Barton Zwiebach A First Course in String Theory



НАЧАЛЬНЫЙ КУРС Неприникурс Неприникурс

в этой области.



«Начальный курс теории струн» Бартона Цвибаха уникален по стилю и форме изложения. Он позволит начинающим исследователям избежать чувства подавленности и отчаяния, которые нередко сопутствуют штудированию традиционных фолиантов, -ведь далеко не секрет, что теория струн имеет репутацию невероятно сложной науки. На каждой странице книги автор твердо следует поставленной цели — сделать теорию струн доступной любому физику, желающему расширить Около 300 свои знания

Бартон Цвибах



задач и упражнений

Поистине свежий, оригинальный подход к теории струн, позволяющий читателю обойтись удивительно небольшим багажом знаний из области квантовой теории и теории относительности.

Майкл Грин,

профессор Кембриджского университета

Изложение Цвибаха доказывает, что теория струн может быть воспринята и понята не только избранными. Я настоятельно рекомендую эту книгу всем желающим изучить основы теории струн.

> Дэвид Гросс, лауреат Нобелевской премии по физике

Потребность именно в такой книге по теории струн давно назрела.

Джон Шварц,

профессор Калифорнийского технологического института

Ясное и доступное изложение... через известные, хорошо изученные физические понятия автор выводит читателя на рубежи современной науки.

Джозеф Полчински,

профессор Калифорнийского университета

Чаписано прекрасно... Это не просто очередная книга в неуклонно Грасширяющемся списке литературы для тех, кто стремится вникнуть в теорию струн.

> Андреас Карч, Times Higher Education Supplement

Всеобъемлющее введение в предмет... Читатель, вооруженный такими знаниями, может без боязни приступить к изучению известных книг Грина, Шварца и Виттена или Полчински.

> **Марцел Л. Вонк,** Mathematical Reviews

A First Course in String Theory

Second Edition

Barton Zwiebach

Massachusetts Institute of Technology

Бартон Цвибах

<u>НАЧАЛЬНЫЙ КУРС</u> ТЕОРИИ СТРУН

Перевод со второго, расширенного и дополненного английского издания

Под редакцией и с предисловием доктора физико-математических наук, профессора И. Я. Арефьевой и доктора физико-математических наук, профессора В. И. Санюка

Предисловие лауреата Нобелевской премии по физике Дэвида Гросса



Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09–02–07036)

Цвибах Бартон

Начальный курс теории струн: Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. И. Я. Арефьевой, В. И. Санюка; Предисл. Д. Гросса. — М.: Едиториал УРСС, 2011. — 784 с.

«Начальный курс теории струн» Бартона Цвибаха уникален по стилю и форме изложения. Он позволит начинающим исследователям избежать чувства подавленности и отчаяния, которые нередко сопутствуют штудированию традиционных фолиантов, — ведь далеко не секрет, что теория струн имеет репутацию невероятно сложной науки. На каждой странице книги автор твердо следует поставленной цели — сделать теорию струн доступной любому физику, желающему расширить свои знания в этой области.

Книга охватывает практически весь спектр теории струн. Изложение ведется в замкнутой форме, так что читателю для понимания достаточно лишь твердых знаний основ механики и некоторых элементов квантовой теории. Автор стремится развить у читателей интуицию, подкрепляя формальное изложение многочисленными иллюстративными примерами.

Монография отражает современное состояние теории. С этой целью во второе издание включены актуальные вопросы, такие как АдС/КПТ-соответствие, струны на орбифолдах, стабилизация модулей, ландшафт теории струн и некоторые другие.

Яркой отличительной чертой книги является наличие большого количества задач и упражнений-разминок (всего около 300), как тренировочного характера, так и требующих размышления и творческого подхода.

По полноте изложения фактического материала и характеру его представления книга не имеет аналогов среди монографий по теории струн. Она, без сомнения, будет полезна студентам, аспирантам, преподавателям соответствующих дисциплин, а также специалистам в области теоретической и математической физики.

Перевод с английского: А. В. Берков, К. Б. Алкалаев

Translation from the English language edition: A first course in string theory by Barton Zwiebach. Second edition, 2009

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9. Формат 70×100/16. Печ. л. 49. Уч.-изд. л. 64,5. Заказ № 1339.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА». 610033, г. Киров, ул. Московская, 122. Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36 http://www.gipp.kirov.ru; e-mail: pto@gipp.kirov.ru

ISBN 978-5-354-01367-8



© 2009 by B. Zwiebach. All rights reserved © Едиториал УРСС, 2011



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев. Моим родителям, Оскару и Бетти Цвибах, с благодарностью

Содержание

Предисловие редакторов перевода	••	 •	•••	•	• •	•	•		•	•	••	•	•		•	•	•	• •	••	•	15
Предисловие (Дэвид Гросс)		 •	•••	•	•••	•	•	••	•	•	•••	•	•			•	•	• •	••	•	16
Предисловие ко второму изданию .	•••	 •	•••			•	•	• •	•	•	••	•	•	••	•	•	•	• •		•	17
Из предисловия к первому изданию	• •	 •	•••	•	• •	•	•			•		•	•	•••		•	•			•	21

Часть I. ОСНОВЫ 23

Глава	1	
Кратк	ое введение	25
1.1.	Путь к объединению	25
1.2.	Теория струн как единая физическая теория	29
1.3.	Теория струн и ее проверка	32
1.4.	Развитие и перспективы	34
Глава	2	
Специ	альная теория относительности и дополнительные измерения	36
2.1.	Единицы измерения и параметры	36
2.2.	Интервалы и преобразования Лоренца	38
2.3.	Координаты светового конуса	46
2.4.	Релятивистские энергия и импульс	50
2.5.	Энергия и импульс в координатах светового конуса	53
2.6.	Лоренц-инвариантность при наличии дополнительных измерений	55
2.7.	Компактные дополнительные измерения	56
2.8.	Орбифолды	60
2.9.	Квантовая механика и потенциальная яма	62
2.10.	Потенциальная яма с дополнительным измерением	64
	Задачи	66

Электромагнетизм и гравитация в многомерных пространствах	71 73 74 79 32 35 90 91 93 95
3.1. Классическая электродинамика	71 73 74 79 32 35 90 91 93 95
3.2. Электромагнетизм в трех измерениях	73 74 79 32 35 30 91 93 95
 3.3. Явно релятивистская электродинамика	74 79 32 35 90 91 93 95
 3.4. Отступление: сферы в многомерных пространствах	79 32 35 90 91 93 95
 3.5. Электрические поля в многомерных пространствах	32 35 90 91 93 95
3.6. Гравитация и планковская длина	85 20 21 23 25
	90 91 93 95
3.7. Гравитационные потенциалы 9	91 93 95
3.8. Планковская длина в разных размерностях	93 95
3.9. Гравитационные постоянные и компактификация	¥5
3.10. Большие дополнительные измерения	
Задачи)8
Глава 4	
Нерелятивистские струны 10)2
4.1. Уравнения движения струны для случая поперечных колебаний 10)2
4.2. Граничные и начальные условия)4
4.3. Частоты поперечных колебаний 10)5
4.4. Более общий случай колеблющихся струн 10)6
4.5. Краткий обзор Лагранжевой механики 10)7
4.6. Функция Лагранжа нерелятивистской струны	10
Задачи	15
Глава 5	
Релятивистская точечная частица	20
5.1. Действие для релятивистской точечной частицы 12	20
5.2. Репараметризационная инвариантность 12	24
5.3. Уравнения движения	26
5.4. Электрически заряженная релятивистская частица 12	29
Задачи13	30
Глава б	
Релятивистские струны	33
6.1. Функционал площади пространственных поверхностей 13	33
6.2. Репараметризационная инвариантность площади 13	36
6.3. Функционал площади для пространственно-временных поверхностей	10
6.4. Действие для струны Намбу-Гото	15

6.5.	Уравнения движения, граничные условия и D-браны
6.6.	Статическая калибровка
6.7.	Натяжение и энергия растянутой струны
6.8.	Действие в терминах поперечной скорости
6.9.	Движение концевых точек открытой струны
	Задачи
Глава	7
Парам	етризация струны и классическое движение
7.1.	Выбор <i>σ</i> -параметризации
7 .2 .	Физическая интерпретация уравнения движения струны
7.3.	Волновое уравнение и связи
7.4.	Произвольное движение открытой струны 174
7.5.	Движения замкнутых струн и каспы
7.6.	Космические струны
	Задачи
Глава	8
Токи н	на мировых листах
8.1.	Сохранение электрического заряда 193
8.2.	Возникновение сохраняющихся зарядов из симметрий лагранжиана 194
8.3.	Сохраняющиеся токи на мировом листе
8.4.	Полный ток импульса
8.5.	Лоренцевская симметрия и связанные с ней токи
8.6.	Параметр наклона <i>а</i> [']
	Задачи
Глава	9
Релят	ивистские струны на световом конусе
9.1.	Варианты выбора $ au$
9.2.	Соответствующая σ-параметризация
9.3.	Уравнения связи и волновые уравнения
9.4.	Волновое уравнение и разложение по модам
9.5.	Решение уравнений движения на световом конусе
	Задачи
Глава	10
Поля	и частицы на световом конусе
10.1.	Введение
10.2.	Действие для скалярных полей

10.3.	Классические решения в виде плоских волн
10.4.	Квантовые скалярные поля и состояния частиц
10.5.	Максвелловские поля и состояния фотона
10.6.	Гравитационные поля и состояния гравитонов
	Задачи
Глава	11
Релят	ивистская квантовая точечная частица
11. 1 .	Точечная частица в калибровке светового конуса
11.2.	Гейзенберговское и шрёдингеровское представления
11.3.	Квантование точечной частицы
11.4.	Квантовая частица и скалярные частицы
11.5.	Операторы импульса светового конуса
11.6.	Лоренцевские генераторы светового конуса
	Задачи
Глава	12
Релят	ивистские квантовые открытые струны
12.1.	Гамильтониан светового конуса и коммутаторы
12.2.	Коммутационные соотношения для осцилляторов
12.3.	Струны как гармонические осцилляторы
12.4.	Поперечные операторы Вирасоро 298
12.5.	Лоренцевские генераторы
12.6.	Построение пространства состояний
12.7.	Уравнения движения
12.8.	Тахионы и распад D-бран
	Задачи
Глава	13
Релят	ивистские квантовые замкнутые струны
13.1.	Разложение по модам и коммутационные соотношения
13.2.	Операторы Вирасоро замкнутых струн
13.3.	Пространство состояний замкнутой струны
13.4.	Константа связи струны и дилатон
13.5.	Замкнутые струны на $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолде
13.6.	Твистовый сектор орбифолда 352
	Задачи

Глава 14

Взгля	д на релятивистские суперструны
14.1.	Введение
14.2.	Антикоммутирующие переменные и операторы
14.3.	Фермионы на мировом листе
14.4.	Сектор Невье—Шварца
14.5.	Сектор Рамона
14.6.	Подсчет состояний
14.7.	Открытые суперструны
14.8.	Теории замкнутых струн
	Задачи

Часть II. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

Глава 15

D-бра	ны и калибровочные поля
15.1.	D <i>p</i> -браны и граничные условия
15.2.	Квантование открытых струн на Dp-бранах
15.3.	Открытые струны между параллельными Dp-бранами
15.4.	Струны между параллельными Dp- и Dq-бранами
	Задачи
Глава	16
Струн	ный и электрический заряды
16.1.	Фундаментальный струнный заряд 416
16.2.	Визуализация струнного заряда 423
16.3.	Струны, заканчивающиеся на D-бранах
16.4.	D-бранные заряды
	Задачи
Глава	17
Т-дуал	льность в теории замкнутых струн 439
17.1.	Симметрии дуальности и гамильтонианы
17.2.	Намотанные замкнутые струны
17.3.	Левые моды и правые моды 445
17.4.	Квантование и коммутационные соотношения
17.5.	Связи и массовая формула

12		Содержание
	17.6.	Пространство состояний замкнутой компактифицированной струны
	1 7.7 .	Поразительное совпадение спектров
	17.8.	Дуальность как полная квантовая симметрия
	Глава Т-дуал	18 льность открытых струн
	18.1.	Т-дуальность и D-браны
	18.2.	U(1)-калибровочные преобразования
	18.3.	Петли Вильсона на окружностях
	18.4.	Открытые струны и петли Вильсона
	Глава Элект	19 ромагнитные поля на D-бранах
	19.1.	Взаимодействие полей Максвелла и открытых струн
	19.2.	D-браны с электрическими полями
	19.3.	D-браны с магнитными полями
	Глава Нелиі	20 чейная электродинамика и теория Борна—Инфельда
	20 .1.	Структура нелинейной электродинамики
	20.2.	Электродинамика Борна—Инфельда 508
	20.3.	Теория Борна—Инфельда и Т-дуальность 514 Задачи 518
	Глава Теори	21 я струн и физика частиц
	21.1.	Пересекающиеся D6-браны
	21.2.	D-браны и калибровочная группа Стандартной модели
	21.3.	Открытые струны и фермионы в Стандартной модели 536
	21.4.	Стандартная модель пересекающихся D6-бран
	21.5.	Модели струн в физике частиц
	21.6.	Стабилизация модулей и ландшафт

Глава	22
Струн	ная термодинамика и черные дыры
22.1.	Обзор статистической механики 572
22.2.	Разбиения и квантовая скрипичная струна
22.3.	Температура Хагедорна 583
22.4.	Статистическая сумма релятивистской частицы
22.5.	Статистическая сумма одной струны 587
22.6.	Энтропия и черные дыры
22.7.	Подсчет состояний черной дыры 597
	Задачи
Глава	23
Сильн	ые взаимодействия и АдС/КТП
23.1.	Введение
23.2.	Мезоны и вращающиеся квантовые струны
23.3.	Энергия натянутой эффективной струны
23.4.	Предел больших N в калибровочной теории
23.5.	Гравитационные эффекты от массивных источников
23.6.	Обоснования соответствия АдС/КТП
23.7.	Параметры соответствия АдС/КТП
23.8.	Гиперболические пространства и конформная граница 626
23.9 .	Геометрия АдС и голография
23.10.	АдС/КТП при конечной температуре
23.11.	Кварк-глюонная плазма
	Задачи
Глава	24
Ковар	иантное квантование струны
24.1.	Введение
24.2.	Операторы Вирасоро для открытых струн
24.3.	Отбор квантовых связей
24.4.	Пространство лоренц-ковариантных состояний
24.5.	Операторы Вирасоро для замкнутых струн
24.6.	Струнное действие Полякова 671
	Задачи

Глава	25					
Взаим	юдействия струн и римановы поверхности					
25.1.	Введение					
25.2.	Взаимодействия и наблюдаемые					
25.3.	Струнные взаимодействия и глобальные мировые поверхности 686					
25.4.	Мировые поверхности как римановы поверхности					
25.5.	Отображение Шварца—Кристоффеля и трехструнное взаимодействие					
25.6.	Пространства модулей римановых поверхностей					
25.7.	Взаимодействие четырех открытых струн					
25.8.	Амплитуда Венециано					
	Задачи					
Глава	26					
Петле	вые амплитуды в теории струн					
26.1.	Петлевые диаграммы и ультрафиолетовые расходимости					
26.2.	Кольца и однопетлевые открытые струны					
26.3.	Кольца и электростатическая емкость					
26.4.	Непланарные диаграммы открытых струн					
26.5.	Взаимодействие четырех замкнутых струн					
26.6.	Пространство модулей тора					
Библи	аграфия					
Предм	Предметный указатель					
Основ	Основные формулы и константы					

Предисловие редакторов перевода

Теория суперструн представляет собой современную теорию всех фундаментальных взаимодействий элементарных частиц в природе, включая гравитационное. Серьезных альтернатив этой всеобъемлющей теории на данный момент не существует. В ретроспективе теорию суперструн можно рассматривать как модель квантовой теории поля с бесконечным набором полей.

В рамках теории суперструн родились и нашли дальнейшее развитие идеи суперсимметрии и дополнительных измерений. Поиски их проявлений в природе включены в список задач экспериментов на Большом адронном коллайдере (БАК), также ведутся с помощью космических аппаратов WMAP и «Планк» и другими методами.

Идеи теории суперструн проникают в различные области физики: космологию (так называемая струнная космология), физику черных дыр (интерпретация хокинговского излучения), физику адронов и кварк-глюонной плазмы (возможность дуального описания столкновений тяжелых ионов на современных ускорителях — RICH, Tevatron, БАК) и даже в физику твердого тела.

