:

Для более ясного восприятия формул будем различать записи амплитудных и аргументных элементов наборов:

$$\bar{Y} = \{\bar{Y}_v, \bar{Y}_x\}, \quad \bar{c} = \{\bar{c}_v, \bar{c}_x\} \quad (3-19)$$

В такой записи (3-18) будет

$$\bar{F}_j = \bar{c}_{v1j} * (x_{1j})^{\bar{Y}_v} \quad (3-20)$$

Назовём ПРИТРЕКОМ проекцию  $T_j^{N-K}$  трека  $T_j^N$  на пространство

$R^{N-K}$  то есть множество  $\{x_{ij}\}$  при  $i = 1, 2, \dots, N-K$ .  
Притрек характеризуется своими константами (1-14E):

$$\bar{c}_{x1j} = \{c_{ij}\} \quad i = 1, 2, \dots, N-K \quad (3-21)$$

Если мы знаем эти константы, то знаем и притрек, так как по ним при заданном наборе  $\bar{Y}$  и при заданном наборе значений определяющей координаты можно построить единственную кривую.

Следует заметить, что ни притреки, ни треки не пересекаются, так как координаты их точек удовлетворяют системе (1-10), которая однозначно определяет последующую точку по начальной точке. Если они имеют хотя бы одну общую точку, значит они совпадают.

Если набор  $\bar{F}$  задан на множестве  $\{\bar{x}\}^{N-K}$ , то можно считать, что константы  $\bar{c}_{v1j}$  заданы на притреке  $T_j^{N-K} \in \{\bar{x}\}^{N-K}$ , так как при движении вдоль притрека они не изменяются. Эти константы можно считать функциями притрека и даже писать:

$$\bar{c}_{v1j} = \bar{c}_{v1j}(\bar{c}_{x1j}) \quad (3-22)$$

Теперь, учитывая (1-14E) с помощью новых математических процедур равенства (3-18) можно представить так:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{c} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{Y}_x} \right) * x_1^{\bar{Y}_v} \quad (3-23)$$

(  $\bar{c}$  - функция притреков. Она не изменяется на притреке.)  
Эту запись будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ обобщающей функции растяжения.

## Глава 4

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ А

#### §1. Определение общего преобразования А.

Пусть на некотором множестве СР в пространстве  $R^M$  задано преобразование, такое что в результате его воздействия на любую из этих систем, получим тоже некоторую СР. Такое преобразование будем называть А – ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ (АП) и обозначать А:

$$A\{X\} = \{S\} \quad (4-1)$$

§2. Определение родственных систем. Системы, допускающие полистовое объединение на базе одной из них с параметром  $w$  (то есть некоторый лист одной системы объединяется с некоторым листом другой при взаимно-однозначном соответствии) будем называть РОДСТВЕННЫМИ.

Напоминаем, параметр  $w$  определяется между двумя любыми листами  $p$  и  $q$  по определяющей координате. Здесь за определяющую принята координата  $x_{11}$  трека  $j_1$

$$x_{11}^p = wx_{11}^q$$

#### §3. Определение полистового преобразования А.

Преобразование А, создающее родственную систему при действии на исходную систему при условии полистового механизма воздействия (в преобразовании участвуют только элементы одного листа исходной системы и получаются элементы только одного листа результата) будем называть ПОЛИСТОВЫМ преобразованием и обозначать  $A_L$  :  
Для него выполнено (4-1) и кроме того

$$\begin{aligned} A\{X^p\} &= \{S^q\} && \text{А} \\ \{X\}_w \cup \{S\}_b &= \{X \cup S\}_w && (4-2)\text{В} \\ [X^p] \cup [S^p] &= [X \cup S]^p && \text{С} \end{aligned}$$

$w, b$  – параметры исходной и результирующей систем.

Исходная и результирующая системы могут быть расположены в

различных подпространствах  $R^N$  и  $R^P$  пространства  $R^M$ . В этом случае будем писать

$$A_L [X]^N = [S]^P \quad (4-3)$$

Поскольку объединяются две системы с наборами  $\bar{g}^{-1}(w)$  и  $\bar{g}^{11}(w)$ , то результирующий набор  $\bar{g}$  будет

$$\bar{g}(w) = \{\bar{g}^{-1}(w), \bar{g}^{11}(w)\}$$

**§4. Функциональное АП.** Будем называть АП **функциональным**, если, действуя на СР, заданную в функциональной форме, оно создаёт систему, способную быть написанной в функциональной форме.

Для А

$$A\bar{F}(\bar{x}) = \bar{R}(\bar{s}) \quad (4-5)$$

Для полистового

$$A_L \bar{V}(\bar{x}) = \bar{r}(\bar{s}) \quad (4-6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{x}) &= [X]^K, & \bar{x} &\in [X]^{N-K} & \text{А} \\ \bar{r}(\bar{s}) &= [S]^L, & \bar{s} &\in [S]^{P-L} & \text{В} \end{aligned} \quad (4-7)$$

При переходе к другому листу согласно (3-15)

$$A_L \left( \bar{g}_v * \bar{V} \left( \frac{\bar{x}}{\bar{g}_x} \right) \right) = \bar{g}_r * r \left( \frac{\bar{s}}{\bar{g}_s} \right) \quad (4-8)$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{g}_x} \in [X]^{N-K}, \quad \frac{\bar{s}}{\bar{g}_s} \in [S]^{P-L} \quad (4-9)$$

**§5. Функционально-линейное АП.** Будем называть АП **функционально-линейным** на некотором множестве функций и обозначать  $A_0$ , если оно удовлетворяет условиям:

1. Из совпадения областей определения двух исходных функций следует совпадение областей определения результирующих, то есть

$$A_0 \bar{V}_1(\bar{x}) = \bar{r}_1(\bar{s})$$

(4-10)A

$$A_Q \bar{V}_2(x) = \bar{r}_2(s) \quad (4-10)B$$

2. Если

$$\bar{V}_1(x) + \bar{V}_2(x) \in \text{ОД}(A_Q)$$

(ОД – область действия оператора)  
и выполнены равенства (4-10 А,В), то

$$A_Q(\bar{V}_1(x) + \bar{V}_2(x)) = A_Q \bar{V}_1(x) + A_Q \bar{V}_2(x) = \bar{r}_1(\bar{s}) + \bar{r}_2(\bar{s}) \quad (4-11)$$

Суммирование наборов производится здесь по формулам (2-14).

3. Для любой константы С, если

$$C\bar{V} \in \text{ОД}(A_Q)$$

то

$$A_Q(C\bar{V}(\bar{x})) = CA_Q \bar{V}(\bar{x}) = C\bar{r}(\bar{s}) \quad (4-12)$$

Произведение константы на набор определено в (2-8).

Введённый термин «функционально-линейный» а не просто «линейный» используется из-за того, что линейность проявляется здесь только по отношению к амплитудным координатам.

### §6. Примеры А-преобразований.

1. Простейшие математические процедуры. Введённые в главе 2 простейшие математические процедуры над наборами чисел превращают СР в СР при полистовом соответствии. Это легко доказывается при детальной записи процедур и уравнений самой системы (1-10), (3-1), (3-4).

2. Производная любого порядка. Пусть некоторая  $K$ -мерная функция

$\bar{V}(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in R^{N-K}$  имеет производную порядка  $n$

$$\bar{r}(\bar{x}) = \frac{\partial^n \bar{V}(\bar{x})}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x_{N-K})^{\alpha_{N-K}}} \quad (4-13)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{N-K} = n$$

Будем считать функцию  $\bar{V}$  и её область задания  $\bar{x}$  листом СР. Введём набор из  $n$  степенных функций:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \{\bar{g}_v, \bar{g}_x\} = w^{\bar{v}}, \quad \bar{v} = \{\bar{v}_v, \bar{v}_x\} \\ \bar{v}_v &= \{v_i\}, \quad i = N - K + 1, \dots, N \\ \bar{v}_x &= \{v_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N - K, \end{aligned} \quad (4-14)$$

$w$  - положительное число,  $v_i$  - произвольны.

С помощью этого набора строим функцию  $\bar{V}'(\bar{x}')$  по формулам (3-14). При каждом  $w$  эта функция со своей областью  $\bar{x}$  - новый лист СР. Не сложно доказать, что эта функция имеет тоже производную типа (4-13). И используя свойство линейности процедуры производной и равенства (3-14), (3-15), получим:

$$\bar{r}'(\bar{x}') = \frac{\partial^n \bar{V}'(\bar{x}')}{(\partial x'_1)^{\alpha_1} (\partial x'_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x'_{N-K})^{\alpha_{N-K}}} = \bar{g}_r * \bar{r} \left( \frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x} \right) \quad A \quad (4-15)$$

$$\bar{g}_r = \frac{\bar{g}_v}{g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots (g_{N-K})^{\alpha_{N-K}}} \quad B$$

Из (4-14) и (4-15B)

$$\bar{v}_r = \bar{v}_v - \sum_{i=1}^{N-K} \alpha_i \cdot v_{xi} \quad C$$

Здесь производится сложение набора с константой согласно (2-14B). Поскольку все  $g$  - степенные функции параметра  $w$ , то и результирующая  $g_r$  (B) - тоже степенная функция этого же параметра. Кроме того, производная, как функция точки, имеет ту же область определения, что и сама функция. Поэтому набор  $g$  для производной имеет вид:

$$(4-16) \quad \bar{g} = \{\bar{g}_v, \bar{g}_x\}$$

То есть набор результирующих функций - производных, есть тоже СР. При этом, по построению, соответствие - полистовое и полученная система определена по тому же параметру  $w$ , значит

процедура взятия производной есть  $A_L$ , а учитывая её линейность – это  $A_{LQ}$

### 3. Неопределённый интеграл Римана без аддитивных констант.

Пусть некоторая  $K$ -мерная функция

$$\bar{V}(\bar{x}) = (V_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_K) \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4-17)$$

имеет  $n$  - кратный интеграл

$$J = \iiint \dots \int \bar{V}(\bar{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \bar{r}(\bar{x}) \quad (4-18A)$$

В экономайной записи

$$J = \int \bar{V}(\bar{x}) \cdot d\Omega = \bar{r}(\bar{x}), \quad d\Omega = dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n \quad (B)$$

Строим некоторую СР на базе  $\bar{V}$ , как на начальном листе. Любой другой лист организуем по формулам (3-14), (3-15) при некотором наборе  $\bar{g} = \{\bar{g}_v, \bar{g}_x\}$ , составленном из степенных функций параметра  $w$ . Действуем преобразованием  $J$  из (A),(B) на этот новый лист

$$J' = \int \bar{V}'(\bar{x}') \cdot d\Omega' = \bar{r}'(\bar{x}') \quad (C)$$

Учитывая (3-15) отсюда получим

$$J' = \bar{g}_v g_\Omega * \int \bar{V} \left( \frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x} \right) \frac{d\Omega'}{g_\Omega} = \bar{g}_v g_\Omega * \bar{r} \left( \frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x} \right), \quad (D)$$

$$g_\Omega = g_{x_1} \cdot g_{x_2} \dots g_{x_n}$$

Отсюда следует, что результат второго листа вместе с результатом первого образуют СР при

$$\bar{g}_r = \bar{g}_v \cdot g_\Omega = w^{\bar{y}_v} w^{\gamma_{x_1}} w^{\gamma_{x_2}} \dots w^{\gamma_{x_n}} = w^{\bar{y}_v + \gamma_{x_1} + \gamma_{x_2} + \dots} \quad (E)$$

Учитывая (1-11C)

$$\bar{y}_r = \bar{y}_v + 1 + \gamma_{x_2} + \dots + \gamma_{x_n} \quad (F)$$

Наличие общего параметра (см(Е)) означает, что исходная и результирующая системы – родственны. Учитывая ещё то, что процедуры  $J, J'$  производились в листах – это  $A_L$ , а учитывая линейность процедуры интегрирования – это  $A_{LQ}$ .

4. Определённый интеграл.

$$\bar{r} = \int_{\Omega} \bar{V}(\bar{x}) \cdot d\Omega = \int_{x_1^I}^{x_1^{II}} \dots \int_{x_n^I}^{x_n^{II}} \bar{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4-19)A$$

Создаём произвольную систему СР на базе  $\bar{V}(\bar{x})$ , как на начальном листе при некотором произвольном наборе  $\bar{g} = \{\bar{g}_v, \bar{g}_x\}$ , то есть растягиваем и  $\bar{V}$  и  $\bar{x}$  в  $\bar{g}$  раз соответственно. В любом другом листе процедура «определённый интеграл» на растянутой области и над растянутой функцией определится так:

$$\begin{aligned} \bar{r}'(\Omega') &= \int_{\Omega'} \bar{V}'(\bar{x}') d\Omega', \quad \bar{x}' = \bar{g}_x * \bar{x}, \\ d\Omega' &= g_{\Omega} d\Omega, \quad g_{\Omega} = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \end{aligned} \quad (B)$$

Заменим здесь  $V'$  на  $V$  по формуле (3-15). После элементарных преобразований получим

$$\bar{r}' = \bar{g}_r * r \quad (C)$$

где

$$\bar{g}_r = \bar{g}_v \cdot g_{\Omega} \quad (D)$$

Отсюда

$$\bar{r}' = \bar{r}'_v + \gamma_{x_1} + \gamma_{x_2} + \dots + \gamma_{x_n} \quad (E)$$

Согласно (С) наборы  $\bar{r}, \bar{r}'$  – это листы системы СР. Она родственна исходной, так как определяется по тому же параметру  $w$  при полистовом соответствии. Значит процедура «определённый интеграл» – есть  $A_L$ , а учитывая линейность этой процедуры, –  $A_{LQ}$ .

5. Интегральное преобразование. Так будем называть процедуру:

$$\begin{aligned} \bar{r}(x_0) &= \int_{\Omega} \bar{V}(\bar{x}) \bar{f}(\bar{x}, \bar{x}_0) d\Omega, \\ \bar{x}_0 &\in \{\bar{x}\}, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4-20A)$$

Здесь функция  $f$  является составной частью процедуры, производимой над функцией  $V$ .

На базе  $\bar{V}(\bar{x})$  , как на начальном листе, строим СР, при этом подбираем набор  $\bar{g}$  так, чтобы для  $\bar{f}$  выполнялось

$$\bar{f}'(\bar{x}', \bar{x}'_0) = (w) \bar{Y}_f * f\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x}, \frac{\bar{x}'_0}{\bar{g}_x}\right) \quad (B)$$

В этом случае, производя те же операции, что и в п.п.3,4, получим:

$$\bar{r}'(\Omega') = \int_{\Omega'} \bar{V}'(\bar{x}') * \bar{f}'(\bar{x}', \bar{x}'_0) d\Omega' = (w) \bar{Y}_r * r\left(\frac{\bar{x}'_0}{\bar{g}_x}\right) \quad (C)$$

где

$$\bar{Y}_r = \bar{Y}_v + \gamma_f + \sum_{i=1}^n \gamma_{x_i} \quad (D)$$

Под знаком суммы показатели только интегрируемых координат.

Таким образом, получим листовое АП при общем параметре  $w$ , то есть  $A_L$ . Учитывая линейность – это  $A_{LQ}$ .

Примечание. При приведении интегрального преобразования к АП и  $\bar{x}$  и  $\bar{x}_0$  подвергаются воздействию одного и того же набора  $\bar{g}$ , поскольку, согласно (4-20А)  $\bar{x}_0 \in \{\bar{x}\}$ . Этому же воздействию подвергаются и граничные точки области  $\Omega$ , то есть множество  $\bar{x}$  растягивается вместе со своей границей и фиксированными точками  $\bar{x}_0$ .

Примеры. А. Интеграл с ядром Коши, главное значение.

$$r(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x)}{x - x_0} dx \quad (C)$$

Это  $A_{LQ}$  при любом  $g_v$  и  $\gamma_x = 1$

Здесь

$$f = \frac{1}{x - x_0} \quad (F)$$

Отсюда

$$\gamma_f = -1 \quad (G)$$

Поэтому, согласно (D)

$$\gamma_r = \gamma_v \quad (H)$$

В. Интеграл Фурье.

$$r(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} V(x_1) \cos(x_2(x_1 - x_0)) dx_1 \quad (I)$$

Это  $A_{LQ}$  при наборе, удовлетворяющем условию

$$g_{x_1} \cdot g_{x_2} = 1 \quad (J)$$

$$g_{x_0} = g_{x_1} \quad (J-1)$$

То есть, если, как обычно, положить  $g_{x_1} = w$ , то есть  $\gamma_{x_1} = 1$ , тогда из (J)

$$g_{x_2} = \frac{1}{w} \quad (K)$$

то есть

$$\gamma_{x_2} = -1 \quad (L)$$

и значит

$$\gamma_{x_1} + \gamma_{x_2} = 0 \quad (M)$$

Здесь в (I)

$$f = \cos(x_2(x_1 - x_0)) \quad (N)$$

При условии (M)

$$\gamma_f = 0 \quad (O)$$

И теперь из (D)

$$\gamma_r = \gamma_v \quad (P)$$

Примечание. В (M) не входит  $\gamma_{x_0}$  так как по  $x_0$  не производится интегрирование. И вообще, результаты п.п.2-5 пригодны и для случая, когда интегрирование производится не по всем переменным. И в этом случае в (D) следует суммировать под знаком суммы только «рабочие» показатели, то есть показатели тех координат, по которым производится интегрирование. То же можно сказать и о производной.

$$\bar{g} = (g_Q, g_x, g_t) = (w^Y, w, w^2)$$

Но легко проверить, что решение в каждом из деформированных тел определяется по решению в исходном теле так:

$$Q'(\bar{x}', t') = w^Y Q\left(\frac{\bar{x}'}{w}, \frac{t'}{w^2}\right)$$

То есть решение образует тоже СР с тем же набором  $\bar{g}$  при том же  $w$  при листовом соответствии. То есть линейная процедура (4-22) есть  $A_{LQ}$ .

### 8. Система уравнений Навье – Стокса.

Жидкость несжимаема, без источников.

$$\begin{aligned} (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{V} \\ \nabla \cdot \bar{V} &= 0 \\ \nabla &= \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (4-23)$$

Жидкость расположена в некотором объеме  $X$  трёхмерного пространства. На границе объема задана скорость жидкости  $\bar{V}(\bar{x}_S)$  и давление  $P$  в одной точке  $\bar{x}_{0S}$  границы.

Растягиваем пространственные координаты в  $w$  раз, то есть строим систему подобных тел

$$X' = wX$$

На границе каждого из растянутых тел задаём граничные условия так:

$$\begin{aligned} \bar{V}'(\bar{x}'_S) &= \frac{1}{w} \bar{V} \left( \frac{\bar{x}'_S}{w} \right) \\ P'(\bar{x}'_0) &= \frac{1}{w^2} P \left( \frac{\bar{x}'_0}{w} \right) \end{aligned}$$

Затем обнаруживаем, что система (4-23) в каждом растянутом объеме имеет решение, которое связано с решением в первоначальном объеме

по этим же формулам. Таким образом, как и в предыдущих случаях, убеждаемся, что система (4-23) превращает систему СР граничных условий в СР решений при полистовом соответствии, то есть – это  $A_L$ . Линейным это преобразование назвать нельзя.

При дополнительном условии  $\nabla^2 \bar{V} = 0$ , которое нами будет использоваться в дальнейшем, возможно допустить  $g_v$  - произвольно, при этом

$$g_p = g_v^2$$

§7. Поточечное АП. Существуют преобразования, ставящие в соответствие каждой точке исходного листа – точку в результирующем листе. Обозначим их  $A_T$ . К поточечным преобразованиям относятся и производная и неопределённый интеграл. Определённый интеграл нельзя отнести к  $A_T$ .

## Глава 5

### ОБЩИЙ ВИД РЕЗУЛЬТАТА АП

§1. Реакция на E-систему. A-преобразование, действуя на E-систему, создаёт E-систему

$$AE = E' \quad (A)$$

(5-1)

Поточечное АП, действуя на  $E_p$  (система с частично совмещающимися листами) создаёт  $E_p$

$$A_T E_p = E'_p \quad (B)$$

Штрих обозначает, что первоначальная и результирующая системы могут не совпадать.

Это очевидные утверждения. Если все листы исходной системы неразличимы на областях совпадения, то и результирующие листы тоже будут неразличимы.

§2. Реакция на обобщающую функцию (3-23) в канонической форме.

По определению, АП, действуя на СР порождает СР. Записав систему растяжения в канонической форме(3-23) и применив преобразование А, получим систему растяжения, которую тоже можем записать в той же форме

$$A \cdot \left[ \bar{C} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{y}_x} \right) * x_1 \bar{y}_v \right] = \bar{D} \left( \frac{\bar{s}}{s_1 \bar{\alpha}_x} \right) * s_1 \bar{\alpha}_r \quad (5-2)$$

$\bar{C}, \bar{D}$  - функции размерных аргументов, указанных в круглых скобках, функции притреков (§4, гл.3).

Это самая главная формула размерной математики. Она привязывает математику к физике, поскольку математическое описание любого физического процесса – это превращение размерной формулы в размерную формулу.

Функция, описывающая физический процесс допускает «структурирование», то есть представление в форме (3-23), в результате чего любая математическая процедура над ней представима в форме (5-2). При этом от функций  $\bar{C}, \bar{D}$  не требуется однозначности, так как они записаны в форме набора и значит от одних и тех же аргументов, изображающих притрек, может зависеть сколько угодно одномерных функций. При геометрическом изображении исходная функция и результат могут своими треками заполнять всё пространство, а не только поверхность, как это обычно принято понимать под функциями.

Функции притреков в экономайной записи будем писать так:

$$f\left(\frac{\bar{x}}{x_1 \bar{y}_x}\right) = f(T_x) \quad (5-2A)$$

При  $\bar{y}_v = 0$  в (5-2) получим реакцию АП на константу:

$$A\bar{C} = \bar{D}(T_x) * s_1 \bar{\alpha}_r \quad (5-2B)$$

**§3. Примеры использования формулы (5-2).** Сама по себе формула (5-2) уже несёт информацию, сообщая о том, какой вид имеет результат. Однако не всегда известны коэффициенты степенности  $\bar{\alpha}$  и при известных коэффициентах  $\bar{y}$ . Незвестен и вид функции  $\bar{D}$ . Однако, при полистовом АП, то есть при  $A_L$  коэффициенты степенности  $\bar{\alpha}$  - определимы. Конкретный вид функции определяется конкретным видом преобразования А. В этой работе преследуется цель научиться получать информацию из этой формулы. Здесь мы будем демонстрировать возможность получения информации, когда исходная система есть Е-система. В этом случае преобразование становится полистовым.

1. Производная любого порядка. Докажем формулу:

$$\frac{\partial^n}{(\partial x_1)^{d_1} (\partial x_2)^{d_2} \dots (\partial x_M)^{d_M}} \left[ \bar{C} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{\gamma}_x} \right) * x_1 \bar{\gamma}_v \right] = \bar{D} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{\gamma}_x} \right) * x_1 \bar{\gamma}_r, \quad (A)$$

$$\sum_i d_i = n \quad (B)$$

Из (4-15C)

$$\bar{\gamma}_r = \bar{\gamma}_v - \sum_{i=1}^M d_i \gamma_{x_i} \quad (C)$$

$\bar{x}, \bar{\gamma}_x$  - M-мерны,  $\bar{\gamma}_v, \bar{\gamma}_r, \bar{C}, \bar{D}$  - K-мерны,  $\bar{C}$  - дифференцируемая функция.

Для доказательства достаточно положить, что исходная функция есть лист системы, а не вся система и построить на этом листе систему с набором  $g$ , совпадающем с заданным. В этом случае система и лист совпадут, хотя бы частично, то есть имеем право применить формулу (5-2) на общей части согласно (5-1B).

При этом произведена замена  $s$  на  $x$ , так как производная определена на том же множестве значений аргумента, что и исходная функция.

1-1. В качестве примера использования полученного результата, докажем формулу:

$$r = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \left( \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}} \right) = F(b, ac) c^{-n} \quad (5-3.1)$$

$F$  - некоторая функция своих аргументов.

Считая  $c$  - определяющей координатой,  $a$ ,  $b$  - рядовыми исходными координатами, приведём исходную функцию к каноническому виду с помощью набора:

$$\gamma_c = 1, \quad \gamma_b = 0, \quad \gamma_a = -1, \quad \gamma_v = 0$$

и простейших эквивалентных преобразований

$$ac = \frac{1}{c^{-1}}, \quad b = \frac{b}{c^0}$$

0 - ноль, показатель степени.

Используя равенства (5-2) и (5-3С), получим:

$$\gamma_r = -n$$

то есть (5-3.1) верно.

2. Неопределённый интеграл без аддитивных постоянных.

$$\int \overline{C} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{\gamma}_x} \right) * x_1 \bar{\gamma}_v d\Omega = \overline{D} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{\gamma}_x} \right) * x_1 \bar{\gamma}_r \quad (A)$$

(5-4)

$$\bar{\gamma}_r = \bar{\gamma}_v + 1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n \quad (B)$$

Согласно выводов §6, глава 4, п.3, неопределённый интеграл – это  $A_L$  и при этом  $\bar{\gamma}_r$  определяется согласно (4-18), что соответствует равенству (B). Логический переход от листа к системе осуществляется как и в предыдущих примерах.

Пример

$$r = \iint (Ax + By^2) dx dy, \quad A, B = const$$

Считая  $y$  определяющей координатой, приведём подинтегральную функцию к каноническому виду

$$r = \iint y^2 \left( A \frac{x}{y^2} + B \right) dx dy$$

И теперь при  $\gamma_x = 2, \quad \gamma_y = 1, \quad \gamma_v = 2$

подинтегральное выражение, понимаемое как лист некоторой системы, превращается в E-систему. И формула (5-2) – верна. Согласно (5-4B)  $\gamma_r = 5$  и результат должен иметь вид:

$$r = f \left( \frac{x}{y^2} \right) \cdot y^5$$

Интегрирование даёт:

$$r = \frac{Ax^2 y}{2} + \frac{Bxy^2}{3} + Cy + D$$

То есть результат совпадает с прогнозируемым при значении аддитивных констант интегрирования  $C$ ,  $D$ , равных нулю. А если они не равны нулю, то мы не получаем даже в результате ЕС и приходим к кажущемуся противоречию с формулой (5-1). Это противоречие возникает из-за того, что интегрирование – неоднозначная процедура, определённая не самостоятельно, а как обратная к производной. Однако, одно и то же значение производной можно получить и на несовпадающих функциях, то есть не только ЕС порождает ЕС.

Таким образом, при работе с интегралами следует отдельно рассматривать результат, в котором присутствуют аддитивные постоянные.

3. Определённый интеграл.

$$\int_{\Omega} \bar{V} \left( \frac{\bar{x}}{x_1 \bar{V}_x} \right) * x_1 \bar{V}_v d\Omega = \bar{r} \quad (5-5)$$

Определённый интеграл, как разность значений неопределённого, очевидно, представим в форме (5-2).

4. Интегральное преобразование. В самом общем случае так будем называть определённый интеграл, в котором интегрирование ведётся не по всем переменным

$$\int_{\Omega} \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \bar{r}(x_{n+1}, \dots, x_M) \quad (A)$$

$$\quad \quad \quad n < M \quad (B)$$

Для удобства записи его можно представить и так:

$$\int_{\Omega} \bar{F}(\bar{x}, \bar{s}) d\Omega = \bar{r}(\bar{s}) \quad (C)$$

$$d\Omega = dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$$

и так

$$\int_{\Omega} \bar{V}(\bar{x}) * \bar{f}(\bar{x}, \bar{s}) d\Omega = \bar{r}(\bar{s})$$

В этом случае  $f$  называется ядром преобразования, а испытуемая функция есть  $V$ .

Интегральное преобразование легко сводится к  $A_L$  преобразованию (глава 4, §6, п.5). Здесь будет рассмотрена возможность получать информацию из этих преобразований, если на подинтегральной функции образовать E-систему. Это возможно будет сделать, если удастся подобрать такой набор  $\bar{g}$ , что подинтегральная функция примет вид (3-13) и при этом область интегрирования окажется ограниченной притреками по всей их длине. В таком случае области определения листов будут совпадать и есть надежда образовать ЕС. После создания ЕС из исходной подинтегральной функции можно пользоваться формулами (5-2) для полистового преобразования. Напоминаем, что (5-2) написано для общего преобразования, а полистовым преобразованием можно пользоваться, если только подинтегральная функция представима в форме ЕС.

Пусть эти требования выполнены, тогда согласно (4-19 D, E) и (1-11C)

$$\bar{g}_r = \bar{g}_v g_\Omega = w \bar{Y}_r \quad (D)$$

$$\bar{Y}_r = \bar{Y}_v + 1 + \gamma_{x_2} + \dots + \gamma_{x_n}$$

В правой части (5-2)

$$\bar{g}_r = (g_{s_1}) \bar{\alpha}_r = (w^{\gamma_{s_1}}) \bar{\alpha}_r$$

Сравнивая это с (D), получим:

$$\bar{\alpha}_r = \frac{\bar{Y}_r}{\gamma_{s_1}} \quad (E)$$

$\bar{Y}_r$  определено в (D).

Из (1-14 C, D)

$$\bar{\alpha}_s = \bar{\theta}_{s_1} = \frac{\bar{Y}_s}{\gamma_{s_1}} \quad (F)$$

Таким образом, показатели степеней результата известны. Это может быть использовано при исследовании результата ещё до того, как он получен.

Примеры прогнозирования результата при интегральных преобразованиях.

Согласно (4-1) ((<sup>1</sup>)№3.111 стр.231)

$$r(p, q, s, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p + qx}{s^2 + 2sx \cos \lambda + x^2} dx \quad (5-7)$$

Преобразуем подинтегральную функцию к каноническому виду (3-23)

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} \right) : \left( \left( \frac{s}{x} \right)^2 + 2 \frac{s}{x} \cos \lambda + 1 \right) \right] dx$$

из которого следует, что если взять набор

$$\gamma_x = \gamma_q = \gamma_s = 1, \quad \gamma_p = 2, \quad \gamma_\lambda = 0, \quad \gamma_v = 0$$

то можно на базе подинтегральной функции образовать ЕС, учитывая также то, что переменные  $p, q, s, x$  заданы во всём пространстве. При интегрировании по  $x$  в результате получим функцию переменных  $p, q, s$ . Положим  $s$  определяющей координатой. Согласно (5-6Е, F) коэффициенты степенности результата будут:

$$\gamma_p = 2, \quad \gamma_q = 1, \quad \gamma_\lambda = 0$$

И, следовательно, результат должен быть таким

$$r = D \left( \frac{p}{s^2}, \frac{q}{s}, \lambda \right) \cdot s$$

Результат по справочнику

$$r = \frac{\pi}{s \sin \lambda} (p - qs \cos \lambda) = s \frac{\pi}{\sin \lambda} \left( \frac{p}{s^2} - \frac{q}{s} \cos \lambda \right)$$

что согласуется с нашим прогнозом.