Теория суперструн ставит новые интересные математические задачи и проливает свет на традиционно чисто математические области (дифференциальную геометрию, теорию групп, теорию чисел и др.).

Все указанное выше делает теорию суперструн бесспорно заслуживающей внимания не только физиков-теоретиков и математиков, но и специалистовприкладников. За более чем 50-летнюю историю существования этой области написано несколько десятков тысяч работ, в их числе — замечательная монография М. Грина, Дж. Шварца, Э. Виттена «Teopus суперструн» (в 2-х т. М.: Мир, 1990), а также монографии Дж. Полчински (*Polchinski J.* String Theory. Cambridge University Press, 1998) и К. и М. Беккер и Дж. Шварца (*Becker K., Becker M., Schwarz J. H.* String theory and M-theory: a modern introduction. Cambridge University Press, 2007). Однако изложение основных идей на уровне, доступном для широкого круга физиков и математиков, содержится пока исключительно в предлагаемой вниманию российского читателя книге Бартона Цвибаха «Начальный курс теории струн».

> Ирина Арефьева, Валерий Санюк

Предисловие

Теория струн — одна из самых интересных областей теоретической физики. Это смелое, будоражащее ум построение объединяет гравитацию и другие виды взаимодействий, а также все формы материи в единую концептуальную структуру.

К несчастью, теория струн имеет репутацию невероятно сложной для понимания. Действительно, специалисты в этой области используют современный математический аппарат, однако основные положения теории струн довольно просты и должны быть доступны даже студентам младших курсов университетов с усиленной подготовкой по математике и физике.

Студенты и коллеги-физики часто спрашивали меня, какую книгу я мог бы порекомендовать в качестве введения в основы теории струн. До недавнего времени все, что я мог сделать — это указать им на несколько научно-популярных текстов или на серьезные монографии. Теперь я могу рекомендовать всем превосходную книгу Бартона Цвибаха.

Бартон Цвибах — известный специалист по теории струн, внесший большой вклад в развитие струнной теории поля. В этой книге он дает поистине всеобъемлющее описание теории, начинающееся с азов, предполагающих минимальные знания продвинутой физики, и подводящее читателя к границам современной науки.

Я с удовольствием рекомендую эту книгу всем желающим изучить основы теории струн.

Дэвид Гросс,

лауреат Нобелевской премии по физике, директор Института теоретической физики Кавли (Калифорнийский университет, Санта-Барбара)

Предисловие ко второму изданию

Прошло почти пять лет с того момента, как я завершил первое издание «Начального курса теории струн».

Как и в первом издании, книга в целом разделена на часть I (Основы) и часть II (Дальнейшее развитие). Во втором издании я улучшил ясность многих доказательств и общую удобочитаемость части I. Возросло число рисунков, а также задач, с тем чтобы отразить все идеи, рассмотренные в основном тексте. В части I появилось пять новых разделов и одна новая глава. В новых разделах обсуждаются классическое движение замкнутых струн, космические струны и орбифолды. Новая глава 14 завершает часть I. В ней объяснены основы теории суперструн.

Часть II также подверглась большим изменениям. Изменился порядок глав, для того чтобы как можно раньше ввести в книге понятие T-дуальности. Материал, относящийся к физике частиц, сосредоточен в главе 21 и включает новый раздел о стабилизации модулей и ландшафте. Глава 23 новая и полностью посвящена сильным взаимодействиям и АдС/КТП-соответствию. Моей целью было дать простое введение в эту живо развивающуюся область исследований. Количество глав в книге увеличилось с двадцати трех до двадцати шести, и такое число как нельзя кстати подходит для книги по теории струн.

Хотел бы поблагодарить Хонг Лью и Хуана Малдасену за полезный вклад по вопросу об АдС/КТП. Я очень благодарен также Алану Гуту — он проверил многие новые задачи и сделал весьма ценные замечания по тексту.

Об этой книге

«Начальный курс теории струн» должен быть доступным каждому, кто знаком со специальной теорией относительности, основами квантовой механики, электромагнетизмом и введением в статистическую физику. Полезно, но не обязательно, некоторое знакомство с Лагранжевой механикой.

Все главы, за исключением введения, содержат упражнения и задачи. Упражнения-разминки разбросаны по всему тексту. Предполагается, что эти проверочные вычисления не должны вызывать проблем. Большие трудности при их выполнении могут свидетельствовать о проблемах в усвоении материала. Задачи в конце глав более сложны, а иногда развивают новые идеи. Результаты тех задач, которые помечены знаком [†], используются далее в тексте. Мастерский уровень овладения материалом требует решения всех упражнений и большинства задач. В любом случае, условия задач должны быть прочитаны.

Изложение материала в книге проводится так, что очень немногое приходится принимать на веру. Главы 14, 21, 22 и 23 содержат несколько разделов, в которых обсуждаются чрезвычайно интересные вопросы, полное объяснение которых не может быть проведено на уровне данной книги. От читателя требуется принять на веру ряд разумных утверждений, но в остальном материал развивается логически и должен быть *полностью* понятным. Эти разделы не адресованы экспертам.

Книга состоит из двух частей. Часть I (главы 1–14) называется «Основы», а часть II (главы 15–26) — «Дальнейшее развитие».

Глава 1 служит введением. В главе 2 дается обзор специальной теории относительности, но в ней вводятся также понятия, которые, возможно, окажутся новыми: координаты на световом конусе, энергия на световом конусе, компактные дополнительные измерения и орбифолды. В главе 3 дается обзор электродинамики и ее явно релятивистская формулировка. Здесь же приводится несколько замечаний по общей теории относительности и рассматриваются компактные измерения на планковских масштабах. В этом месте мы можем исследовать захватывающие вопросы о возможности существования больших дополнительных измерений. В главе 4 в целях развития интуиции используется пример нерелятивистских струн, рассматривается Лагранжева формулировка механики и вводятся необходимые термины. В главе 5, чтобы подготовить основу для понимания релятивистской струны, изучается релятивистская точечная частица. Здесь становится ясной мощь и элегантность Лагранжевой формулировки. Первое соприкосновение с теорией струн происходит в главе 6, где излагается классическая динамика релятивистской струны. Это очень важная глава, которую следует тщательно изучить. В главе 7 закрепляется понимание динамики струн благодаря детальному изучению их движения. Главы с 1 по 7 могут рассматриваться как миникурс по теории струн.

Главы с 8 по 11 подготавливают основу для квантования релятивистских струн. В главе 8 мы узнаем, как вычислить сохраняющиеся величины, такие как импульс и угловой момент свободных струн. В главе 9 рассматривается калибровочное решение на световом конусе уравнений движения струн и вводится терминология, используемая в квантовой теории. В главе 10 объясняются основы теории квантовых полей и состояний частиц с упором на подсчет параметров, характеризующих состояния скалярного поля, фотонные и гравитонные состояния. В главе 11 проводится квантование релятивистской частицы в калибровке на световом конусе. Все это подводит к важной главе 12, которая также должна быть внимательно изучена. В этой главе представлено квантование открытой релятивистской струны в калибровке на световом конусе. Получена критическая размерность и показано, как возникают фотонные состояния. В главе 12 содержится раздел о нестабильности тахионов. В главе 13 обсуждается квантование замкнутых струн и возникновение гравитонных состояний. В ней содержатся также два раздела, в которых рассматриваются квантовые замкнутые струны на простейшем орбифолде — полупрямой. Глава 14 завершает часть І. В ней вводится понятие о суперструнах. Представлены секторы Рамона и Невье-Шварца для открытых струн и рассмотрены их комбинации для полученя суперсимметричной теории. Глава завершается кратким обсуждением теорий замкнутых струн типа II.

Первую часть книги можно сравнить с дорогой на вершину горы, приводящей к квантованию струн. Во второй части подъем прекращается. Шаги несколько замедляются и дальнейший материал опирается на ранее рассмотренные идеи. В части II мы пожинаем плоды многих усилий, потраченных при изучении части I.

Первая глава части II — глава 15 посвящена важному вопросу об открытых струнах на различных конфигурациях D-бран. Обсуждение ориентифолдов перенесено в задачи в конце этой главы. В главе 16 вводится понятие заряда струны и показано, что концевые точки открытых струн несут максвелловский заряд. Следующие четыре главы концентрируются вокруг понятия T-дуальности. В глава 17 и 18 представлены свойства T-дуальности замкнутых и открытых струн соответственно. В главе 19, используя T-дуальность как главный инструмент, изучаются D-браны с электромагнитными полями. В главе 20 вводится общее представление о нелинейной электродинамике. В главе показано, что электромагнитные поля в теории струн определяются теорией Борна—Инфельда, нелинейной теорией, в которой собственная энергия точечных зарядов конечна.

Струнные модели физики частиц рассмотрены в главе 21. В этой главе детально объяснен раздел Стандартной модели, посвещенный частицам, и обсуждается один из подходов к построению реалистичной струнной модели, основанный на пересекающихся D6-бранах. Глава завершается некоторыми сведениями о стабилизации модулей и ландшафте.

Глава 22 начинается с термодинамики струн, после чего обсуждается энтропия черной дыры. Представлены попытки теории струн вывести значение энтропии шварцшильдовских черных дыр и успешный вывод энтропии суперсимметричной черной дыры. Приложения теории струн к сильным взаимодействиями изложены в главе 23. После обсуждения реджевских траекторий и кварк-антикваркового потенциала рассказано об АдС/КТП-соответствии. Это соответствие обсуждается достаточно подробно с упором на геометрию АдС-пространств. Включен раздел о кварк-глюонной плазме.

В главе 24 содержится введение в лоренц-ковариантное квантование струн. Она включает также струнное действие Полякова. В двух последних главах книги (25-й и 26-й) исследуются сильные взаимодействия. Мы узнаем, что струнные диаграммы, представляющие процессы струнных взаимодействий, являются римановыми поверхностями. В последних двух главах предполагается небольшое знакомство с комплексными переменными, и рассмотрение носит более математический характер. Одна из важных целей здесь — показать отсутствие ультрафиолетовых расходимостей в теории струн, что делает теорию струн первым кандидатом на роль теории квантовой гравитации.

Квантование струн рассматривается как квантование бесконечного числа осцилляторов. Заряд струн описан наглядно как максвелловский ток. Эффект петель Вильсона сравнивается с эффектом Бома—Ааронова. Модуль кольца связан с емкостью цилиндрического проводника и т. д., и т. п. Изложение вопросов проводится явно и детально, формализм сведен к минимуму.

Для квантования струн в книге выбрана калибровка светового конуса. Этот подход к квантованию во всех деталях могут понять даже студенты с самым поверхностным знанием квантовой механики. Но это неверно в случае лоренцковариантного квантования струн, когда приходится иметь дело с состояниями с отрицательной нормой, обращением в нуль гамильтониана и с отсутствием привычного вида уравнения Шрёдингера. Подход, связанный с квантованием на световом конусе, достаточен для большинства физических проблем, и на самом деле упрощает рассмотрение ряда вопросов.

Часть I книги достаточно жестко структурирована. Мало что можно в ней опустить без ушерба для понимания квантования струн. Первая глава части II (о D-бранах) важна для большей части дальнейшего материала. В отношении оставшихся глав допустимы вариации в изучении тем, и каждый читатель может выбрать свой путь.

Обновляемый список опечаток можно найти на сайте 1)

http://xserver.lns.mit.edu/~zwiebach/firstcourse.html

По вопросам решений задач из книги коллеги могут обратиться к автору по адресу

solutions@cambridge.org

¹⁾ В данном изданиии учтены опечатки, указанные на сайте на момент передачи книги в печать. — Прим. изд.

Из предисловия к первому изданию

Идея создания серьезного курса по теории струн впервые была высказана мне группой второкурсников Массачусетского технологического института гдето в мае 2001 г. Я преподавал в это время статистическую физику и потратил примерно час на объяснение того, каким образом релятивистская струна при высоких энергиях достигает постоянной температуры (температуры Хагедорна). Я был заинтригован идеей создания курса основ теории струн, однако мне не сразу стало ясно, что можно создать полезный курс на таком уровне.

Несколько месяцев спустя я беседовал с Марком Кастнером, деканом физического факультета. Мгновенная восторженная реакция Кастнера впервые заставила меня серьезно рассмотреть эту идею. В конце 2001 г. в программу второкурсников МТИ был включен новый курс. Впервые я прочел лекции по теме «Теория струн для младшекурсников» весной 2002 г. Вскоре после этого появилась данная книга.

Когда мы думаем о простом изложении теории струн, то главным вопросом является следующий: «Можно ли на самом деле объяснить материал на таком уровне?» Я убежден, что ответ на этот вопрос безусловно положителен. Хотя полное мастерство в овладении теорией струн требует физического образования на уровне старшекурсника или аспиранта, основы этой теории можно хорошо понять с помощью ограниченного числа средств, изучаемых на первых курсах институтов.

Эта книга была намеренно написана так, чтобы ее мог понять продвинутый студент младших курсов. Поэтому я уверен, что она станет интересным введением в теорию струн для любого студента старших курсов или, на самом деле, для любого физика, желающего познакомиться с основами теории струн.

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить декана физического факультета Марка Кастнера за его полную энтузиазма поддержку и интерес к книге. Я также признателен заместителю декана по образованию Томасу Грейтаку и директору Центра теоретической физики Роберту Джаффе за активную поддержку проекта.

Обучать теории струн группу, составленную в основном из подающих надежды студентов младших курсов, было стимулирующим и полезным занятием. Я благодарю студентов, составивших первую группу:

Джеффри Брок	Тереза Фаджо	Френсис Лэм	Мега Пади
Зи Лонг Чен	Каглар Гирит	Филипп Ларошель	Йан Парриш
Блейр Коннели	Донглай Гонг	Габриэле Магро	Джеймс Пате
Ивайло Димов	Адам Граних	Сурав Мандал	Тимоти Ричардс
Петер Эккли	Маркита Гавличкова	Стефанос Марнеридис	Джеймс Смит
Кудзиа Эджаз	Кеннет Йенсен	Трайша Монтальбо	Морган Зондереггер
Кейси Энсслин	Майкл Крайпел	Юджин Мотояма	Дэвид Старр

Все они были полны энтузиазма, забавны и энергичны. Мои объяснения были записаны на диктофон, и трое студентов — Габриэле Магро, Мега Пади и Дэвид Старр — превратили магнитофонные записи и выписанные на доске уравнения в файлы ИТЕХ. Я признателен этим студентам за их преданность и ту заботу, с которой они создали аккуратные файлы. Они дали толчок написанию этой книги.

Дополнительные файлы были подготовлены Габриэле и Мегой. В последующие шесть месяцев записи стали черновиком книги. Потратив долгие летние месяцы на редактирование и исправления, в октябре 2003 г. я завершил книгу.

К моменту, когда появился черновик книги, Дэвид Старр предложил критически перечитать ее. Он разметил каждый раздел, внес исправления, касающиеся изложения, и продемонстрировал сверхъестественную способность выделять слабые места. Именно критические замечения Дэвида побудили меня осуществить главные исправления. Вклад Дэвида был огромен. Если в книге и достигнута какая-то ясность, это в значительной степени произошло благодаря его усилиям.

Мне приятно отметить помощь и советы, полученные от моего друга и коллеги Джеффри Голдстоуна. Он щедро поделился со мной своим пониманием теории струн, так что некоторые разделы этой книги буквально выросли из его замечаний. Он помог мне второй раз прочесть этот курс. При этом он высказал глубокие замечания по всему тексту. Он также помог исправить условия ряда задач, для которых сам же написал элегантные решения.

Очень важным был вклад моего друга и сотрудника Ашока Сена. Он охотно прочел первый полный черновик и дал ряд бесценных советов, которые помогли сформировать эту книгу.

Благодаря помощи и заинтересованности множества людей процесс написания этой книги был очень приятным занятием. Я признателен Чиен Хао Лью и Джеймсу Сташеффу за детальные комментарии ко всему содержанию книги. Алан Данн и Блейк Стеси помогли проверить задачи. Ян Троост выполнял роль рупора, доносившего нам советы и критические замечания. Я опирался на знания моих коллег, специалистов по теории струн, Амихая Ханани, Дэниела Фридмана и Вашингтона Тейлора. Хотел бы поблагодарить Филиппа Аргиреса, Андреаса Карча и Фридера Ленца за проверку текста, которую они провели со своими студентами. Хуан Малдасена и Самир Матур внесли полезный вклад в рассмотрение термодинамики струн и черных дыр. Борис Керс, Фернандо Квеведо и Энджел Уранга помогли советами по вопросу о феноменологии струн. Я благодарю также Тамсин ван Эссен, редактора Кембриджского издательства, за советы и тщательную работу во время всего процесса издания книги.