4-2. ((<sup>1</sup>)№3.121.1 стр. 233)

$$\int_0^1 \frac{1}{q - px} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = r(p, q) \quad (5-8A)$$

При ограниченной области интегрирования удобно выбрать за определяющую неинтегрируемую координату.

Выберем, например,  $p$  и приведём подинтегральную функцию к виду

$$F = C \left( \frac{q}{p}, \frac{x}{p^0} \right) p^{-1}$$

Положим  $\gamma_q = \gamma_p = 1, \quad \gamma_x = 0$

При этих значениях подинтегральная функция изображает ЕС. Формулы (5-6 D,E,F) позволяют определить общий вид результата

$$r(p, q) = D \left( \frac{p}{q} \right) p^{-1} \quad (B)$$

что соответствует истинному выражению:

$$r = \pi p^{-1} \left( \frac{q^2}{p^2} - \frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Результат (5-8B) может быть легко получен и простейшим анализом. Пример этот приведён не ради результата, а для того чтобы «накатать» метод на различных видах примеров. В данном случае имелись две неинтегрируемых координаты - параметра, способные принимать произвольные значения при ограниченном интервале интегрирования по третьей координате. Необходимость привести подпространство независимых координат к ЕС вынуждает искать такой набор этих координат, чтобы хотя бы одна была бы задана на интервале  $(0, \infty)$ . Ограниченное по всем направлениям множество при растяжении не может совмещаться с собой, то есть оно не может быть листом ЕС.

4-3. ((<sup>1</sup>), № 3.194-3)

$$r(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{(1 + \beta x)^{\nu}} dx \quad (5-9A)$$

Если положить

$$\gamma_{\beta} = -1$$

то на подинтегральной функции можно образовать ЕС, при этом

$$\gamma_r = \mu$$

и из (5-6 D, E)

$$\alpha_r = \frac{\gamma_r}{\gamma_\beta} = -\mu$$

Следовательно, результат согласно правой части (5-2) в одномерном случае

$$r = C\beta^{-\mu}, \quad C = C(\mu, \nu)$$

Что соответствует истинному значению.

Все известные интегральные преобразования (Фурье, Лапласа, ...) – есть АП и все результаты, полученные для АП, применимы к ним.

### 5. О понижении числа неизвестных в уравнениях

Для использования формулы (5-2) удобно рассматривать те задачи, в которых область задания независимой переменной может имитироваться системой с совмещающимися (полностью или частично) листами (гл.1, §§ 6,7) Это неограниченные конуса, клинья, полосы, линии или даже всё пространство.

После того, как формула (5-2) применена к каждой отдельно взятой математической процедуре заданной системы уравнений, получим результат в виде правой части (5-2). Далее следует учесть, что физические уравнения сконструированы так, что степенной «хвост», как элемент, несущий размерность, сокращается и остаются только функции от отношения исходных одноимённых величин. Но этих отношений меньше чем исходных независимых величин на единицу в каждой одноимённой группе. Так, если независимые переменные есть пространственные координаты, то в трёхмерном случае ядро функции в (5-2) зависит от двух переменных, а в двумерном – от одного, что резко сокращает трудность задачи. Так, если в двумерном случае заданы уравнения в частных производных, то они приводятся к уравнениям в простых производных и задача становится легче разрешимой.

Кроме такого упрощения решения и дальнейшего его анализа, формула (5-2) может использоваться и для анализа самой исходной системы уравнений и её возможной перегруппировки и расчленения для получения необходимого вида решения.

Всё это будет продемонстрировано далее при получении и анализе решений задач механики сплошных сред.

## Глава 6

### РЕАКЦИЯ А – ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Преобразование А описывает действие главной физической процедуры – размерной формулы и, следовательно, само является главной процедурой – математической. Проникая во все явления, размерная формула протаскивает во все эти явления и описывающую её математическую процедуру. Однако для описания этих явлений в настоящее время используется масса всевозможных не связанных между собой математических преобразований. Возникает предположение, что все эти преобразования каким – то образом связаны с преобразованием А и, скорее всего, являются его частными случаями. Эту связь обнаружить не просто, но возможно. Эдесь мы делаем это.

Выше было показано, что известные математические процедуры – интегрирование, дифференцирование, интегрирование с ядром, задачи с граничными и начальными условиями – есть частные случаи АП.

В этой главе определяется результат в общем виде при действии АП на некоторые элементарные функции. В подтверждение связи названных известных математических процедур с АП, показывается, что результат их воздействия на эти же элементарные функции содержится в общей формуле для результата АП при фиксированном значении некоторого индекса ( коэффициента степенности), характеризующего данную процедуру. Различные процедуры могут иметь одинаковый индекс и тогда они могут давать аналогичные результаты. Более того, в приложениях АП к теории упругости, показано, что существуют проблемы, для решения которых достаточно знать только индекс процедуры.

**§1. Реакция АП на функцию от показательной функции.** Пусть на М-мерном множестве значений  $\bar{x}$  и Р-мерном множестве  $\bar{b}$

$$\bar{x} = \{x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (6-1 \text{ A})$$

$$\bar{b} = \{b_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, P$$

задана однозначная К-мерная функция  $\bar{V}$  так

$$\bar{V}(\bar{b}, \bar{x}) = \bar{V}(\bar{b} \circ \bar{x}) \quad (B)$$

Здесь использована математическая процедура «о» - общее возведение в степень (2-6).

На базе  $\bar{V}$ , как на начальном листе, при каждом фиксированном значении  $\bar{b}$  строим CP с набором

$$\bar{y}_v = 0, \quad (C)$$

$\bar{y}_x$  -любое,

Пусть теперь задано полистовое AP, то есть  $A_L$ , дающее  $Q$ -мерный результат, зависящий от  $H$ -мерного переменного  $s$ .

$$A_L \bar{V}(\bar{b}, \bar{x}) = \bar{r}(\bar{b}, \bar{s}) \quad (D)$$

Если преобразование не является поточечным, то потребуем задания исходных переменных на неограниченной области

$$0 < \bar{x} < \infty, \quad 0 < \bar{b} < \infty \quad (D-1)$$

Индексируя, как обычно,  $\bar{g}(\bar{x})$  тем же индексом, что и  $\bar{x}$ , и учитывая (2-13) и условия (B) данной задачи, можем писать:

$$\frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x} = \left( \frac{1}{\bar{g}_x} \right)^{* \bar{x}'} \quad (E)$$

Любой лист исходной системы преобразуется согласно (3-15) так

$$\bar{V}'(\bar{b}, \bar{x}') = \bar{V}\left(\bar{b}, \frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x}\right) = \bar{V}\left(\bar{b}, \frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x}\right) = \bar{V}\left(\bar{b}, \left(\frac{1}{\bar{g}_x}\right)^{* \bar{x}'}\right) = \bar{V}\left(\bar{b}, \frac{1}{\bar{g}_x}, \bar{x}'\right) \quad (F)$$

Здесь запись  $V(\dots)$  обозначает функцию от каких то аргументов, а не произведение  $V$  на скобку.

Применим преобразование  $A_L$  ко второму и пятому члену этих равенств, обозначив эти члены буквой  $J$  с соответствующим индексом.

$$A_L J_2 = \bar{g}_r * \bar{r}(\bar{b}, \frac{\bar{s}'}{\bar{g}_s})$$

$$A_L J_5 = r(\bar{b} \overset{0}{\bar{g}_x}, \bar{s}')$$

Из (F), (G), (H)

$$r(\bar{b} \overset{0}{\bar{g}_x}, \bar{s}') = \bar{g}_r * \bar{r}(\bar{b}, \frac{\bar{s}'}{\bar{g}_s})$$

Здесь, согласно ранее принятых определений

$$g_p = w^{\gamma_p}, \quad s' = g_s s$$

Обозначим

$$\bar{b} \overset{0}{\bar{g}_x} = \bar{d}$$

и заменим  $s'$  на  $s$  в правой части (I) согласно (J)

$$\bar{r}(\bar{d}, \bar{s}') = w^{\bar{\gamma}_r} * \bar{r}(\bar{b}, \bar{s})$$

Выразим  $w$  через растяжение  $p$ -той координаты  $s$

$$s'_p = w^{\gamma_{s_p}} \cdot s_p$$

отсюда

$$w^{\gamma_{s_p}} = \frac{s'_p}{s_p}$$

Подставив это в (L), получим:

$$\frac{\bar{r}(\bar{d}, \bar{s}')}{\bar{z}'(r, p)} = \frac{\bar{r}(\bar{b}, \bar{s})}{\bar{z}(r, p)},$$

где

$$\bar{z}(r, p) = (s_p)^{\bar{\theta}_p}, \quad \bar{z}'(r, p) = (s'_p)^{\bar{\theta}_p}, \quad \bar{\theta}_p = \frac{\bar{\gamma}_r}{\gamma_{s_p}} \quad (N-1)$$

(Далее символы  $r, p$  могут быть заменены другими.)

Поскольку  $d$  и  $s'$  изменяются независимо от  $b$  и  $s$ , можем положить

$$\frac{\bar{r}(\bar{b}, \bar{s})}{\bar{z}(r, p)} = \bar{C}_p = const \quad (O)$$

Однако это изменение происходит по определённым правилам, согласно равенств (J) и (K). Эти равенства имеют общий параметр  $w$ . Исключая его из (K) с помощью (J) и (M), получим:

$$\bar{b}^{\circ} \bar{z}(x, p) = \bar{d}^{\circ} \bar{z}'(x, p) \quad (P)$$

$$\frac{\bar{s}'}{\bar{z}'(s, p)} = \frac{\bar{s}}{z(s, p)} \quad (Q)$$

Здесь символ “ $\circ$ ” -общее возведение в степень двух наборов. Опять, в силу той же независимости  $d$  и  $s'$  от  $b$  и  $s$  можно положить здесь:

$$\bar{b}^{\circ} z(x, p) = \bar{D}_p = const \quad (R)$$

$$\frac{\bar{s}}{z(s, p)} = G_p = const \quad (S)$$

Теперь можем сказать, что равенство (O) верно для тех значений  $b$  и  $s$ , которые удовлетворяют условиям (R), (S), то есть в (O) имеем право писать

$$\bar{C}_p = \bar{U}_p(\bar{D}_p, \bar{G}_p) \quad (T)$$

$\bar{U}_p$  - некоторая функция, конкретного вида которой мы не знаем. И теперь (O) будет

$$\bar{r}(\bar{b}, \bar{s}) = \bar{z}(r, p) * \bar{U}_p \left( \bar{b}^{\circ} z(x, p), \frac{\bar{s}}{z(s, p)} \right) \quad (U)$$

Равенство (U) в подробной записи с учётом принятых обозначений:

$$\bar{r} = s_p^{\bar{\theta}} * \bar{U}_p \left( b_1 s_p^{\theta_{1xp}}, b_1 s_p^{\theta_{2xp}}, \dots, b_p s_p^{\theta_{Mxp}}, \frac{s_1}{s_p^{\theta_{1sp}}}, \dots, \frac{s_H}{s_p^{\theta_{Hsp}}} \right) \quad (V)$$

В одномерном случае, то есть если  $\bar{x}$  и  $\bar{s}$  одномерны, то

$$A_L V(b^x) = s^{\gamma_r} U(b^s) \quad (W)$$

Как и этом параграфе, так и в последующих, верхние символы – показатели степени, нижние – индексы.

Примеры. 1. Одномерная производная.

$$\frac{d}{dx} V(b^x) = V'(b^x) b^x \ln b = F(b^x) \frac{\ln b^x}{x} = x^{-1} U(b^x) \quad (6-2A)$$

Коэффициент степенности результата для производной в выражении (4-15 C) дан в самом общем виде при произвольном коэффициенте степенности для исходной функции. Последний можно положить равным нулю

$$\gamma_v = 0 \quad (B)$$

В этом же выражении для первой производной из её определения

$$\alpha_1 = 1 \quad (C)$$

и согласно (1-11C)

$$\gamma_{x_1} = 1 \quad (D)$$

Учитывая это, для первой производной из равенства (4-15C) имеем

$$\gamma_r = -1 \quad (E)$$

Следовательно, результат в (6-2A) согласуется с общим в (W)

Аналогично показывается соответствие результата производной любого порядка общей формуле (V) – (W).

2. Интеграл. Полагая как и в предыдущем случае  $\gamma_v = 0$  и опираясь на формулы (1-11C), (4-18F) для одномерного интеграла легко получить:

$$\gamma_r = 1$$

Интегрирование после преобразований, аналогичных предыдущим, даёт:

$$\int V(b^x) dx = xU(b^x) \quad (F)$$

Это тоже согласуется с (W). Несложно продемонстрировать справедливость формулы и в многомерных случаях.

### §2. Реакция $A_L$ на линейную функцию от логарифмов

Пусть задана линейная функция от набора логарифмов

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}(\ln \bar{x}), \\ \ln \bar{x} &= \{\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_M\} \end{aligned} \quad (6-3A)$$

Пусть множество  $\{\bar{x}\}$ , представимо в виде

$$\{\bar{x}\} = E \quad (B)$$

или

$$\{\bar{x}\} = E_p \quad (B-1)$$

Строим на этой функции, как на начальном листе некоторую СР с набором

$$g_v = 1 \quad (C)$$

$g_x$  подберём так, чтобы выполнялось (B) (или (B-1)).

Будем на эту систему действовать линейным полистовым АП.

$$A_{LQ} \bar{V}(\ln \bar{x}) = \bar{r}(\bar{s}) \quad (D)$$

При этом должны получить систему – результат на базе  $r$  с некоторым набором

$$\bar{g} = \{\bar{g}_r, \bar{g}_s\}$$

В любом другом листе при

$$\bar{x}' = \bar{g}_x * \bar{x}$$

при учёте (3-15) и линейности преобразования и функции, будем иметь

$$\bar{s}' = \bar{g}_s * \bar{s}, \quad (E)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}'(\bar{s}') &= A \bar{V}'(\ln \bar{x}') = A \bar{V}'\left(\ln\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{g}_x'}\right)\right) = A \bar{V}(\ln \bar{x}' - \ln \bar{g}_x) = \\ &= A \bar{V}(\ln \bar{x}') - A \bar{V}(\ln \bar{g}_x) = \bar{r}'(\bar{s}') - A \bar{V}(\ln \bar{g}_x) \end{aligned} \quad (F)$$

Но  $\bar{r}$  это лист системы растяжения. Применим к этой системе формулу (3-15):

$$\bar{r}'(\bar{s}') = \bar{g}_r * \bar{r}\left(\frac{\bar{s}'}{\bar{g}_s}\right) \quad (G)$$

Из (F), (G) получим:

$$\bar{g}_r * \bar{r}\left(\frac{\bar{s}'}{\bar{g}_s}\right) = \bar{r}'(\bar{s}') - A \bar{V}(\ln \bar{g}_x) \quad (H)$$

Здесь, как обычно,

$$\bar{s}' = \bar{g}_s * \bar{s}, \quad \bar{g}_s = w \bar{Y}_s, \quad \bar{g}_r = w \bar{Y}_r, \quad \bar{g}_x = w \bar{Y}_x \quad (I)$$

Последний член в равенствах (F) в силу линейности и функции и преобразования и с учётом его представления в (I) будет:

$$A \bar{V}(\ln \bar{g}_x) = \ln w \cdot A \bar{C}, \quad \bar{C} = const \quad (J)$$

Учитывая условие (B) или (B-1) и то, что константа на E есть E, и используя формулы (5-2B), (5-2A), приведём правую часть к виду:

$$\ln w \cdot A \bar{C} = \ln w \cdot \bar{f}(T_s) * s \bar{\alpha}_r, \quad \bar{\alpha}_r = \frac{\bar{Y}_r}{\gamma_{s_1}} \quad (K)$$

Выразим  $w$  из первых двух равенств системы (I):

$$w = \left(\frac{s_1'}{s_1}\right)^{\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\gamma_{s_1}} \quad (O)$$

Подставляя это в выражения для  $g$  в (H) и учитывая (K),

получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\bar{r}(\bar{s})}{s_1 \bar{\alpha}_r} + \vartheta \ln s_1 \cdot \bar{f}(T_s) = \frac{\bar{r}(\bar{s}')}{s_1 \bar{\alpha}_r} + \vartheta \ln s_1' \cdot \bar{f}(T_s) \quad (P)$$

$\vartheta$  определено в (O). Здесь  $s$  и  $s'$  «относительно» независимы, то есть изменяются независимо в пределах трека с соблюдением условий (I). Поэтому можем в (P) положить :

$$\frac{\bar{r}(\bar{s})}{s_1 \bar{\alpha}_r} + \vartheta \ln s_1 \cdot \bar{f}(T_s) = \bar{C}(T_s) \quad (Q)$$

где  $C$  – некоторая неизвестная функция трека. Отсюда, причислив  $\vartheta$  к функции трека (последняя дана в общем виде и допускает умножение на константу), получим

$$\bar{r}(\bar{s}) = [\ln s_1 \cdot \bar{f}(T_s) + \bar{C}(T_s)] * s_1 \bar{\alpha}_r \quad (R)$$

$\bar{f}(T_s)$  определено в (5-2A).

Если  $\bar{s}$  одномерно, то  $\bar{f}(T_s) = \text{const}$  (S)

Такова реакция линейного полистового преобразования  $A_{LQ}$  на линейную функцию от набора логарифмов независимого переменного, заданного на  $E$ -системе (или на  $E_p$  при поточечном преобразовании A).

Если одномерный результат зависит от одной переменной, то из (R):

$$r(s) = (C + B \ln s) s^{\alpha_r} \quad (T)$$

**Примеры. 1. Производная.** Пусть

$$V(x) = D \ln x, \quad D = \text{const} \quad (6-4A)$$

$$AV(x) = \frac{d}{dx} V(x) \quad (B)$$

Как было показано в главе 4, §6, п.2, производная – это  $A_{LQ}$ . Кроме того, производная – это поточечное преобразование, то есть  $A_{LQ}$ , поэтому для интервала её задания достаточно требования (6-3, В-1)

$$\{\bar{x}\} = E_p \quad (C)$$

которое всегда осуществимо при задании независимой переменной на любом конечном отрезке, то есть на таком, на котором и определена производная.

Положим

$$\gamma_v = 0, \quad \gamma_x = 1 \quad (D)$$

Из (4-15С)

$$\gamma_r = -1 \quad (E)$$

Формула (6-3Т) для одномерного случая с учётом того, что результат тоже зависит от  $x$ , то есть

$$x = s, \quad \gamma_x = \gamma_s = 1 \quad (F)$$

будет

$$r(x) = (C + B \ln x)x^{-1} \quad (G)$$

Прямым взятием производной

$$r(x) = \frac{D}{x} \quad (H)$$

Это соответствует формуле (G) при

$$B = 0, \quad C = D$$

## 2. Неопределённый интеграл без аддитивной постоянной.

Положим

$$V(x) = D \ln x, \quad D = const \quad (6-5A)$$

$$AV = \int V(x) dx \quad (B)$$

Согласно выводам главы 4, §6, п.3 – это  $A_{LQ}$ . Неопределённый интеграл кроме того – есть  $A_T$ , поэтому условия (6-3, В-1) для него выполняются автоматически.

Положив

$$\gamma_v = 0, \quad \gamma_x = 1$$

Из (4-18 F)

$$\gamma_r = 1$$

И одномерная формула (6-3 T) даёт:

$$r(x) = (C + B \ln x)x, \quad C, B = \text{const}$$

При интегрировании

$$r(x) = Dx(\ln x - 1) \quad (C)$$

то есть совпадение при

$$B = -C = D$$

### 3. Определённый интеграл.

$$V = D \ln x, \quad D = \text{const}$$

$$AV = \int_{s_1}^{s_2} V dx = F(s_2) - F(s_1) \quad (6-6)$$

Формально определённый интеграл не есть  $A_r$ , поэтому потребуем выполнения условия (6-3, B).

Для создания системы растяжения примем

$$\gamma_v = 0, \quad \gamma_x = \gamma_{s_1} = \gamma_{s_2} = 1$$

Из (4-19E)

$$\gamma_r = 1$$

Возьмём  $s_1$  за определяющую координату результата.

Из определения

$$\alpha_r = \frac{\gamma_r}{\gamma_{s_1}} = 1$$

Теперь формула (6-3, R) даёт:

$$r(\bar{s}) = \left[ f_1 \left( \frac{s_2}{s_1} \right) + f_2 \left( \frac{s_2}{s_1} \right) \ln s_1 \right] s_1$$

При интегрировании, см(6-5С)

$$r(\bar{s}) = D[s_2(\ln s_2 - 1) - s_1(\ln s_1 - 1)] = Ds_1 \left[ f_1 \left( \frac{s_2}{s_1} \right) + \ln s_1 f_2 \left( \frac{s_2}{s_1} \right) \right],$$

$$f_1 = \frac{s_2}{s_1} \left( \ln \frac{s_2}{s_1} - 1 \right) + 1, \quad f_2 = \frac{s_2}{s_1} - 1$$

Что согласуется с прогнозируемым результатом.

**4. Интегральное преобразование.** Пусть

$$V(x) = D \ln x, \quad D = \text{const}$$

$$AV = \int_0^{\infty} \frac{D \ln x}{(x+s)^2} dx = r(s) \quad (6-7, A)$$

Условие (6-3, В) выполняется автоматически на заданном интервале  $x$ . Положим для создания системы растяжения:

$$\gamma_v = 0, \quad \gamma_x = \gamma_s = 1$$

Новый лист результата при этих коэффициентах строим так :

$$r'(s') = \int_0^{\infty} \frac{\ln \frac{x'}{w}}{(x' + s')^2} dx' = \frac{1}{w} r \left( \frac{s'}{w} \right) \quad (B)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что мы строим системы растяжения и результата и подинтегральной функции. Простое штрихование здесь не приводит к созданию систем растяжения и А-преобразования.

Из (B)

$$\gamma_r = -1$$

Из формулы (6-3, T)

$$r(s) = (C + B \ln s) s^{-1}$$

Непосредственное взятие интеграла даёт

$$r(s) = -\frac{D}{s} \ln s$$

Это согласуется с прогнозом при

$$C = 0, \quad B = -D$$

*неразмерная математика*

В двух последующих частях мы получим некоторые результаты, необходимые для дальнейшего изложения, но не относящиеся к математике размерной. Они представляют при этом также и самостоятельный интерес.

**Часть 4**

**РЕАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ЛИНЕЙНЫХ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛИНЕЙНЫЕ  
И СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ**

На множестве значений  $x, t$

$$x, t \in (-\infty, +\infty)$$

рассматривается преобразование  $F(t, x)$  семейства дважды дифференцируемых функций  $V(x)$  в семейство таких же функций  $R(t)$ :

$$F \cdot V(x) = R(t) \quad (1)$$

такое, что

$$F \cdot V(x+a) = R(t+a), \quad (2)$$

$$F \cdot c(V_1(x) + V_2(x)) = c(F \cdot V_1(x) + F \cdot V_2(x)) \quad (3)$$

$a, c$  – произвольные константы.

Такое преобразование здесь будет называться линейным сдвиговым. Всё сказанное далее справедливо и для случая, когда  $x$  и  $t$  совпадают, то есть преобразование зависит только от одной координаты, например, дифференцирование.

**Теорема.** При действии на показательную, синусоидальную и линейную функции линейное сдвиговое преобразование создаёт соответственно аналогичные функции, то есть

$$F \cdot e^{kx} = B e^{kt} \quad (4)$$

$$F \sin(\omega \cdot x + \gamma) = D \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad (5)$$

$$F \cdot (x+c) = Ht + K \quad (6)$$

Константы левых частей  $k, c, a, \gamma$  – произвольны, константы правых частей  $B, D, \delta, H, K$  определяются из уравнения (1).

Схема доказательства. Конструируется уравнение, для которого нетрудно доказать, что если  $V(x)$  есть решение этого уравнения, когда оно записано в терминах  $V, x$ , то и  $R(t)$  тоже его решение, если записать это уравнение в терминах  $R, t$ . Общее решение этого уравнения будет одновременно и исходной функцией результатом. Оно может содержать и собственные функции преобразования  $F$ , однако произвол общего решения допускает и другие функции. Это уравнение будем называть дополнительным. Общее решение этого специально подобранного уравнения и будет состоять из функций, указанных в (4)– (6).

Доказательство. Дополнительное для данного преобразования  $F$  уравнение сконструировано в такой форме

$$V(x) + V(x+a) - f(b,a) V(x+ba) = 0 \quad (7)$$

Здесь  $V(x)$  – дважды дифференцируемая функция своего аргумента,  $f$  – дважды дифференцируемая по  $a$  функция двух переменных, причем

$$x, a \in (-\infty, +\infty)$$

Множество значений  $b$  следует найти. Дифференцируемость по  $b$  не требуется.

В этом уравнении неизвестны две функции  $V(x)$  и  $f(b,a)$  и множество значений некоторого параметра  $b$ . Возможность однозначного его решения достигается за счёт того, что функция  $V(x)$  участвует в уравнении в трёх состояниях: прямая и дважды сдвинутая по аргументу. Определённость вносит и требование дифференцируемости.

Легко доказать для этого уравнения, что если  $V(x)$  есть решение этого уравнения при некоторой функции  $f(b,a)$  и некотором множестве значений  $b$ , то и

$R(t)$  есть решение этого уравнения, если его записать в терминах  $R_s$ .

Левая часть (7) дважды дифференцируема, как сумма дважды дифференцируемых функций. Применяем преобразование  $F$  к левой и правой части уравнения (7) с учётом свойств (2), (3) данного преобразования, получим

$$R(t) + R(t+a) - f(b,a)R(t+b) = F(0) = 0 \quad (8)$$

Функция  $f$  и преобразование  $F$  заданы на различных переменных, поэтому для преобразования  $F$  функция  $f$  является константой и выносится из под знака  $F$ . Ноль в правой части уравнения, как константа, выносится также из под знака преобразования и из-за дифференцируемости результата (и, следовательно, его ограниченности) даёт в результате ноль.

Таким образом, результат удовлетворяет тому же уравнению, что и исходная функция и, следовательно, преобразование  $F$ , действуя на решения этого уравнения, создаёт те же решения, то есть на решениях уравнения (7) результат действия преобразования  $F$  определён.

Для определения решения уравнения (7) мы будем присоединять к нему его продифференцированную форму (при необходимости дважды) по обоим переменным  $x$  и  $a$  или фиксировать эти переменные при необходимости.

Продифференцируем (7) по  $x$  и по  $a$ :

$$V'(x) + V'(x+a) = f(b,a)V'(x+ba) \quad (9)$$

$$V'(x+a) = f'_a(b,a)V(x+ba) + f(b,a)V'(x+ba)b \quad (10)$$

Вычтем (10) из (9):

$$V'(x) = f(b,a)V'(x+ba)(1-b) - f'_a(b,a)V(x+ba) \quad (11)$$

Из (7) при  $a = 0$

$$f(b,0) = 2 \quad (12)$$

Из последних двух равенств при  $a = 0$

$$V'(x) = 2V'(x)(1-b) - f'_a(b,0)V(x)$$

Отсюда

$$V'(x)(1-2b) = f'_a(b,0)V(x) \quad (13)$$

Таким образом, дифференцируемость функций  $V$  и  $f$  и произвольность  $a$  даёт возможность привести неопределённое уравнение (7) к простому линейному дифференциальному уравнению для определения  $V(x)$

Рассмотрим варианты возможных значений  $b$  и  $f$  в (13).

$$1. \quad b \neq \frac{1}{2}, \quad f'_a(b,0) \neq 0.$$

Из (13)

$$V'(x) = hV(x) \quad (14)$$

$$h = \frac{f'_a(b,0)}{1-2b} \quad (15)$$

Общим решением этого уравнения является функция:

$$V(x) = Ae^{hx} \quad (16)$$

$$A = \text{const}$$

Теперь по найденному виду решения находим функцию  $f$  подставляя его в (4):

$$f(b, a) = \frac{1 + e^{ha}}{e^{hba}} \quad (17)$$

При этом (15) выполняется тождественно. Значит  $h$  – произвольно.

$$2. \quad b = \frac{1}{2}, \quad f'_a(b,0) \neq 0$$

$$\text{Из (13) при любом } f \quad V(x) \equiv 0 \quad (18)$$

$$3. \quad b \neq \frac{1}{2}, \quad f'_a(b, 0) = 0$$

$$\text{Из (13)} \quad V'(x) \equiv 0$$

$$\text{то есть} \quad \begin{aligned} V(x) &= \text{const} \\ f &= f(b) \end{aligned} \quad (19)$$

$$4. \quad b = \frac{1}{2}, \quad f'_a(b, 0) = 0$$

Возьмём вторую производную в (10) по  $a$ . При  $a=0$ , учитывая (12) и условие данного пункта, получим

$$V''(x) = 2f''_a(b, 0)V(x) \quad (20)$$

Рассмотрим варианты:

а)

$$f''_a(b, 0) < 0$$

тогда

$$V = A \sin(\omega x + c) \quad (21)$$

$$\omega = \pm \sqrt{-2f''_a(b, 0)} \quad (22)$$

$A, c$  - произвольны

Теперь из (7)

$$f(b, a) = 2 \cos \frac{\omega \cdot a}{2} \quad (23)$$

Соотношение (12) и условия данного пункта при этом удовлетворены. Найдя вторую производную отсюда и подставив ее в уравнение (22), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно. Значит  $\omega$  - произвольно.

$$б) \quad f''_a(b, 0) = 0$$

Из (20)

$$V = Ax + B \quad (24)$$

При этом

$$f(b, a) = 2$$

в)

Решением (20) будет

$$f_a''(b,0) > 0$$

$$V = e^{kx+c}$$

$$k = \pm \sqrt{2f_a''(b,0)} \quad (25)$$

Из (7)

$$f(a,b) = \frac{1 + e^{ka}}{e^{kba}} \quad (26)$$

Легко проверить, что уравнения (25), (26) тождественно совместимы, следовательно,

$$k - \text{любое} \quad (27)$$

Решение (25) имеет тот же вид, что и (16) только при другом значении  $b$ . Эти два решения можно объединить в одну группу.

Итоговая таблица. Все решения уравнения (7) делятся на три группы:

1. Показательная

$$V(x) = Ae^{hx} \quad , \quad f(b,a) = \frac{1 + e^{ha}}{e^{hba}} \quad , \quad b - \text{любое}$$

2. Синусоидальная

$$V(x) = A \sin(ax + c) \quad , \quad f(b,a) = 2 \cos \frac{\omega \cdot a}{2} \quad , \quad b = \frac{1}{2}$$

3. Линейная

$$V(x) = Ax + B \quad , \quad f(b,a) = 2 \quad , \quad b = \frac{1}{2}$$

Итак, пусть преобразование  $F$  действует на функцию, которая удовлетворяет уравнению (7). Вид этой функции сразу определяется из системы (7), (13) и дан в итоговой таблице. Из (7) определяется же и вид функции  $f$  и значения  $b$ .

Далее мы знаем, что результат действия преобразования на данную функцию тоже удовлетворяет уравнению (7), но теперь уже при заданных  $f, b$ . Этот результат определится из уравнения (13), дающего однозначное распределение по трём группам итоговой таблицы и он непременно попадёт в ту же группу в которой находится исходная функция. Записав это в (1) и сократив затем константы с учётом линейности преобразования, получим те формулы, которые требовалось доказать

**Примеры линейных сдвиговых преобразований.**

1. Производная любого порядка, как известно, линейное и сдвиговое преобразование и для неё веры все полученные результаты.
2. Интегральные преобразования типа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x) f(x-t) dt = R(t)$$

Замена  $V(x) \rightarrow V(x+a)$  дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x+a) f(x+a-t-a) d(x+a) = \int_{-\infty}^{\infty} V(s) f(s-t-a) ds = R(t+a)$$

сдвиговость обеспечена. Линейность очевидна.

Согласно нашей теории верны формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{kx} f(x-t) dx = A e^{kt},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin ax f(x-t) dx = A \sin(\omega t + \delta),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x + C) f(x - t) dx = Ax + B$$

(где  $A, B$  - константы, определяемые конкретно – заданной функцией  $f$ )

**при любой функции  $f$ , при которой интеграл определён, хотя бы в смысле главного значения.**

Эти формулы легко могут быть доказаны и без нашей теории. Достаточно проинтегрировать это, сделав замену

$$u = x - t$$

Например, для первой формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{kx} f(x - t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k(u+t)} f(u) du = e^{kt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ku} f(u) du = Ae^{kt}$$

$$A = \text{const}$$

Аналогично и для остальных.

То же и для периодических функций  $V$  и  $f$  с длиной волны  $L$

$$\int_0^L V(t) f(t - x) dt,$$

При замене  $V(t) \rightarrow V(t + a)$  сдвиговость не трудно доказать аналогично предыдущему случаю при учёте периодичности  $V$  и  $f$ .

Неопределённый интеграл не однозначная и не сдвиговая функция. Например, при  $V(x) = x$  и аддитивной постоянной равной нулю

$$\int (x + a) dx = \frac{x^2}{2} + ax \neq \frac{(x + a)^2}{2}$$

## Часть 5

неразмерная математика

ОТНОШЕНИЕ СЛАГАЕМЫХ СТЕПЕННОГО  
ДВУЧЛЕНА ПРИ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ**Теорема.** Минимум степенного двучлена

$$P = Aa^m + Ba^k = J_1 + J_2 \quad (1)$$

$$A, B, a > 0 \quad , \quad m \cdot k < 0$$

в вещественной области только один и при значениях  $a = a_{кр}$ , дающих  $\min P = P_{кр}$ , отношение слагаемых определяется соотношением

$$\frac{J_{1кр}}{J_{2кр}} = -\frac{k}{m} \quad (2)$$

и не зависит ни от  $A$  ни от  $B$ .Действительно,

$$\frac{\partial P}{\partial a} = mAa^{m-1} + kB a^{k-1} = mAa^{m-1} \left(1 + \frac{Bk}{Am} a^{k-m}\right) = 0$$

В силу условий (21)

$$mAa^{m-1} \neq 0$$

следовательно,

$$1 + \frac{Bk}{Am} a^{k-m} = 0$$

Отсюда,

$$a_{кр} = \left(-\frac{Am}{Bk}\right)^{\frac{1}{k-m}} \quad (3)$$

Учитывая неравенства в (1), выражение в скобках в этой формуле больше нуля, то есть формула имеет смысл при любом показателе степени.

Подставляя (3) в (1), получим

$$P_{кр} = B \left(-\frac{Am}{Bk}\right)^{\frac{k}{m-k}} \left(\frac{m-k}{m}\right) \quad (4)$$

При  $a \rightarrow +0$  или  $a \rightarrow \infty$  из (1):

$$P \rightarrow \infty$$

Из этого следует, что минимум единственный.

Найдем теперь отношение слагаемых в (1) при  $a = a_{кр}$  из (3):

$$\frac{J_{1кр}}{J_{2кр}} = \frac{Aa_{кр}^m}{Ba_{кр}^k} = -\frac{k}{m}$$

Теорема доказана.

Это важный и нужный нам результат. Размерная формула на луче обращается в степенную функцию. При совмещении двух величин и поиске их минимальной суммы этот результат может быть использован.

## Часть 6

приложения А-преобразования  
в теории упругости

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛИННЫХ СТЕРЖНЕЙ,  
СКРЕПЛЕННЫХ С ЛИНЕЙНЫМИ  
АП-ОСНОВАНИЯМИ

Под действием продольной силы, направленной вдоль оси длинного, схематически бесконечно-длинного стержня, скрепленного с однородным основанием, происходит выпучивание стержня, который увлекает за собой основание, деформируя его (рис. 1). Основание оказывает сопротивление деформации. Мы будем считать, что реакция основания на прогиб, его сопротивление, описывается линейным А-преобразованием. Полезность этого исследования доказывается тем фактом, что в двух известных автору публикациях по устойчивости стержней <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, основания описываются линейными АП, и это дает нам моральное право рассмотреть класс задач с такими основаниями.

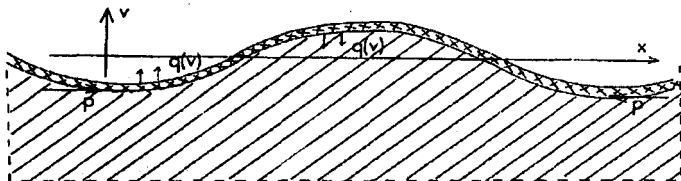


Рис. 1

Реакция основания на прогиб выражается в виде некоторого преобразования над прогибом на его границе. Принадлежность этого преобразования к АП определяется по формулам (3-14), (3-15), (4-8), (4-9) части 3, в которых испытуемой функцией является прогиб на границе. Сначала задается прогиб на границе

$v(x)$  и к нему применяется преобразование  $F(x,t)$  определяющее вид реакции основания  $q(t)$  в самом общем виде.

$$F(x,t)v(x) = q(t), \quad (1)$$

Затем производится растяжение профиля прогиба вместе с областью задания переменных  $x, t$

$$v_1(x_1) = v\left(\frac{x}{a}\right), \quad x_1 = ax, \quad t_1 = at$$

и к этому растянутому профилю применяется то же самое преобразование, заданное теперь на растянутых интервалах

$$F(x_1, t_1) \cdot v_1(x_1) = q_1(t_1) \quad (2)$$

Если для реакции получим

$$q_1(t_1) = a^s q\left(\frac{t_1}{a}\right) \quad (3)$$

то будем говорить, что испытываемое преобразование – есть А-преобразование. Показатель степени  $s$  будем называть коэффициентом степенности А-преобразования.

(Для укорочения записи для одномерного случая произведена замена

$$\gamma_r = s$$

в вышеназванных формулах части 3)

В простейшем случае и преобразование и прогиб и реакция могут зависеть только от одного переменного.

Для основания Винклера (1) реакция основания определяется по формуле:

$$q(x) = Cv(x) \quad (4)$$

$v$  – смещение на границе, прогиб стержня

Очевидно, растяжение смещения  $v$  приводит к растяжению реакции без привлечения какого либо коэффициента. Поэтому, для такого основания

$$s = 0 \quad (5)$$

Для упругих тел из самых общих уравнений упругого равновесия легко получить, что при равномерном растяжении тела во все стороны вместе с заданными на границе смещениями, напряжения, полученного таким образом подобного тела, будут определяться преобразованием  $A$  при

$$s = -1 \quad (6)$$

Об этом в самом общем виде сказано в части 3, формулы (4-21-D,E,F) при  $\gamma = 0$ .

Опубликованная задача на полуплоскости <sup>(2)</sup> имеет АП - основание с этим самым индексом растяжения.

Из условия равновесия моментов в сечении стержня, после двукратного дифференцирования, получаем известное из справочной литературы уравнение изогнутой оси стержня

$$EIv^{(4)}(x) + Pv''(x) - q(x) = 0 \quad (7)$$

(4) в показателе в первом слагаемом – номер производной,  $v$  - прогиб стержня, смещение его осевой линии вдоль оси  $OY$ ,  $EI$  - изгибная жесткость стержня, константа,  $P$  - продольная сила, неизменная вдоль стержня в момент выпучивания, минимальное значение которой мы будем искать,

$q(x) = q(v(x))$  - реакция основания на границе со стержнем. Это сила, сопротивляющаяся прогибу. Она, по условию, определяется линейным  $A$ -преобразованием.

Для неограниченных стержней, чтобы обеспечить конечное, а не нулевое значение производных смещения в (7) при выпучивании, когда они малы по сравнению со смещением

(которое мало по сравнению с длиной стержня), учитывая однородность основания и стержня, разумно искать решение среди периодических функций.

Более того, можно показать, что затухающих на бесконечности решений уравнение (7) не имеет. Мы не будем здесь на этом останавливаться.

По условию, реакция основания  $q(v)$  - линейная функция своего аргумента  $v$ . Более того, она очевидно и сдвиговая. Неограниченность стержня и однородность основания позволяют утверждать это, то есть

$$q(v(x + a)) = q(x + a) \quad (8)$$

Очевидно, сдвиг смещений и сдвиг напряжений будут равны. Будем искать решение (7) в форме:

$$v(x) = C \sin \frac{x}{a} \quad (9)$$

$C$  - произвольная константа,

$a$  - коэффициент растяжения, пропорциональный длине волны.

В силу свойства линейности и сдвиговости применима формула (5) части 4, согласно которой в результате действия на синусоидальную функцию преобразование с заданными выше свойствами порождает синусоидальную функцию. Кроме того, это преобразование есть АП. Учитывая эти два свойства заданного преобразования, можно писать:

$$q\left(C \sin \frac{x}{a}\right) = -Aa^s \sin \frac{x}{a} \quad (10)$$

$s$  - индекс растяжения преобразования, порождающего функцию  $q$ .

Поскольку  $q$  - сила сопротивления прогибу, то взят знак минус, в предположении, что  $A > 0$ .

Подставляем (9) в (7):

$$\left(\frac{EI}{a^4} - \frac{P}{a^2} + Aa^s\right) \sin \frac{x}{a} \equiv 0 \quad (11)$$

Полагая здесь первый сомножитель в скобках нулю, будем иметь выражение для определения продольной силы

$$P = \frac{EI}{a^2} + Aa^{s+2} \quad (12)$$

Нас интересует минимальное значение этой силы.

Конечное минимальное значение возможно только при

$$s > -2 \quad (13)$$

и определяется по условию:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0 \quad (14)$$

Используя его, получаем уравнение

$$\frac{-2EI}{a^3} + A(s+2)a^{s+1} = 0 \quad (15)$$

Отсюда

$$a_{кр} = \left(\frac{2EI}{A(s+2)}\right)^{\frac{1}{s+4}} \quad (16)$$

Из (9) критическая длина волны:

$$\lambda_{кр} = 2\pi a_{кр} \quad (17)$$

Из (12)

$$P_{кр} = A \left(\frac{2EI}{A(s+2)}\right)^{\frac{s+2}{s+4}} \left(\frac{s+4}{2}\right) \quad (18)$$

$A$  - константа основания.

Проблема решена для всего класса задач в самом общем виде. Две опубликованные задачи в цитированной литературе есть частные случаи нашей общей задачи и их решения определяются из этого подстановкой соответствующего коэффициента степенности (5) или (6).

Этот пример показывает, что коэффициент степенности растяжения  $A$ -преобразования входит в решение наряду с физическими константами.

Более того, можно еще обострить вопрос. Можно привести пример проблемы, решение которой определяется только этим коэффициентом и не зависит от физических констант. Об этом в следующей части.

Здесь же следует добавить, что существует и третья задача, кроме цитированных, об устойчивости длинного стержня на упругом основании. Это дипломная работа автора, выполненная им в Институте Механики СО АН СССР в 1965 г.

Условия скрепления стержня и основания ( жесткое скрепление без проскальзывания) отличаются от условий в цитированной задаче Ржаницына А.П., в которой допускается проскальзывание, поэтому отличаются и результаты – критические параметры, тем не менее, результаты обеих задач «вписываются» в обобщающие формулы и выводы как этой части, так и следующей, что подтверждает справедливость и универсальность этих формул и выводов.

#### Цитированная литература:

1. Вольмир А.А. Устойчивость упругих систем. Издательство физ-мат. Литературы, Москва, 1963г.
2. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. Издательство техн.-теор. лит., Москва, 1955г.

## Часть 7

*приложения АП в теории упругости*  
**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ МЕЖДУ СТЕРЖНЕМ И  
 ОСНОВАНИЕМ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ.**

Приведем уравнение равновесия стержня ((7), часть 6) к энергетической форме. Для этого домножим его на прогиб  $v(x)$  и проинтегрируем его по частям на длине волны  $\lambda$ , имея в виду периодичность и симметрию этого прогиба, приводящие к равенствам :

$$v(0) = v(\lambda), \quad v'(0) = v'(\lambda) = 0, \quad v''(0) = v''(\lambda). \quad (1)$$

После интегрирования по частям, получим:

$$EI \int_0^{\lambda} v''^2 dx - P \int_0^{\lambda} v'^2 dx - \int_0^{\lambda} q(x)v(x) dx = J_1 + J_2 + J_3 = 0 \quad (2)$$

В силу линейности  $q$  по  $v$  последнее слагаемое - это удвоенная работа силы реакции  $W$  при перемещении на расстояние, равное прогибу

$$W(q) = \frac{1}{2} J_3 \quad (3)$$

Здесь знак плюс, так как реакция  $q$  противоположна прогибу.

Далее, элемент длины изогнутого стержня

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1 + v'^2)$$

то есть

$$dl = dx\sqrt{1 + v'^2} \cong dx\left(1 + \frac{1}{2}v'^2\right)$$

Приращение элемента длины

$$dl - dx = \frac{1}{2} dxv'^2$$

Приращение на всей длине волны

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^\lambda v'^2 dx$$

Продольная сила, которая в первом приближении не изменяется при малых прогибах, совершает работу

$$W(P) = P\Delta l = \frac{1}{2} P \int_0^\lambda v'^2(x) dx$$

то есть

$$W(P) = -\frac{1}{2} J_2 \quad (4)$$

Далее, элемент энергии изогнутого стержня

$$dW(EI) = \frac{1}{2} M d\varphi$$

$M$  - момент в сечении,

$\varphi$  - угол поворота сечения стержня. Из геометрии сечения:

$$d\varphi = dv' = v'' dx$$

Момент  $M$  пропорционален изгибу стержня

$$M = EIv''$$

Из трех последних равенств

$$dW(EI) = \frac{1}{2} EIv''^2 dx$$

Интегрируем это

$$W(EI) = \frac{1}{2} EI \int_0^{\lambda} v'^2 dx$$

То есть

$$J_1 = 2W(EI) \quad (5)$$

Теперь, на основании результатов в (3), (4), (5) уравнение (2) представляется балансом энергии

$$W(P) = W(EI) + W(q) \quad (6)$$

Растянем теперь профиль  $v$  в  $a$  раз, то есть в (2) сделаем замену

$$v_1 = v\left(\frac{x}{a}\right)$$

При этом реакция АП основания станет

$$q_1 = a^s q\left(\frac{x}{a}\right)$$

а длина волны

$$\lambda_1 = a\lambda$$

Подставив эти выражения в (2) после замены

$$x = at$$

получим:

$$P = \frac{1}{a^2} \frac{EI \int_0^{\lambda} v'^2(t) dt}{D} + a^{s+2} \frac{- \int_0^{\lambda} q(t)v(t) dt}{D}$$

$$D = \int_0^{\lambda} v'^2(t) dt$$

то есть при заданном профиле  $v(t)$  продольная сила  $P$  представляет собой степенной двучлен по растяжению  $a$  с постоянными коэффициентами, не зависящими от  $a$ :

$$P = \frac{A}{a^2} + Ba^{s+2} \quad (7)$$

На минимуме этой силы, согласно теоремы части 5 «неразмерная математика», отношение слагаемых зависит только от показателей степеней при  $a$  этого двучлена и не зависит от его коэффициентов и равно

$$\frac{W(EI)_{кр}}{W(q)_{кр}} = \frac{s+2}{2} \quad (8)$$

Для основания Винклера  $s = 0$  (см. часть 6) энергия стержня равна энергии основания, для упругой полуплоскости  $s = -1$  энергия стержня в два раза меньше энергии основания, что легко проверить по имеющимся публикациям, указанным в цитированной литературе в части 6

Таким образом, отношение энергий стержня и основания, подсчитанных на длине волны при критических параметрах не зависит от констант упругости ни стержня, ни основания, а зависит только от коэффициента степенности АП, и, таким образом, без введения этого индекса, как параметра А-преобразования, эта проблема не могла бы быть решена в общем виде.

## НЕМАСШТАБНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

ЗДЕСЬ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РАЗМЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИССЛЕДУЮТСЯ НЕМАСШТАБНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ.  
ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

## Часть 8

**Введение.** Гидродинамика, изучаемая здесь, предназначена для построения эфирной модели Мироздания. Эта тема излагается в нашем журнале “Эфирная Физика и Размерная Математика”.

Согласно этой модели, Мир неограничен и заполнен реальной жидкостью – эфиром. Элементарная частица – это течение эфира во всём пространстве, имеющее сингулярный центр внутри себя – точку, в которой скорость течения неограничена. Этот центр и обозначает месторасположение частицы.

Как видим, частица не имеет размеров: она простирается на всё пространство, а её центр – это точка, не имеющая размеров. Такие течения мы будем называть **немасштабными**.

Здесь изучено семейство немасштабных решений уравнений гидродинамики, изучено действие гидродинамических сил на центры этих течений, когда присутствует в пространстве несколько таких течений, изучена возможность их суперпозиции, то есть сложения их скоростей.

Для чего это нужно знать математику, не желающему вникать в проблемы Мироздания ?

На примере решения рассматриваемых проблем отрабатывается, развивается новый математический метод:

**приведение решения любой масштабной проблемы к суперпозиции немасштабных с последующим использованием метода размерной математики, позволяющего максимально исследовать все возможные варианты решения и способы расчленения исходных уравнений для получения этих форм решений.**

Немасштабные задачи упрощают проблему решения. Так, в предлагаемой здесь гидродинамике, задача, поставленная в частных производных, приводится к уравнениям в простых производных, что безусловно упрощает её решение.

По нашему мнению Мир создан из немасштабных элементов и их суперпозиции, совмещения. И, если это верно, гипотеза совмещения немасштабных решений для решения масштабных проблем должна подтверждаться повсеместно. Так и оказалось:

*Здесь показано, что все известные аналитические решения задач обтекания – есть суперпозиция немасштабных решений.*

## ГЛАВА 1

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА

#### § 1. Общий вид.

Система уравнений Навье – Стокса (1) при постоянной плотности и температуре для установившихся по времени (стационарных) течений в векторной форме имеет вид:

$$(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} = -\nabla\hat{P} + \nu\nabla^2\bar{V} \quad \text{а}$$

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{б}$$

$\bar{V}$  - вектор скорости,  $[V] = \text{смсек}^{-1}$ ,  $\bar{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$ ,

$\hat{P}$  - приведённое к постоянной плотности давление  $\hat{P} = \frac{P}{\rho}$ ,

$$[\hat{P}] = \text{см}^2 \text{сек}^{-2}$$

$\rho$  - плотность эфира,  $[\rho] = \text{гсм}^{-3}$

$\nu$  - кинематическая вязкость,  $[\nu] = \text{см}^2 \text{сек}^{-1}$

$\nabla$  - символ вектора градиента,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ .

Здесь независимыми величинами являются пространственные координаты и вязкость, зависимыми, результирующими – скорость и приведенное давление.

Развёрнутая запись этой системы в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}
 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right\}, \\
 V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right\}, \quad (1-2) \\
 V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right\}, \\
 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}$$

Эта же система в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  (вывод наш):

$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \{V_r, V_\theta, V_\varphi\} \\
 \frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \frac{V_\theta}{r} + \frac{V_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{V_\varphi^2}{r} &= \\
 = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} - \nu \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left[ \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \right] - \right.
 \end{aligned}$$

$$-\sin\theta \left. \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (rV_\varphi)}{\partial r \partial \varphi} \right\};$$

$$\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} V_r + \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial \theta} \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial \varphi} \frac{V_\varphi}{r \sin \theta}$$

$$-\frac{V_\varphi^2 \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + v \left\{ -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \sin \theta \right) - \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(r \sin \theta \cdot V_\varphi)}{\partial r} V_r + \frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} V_\varphi \right) = -$$

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} - \frac{v}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \right] \right\};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

и в цилиндрических  $r, \varphi, z$ :  $\bar{V} = \{V_r, V_\varphi, V_z\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_r}{r \partial \varphi} V_\varphi - \frac{V_\varphi^2}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{2 \partial V_\varphi}{r^2 \partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_r V_\varphi}{r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{V_\varphi}{r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{P}}{r \partial \varphi} + \\ + \nu \left[ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} + \frac{2 \partial V_r}{r^2 \partial \varphi} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_z}{r \partial \varphi} V_\varphi + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right\};$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Эта система сложна и малодоступна. Современной математике удалось получить всего несколько простейших ее решений, имитирующих простые задачи обтекания. В (1) на стр. 529 - 531 приведены эти решения: это течения в трубе и плоском канале (параболические течения Пуазейля) и течение между параллельными

движущимися пластинами (линейное течение Куэтта). Опубликовано также течение жидкости между коаксиальными цилиндрами, один из которых вращается вокруг их общей оси - аналог течения Куэтта в осесимметричном исполнении.

Все эти примеры здесь будут рассматриваться, и кроме этих мы приведем свои примеры обтекания: течение между непараллельными пластинами, обтекание неподвижной точки, обтекание обруча, течение между коаксиальными цилиндрами, один из которых не только вращается, но и движется вдоль их общей оси.

Граничные условия - условия прилипания жидкости к границе тела

$$\bar{V}(\gamma) = \bar{V}|_{\gamma} \quad (1-5)$$

( $\gamma$ -граница тела – поверхность), а также скорость потока на бесконечности

$$\bar{V}_{\infty} = const \quad (1-6)$$

Однако, не задачи обтекания нас будут интересовать в первую очередь. Нас будут интересовать течения в областях, не имеющих масштаба длины: в неограниченных областях, возможно, имеющих точку, в которой скорость неопределена и неограничена. Мы будем искать возможность классифицировать эти течения и каким – то образом комбинировать, ища совместимые решения по скоростям, то есть допускающие суммирование скоростей. Затем суперпозицией таких течений мы будем пытаться получать решения задач обтекания.

## § 2. Обратимые и диссипативные течения.

Уравнения (1-1) описывают необратимые процессы в общем случае. (Мы не указываем номер части, если цитируемое уравнение не выходит за пределы части.) Необратимость связана с последним членом  $\nu \cdot \nabla^2 \bar{V}$ , поскольку при инверсии времени  $t \rightarrow -t$  (а для стационарных течений это обозначает  $\bar{V} \rightarrow -\bar{V}$ , так как  $V = \frac{\partial S}{\partial t}$ )

только этот член меняет знак. Эту необратимость можно объяснить только переходом части механической энергии в тепловую, то есть диссипацией энергии. Но если этот последний член обращается в

ноль, то есть

$$\nabla^2 \bar{V} = 0 \quad (1-7)$$

( $\nu \neq 0$ , так как рассматривается реальная жидкость), то это течение будет обратимым. Возникает вопрос: будет ли оно недиссипативным? Напрашивается ответ: обратимые процессы недиссипативны, необратимые диссипативны.

Четкого разбора этого вопроса в литературе найти не удалось. Однако для нас этот вопрос будет важным.

Математическое выражение обратимости течения - условие (1-7). Выпишем теперь математическое описание диссипативности. Согласно (1) стр. 524, диссипация энергии (переход части механической энергии в тепловую) определяется мощностью “вязких” напряжений, выделяемой при деформации элемента жидкости. Она обозначается буквой  $D$  и называется диссипативной функцией.

Эта функция для нашего случая, согласно (12.21) из (1), имеет вид

$$D = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \quad (1-8)$$

$$i, k = 1, 2, 3, \quad \eta = \nu \rho.$$

Здесь использована скрытая запись суммирования по повторяющемуся индексу

Тензор напряжений, согласно (12.20) из (1), имеет вид

$$\tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right). \quad (1-9)$$

Последний член  $\nabla^2 \bar{V}$  в (1-1) получен (см. (12. 5) в (1)) дифференцированием  $\tau_{ik}$  по координате с учетом условия (1-1,6)

$$\nabla^2 V_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{ik} = \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \quad (1-10)$$

Теперь, сравнивая записи (1-7) - (1-10). мы видим, что условие обратимости в (1-7) и условие недиссипативности

$$D = 0, \quad (1-11)$$

где  $D$  определяется в (1-8), не идентичны.

Есть проблеск надежды, что с помощью равенства (1-1a) удастся доказать их идентичность, однако можно привести пример, когда это не так.

Пример. Течение Куэтта.

$$V_x = Cy, \quad V_y = V_z = 0, \quad P = P_0$$

Не трудно проверить, что условие (1-7) выполняется, но при этом

$$D = \eta C^2$$

то есть обратимый процесс является диссипативным?

Короткое объяснение этому противоречию простое: диссипативность данного обратимого течения компенсируется работой внешних сил, приложенных к границе рассматриваемого объёма. Если при обращении диссипативного течения изменить и внешние нагрузки, то такое течение может быть обратимым.

Здесь мы будем делить течения на две категории:

обратимые и необратимые.

Обратимые подчиняются условию (1-7) и мы их будем называть недиссипативными с учётом вышесказанной оговорки. Необратимые течения будем называть диссипативными. Они не подчиняются этому условию даже при обращении внешних нагрузок и вязкое трение производит некомпенсирующуюся внешними нагрузками работу.

§3. Масштабные и немасштабные решения.

Теперь поставим вопрос, как решать систему (1-1) в общем случае и в каждом конкретном?

Обычно исследование начинается с того, что система приводится к безразмерному виду. Для этого в описание задачи внедряются некоторые физические константы, имеющие ту же размерность, что и заданные величины. (Не следует думать, что это масштабы измерения. Масштабы исследователь должен задать еще при составлении уравнений для измерения величин. В части 2 сказано, что результат не должен зависеть от масштаба.) Эти константы могут быть, а могут и не быть в описании задачи, на математических процедурах это никак не сказывается. С помощью внедренных констант и эквивалентных преобразований система приводится к безразмерному виду

$$(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}) \cdot \tilde{V} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{R} \tilde{\nabla}^2 \tilde{V}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{V} = 0, \quad (1-12)$$

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{V_0^2}, \quad R = \frac{bV_0}{\nu}, \quad \tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} i + \dots, \quad \tilde{x} = \frac{x}{b}, \dots$$

(символы  $\tilde{\cdot}$ ,  $\wedge$  временно опущены)

Теперь решение ищется в форме

$$\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{r}, R), \quad \tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{r}, R) \quad (1-13)$$

$\tilde{r}$  – радиус-вектор,

$$\tilde{r} = \frac{r}{b}$$

Число  $R$  называется числом Рейнольдса или коэффициентом подобия, так как течения с одинаковыми числами  $R$  описываются одинаковыми приведенными решениями (1-13). Выбрав далее решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, можно считать задачу решенной. Но беда в том, что трудно получить хотя бы какое-то решение, а тем более при заданных граничных условиях.

Решений получено всего несколько.

Этот метод слишком общий, чтобы быть эффективным. Мы будем искать частный метод, пригодный для нас, но не слишком общий. А найдя частные решения будем пытаться строить что-то более общее методом их суперпозиции.

Идея заключается в следующем. Если задача не имеет физического масштаба по какой-то величине, то внедрение произвольного её масштаба в общий вид решения для приведения уравнений к безразмерному виду приведёт к тому, что в полученное решение масштаб не войдет, он попутно где-либо сократится. Такое решение мы будем называть немасштабным

Изначально, до приведения уравнения к безразмерному виду, мы строим общий вид решения согласно нашей размерной формулы (часть 2). И если задача не имела физического масштаба по какой-то величине, то он не войдёт и в общий вид решения, упрощая этим его конструкцию. Если же масштаб имеется, то он обязан быть включён в размерную формулу общего вида решения. Затем этот общий вид решения подставляется в начальные уравнения. Поскольку эти уравнения есть равенства между величинами одинаковых размерностей, то размерности сократятся и мы в конечном итоге приходим к неразмерным уравнениям и нет надобности приводить эти уравнения к безразмерному виду изначально. Более того наш метод позволяет произвести предварительный анализ уравнений на предмет, в каком варианте эти уравнения могут допустить нужную нам форму решения, подсказываемую размерной формулой, что невозможно сделать, предварительно приведя уравнения к безразмерному виду.