Наконец, хочу поблагодарить мою жену Габи и детей Сесил, Еву, Маргарет и Аарона. На каждом шагу своего пути я был окутан их любовью и поддержкой. Сесил и Ева прочли часть рукописи и дали советы относительно языка. Вопросы о теории струн, заданные Габи и Маргарет, проверили мою способность объяснять. Младший Аарон настаивал на том, что наилучшей картинкой на обложке будет привидение, сидящее на струне, но мы сошлись на струнах, движущихся в электрическом поле.

> Бартон Цвибах Кембридж, Массачусетс, 2003 г.

Часть I

основы

Глава 1

Краткое введение

Здесь мы впервые познакомимся с теорией струн, рассмотрим ее роль в развитии физики и обсудим, как теория струн пытается объединить описание всех видов фундаментальных взаимодействий.

1.1. Путь к объединению

В ходе развития физики особо выделяются объединения (унификации): события, когда различные до того явления признаются взаимосвязанными, а теории подправляются с учетом этого факта. Одно из самых важных таких объединений случилось в девятнадцатом веке.

Долгое время казалось, что электричество и магнетизм — различные физические явления. Электричество было изучено первым. Выдающиеся эксперименты Генри Кавендиша были проведены в период от 1771 до 1773 г. Затем были исследования Шарля Огюстена де Кулона, завершившиеся в 1785 г. Эти работы позволили создать теорию статического электричества, или электростатику. Дальнейшие эксперименты обнаружили связи магнетизма с электричеством. В 1819 г. Ганс Христиан Эрстед обнаружил, что электрический ток, текущий в проводе, может отклонять стрелку помещенного рядом магнитного компаса. Вскоре Жан Батист Био и Феликс Савар (1820) и Андре Мари Ампер (1820–1825) установили законы магнитного поля, созданного электрическим током. Решающий шаг был сделан Майклом Фарадеем (1831), показавшим, что и изменяющиеся магнитные поля порождают электрические токи. Появились и уравнения, описывающие эти явления, но они, на самом деле, были некорректны. Лишь Джеймс Клерк Максвелл (1865) построил согласованную систему уравнений, добавив в одно из них новое слагаемое. Новое слагаемое не только устраняло несогласованность, но и предсказывало электромагнитных волны. За это великое прозрение уравнения электромагнитного поля (или электродинамики) называются сейчас уравнениями Максвелла. Они объединяют электричество и магнетизм в единое целое. Это элегантное и эстетически привлекательное объединение должно было обязательно случиться: взятые по отдельности, электричество и магнетизм были бы противоречивы.

Другое фундаментальное объединение двух типов явлений произошло в конце 1960-х гг., примерно через сто лет после работы Максвелла. Оно вскрыло глубокую связь между электромагнитными силами и силами, ответственными за слабые взаимодействия. Чтобы оценить значение этого объединения, необходимо сначала сделать обзор основных достижений, произошедших в физике со времен Максвелла.

Важное изменение парадигмы было инициировано специальной теорией относительности Альберта Эйнштейна. В этой теории обнаруживается поразительное концептуальное объединение различных понятий, касающихся пространства и времени. В отличие от объединения сил, слияние пространства и времени в пространственно-временной континуум представило новое понимание природы той арены, на которой разыгрываются физические явления. Ньютоновская механика была заменена релятивистской механикой, а старые идеи об абсолютном времени были отвергнуты. Было показано, что масса и энергия взаимозаменяемы.

Другое, возможно, еще более драматическое, изменение парадигмы связано с возникновением квантовой механики. Многочисленными экспериментами было доказано, что созданная Эрвином Шрёдингером, Вернером Гейзенбергом, Полем Дираком и другими физиками квантовая теория является правильной схемой для описания микроскопических явлений. В квантовой механике классические наблюдаемые становятся операторами. Если два оператора не коммутируют, соответствующие наблюдаемые не могут быть одновременно измерены. Квантовая механика — это больше, чем теория, это система взглядов. Она дает правила, по которым следует использовать теории, чтобы получить физические предсказания.

В дополнение к этим достижениям, было показано существование в природе четырех фундаментальных сил (взаимодействий). Коротко рассмотрим их.

Одна из сил — это сила тяготения, или гравитация. Она известна со времен античности, но впервые была аккуратно описана Исааком Ньютоном. Теория Ньютона была радикально переработана в общей теории относительности Альберта Эйнштейна. В этой теории пространство-время частной теории относительности приобретает собственную жизнь, а силы тяготения возникают из кривизны динамического пространства-времени. Общая теория относительности Эйнштейна представляет собой классическую теорию гравитации. Она не сформулирована как квантовая теория.

Вторая фундаментальная сила — электромагнитная. Как обсуждалось выше, эта сила хорошо описывается уравнениями Максвелла. Теория Максвелла сформулирована как классическая теория электромагнитных полей. В противоположность ньютоновской механике, которая модифицируется частной теорией относительности, теория Максвелла полностью совместима с частной теорией относительности.

Третьей фундаментальной силой является слабое взаимодействие. Эта сила ответственна за процесс ядерного бета-распада, при котором нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино. В общем случае, все процессы с участием нейтрино порождаются слабыми силами. Ядерный бета-распад был известен с конца девятнадцатого века, но понимание того, что в игру вступила новая сила, пришло только в середине двадцатого века. Величина этой силы определяется фермиевской постоянной. Слабые взаимодействия намного слабее электромагнитных.

Наконец, четвертая сила обусловлена сильным взаимодействием, ее часто называют цветовой силой. Эта сила удерживает вместе составные части нейтрона, протона, пиона и многих других субъядерных частиц. Сами составные части, называемые кварками, настолько сильно связаны цветовой силой, что их невозможно наблюдать в изоляции.

Теперь мы можем вернуться к вопросу об объединении. В конце 1960-х гг. модель Вайнберга—Салама электрослабых взаимодействий соединила в единую структуру электромагнетизм и слабую силу. Эта объединенная модель возникла не только из соображений простоты или изящества. Она была необходима для создания самосогласованной теории слабых взаимодействий, обладающей предсказательной силой. В первоначальной формулировке теория рассматривает четыре безмассовые частицы, являющихся переносчиками взаимодействий. Процесс нарушения симметрии придает массу трем из этих частиц — W^+ , W^- и Z^0 , которые являются переносчиками слабого взаимодействия. Оставшаяся безмассовой частица — фотон — является переносчиком электромагнитного взаимодействия.

Как мы говорили выше, уравнения Максвелла являются уравнениями классического электромагнетизма, они не используют положения квантовой теории. Физики нашли методы квантования, которые можно использовать для того, чтобы превратить классическую теорию в квантовую, т. е. в такую теорию, которую можно вывести, используя принципы квантовой механики. В то время как классическую электродинамику можно с уверенностью использовать для расчета переноса энергии в высоковольтных линиях и форм излучения радиоантенн, для расчета микроскопических явлений она неточна и неправильна. Для корректных вычислений в этой области требуется квантовая электродинамика (КЭД), квантовая версия классической электродинамики. В КЭД фотон возникает как квант электромагнитного поля. Теория слабых взаимодействий также является квантовой теорией, так что правильная единая теория — это квантовая электрослабая теория.

Процедура квантования может быть успешно осуществлена и в случае сильного (цветового) взаимодействия, полученная таким образом теория была названа квантовой хромодинамикой (КХД). Носителями цветовой силы являются восемь безмассовых частиц. Это цветовые глюоны, которые, как и кварки, не могут наблюдаться изолированно. Кварки взаимодействуют с глюонами, так как они имеют цвет. Существуют кварки трех цветов.

Электрослабая теория совместно с КХД образуют Стандартную модель физики частиц. В этой модели существует перекрытие между электрослабым сектором и сектором КХД, так как некоторые частицы испытывают влияние обоих типов сил. Однако настоящего глубокого объединения слабой и цветовой сил не происходит. Стандартная модель полностью подводит итог современным знаниям в физике частиц. Таким образом, мы на самом деле не убеждены в любом дальнейшем возможном объединении.

В Стандартной модели имеется двенадцать переносчиков взаимодействий: восемь глюонов, частицы W^+ , W^- , Z^0 и фотон, все они бозоны. Кроме того, существует много частиц материи, и все они фермионы. Есть два типа частиц материи: лептоны и кварки. Лептоны включают электрон e^- , мюон μ^- , тау-лептон τ^- , и связанные с ними нейтрино — ν_e , ν_μ и ν_τ , их можно объединить в список.

Лептоны:
$$e^{-}, \mu^{-}, \tau^{-}, \nu_{e}, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$$
.

Так как мы должны включить и античастицы ко всем лептонам, то общее число лептонов равно двенадцати. Кварки несут цветовой заряд, электрический заряд и испытывают также влияние слабой силы. Существует шесть разных типов кварков, поэтически называемых ароматами: верхний (u), нижний (d), очарованный (c), странный (s), самый верхний (t) и самый нижний (b), их тоже можно объединить в список.

Кварки: u, d, c, s, t, b.

Например, кварки u и d обладают разными электрическими зарядами и поразному отвечают на действие слабой силы. Каждый из перечисленных шести кварков существует в трех цветовых разновидностях, так что всего получается $6 \times 3 = 18$ частиц. Если учесть античастицы, получится всего 36 кварков. Складывая число лептонов с числом кварков, получаем всего 48 частиц материи, а добавив к этому 12 переносчиков взаимодействий, получим 60 частиц.

Несмотря на большое число частиц, описываемых Стандартной моделью, она достаточно элегантна и очень сильна. Но если рассматривать ее как основную теорию всей физики, обнаруживается два существенных недостатка. Во-первых, она не включает гравитацию. Во-вторых, в ней содержатся около двадцати параметров, которые нельзя вычислить в рамках этой же теории. Возможно, простейшим примером такого параметра является безразмерное отношение массы мюона к массе электрона. Значение этого отношения равно примерно 207, и оно должно вноситься в теорию извне.

Большинство физиков верят, что Стандартная модель — только шаг на пути к формулировке полной теории физики. Значительное число физиков полагает также, что правильным окажется некоторое объединение электрослабых и сильных взаимодействий в теорию Великого объединения (ТВО). Однако в настоящее время объединение этих двух взаимодействий кажется необязательным.

Другой привлекательной возможностью является то, что более полная версия Стандартной модели должна включать суперсимметрию. Суперсимметрия представляет собой симметрию, связывающую бозоны и фермионы. Так как все частицы материи являются фермионами, а все переносчики сил — бозонами, то эта поразительная симметрия объединяет материю и взаимодействия. В теории с суперсимметрией бозоны и фермионы возникают парами с равной массой. Частицы Стандартной модели не обладают таким свойством, так что суперсимметрия, если она существует в природе, должна быть спонтанно нарушена. Суперсимметрия является настолько привлекательной симметрией, что многие физики убеждены, что она в конце концов будет открыта.

Неизвестно, возникнут или нет рассмотренные нами расширения Стандартной модели, но ясно, что включение гравитации в физику частиц не может быть необязательным. Если мы хотим иметь полную теорию, то гравитация должна быть включена, будь то в рамках объединения или без него. В настоящее время явления, обусловленные гравитационной силой на микроскопическом уровне, являются пренебрежимо малыми, но они становятся определяющими при изучении космологии ранней Вселенной.

Однако при попытке включить гравитационную физику в Стандартную модель возникает более важная проблема. Стандартная модель является квантовой теорией, в то время как общая теория относительности Эйнштейна - классическая теория. Представляется очень сложным, если не вообще невозможным, получить самосогласованную теорию, которая частично является квантовой, а частично — классической. Широко распространено мнение, что гравитация также должна быть превращена в квантовую теорию. Однако в случае гравитации процедура квантования сталкивается с серьезными трудностями. Получающаяся теория квантовой гравитации оказывается либо невычислимой, либо полностью непредсказуемой, и оба варианта неприемлемы. Практически, во многих обстоятельствах можно уверенно работать с классической гравитацией, связанной со Стандартной моделью. Например, это все время делается при описании современной Вселенной. Однако теория квантовой гравитации необходима для изучения моментов времени, близких к Большому взрыву, и некоторых свойств черных дыр. Представляется фундаментально необходимой формулировка квантовой теории, которая включала бы гравитацию и другие силы. Для построения такой полной теории может понадобиться объединение гравитации с другими силами.

1.2. Теория струн как единая физическая теория

Теория струн является замечательным кандидатом на единую теорию всех сил в природе. Кроме того, это довольно впечатляющий прототип полной физической теории. В теории струн все взаимодействия действительно объединены на глубоком и значительном уровне. На самом деле объединены все частицы. Теория струн — это квантовая теория, и поскольку она включает гравитацию, эта теория является квантовой теорией гравитации. Смотря с этой точки зрения и вспоминая провалы попыток превратить эйнштейновскую гравитацию в квантовую теорию, можно заключить, что в теории струн все другие взаимодействия необходимы для согласованности сектора квантовой гравитации! Хотя непосредственно измерить эффекты квантовой гравитации довольно трудно, теория квантовой гравитации, подобная теории струн, может предсказать явления, касающиеся других взаимодействий, которые могут быть проверены.

Почему теория струн — действительно теория объединения? Причина проста и коренится в основных положениях теории. В теории струн каждая частица идентифицируется как конкретная колебательная мода элементарной микроскопической струны. В данном случае очень уместна музыкальная аналогия. Так же как скрипичная струна может колебаться в разных модах, причем каждая мода соответствует определенному звуку, так и моды колебаний фундаментальной струны можно сопоставить с различными известными нам частицами. Одним из колебательных состояний струн является гравитон — квант гравитационного поля. Так как существует всего один тип струн и все частицы возникают из колебаний струн, то, в результате, все частицы естественно включаются в одну

14

듶



Рис. 1.1. Распад $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$ как процесс взаимодействия частиц (слева) и струн (справа)

теорию. Когда в рамках теории струн мы обсуждаем процесс распада $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$, где элементарная частица α распадается на частицы β и γ , мы представляем себе одну струну, колеблющуюся таким образом, что она сопоставляется с частицей α , и эта струна разбивается на две струны, колеблющиеся так, что они сопоставляются частицам β и γ . Так как оказывается, что струны необычайно малы, прямое наблюдение струноподобной природы частиц может оказаться затруднительным.

Почему мы уверены, что теория струн является хорошей квантовой теорией гравитации? Полной уверенности до сих пор нет, но есть очень хорошее свидетельство. Действительно, по-видимому, в теории струн не возникает проблем невычислимости или недостатка предсказуемости, возникающих при попытке квантования теории Эйнштейна.

Для столь амбициозной теории, как теория струн, очевидно, желательна определенная степень однозначности. Наличие нескольких непротиворечивых кандидатов на роль теории всех взаимодействий было бы разочаровывающим фактом. Первым признаком того, что теория струн является достаточно однозначной, является то, что в ней нет настраиваемых безразмерных параметров. Как отмечалось ранее, в Стандартной модели физики частиц имеется около двадцати параметров, которые нужно настроить, придав им точные значения. На самом деле теория с настраиваемыми безразмерными параметрами не является однозначной. Когда параметры принимают разные значения, получаются разные теории с потенциально разными предсказаниями. В теории струн имеется один размерный параметр — длина струны ℓ_s , значение этого параметра можно приближенно представлять себе как типичный размер струн.

Другим интригующим признаком однозначности теории струн является то, что размерность пространства-времени оказывается фиксированной. Наше физическое пространство-время четырехмерно, с одним временным и тремя пространственными измерениями. В Стандартной модели эта информация используется для построения теории, она не выводится. А в теории струн число пространственно-временных измерений возникает из вычислений, их получается не четыре, а скорее десять. Некоторые из этих измерений могут быть скрыты от прямого взгляда, если они свернуты в пространство столь малых размеров, что не могут быть обнаружены экспериментально при низких энергиях. Если теория струн правильна, должен существовать какой-то механизм, обеспечивающий то, что наблюдаемая размерность пространства-времени равна четырем.

Отсутствие настраиваемых безразмерных параметров — признак однозначности теории струн: это означает, что теория не может быть непрерывным образом деформирована или изменена путем изменения этих параметров. Но ведь могут существовать другие теории, которые невозможно получить путем непрерывных деформаций. Так сколько же имеется теорий струн?

Начнем с того, что имеются два больших подраздела этих теорий: есть открытые и замкнутые струны. У открытых струн есть два конца, в то время как у замкнутых струн концов нет. Можно рассматривать теории только с замкнутыми струнами и теории, в которых есть как замкнутые, так и открытые струны. Поскольку открытые струны в общем случае могут замыкаться, образуя замкнутые струны, мы не рассматриваем теорий только с открытыми струнами. Второе деление на подразделы заключается в рассмотрении теорий бозонных струн и теорий суперструн. Бозонные струны живут в 26 измерениях и все их колебания представляют собой бозоны. Так как в этих теориях нет фермионов, теории бозонных струн нереалистичны. Однако они намного проще, чем теории суперструн, и большинство важных понятий теории струн можно объяснить в рамках бозонных струн. Суперструны живут в десятимерном пространстве-времени и спектр их состояний включает как бозоны, так и фермионы. На самом деле эти два набора частиц связаны преобразованием суперсимметрии, поэтому суперсимметрия является важной составной частью теории струн. Все реалистичные модели теории струн построены из суперструн. Во всех теориях струн гравитон возникает как колебательная мода замкнутой струны — в теории струн гравитация неизбежна.

К середине 1980-х гг. было известно о существовании пяти десятимерных теорий суперструн. За последовавшие годы было обнаружено много внутренних связей между этими теориями. Кроме того, путем перехода к определенному пределу сильной связи в рамках одной из теорий суперструн была обнаружена новая теория. Эта теория одиннадцатимерна и, за неимением лучшего названия, ее окрестили М-теорией. Теперь стало ясно, что пять теорий суперструн и М-теория являются просто сторонами или различными пределами одной единственной теории! В настоящее время эта единственная теория остается во многом загадочной. Похоже, что менее обещающие теории бозонных струн не связаны с паутиной суперструнных теорий, но в будущем эта точка зрения может измениться.

Резюмируя, мы видим, что теория струн является действительно единой и возможно единственной теорией. Это кандидат в единую физическую теорию, ту теорию, которую Альберт Эйнштейн стремился построить сразу же после создания общей теории относительности. Возможно, что Эйнштейн был бы удивлен, а может быть и огорчен той важной ролью, которую в теории струн играет квантовая механика. Но похоже, что теория струн является достойным последователем общей теории относительности. Почти наверняка теория струн породит новое представление о пространстве-времени. Особое положение квантовой механики в теории струн не должно было бы удивить Поля Дирака. Его работы по квантованию показывают, что он чувствовал, что из квантования классической физики могут возникнуть глубокие квантовые теории. Именно это и произошло в теории струн. Эта книга детально объяснит, почему теория струн, по крайней мере, в ее простейшей форме, есть не что иное, как квантовая механика классических релятивистских струн.

1.3. Теория струн и ее проверка

С самого начала следует сказать, что до сих пор нет экспериментального подтверждения теории струн. Чтобы получить такое подтверждение, нужно иметь четкое предсказание. Такое предсказание трудно получить. Теория струн все еще находится на ранней стадии развития, и не так-то просто делать предсказания с помощью не до конца понятной теории. Все же существует ряд интересных возможностей.

Как отмечалось выше, теория суперструн оперирует десятимерным пространством-временем — одним временным и девятью пространственными измерениями. Если теория струн верна, должны существовать дополнительные пространственные измерения, даже если мы их до сих пор не наблюдали. Можно ли проверить существование таких дополнительных измерений? Если дополнительные измерения имеют размер планковской длины ℓ_P (шкала масштабов, связанных с четырехмерной гравитацией), они будут находиться, может быть навсегда, за пределами прямой регистрации. Действительно, $\ell_P \sim 10^{-33}$ см и это расстояние на много порядков меньше 10^{-16} см — наименьшего расстояния, которое может быть исследовано с помощью ускорителей частиц. Считалось, что такой сценарий наиболее вероятен. Предполагалось, что в теории струн шкала масштабов ℓ_s совпадает с планковской длиной, и в этом случае дополнительные измерения также будут иметь планковские размеры.

Однако оказалось, что теория струн допускает существование дополнительных измерений с размерами порядка одной десятой миллиметра! Удивительно, что дополнительные измерения таких размеров могли остаться незамеченными. Чтобы такое случилось, длина струн ℓ_s должна быть порядка 10^{-18} см. Кроме того, наше трехмерное пространство оказывается гиперпространством, погруженным в девятимерное пространство. Гиперпространство, или многомерная мембрана, называется D-браной. В теории струн эти D-браны являются реальными физическими объектами. В этой схеме существование дополнительных измерений может быть проверено только гравитационными экспериментами. Дополнительные измерения, если они достаточно маленькие, но большие ℓ_P , могут обнаружиться в экспериментах на ускорителях, то это станет сильным свидетельством в пользу теории струн. Возможно даже непосредственное наблюдение струн. Мы обсудим проблему дополнительных измерений в главе 3.

Поразительное подтверждение теории струн может возникнуть в результате открытия космической струны. Оставшаяся от процессов, происходивших в ранней Вселенной, космическая струна может растягиваться от одного края наблюдаемой Вселенной до другого, и может быть обнаружена благодаря гравитационному линзированию или, более косвенно, путем обнаружения гравитационных волн. До сего дня не обнаружено никаких космических струн, однако поиски не исчерпали себя и продолжаются. Если космическая струна будет найдена, ее следует детально изучить, чтобы подтвердить, что это струна из теории струн, а не другой вид струны, который может возникнуть в общепринятых теориях физики частиц. Мы обсудим проблему космических струн в главе 7. Друтая возможность проверки теории связана с суперсимметрией. Если мы будем исходить из десятимерной теории суперструн и компактифицируем шесть дополнительных измерений, полученная четырехмерная теория будет, в больщинстве случаев, суперсимметричной. Никаких однозначных предсказаний относительно конкретных деталей четырехмерной теории не возникает, но само наличие суперсимметрии является довольно характерным свойством. Экспериментальное обнаружение суперсимметрии на будущих ускорителях станет очень сильным свидетельством того, что теория струн на верном пути.

Оставляя в стороне предсказания новых явлений, следует спросить себя, возникает ли Стандартная модель из теории струн. Так должно быть, потому что предполагается, что теория струн есть единая теория всех взаимодействий, и поэтому она должна сводиться к Стандартной модели при достаточно низких энергиях. Хотя в теории струн хватает места для всех известных частиц и взаимодействий, что, безусловно, хорошая новость, никто еще не смог показать во всех деталях, как они возникают. В главе 21 мы изучим ряд моделей, использующих D-браны и имеющих сверхъестественное сходство с известным нам миром. На самом деле в этих моделях содержание частиц точно такое же, как в Стандартной модели (правда, частицы получаются с нулевой массой, и неясно, правильно ли работает придающий им массы механизм). Наш четырехмерный мир есть часть D-бран, но оказывается, что эти D-браны имеют более трех пространственных измерений. Дополнительные измерения D-бран свернуты в компактное пространство (мы узнаем далее, как представлять такие конфигурации!). Калибровочные бозоны и частицы материи в модели возникают из колебаний открытых струн, натянутых между D-бранами. Мы покажем, что концевые точки открытых струн должны оставаться прикрепленными к D-бранам. Если угодно, для струн можно привести музыкальную аналогию: точно так же, как струны скрипки натянуты между колками, D-браны фиксируют концевые точки открытых струн, наинизшие колебательные моды которых могут представлять частицы Стандартной модели!

Теория струн, так же, как эйнштейновская теория тяготения, обладает загадочным свойством. Уравнения тяготения Эйнштейна допускают много космологических решений. Каждое решение представляет непротиворечивую вселенную, но только одно из них представляет *нашу* наблюдаемую Вселенную. Не так-то легко объяснить, что совершает отбор физического решения, но в космологии это делается с помощью аргументов, основанных на начальных условиях, симметрии и простоте. Чем меньше число решений, которыми обладает теория, тем более она предсказуема. Если множество решений характеризуется непрерывными параметрами, отбор решения эквивалентен настройке значений параметров. Таким образом, теория, формулировка которой не требует настраиваемых параметров, может порождать настраиваемые параметры путем выбора своих решений! Очевидно, что в теории струн набор решений (моделей струн) характеризуется как дискретными, так и непрерывными параметрами.

С учетом этих замечаний, можно задаться вопросом: каковы возможные итоги поиска реалистичной модели струн? Ясно, что для воспроизведения Стандартной модели струнная модель не должна иметь непрерывных параметров: такие параметры требуют существования безмассовых полей, которые не наблюдались экспериментально. Один возможный итог (наихудший) состоит в том, что ни одна модель струн не воспроизводит Стандартную модель. Это исключило бы теорию струн из рассмотрения. Другой возможный итог (наилучший) состоит в том, что одна модель струн воспроизводит Стандартную модель. Кроме того, модель изображается хорошо изолированной точкой в пространстве всех струнных решений; таким образом, параметры Стандартной модели могут быть предсказаны. Число моделей струн может быть настолько велико, что возникнет странная возможность: множество моделей струн с почти одинаковыми свойствами с известной точностью согласуются со Стандартной моделью. В этом случае произойдет потеря предсказательной силы. Возможны и другие итоги.

Теоретики-струнники иногда утверждают, что теория струн уже привела по крайней мере к одному успешному *предсказанию*: она предсказала гравитацию! (Я слышал это от Джона Шварца.) В этом утверждении есть доля шутки, однако я полагаю, что здесь содержится очень важное утверждение. Теория струн это квантовая механика релятивистской струны. Никогда и ни в каком смысле гравитация не включалась в теорию струн извне. Удивительно, но гравитация возникает в теории струн. Действительно, ни одно из колебаний *классической* релятивистской струны не соответствует частице тяготения, но мы обнаруживаем частицу тяготения среди *квантовых* колебаний релятивистской струны. Читая эту книгу, страницу за страницей, вы увидите в деталях, как это происходит. Поразительное квантовое возникновение гравитации в теории струн полностью соответствует предсказанию.

1.4. Развитие и перспективы

Теория струн стала очень популярной и активной областью исследований с момента, когда Майкл Грин и Джон Шварц в 1984 г. показали, что суперструны не подвержены фатальным противоречиям, разрушающим аналогичные теории частиц в десяти измерениях. С тех пор был достигнут большой прогресс.

Теория струн породила новый интересный взгляд на обычные теории физики частиц, в особенности, калибровочные теории. Это те типы теорий, которые используются для формулировки Стандартной модели. Близкие родственники этих калибровочных теорий возникают на D-бранах теории струн. Начиная с главы 15, мы исследуем D-браны и возникающие на них теории. В главе 23 обсуждается примечательная физическая эквивалентность некоторой четырехмерной калибровочной теории и теории замкнутой суперструны (соответствие АдС/КТП). Мы увидим, как это соответствие было использовано для объяснения гидродинамических свойств кварк-глюонной плазмы, полученной с помощью ускорителей тяжелых ионов при соударении ядер золота.

Теория струн также предложила интересную статистическую интерпретацию энтропии черной дыры. Из пионерских работ Якоба Бекенштейна и Стивена Хокинга мы знаем, что черные дыры обладают как энтропией, так и температурой. В статистической механике эти свойства возникают, если система может

быть построена многими вырожденными способами, используя базисные компоненты. Такая интерпретация невозможна в эйнштейновской теории гравитации, где черные дыры либо вообще лишены составных частей, либо их очень мало. Однако, в теории струн можно построить черные дыры путем сборки различных типов D-бран и струн. Для таких черных дыр предсказываемая энтропия Бекенштейна получается подсчетом числа способов, которыми они могут быть построены из составляющих D-бран и струн. Мы обсудим это важное достижение в главе 22.

Теория струн может понадобиться для изучения космологии Очень Ранней Вселенной. Она может предоставить конкретную модель инфляции — периода драматического экспоненциального расширения, которое Вселенная, по-видимому, испытала в самые ранние моменты. Теория инфляции предполагает, что наша Вселенная похожа на растущий пузырь или расширяющуюся область пространства. Пузыри продолжают все время возникать и каждая модель могла бы физически реализоваться в каком-то пузыре. Инфляция не возникла бесконечно давно, так что представляется необходимым какое-то начало. Глубочайшие загадки Вселенной, похоже, таятся в режиме, когда классическая общая теория относительности действительно нарушается. Теория струн поможет нам заглянуть в эту неведомую область. Когда-нибудь мы сумеем понять, как возникла Вселенная, если это произошло, или как Вселенная могла существовавть вечно в прошлом, если это действительно было.

Ответы на такие вопросы потребуют, скорее всего, совершенного владения теорией струн, которое лежит сейчас за пределами наших возможностей. На самом деле теория струн является незаконченной теорией. Пояснить это можно путем сравнения с теорией Эйнштейна: уравнения общей теории относительности Эйнштейна элегантны и геометричны, они включают концептуальные основы теории и полностью подготовлены к описанию гравитации. В теории струн никакие подобные уравнения неизвестны и концептуальная основа теории остается во многом неизвестной. Теория струн представляет захватывающую область исследований, так как еще предстоит найти ее основные идеи.

Описание природы и формулировка теории — вот современные вызовы теории струн. Если удастся преодолеть эти трудности, мы получим теорию всех взаимодействий, позволяющую представить эволюцию пространства-времени и разрецить загадки квантово-механической Вселенной. При таких больших ставках физики предпочитают развивать теорию струн, пока не будут получены определенные ответы.

Глава 2

Специальная теория относительности и дополнительные измерения

Прилагательное «релятивистский», употребляемое, например, в термине «релятивистские струны», указывает на совместимость со специальной теорией относительности Эйнштейна. В этой главе мы дадим краткий обзор специальной теории относительности и рассмотрим световой конус, координаты на нем и энергию. Затем мы обсудим идею дополнительных компактных пространственных измерений и на примере из квантовой механики покажем, что если эти измерения малы, то они практически не влияют на низкоэнергетические процессы.

2.1. Единицы измерения и параметры

Единицы измерения — это не что иное, как фиксированные величины, которые мы используем для целей отсчета. Измерение включает нахождение безразмерного отношения наблюдаемой величины и соответствующей единицы измерения. Рассмотрим, например, определение секунды в Международной системе единиц (СИ). Секунда в СИ (с) определена как длительность 9 192 631 770 периодов излучения, испускаемого при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры в атоме цезия-133. Когда мы измеряем время, прошедшее между двумя событиями, мы на самом деле подсчитываем свободное от единиц измерения безразмерное число, которое говорит нам, сколько секунд прошло между двумя событиями или какое количество периодов излучения цезия укладывается в интервале времени между двумя событиями. То же самое происходит и с длиной. Единица длины, называемая метр (м), определена в наши дни как расстояние, пройденное светом за определенную долю секунды (точнее, за 1/299 792 458 с). Третьей единицей является единица массы килограмм (кг) — масса международного эталона, хранящегося в Севре, Франция.

Совершая размерный анализ, мы обозначаем единицы длины, времени и массы как L, T, M, соответственно. Эти три единицы называются базисными единицами. Сила, например, имеет единицу измерения

$$[F] = MLT^{-2}, (2.1)$$

где [X] обозначает единицу измерения величины X. Уравнение (2.1) следует из закона Ньютона, согласно которому сила, действующая на тело, равна произ-
ведению массы тела и его ускорения. Единицей измерения силы в СИ является ньютон (H), и он равен кг · м/с².

Интересно, что для описания других величин не требуется дополнительных базисных единиц. Рассмотрим, например, электрический заряд. Нужна ли новая единица для описания заряда? Нет, не нужна. Это легко увидеть в гауссовой системе единиц. В такой системе величина кулоновской силы $|\vec{F}|$, действующей между двумя зарядами q_1 и q_2 , разделенными расстоянием r, равна

$$|\vec{F}| = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$
 (2.2)

Единицы измерения заряда выражаются через другие единицы, поскольку мы знаем уравнение, выражающее силу через заряды. Все остальные величины в этом уравнении имеют известные единицы измерения. Гауссова единица измерения заряда есть СГСЭ-ед., и она определяется утверждением, что два заряда величиной в одну СГСЭ-ед., помещенные на расстоянии 1 см друг от друга, отталкиваются с силой, равной 1 дин (гауссова единица измерения силы, равная 10⁻⁵ H). Таким образом,

$$(C\Gamma C \Im - ed.)^2 = duh \cdot cm^2 = 10^{-5} H \cdot (10^{-2} m)^2 = 10^{-9} H \cdot m^2.$$
 (2.3)

Из этого уравнения следует, что

$$[(C\Gamma C \mathfrak{I} - e_{\mathfrak{A}})^2] = [\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}^2], \qquad (2.4)$$

так что, используя (2.1), получаем окончательно

$$[C\Gamma C \mathfrak{I} - e_{\Pi}] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}.$$
(2.5)

Таким образом СГСЭ-ед. выражается через три базисные единицы.