Конструкция масштабного и немасштабного решений принципиально различны: первое содержит несокращаемый физический масштаб, второе содержит этот масштаб в сокращаемом виде – в ядре размерной формулы (20, часть 2) одноимённые величины в числителе и знаменателе можно одновременно разделить на одну и ту же величину.

**Пример.** Решение уравнения

$$V \frac{dV}{dx} + \lambda \frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad (\text{П-1})$$

состоит из двух групп

$$V = \frac{\lambda e^{\frac{x}{b}} - D}{e^{\frac{x}{b}} + D} \quad (\text{П-2})$$

и

$$V = \frac{2\lambda}{x+d} \quad (\text{П-3})$$

$D, d$  – произвольные константы, первая безразмерная, вторая – размерная

.Первая группа – масштабное решение, масштаб –  $b$ .

Вторая группа при  $d = 0$  – немасштабное решение.

Когда  $d \neq 0$ , то функция  $V$  при сдвиге совпадает с немасштабным решением, поэтому всю группу при любом  $d$  можно считать немасштабной

Разделив числитель и знаменатель во второй группе на масштаб  $b$  можно искусственно “превратить” её в масштабную, однако масштаб этот сокращается.

Это различные по конструкции группы. Они не переходят друг в друга при каких-то конкретных или предельных значениях произвольных констант.

Здесь мы изучаем немасштабные решения уравнений гидродинамики и показываем, что все полученные ранее общеизвестные решения и все полученные здесь – есть суперпозиция немасштабных решений

§ 4. Общий вид решений, соответствующий размерной формуле.

Теперь дадим конкретное выражение искомых функций  $V, P$  в уравнениях (1-1) через независимые переменные, согласующееся с размерной формулой.

В общем случае эти уравнения содержат две зависимые величины  $V$  и  $P$ , четыре независимых,  $x, y, z, v$ , а так же некоторый, внедряемый извне, масштаб  $b$ . Их размерности:

$$[V] = \frac{см}{сек}, [P] = \frac{см^2}{сек^2}, [v] = \frac{см^2}{сек} \quad (1-14)$$

$$[x] = [y] = [z] = [b] = см.$$

Независимые величины  $x, y, z$  и  $b$  - одноименны. Они могут образовать своими отношениями безразмерные величины, поэтому они образуют ядро размерной формулы (20) части 2. Константы  $v$  и  $b$  разноименны, их отношения не попадают в ядро и могут образовать только степенной множитель формулы, "хвост".

Масштаб у любой величины может быть произвольное число. Мы здесь рассматриваемый простейший случай - масштаб один.

Учитывая размерности, получим согласно (20) части 2 в самом общем виде

$$\bar{V} = \frac{v}{b} \bar{G} \left( \frac{x}{b}, \frac{y}{b}, \frac{z}{b} \right) \quad (1-15)$$

$\bar{G}$  - некоторая вектор-функция,  $\bar{G} = \{C, D, B\}$

так что

$$V_x = \frac{v}{b} C \left( \frac{x}{b}, \dots \right), \quad V_y = \frac{v}{b} D \left( \frac{x}{b}, \dots \right), \quad V_z = \frac{v}{b} B \left( \frac{x}{b}, \dots \right),$$

Всевозможные другие варианты, например такой

$$\bar{V} = \frac{\nu}{x} \bar{f} \left( \frac{b}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right)$$

В конечном итоге приводятся к виду (15).

Эквиваленты ли изображения (1-13) и (1-15) ? В последнем напрашивается представление

$$V = \tilde{V} V_0 ,$$

которое приводит его к виду

$$\tilde{V} = \frac{1}{R} \bar{G}(r) ,$$

и запись эта отличается от (1-13) большей конкретизацией. Здесь нет противоречия, так как функция  $G$  дана в самом общем виде. Она может содержать произвольные неразмерные константы, появившиеся, например, при интегрировании.

Выражение типа (1-15) учитывающее размерности, можем написать и для  $\hat{P}$ :

$$\hat{P} = \frac{\nu^2}{b^2} Q \left( \frac{x}{b}, \frac{y}{b}, \frac{z}{b} \right) \quad (1-16)$$

Теперь рассмотрим немасштабные решения. Если масштаб длины отсутствует, то ядро размерной формулы могут образовать только одноименные величины  $x, y, z$ , размерный множитель-константа  $\nu$  и любая из координат. Тогда будет

$$\bar{V} = \frac{\nu}{x} \bar{G} \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right), \quad \bar{G} = \{C, D, B\} \quad (1-17)$$

$$\text{(т.е. } V_x = \frac{\nu}{x} C(\dots), \dots)$$

$$\hat{P} = \frac{\nu^2}{x^2} \cdot Q \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right).$$

Можно поменять местами координаты, но от этого общий вид не изменится.

**§5. Проникновение посторонней размерной константы в решение.**

Формулы для общего вида решения, данные в предыдущем параграфе образованы по имеющимся в системе переменным величинам и константам. Но может возникнуть предположение, что решение содержит какую-то константу (имеется в виду размерная константа), отсутствующую в системе уравнений. Когда же мы подставим это решение в уравнение, то она сократится.

Такой вариант возможен.

Согласно размерной формулы решение состоит из ядра, которое представляет из себя функцию от отношения одноимённых величин и степенного размерного множителя. В ядро посторонняя размерная константа попасть не может, так как там для этого должна присутствовать ещё одна размерная величина, чтобы они в паре образовали неразмерное число. Но в ядре свободных размерных величин нет. Следовательно, она может быть только сомножителем в степенном множителе формулы.

В масштабном случае (1-15) степенной сомножитель имеет размерность скорости. Домножение его на размерную константу возможно с изменением степеней остальных членов сомножителя так, чтобы в конечном итоге образовалась попрежнему размерность скорости. Однако никаких существенных изменений ни в конструкцию решения ни в структуру уравнений это не внесет.

Интерес может представить только немасштабное решение (1-17). Так, для  $V$  можно ожидать представление:

$$\bar{V} = a \cdot x^s \cdot \bar{G} \quad , s - \text{произвольно}, \quad (1-18)$$

$a$  – посторонняя размерная константа.

Тогда для  $\hat{P}$  будем искать выражение такого вида

$$\hat{P} = a^h v^c x^d Q (\dots) \quad (1-18a)$$

Это самая общая форма решения при наличии посторонней константы в немасштабном случае. Подставляя это в (1-1), обнаружим,

что такое представление возможно лишь в том случае, если система (I) представима в форме

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \cdot \bar{V} + \nabla \hat{P}_1 = 0 \quad (a)$$

$$v \cdot \nabla^2 \bar{V} - \nabla \hat{P}_2 = 0 \quad (б)$$

(1-19)

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (в)$$

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{P} \quad (г)$$

При этом

$$\bar{V} = a \cdot x^s \cdot \bar{G} \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right), \quad G = \{C, D, B\} \quad (a)$$

(1-20)

$$\hat{P}_1 = a^2 \cdot x^{2s} \cdot g \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \quad (б)$$

$$\hat{P}_2 = a \cdot vx^{s-1} \cdot f \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \quad (в)$$

Система (1-19) будет для нас иметь важное значение. Она есть частный случай системы (1-1). На системе (1-19) немасштабные решения меняют свою структуру. Мы будем ее называть **разделенной системой**, а систему (1), при необходимости, - **сплошной**.

Итак, немасштабные решения мы будем получать из системы (I-1) и (1-19), представляя их в форме (1-17) или (1-20).

**Примечание.** Здесь и далее запись

$$\bar{V} = L \cdot \bar{G}, \quad \bar{G} = \{C, D, B\}$$

означает

$$V_x = LC, \quad V_y = LD, \quad V_z = LB$$

## Глава 2

### ПЛОСКИЕ НЕМАСШТАБНЫЕ ТЕЧЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**§ I. Общий вид решений.** Здесь будут рассматриваться плоские немасштабные течения на плоскости  $x, y$  или  $x, \varphi$ . В этом случае ядра формул  $\bar{G}$  и  $Q$  в (1-17) зависят от одной переменной  $\frac{y}{x}$  и решения сплошной системы (1-1) будут:

$$\bar{V} = \frac{v}{x} \bar{G}(t), \quad \bar{G} = \{C, D\} \quad (a)$$

(2-1)

$$\hat{P} = \frac{v^2}{x^2} \cdot Q(t), \quad t = \frac{y}{x}, \quad (b)$$

а разделённой (см(1-20))

$$\bar{V} = ax^s \bar{G}(t) \quad (a)$$

(2-2)

$$\hat{P}_1 = a^2 \cdot x^{2s} \cdot g(t) \quad (b)$$

$$\hat{P}_2 = avx^{s-1} f(t) \quad (b)$$

Потребуется еще представление решений в полярной системе  $r, \varphi$ . Нет надобности использовать переходные формулы от одной системы координат к другой. Достаточно записать формулы в полярной системе, опираясь на размерную формулу (20) части 2. Получим аналогичный вид. Для сплошной системы:

$$\bar{V} = \frac{a}{r} \bar{G}(\varphi), \quad \bar{G} = \{C, D\} \quad (a)$$

(2-3)

$$\hat{P} = a^2 r^2 Q(\varphi) \quad (6)$$

Для разделённой:

$$\bar{V} = ar^s \bar{G}(\varphi), \quad \bar{G} = \{C, D\} \quad (a)$$

(2-4)

$$\hat{P}_1 = a^2 r^{2s} g(\varphi) \quad (6)$$

$$\hat{P}_2 = avr^{s-1} f(\varphi) \quad (в)$$

Это общая запись и нет оснований считать, что функции ядер совпадают в полярной и декартовой системах.

Мы будем искать решение, во всей открытой плоскости и считать его аналитическим и однозначным, кроме, возможно, начала координат. Граничных условий не будем ставить никаких, демонстрируя, этим желание нащупать фундаментальную систему решений, которая потом будет использоваться при решении граничных задач и при составлении общего решения.

## § 2. Решение сплошной системы (1-1)

Здесь будет рассматриваться представление решений в полярной системе координат.

Подставляя (2-3) в (1-4) получим, как уже ранее предполагалось, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C'' - D \cdot C' + D^2 + 2Q = 0 \quad a$$

$$Q' - 2C' = 0 \quad б$$

(2-5)

$$D = const \quad в$$

Она сводится к одному уравнению

$$C'' - DC' + 4C + C^2 + D^2 + 2E = 0, \quad (2.6)$$

$$E = const.$$

Удалось найти его решение только при  $D = 0$ . При этом уравнение можно представить так:

$$C'^2 = -\frac{2}{3} \cdot C^3 - 4C^2 - 4EC + L, \quad (2-7)$$

$$E, L = const$$

Найденное решение в форме эллиптической функции подставляем в (2-5) и находим  $Q$ . Чтобы не повторять записи, сразу подставляем это решение в (2-3) согласно примечания о форме записи в конце предыдущей главы. Результат таков: ( $\wp$  - эллиптическая функция Вейерштрасса):

$$V_r = -\frac{v}{r} \cdot (2 + 6\wp(\varphi, g_2, g_3)),$$

$$V_\varphi = 0, \quad (2-8)$$

$$\hat{P} = -v^2 \cdot r^{-2} \cdot \left( \frac{3}{2} g_2 + 2 + 12\wp(\varphi, g_2, g_3) \right) + const$$

Получено решение, зависящее не только от радиуса, но и от угла. Оно может быть использовано для изображения истечения жидкости из клина через центральную щель бесконечно малой ширины (рис.2-1). Двух произвольных констант  $g_2, g_3$  должно быть достаточно, чтобы удовлетворить одно условие прилипания  $V_r = 0$  на сторонах конуса и произвольный расход (Было бы не плохо это условие прилипания в зависимости от значений  $g_2, g_3$  выписать в общем виде).

Далее, если интересоваться течением во всей плоскости в отсутствие клина, то следует наложить условия на  $g_2, g_3$  для выполнения периодичности с периодом  $2\pi$ .

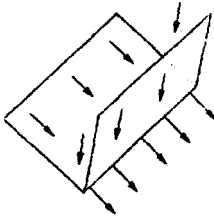


Рис. 2-1

решения при  $D \neq 0$ . Представляют интерес и неперриодические решения. Они могли бы использоваться в приложениях.

Есть надежды получить решение системы (2-5) и при  $D \neq 0$ , т. е. при наличии скорости  $V_\varphi$ . В справочнике (2), (пример 6.23, стр. 574) дано решение уравнения (2-6) при некоторых значениях  $D$ . Возможно эта дискретность  $D$  связана с периодичностью? Чрезвычайно интересно было бы увидеть

### §3. Решение разделенной системы (1-19)

Здесь тоже будет использоваться полярная система координат. Разделенная система (1-19) в полярных координатах легко может быть получена из (1-4). Она такова:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_r}{r \partial \varphi} V_\varphi - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} \quad (\text{а})$$

$$\frac{1}{r} V_r V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} V_\varphi = -\frac{\partial \hat{P}_1}{r \partial \varphi} \quad (\text{б})$$

(2-9)

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{v} \frac{\partial \hat{P}_2}{\partial r} \quad (\text{в})$$

$$\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} + \frac{2 \partial V_r}{r^2 \partial \varphi} = \frac{\partial \hat{P}_2}{v r \partial \varphi} \quad (\text{г})$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} = 0 \quad (\text{д})$$

Подставляя (2-4) в эту систему, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$sC^2 + C'D - D^2 = -2sg \quad (\text{а})$$

$$((s+1) \cdot C + D') \cdot D = -g' \quad (\text{б})$$

$$C'' + (s-1) \cdot (s+1) \cdot C - 2D' = (s-1)f \quad (\text{в})$$

(2-10)

$$D'' + (s-1) \cdot (s+1) \cdot D + 2C' = f' \quad (\text{г})$$

$$(s+1) \cdot C + D' = 0 \quad (\text{д})$$

Эта система разбивается на две: линейную и нелинейную, которые могут решаться независимо. Получив решения линейной системы в общем виде, мы подставляем эти решения в нелинейную и получаем какие-то ограничения на произвольные константы. Не привлекая внимания читателя к этой несложной, но ёмкой работе, дадим сразу решение в форме (2-4):

При  $s \neq 2$  [запись  $\sin(s+1)\varphi$  обозначает  $\sin((s+1)\varphi)$ ]:

$$V_r = ar^s C = ar^s (d_1 \sin(s+1) \cdot \varphi - d_2 \cos(s+1) \cdot \varphi) \quad \text{а}$$

$$V_\varphi = ar^s D = ar^s \cdot (d_1 \cos(s+1) \cdot \varphi + d_2 \sin(s+1) \cdot \varphi + d_3(s)) \quad \text{б}$$

$$d_3(s) = \begin{cases} \text{const} & \text{при } s=1 \\ 0 & \text{при } s \neq 1 \end{cases} \quad (2-11)$$

$$\hat{P}_1 = -a^2 r^{2s} \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2} + \text{const} \quad \text{в}$$

$$\hat{P}_2 = \text{const}, \quad d_1, d_2, d_3 - \text{произвольны} \quad \text{г}$$

При  $s = 2$

$$V_r = ar^2 \left( d_1 \sin 3\varphi - d_2 \cos 3\varphi + \frac{1}{3} d_3 \sin \varphi - \frac{1}{3} d_4 \cos \varphi \right) \quad \text{д}$$

$$V_\varphi = ar^2 (d_1 \cos 3\varphi + d_2 \sin 3\varphi + d_3 \varphi + d_3 \cos \varphi + d_4 \sin \varphi) \quad \text{е}$$

$$\hat{P}_1 = -a^2 r^4 \cdot \frac{1}{2} \left( d_1^2 + d_2^2 - \frac{1}{9} d_3^2 - \frac{1}{9} d_4^2 \right) + const, \quad \text{ж}$$

$$\hat{P}_2 = a v \cdot r \cdot \left( \frac{8}{3} d_3 \sin \varphi - \frac{8}{3} d_4 \cos \varphi \right) + const, \quad \text{з}$$

$a$  - произвольная константа соответствующей данному  $s$  размерности. В этом случае константы  $d_i$  не произвольны. Они удовлетворяют двум уравнениям:

$$3d_1 d_3 + 3d_2 d_4 - d_3^2 - d_4^2 = 0, \quad \text{и}$$

$$-3d_1 d_4 + 3d_2 d_3 - d_3 d_4 = 0, \quad \text{к}$$

Здесь везде  $s$  - произвольно. При целых значениях  $s$  поле скоростей и давлений непрерывно при  $0 < r < \infty$ . При нецелых значениях результирующие функции терпят разрыв вдоль луча  $\varphi = const$ . Однако при остальных значениях  $\varphi$  эти решения непрерывны и могут где-то использоваться, хотя бы в приложениях.

#### § 4. Обратимые течения .

Выделим особо важнейший частный случай систем (1-1), (1-19), удовлетворяющий условию

$$\nabla^2 \bar{V} = 0 \quad (2-12)$$

Как было сказано ранее – это условие обратимости процесса. При этом обе системы и (1-1) и (1-19) превращаются в систему:

$$\begin{aligned} (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot \bar{V} + \nabla \hat{P} &= 0, & \text{а} \\ \nabla^2 \bar{V} &= 0, & \text{б} \\ \nabla \cdot \bar{V} &= 0, & \text{в} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Нам эта система нужна для того, чтобы найти подход к недиссипативным процессам, тесно связанным по своим свойствам с обратимыми (см. глава 1, §2).

Условие (2-12) для разделенной системы равносильно условию (см.(1-19)):

$$\hat{P}_2 = const \quad (2-14)$$

Отсюда

$$\hat{P} = \hat{P}_1$$

(так как давление определяется с точностью до константы).

Поэтому обе системы, и разделённая и сплошная, при наличии этого условия – сливаются в одну.

Формулы (2-11) показывают, что условие (2-14) выполняется при любых значениях коэффициентов при  $s \neq 2$  и при условии  $d_3 = d_4 = 0$ , когда  $s = 2$ .

Выпишем эти обратимые решения

$$V_r = ar^s (d_1 \sin(s+1) \cdot \varphi - d_2 \cos(s+1) \cdot \varphi), \quad \text{а}$$

$$V_\varphi = ar^s (d_1 \cos(s+1) \cdot \varphi + d_2 \sin(s+1) \cdot \varphi + d_3(s)) \quad \text{б}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} a^2 r^{2s} (-d_1^2 - d_2^2 + d_3(s)), \quad \text{в}$$

$d_3(s)$  определена в (2-11,б)

Согласно сказанного в главе 1, §2, эти течения -недиссипативны ,

и могут представить интерес для различных приложений. Поэтому возникает желание увидеть эти течения, то есть нарисовать их траектории.

### §5. Картины обратимых течений.

Из бесконечного многообразия обратимых течений (2-15) выделим и изобразим здесь только те, что имеют целые значения  $s$ . Они не терпят разрыва вдоль луча.

Для траектории при любом движении

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad \frac{r d\varphi}{dt} = V_\varphi \quad (2-16)$$

Отсюда

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r V_r}{V_\varphi}$$

или

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{V_r}{V_\varphi} d\varphi \quad (2-17)$$

Теперь подставляем сюда полученные значения  $V$  в (2-15) и интегрируем. При значении  $s = \pm 1$  возникают некоторые особенности, поэтому рассмотрим эти случаи отдельно.

I.  $s = -1$ . Из (2-15)

$$V_r = -d_2 a r^{-1}, \quad V_\varphi = -d_1 a r^{-1}, \quad (2-18)$$

Здесь могут быть три варианта:

A) Если  $d_1 = 0, d_2 \neq 0$ , то

$$V_\varphi = 0, \quad V_r = C r^{-1}. \quad (2-19)$$

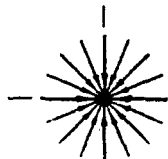


Рис. 2-2

Это исток – источник или сток, в зависимости от знака  $C$ . Рис. 2-2.

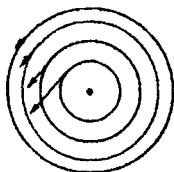


Рис 2-3

Б) Если  $d_2 = 0, d_1 \neq 0$ , то

$$V_r = 0, V_\varphi = Cr^{-1} \quad (2-20)$$

Это вихревой шнур в трехмерном пространстве. Траектории частиц - окружности. Но это не вращение как целого, угловая скорость возрастает к центру. Рис 2-3.

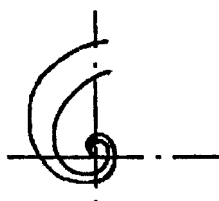


Рис. 2-4

В) Если  $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0$  то интегрирование (2-17) даёт:

$$r = Ce^{\frac{d}{d_1} \varphi} \quad C = const \quad (2-21)$$

Это спираль. Рис. 2-4

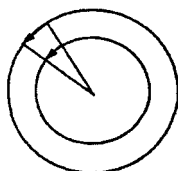


Рис. 2-5

2. При  $s = 1$  течение (2-15) можно разбить на два

а)  $d_1 = d_2 = 0, d_3 \neq 0$  тогда

$$V_r = 0, V_\varphi = Cr, C = const \quad (2-22)$$

Это круговое движение жидкости, как целого.

Рис.2-5

б) Случай  $d_1, d_2 \neq 0, d_3 = 0$ , не выделяется из общего случая и будет рассмотрен ниже.

В общем случае при любом целом  $s \neq -1$  и  $d_3 = 0$  интегрирование (2-17) при  $\bar{V}$  из (2-15) дает

$$r = \left| d_2 \sin(s+1)\varphi + d_1 \cos(s+1)\varphi \right|^{-\frac{1}{s+1}} \quad (2-23)$$

Эта формула при повороте вокруг центра сводится к виду

$$r = C \sin(s+1) \frac{1}{s+1} \quad (2-24)$$

Вернемся к изучению случая 2,6:  
Из (2-24)

$$r = C |\sin 2\varphi|^{-\frac{1}{2}} \quad (2-25)$$

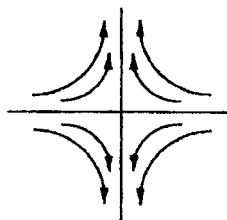


Рис. 2-6

Из этого условия и формул перехода

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (2-26)$$

можно получить на линии тока

$$xy = const \quad (2-27)$$

т.е. линии тока – гиперболы Рис 2-6. (Любопытно было бы получить полную картину течения при  $s = 1$ , как совмещение картин 5 и 6)

При  $s \geq 2$  без труда можно показать, что картина течения аналогична

предыдущей, только число ячеек  $m$

увеличивается по формуле  $m = 2(s+1)$ .

Картина течения на рис. 2-7 дана при  $s = 2$ .

При  $s = 0$  из (2-15), используя переходные формулы:

$$V_x = V_r \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi$$

$$V_y = V_r \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi \quad (2-28)$$

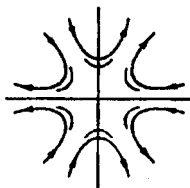


Рис. 2-7

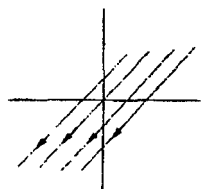


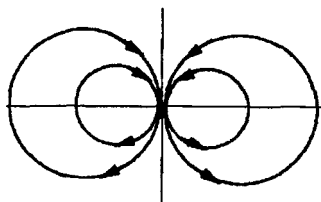
Рис 2-8

получим

$$V_x = const, \quad V_y = const, \quad (2-29)$$

то есть прямолинейное движение жидкости, как целого. Рис 2-8.

При  $s = -2$  из (2-24)



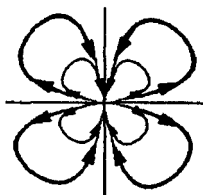
$$r = B|\sin\varphi| \quad (2-30)$$

Это окружность диаметра  $B$ . Картина течения изображена на рис. 2-9. Это два плоских вихря (вихревых шнура), центры которых смещены бесконечно близко друг к другу.

Рис.2- 9

При  $s \leq -3$  картины течений представляют совокупность вихревых шнуров, сомкнутых своими центрами. Число ячеек

$$m = -2(s + 1) \quad (2-31)$$



На рис. 2-10 изображено течение при  $s = -3$ , на рис. 2-11 при  $s = -4$ . Образно говоря, при  $s \geq 1$  - это картины течений, центры которых равномерно распределены в бесконечности, а при  $s \leq -2$  центры вихрей совмещены в центральной точке. Рис. 2-10

Рис 2-10

Направление движения во всех случаях определяется из (2-15) по конкретным значениям констант. Скорость частиц на траектории определяется из (2-15). Она может быть любая по величине. Ни постановка задачи при стационарном течении, ни механизм получения решения не требуют какого то ограничения на скорость частиц жидкости.

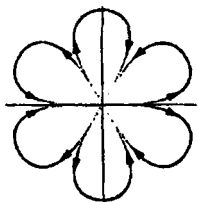


Рис 2-11

### §6. О совместимости по скоростям обратимых течений.

Рассмотрим систему (2-13). В плоском случае она состоит из пяти уравнений. Первые два уравнения нелинейны, три последних - линейны.

**Теорема 1** Все решения линейной части (2-13), удовлетворяющие условию аналитичности

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \quad (*)$$

удовлетворяют и нелинейной. При этом давление, найденное из нелинейной части, удовлетворяет этому же условию.

**Док-во.** С помощью системы (1-2) выпишем систему (2-13) в декартовых координатах в плоском случае

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial x}, \quad a$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial y}, \quad б$$

(2-32)

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в}$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{г}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad \text{д}$$

Здесь (аб) — нелинейная часть, (вгд) — линейная.

Пусть  $\bar{V}$  - некоторое решение линейной части, удовлетворяющее условию (\*). Перекрестным дифференцированием, используя равенство (д) и условие (\*), из (аб) получим

$$V_x \frac{\partial S}{\partial x} + V_y \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}, \quad \text{а}$$

(2-33)

$$S = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad \text{б}$$

В линейной части, дифференцируя (д) по  $x$  и вычитая из (в), получим

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \text{(2-34)}$$

а дифференцируя (д) по  $y$  и вычитая из (г), получим

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad \text{(2-35)}$$

Из этих двух равенств

$$S = const \quad \text{(2-36)}$$

Из (2-33а) сразу следует условие (\*) для  $P$ .

Таким образом три уравнения линейной части свелись к системе (2-36), (2-32д). Как только выполнены эти равенства, немедленно выполняется и равенство (2-33). Теорема доказана.

Таким образом, скорость можно находить независимо от давления из линейной части системы, что позволяет записать

**Следствие.** Если  $\bar{V}_1 P_1, \bar{V}_2 P_2$  – два аналитических решения системы (2-32) (то есть удовлетворяющие условию (\*)), то существует такое аналитическое выражение для  $P$ , при котором сумма решений

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad (2-37)$$

тоже решение этой системы. Это новое решение тоже удовлетворяет условию (\*).

Это важнейшее свойство обратимых течений, как масштабных, так и немасштабных. Оно не очевидно, так как система (2-32)-система уравнений Навье – Стокса в самом общем виде в плоском случае, нелинейна. Оно прибавляет оптимизма при производстве математических выкладок: иметь дело с линейными уравнениями куда проще, чем с нелинейными.

Еще раз подчеркнем, что в плоском случае не оправдывается предположение, что "уживаемость" по скоростям происходит за счет немасштабности. Она обязана своим существованием обратимости.

Следует еще подчеркнуть, что давление при сложении скоростей не равно в общем случае сумме давлений.

### §7. О потенциальности обратимых немасштабных течений в плоском случае

**Теорема.** Все обратимые немасштабные, течения, кроме вращения, как целого, имеют потенциал скорости, который в полярной системе имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } s = -1 & \quad H = a_1 \varphi + \ell n(a_2 r), \\ 2) \text{ при } s \neq -1 & \end{aligned} \quad (2-38)$$

$$H = a \frac{r^{s+1}}{s+1} (d_1 \sin(s+1)\varphi - d_2 \cos(s+1)\varphi)$$

По этому потенциалу скорость определяется так:

$$V_r = \frac{\partial H}{\partial r} \quad (a),$$

(2-39)

$$V_\varphi = \frac{\partial H}{r \partial \varphi} \quad (б)$$

Для доказательства достаточно это проверить, используя (2-15).  
Наличие потенциала означает, как известно, выполнение условия

$$\text{rot} \bar{V} = \nabla \times \bar{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = S = 2\omega = 0, \quad (2-40)$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения частиц среды.

Таким образом, обратимые потенциальные течения – это течения без угловой скорости. При этом  $S = 0$ .

Можно (40) доказать и независимо, используя представление ротора в полярных координатах<sup>(3)</sup>, стр. 188) и формул (2-15):

$$\text{rot} \bar{V} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} - \frac{\partial V_r}{r \partial \varphi} \quad (2-41)$$

Для вращения как целого при этом получим

$$\text{rot} \bar{V} = \text{const} = 2d_3 \quad (2-42)$$

**Примечание.** Совместное изучение формул (1-8), (2-40) и (2-42) позволяет утверждать, что чисто недиссипативными течениями

являются только прямолинейное движение и вращение как целого. Для остальных течений эти три формулы формально противоречивы и недиссипативность можно понимать только условно, в рамках допущений.

### §8. Сравнение с известными решениями.

Два известных решения: течение Куэтта, в общем случае записываемое так:

$$V_x = Cy + B, \quad V_y = 0, \quad C, B = const \quad (2-43)$$

и течение между коаксиальными вращающимися цилиндрами

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = \frac{C}{r} + Br \quad (2-44)$$

представимы в виде суммы немасштабных обратимых течений.

В случае (2-44) – это гармоники

$s = -1$ ,  $d_2 = 0$ , и  $s = 1$ ,  $d_1 = d_2 = 0$ , (Давление не суммируется!)

В случае (2-43) – это гармоники  $s = 1$ ,  $d_2 = 0$  и  $s = 0$ ,  $d_1 = 0$ , так как в полярной системе (2-43) представляется так:

$$V_r = \frac{C}{2} r \sin 2\varphi + B \cos \varphi \quad (2-45)$$

$$V_\varphi = -\frac{C}{2} r + \frac{C}{2} r \cos \varphi - B \sin \varphi.$$

Таким образом, наше желание представлять любые решения в виде суперпозиции немасштабных - не является нереальным. Пока еще для этого могут быть использованы только обратимые течения, но мы будем искать возможность подключать к суммам и необратимые.