В СИ заряд измеряется в кулонах (Кл). Ситуация в СИ несколько более запутанная, но главная идея остается прежней. Кулон определяется в СИ как количество электричества, проносимое через сечение проводника током в 1 ампер (А) за 1 с. Сам по себе ампер определяется как величина тока, текущего по двум проводам, находящимся на расстоянии 1 м друг от друга, и заставляющего провода действовать друг на друга с силой 2×10^{-7} Н на каждый метр длины. В противоположность СГСЭ-ед. заряда, кулон не выражается в метрах, килограммах и секундах. Закон Кулона в СИ имеет вид:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1q_2|}{r^2}, \quad \text{rge} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \; \frac{\text{H} \cdot \text{M}^2}{\text{K}\pi^2}.$$
 (2.6)

Обратите внимание на наличие множителя Kn^{-2} в определении стоящего впереди постоянного коэффициента. Так как каждый заряд несет один множитель Кл, при вычислении величины силы все множители Кл сокращаются. Два заряда величиной 1 Кл каждый, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, будут испытывать силу 8,99 × 10⁹ Н. Это позволяет вывести, сколько СГСЭ-ед. заряда содержится в 4 Кл (задача 2.1). Хотя мы и не записываем кулоны через другие

единицы, это просто вопрос удобства. Кулоны и СГСЭ-ед. связаны друг с другом, а СГСЭ-ед. записываются через три базисные единицы.

Когда мы говорим о параметрах теории, удобно различать размерные и безразмерные параметры. Рассмотрим, например, теорию, в которой есть три типа частиц с массами m_1 , m_2 и m_3 . Можно считать, что в такой теории есть один размерный параметр — масса m_1 первой частицы — и два безразмерных параметра m_2/m_1 и m_3/m_1 .

Говорят, что теория струн не имеет настраиваемых параметров. Под этим подразумевается, что для ее формулировки не нужны безразмерные параметры. Однако, в этой теории есть один размерный параметр — длина струны l_s . Эта длина устанавливает характерный масштаб. В начале 1970-х гг. теория струн была впервые сформулирована для описания адронов и длина струны полагалась сравнимой с размером нуклона. Сейчас мы считаем, что теория струн является теорией фундаментальных взаимодействий. Соответственно, мы полагаем, что длина струны много меньше размеров нуклона.

2.2. Интервалы и преобразования Лоренца

Специальная теория относительности основана на экспериментальном факте: величина скорости света ($c \simeq 3 \times 10^8$ м/с) одинакова для всех инерциальных наблюдателей. Этот факт приводит к ряду довольно удивительных выводов. Ньютоново интуитивное утверждение об абсолютности времени, понятие одновременности и другие привычные нам представления должны быть пересмотрены. При сравнении координат событий два инерциальных наблюдателя, с этого момента называемые лоренцевскими наблюдателями, обнаруживают, что соответствующие преобразования координат смешивают пространство и время.

В специальной теории относительности события характеризуются значениями четырех координат — временной координаты t и трех пространственных координат (x, y, z). Удобно объединить эти четыре числа в единый комплекс (ct, x, y, z), где временная координата умножена на скорость света для того, чтобы все координаты имели размерность длины. Чтобы сделать обозначения более единообразными, переобозначим их следующим образом, используя индексы:

$$x^{\mu} = (x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}) \equiv (ct, x, y, z).$$
(2.7)

Здесь верхний индекс μ принимает четыре значения: 0, 1, 2, 3. Величины x^{μ} называются пространственно-временными координатами.

Рассмотрим лоренцевскую систему отсчета S, в которой два события представляются координатами x^{μ} и $x^{\mu} + \Delta x^{\mu}$. Рассмотрим далее вторую лоренцевскую систему отсчета S', в которой те же два события описываются координатами x'^{μ} и $x'^{\mu} + \Delta x'^{\mu}$, соответственно. В общем случае различны не только сами координаты x^{μ} и x'^{μ} , но и разности координат Δx^{μ} и $\Delta x'^{\mu}$. С другой стороны, оба наблюдателя придут к единому мнению о величине инвариантного интервала Δs^2 . Этот интервал определяется как

$$-\Delta s^{2} \equiv -(\Delta x^{0})^{2} + (\Delta x^{1})^{2} + (\Delta x^{2})^{2} + (\Delta x^{3})^{2}.$$
(2.8)

Обратите внимание на знак «минус» перед $(\Delta x^0)^2$ в противоположность знаку «плюс» перед пространственными слагаемыми $(\Delta x^i)^2$ (i = 1, 2, 3). В этом знаке закодировано фундаментальное различие между временной и пространственными координатами. Равенство значений интервалов записывается в виде

$$-(\Delta x^{0})^{2} + (\Delta x^{1})^{2} + (\Delta x^{2})^{2} + (\Delta x^{3})^{2} = -(\Delta x^{\prime 0})^{2} + (\Delta x^{\prime 1})^{2} + (\Delta x^{\prime 2})^{2} + (\Delta x^{\prime 3})^{2}, \quad (2.9)$$

или

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2. \tag{2.10}$$

Знак «минус» в левой части (2.8) подразумевает, что $\Delta s^2 > 0$ для *времениподобных* событий. Это такие события, для которых

$$(\Delta x^{0})^{2} > (\Delta x^{1})^{2} + (\Delta x^{2})^{2} + (\Delta x^{3})^{2}.$$
(2.11)

История частицы представляется в пространстве-времени в виде кривой, называемой мировой линией частицы. Любые два события на мировой линии частицы разделены времениподобным интервалом, поскольку ни одна частица не может двигаться быстрее света, и поэтому расстояние, пройденное светом за время, разделяющее события, должно быть больше, чем пространственное расстояние между этими событиями. Именно это и утверждает соотношение (2.11). Вы в момент рождения и Вы же в момент, когда читаете эти строки, представляете собой два различных времениподобных события: между ними прошло много времени, но они разделены не очень большим расстоянием. События, связанные мировой линией фотона, называются *светоподобными*. Для таких пар событий $\Delta s^2 = 0$, так как в этом случае выражения с двух сторон (2.11) тождественны: пространственное расстояние между событиями совпадает с расстоянием, которое прошел бы свет за время, разделяющее события. Два события, для которых $\Delta s^2 < 0$, называются пространственноподобными. События, которые произошли одновременно в данной лоренцевской системе отсчета, но в разных пространственных точках этой системы, разделены пространственноподобным интервалом. Так как Δs^2 может быть отрицательным, его нельзя записать как $(\Delta s)^2$. Однако для событий, разделенных времениподобным интервалом, мы можем определить

$$\Delta s \equiv \sqrt{\Delta s^2}, \quad \text{если} \quad \Delta s^2 > 0. \tag{2.12}$$

Часто полезно рассматривать события, бесконечно близкие друг к другу. Малые разности координат нужны для определения скоростей, а также полезны в общей теории относительности. Бесконечно малое приращение координат записывается как dx^{μ} , а соответствующий инвариантный интервал записывается как ds^2 . Как следует из (2.8),

$$-ds^{2} = -(dx^{0})^{2} + (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2}.$$
 (2.13)

Равенство интервалов - это утверждение, что

$$ds^2 = ds'^2. (2.14)$$

Очень полезные обозначения возникают при попытке упростить выражение для инварианта ds^2 . Введем для этого символы, несущие не верхние, а нижние индексы. Определим

$$dx_0 \equiv -dx^0, \quad dx_1 \equiv dx^1, \quad dx_0 \equiv dx^2, \quad dx_3 \equiv dx^3. \tag{2.15}$$

Единственным существенным изменением стало включение знака «минус» перед нулевой компонентой. Собирая все вместе, запишем

$$dx_{\mu} = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (-dx^0, dx^1, dx^2, dx^3). \qquad (2.16)$$

Теперь можно переписать ds^2 с помощью dx^{μ} и dx_{μ} :

$$-ds^{2} = -(dx^{0})^{2} + (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2} =$$

= $dx_{0}dx^{0} + dx_{1}dx^{1} + dx_{2}dx^{2} + dx_{3}dx^{3}.$ (2.17)

и мы видим, что знак «минус» в (2.13) исчез. Инвариантный интервал принял вид

$$-ds^{2} = \sum_{\mu=0}^{3} dx_{\mu} dx^{\mu}.$$
 (2.18)

В оставшейся части книги мы будем использовать соглашение суммирования Эйнштейна. Согласно этому соглашению, суммирование должно быть произведено по повторным индексам в отдельном слагаемом по всему множеству значений. Мы не рассматриваем индексы как повторные, если они возникают в разных слагаемых. Например, не требуется проводить суммирование в выражениях $a^{\mu} + b^{\mu}$ или $a^{\mu} = b^{\mu}$, но выражение $a^{\mu}b_{\mu}$ неявно подразумевает суммирование. Повторный индекс должен встретится один раз как нижний индекс, а другой раз как верхний, и не более чем дважды в каждом слагаемом. Буква, выбранная для повторного индекса, несущественна: так, $a^{\mu}b_{\mu} = a^{\nu}b_{\nu}$. Из-за этого повторные индексы иногда называют немыми индексами! Используя новое обозначение суммирования, мы можем переписать (2.18) как

$$-ds^2 = dx_\mu dx^\mu. \tag{2.19}$$

Так же, как это было сделано в (2.12) для конечных разностей координат, для времениподобных интервалов мы определяем величину

$$ds \equiv \sqrt{ds^2}, \quad \text{если} \quad ds^2 > 0. \tag{2.20}$$

Можно также записать интервал ds^2 , используя метрику Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Это делается с помощью равенства

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \qquad (2.21)$$

Само по себе выражение (2.21) не определяет метрику $\eta_{\mu\nu}$. Если мы дополнительно потребуем, чтобы $\eta_{\mu\nu}$ была величиной, симметричной относительно перестановки индексов,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}, \qquad (2.22)$$

тогда это утверждение совместно с (2.21) полностью определяет метрику, называемую метрикой Минковского. Разумно с самого начала объявить, что $\eta_{\mu\nu}$ является симметричной величиной, так как мы сейчас покажем, что любая антисимметричная составляющая должна быть равна нулю.

Любой двухиндексный объект $M_{\mu\nu}$ можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} + M_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} - M_{\nu\mu}). \qquad (2.23)$$

Первое слагаемое в правой части (симметричная часть M) инвариантно относительно перестановки индексов μ и ν . Второе слагаемое в правой части (антисимметричная часть M) изменяет знак при перестановке индексов μ и ν . Если $\eta_{\mu\nu}$ имеет антисимметричную часть $\xi_{\mu\nu}(=-\xi_{\nu\mu})$, то ее вклад не изменяет правую часть (2.21). Это можно показать следующим образом:

$$\xi_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = (-\xi_{\nu\mu})dx^{\mu}dx^{\nu} = -\xi_{\mu\nu}dx^{\nu}dx^{\mu} = -\xi_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \qquad (2.24)$$

На первом шаге мы использовали антисимметрию $\xi_{\mu\nu}$. На втором шаге мы переобозначили немые индексы: индекс μ заменился на индекс ν и наоборот. На третьем шаге мы переставили местами множители dx^{μ} и dx^{ν} . В результате получилось, что $\xi_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ равно самому себе со знаком «минус», и поэтому обращается в нуль. Существование антисимметричной части $\eta_{\mu\nu}$ бессмысленно, так что мы просто объявим, что ее нет.

Так как по повторяющимся индексам идет суммирование, формула (2.21) означает, что

$$-ds^{2} = \eta_{00}dx^{0}dx^{0} + \eta_{01}dx^{0}dx^{1} + \eta_{10}dx^{1}dx^{0} + \eta_{11}dx^{1}dx^{1} + \dots$$
 (2.25)

Сравнивая с (2.17) и используя (2.22), мы видим, что $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, а все остальные компоненты равны нулю. Можно собрать все значения в матричном виде:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (2.26)

В этом выражении, которое следует общепринятому отождествлению двухинлексных объектов матрицам, индекс μ , первый индекс $\eta_{\mu\nu}$, нумерует строки, а ν , второй индекс в η , нумерует столбцы. Метрика Минковского может использоваться для определения формализма опускания индексов. Перепишем формулу (2.15) как

$$dx_{\mu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\nu}. \tag{2.27}$$

Тогда, если задано множество величин b^{μ} , всегда можно определить b_{μ} как

$$b_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} b^{\nu}. \tag{2.28}$$

Если заданы объекты a^{μ} и b^{μ} , то можно определить релятивистское скалярное произведение $a \cdot b$:

$$a \cdot b \equiv a^{\mu}b_{\mu} = \eta_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu} = -a^{0}b^{0} + a^{1}b^{1} + a^{2}b^{2} + a^{3}b^{3}. \qquad (2.29)$$

В применении к (2.19) это дает $-ds^2 = dx \cdot dx$. Заметим, что $a^{\mu}b_{\mu} = a_{\mu}b^{\mu}$. Удобно ввести матрицу, обратную $\eta_{\mu\nu}$. Если обозначить ее $\eta^{\mu\nu}$, то

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (2.30)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта матрица действительно обратна матрице (2.26). Если рассматривать $\eta^{\mu\nu}$ как матрицу, как и $\eta_{\mu\nu}$, то первый индекс нумерует строки, а второй — столбцы. В индексных обозначениях свойство обратимости записывается как

$$\eta^{\nu\rho}\eta_{\rho\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \qquad (2.31)$$

где дельта-символ Кронекера δ^{ν}_{μ} определен равенствами

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu = \nu; \\ 0, & \text{если} \quad \mu \neq \nu. \end{cases}$$
(2.32)

Обратите внимание, что повторяющийся индекс ρ в (2.31) обеспечивает матричное умножение. Дельта-символ Кронекера — индексное представление единичной матрицы. Точно так же, как метрика с нижними индексами использовалась для опускания индекса, метрика с верхними индексами используется для поднятия индекса. Так, из (2.28) и (2.31) имеем:

$$\eta^{\rho\mu}b_{\mu} = \eta^{\rho\mu}(\eta_{\mu\nu}b^{\nu}) = (\eta^{\rho\mu}\eta_{\mu\nu})b^{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu}b^{\nu} = b^{\rho}.$$
(2.33)

Нижний индекс μ в b_{μ} поднят с помощью $\eta^{\rho\mu}$ и становится верхним индексом ρ . Последний шаг в предыдущем вычислении требует небольших объяснений: $\delta^{\rho}_{\nu}b^{\nu} = b^{\rho}$, так как мы суммируем по ν , а δ^{ρ}_{ν} обращается в нуль во всех случаях, кроме $\nu = \rho$, а в этом случае кронекеровский дельга-символ равен единице.

Лоренцевские преобразования — это соотношения между координатами в двух различных инерциальных системах отсчета. Рассмотрим систему S и систему S', движущуюся в положительном направлении вдоль оси x системы координат S со скоростью v (рис. 2.1). Предположим, что координатные оси двух систем параллельны, а начала координат совпадают в общий для них момент времени t = t' = 0. Мы говорим, что переход от системы к системе S' есть буст¹) вдоль направления оси x с параметром скорости $\beta \equiv v/c$.

¹⁾ В англоязычной литературе бустами называют преобразования Лоренца вида (2.34). — Прим. ред. перевода.



Рис. 2.1. Две лоренцевские системы отсчета, связанные бустом. Система S' совершает буст вдоль направления +x системы S с параметром буста $\beta = v/c$

В этом случае преобразование Лоренца имеет вид:

$$egin{aligned} x' &= \gamma(x-eta ct), \ ct' &= \gamma(ct-eta x), \ y' &= y, \ z' &= z, \end{aligned}$$

где лоренц-фактор γ равен

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$
 (2.35)

Используя индексы и меняя порядок двух первых выражений, получаем:

В этом преобразовании координаты x^2 и x^3 остаются неизменными, они ортогональны направлению буста. Обратные лоренцевские преобразования дают значения координат x, выраженных через координаты x'. Они легко находятся, если разрешить систему уравнений (2.36) относительно x. В результате получится то же множество преобразований, только в них x и x' меняются местами, а β заменяется на $(-\beta)$, что и требуется из симметрийных соображений.