И вообще, плоская задача - это в некотором роде "испытательный полигон" для проверки идей и их математического воплощения, ну и результаты, безусловно, будут нужны в дальнейшем, хотя, конечно же, основную нагрузку на практике будут нести осесимметричные течения.

### § 9. О совмещении повернутых и сдвинутых решений.

Для течения с потенциалом скорости справедлив интеграл Коши ((<sup>2</sup>) стр. 492)

$$\hat{P} = -\frac{V^2}{2} + C \quad (2-39P)$$

$C$  - константа, общая для всех линий тока, то есть для всего потока. При выводе этой формулы используется нелинейная часть системы (2-13). И, таким образом, если мы найдем некоторое решение линейной части этой системы, подставим полученные значения скоростей в (2-39P), то получим искомое значение давления, то есть полностью решим систему. Короче говоря, если скорость имеет потенциал в обратимом случае, то она определяется из линейной системы (2-13б). Отсюда следует

**Теорема 2.** Все потенциальные решения системы (2-13) совместимы по скоростям, то есть существует такое давление  $P$  при котором сумма решений по скоростям есть тоже решение и при этом давление аналитично в точках аналитичности первоначальных скоростей.

**Следствие.** Поскольку потенциальность течения не зависит от ориентации в пространстве, то отсюда следует, что потенциальные плоские течения совместимы даже если их оси  $OZ$  не параллельны.

### §10. Диссипативное течение разделенной системы.

Сравнение решений (2-11) и (2-15) показывает, что разделенная система (2-9) имеет всего одну диссипативную т.е. необратимую гармонику. Диссипативной является та ее часть, что содержит

коэффициенты  $d_3$  и  $d_4$ . Когда эти коэффициенты обращаются в ноль, то гармоника становится обратимой и, согласно наших допущений, - недиссипативной. Эта картина изображена на рис. 2-7.

Отдельно диссипативную часть рассматривать нельзя - условие (2-11 и, к) не позволяет этого делать. Если хотя бы один из коэффициентов  $d_1, d_2 \neq 0$ , то в декартовой системе (2-11 д, е) будет

$$\begin{aligned} V_x &= a(Cy^2 + Bx^2 + 2Exy), \\ V_y &= a(-Ey^2 + Gx^2 - 2Bxy), \end{aligned} \quad (2-46 \text{ а})$$

$$C = d_2 - d_4, \quad B = -d_2 - \frac{1}{3}d_4,$$

$$E = d_1 - \frac{1}{3}d_3, \quad G = d_1 + d_3$$

а (2-11 и, к)

$$-\frac{C}{E} = \frac{B}{G} = -\frac{E}{B} = -\frac{d_4}{d_3} = \frac{1}{k} \quad (2-46 \text{ б})$$

С помощью этих свойств (2-46а) приводится к виду

$$V_x = a(y - kx)^2, \quad V_y = kV_x \quad (2-47)$$

Эту запись будем называть **канонической формой дисгармоники - диссипативной гармонии**. Легко усмотреть, что это прямолинейное течение вдоль направления  $y = kx$  с параболическим профилем скорости.

§11 Совмещение диссипативной гармоника с недиссипативными.

Теперь изучим вопрос о совмещении по скоростям диссипативной гармоника, рассмотренной в предыдущем параграфе с недиссипативными, обратимыми. Для этого сумму скоростей двух исследуемых гармоник, диссипативной и любой недиссипативной  $V = V_{\text{д}} + V_0$  подставляем в (2-9). Линейная часть этой системы, то есть три последних равенства будут удовлетворены тождественно, так как  $V_0$  и  $V_{\text{д}}$  - решения. Нелинейная часть может быть выполнена при каких-то дополнительных условиях, а именно при каком - то значении давления  $P$ , не равном сумме давлений

$$P = P_0 + P_{\text{д}} + bP \quad (2-48)$$

Здесь индекс д означает "диссипативный", о - "обратимый" Исключив дифференцированием давление из нелинейной части, получим, дополнительное уравнение "совместимости", в котором будут взаимосвязаны две скорости  $V_0$  и  $V_{\text{д}}$ . Подставляем в это уравнение значение скоростей из (2-11), одна из которых взята при  $s = 2$ , другая при любом  $s$ , и исследуем затем его на предмет: при каких значениях констант  $d_i$ , возможно выполнение равенства.

Выкладки громоздки, поэтому мы приводим только результат исследования:

*Диссипативная гармоника  $s = 2$  совмещается по скоростям (т.е. результирующее решение равно сумме решений по скоростям, результирующее давление не обязательно равно сумме, но аналитично в смысле(\*) §6) только с двумя недиссипативными обратимыми гармониками:*

1.  $s = 0$ , (прямолинейное течение) при условии

$$d_{02}d_{\text{д}3} = d_{\text{д}4}d_{01} \quad (2-49)$$

2)  $s = 1$ , при условии, налагаемом на обратимую гармонику

$$d_{02} = 0, \quad d_{01} + d_{03} = 0 \quad (2-50)$$

Если взять не одну обратимую гармонику, а сразу несколько, результат на совместимость получим тот же. Здесь будет играть роль линейная независимость степенных функций при различных показателях. Остается только надежда на возможность совмещения диссипативной гармоники с бесконечным числом недиссипативных.

Этот вопрос не изучался. Это проблема.

Так же представляет интерес проверить совместимость дисгармоники (так будем называть диссипативную гармонику) с недиссипативными, обратимыми - обгармониками, если последние сдвинуты относительно центра и повернуты. Этот вопрос лучше рассмотреть в декартовой системе координат.

Пусть  $V_1 P_1, V_2 P_2$  - две любые гармоники, одна из которых, с индексом 2 - диссипативна. Суммарное решение будет

$$V = V_1 + V_2, \quad \hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + b\hat{P}. \quad (2-51)$$

Подставляем это в (1-19) в декартовой системе координат. Она будет отличаться от (1-32) только производными от второй компоненты давления  $\hat{P}_2$  в правой части (в, г) этой системы. Затем исключаем  $b\hat{P}$  в нелинейной части перекрестным дифференцированием, в результате чего получим дополнительное условие совмещения:

$$V_{1x} \frac{\partial S_2}{\partial x} + V_{2x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + V_{1y} \frac{\partial S_2}{\partial y} + V_{2y} \frac{\partial S_1}{\partial y} = 0, \quad (2-52)$$

$S$  – определено в (2-33 б). Значение  $S_1$  определено в (2-36). Значение  $S_2$  находится из канонического представления (2-47):

$$S_2 = -2a(1 + k^2) \cdot (y - kx) \quad (2-53)$$

Теперь из (2-52) получим

$$V_{iy} = kV_{ix} \quad (2-54)$$

Вот условие, которому должна удовлетворять любая обгармоника, чтобы она была совместима с дисгармоникой. Это прямолинейное течение вдоль направления параллельного линиям тока дисгармоники. Несложный анализ показывает, что это или течение с постоянной скоростью ( $s = 0$ ) или течение Куэтта, которое (оказывается!) может изображаться одной гармоникой  $s = 1$  при определенных значениях коэффициентов:

$$V_x = a(y - kx), \quad V_y = ka(y - kx) \quad (2-55)$$

Эту запись тоже можно назвать **канонической формой записи течения Куэтта**.

Можно проверить, что условия, (2-49) и (2-50) идентичны условию (2-54), только они записаны в разных системах координат. Таким образом, сдвиг не изменяет числа совместимых гармоник, а одинаковый коэффициент  $k$  для дис- и об-гармоник говорит о том, что поворот при совмещении этих гармоник запрещен. Не сложный анализ на базе уравнений (2-47) и (2-52) показывает, что дисгармоника совместима с другой дисгармоникой, возможно сдвинутой, только если их течения параллельны. Взаимный поворот и здесь запрещен.

Какую же картину может обтекать дисгармоника вкупе с совместимыми гармониками, то есть на какой линии скорость может быть равна нулю? Параллельность совмещаемых течений говорит о том, что это или одна прямая, расположенная по течению, или пара параллельных прямых, то есть всего три задачи:

1. Обтекание потоком бесконечно длинной пластины. Поток направлен вдоль нее.

2. Течение Пуазейля (2-47),

### 3. Течение Куэтта (2-55).

Надеясь на увеличение этого числа задач можно только при бесконечном числе совмещаемых гармоник, хотя надежды эти могут быть и напрасными.

В заключение этого параграфа отметим, что учитывая проведенные выше исследования, можно добавить две картины к нарисованным ранее в § 5:

1) Течение Куэтта - обгармоника при условии (2-50),  $s = 1$ , рис. 2-12.

2) Пуазейля - дисгармоники при наличии коэффициентов  $d_3, d_4, s = 2$ , Рис. 2-13.



Рис. 2-12



Рис. 2-13

## § 12. Скорость сингулярных центров при совмещении течений.

Здесь мы рассмотрим новое, совершенно не очевидное понятие: о неизменности положения сингулярных центров при сложении скоростей. Пусть, например, совмещаются два течения (истока), один расположен в центре  $\bar{V}_1 = \frac{1}{\bar{r}}$ , другой смещён от центра на  $\bar{b}$ ,

$\bar{V}_2 = \frac{1}{\bar{r} - \bar{b}}$ . Результирующая скорость будет:

$$\bar{V} = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r} - \bar{b}},$$

Если мысленно представить себе совмещение скоростей, то ответ на вопрос, как движутся центры течения в потоках друг друга, будет один: каждый центр движется в потоке скорости, создаваемом другим потоком. Но это не так. Вышеприведённая формула суммарной скорости показывает, что один центр всегда находится в точке  $\vec{r} = 0$ , другой в точке  $\vec{r} = \vec{b}$  и они со временем не смещаются, так как в этих точках, по формуле, всегда расположены сингулярные центры. Это эффект стационарности. Если бы время входило в знаменатели формулы, то центры бы смещались. Очевидно, что не только истоки, но и любые другие совместимые течения, имеющие внутри себя особую, сингулярную точку, обладают этим свойством.

#### Цитированная литература

1. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. Изд. МГУ, 1978 г.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. «Наука», Москва, 1965 г.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. Изд. «Наука», Москва, 1978 г.

## Часть 9

### НЕМАСШТАБНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ РАЗМЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

**Введение.** Здесь мы продолжаем изучение системы уравнений Навье – Стокса для реальной несжимаемой жидкости без учёта температурных явлений, в стационарном случае. Она приведена в части 8, формулы (1-1) – (1-4) в различных системах координат.

Каким образом удаётся получать решения этой системы здесь? В части 8 развит метод, который можно назвать "методом мерцающих констант". Он основан на нашей размерной формуле, которая говорит о том, что любое физическое явление описывается не любой функцией, а функцией имеющей определённую структуру. Структура этой формулы приведена в (20) части 3.

При формировании размерной формулы, следует учитывать не только те величины и константы, которые участвуют в уравнениях, но и те, что могут проникнуть в них при эквивалентных преобразованиях. Эти константы можно назвать мерцающими. Нужно знать, при каких условиях эти константы проникают в уравнение, потому что они в корне меняют вид решения. Одним из таких условий является равенство (условие обратимости)

$$\nabla^2 V = 0$$

так что система (1-1) ч.8 становится системой (2-13) ч.8.

То есть наряду с системой (1-1) следует рассматривать и систему (2-13). Существуют и другие условия.

Этот незаметный метод позволил сдвинуть воз с мертвой точки: стало возможным получать хоть какие-то решения системы уравнений гидродинамики. Здесь мы находим немасштабные решения этих систем в осесимметричном случае.

Как и в плоском случае, будем изучать порознь сплошную и разделенную систему. Последняя в свою очередь имеет обратимую подсистему, которая и представляет для нас наибольший интерес.

§1. Решения сплошной системы. Эта система описана в (1-1) – (1-4) части 8. Запись решения в декартовой системе дана в (1-17). К этой системе следует ещё добавить условие осевой симметрии, которые практически сведут задачу к решению в цилиндрической или сферической системе.

Немасштабные решения в сферической системе  $r, \theta, \varphi$  согласно размерной формулы, когда они не зависят от угла  $\varphi$ , имеют вид:

$$\bar{V} = \frac{v}{r} \bar{G}(\theta), \quad \bar{G} = \{C, D, B\}$$

$$\hat{P} = \frac{v^2}{r^2} Q(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1)$$

в цилиндрической  $r, \varphi, z$ :

$$\bar{V} = \frac{v}{r} \bar{G}\left(\frac{z}{r}\right) \quad \hat{P} = \frac{v^2}{r^2} Q\left(\frac{z}{r}\right) \quad (2)$$

Получено всего одно решение системы (1-1) в этом виде. Метод решения описан ранее: решение в форме (1), (2) сводят систему (4.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных. Полученное решение в декартовой системе имеет вид:

$$V_x = -\frac{2vx}{z^2}, \quad V_y = -\frac{2vy}{z^2}, \quad V_z = -\frac{4v}{z}, \quad \hat{P} = -\frac{4v^2}{z^2} \quad (3)$$

В цилиндрической системе оно таково:

$$V_r = -2v \frac{r}{z^2}, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -\frac{4v}{z},$$

$$\hat{P} = -\frac{4v^2}{z^2} \quad (4)$$

Траектории частиц жидкости определяются соотношением

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{V_z}{V_r} \quad (5)$$

Отсюда и из (4):

$$z = Cr^2 \quad C = \text{const} \quad (6)$$

Это параболический исток Рис. 9-1.

Он обладает свойством

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Из этого свойства следует

$$S = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

**§2 О совмещении течений по скоростям.** В части 8 было сказано, что два решения системы уравнений Навье-Стокса совместимы по скоростям в некоторой области пространства, если существует такое  $\delta \hat{P}$ , аналитическое в этой области, что

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2, \quad \hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \delta \hat{P} \quad (9)$$

есть тоже решение этой системы уравнений.

Под аналитичностью здесь понимается выполнение равенства

$$\frac{\partial \delta \hat{P}}{\partial x_n \partial x_k} = \frac{\partial \delta \hat{P}}{\partial x_k \partial x_n} \quad (9A)$$

Если мы подставим (9) в (1-1), то для определения  $\delta \hat{P}$  получим равенство

$$(\bar{V}_1 \cdot \nabla) \bar{V}_2 + (\bar{V}_2 \cdot \nabla) \bar{V}_1 = -\nabla \delta \hat{P} \quad (10)$$

Согласно формул векторного анализа (<sup>1</sup>) стр 172, левая часть этого равенства представляется в форме

$$\nabla(\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2) - \bar{V}_1(\nabla \times \bar{V}_2) - \bar{V}_2(\nabla \times \bar{V}_1) = -\nabla \delta \hat{P} \quad (10A)$$

При совмещении потенциальных, безвихревых течений второе и третье слагаемое обращается в нуль и мы имеем

$$\delta \hat{P} = -\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 + const \quad (11)$$

В общем случае, когда течения могут быть и не потенциальные, в (10A), мы не знаем, как привести левую часть к градиенту от некоторой функции, чтобы эту функцию потом приравнять к давлению. В некоторых случаях это сделать удаётся. Но не всегда.

**Вывод Все потенциальные течения совместимы по скоростям.**

При этом приращение давления определяется по формуле (11).

**§3 Решение разделенной диссипативной системы** Её общий вид дан в (1-19 ч.8). При  $\hat{P}_2 = const$  она превращается в разделенную недиссипативную. В плоском случае проделан полный анализ обеих систем. Было показано, что дисгармоника только одна и она была найдена. В рассматриваемом осесимметрическом случае дисгармоника найдена при  $s = +2$ , но не показано, что её нет при других значениях  $s$ . Дополнительно налагалось условие

$$V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (12)$$

Метод решения разработан в плоском случае: решение системы (1-4) в цилиндрических координатах представляется согласно размерной формулы (сравни (1-20), (2-2) ч.8 ) при  $s=2$  в виде:

$$V_r = ar^2 C(t), \quad V_z = ar^2 B(t), \quad \hat{P}_1 = a^2 r^4 g(t), \quad \hat{P}_2 = avrf(t) \quad (13)$$

Такая форма решения обращает основную систему (1-4) в систему дифференциальных уравнений (обыкновенных), относительно неизвестных функций  $C, B, g, f$ . Эта промежуточная система при  $s = 2$  линейна!

Решение таково:

$$V_r = ar^2 \left\{ 2t \left[ L_1 + L_2 \ln(\sqrt{1+t^2} + t) \right] + \frac{2}{3} L_2 \sqrt{1+t^2} \cdot (t^2 - 2) \right\}, \quad a$$

$$V_z = ar^2 \left\{ (1 - 2t^2) \left[ L_1 + L_2 \ln(\sqrt{1+t^2} + t) \right] + 3L_2 t \sqrt{1+t^2} - E \right\} \quad б$$

(14)

$$\hat{P}_1 = -a^2 r^4 \frac{C^2 + B^2 + E(B - Ct)}{2}, \quad в$$

$$\hat{P}_2 = -4avrEt \quad t = \frac{z}{r} \quad г$$

$L_1, L_2, E$  – произвольные константы,  
 $C, B(t)$  определяются из (13) и (14 аб).

Диссипативность в гармонику вносит константа  $E$ . При  $E = 0$  из (г) получим  $\hat{P}_2 = 0$  и система (1-19 ч8 ) превращается в обратимую систему (2-13 ч.8).

**§4 Картины некоторых характерных течений дисгармоники.**

При  $L_2 \neq 0$  картина не рассматривалась из-за громоздкости выкладок.

При  $L_2 = E = 0$  имеем обратимую картину течения:

$$\begin{aligned} V_r &= 2aL_1 r^2 t = 2Hrz, \quad H = \text{const} \\ V_z &= L_1 ar^2 (1 - 2t^2) = H(r^2 - 2z^2) \end{aligned} \quad (15)$$

Картина линий тока изображена на рис.9-2. Угол  $\theta_0$  разделительного конуса определяется из представления скоростей (15) в сферической системе  $R, \theta, \varphi$  из условия:

$$V_\theta = 0$$

получим

$$\sin \theta_0 = \pm \sqrt{0.2} \quad (16)$$

2. Простейшая диссипативная картина  $E \neq 0, L_1 = L_2 = 0$

При этом

$$V_r = 0, \quad V_z = Hr^2, \quad H = \text{const} \quad (17)$$

Это параболическое течение. При  $r = 0$  имеем  $\bar{V} = 0$  - прилипание жидкости к оси  $oz$ . Это решение можно трактовать как течение при обтекании иглы потоком, параллельным ей. Рис 9-3.

При совмещении этого течения с потоком постоянной скорости  $\bar{V} = \text{const}$ , параллельным ему, получим известное течение Пуазейля в трубе.

3. При  $L_1 = E, L_2 = 0$ , будет

$$V_r = Hrz, \quad V_z = -Hz^2 \quad H = \text{const}. \quad (18)$$

На плоскости  $Z = 0$  происходит прилипание:  $\bar{V} = 0$

Траектории находим из условия:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{V_z}{V_r}$$

Они имеют вид гипербол

$$z = \frac{H}{r}$$

Верхняя часть картины при  $z \geq 0$  дана на рис.9-4.

Решение (18) может пониматься как решение задачи об ударе струи о пластину, перпендикулярную ей – истечение из бесконечно удалённой точки в полупространство при условии прилипания к плоскости  $z=0$ .

### §5. Разделённые обратимые (недиссипативные) течения.

Эти течения описываются системой 5.13. Эта система при условии

$$V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (19)$$

в цилиндрических координатах имеет вид (сравни (1-4))

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}, \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad \text{б}$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} = 0 \quad \text{в}$$

(20)

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} = 0 \quad \text{г}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{д}$$

Условия (19) поставлены с целью понизить степень трудности задачи. В сферических координатах  $R, \theta, \varphi$  (здесь и далее будем обозначать сферический радиус буквой  $R$ , чтобы отличить его запись от записи цилиндрического радиуса  $r$ ) эта же самая система имеет вид:

$$\frac{\partial V_R}{\partial R} V_R + \frac{\partial V_R}{R \partial \theta} V_\theta - \frac{V_\theta^2}{R} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial R} \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial (R V_\theta)}{\partial R} V_R + \frac{\partial (R V_\theta)}{R \partial \theta} V_\theta = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} \quad \text{б}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right] = 0 \quad \text{в}$$

(21)

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{г}$$

$$\frac{\partial(R^2 V_R)}{R \partial R} + \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\sin \theta \partial \theta} = 0 \quad \text{д}$$

Произведя несложные преобразования, аналогичные проведенным в §6, ч. 8, систему (20) приведем к виду:

$$V_r \frac{\partial S}{\partial r} + V_z \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{V_r}{r} S = 0 \quad \text{а}$$

$$S = \frac{\partial V_s}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial s} = \frac{G}{r}, G = const \quad \text{б}$$

(22)

$$\nabla \cdot \bar{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{в}$$

Учитывая (б), уравнение (а) можно привести к виду:

$$V_r G = 0 \quad (23)$$

То есть возможны два варианта:

1)  $G=0$ , тогда линейная часть (22) имеет вид

$$S=0, \quad \nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (24)$$

При этом условии нелинейное уравнение выполняется.

2)  $G \neq 0, V_r = 0$ , и из системы (22 б,в) получим сразу решение

$$V_r = 0, V_z = G \ln \frac{r}{b}, G, b = const \quad (25)$$

Это масштабное решение. Из (20б,а)

$$\hat{P} = const$$

По этим двум случаям можно сформулировать теорему:

Теорема Все решения линейной системы (20), удовлетворяющие условию (23) удовлетворяют и нелинейной её части.

Может возникнуть вопрос, имеет ли линейная часть (20) решение, не удовлетворяющее условию (23)? Ответ: да, имеет.

Пример:

$$V_r = \frac{Gz}{r}, \quad V_z = 2G \ln \frac{r}{b}$$

Таким образом, в плоском случае условия аналогичной теоремы шире (§6, ч.8). Там вообще никаких условий не ставится и условие линейной части удовлетворяют и нелинейной, хотя интуитивно предполагается полная аналогия обоих случаев.

Следствие. Формула (25) может трактоваться как недиссепативное течение в трубе (масштабное), так как при  $r=b$  выполняется условие прилипания  $\bar{V} = 0$  к стенке трубы. Рис.9-5.

Таким образом, кроме известного диссипативного параболического течения Пуазейля в трубе может ещё существовать и логарифмическое течение. Здесь возникают затруднения из-за особенности на оси OZ, которые можно обойти, представляя решение как течение жидкости между двумя соосными цилиндрами, один из которых движется вдоль их общей оси. Рис.9-6.

Возвращаясь к основным выкладкам этого параграфа, следует сделать вывод: все немасштабные решения системы (20) могут быть определены из системы

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0 \quad \text{а} \quad (26)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{б}$$

Решение согласно размерной формулы записывается аналогично выражениям (1-20). В цилиндрической системе при условии (19) немасштабные решения должны иметь вид:

$$V_r = ar^s C(t), \quad V_z = ar^s B(t), \quad \hat{P} = a^2 r^{2s} g(t), \quad t = \frac{z}{r} \quad (27)$$

в сферической

$$V_R = aR^s C(\theta), \quad V_\theta = aR^s D(\theta), \quad \hat{P} = a^2 R^{2s} g(\theta), \quad a = const \quad (28)$$

Подставив (27) в (26) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую не удалось привести к

простой форме, удобной для решения. Поэтому лучше воспользоваться сферическими координатами. Учитывая, что первое уравнение (26) – это проекция вектора  $rot \bar{V}$  на ось  $\varphi$ , второе – дивергенция, переведем систему (26) в сферическую запись:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(RV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_R}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial(R^2 V_R)}{R \partial R} + \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\sin \theta \partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляем сюда решение в форме (28). Получим систему

$$(s+1)D - C' = 0 \quad (30a)$$

$$(s+2)C' + D' + D \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (30б)$$

которая при  $s \neq -2, -1$  приводится к расщипленной системе, одно из уравнений которой:

$$D'' + D' \operatorname{ctg} \theta + D[(s+1)(s+2) - 1 - \operatorname{ctg}^2 \theta] = 0 \quad (31)$$

а при  $s = -2$  эта система является уже расщепленной.

Используя, например (2), №2240 –20, получаем значение  $C, D$  и затем выражение для скоростей (28). При  $s \neq -2, -1$

$$V_R = -aR^s (s+1) y_{s+1} \quad (a)$$

$$V_\theta = aR^s \sin \theta y'_{s+1}(u), \quad (u) = \cos \theta$$

При  $s = -2$

$$V_R = \frac{a}{R^2} \left[ E \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + L \right], \quad V_\theta = \frac{-Ea}{R^2 \sin \theta} \quad б$$

При  $s = -1$  из (30аб)

$$V_R = \frac{a}{R} G, \quad V_\theta = \frac{a}{R} \left( \frac{A}{\sin \theta} + G \operatorname{ctg} \theta \right) \quad в$$

$a, A, E, G, L = \text{const}$ ,  $y_s$  – решение уравнения Лежандра:

$$(u^2 - 1)y''_s + 2uy'_s - s(s+1)y_s = 0 \quad г$$

Ядро  $g$  в формуле для давления (28) определяется из уравнения

$$s \cdot C^2 - C'D - D^2 = -2 \cdot s \cdot g \quad д$$

которое получается, если подставить (28) в (21а). При  $s = 0$  из (28) и (21,б) давление находится из уравнения

$$D(C - D') = g' \quad \text{е}$$

Теперь представим полученное решение в цилиндрических координатах. При  $s \neq -2, -1$

$$V_r = \frac{ar^s}{s+2} \left[ y'_{s+1}(u) \cdot (1+t^2)^{\frac{s-3}{2}} + sy'_{s+1}(u) \cdot t \cdot (1+t^2)^{\frac{s-2}{2}} \right], \quad \text{а}$$

$$V_z = \frac{ar^s}{s+2} \left[ y'_{s+1}(u) \cdot t \cdot (1+t^2)^{\frac{s-3}{2}} - y'_{s+1}(u) \cdot (s+2+2t^2) (1+t^2)^{\frac{s-2}{2}} \right], \quad \text{б}$$

(33)

$$u = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t = \frac{s}{r}, \quad a = \text{const} \quad \text{в}$$

При  $s = -2$

$$V_r = \frac{a}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left[ (-E \cdot \ln(\sqrt{1-t^2} + t) + L) \frac{1}{1+t^2} - E \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right], \quad \text{г}$$

$$V_z = \frac{a}{r^2(1+t^2)} \left[ (-E \cdot \ln(\sqrt{1-t^2} + t) + L) \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + E \right] \quad \text{д}$$

При  $s = -1$

$$V_r = \frac{a}{R} \left[ At(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + G \right] \quad V_z = -\frac{aA}{r} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{е}$$

Ядро  $g$  для давления определяется из (20а).

### 6. Картинны характерных течений обратимых гармоник.

Рассмотрим здесь наиболее простые случаи при целом  $s$ .

Решение уравнения Лежандра, согласно, например, (\*) можно представить так:

$$y_{s+1}(u) = C_1 F_1 + C_2 u F_2 \quad F_1 = F\left(-\frac{s+1}{2}, \frac{s+2}{2}, \frac{1}{2}, u^2\right) \quad (34)$$

$$F_2 = F\left(-\frac{s}{2}, \frac{s+3}{2}, \frac{3}{2}, u^2\right) \quad C_1, C_2 = \text{const}$$

где  $F$  – гипергеометрическая функция Гаусса:

$$F(b, d, z, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(b+1) \dots (b+k-1) c(c+1) \dots (c+k-1) x^k}{k! d(d+1) \dots (d+k-1)} \quad (35)$$

Легко усмотреть, что при целом  $s$  одна из функций  $F$  в (34) имеет конечное число слагаемых. Её мы и будем рассматривать, положив коэффициент при другой равным нулю.

Траектории в цилиндрических координатах определяются из (5), в сферических - из уравнения:

$$\frac{\partial R}{R \partial \theta} = \frac{V_R}{V_\theta} \quad (36)$$

При рассмотрении отдельных случаев мы будем обращаться к одним и тем же формулам (5), (20а,б), (32) – (36).

1.  $s = 0, C_1 = 0$ . Тогда  $y_1 = C_2 u$

$$\text{и } V_r = 0, V_z = \text{const}, \hat{P} = \text{const} \quad (37)$$

Это течение вдоль оси  $Oz$  с постоянной скоростью  $\bar{V} = \text{const}$

2.  $s = 1, C_2 = 0$ . В этом случае  $y_2 = C_1(1 - 3u^2)$ ,

$$V_r = ar, \quad V_z = -2az,$$

$$\hat{P} = -\frac{a^2}{2}(r^2 + 4z^2) \quad (38)$$

(Константа  $C_1$  совмещена с  $a$ ).

Траектории

$$z = \frac{a}{r^2} \quad (39)$$

Картина изображает истечение потоков из двух отверстий навстречу друг другу, когда отверстия удалены в бесконечность. Картина внешне напоминает диссипативное течение при  $s=2$  (рис9-4), но здесь не происходит прилипания к плоскости  $z=0$ . Напоминаем что рассматриваются недиссипативные течения.

3.  $s = 2$ ,  $C_1 = 0$ . Получим  $y_3 = C_2 \left( u - \frac{5}{3} u^2 \right)$  и

$$V_r = -2azr, V_z = a(2z^2 - r^2), \hat{P} = -\frac{a^2}{2}(r^4 + 4z^4) \quad (40)$$

Это обратимая часть дисгармоники  $s=2$ . Она уже рассматривалась в §3 и изображена на рис.9-2.

4.  $s = -1$ ,  $C_1 = 0$ . Находим  $y_0 = \frac{C_2}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$ , и затем

$$V_R = 0, V_\theta = \frac{2a}{R}, \hat{P} = -\frac{2a^2}{R^2} \quad (41)$$

Это оссиметричный вихрь. Ось симметрии является осью истоков. Рис 9-8. Положительная часть оси – источники, отрицательная – стоки, или наоборот. Скорость убывает обратно пропорционально радиусу.

5.  $s = -2$ ,  $E = 0$ ,  $L \neq 0$

$$V_R = \frac{a}{R^2}, V_\theta = 0, \hat{P} = -\frac{1}{2} a^2 R^{-4} \quad (42)$$

Это симметрический исток. Рис.9-9.