Координаты в приведенных выше преобразованиях удовлетворяют соотношению

$$(x^{0})^{2} - (x^{1})^{2} - (x^{2})^{2} - (x^{3})^{2} = (x^{\prime 0})^{2} - (x^{\prime 1})^{2} - (x^{\prime 2})^{2} - (x^{\prime 3})^{2},$$
 (2.37)

что можно проверить прямым вычислением. Это соотношение есть просто утверждение об инвариантности интервала Δs^2 между двумя событиями: первое событие представлено координатами (0, 0, 0, 0) в обеих системах S и S', а второе

событие представлено координатами x^{μ} в S и x'^{μ} в S'. По определению, преобразования Лоренца есть обратимые линейные преобразования координат, сохраняющие интервал (2.37).

В общем случае мы записываем лоренцевское преобразование как линейную связь

$$x^{\prime \mu} = L^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}, \qquad (2.38)$$

где величины L^{μ}_{ν} являются постоянными, определяющими линейное преобразование. Для буста в (2.36) имеем

$$[L] = L^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (2.39)

При определении матрицы L как $[L] = L^{\mu}_{\nu}$ мы следуем соглашению, что первый индекс нумерует строки, а второй индекс нумерует столбцы. Именно по этой причине нижний индекс в L^{μ}_{ν} записан правее верхнего индекса.

Коэффициенты L^{μ}_{ν} подчиняются уравнению (2.37). В индексных обозначениях это уравнение требует, чтобы

$$\eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{x}^{\alpha} \boldsymbol{x}^{\beta} = \eta_{\mu\nu} \boldsymbol{x}^{\prime\mu} \boldsymbol{x}^{\prime\nu}. \qquad (2.40)$$

Используя дважды в правой части формулу (2.38), получаем:

$$\eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = \eta_{\mu\nu} \left(L^{\mu}{}_{\alpha}x^{\alpha} \right) \left(L^{\nu}{}_{\beta}x^{\beta} \right) = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}.$$
(2.41)

Это уравнение эквивалентно соотношению

$$\boldsymbol{k}_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}^{\alpha}\boldsymbol{x}^{\beta} = 0, \quad c \quad \boldsymbol{k}_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} - \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.42}$$

Так как $k_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0$ должно выполняться для всех значений координат x, находим:

$$k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha} = 0. \tag{2.43}$$

В этом можно убедиться, записав суммы по α и β . Так как $k_{\alpha\beta}$ на самом деле симметрично относительно перестановки индексов, из (2.43) следует $k_{\alpha\beta} = 0$. Это означает, что

$$\eta_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}=\eta_{\alpha\beta}.$$
(2.44)

Переписав (2.44) так, чтобы формула отвечала правилам матричного умножения, имеем:

$$L^{\mu}_{\ \alpha}\eta_{\mu\nu}L^{\nu}_{\ \beta}=\eta_{\alpha\beta}.\tag{2.45}$$

Суммирование по индексу ν производится без проблем: это индекс столбца в $\eta_{\mu\nu}$ и индекс строки в $L^{\nu}_{\ \beta}$. Однако индекс μ является индексом строки в $L^{\mu}_{\ \alpha}$, хотя этот индекс должен быть индексом столбца, чтобы просуммироваться с индексом строки в $\eta_{\mu\nu}$. Кроме того, индекс α в $L^{\mu}_{\ \alpha}$ является индексом столбца, в то время как он есть индекс строки в $\eta_{\alpha\beta}$. Это означает, что мы должны поменять местами стоблцы и строки L^{μ}_{a} , т. е. совершить матричную операцию транспонирования. Поэтому формула (2.45) может быть переписана как матричное уравнение

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\eta}. \tag{2.46}$$

Здесь η — матрица, компоненты которой равны $\eta_{\mu\nu}$. Это симпатичное уравнение есть то условие, которому должна удовлетворять матрица L, чтобы быть лоренцевскием преобразованием.

Взяв детерминант от обеих частей этого равенства, можно вывести важное свойство лоренцевских преобразований. Так как детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, запишем:

$$(\det L^T)(\det \eta)(\det L) = \det \eta.$$
(2.47)

Сокращая общий множитель det η , и вспоминая, что операция транспонирования не меняет значения детерминанта матрицы, находим:

$$(\det L)^2 = 1 \Rightarrow \det L = \pm 1.$$
 (2.48)

Можно убедиться, что det L = 1 для буста (2.39). Так как det L никогда не обращается в нуль, матрица L всегда обратима и, следовательно, все лоренцевские преобразования являются обратимыми преобразованиями.

Множество лоренцевских преобразований включает бусты вдоль каждой из пространственных координат. Кроме того, оно включает пространственные повороты. В результате пространственного поворота координаты (x^0, x^1, x^2, x^3) преобразуются в координаты (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) , для которых $x^0 = x'^0$, так как время не изменяется при повороте координат. Так как пространственное расстояние от данной точки до начала координат сохраняется при повороте относительно начала координат, имеем

$$(x^{1})^{2} + (x^{2})^{2} + (x^{3})^{2} = (x'^{1})^{2} + (x'^{2})^{2} + (x'^{3})^{2}.$$
 (2.49)

Вместе с равенством $x^0 = x'^0$ из этого следует, что равенство (2.37) выполняется. Таким образом, пространственные повороты являются лоренцевскими преобразованиями.

Говорят, что любая совокупность четырех величин, преобразующихся под действием лоренцевских преобразований так же, как x^{μ} , называется 4-вектором или лоренцевскием вектором. Когда мы используем индексные обозначения и пишем b^{μ} , мы подразумеваем, что b^{μ} есть 4-вектор. Беря дифференциалы линейных уравнений (2.36), видим, что линейные преобразования, связывающие x' c x, связывают также dx' c dx. Поэтому дифференциалы dx^{μ} определяют лоренцевский вектор. В духе индексных обозначений величина, не имеющая свободных индексов, должна быть инвариантом лоренцевских преобразований. Величина не имеет свободных индексов, если у нее вообще нет индексов или она содержит только повторяющиеся индексы, например, $a^{\mu}b_{\mu}$.

Говорят, что 4-вектор a^{μ} времениподобен, если $a^2 = a \cdot a < 0$, пространственноподобен, если $a^2 > 0$, и нулевой, если $a^2 = 0$. Вспоминая обсуждение

формулы (2.11), мы видим, что разности координат между времениподобными событиями определяют времениподобный вектор. Аналогично, разности координат между пространственноподобными событиями соответствует пространственноподобными событиями соответствует пространственноподобный вектор, а разности координат между светоподобными событиями — нулевой вектор.

- Упражнение-разминка 2.1. Проверьте, что инвариант ds² действительно сохраняется под действием преобразований Лоренца (2.36).
- Упражнение-разминка 2.2. Рассмотрим два 4-вектора а^µ и b^µ. Запишите лоренцевские преобразования а^µ → a^{′µ} и b^µ → b^{′µ}, аналогичные (2.36). Проверьте, что а^µb_µ есть инвариант этих преобразований

2.3. Координаты светового конуса

Обсудим теперь систему координат, которая будет чрезвычайно полезна при изучении теории струн, — систему координат светового конуса. Наиболее простым образом квантование релятивистской струны можно осуществить, используя координаты светового конуса. Существует другой подход к квантованию релятивистской струны, в котором вообще не используются какие бы то ни было специальные координаты. Этот подход, называемый лоренц-ковариантным квантованием, очень элегантен, но должное обсуждение потребовало бы изучения значительного дополнительного материала. В этой книге мы будем использовать для квантования струн координаты светового конуса.

Определим две координаты светового конуса x^+ и x^- как две независимые линейные комбинации временной координаты и произвольной пространственной координаты, в качестве которой принято выбирать x^1 . Это можно записать так:

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \qquad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1).$$
 (2.50)

Координаты x^2 и x^3 не играют никакой роли в этом определении. В системе координат светового конуса (x^0, x^1) заменяются на (x^+, x^-) , а две другие координаты остаются неизменными. Таким образом, полный набор координат светового конуса — это (x^+, x^-, x^2, x^3) .

Новые координаты x^+ и x^- называются координатами светового конуса, так как связанные с ними координатные оси являются мировыми линями световых лучей, испускаемых источником из начала координат вдоль оси x^1 . Для луча света, движущегося в положительном направлении x^1 , имеем $x^1 = ct = x^0$, и поэтому $x^- = 0$. По определению, линия $x^- = 0$ есть ось x^+ (рис. 2.2). Для луча света, движущегося в отрицательном направлении x^1 , имеем $x^1 = -ct = -x^0$, и поэтому $x^+ = 0$. Это соответствует оси x^- . Оси x^\pm наклонены под углом 45° по отношению к осям x^0 , x^1 .

Можем ли мы считать x^+ или, возможно, x^- , новой временной координатой? Да. На самом деле обе эти координаты могут на равных правах считаться



Рис. 2.2. Пространственно-временная диаграмма, на которой x^i и x^0 представляют ортогональные оси. Показаны также оси светового конуса $x^{\pm} = 0$. Кривые со стрелками — возможные мировые линии физических частиц

временной координатой, хотя ни одна из них не является временной координатой в привычном смысле этого слова. Время светового конуса не совсем совпадает с обычным временем. Вероятно, самым знакомым свойством времени является то, что для любого физического движения частицы оно идет вперед. На рис. 2.2 физическое движение, начинающееся в начале координат, представлено остающимися внутри светового конуса кривыми, наклон которых никогда не становится меньше 45°. Для всех этих кривых, когда мы движемся по стрелкам, как x^+ , так и x^- возрастают. Единственная тонкость заключается в том, что для специально выбранных световых лучей время светового конуса останавливается! Как мы видели выше, x^+ остается постоянной для светового луча, движущегося в отрицательном направлении оси x^1 , в том время как x^- остается постоянной для светового луча, движущегося в положительном направлении x^1 .

Для определенности, выберем x^+ временной координатой светового конуса. Соответственно, будем считать x^- пространственной координатой. Конечно, эти временная и пространственная координаты светового конуса выглядят несколько странно.

Беря дифференциалы от (2.50), немедленно находим, что

$$2dx^{+}dx^{-} = (dx^{0} + dx^{1})(dx^{0} - dx^{1}) = (dx^{0})^{2} - (dx^{1})^{2}.$$
 (2.51)

Отсюда следует, что инвариантный интервал (2.13), выраженный через координаты светового конуса (2.50), принимает вид

$$-ds^{2} = -2dx^{+}dx^{-} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2}. \qquad (2.52)$$

Здесь очевидна симметрия в определениях x^+ и x^- . Заметим, что при заданном ds^2 выражения для dx^+ или dx^- можно получить без извлечения квадратного корня. Как мы увидим в главе 9, это очень важное свойство координат светового конуса.

Как представить формулу (2.52), используя индексные обозначения? Нам все еще нужны индексы, пробегающие четыре значения, но на этот раз индексы будут именоваться

$$+, -, 2, 3.$$
 (2.53)

Как и в выражении (2.21), запишем

$$-ds^{2} = \widehat{\eta}_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \qquad (2.54)$$

Здесь мы ввели метрику светового конуса $\hat{\eta}$, которая, как и метрика Минковского, определена как величина, симметричная относительно перестановки индексов. Раскрывая это выражение и сравнивая с формулой (2.52), находим:

$$\widehat{\eta}_{+-} = \widehat{\eta}_{-+} = -1, \quad \widehat{\eta}_{++} = \widehat{\eta}_{--} = 0.$$
 (2.55)

В подпространстве (+, -) диагональные элементы метрики светового конуса обращаются в нуль, а недиагональные элементы отличны от нуля. Мы находим также, что метрика $\hat{\eta}$ не смешивает подпространство (+, -) с подпространством (2, 3):

$$\widehat{\eta}_{+I} = \widehat{\eta}_{-I} = 0, \quad I = 2, 3.$$
 (2.56)

Матричное представление метрики светового конуса имеет вид

$$\widehat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(2.57)

Компоненты светового конуса любого лоренцевского вектора a^{μ} определяются по аналогии с (2.50):

$$a^{+} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{0} + a^{1}), \quad a^{-} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{0} - a^{1}).$$
 (2.58)

Скалярное произведение двух векторов, определенное в (2.29), может быть записано через компоненты векторов светового конуса. На этот раз получим

$$a \cdot b = -a^{-}b^{+} - a^{+}b^{-} + a^{2}b^{2} + a^{3}b^{3} = \widehat{\eta}_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu}. \qquad (2.59)$$

Последнее равенство немедленно вытекает из суммирования по повторяющимся индексам и использования (2.57). Первое равенство требует небольшого вычисления. На самом деле достаточно проверить, что

$$-a^{-}b^{+} - a^{+}b^{-} = -a^{0}b^{0} + a^{\dagger}b^{\dagger}.$$
 (2.60)

Это быстро делается с помощью формулы (2.58) и аналогичных выражений для b^{\pm} . Мы можем также ввести нижние индексы светового конуса. Рассмотрим

выражение $a \cdot b = a_{\mu}b^{\mu}$, и разложим сумму по индексу μ , используя индексы светового конуса:

$$a \cdot b = a_{+}b^{+} + a_{-}b^{-} + a_{2}b^{2} + a_{3}b^{3}.$$
 (2.61)

Сравнивая с формулой (2.59), находим, что

$$a_{+} = -a^{-}, \quad a_{-} = -a^{+}.$$
 (2.62)

Когда мы опускали или поднимали нулевой индекс в лоренцевской системе отсчета, мы изменяли знак выражения. В координатах светового конуса при поднятии индекса первые две координаты переключаются друг на друга, и, кроме этого, мы тоже изменяем знак.

Так как физика, описываемая с помощью координат светового конуса, выглядит непривычно, мы должны с ней освоиться. Для этого рассмотрим пример, в котором вычисления просты, но результат удивителен.

Рассмотрим частицу, движущуюся вдоль оси x^1 с параметром скорости $\beta = v/c$. В момент времени t = 0 все координаты x^1 , x^2 и x^3 равны нулю. Движение легко описывается, если координаты выражаются как функции времени:

$$x^{1}(t) = vt = \beta x^{0}, \quad x^{2}(t) = x^{3}(t) = 0.$$
 (2.63)

Как будут эти же выражения выглядеть в координатах светового конуса? Так как x^+ есть время, а $x^2 = x^3 = 0$, нужно просто выразить x^- через x^+ . Пользуясь формулой (2.63), находим:

$$x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{2}} x^0.$$
 (2.64)

В результате

$$x^{-} = \frac{x^{0} - x^{1}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - \beta)}{\sqrt{2}} x^{0} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} x^{+}.$$
 (2.65)

Так как эта формула выражает координату светового конуса через время светового конуса, то отношение

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{2.66}$$

отождествляется со скоростью светового конуса. Не кажется ли вам, что эта скорость светового конуса выглядит несколько странно? Для света, распространяющегося направо ($\beta = 1$), она равна нулю. Действительно, свет, распространяющийся направо, имеет нулевую скорость светового конуса, так как x^- вообще не изменяется. Это соответствует линии 1 на рис. 2.3. Предположим, что у нас есть частица, движущаяся направо с большой обычной скоростью, так что $\beta \simeq 1$ (линия 2). Тогда ее скорость на световом конусе очень мала. Для того чтобы эта частица немного продвинулась в направлении x^- , должно пройти много времени светового конуса. Возможно, еще интереснее то, что неподвижная частица в стандартных координатах (линия 3) движется довольно быстро в координатах светового конуса. Когда $\beta = 0$, частица имеет единичную скорость на световом



Рис. 2.3. Мировые линии частиц с различными скоростями на световом конусе. Частица 1 имеет нулевую скорость светового конуса. Скорости последовательно увеличиваются, вплоть до момента, когда скорость частицы 5 становится бесконечной

конусе. Когда параметр β отрицателен и растет, скорость светового конуса увеличивается: числитель в формуле (2.66) больше единицы и увеличивается, в то время как знаменатель меньше единицы и уменьшается. При $\beta = -1$ (линия 5) скорость светового конуса бесконечна! Хотя это выглядит странным, здесь нет никакого противоречия с теорией относительности. Просто скорость светового конуса необычна. Координаты светового конуса — это такая система координат, в которой кинематика имеет нерелятивистский вид, и возможны бесконечные скорости.

Заметим, что координаты светового конуса были введены как изменение координат, а не как преобразования Лоренца. Не существует лоренцевских преобразований, переводящих координаты (x^0, x^1, x^2, x^3) в координаты $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (x^+, x^-, x^2, x^3)$.

Упражнение-разминка 2.3. Убедитесь в том, что последнее утверждение правильно.