6.  $s = -3$ ,  $C_1 = 0$  Получим  $y_{-2} = C_2 u$

$$V_R = 2aR^{-3} \cos \theta,$$

$$V_\theta = aR^{-3} \sin \theta,$$

$$\hat{P} = -\frac{a^2}{R^6} \left( 2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \quad (43)$$

Линии тока

$$R = C \sin^2 \theta, \quad C = const \quad (44)$$

Это «квизитор» - почти тор: траектории замкнутые линии, но не окружности, на них скорость неограниченно возрастает к центру.

Рис.9-10. Сравни (2-9) ч.8 при  $s = -2$

7.  $s = -4, \quad C_2 = 0$

$$y_{-3} = C_1(1 - 3u^2)$$

$$\begin{aligned} V_R &= aR^{-4}(\cos 2\theta - \cos^2 \theta) \\ V_\theta &= aR^{-4} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (45)$$

Это сдвоенный тор «четырёхлистник» по сечению. Рис. 9-11.  
(Сравни рис 2-10 ч. 8 при  $s = -3$ )

При увеличении модуля  $s$  просматривается такая закономерность: если  $s$  растёт в положительную сторону, то число ячеек на срезе рисунка

$$m = 2(s + 1) \quad (46)$$

а если в отрицательную, то число лепестков будет:

$$m = -2(s + 2) \quad (47)$$

### 7. О потенциальности разделённых обратимых течений.

Теорема. Все разделённые обратимые оссиметричные без вращения вокруг оси OZ течения, кроме логарифмического (25), - потенциальны, то есть скорость имеет потенциал.

Доказательство. Из условия (19), уравнения (22б), и первого уравнения (24) сразу следует:

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad (48)$$

что и доказывает теорему.

Теперь по известному выражению (32) для скорости легко составить её потенциал. Это будет  $(y_s, u)$  - определены в (32) при  $s \neq 1, -2$

$$H = \frac{aR^{s+1}}{(s+1)(s+2)} [\sin^2 \theta y_{s+1}^*(u) - 2 \cos \theta y'_{s+1}(u)] \quad a$$

при  $s = -2$  (49)

$$H = -\frac{a}{R} \left[ E \ln \frac{\theta}{2} + L \right] \quad б$$

при  $s = -1$

$$H = a \left( \ln \frac{R}{b} + \sin^2 \theta y'_{s+1}(u) - 2 \cos \theta y'_{s+1}(u) \right) \quad \text{в}$$

Из определения,

$$V_R = \frac{\partial H}{\partial R}, \quad V_\theta = \frac{\partial H}{H \partial \theta} \quad (50)$$

Наши течения идеальны по скоростям и давлениям ((2-13а,б)ч.8) для них верен интеграл Коши ((<sup>2</sup>), (11,37)стр492)

$$\hat{P} = -\frac{V^2}{2} + C \quad (51)$$

Константа С одна и та же для всего объёма.

### §8. О совместимости обратимых течений.

Как было сказано в §2, все потенциальны течения совместимы по скоростям и при этом добавочное давление определяется из (11).

Все обратимые течения, кроме логарифмического, согласно вывода предыдущего параграфа – потенциальны и, потому, совместимы по скоростям между собой и с другими потенциальными течениями, например, с потенциальными плоскими обгармониками, рассмотренными в части 8. Поэтому их взаимные ориентации в пространстве не имеют значения.

Поскольку сумма потенциальных течений остаётся потенциальной (так как ротор определяется из линейного соотношения), то можно совмещать любое количество потенциальных течений.

### §9. Совмещение нескольких потенциальных течений.

Пусть нам нужно совместить N потенциальных течений. Совместим сначала два любых  $\vec{V}_1, \hat{P}_1$  и  $\vec{V}_2, \hat{P}_2$ :

$$\vec{V}^1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2, \quad \hat{P}^1 = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \delta \hat{P}^1 \quad (51)$$

где, согласно (11)

$$\hat{P}^1 = -\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + const \quad (52)$$

Теперь к полученному потоку прибавим новый  $\vec{V}_3, \hat{P}_3$

$$\vec{V}^2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3, \quad \hat{P}^2 = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \delta\hat{P}^1 + \hat{P}_3 + \delta\hat{P}^2 \quad (53)$$

(Верхние индексы взяты для удобства. Это не показатели степени)  
Здесь будет тоже согласно (11)

$$\delta\hat{P}^2 = -\vec{V}^1 \cdot \vec{V}_3 + const = -\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 - \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 + const \quad (54)$$

и общий прирост давления (см (52)):

$$\delta\hat{P} = \delta\hat{P}^1 + \delta\hat{P}^2 = -\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 - \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 \quad (55)$$

и так далее. Несложно проследить аналогию для N течений.  
Результирующие параметры будут:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i, \quad \hat{P} = \sum_{i=1}^N \hat{P}_i + \delta\hat{P} \quad (56)$$

где

$$\delta\hat{P} = -\sum_{k=2}^N \sum_{i=1}^{k-1} \vec{V}_i \cdot \vec{V}_k \quad (57)$$

**§10. Два варианта совмещения непотенциальных течений.**

Если среди совмещаемых течений имеются непотенциальные, то левая часть (10А) приводится к градиенту некоторой функции по крайней мере в двух случаях:

1. Второй и третий члены в (10А) обращаются в ноль

$$\vec{J}_2 = \vec{V}_1 \times (\nabla \times \vec{V}_2) = 0 \quad a \quad (58)$$

$$\vec{J}_3 = \vec{V}_2 \times (\nabla \times \vec{V}_1) = 0 \quad б$$

Это возможно когда ротор одного течения коллинеарен (параллелен) скорости второго и наоборот:

$$\bar{V}_1 \Pi \nabla \times \bar{V}_2 \quad \text{а} \quad (59)$$

$$\bar{V}_2 \Pi \nabla \times \bar{V}_1 \quad \text{б}$$

В этом случае формула (11) для  $\delta \hat{P}$  остаётся в силе.

Нас устроит и обращение суммы второго и третьего членов в ноль.

2. Во втором и третьем члене, а точнее у суммы этих членов, переменные разделены по координатам, то есть

$$\bar{J}_2 + \bar{J}_3 = \bar{i}F_1(x) + \bar{j}F_2(y) + \bar{k}F_3(z) \quad (60)$$

В этом случае, если положить

$$U = \int F_1(x)dx + F_2(y)dy + F_3(z)dz \quad (61)$$

то

$$\bar{J}_2 + \bar{J}_3 = \nabla \cdot U \quad (62)$$

и тогда

$$\delta \hat{P} = -\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 + U \quad (63)$$

### §11. Примеры совмещения непотенциальных течений.

#### 1. Совмещение логарифмического течения с некоторыми другими необратимыми течениями.

В качестве примера использования рассмотренных в §10 возможных вариантов рассмотрим совмещение логарифмического течения (25) с вращением жидкости как целого и вихревым шнуром (см. ч. 8) когда эти течения соосны с ним по оси OZ.

Вращение как целого согласно ((2-15),(2-22) ч.8) имеет вид:

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = Br, \quad V_z = 0, \quad \hat{P} = \frac{B^2 r^2}{2} \quad (64)$$

а вихревой шнур из (2-15), (2-20) ч.8:

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = \frac{A}{r}, \quad V_z = 0, \quad \hat{P} = -\frac{A^2}{2r^2} \quad (65)$$

Совместив течение (25) сначала с одним из этих течений, а затем полученное суммарное течение с другим, в результате получим:

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = \frac{A}{r} + Br, \quad V_z = G \ln \frac{r}{b},$$

$$\hat{P} = -\frac{A^2}{2r^2} + \frac{B^2 r^2}{2} + 2AB \ln \frac{r}{b} + const \quad (66)$$

$$A, B, G, b = const$$

При определении приращения давления по формуле (10А) используются варианты §10. Технически это не сложно, поэтому мы опускаем выкладки.

Полученное суммарное решение (66) можно считать решением граничной задачи о движении жидкости, заключённой между соосными цилиндрами, один из которых движется вдоль их общей оси и вращается вокруг неё. Эта задача не была решена ранее. На рис. 6 изображена картина течения, когда один цилиндр движется вдоль оси OZ. К этому ещё следует добавить вращение одного из них или обоих вокруг той же оси. Произвольные константы в (66) обеспечат прилипание к стенкам цилиндра.

## 2. Совмещение параболического истока с вихревым шнуром.

Параболический исток дан в (3), (4). Вихревой шнур – в (2-11 ч.8) при  $s = -1$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_1 \neq 0$ :

$$V_r = 0, V_\varphi = \frac{C}{r}, V_z = 0, \hat{P} = -\frac{C^2}{2r^2}, C = const \quad (67)$$

В данной записи течения соосны по оси OZ.

При определении  $\delta\hat{P}$  по формуле (10А), в силу (2-40) ч.8

$$\nabla \times \vec{V}_z = 0$$

и второй член поэтому равен нулю, а в третьем члене вектор  $\nabla \times \vec{V}_1$  направлен вдоль оси  $\varphi$  и коллинеарен  $\vec{V}_2$  и значит  $\vec{J}_3 = 0$ , поэтому  $\delta\hat{P}$  определяется по формуле (11). Учитывая что,  $\vec{V}_2 \perp \vec{V}_1$ , получим  $\delta\hat{P} = 0$  и совмещенное течение следовательно таково:

$$V_r = -2v \frac{r}{z^2}, V_\varphi = \frac{C}{r}, V_z = -\frac{4v}{z}, \hat{P} = -\frac{4v^2}{z^3} - \frac{C^2}{2r^2} \quad (68)$$

**§12. Необходимое и достаточное условие совместности двух аналитических течений.**

Обозначим (см (58), (10A)):

$$\bar{J} = \bar{J}_2 + \bar{J}_3 \quad (69)$$

Покомпонентная запись  $\bar{J} = J_x \bar{i} + J_y \bar{j} + J_z \bar{k}$

Обозначим также

$$\delta \hat{P} = \delta \bar{P}^1 + \delta \hat{P}^* \quad (70)$$

где (см (11))

$$\nabla \delta \hat{P}^1 = -\nabla(\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2) \quad (71)$$

$$\nabla \delta \hat{P}^* = \bar{J} \quad (72)$$

Последнее – в координатной записи:

$$J_x = \frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial x}, \quad J_y = \frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial y}, \quad J_z = \frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial z} \quad (73)$$

**Теорема.** Необходимым и достаточным условием совместности по скоростям двух аналитических течений являются ~~два любых~~ соотношения из трёх

$$\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial J_x}{\partial z} = \frac{\partial J_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial J_y}{\partial z} = \frac{\partial J_z}{\partial y} \quad (74)$$

где

$$\bar{J} = \bar{V}_1 \times (\nabla \times \bar{V}_2) + \bar{V}_2 \times (\nabla \times \bar{V}_1) \quad (74 A)$$

К этим равенствам приводит исключение  $\delta \hat{P}^*$  из системы (73) перекрёстным дифференцированием.

**Доказательство.** Под аналитичностью мы понимаем возможность перемены порядка дифференцирования у смешанных производных. Если скорости аналитичны, то простейшие математические процедуры в (10A) оставляют  $J$  аналитичным

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 J}{\partial p \partial q}, \quad p, q = x, y, z \quad (75)$$

Основываясь на этом, легко показать, что в (74) независимы только два равенства. Это не сложно. И мы не будем это доказывать.

**Необходимость.** Если течения совместимы, то  $\delta \hat{P}^*$  аналитично, поскольку мы совмещаем аналитичные решения, то есть

$$\frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial q \partial p} = \frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial p \partial q} \quad (76)$$

Отсюда и из (73) и следует (74).

**Достаточность.** Пусть теперь выполнено (74). Тогда в (73) легко показать, что  $\delta \hat{P}^*$  удовлетворяет свойству (76).

Найдём теперь  $\delta \hat{P}^*$  из любого равенства (73), например, из первого

$$\delta \hat{P}^* = \int J_x dx + \dots \quad (77)$$

Теперь, учитывая (74), докажем, что это  $\delta \hat{P}^*$  верно для двух других равенств (73). Например, для второго:

$$\frac{\partial \delta \hat{P}^*}{\partial y} = \int \frac{\partial J_x}{\partial y} dx = \int \frac{\partial J_y}{\partial x} dx = dJ_y = J_y \quad (78)$$

Аналогично и для третьего, то есть  $\delta \hat{P}^*$  можно определить из любого равенства (73):

$$\delta \hat{P}^* = \int J_x dx + \int J_y dy + \int J_z dz \quad (79)$$

Когда мы берём эти интегралы, например, первый, математическая строгость требует прибавить к результату произвольную функцию  $F(y, z)$ . Однако, выкладки (78) показывает, что такая функция отсутствует. Достаточность доказана.

**Вывод для практики.** Если два течения аналитичны и выполнено (74), то они совместимы по скоростям, то есть результирующее решение будет

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad \text{а}$$

$$\hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 - \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 + \int J_x dx + \dots \quad \text{б}$$

где вектор  $\bar{J}$  имеет вид (80)

$$\bar{J} = \bar{V}_1 \times (\nabla \times \bar{V}_2) + \bar{V}_2 \times (\nabla \times \bar{V}_1) \quad \text{в}$$

Эта формула совмещения легко распространяется на любую ортогональную систему координат.

В цилиндрической системе (73) будет

$$J_r = \frac{\partial \delta \hat{P}}{\partial r}, \quad J_\varphi = \frac{\partial \delta \hat{P}}{r \partial \varphi}, \quad J_z = \frac{\partial \delta \hat{P}}{\partial z} \quad (81)$$

условие совместимости (74)

$$\frac{\partial J_r}{\partial \varphi} = \frac{r \partial J_\varphi}{\partial r} + J_\varphi, \quad \frac{\partial J_r}{\partial z} = \frac{\partial J_z}{\partial r}, \quad \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial J_z}{r \partial \varphi} \quad (82)$$

Выражение (79) для  $\delta \hat{P}^*$

$$\delta \hat{P}^* = \int J_r dr + r \int J_\varphi d\varphi + \int J_z dz \quad (83)$$

В соответствии с этим изменяется и последний член в (80б).

В сферической системе (73) будет

$$J_R = \frac{\partial \delta \hat{P}}{\partial R}, \quad J_\theta = \frac{\partial \delta \hat{P}}{R \partial \theta}, \quad J_\varphi = \frac{\partial \delta \hat{P}}{R \sin \theta \partial \varphi} \quad (84)$$

а (74) будет

$$\frac{\partial J_R}{\partial \theta} = \frac{R \partial J_\theta}{\partial R} + J_\theta \quad \text{а} \quad (85)$$

$$\frac{\partial J_R}{\partial \varphi} = \sin \theta \left( R \frac{\partial J_\varphi}{\partial R} + J_\varphi \right) \quad \text{б}$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \varphi} = (\sin \theta) \frac{\partial J_\varphi}{\partial \theta} + (\cos \theta) J_\varphi \quad \text{в}$$

Наконец, формула (79) для  $\delta \hat{P}^*$

$$\delta \hat{P}^* = \int J_R dR + R \int J_\theta d\theta + R \sin \theta \int J_\varphi d\varphi \quad (86)$$

**§13. Совмещение диссипативной гармоника с потенциальными течениями.** Согласно сказанного в §12, изучение совместимости течений следует начинать с проверки равенств (74) или их аналогов (82), (85). Потенциальные течения обладают свойством (48), которое в векторной записи имеет вид  $\nabla \times \bar{V}_2 = 0$ , поэтому первое слагаемое в формуле для  $\bar{J}$  (см (80)) равно нулю. Для вычисления второго слагаемого сначала вычислим  $\nabla \times \bar{V}_1$ , по известному значению  $\bar{V}_1$ , данному в (14а,б). Вычисление даёт:

$$\nabla \times \bar{V}_1 = Hr \bar{i}_\varphi \quad (87)$$

$\bar{i}_\varphi$  - направляющий орт оси  $\varphi$  (Мы будем направляющие орты декартовой системы обозначать  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , цилиндрической  $\bar{i}_r, \bar{j}_\varphi, \bar{k}_z$ , сферической  $\bar{i}_r, \bar{j}_\theta, \bar{k}_\varphi$ ).

Найдя по (87) завихрённость, найдём по (80) и  $\bar{J}$ :

$$\bar{J} = \bar{V}_2 \times Hr \bar{i}_\varphi = -Hr V_{2z} \bar{i}_r + Hr V_{2r} \bar{i}_z \quad (88)$$

То есть

$$J_r = -Hr V_{2z}, J_\varphi = 0, J_z = Hr V_{2r} \quad (88 A)$$

Подставляя это в (82), убеждаемся, что эти равенства выполнимы, если только выполнено уравнение неразрывности (20д) и условие:

$$\frac{\partial V_{2z}}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_{2r}}{\partial \varphi} = 0 \quad (89)$$

Если это условие не выполнено, то совмещения нет.

**Вывод.** Диссипативная гармоника совместима с любым потенциальным течением, обладающим свойством (89) в той же системе координат, в которой задана диссипативная гармоника. Этому требованию удовлетворяют все оссиметричные (см (33)) недиссипативные течения, кроме чистого вращения вокруг оси, если они соосны по этой оси с диссипативной гармоникой.

## Рисунки к части 9

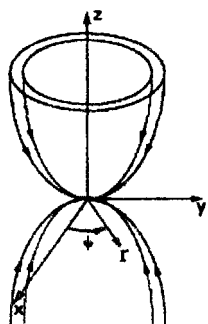


рис. 9.1

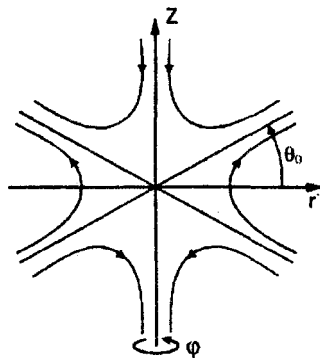


рис. 9.2

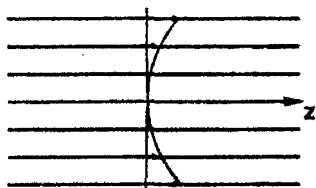


рис. 9.3

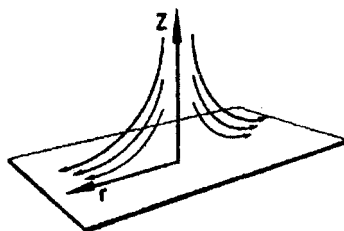


рис. 9.4

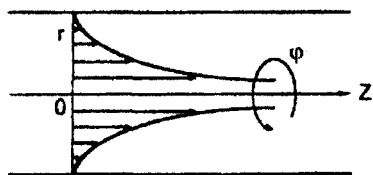


рис. 9.5

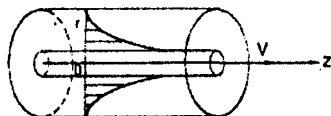


рис. 9.6

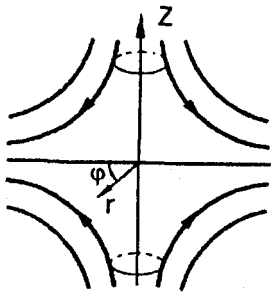


рис. 9.7

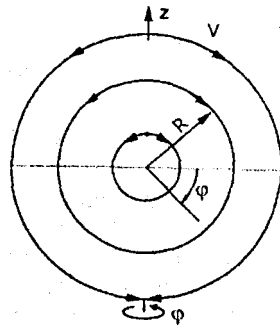


рис. 9.8

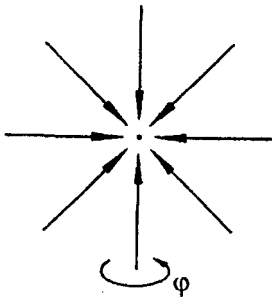


рис. 9.9

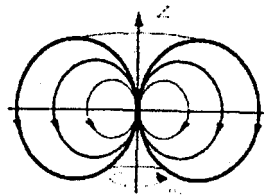


рис. 9.10

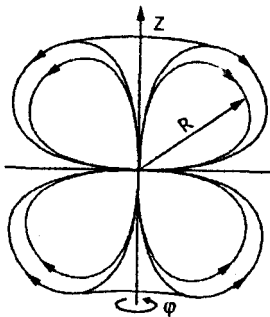


рис. 9.11

## Часть 10

### ВИДИМАЯ ПОВЕРХНОСТЬ СИНГУЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ (НЛО)

**§1 Видимая поверхность.** Сплошная среда – реальная жидкость, изучаемая здесь, как любая реальная среда, имеет определённую скорость распространения импульса в ней. Однако скорость частиц течений, изучаемых здесь, может быть любая и в окрестности сингулярного центра она может превосходить скорость распространения импульса. Этот факт может позволить наблюдать эту область. Наблюдаемыми могут быть области жидкости, в которых скорость течения  $V$  превосходит скорость распространения импульса  $c$

$$|V| \geq c \quad (1)$$

Видимая поверхность  $S$  очевидно будет характеризоваться свойством:

$$|V| = c \quad (2)$$

Эта видимая поверхность может быть чётко ограничена, так как на ней происходит скачок плотности среды: это застывшая во времени и пространстве звуковая волна, которая характеризуется скачком плотности. Такие экспериментальные факты существуют в газовой среде. Возможно, эти видимые поверхности и наблюдаются как НЛО – неопознанные летающие объекты.

Мы будем здесь изучать видимую поверхность  $S$  на полученных в части 9 многогторах и истоке.

Видимая поверхность у истока, очевидно, - сфера.

Рассмотрим тор (43) ч.9. Из (2)

$$V_R^2 + V_\theta^2 = c^2 \quad (3)$$

Подставляя сюда (43), получим:

$$R^6 = \frac{a^2}{c^2} (4 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (4)$$

Эта поверхность близка к сфере (рис.10-1), однако есть «поясок»-зауженное место при  $z = 0$ .

Аналогичные выкладки для битора (9.45) дают

$$R^8 = \frac{a^2}{c^2} \left[ (\cos 2\theta + \cos^2 \theta)^2 + \sin^2 2\theta \right] \quad (5)$$

Рис.10-2 . Поверхность и в этом случае близка к сфере, но имеет уже два заужения – пояска. Тритор тоже будет близок к сфере, но иметь три пояска и т.д.

В дальнейшем при изучении взаимодействия потоков, мы сможем обнаружить и более сложные видимые поверхности, а так же изучим их поведение во встречном потоке.

**§2. Видимая поверхность, образуемая квазитором в потоке.**

Пусть квазитор, или просто тор (43) ч.9:

$$V_{1R} = 2aR^{-3} \cos \theta, \quad V_{1\theta} = aR^{-3} \sin \theta, \quad V_{1\varphi} = 0 \quad (6)$$

движется в эфире со скоростью  $V_2 = -B = const$  вдоль оси OZ. В сферической системе поток постоянной скорости имеет вид

$$V_{2R} = B \cos \theta, \quad V_{2\theta} = B \sin \theta, \quad V_{2\varphi} = 0 \quad (7)$$

В результате совмещения согласно теории §8, 9 ч9 получим

$$V_R = (2aR^{-3} + B) \cos \theta, \quad V_\theta = (aR^{-3} - B) \sin \theta \quad (8)$$

Без ограничения общности положим  $B > 0$ , то есть постоянный поток направлен вдоль оси oz в сторону её положительной ориентации. Общность не нарушается, так как мы можем менять направление скорости в торе на обратное изменением знака  $a$ . Положительное направление вращения тора  $a > 0$  изображено на рис.10-4.

При  $a < 0$ , то есть когда течение в торе противоположно изображенному на рис. 4, найдём:

$$V_R = 0 \quad \text{при } R = R_* = -\left(\frac{2a}{B}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

то есть внешний поток не проникает через сферу  $R = R_*$ . Линия Т.

Рис.10-5. Форма видимой поверхности при любом знаке  $a$  определяется из (2), (8):

$$(2aR^{-3} + B)^2 \cos^2 \theta + (aR^{-3} - B)^2 \sin^2 \theta - c^2 = const \quad (10)$$

Отсюда находится форма поверхности  $S = R(\theta)$ :

$$R^3 = \frac{aC}{D - \sqrt{D^2 + CL}} \quad (11)$$

$$C = 4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta, \quad D = B(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \quad L = c^2 - B^2 > 0$$

При  $a > 0$  для положительности  $R$  следует взять перед радикалом знак «+», при  $a < 0$  - «-». При  $a < 0$  на рис. 5 изображена качественно видимая поверхность  $S$  («стандартная» НЛО).

При  $a > 0$  из (8) существует  $R = R_* = -\left(\frac{a}{B}\right)^{\frac{1}{3}}$

при котором  $V_\theta = 0$ , то есть линии тока пересекают эту сферу только под прямым углом к ней. Рис.10-6. Линия Т.

Видимая поверхность из (11) в этом случае представляет из себя гантель.

Поле скоростей (8) может быть использовано и как решение двух прикладных задач:

1. Обтекание точки А (Рис. 5), координаты которой  $R = R_*$ ,  $\theta = \pi$ .
2. Обтекание обруча (рис. 6). Здесь скорость равна нулю в т.т. N на обруче с координатами  $R = R_*$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Только в первом случае следует брать  $a < 0$ , а во втором  $a > 0$ .

Давление определяется из формул (9), (11) ч.9.

(Напоминаем, что на рис.10-6 изображено сечение осесимметричного течения, вдоль оси  $OZ$ , так что обруч на рисунке представлен только

двумя точками NN, так как расположен в плоскости, перпендикулярной этой оси.)

Как видим, решение задачи по обтеканию точки – не однозначно. Увеличивая мощность тора «а» одновременно увеличивая радиус R, можно получать разные количественные решения по обтеканию одной и той же точки. Можно получить и качественно новое обтекание точки при движении любого многотора в жидкости с постоянной скоростью. То же и для обруча.

**§3. Битор в потоке.** Распределение скоростей в биторе «четырёхлистике» дано в (45) ч.9. Проведя совмещение, как и в предыдущем параграфе, строим картину течения по известному полю скоростей. На рис.10-7 эта картина дана при  $aB > 0$ . Можно показать, что она зеркально отразится от плоскости XY при  $aB < 0$ . Скорость набегающего потока направлена как и в прошлом случае вдоль оси симметрии OZ. Видимая поверхность имеет форму колокола.

Это поле скоростей тоже может быть использовано для решения задачи обтекания обруча NN или точки А, что говорит о неединственности решения этих задач.

**§4. Истоки в потоке.** Исток (42) ч. 9 также совместим с постоянным потоком. Суммарная скорость будет (Рис. 8):

$$V_R = B \cos \theta + \frac{a}{R^2}, \quad V_\theta = -B \sin \theta \quad (12)$$

Выражение для траектории из (36) ч.9:

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \operatorname{ctg} \theta - \frac{a}{BR \sin \theta} \quad (13)$$

Это уравнение линейно относительно  $R^2$ . Его решение

$$R = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \sqrt{R_0^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{2a}{B} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} \quad (14)$$

$R_0, \theta_0$  - некоторые координаты произвольной линии тока.

Найдём линию тока  $\theta_0 = 0$ :

$$R = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \sqrt{-\frac{a}{B}} \quad (14)$$

(это возможно лишь при  $aB < 0$ ). Линия Т на рис.10-8.

Чтобы понять вид этой линии, нарисуем её в координатах  $y, z$  используя формулы перехода  $y = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$ :

$$y = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{-\frac{a}{B}}, \quad z = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \sqrt{-\frac{a}{B}} \quad (15)$$

Мы видим, что при  $\theta = 0$ , будет  $y=0$ ,  $z = \sqrt{-\frac{a}{B}}$

Это точка М на рис 8. При  $\theta \rightarrow \pi$  получаем

$$y \rightarrow \sqrt{-\frac{a}{B}} = y_0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (16)$$

Все остальные линии тока, находятся внутри этой области. Это следует из того, что линии тока не пересекаются, так как поле скоростей задано однозначно.

При  $aB > 0$ , то есть не меняя скорости внешнего потока сток заменить на источник, получим аналогичную картину, но развёрнутую хвостом в положительную сторону оси OZ. Это легко показать, сделав замену  $\theta' = \pi - \theta$  и беря за начало отсчёта точку  $\theta' = \pi$ . Видимая поверхность определяется, как всегда, из условия (2), (3) и поля скоростей (12). Получим:

$$\left( B \cos \theta + \frac{a}{R^2} \right)^2 + B^2 \sin^2 \theta = c^2 \quad (17)$$

отсюда

$$R = \left( \frac{a}{-B \cos \theta \pm \sqrt{B^2 \cos^2 \theta + L}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad L = c^2 - B^2 \quad (18)$$

Из вещественности  $R$  следует, что при  $aB > 0$  следует брать перед радикалом плюс, а при  $aB < 0$  - минус. Формула легко исследуется. Рис.10- 8.