2.4. Релятивистские энергия и импульс

В частной теории относительности существует фундаментальное соотношение между массой m точечной частицы, ее релятивистской энергией E и релятивистским импульсом \vec{p} . Это соотношение имеет вид:

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2. \tag{2.67}$$

Релятивистские энергия и импульс выражаются через массу и скорость частицы следующими известными соотношениями:

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}. \tag{2.68}$$

Упражнение-разминка 2.4. Проверьте, что приведенные выше выражения для энергии Е и импульса р удовлетворяют соотношению (2.67).

Как мы вскоре покажем, энергию и импульс можно использовать для определения 4-вектора импульса. Этот 4-вектор имеет компоненты

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right).$$
 (2.69)

Используя два последних соотношения, находим:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = m\gamma(c, \vec{v}).$$
 (2.70)

Формулу (2.28) можно использовать для опускания индекса у p^{μ} :

$$p_{\mu} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \eta_{\mu\nu} p^{\nu} = \left(-\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right).$$
(2.71)

Из предыдущих выражений для p^{μ} и p_{μ} следует, что

$$p^{\mu}p_{\mu} = -(p^{0})^{2} + \vec{p}\cdot\vec{p} = -\frac{E^{2}}{c^{2}} + \vec{p}\cdot\vec{p}, \qquad (2.72)$$

так что, пользуясь формулой (2.67), находим, что

$$p^{\mu}p_{\mu} = -m^2 c^2. \tag{2.73}$$

Так как произведение $p^{\mu}p_{\mu}$ не имеет свободных индексов, оно должно быть лоренцевскием скаляром. Действительно, все лоренцевские наблюдатели придут к согласию по поводу массы частицы. Используя обозначение релятивистского скалярного произведения, можно записать выражение (2.73) в виде:

$$p^2 \equiv p \cdot p = -m^2 c^2. \tag{2.74}$$

Центральным понятием специальной теории относительности является понятие собственного времени. Это есть лоренц-инвариантная мера времени. Рассмотрим движущуюся частицу и два события, случившиеся на ее траектории. Разные лоренцевские наблюдатели зафиксируют разные значения интервала времени между этими двумя событиями. Но представим себе, что движущаяся частица несет на себе часы. Собственное время — это время, прошедшее между двумя событиями по этим часам. По определению, оно есть инвариант: все наблюдатели должны прийти к согласию относительно времени, прошедшего по этим часам!

Собственное время естественно возникает при вычислении инвариантных интервалов. Рассмотрим инвариантный интервал для движения частицы вдоль оси *x*:

$$-ds^{2} = -c^{2}dt^{2} + dx^{2} = -c^{2}dt^{2}(1-\beta^{2}). \qquad (2.75)$$

Вычислим теперь интервал, используя лоренцевскую систему отсчета, привязанную к частице. Это система, в которой частица не движется, а время фиксируется часами, которые движутся вместе с частицей. В такой системе dx = 0 и $dt = dt_p$ прошедшее собственное время. В результате,

$$-ds^2 = -c^2 dt_p^2. (2.76)$$

Сокращая знаки минус и извлекая квадратный корень (с помощью формулы (2.20)), находим

$$ds = c \, dt_p. \tag{2.77}$$

Это показывает, что для времениподобных интервалов *ds/c* есть интервал собственного времени. Аналогично, сокращая знаки минус и извлекая квадратный корень из правой и левой частей формулы (2.75), получаем:

$$ds = c dt \sqrt{1-\beta^2} \rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma}{c}.$$
 (2.78)

Величина ds есть лоренцевский инвариант, его можно использовать для построения новых лоренцевских векторов из старых. Например, 4-вектор скорости u^{μ} получается, если взять отношение dx^{μ} и ds. Так как dx^{μ} — лоренцевский вектор, а ds — лоренцевский скаляр, их отношение тоже есть лоренцевский вектор:

$$u^{\mu} = c \, \frac{dx^{\mu}}{ds} = c \left(\frac{d(ct)}{ds}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right). \tag{2.79}$$

Множитель с включен в формулу для того, чтобы u^{μ} имело размерность скорости. Компоненты u^{μ} можно упростить, используя производную сложной функции и формулу (2.78). Например,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{v_x\gamma}{c}.$$
(2.80)

Возвращаясь к (2.79), находим:

$$u^{\mu} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v}). \qquad (2.81)$$

Сравнивая с формулой (2.70), видим, что 4-вектор импульса есть просто масса, умноженная на 4-вектор скорости:

$$p^{\mu} = m u^{\mu}. \tag{2.82}$$

Это подтверждает наше прежнее предположение, что компоненты p^{μ} образуют 4-вектор. Так как любой 4-вектор преобразуется при лоренцевских преобразованиях как x^{μ} , можно использовать формулу (2.36) и получить, что в результате буста в направлении оси x 4-вектор p^{μ} преобразуется по формулам:

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{z} - \beta p_x\right), \quad p'_x = \gamma \left(-\beta \frac{E}{c} + p_x\right). \quad (2.83)$$

2.5. Энергия и импульс в координатах светового конуса

Компоненты p^+ и p^- лоренцевского вектора импульса светового конуса²⁾ получаются с помощью правила (2.58):

$$p^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^{0} + p^{1}) = -p_{-}, \quad p^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^{0} - p^{1}) = -p_{+}.$$
 (2.84)

Какую из этих компонент следует отождествить с энергией светового конуса? Наивный ответ: p^+ . В любой лоренцевской системе отсчета и время и энергия являются нулевыми компонентами соответствующих 4-векторов. Так как время светового конуса было выбрано равным x^+ , отсюда можно сделать вывод, что энергия светового конуса должна быть выбрана как p^+ . Однако это не годится. Координаты светового конуса не преобразуются как лоренцевские координаты, так что нам следует проявлять аккуратность и детально проанализировать этот вопрос. Обе величины p^+ подобны энергии, так как они положительны для физических частиц. Действительно, из (2.67) при $m \neq 0$ имеем

$$p^{0} = \frac{E}{c} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + m^{2}c^{2}} > |\vec{p}| \ge |p^{1}|.$$
 (2.85)

В результате $p^0 \pm p^1 > 0$, и поэтому $p^{\pm} > 0$. Хотя обе величины являются приемлемыми кандидатами для энергии, оказывается, что физически оправданный выбор есть $-p_+$, что совпадает с p^- .

Прежде чем мы обоснуем этот выбор, вычислим произведение $p_{\mu}x^{\mu}$. В стандартных координатах

$$p \cdot x = p_0 x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3 x^3. \qquad (2.86)$$

В координатах светового конуса, используя (2.61), получим

$$p \cdot x = p_{+}x^{+} + p_{-}x^{-} + p_{2}x^{2} + p_{3}x^{3}. \qquad (2.87)$$

В стандартных координатах $p_0 = -E/c$ умножается на время x^0 . В координатах светового конуса p_+ умножено на время светового конуса x^+ . Поэтому мы можем ожидать, что величина p_+ равна энергии светового конуса, взятой со знаком минус.

Почему это связь важна? Энергия и время являются сопряженными величинами. Как известно из квантовой механики, оператор Гамильтона³⁾ измеряет энергию и порождает эволюцию во времени. Волновая функция точечной

²⁾ В оригинале автор пользуется сокращениями «импульс светового конуса», «энергия светового конуса» вместо «импульс в координатах светового конуса» и т. д. — Прим. ред. перевода.

³⁾ Здесь и ниже дается весьма упрощенная трактовка оператора Гамильтона и уравнения Шрёдингера. — Прим. ped. перевода.

частицы с энергией Е и импульсом \vec{p} определяется формулой

$$\psi(t,\vec{x}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})\right).$$
(2.88)

Эта волновая функция удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{E}{c} \psi.$$
 (2.89)

Аналогично, эволюция во времени светового конуса и энергия светового конуса E_{1c} должны быть связаны уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = \frac{E_{\rm lc}}{c} \psi.$$
 (2.90)

Чтобы найти зависимость волновой функции от x^+ , заметим, что

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x})\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right),$$
 (2.91)

и, используя (2.87), получим

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_+x^+ + p_-x^- + p_2x^2 + p_3x^3)\right).$$
(2.92)

Теперь можно вернуться к уравнению (2.90) и вычислить

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = -p_+\psi \rightarrow -p_+ = \frac{E_{\rm lc}}{c}.$$
 (2.93)

Это подтверждает наше отождествление величины $(-p_+)$ с энергией светового конуса. Так как с необходимостью $-p_+ = p^-$, удобно в качестве энергии светового конуса использовать p^- , с тем, чтобы исключить знак в приведенном выше уравнении:

$$p^- = \frac{E_{\rm lc}}{c}.\tag{2.94}$$

Ряд физиков предпочитает поднимать и опускать индексы + u -, чтобы упростить выражения, содержащие величины, определенные на световом конусе. Хотя иногда это удобно, но легко может привести к ошибкам. Если вы говорите по телефону с коллегой и он произносит: «...*p*-плюс, умноженное...», вы должны спросить: «Плюс вверху или плюс внизу?» В оставшейся части книги мы не будем опускать индексы + или -. Они всегда будут считаться верхними и энергия всегда будет равна p^- .

Можно убедиться в том, что отождествление p^- с энергией светового конуса хорошо согласуется с примером, рассмотренном нами для скорости светового конуса. Покажем, что частица с маленькой скоростью светового конуса имеет

также малую энергию светового конуса. Предположим, что у нас есть частица, очень быстро движущаяся в направлении $+x^1$. Как обсуждалось после выражения (2.66), ее скорость светового конуса очень мала. Так как импульс p^1 очень велик, из уравнения (2.67) получаем:

$$p^{0} = \frac{E}{c} = \sqrt{(p^{1})^{2} + m^{2}c^{2}} = p^{1}\sqrt{1 + \frac{m^{2}c^{2}}{(p^{1})^{2}}} \simeq p^{1} + \frac{m^{2}c^{2}}{2p^{1}}.$$
 (2.95)

Поэтому энергия светового конуса $E_{\rm lc} = p^- c$, где

$$p^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^{0} - p^{1}) \simeq \frac{m^{2}c^{2}}{2\sqrt{2}p^{1}}.$$
 (2.96)

Как и ожидалось, как скорость, так и энергия светового конуса уменьшаются с ростом p^1 .

2.6. Лоренц-инвариантность при наличии дополнительных измерений

Если теория струн верна, мы должны принять во внимание возможность, что пространство-время имеет более четырех измерений. Число временных измерений нужно оставить равным единице — кажется очень трудным, если вообще возможным, построить согласованную теорию более чем с одним измерением времени. Таким образом, дополнительные измерения должны быть пространственными. Может ли существовать лоренцевская инвариантность в мирах более чем с тремя пространственными измерениями? Да. Лоренцевская инвариантность — понятие, которое легко допускает очень естественные обобщение на пространство-время с дополнительными пространственными измерениями.

Сначала расширим определение инвариантного интервала ds^2 , чтобы включить дополнительные пространственные измерения. Например, в мире с пятью пространственными измерениями можно записать

$$-ds^{2} = -c^{2}dt^{2} + (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2} + (dx^{4})^{2} + (dx^{5})^{2}.$$
(2.97)

Преобразования Лоренца определяются тогда как линейные преобразования координат, оставляющие ds^2 инвариантным. Это обеспечит выполнение условия, что каждый инерциальный наблюдатель в шестимерном пространстве-времени будет соглашаться со значением скорости света. Чем больше измерений, тем больше лоренцевских преобразований. В то время, как в четырехмерном пространстве-времени имеются бусты в направлениях x^1 , x^2 и x^3 , в новом мире у нас появятся бусты вдоль каждого из пяти пространственных измерений. В случае трех пространственных координат имеются три базисных пространственных вращения: те, которые комбинируют x^1 и x^2 , x^1 и x^3 и, наконец, x^2 и x^3 . Равенство числа бустов и числа вращений есть специальное свойство четырехмерного пространства-времени. В случае пяти измерений у нас есть десять вращений, что вдвое больше числа бустов. Для многомерной лоренцевской инвариантности допустимо уменьшение количества измерений: если вдоль некоторых измерений ничего специального не происходит, то лоренцевской инвариантностью ограничивается меньшее числа измерений. Это ясно вытекает из выражения (2.97). Для движения, не включающего дополнительных измерений, $dx^4 = dx^5 = 0$, и выражение для ds^2 сводится к тому, которое используется в четырех измерениях.

2.7. Компактные дополнительные измерения

Дополнительные пространственные измерения могут остаться незамеченными в экспериментах при низких энергиях, если они свернуты в компактное⁴⁾ пространство малого объема. В этом разделе мы попробуем понять, что такое компактное измерение. Мы рассмотрим главным образом случай одного измерения. В разделе 2.10 мы объясним, почему малые компактные измерения трудно наблюдать.

Рассмотрим одномерный мир, например, бесконечную линию, и пусть x будет координатой вдоль этой линии. Для каждой точки P, принадлежащей линии, существует единственное действительное число x(P), которое называется координатой x точки P. Хорошая координата на этой бесконечной линии удовлетворяет двум условиям:

- любые две различные точки $P_1 \neq P_2$ имеют различные координаты: $x(P_1) \neq x(P_2)$;
- координаты точек непрерывны: близким точкам соответствуют почти равные координаты.

Если на этой бесконечной линии выбрано начало координат, то для определения координаты можно использовать расстояние от начала. Координата, приписываемая каждой точке, есть расстояние от этой точки до начала координат, которое берется со знаком, зависящим от того, с какой стороны от начала находится точка.

Представим, что мы живем в мире с одним пространственным измерением. Предположим, что вы идете вдоль этого пространственного измерения и замечаете странную картину: каждый раз, как вы проходите расстояние $2\pi R$ при некотором R, пейзаж вокруг повторяется. Если вы встретили своего друга Фила, то замечаете, что на расстояниях $2\pi R$, $4\pi R$, $6\pi R$, ... вдоль линии (рис. 2.4) находятся клоны Фила. На самом деле имеются и другие клоны вдоль линии с тем же расстоянием друг от друга.

Не существует способа отличить бесконечную линию с таким странным свойством от окружности длиной $2\pi R$. Действительно, утверждение, что эта странная линия есть окружность, *объясняет* удивительное свойство — в действительности, нет никаких клонов Фила; вы снова и снова встречаете одного и того же Фила, пока ходите по окружности!

⁴⁾ Напомним, что многообразия (в том числе пространства) называются компактными, если из всякого счетного покрытия открытыми окрестностями можно выделить конечное подпокрытие. — Прим. ped. nepeboda.



Рис. 2.4. Одномерный мир, повторяющися каждые $2\pi R$. Показаны несколько копий Фила

Каким образом это объясняется математически? Мы можем рассматривать окружность как открытую линию с *отождествлением*. Это означает, что мы объявляем, что точки с координатами, отличающимися на $2\pi AR$, являются одной и той же точкой. Более точно, две точки объявляются одной точкой, если их координаты отличаются на целое число $2\pi R$:

$$P_1 \simeq P_2 \quad \leftrightarrow \quad x(P_1) = x(P_2) + 2\pi Rn, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
 (2.98)

Это точное, но несколько громоздкое обозначение. Без риска ошибиться можно просто записать

$$x \simeq x + 2\pi R. \tag{2.99}$$

что следует читать как: «отождествим любые две точки, координаты которых отличаются на $2\pi R$ ». При таком отождествлении открытая линия становится окружностью. Отождествление превратило некомпактное измерение в компактное⁵⁾. Вам может показаться, что линия с отождествлениями есть просто сложный способ описания окружности. Однако, мы увидим, что многие физические проблемы становятся яснее, если рассматривать компактное измерение как расширенное измерение с отождествлениями.

Интервал $0 \le x < 2\pi R$ есть фундаментальная область для отождествления (2.99) (рис. 2.5). Фундаментальная область есть подпространство всего пространства, удовлетворяющее двум условиям:

- 1) никакие две точки в нем не отождествлены;
- любая точка всего пространства связана отождествлением с некоторой точкой в фундаментальной области.

Каждый раз, когда это возможно, фундаментальная область выбирается связной. Для построения пространства, порождаемого отождествлением, мы берем



Рис. 2.5. Интервал $0 \le x < 2\pi R$ есть фундаментальная область для линии с отождествлением (2.99). Отождествленное пространство есть окружность радиусом R

⁵⁾ Такой процесс принято называть компактификацией. — Прим. ред. перевода.

фундаментальную область вместе с ее границей, и выполняем отождествление на границе. В нашем случае фундаментальная область вместе с границей есть сегмент $0 \le x \le 2\pi R$. В этом сегменте мы отождествляем точку x = 0 с точкой $x = 2\pi R$. В результате получаем окружность.