## Рисунки к части 10

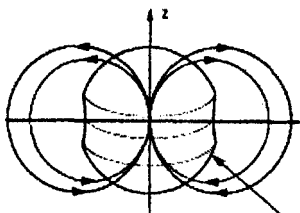


рис. 10.1

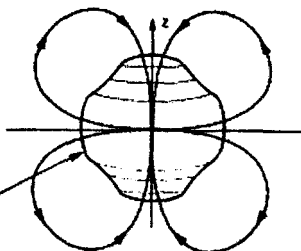


рис. 10.2

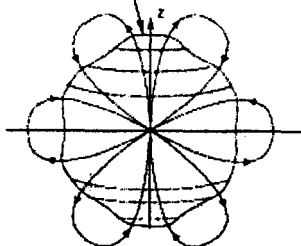


рис. 10.3

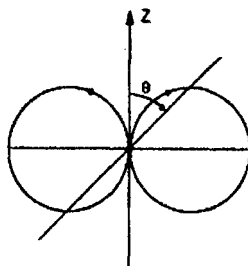
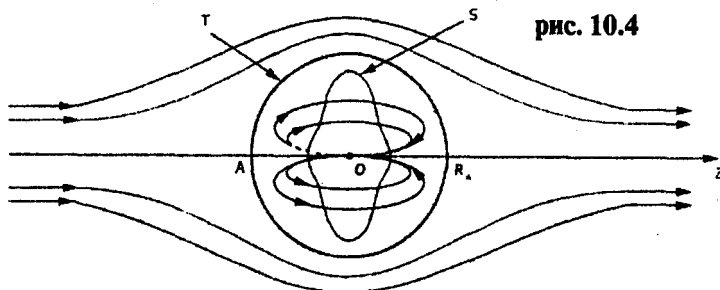


рис. 10.4



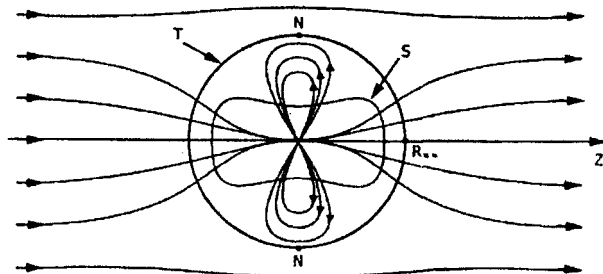


рис. 10.6

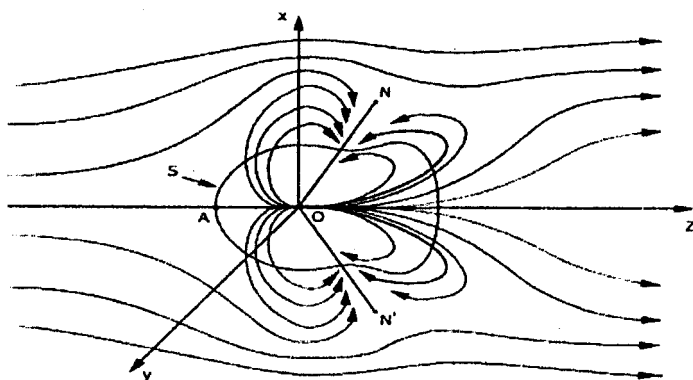


рис. 10.7

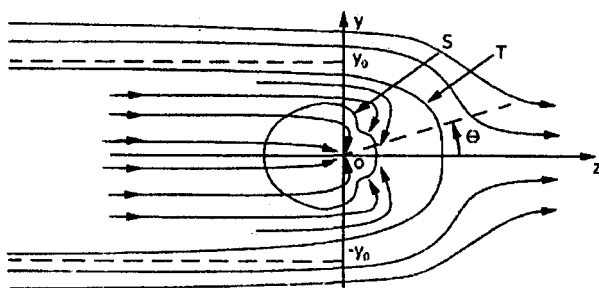


рис. 10.8

## Часть 11

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕДИССИПАТИВНЫХ  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

**§1 Баланс сил и точки их приложения.** Мы изучаем недиссипативные течения (9.32), (9.33), (часть 9) имеющие внутри себя сингулярный центр, для того чтобы использовать их в приложениях и в первую очередь при имитации задач обтекания суперпозицией этих течений.

Здесь мы будем изучать силу взаимодействия двух таких потоков. Пусть течение  $Q_1$  расположено в точке  $O_1$ , а течение  $Q_2$  в точке  $O_2$ . Рис.11-1. Мы знаем скорости и давления этих течений, если они заданы самостоятельно, при отсутствии другого течения. Как показано ранее в §8, течение жидкости, соответствующее присутствию обоих этих потоков одновременно, описывается формулами (9.9), (9.11).

Всё ли «гладко» при таком задании суммарного течения?

Будет ли оно устойчиво существовать?

Не разлетятся ли потоки при их искусственном совмещении?

Очевидно, в областях аналитичности результирующих скоростей и давлений уравнения Навье-Стокса выполняются, следовательно, течение может быть реализовано. В сингулярных же центрах мы не имеем возможности пользоваться этими уравнениями и можем только принять эти изолированные точки за границы областей и задать на них сосредоточенные силы и моменты, считая, что они получены предельным переходом от интеграла по замкнутому контуру от напряжений, при стремлении радиуса контура к нулю.

Таким образом, для общего равенства системы двух потоков, не достаточно выполнить одну процедуру (9.9), возможно потребуются ещё приложить в сингулярные центры сосредоточенные силы и моменты сил. Эти величины мы и будем считать искомыми при определении действия одного потока на другой.

Выделим вокруг особой точки – сингулярного центра некоторую область течения с границей  $S$ , рис 11-2, и рассмотрим равновесие заключённого в ней тела переменной массы, точнее массы,

изменяющихся по составу частиц, но не изменяющихся по объёму и количеству, так как течение стационарно.

На этот объём (на это тело) будет действовать на внешней границе  $S$  давление  $P$ , по нормали к поверхности и напряжения  $\tau$  на ней. На внутренней границе, то есть в центре, будет действовать сосредоточенная сила  $\bar{F}$  и момент сил  $\bar{M}$ . Эти величины создадут приращение  $\Delta\bar{K}$  количества движения жидкости внутри объёма за секунду (течение стационарно) и момента количества движения  $\Delta N$ . Этот факт выражается уравнением равновесия сил и моментов сил:

$$\bar{F} = \oint_S (P\bar{n} - \bar{\tau} + \bar{K}_s(\bar{n} \cdot \bar{\ell}))dS, \quad P = \rho\hat{P} \quad a$$

$$\bar{M} = \oint_S (P\bar{n} \times \bar{r} - \bar{\tau} \times \bar{r} + (\bar{K}_s \times \bar{r})(\bar{n} \cdot \bar{\ell}))dS \quad b$$

Здесь  $\times$  знак векторного произведения,

$\bar{n} \cdot \bar{\ell}$  - скалярное произведение векторов,

$\rho$  - плотность жидкости,

$K_s$  - поток количества движения через единицу площади за единицу времени,

$\bar{n}$  - внешняя нормаль к поверхности;

$\bar{\ell}$  - направляющий вектор количества движения;

$\bar{r}$  - радиус вектор точек границы.

Поток  $K_s$  определяется из формулы количества движения

$$\bar{K}_s = m_s \bar{V}$$

в которой  $m_s$  – масса протекающей жидкости через единицу площади, перпендикулярной потоку:

$$m_s = \rho|V|$$

$\rho$  - плотность эфира. Она, по предположению – константа

То есть

$$\bar{K}_s = \rho|V|\bar{V} \quad b$$

Мы изучаем совместимые по скоростям потоки, поэтому суммарная скорость

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad \Gamma$$

Давление определяется из равенства

$$P = \rho \hat{P}, \quad \text{д}$$

А приведённое давление  $\hat{P}$  определяется по формуле (9.9), (9.11):

$$\hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 - \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 + const \quad \text{е}$$

Напряжение на площадке, перпендикулярной орту  $i$  вдоль орта  $j$

$$\tau_{ij} = \nu \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{ж}$$

Теперь о контуре интегрирования. Согласно логике построения равновесия сил в (1 а,б), правые части при интегрировании по поверхности, не содержащей особой точки внутри себя, должны давать нуль. Из этого легко получить вывод, что результаты в (1 а, б) не зависят от выбора формы поверхности, лишь бы она содержала особую точку. Например, когда мы будем интегрировать по сфере, то результат не должен зависеть от радиуса.

Вектор внешней нормали в декартовой системе:

$$\bar{n} = \frac{x}{R} \bar{i} + \frac{y}{R} \bar{j} + \frac{z}{R} \bar{k} \quad \text{и}$$

Направляющей вектор количества движения

$$\bar{\ell} = \frac{\bar{K}}{|K|} = \frac{1}{|V|} (V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}) = \frac{\bar{V}}{|V|} \quad \text{к}$$

## §2 О сосредоточенных силах и моментах сил в сингулярных центрах обратимых тече: ий.

Прежде чем приступить к изучению сосредоточенных нагрузок в центрах потоков, возникающих при их взаимодействии, найдём по формуле (1) эти нагрузки для каждого потока, независимо от другого. Будут рассмотрены основные течения: исток (9.43), рис.11-3, тор (9.44), рис.11-4, битор (9.45), рис.11-5 и другие многоторы с большим числом торов. Может представить также интерес вихревой шнур плоской задачи, (8. 2-20), рис.11-6.

Полная симметрия истока, когда по всем направлениям движение одинаково, даёт в центре

$$F=M=0 \quad (2)$$

Такой же результат мы получим для квазиторы и многоторов если центральная точка расположена внутри граничной поверхности  $S$ . Это можно проверить и применяя формулы (1).

Но если мы проведём вычисления по контуру, содержащему только один «лепесток», например, по сектору  $S^1$ , рис.11-7, так что центральная точка попадает на границу, то мы обнаружим наличие момента сил в бесконечной близости к центру, и этот момент будет иметь конечное (а не бесконечное) значение. Для тора картина такова, что момент сил «навит» на кольцо, насаженное плотно на ось  $OZ$ . И он имеет конечное значение, если его вычислить по модулю по длине кольца, а как вектор, при таком расположении по кольцу даст ноль, что и обнаруживается при интегрировании по контуру, содержащему центр внутри себя, хотя этот момент «работает» в каждом отдельном секторе против сил трения. Аналогичные результаты получены и для других многоторов.

И теперь мы, наконец, можем дать чёткий ответ на вопрос: чем отличаются наши недиссипативные течения от течений идеальной жидкости? Недиссипативные течения (8. 2-13) по распределению скоростей и давлений совпадают с идеальными согласно своих равенств (а,б). Однако тензор напряжений не равен нулю, касательные и нормальные напряжения имеются, но движение жидкости таково, что нормальные напряжения не влияют на движение, (не входят в уравнение (2-13 а, б), а касательные напряжения имеются, производят работу, но они уравниваются внешними моментами. Всё это можно сказать и о вихревом шнуре, который мы оставили без внимания: вдоль оси  $OZ$  имеется распределённый по оси момент сил.

Таким образом, во всех рассмотренных примерах кроме истока, движение слоёв жидкости производится за счёт работы скрытых моторов, спрятанных в центре течений. Без этих моторов – (моментов сил) течение будет затухать.

Единственным идеальным течением, протекающим по траекториям идеальной жидкости и не имеющим внешних двигателей, является исток.

**§3. Теорема о напряжениях при взаимодействии.** Теперь, видимо, пришло время не называть наши необратимые течения недиссипативными, потому что это не совсем верно. Несмотря на то, что по скоростям и давлениям эти течения идеальны согласно (8, 2-13а,б), однако напряжения, порождаемый вязкостью и перепадом скоростей, имеются, но их действия уравниваются работой внешних сил и моментов, приложенных в центральной точке и на бесконечности. Такие течения теперь будем называть идеальными по скоростям. Они обратимы, ... если обратить внешние нагрузки.

Теперь обратимся к формулам этой части (1а,б). Эти формулы при внешней простоте очень трудоёмки при расчётах и трудно добраться до результата, не наделав попутно при расчётах массу ошибок, поэтому любые упрощения этих формул более чем желательны – необходимы.

Если картина течения имеет осевую или центральную симметрию, то следует подобрать такой симметричный контур, поверхность интегрирования, чтобы очевидно, без вычислений выполнялось равенство:

$$\oint_S \bar{\tau} ds = 0 \quad (3)$$

Тогда этот интеграл будет равен нулю по любому контуру.

Действительно, как было сказано выше, напряжение не влияет на распределение скоростей и этот интеграл обозначает только нагрузку в центре, как на границе области. Поскольку внутри нагрузок не задано. По этой причине, интеграл по любой поверхности, не содержащий центра, будет равен нулю. Из этого следует независимость результата от поверхности интегрирования. В рассматриваемых течениях как раз этот случай и реализуется. Таким образом, для этих течений верна формула:

$$\bar{F} = \oint_S (P\bar{n} + \bar{K}_s(\bar{n} \cdot \bar{i})) ds \quad (4)$$

**Теорема.** Если взаимодействуют два идеальных по скоростям течения, то есть одновременно присутствуют в пространстве, (а из наших предыдущих выводов следует что при этом их скорости складываются, суммируются) и если каждое из этих течений обладает свойством (3) на одном и том же контуре, то результирующее суммарное течение будет обладать этим же свойством.

**Доказательство** следует из линейности формулы (1ж).

#### §4 Упрощение формул (1а,б) при совмещении потоков.

Формула для силы уже упрощена в форме (4)

Далее из (1 в,к)

$$\bar{K}_s(\bar{n} \cdot \ell) = \rho \bar{V}(\bar{V} \cdot \bar{n}) = \bar{J} \quad (5)$$

Совмещение потоков происходит по формулам (9), (11) ч.9

Значение  $J$  для суммарного потока будет

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \rho(\bar{V}_1 + \bar{V}_2)(\bar{V}_1 + \bar{V}_2) \cdot \bar{n} = \rho \bar{V}_1(\bar{V}_1 \cdot \bar{n}) + \rho \bar{V}_2(\bar{V}_2 \cdot \bar{n}) + \rho \bar{V}_1(\bar{V}_2 \cdot \bar{n}) + \\ &+ \rho \bar{V}_2(\bar{V}_1 \cdot \bar{n}) = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{21} \end{aligned} \quad (6)$$

Если теперь подставить в (4) выражение для  $P$  из (9.9), (формула 9 части 9), то будет (при обозначении индексом  $\Sigma$  суммарного потока):

$$\bar{F}_\Sigma = \oint_s ((P_1 + P_2 + \delta P) \bar{n} + \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{21}) ds \quad (7)$$

Но согласно (2), (4) для наших течений

$$\oint_s (p_i \bar{n} + \bar{J}_i) ds = 0, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

и для  $F_\Sigma$  получим

$$\bar{F}_\Sigma = \oint_s (\delta p \bar{n} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{21}) ds$$

Используя (9.11) и обозначения (6), получим окончательную формулу

$$\bar{F}_\Sigma = \rho \oint_s (-(\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2) \bar{n} + \bar{V}_1(\bar{V}_2 \cdot \bar{n}) + \bar{V}_2(\bar{V}_1 \cdot \bar{n})) ds \quad (9)$$

Теперь пусть контур  $S$  содержит только один сингулярный центр внутри себя, принадлежащий потоку 1. Для него верно

(1-6) этой части, где слева будет  $\bar{M}_1$ . Течение 2 на этом же контуре даст ноль, так как оно аналитично внутри контура, поэтому

$$\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \rho \oint_S (-\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2) \bar{n} + \bar{V}_1 (\bar{V}_2 \cdot \bar{n}) + \bar{V}_2 (\bar{V}_1 \cdot \bar{n}) \times \bar{r} ds \quad (10)$$

### §5 Об отсутствии сопротивления при перемещении симметричных обратимых течений в жидкости с постоянной скоростью.

Рассматриваемые в этой части течения могут быть разбиты на две группы:

1. Симметричные течения, удовлетворяющие условию

$$V(r) = V(-r) \quad (11)$$

$r$  – радиус вектор точки пространства.

К таким течениям относится квазитор, тритор, пятитор и другие образования из большого числа совмещённых торов, когда это число нечётно. Квазитор дан в (9.44), рис (9.10). Многоторы, к сожалению, не выделены из общей формулы из экономии пространства и времени. Это может проделать читатель по тому методу, который разработан в §6 части 9. Тритор в сечении шестилистник. Скорости по кромке соприкасающихся лепестков совпадают. Рис.11-10.

2. Антисимметричные течения

$$V(r) = -V(-r) \quad (12)$$

это все остальные многоторы с чётным числом торов и исток. Сюда же можно отнести и вихревой шнур.

Перемещение с постоянной скоростью - это совмещение заданного потока с потоком постоянной скорости. Поскольку оба потока потенциальны (§8, ч.9), то это совмещение возможно - (§2, ч 9). Сосредоточённые нагрузки будем определять по формулам (9), (10).

Течение с постоянной скоростью симметрично в смысле (11). При совмещении его с симметричным течением каждый из 3-х членов в (9) будет нечётным (антисимметричным), потому что

$$n(r) = -n(-r) \quad (13)$$

и при интегрировании по сфере дают ноль и в результате, сила сопротивления движению будет отсутствовать.

Мы получили нерадовой результат:

При движении симметричных течений с постоянной скоростью сопротивление отсутствует, несмотря на наличие вязкости. Это сопротивление отсутствует при любой ориентации течения по отношению к потоку постоянной скорости.

**§6. Момент сил, возникающий в симметричном течении при его движении с постоянной скоростью.**

Отсутствие силы сопротивления, полученное в предыдущем параграфе, ещё не означает, что сопротивления нет. Возможно, потребуется приложить дополнительный внешний момент сил, распределённый равномерно вокруг оси  $OZ$  в центре, чтобы поддержать движение тора, точнее движение его частиц, которые движутся, как мы знаем, с трением. Приращение этого момента и обозначает возникновение сопротивления, так как этот момент совершает работу по преодолению трения. Здесь рассмотрен, исходя из соображений симметрии, вопрос о наличии момента. Количественное его значение мы не определяли, поскольку это громоздко и пока не представляет для нас необходимости. Без потери общности рассматривается квазитор, или просто тор, для удобства, хотя не следует забывать, что траектории его частиц не есть окружности.

Рассмотрим равновесие двух противоположных секторов, ограниченных пересекающимися вдоль оси  $OZ$  плоскостями  $A$  и  $B$ , и поверхностью тора между ними. На этой поверхности все траектории одинаковы и полностью на ней содержатся. Сечение тора плоскостью показано на рис.11- 12.

Простейший анализ формулы (10), при учете симметрии картины 12 относительно осей  $OZ$ ,  $OX$ , показывает, что если приращение момента за счет интеграла возникает, то это приращение и в правом и в левом контуре одинаково и по модулю и по направлению, поэтому они уравновесить друг друга не могут и возникает вращательный момент, который стремится развернуть тор так, чтобы он встречный поток «просасывал» через центр. Если же скорость потока параллельна оси  $OZ$ , то момент не возникает.

Чтобы достоверно определить наличие момента при движении под углом к оси  $OZ$ , удобно теперь взять контур интегрирования по сфере,

окружающей центр (рис.13) и провести аналогичный анализ по четырем соответственным (симметричным) точкам по формуле (10). Анализ подтверждает возникновение момента. Аналогичный вывод мы получим для любого другого обратимого симметричного течения.

### **§7. Сила сопротивления при движении антисимметричных течений претендентов в потоке.**

К таким течениям относятся исток и многоторы с четным числом совмещенных торов. Для них выполнено (12). Мы не можем в этом случае доказать, что сила сопротивления в (9) будет ноль, так как теперь под-интегральное выражение – чётно, но теперь мы можем утверждать, что общий момент в (10) не получает приращения в силу нечетности под-интегрального выражения.

Была найдена сила возникающая в центре истока под действием набегающего потока. Она равна

$$\vec{F} = 4\pi\rho \cdot \vec{V} \cdot a \quad (14)$$

$\vec{V}$  - скорость потока,  $\rho$  - плотность эфира,  $a$  - константа истока.

Если  $a > 0$  – источник в потоке, то сила положительна-направление силы совпадает с направлением скорости потока. Источник увлекается потоком.

Если  $a < 0$ , то наоборот, сток движения против потока. В обоих случаях, если сравнить с рис8 ч.10 движение происходит вперед хвостом. Следует обратить внимание на разгонный эффект, возникающий в случае стока в потоке: сток в «стоячей» среде не испытывает действия посторонних сил, но на скорости возникает сила, действующая вдоль скорости и увеличивающая эту скорость. До каких пределов скорость может расти? Стационарные уравнения, которые мы сейчас используем не могут дать ответа на этот вопрос.

### **§8. Взаимодействие основных обратимых немасштабных течений.**

Основными обратимыми течениями будем называть истоки, торы, многоторы в осесимметричном случае и вихревые шнуры в плоском случае.

По формуле (9) изучалась сила взаимодействия между двумя такими течениями в осесимметричном случае, центры которых расположены на расстоянии  $b$  друг от друга.

Эти течения описываются формулами типа

$$\bar{V}_i = a_i R^{s_i} \bar{G}_i(\theta), \quad i=1,2$$

Для задания их взаиморасположения достаточно знать расстояние  $b$ , угол  $\theta_0$  характеризующий расположение одного центра по отношению к другому (в сферической системе угол  $\varphi$  не имеет значения при осевой симметрии), и еще нужно два угла  $\alpha, \beta$ , ориентирующие ось симметрии одного претендента по отношению к другому. При рассмотрении их взаимодействий была найдена следующая формула для силы, действующей на их центры:

$$F = a_1 a_2 G(s_1, s_2, \theta, \alpha, \beta) b^{s_1 + s_2 + 2} \quad (15)$$

Неразмерная функция  $G$  дана здесь в самом общем виде. Направление силы совпадает с центральной линией (соединяющей центры течений).

Приводим результаты некоторых частных расчетов.

1. Взаимодействие двух истоков(42) ч.9:

$$F = -\frac{4\pi\rho a_1 a_2}{b^2} \quad (16)$$

при  $a_1 a_2 > 0$  сила отрицательна, отталкивание,

при  $a_1 a_2 < 0$  сила положительна, притяжение.

2. Взаимодействие двух квазиторов, расположенных на общей оси симметрии OZ:

$$F = 37.6 \frac{4\pi\rho a_1 a_2}{b^4} \quad (17)$$

При  $a_1 a_2 > 0$ - притяжение, сила положительна, то есть торы, сорентированные одинаково – притягиваются, сорентированные противоположно – отталкиваются. Рис. 14.

Вообще говоря, положительное или отрицательное значение силы следует только из уравнений равновесия и в рассматриваемых двух случаях оно только совпадает со знаком произведения  $a_1 a_2$ , но не более того.

## Рисунки к части 11

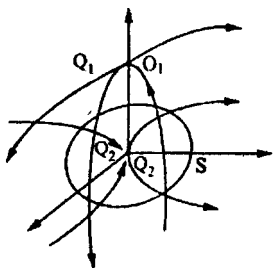


рис. 11.1

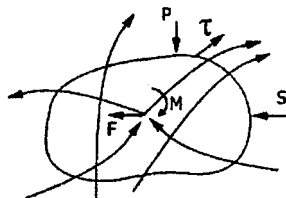


рис. 11.2

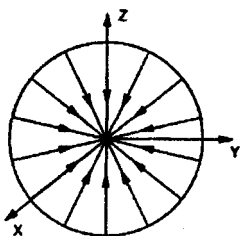


рис. 11.3

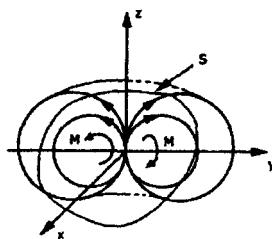


рис. 11.4

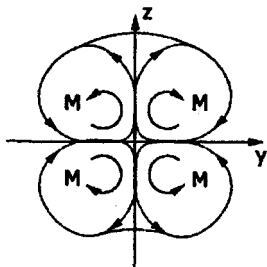


рис. 11.5

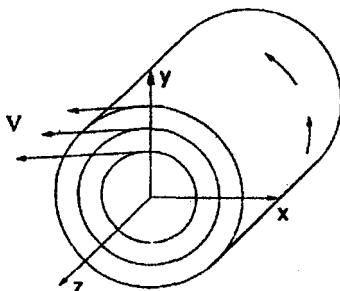


рис. 11.6

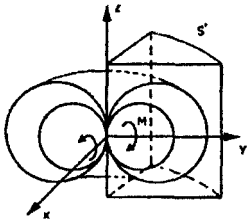


рис. 11.7

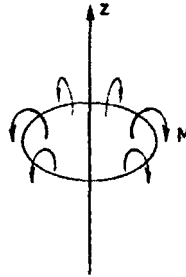


рис. 11.8

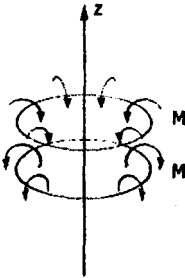


рис. 11.9

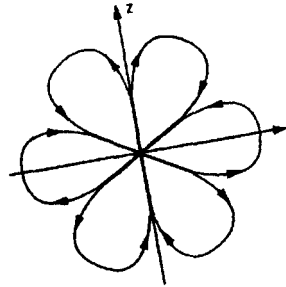


рис. 11.10

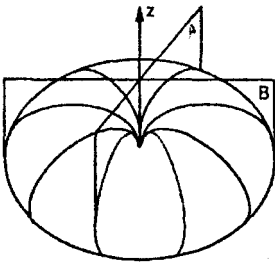


рис. 11.11

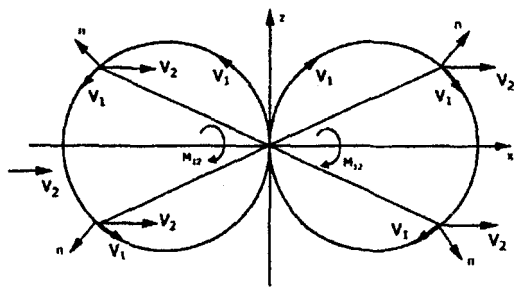


рис. 11.12

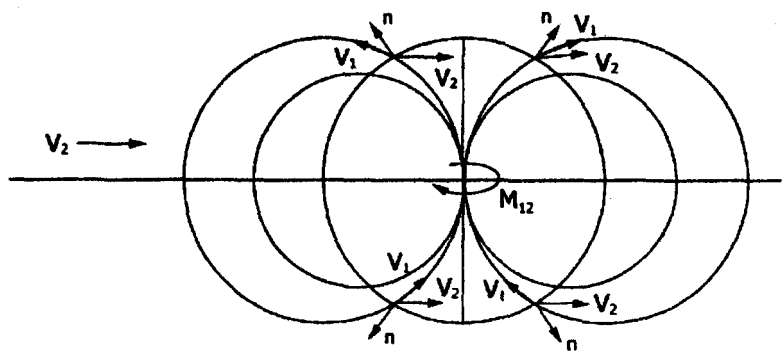


рис. 11.13

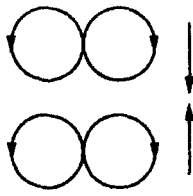


рис. 11.14

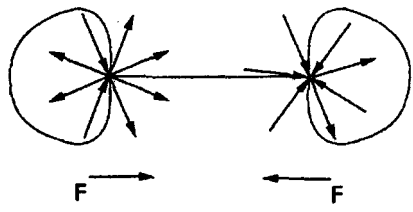


рис. 11.15

## Часть 12

### ГИДРОДИНАМИКА. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

#### § 1. Действие потенциального недиссипативного течения на произвольный объём внутри него.

Недиссипативные в нашем понимании течения – это течения, идеальные по скоростям. Они обладают свойствами как идеальной жидкости, так как описываются уравнениями движения идеальной жидкости (2-13) ч.8 при дополнительном условии  $\Delta V = 0$ , так и реальной, поскольку  $\nu \neq 0$ . Это совмещение свойств возможно потому, что напряжения и скорости так распределены в пространстве, что напряжения не влияют на формирование поля скоростей и уравниваются внешними нагрузками. Короче говоря, поля скоростей и давлений в этом случае находятся из уравнений идеальной жидкости, но удовлетворяют и уравнениям реальной жидкости.

подавляющее большинство этих течений – потенциальны (§ 7, ч.9). А для потенциальных течений идеальной жидкости справедлив интеграл Коши:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} = C = const \quad (1)$$

где константа  $C$  одинакова по всему объёму жидкости, а не только вдоль линии тока, как для обычных течений.

Теперь силу действия потока на малый объём внутри него, представленную в ч. 9 в форме (4), с учетом (5) можно записать в следующем виде:

$$F = \rho \oint_s \left( -\frac{V^2}{2} \bar{n} + \bar{V}(\bar{V} \cdot \bar{n}) \right) dS \quad (2)$$

где  $\bar{n}$  - внешняя нормаль к поверхности интегрирования.

**§2. Исследование разделённой диссипативной системы в осесимметричном случае при условии немасштабности.**

Общий вид разделенной диссипативной системы приведен в (1-19)ч.8. Здесь будем вводить дополнительное условие – отсутствие вращения вокруг оси OZ, что в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , которая здесь будет использоваться, запишется так:

$$V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (3)$$

Соответственно изменится запись (1-19)ч.8:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial z} \quad \text{б}$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} = \frac{\partial \hat{P}_2}{v \partial r} \quad \text{в}$$

(4)

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} = \frac{\partial \hat{P}_2}{v \partial z} \quad \text{г}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{д}$$

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{P} \quad \text{е}$$

Исключаем отсюда  $\hat{P}_1$  перекрёстным дифференцированием:

$$V_r \frac{\partial H}{\partial r} + V_z \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{V_r}{r} H = 0 \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{r \partial r} - \frac{H}{r^2} = 0 \quad \text{б}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{в}$$

$$H = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad \text{г}$$

Немасштабное решение этой системы ((1-20), ч.8) при условии (3) будет следующим:

$$V_z = \check{a}r^S B(t), \quad V_r = \check{a}r^S C(t), \quad \text{(6)}$$

$$P_2 = \check{a}r^{S-1} f(t), \quad P_1 = \check{a}r^{2S} g(t), \quad t = \frac{z}{r}$$

Подставляя это в (5), получим систему обыкновенных (простых) дифференциальных уравнений:

$$U'(B - Ct) + UC(s - 2) = 0 \quad \text{а}$$

$$U''(1 + t^2) + U'(3 - 2s) + Us(s - 2) = 0 \quad \text{б}$$

$$(s + 1)C - tC' + B' = 0, \quad \text{(7)}$$

$$U(t) = C' - sB + tB' \quad \text{в}$$

При этом из (5г) для  $H$  запишем:

$$H = ar^{S-1}U(t) \quad \text{(8)}$$

Система (7) будет рассмотрена здесь при дополнительном условии: при  $t=0$ , т.е. при  $z=0$  (см.(6)), функции  $C, B$  и их первые производные имеют конечные значения

$$-\infty < C_0, B_0, C'_0, B'_0 < +\infty \quad (9)$$

Запишем систему (7) при  $t=0$  :

$$U'_0 B_0 + U_0 C_0 (s-2) = 0 \quad \text{а}$$

$$U''_0 + U_0 s (s-2) = 0 \quad \text{б}$$

$$(s+1)C_0 + B'_0 = 0, \quad (10) \quad \text{в}$$

$$U_0 = C'_0 - sB_0. \quad \text{г}$$

Продифференцируем (7а). Учитывая (7в), получим:

$$U''(B-Ct) - 4CU' + C'U(s-2) = 0 \quad (11)$$

И, положив  $t=0$ , добавим к системе (10.8) еще одно равенство:

$$U''_0 B_0 - 4C_0 U'_0 + U_0 C'_0 (s-2) = 0 \quad (12)$$

В системе (10) можно взять за независимые начальные данные  $U_0, B_0, C_0$  и выразить через них производные  $U'_0, U''_0, B'_0, C'_0$  и затем сравнить значения  $U''_0$  из (10,б) и из (12), как функции  $U_0, B_0, C_0$ . Получим дополнительное условие для начальных данных:

$$F_2(C_0, B_0, U_0) = 0 \quad (13а)$$

Затем аналогичную процедуру проделаем для сравнения третьих производных, полученных при  $t=0$  из уравнений (7а) и (7,б):

$$F_3(C_0, B_0, U_0) = 0 \quad (13,б)$$

и, аналогично, для четвертых

$$F_4(C_0, B_0, U_0) = 0 \quad (13,в)$$

Затем исследуем совместность полученной системы (13,а,б,в).  
Докажем, что при  $s \neq 2$  она несовместна.

Доказательство: Из (10,г)

$$C'_0 = U_0 + sB_0 \quad \text{а}$$

из (10,в)

$$B'_0 = -C_0(s+1) \quad \text{б}$$

из (10.а)

$$U'_0 = \frac{-U_0 C_0 (s-2)}{B_0} \quad (14) \quad \text{в}$$

из (10.б)

$$U''_0 = -U_0 s(s-2) \quad \text{г}$$

Из (12), используя (14), получим:

$$U''_0 B_0 + \frac{4C_0^2 U_0 (s-2)}{B_0} + U_0 (U_0 + sB_0)(s-2) = 0 \quad (15)$$

Сравнивая (15) и (14,г), получаем:

$$4 \frac{C_0^2}{B_0^2} + \frac{U_0}{B_0} = 0 \quad (16)$$

или

$$4 \frac{C_0^2}{B_0^2} = -\frac{U_0}{B_0} = 4M^2 \quad (17)$$

Здесь обозначено:

$$\frac{C_0}{B_0} = M, \quad \frac{U_0}{B_0} = -4M^2 \quad (17,а)$$

И теперь (14,в) будет иметь вид:

$$U'_0 = -U_0 M (s - 2) \quad (18)$$

Зависимости (16), (17) и есть функция  $F_2$ , о которой упоминалось выше.

Теперь проводим второй круг сравнений с целью получить  $F_3$

Находим третьи производные из (7,а,б)

$$U'''(B - Ct) + U''(B' - C't - 5C) + U'C'(s - 6) + UC''(s - 2) = 0 \quad \text{а} \quad (19)$$

$$U'''(1 + t^2) + U''t(5 - 2s) + U'(s^2 - 4s + 3) = 0 \quad \text{б}$$

При  $t = 0$  получим отсюда

$$U'''_0 B_0 + U''_0(B'_0 - 5C_0) + U'_0 C'_0(s - 6) + U_0 C''_0(s - 2) = 0 \quad \text{а} \quad (20)$$

$$U'''_0 + U'_0(s^2 - 4s + 3) = 0 \quad \text{б}$$

Здесь следует еще выразить  $C''_0$  через начальные параметры  $U_0, C_0, B_0$ . Из (7г), (14) и (18) имеем

$$C''_0 = -U_0 M(s - 2) + C_0(1 + s)(1 - s) \quad (21)$$

Теперь подставляем (21), (14) в (20) и, разделив на  $B_0$ , получим:

$$U'''_0 = -U_0 M (s - 2)(4M^2(2s - 8) - s^2 + 12s + 1) \quad \text{а} \quad (22)$$

$$U'''_0 = U_0 M(s - 2)(s^2 - 4s + 3) \quad \text{б}$$

Сравнивая (22а) и (22,б) при  $U_0 \neq 0$ ,  $s \neq 2$ ,  $M \neq 0$ , получаем

$$M^2 = \frac{-2s - 1}{2s - 8} \quad (23)$$

С целью уточнить допустимые значения параметра  $s$  проделаем ещё один круг, то есть теперь будем сравнивать четвёртые производные  $U''''$  при  $t = 0$ , найденные из двух независимых уравнений – (5а) и (5б). Дифференцируем (17а,б):

$$U''''(B - Ct) + U''''(2B' - 2C't - 6C) + U''(B'' - C''t + C'(s - 12)) + U'C''(2s - 8) + UC'''(s - 2) = 0, \quad (24)$$

$$U''''(1 + t^2) + U''''t(7 - 2s) = U''(s^2 - 6s + 8) = 0 \quad (25)$$

При  $t = 0$  это дает

$$\begin{aligned} U_0''B_0 + U_0''(2B_0' - 6C_0) + U_0''(B_0'' + C_0'(s - 12)) + \\ + U_0C_0''(s - 2) + U_0'C_0'(2s - 8) = 0 \quad \text{а} \\ U_0'' + U_0'(s^2 - 6s + 8) = 0 \quad \text{б} \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь не определены  $C_0''$  и  $B_0''$ . Дифференцируя (7в), получим с учетом (7г) при  $t = 0$ :

$$B_0'' = -sC_0' = -s(U_0 + sB_0) \quad (27)$$

а дифференцируя дважды (7г), найдем при  $t = 0$ :

$$C_0'' = s(2 - s)(2U_0 + sB_0) \quad (28)$$

Сравнивая теперь четвертые производные и учитывая выражения остальных производных прочих параметров в (26) через начальные параметры, согласно формул (22,б), (14), (27), (28), (17), (17а), (23), после упрощений получим уравнение:

$$4s^2 + 3s + 2 = 0 \quad (29)$$

Это уравнение не имеет вещественных корней. Мы доказали, что при некоторых дополнительных условиях система (7) несовместна. Одним из условий является  $s \neq 2$ . Оно поставлено перед анализом системы (12). Если  $s = 2$ , то система (7) совместна. Решение получено в части 9. Далее было поставлено условие (9) о конечности начальных значений  $C, B$  при  $t = 0$ . Здесь мы пока не нашли возможности избавиться от этого условия.

Далее, часто использовалось деление на  $B_0$ . Поэтому рассмотрим случай  $B_0 = 0$

Из (10а) допустимо:

$$\begin{aligned} 1) \quad & U_0 = 0 \\ 2) \quad & C_0 = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Если принять первую возможность, то будем иметь:

из (18)

$$U_0' = -U_0 M(s-2),$$

из (14,г)

$$U_0'' = -U_0 s(s-2),$$

из (22б)

$$U_0''' = U_0 M(s-2)(s-1)(s-3),$$

из (24,б), (14,г)

$$U_0'''' = U_0 s(s-2)(s-3)(s-4).$$

То есть и для нечётных производных  $U_0^{(k)}$ , получаемых из (7,а) и для чётных, получаемых из (7,б) выражение таково:

$$U_0^{(k)} = U_0 f_k(s) \tag{31}$$

Если  $U_0 = 0$ , то и  $U_0^{(k)} = 0$ , то есть

$$U \equiv 0 \tag{31}$$

в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Теперь из (8) и (5г)

$$\nabla \times \bar{V} = \text{rot} \bar{V} = 0 \quad (33)$$

то есть течение безвихревое и, согласно формулы:

$$\nabla^2 \bar{V} = \nabla(\nabla \bar{V}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{V}) \quad (34)$$

в которой следует положить (см. (4,д))

$$\nabla \bar{V} = \text{div} \bar{V} = 0$$

получим, учитывая (33),

$$\nabla^2 \bar{V} = 0,$$

то есть течение недиссипативно. Нас же интересуют здесь диссипативные течения. Недиссипативные были рассмотрены в части 9. Остановимся на второй возможности:

$$B_0 = C_0 = 0$$

Из (10в) будет

$$B_0' = 0$$

Из (12)

$$C_0' = 0$$

Из (10,г)

$$U_0 = 0$$

То есть опять приходим к рассмотрению первой возможности.

Было ещё предъявлено ограничение  $M = 0$ , но оно сводится, согласно (17а), к тем же двум возможностям.

Таким образом верна

ТЕОРЕМА Если на плоскости  $Z=0$  (то есть при  $t = 0$ ) потребовать конечности компонентов скорости, то диссипативное немасштабное решение разделенной системы Навье – Стокса возможно только при  $s = 2$

## Часть 13

### ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ КРУГЛОГО КОНУСА

Рассмотрим истечение несжимаемой реальной жидкости через отверстие бесконечно малого диаметра, расположенное в вершине круглого конуса (рис. 1) неограниченных размеров.

Движение жидкости подчиняется системе уравнений Навье – Стокса:

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\nabla \hat{P} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad \text{а} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{б}$$

Эта система в развёрнутой форме дана в части 8 в различных системах координат.

На стенках конуса ( $\theta = \pm\theta_0$ ) - прилипание:

$$\vec{V}(\theta_0) = 0 \quad \text{в}$$

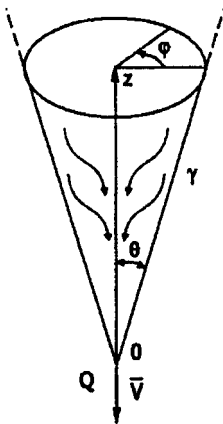


Рис. 1

Отверстие не имеет размера, стенки конуса не ограничены, то есть задача немасштабна по своей конструкции, поэтому она входит в нашу компетенцию. (Теория решения немасштабных задач разработана в части 8).

Будем искать течение, не вращающееся вокруг оси  $OZ$ . В сферической системе это условие выглядит так:

$$\vec{V} = \hat{P}, \vec{V}(R, \theta), \quad V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

Не отрицая того факта, что вращающиеся течения допустимы, мы ищем простейшие решения.

Согласно нашей теории, немасштабные решения делятся на три группы:

1. Система (1) – сплошная диссипативная система. Её немасштабные решения имеют вид:

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{\nu}{R} G(\theta), & \text{а} \\ V_\theta &= \frac{\nu}{R} D(\theta), & \text{б} \\ \hat{P} &= \frac{\nu^2}{R^2} Q(\theta), & \text{в} \\ 0 \leq \theta &\leq \pi \end{aligned} \quad (3)$$

2. Разделенная диссипативная система ( см. (19) ч.8):

$$\begin{aligned} (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} &= -\nabla \bar{P}_1, & \text{а} \\ \nu \nabla^2 \bar{V} &= \nabla \hat{P}_2, & \text{б} \\ \nabla \cdot \bar{V} &= 0, & \text{в} \\ \hat{P}_2 + \hat{P}_1 &= \hat{P} & \text{г} \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно §3 части 9, эта система имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} V_R &= \check{\alpha} R^2 C(\theta), & \text{а} \\ V_\theta &= \check{\alpha} R^2 D(\theta), & \text{б} \\ \hat{P}_1 &= \check{\alpha}^2 R^4 g(\theta), & \text{в} \\ \hat{P}_2 &= \check{\alpha} \nu R f(\theta) & \text{г} \end{aligned} \quad (5)$$

3. Разделенная недиссипативная система:

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\nabla \hat{P}, \quad \text{а}$$

$$\nabla^2 V = 0, \quad \text{б}$$

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{в}$$

Согласно (28), ч.9 эта система имеет следующее решение

$$V_R = \bar{a} R^s C(\theta), \quad \text{а}$$

$$V_\theta = \bar{a} R^s D(\theta), \quad \text{б}$$

$$\hat{P} = \bar{a}^2 R^{2s} g(\theta) \quad \text{в}$$

Здесь  $C, D, g, f$  - искомые функции,  
 $\bar{a}$  - произвольная размерная константа,  
 $s$  - действительное неразумное число.

Решения (5) и (7) есть одновременно и решения системы (1).  
 Наше решение, то есть решение поставленной задачи при заданной границе и условии прилипания на ней, находится в одной из трех названных групп. Но в какой ?

Докажем, что его нет в классе недиссипативных решений (6), (7), которые в наиболее простой форме даны в формуле (32) ч.9.

Если в некоторой точке пространства  $M$  выполнено условие  $V=0$  ( а это имеет место на границе конуса (см. (1,в)), то из (32) ч.9 при  $s \neq -2$  следует:

$$y_{s+1}(u)|_M = y'_{s+1}(u)|_M = 0,$$

что из (32г) ч.9 дает:

или 1)

$$|u| = 1,$$

то есть  $\cos\theta = \pm 1$ , следовательно,  $\theta = k\pi$ , что означает, что конус вырождается в прямую линию и задача теряет смысл, или 2):

$$y_{S+1}^* \Big|_M = 0$$

Дифференцируя (32г), ч.9 покажем, что в точке  $M$  все производные функции  $y$  равны нулю, то есть

$$y_{S+1}^{(k)}(u) = 0$$

что означает

$$y_{S+1} = const$$

и из (32а,б) ч.9 с учетом условия прилипания, будет:

$$\bar{V} \equiv 0$$

К этому же тривиальному решению мы приходим и используя (32в) ч.9. Но эти решения нас не интересуют.

Таким образом доказано, что искомое решение задачи не принадлежит группе недиссипативных решений (6), (7).

Его нет и среди решений разделенной диссипативной системы (4), (5), так как там скорость растет с расширением конуса, а не наоборот, как это должно быть согласно геометрии конуса и уравнению неразрывности.

Следовательно, искомое решение может быть только в группе сплошных диссипативных решений (1) - (3).

Подставив (3) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-C^2 + C'D - D^2 = 2Q + C'' + C'ctg\theta, \quad a$$

$$D'D = -Q' + C', \quad (8)$$

$$C + D' + Dctg\theta = 0. \quad b$$

Сразу можно проинтегрировать (6):

$$\frac{D^2}{2} + Q - C = A = const, \quad (9)$$

или

$$Q = A + C - \frac{D^2}{2} \quad (10)$$

Подставляя значения  $C$  и  $Q$ , выраженные через  $D$  из (10) и (8.а), получим:

$$-D'^2 - 3DD'ctg\theta + D^2 - DD'' - D'ctg^2\theta + D(3ctg\theta + ctg^3\theta) + D''' + 2D''ctg\theta = -2A \quad (11)$$

Задача свелась к решению одого дифференциального уравнения в простых производных.

Граничные условия таковы:

1. На оси симметрии  $OZ$  в силу симметрии течения

$$D|_{\theta=0} = 0$$

2. На стенках конуса при  $\theta = \pm\theta_0$  - прилипание, то есть

$$B=C=0$$

3. Заданный расход жидкости в единицу времени.

Не удалось получить аналитическое решение уравнения (11) при этих условиях. Приближенный метод решения дан в журнале №3 ( "Эфирна. физика и размерная математика").

Из формул (3), которые, как показано, дают общий вид решения, следует, что скорость обратно пропорциональна радиусу, а не квадрату радиуса, как при свободном истечении, в отсутствие границы конуса.

## Часть 14

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ

Согласно (2-20), ч.8, вихревой шнур – это вращение жидкости вокруг оси со скоростью

$$(1) \quad V_r = V_z = 0, \quad V_\varphi = \frac{C}{r}, \quad C = \text{const}$$

Это недиссипативное в нашем смысле, то есть идеальное по скоростям течение во всем пространстве. На оси вращения вращательная компонента скорости неограниченно велика. Это течение потенциально (§7, ч.8) во всем пространстве, кроме точек оси вращения.

Мы будем определять здесь силу взаимодействия двух вихревых шнуров I и II (рис.1). Шнур I вращается вокруг оси  $OZ$ , второй – вокруг прямой, параллельной этой оси на расстоянии  $b$  от неё, пересекая ось  $OX$  в точке  $x = b$ . Это плоская гидродинамическая задача.

Будем определять силу, действующую со стороны второго вихря на первый. Для этого выделим пояс  $S$  единичной ширины на цилиндрической поверхности радиуса  $r_1$ , ось которой совпадает с осью  $OZ$  и будем изучать гидродинамические силы, действующие на него.

Согласно теории, изложенной в части 11, эти силы не зависят от формы поверхности, в данном случае от её радиуса, и в сумме равны силе действия одного течения на вихревую ось другого.

Согласно теории, изложенной в §2 части 9, наши течения совместимы по скоростям:

$$\bar{V}_z = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad (2)$$

а сила взаимодействия для таких течений может быть определена по формуле (9)ч.11, в которой третий член равен нулю в силу ортогональности векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{V}_1$

$$\vec{F}_z = \rho \oint_S (-\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{n} + \vec{V}_1 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}) dS$$

Поскольку мы берём в качестве контура интегрирования поясok единичной ширины, то в результате интегрирования получим распределённую по оси  $OZ$  силу, то есть силу, приходящуюся на единицу длины этой оси.

Компоненты скоростей в декартовой системе координат (рис.2) с учётом (1) для первого вихря:

$$V_{1x} = -V_{1\varphi} \sin \varphi, \quad V_{1y} = V_{1\varphi} \cos \varphi \quad (4)$$

для второго:

$$V_{2x} = -V_{2\alpha} \sin \alpha, \quad V_{2y} = V_{2\alpha} \cos \alpha \quad (5)$$

где

$$V_{1\varphi} = \frac{C_1}{r_1}, \quad V_{2\alpha} = \frac{C_2}{r_2}$$

Из геометрии имеем:

$$r_2^2 = (b - r_1 \cos \varphi)^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi - 2bx + r_1^2,$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2,$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r_1}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r_1}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r_2}, \quad \cos \alpha = \frac{x-b}{r_2}$$

Таким образом, компоненты скоростей на пояске определяются формулами:

$$V_{1x} = -\frac{C_1 y}{r_1^2}, \quad V_{1y} = \frac{C_1 x}{r_1^2}, \quad \text{а} \quad (7)$$

$$V_{2x} = -\frac{C_2 y}{r_2^2}, \quad V_{2y} = \frac{C_2(x-b)}{r_2^2}, \quad x, y \in S \quad \text{б}$$

Внешнюю нормаль к цилиндрической поверхности находим по формуле

$$\vec{n} = \frac{x}{r_1} \vec{i} + \frac{y}{r_1} \vec{j}, \quad x, y \in S \quad (8)$$

компоненту силы вдоль оси  $OX$  из (3) по формуле:

$$\vec{F}_{\Sigma x} = \rho \oint_S (-\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) n_x + V_{1x} (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}) dS \quad (9)$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для всех элементов этой формулы, получим после простых преобразований:

$$F_{\Sigma x} = \rho \frac{C_1 C_2}{r_1} \oint_S \frac{b-x}{b^2 - 2bx + r_1^2} dS \quad (10)$$

Для вычисления интеграла перейдём к полярной системе координат, в которой

$$x = r_1 \cos \varphi, \quad dS = r_1 d\varphi$$

Тогда получим:

$$F_{\Sigma x} = \rho C_1 C_2 \int_0^{2\pi} \frac{b - r_1 \cos \varphi}{b^2 - 2br_1 \cos \varphi + r_1^2} d\varphi \quad (11)$$

Интеграл табличный:

$$J = \frac{\pi}{b} \quad (12)$$

И теперь для силы, действующей на поясok единичной ширины вокруг оси вращения первого вихря получаем:

(13)

$$-F_{0x} = F_{\Sigma x} = \frac{\pi \rho C_1 C_2}{b}$$

$b$  - расстояние между осями вихрей (рис. (1)),

$C_1, C_2$  -

- размерные константы - интенсивности завихренности.

Формула (9) ч.11, с которой начинаются вычисления, даёт выражение для внешней силы  $F_{\Sigma}$ , приложенной к сингулярному центру течения для соблюдения равновесия. Следовательно, сила действия потоков друг на друга  $F_0$  будет иметь обратный знак, что и отражено в (13)

Если  $C_1 C_2 > 0$ , то есть вихри вращаются в одну сторону, то сила отрицательна и, следовательно, направлена в отрицательную сторону оси  $Ox$ , то есть происходит отталкивание. Если вихри закручены в разные стороны, то происходит притяжение. Вычисление компоненты силы вдоль направления  $Oy$  показывает, что она равна нулю

$$F_{\Sigma y} = 0 \quad (14)$$

Найдена сила взаимодействия параллельных вихревых шнуров.

При неограниченном увеличении константы  $C_2$ , при одновременном увеличении расстояния между вихрями  $b$ , так чтобы отношение  $C_2/b$  давало постоянную величину (скорость второго потока на оси первого), в пределе получим силу действия потока постоянной скорости на вихревой шнур, перпендикулярную направлению этого потока:

$$F = -\pi \rho C_1 V_{\infty} \quad (15)$$

Эта сила в два раза меньше известной подъёмной силы Жуковского, возникающей при действии постоянного потока на вращающийся непроницаемый цилиндр и совпадает с ней по направлению. Для доказательства нужно представить (из (1)):

$$C_1 = r V_{\varphi}$$

Примечания. 1. Формулы типа (4) ч.11, (2) ч.12 написаны для симметричных течений и симметричных контуров, на которых трение не вносит своего вклада в баланс сил. Если такого контура нет, то трение нужно учитывать. 2. Формула (9) ч.11 даёт выражение для силы в присутствии постороннего потока. Несимметричное течение может иметь собственную центральную силу.

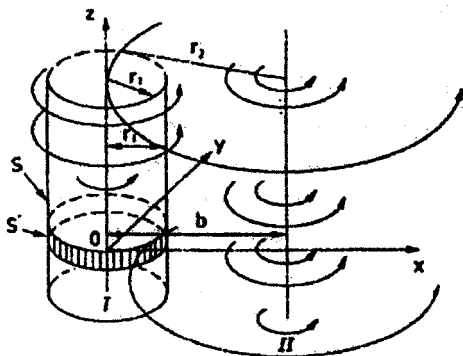


рис. 14.1

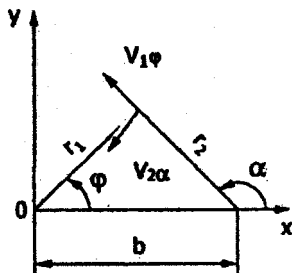


рис. 14.2

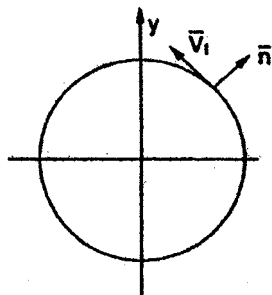


рис. 14.3

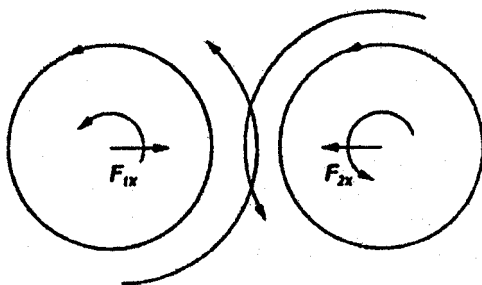


рис. 14.4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. Базовые физические принципы.....	3
Часть 2. Размерная формула .....	4
Часть 3. Преобразование $A$ – главная математическая процедура.	
Введение.....	12
Глава 1. Системы растяжения.....	13
Глава 2. Математические процедуры над наборами чисел.....	24
Глава 3. Функции растяжения.....	27
Глава 4. Преобразование $A$ .....	32
Глава 5. Общий вид результата АП.....	43
Глава 6. Реакция $A$ – преобразования на элементарные функции.....	52
Часть 4. Реакция сдвиговых линейных преобразований на показательные, линейные и синусоидальные функции.....	63
Часть 5. Отношение слагаемых степенного двучлена при критических параметрах... ..	71
<u>Приложения А – преобразования.</u>	
<i>Теория упругости.</i>	
Часть 6. Потеря устойчивости длинных стержней, скреплённых с линейными АП-основаниями.....	73
Часть 7. Распределение энергии между стержнем и основанием при потере устойчивости.....	79
<i>Немасштабная гидродинамика.</i>	
Часть 8.	
Введение.....	83
Глава 1. Система уравнений Навье – Стокса.....	84
Глава 2. Плоские немасштабные течения реальной жидкости....	98
Часть 9. Немасштабные осесимметричные течения реальной жидкости.....	121
Часть 10. Видимая поверхность сингулярных течений.....	144
Часть 11. Взаимодействие недиссипативных потенциальных течений.....	151
Часть 12. Гидродинамика. Дополнительная информация.....	164
Часть 13. Истечение из круглого конуса.....	173
Часть 14. Взаимодействие параллельных вихревых шнуров.....	178

## **Цитированная литература.**

### К части 3:

1. И.С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов...  
“Наука”, Москва, 1971г.

### К части 6:

1. А.А.Вольмир. Устойчивость упругих систем. Изд. физ. мат. лит. Москва, 1963
2. Ржаницын А.П. Устойчивость равновесия упругих систем. Изд. техн. теор. лит., Москва, 1965

### К части 9:

1. Г.Корн и Т.Корн. Справочник по математике. “Наука”, Москва, 1978г.
2. И.И.Ольховский. Курс теоретической механики для физиков МГУ, Москва, 1978г.
3. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям “Наука”, Москва, 1965.

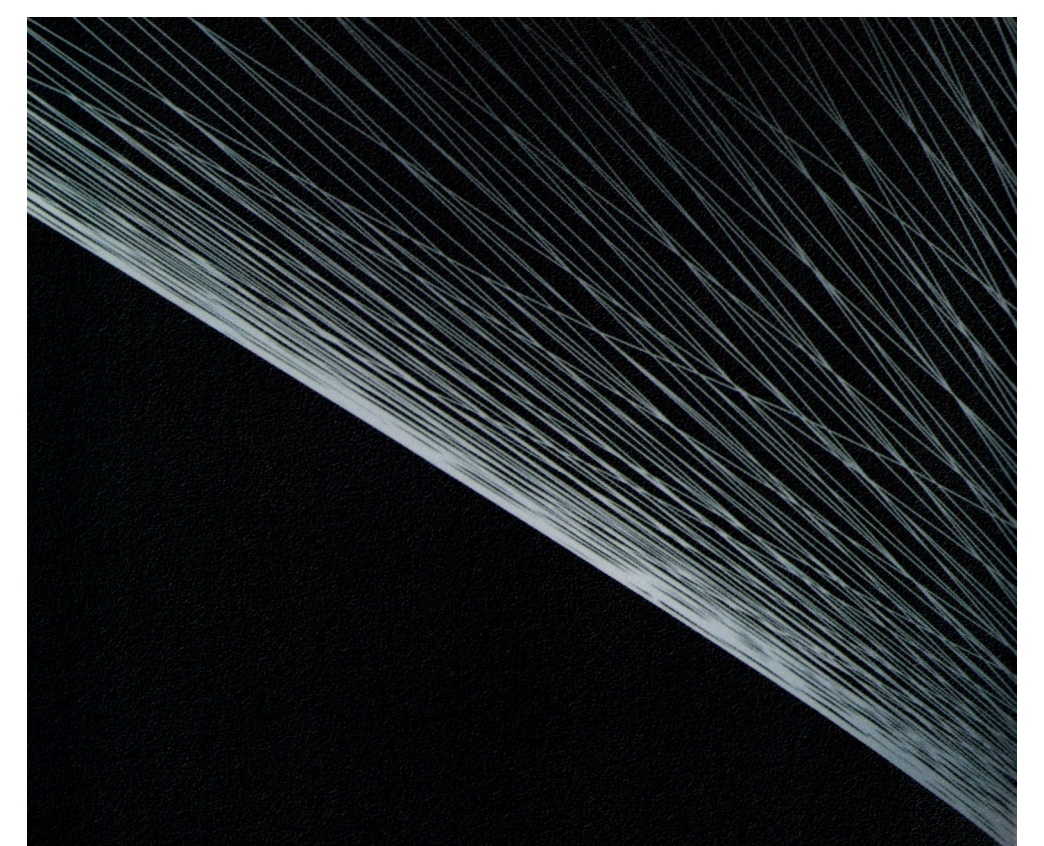
## **Необходимые уточнения**

1. При обращении к номерам формул или рисунков в пределах рассматриваемой части не всегда указывается номер этой части. При обращении к формулам из других частей используется два способа. Например, (9.32) и (32) ч.9 обозначают одно и то же: формула (32) части 9. Возможные опечатки по этому вопросу указаны в списке исправлений.
2. Редко встречающееся в тексте слово «эфир» следует понимать как жидкая среда.
3. Слова “течения – претенденты” обозначают течения, имеющие внутри себя сингулярную точку.
4. Символы дельта и набла в квадрате обозначают одно и то же – оператор Лапласа.

Тираж 300 экз.

### Список исправлений

Страница	Формула, строка	отпечатано	Следует читать
5	4	Неразменных	Неразмерных
13	(1-1)	$(y_1, y_2, \dots, y_M)$	$(y_1, y_2, \dots, y_M)$
16	1 снизу	$\gamma_i = 1$	$\gamma_i = 1$
23	8 сверху	после шагов	после M шагов
27	9 снизу	как имеет...инд..	как g имеет .. инд. i
37	(4-19)A	$\dots \int_{x_j}^{x_j^{11}}$	$\dots \int_{x_j}^{x_j^{11}}$
45	(A)	$\gamma_x$	$\bar{\gamma}_x$
45	2 снизу	$ac = ..$	$c = ..$
46	1 снизу	$Bxu^2$	$Bxu^3$
64	8 сверху	...функцией рез.	...функцией и рез.
66	6 снизу	(4)	(7)
71	4 снизу	(21)	(1)
117	7 снизу	(1-32)	(2-32)
118	(2-54)	индекс i	индекс 1
121	13 сверху	части 3	части 2
122	14 сверху	(4.1)	(1-4) ч.8
123	18 сверху	(1-1)	(1-1) ч.8
124	17 сверху	(1-4)	(1-4) ч.8
126	6 сверху	5.13	(2-13) ч.8
126	8 сверху	(1-4)	(1-4) ч.8
127	(22a)	дифференциалы $\partial S, \partial z$	$\partial S, \partial z$
127	4 снизу	...линейной системы..	линейной части сис.
128	7 сверху	(1-20)	(1-20) ч.8
131	1 сверху	$F(b,d,z,x)$	$F(b,c,d,x)$
133	4 снизу	$s \neq 1, -2$	$s \neq -1, -2$
135	(57)	$k=1$	$k-1$
139	(78)	$... = dJ_y = ...$	$... = \int dJ_y = ...$
147	11 сверху	преведущем	предыдущем
151	13 сверху	§8	§8 ч.9
167	12 сверху	(10.8)	(10)
173	(2)	$\bar{V} = ...$	$\hat{P}, \bar{V} = ...$
177	4 сверху	из (10) и (8a)	из (10) в (8a)
179	4 сверху	отсутствует номер	(3)



интернет-магазин

**OZON.RU**



72902965