Окружность радиусом R можно представить на двумерной плоскости как множество точек, находящихся на расстоянии R от точки, называемой центром окружности. Отметим, что полученный выше центр был построен непосредственно, без помощи объемлющего двумерного пространства. Для нашей окружности не существует где бы то ни было точки, представляющей центр окружности. Мы можем, образно выражаясь, говорить о радиусе R окружности, но в нашем случае радиус есть просто величина, которая после умножения на 2π дает полную длину окружности.

На окружности координата x уже не является хорошей координатой. Эта координата теперь либо многозначна, либо разрывна. Такая проблема возникает



Рис. 2.6. Использование угла θ для определения координаты на окружности. Началу отсчета Q приписывается нулевой угол: $\theta(Q) = 0$. Координата θ естественно многозначна

с любой координатой на окружности. Рассмотрим использование углов для задания координат на окружности единичного радиуса (рис. 2.6). Зафиксируем точку отсчета Q на окружности, и пусть О обозначает центр окружности. Любой точке Р на окружности мы приписываем в качестве координаты угол $\theta(P) = \angle POQ$. Этот угол естественно многозначен. Например, точка отсчета Q имеет координаты $\theta(Q) = 0^{\circ}$ и $\theta(Q) = 360^{\circ}$. Если мы потребуем, чтобы углы были однозначными, ограничившись, например, интервалом $0^{\circ} \leq \theta < 360^{\circ}$, тогда они становятся разрывными. Действительно, две близкие точки Q и Q' имеют в этом случае совершенно разные углы: $\theta(Q) = 0$, в то время как $\theta(Q') \sim 360^{\circ}$. С многозначными координатами легче работать, чем с разрывными.

Если имеется мир с несколькими открытыми измерениями, вы можете применить отождествление (2.99) к одному измерению, ничего не делая с остальными. Измерение, описываемое координатой x, превращается в окружность, а другие измерения остаются открытыми. Конечно, можно сделать компактными и несколько измерений. Рассмотрим, например, плоскость (x, y), подчиненную *двум* отождествлениям:

$$x \simeq x + 2\pi R, \quad y \simeq y + 2\pi R. \tag{2.100}$$

Возможно, при записи отождествлений яснее показывать одновременно обе координаты. Тогда два отождествления записываются как

$$(x, y) \simeq (x + 2\pi R, y),$$
 (2.101)

$$(x, y) \simeq (x, y + 2\pi R).$$
 (2.102)



Рис. 2.7. Квадратная область на плоскости с отождествлениями, указанными пунктирными линиями и стрелками. Результирующей поверхностью является тор. Отождествление вертикальных линий приводит к цилиндру, изображенному справа от квадратной области. Для получения тора следует склеить края расплющенного цилиндра так, как показано внизу

Первое отождествление предполагает, что мы можем ограничиться интервалом $0 \leq x < 2\pi R$, а второе отождествление предполагает, что мы можем ограничиться интервалом $0 \leq y < 2\pi R$. Таким образом, фундаментальная область представляет собой квадратную область $0 \leq x, y < 2\pi R$, как показано на рис. 2.7. Чтобы построить пространство, определяемое отождествлениями, мы берем фундаментальную область вместе с ее границей, образуя полный квадрат $0 \le x \le 2\pi R$, и осуществляем отождествления на границе. Вертикальные края отождествляются, так как они соответствуют точкам вида (0, y) и $(2\pi R, y)$, которые отождествляются по формуле (2.101). Горизонтальные края отождествляются, так как они соответствуют точкам вида (x, 0) и $(x, 2\pi R)$, которые отождествляются по формуле (2.102). Результирующее пространство называется двумерным тором. Можно изобразить тор, взяв фундаментальную область (с его границей) и склеив вертикальные края, как того требует их отождествление. В результате получится цилиндр, как это показано вверху справа на рис. 2.7 (склеенный шов показан пунктиром). Однако в этом цилиндре нижняя окружность и верхняя окружность также должны быть склеены, так как они представляют не что иное, как горизонтальные края фундаментальной области. Чтобы сделать это с помощью бумаги, следует расплющить цилиндр и затем скатать его, чтобы склеить окружности. Результат выглядит как сплющенный бублик. Имея в распоряжении кусок гибкого садового шланга, вы можете просто отождествить два конца этого шланга, получив в результате знакомую картину тора.

Мы видели, как компактифицировать координаты, используя отождествление. Некоторые компактные пространства строятся иначе. Однако в теории струн особенно легко работать с компактными пространствами, возникающими из отождествлений. Во всей книге мы будем концентрировать внимание именно на таких пространствах.

Упражнение-разминка 2.5. Рассмотрите плоскость (x, y) с отождествлениями

$$(x, y) \simeq (x + 2\pi R, y + 2\pi R).$$
 (2.103)

Каково результирующее пространство? Указание: наиболее ясно пространство представляется с помощью фундаментальной области, для которой прямая линия x + y = 0 является границей.

2.8. Орбифолды

Иногда отождествления содержат фиксированные (или неподвижные) точки, т. е. точки, переходящие в себя при отождествлении. Например, рассмотрим действительную прямую, параметризованную координатой x и подвергнутую отождествлению $x \simeq -x$. Точка x = 0 есть единственная фиксированная точка отождествления. Фундаментальная область может быть выбрана как полупрямая $x \ge 0$ (рис. 2.8). Заметим, что граничная точка x = 0 должна быть включена в фундаментальную область. Полученное таким отождествлением пространство есть, на самом деле, фундаментальная область $x \ge 0$. Это простейший пример *орбифолда*, пространства, полученного отождествлениями с фиксированными точками. В фиксированных точках орбифолд сингулярен. В то время как полупрямая $x \ge 0$ представляет собой привычное одномерное многобразие для x > 0, окрестность точки x = 0 не относится к типичным. Такой орбифолд называется $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолдом. Здесь \mathbb{R}^1 — (одномерная) действительная прямая, а \mathbb{Z}_2 описывает основное свойство отождествления, когда оно рассматривается как преобразование $x \to -x$: если применить его дважды, оно возвращает исходную координату.

Некоторые двумерные конусы могут быть получены как орбифолды. Начнем с плоскости (x, y) и отождествим каждую ее точку с образом, полученным вращением вокруг начала координат на угол $2\pi/N$, где $N \ge 2$ — целое число. Проще всего описать это отождествление, используя комплексные числа z = x + iy:

$$z \simeq e^{2\pi i/N} z. \tag{2.104}$$

Это отождествление действует как ожидалось: умножение любого комплексного числа на фазу $e^{i\alpha}$ (α действительно) поворачивает комплексное число на угол α .



Рис. 2.8. Отождествление $x \simeq -x$ на действительной прямой приводит к полупрямой. Это $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолд



Рис. 2.9. Фундаментальная область для отождествления $z \simeq e^{2\pi i/N} z$ отмечена серым. После отождествления мы получаем конус — \mathbb{C}/\mathbb{Z}_N орбифолд

Получается отождествление типа \mathbb{Z}_N : преобразование $z \to e^{2\pi i/N} z$ после *N*-кратного применения возвращает точку в исходное положение. Точка должна быть отождествлена со всеми N - 1 образами, полученными повторяющимися действиями преобразования. Единственная фиксированная точка преобразования \mathbb{Z}_N — это начало координат z = 0. Как будет объяснено позже, точки z фундаментальной области отождествления (2.104) удовлетворяют ограничению

$$0 \leqslant \arg\left(z\right) < \frac{2\pi}{N}.\tag{2.105}$$

Здесь мы напомним, что число $z = re^{i\theta}$ с действительными r и θ имеет $\arg(z) = \theta$. Фундаментальная область показана на рис. 2.9. На правом рисунке виден конус, полученный склеиванием лучей $\arg(z) = 0$ и $\arg(z) = 2\pi/N$ с помощью отождествления (2.104). Результирующий конус называется \mathbb{C}/\mathbb{Z}_N орбифолдом, где \mathbb{C} означает комплексную (исходную двумерную) плоскость. Конус сингулярен в вершине z = 0 в том смысле, что здесь сконцентрирована кривизна.

Объясним, почему область, определенная формулой (2.105), является фундаментальной областью. Действуя многократно на область преобразованием $z \rightarrow e^{2\pi i/N} z$, мы находим N-1 образов, которые вместе с самой областью непрерывно покрывают всю комплексную плоскость. Так как каждая точка в области имеет точно N-1 копий, причем все они находятся вне этой области, то никакие две точки из области не отождествляются. Любая точка С, не находящаяся в области, должна лежать в одной из N-1 копий, и поэтому имеет прообраз в области. Заметим, что наше доказательство использовало тот факт, что N — целое число; например, если N иррационально, любая точка имела бы бесконечное число образов. Рассмотренное отождествление приводит только к таким конусам, для которых полный угол развертки при вершине равен 2π , деленному на целое число. Существуют конусы и с другими углами, но они не получаются как орбифолды. Случай, когда N заменяется на рациональное число, исследуется в задаче 2.7. Дополнительные примеры орбифолдов рассмотрены в задачах 2.5, 2.6 и 2.10.

Физика в пространствах с характерными сингулярностями обычно сложна и иногда даже не самосогласована. Орбифолды — это пространства с прослеживаемыми сингулярностями, по крайней мере, пока рассматриваются струны. Как будет видно в Главе 13, физика квантовых струн на орбифолде полностью регулярна, так как орбифолд возникает из отождествлений, примененных к несингулярному пространству, в котором квантовая струна проста. Струны на орбифолде наследуют эту простоту.

2.9. Квантовая механика и потенциальная яма

Постоянная Планка \hbar впервые возникла как константа пропорциональности, связывающая энергию *E* с круговой частотой ω фотона:

$$E = \hbar\omega. \tag{2.106}$$

Так как размерность ω равна T^{-1} , размерность \hbar есть произведение энергии на время. Размерность энергии равна ML^2T^{-2} , поэтому

$$[\hbar] = [энергия] \times [время] = ML^2 T^{-1}.$$
 (2.107)

Значение постоянной Планка равно $\hbar \equiv 1,055 \times 10^{-27}$ эрг · с.

Постоянная Планка ħ возникает в основных коммутационных соотношениях квантовой механики. Шрёдингеровские операторы координаты и импульса удовлетворяют соотношению

$$[x, p] = i\hbar. \tag{2.108}$$

Если у нас имеется несколько пространственных измерений, то коммутационные соотношения имеют вид

$$[x^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j, \tag{2.109}$$

где дельта-символ Кронекера определен так же, как в (2.32):

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j; \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$
 (2.110)

В трех пространственных измерениях индексы i и j пробегают значения от 1 до 3. Обобщение квантовой механики на случай большего числа измерений делается непосредственно. При d пространственных измерениях индексы в (2.109) просто принимают d возможных значений.

Чтобы подготовить почву для анализа малого дополнительного измерения, рассмотрим стандартную квантово-механическую задачу. Рассмотрим стационар-



Рис. 2.10. Слева: одномерный потенциал в виде ямы со стенками бесконечной высоты; частица живет на отрезке. Справа: в плоскости (x, y) частица должна остается внутри интервала 0 < x < a, направление y отождествляется как $y \simeq y + 2\pi R$; частица живет на цилиндре

ное уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x), \qquad (2.111)$$

для одномерного потенциала в виде ямы бесконечной высоты:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in (0, a); \\ \infty, & \text{если} \quad x \notin (0, a). \end{cases}$$
(2.112)

Из бесконечности потенциала в точках $x \notin (0, a)$ следует, что $\psi(x) = 0$. В частности $\psi(0) = \psi(a) = 0$. Мы получаем квантовую механику частицы, живущей на *отрезке* (рис. 2.10).

Когда $x \in (0, a)$, уравнение Шрёдингера принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi. \tag{2.113}$$

Решения уравнения (2.113), согласованные с граничными условиями, имеют вид

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$
 (2.114)

Значение k = 0 запрещено, так как в этом случае волновая функция обращается в нуль везде. Подставив решение в уравнение (2.113) и продифференцировав его, видим, что энергия E_k состояния ψ_k равна

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2. \tag{2.115}$$

2.10. Потенциальная яма с дополнительным измерением

Добавим теперь дополнительное измерение к проблеме потенциальной ямы (не подразумевается никакого каламбура!). В дополнение к x включим измерение y, которое свернуто в маленькую окружность радиуса R. Иными словами, совершаем отождествление

$$(x, y) \simeq (x, y + 2\pi R).$$
 (2.116)

Исходное измерение x не изменилось (см. рис. 2.10). Так как направление y превратилось в окружность длиной $2\pi R$, пространство, в котором движется частица, теперь представляет собой *цилиндр*. Этот цилиндр имеет высоту a и длину окружности $2\pi R$. Потенциал V(x, y) продолжает определяться формулой (2.112) и не зависит от y.

Мы увидим, что до тех пор, пока R мало, и мы рассматриваем только низкие энергии, квантовая механика частицы на отрезке очень похожа на квантовую механику частицы на цилиндре. Единственным масштабом длины в исходной проблеме является размер отрезка a, так как малые R означают $R \ll a$.

В двух измерениях уравнение Шрёдингера (2.111) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=E\psi.$$
 (2.117)

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся методом разделения переменных. Положим $\psi(x, y) = \psi(x)\phi(y)$, тогда уравнение можно записать как

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi(y)}\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}=E.$$
 (2.118)

Зависящие от x и y слагаемые в этом уравнении должны по отдельности быть константами, так что решения имеют вид $\psi_{k,l}(x, y) = \psi_k(x)\phi_l(y)$, где

$$\psi_k(x) = c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \qquad (2.119)$$

$$\phi_l(y) = a_l \sin\left(\frac{ly}{R}\right) + b_l \cos\left(\frac{ly}{R}\right).$$
 (2.120)

Физика вдоль измерения x остается неизменной, так как волновая функция должна все равно обращаться в нуль на концах сегмента. Поэтому (2.119) принимает ту же форму, что и (2.114), и k = 1, 2, Граничное условие для $\phi_l(y)$ возникает в результате отождествления $y \simeq y + 2\pi R$. Так как y и $y + 2\pi R$ являются координатами, представляющими одну и ту же точку, волновая функция должна принимать одно и то же значение при данных аргументах:

$$\phi_l(y) = \phi_l(y + 2\pi R). \tag{2.121}$$

В противоположность $\psi_k(x)$, функция $\phi_l(y)$ не должна обращаться в нуль для любого y. В результате общее периодическое решение, выписанное в области (2.116), включает как синусы, так и косинусы. Наличие косинусов разрешает ненулевое постоянное решение: при l = 0 получаем $\phi_0(y) = b_0$. Это решение есть ключ к пониманию того, почему малое дополнительное измерение не слишком сильно меняет физику низких энергий.

Собственные значения Екл имеют вид

$$E_{k,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right].$$
 (2.122)

Эти энергии соответствуют дважды вырожденным состояниям при $l \neq 0$, так как в этом случае (2.120) содержит два линейно независимых решения. Дополнительное измерение резко меняет спектр. Однако, мы увидим, что если $R \ll a$, тогда низколежащая часть спектра не изменяется. Остальной спектр изменяется, но эти изменения несущественны *при низких энергиях*.

Так как разрешено значение l = 0, уровни энергии $E_{k,0}$ совпадают со старыми уровнями энергии E_k ! Новая система содержит все уровни энергии старой системы. Но она включает также дополнительные уровни энергии. Чему равен наинизший *новый* уровень энергии? Чтобы минимизировать энергию, каждое из слагаемых в (2.122) должно быть как можно меньше. Минимум достигается при k = 1, так как k = 0 не разрешено, и l = 1, так как l = 0 дает старые уровни. Наинизший новый уровень энергии равен

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right]. \tag{2.123}$$

Если $R \ll a$, второе слагаемое много больше первого, и

$$\boldsymbol{E}_{1,1} \sim \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R}\right)^2. \tag{2.124}$$

Эта энергия сравнима с энергией уровня k собственного состояния исходной задачи (см. (2.115)), когда

$$\frac{k\pi}{a} \sim \frac{1}{R} \implies k \sim \frac{1}{\pi} \frac{a}{R}.$$
(2.125)

Так как R много меньше, чем a, число k очень большое. Таким образом, первый новый энергетический уровень возникает при энергии, много большей, чем энергии низколежащих исходных состояний. Поэтому мы приходим к выводу, что дополнительное измерение может оставаться скрытым от экспериментов при определенном уровне энергий, до тех пор, пока измерение достаточно мало. Как только зондирующие энергии становятся достаточно большими, явления, обусловленные дополнительным измерением, могут наблюдаться.

Любопытно, что квантовая механика струны вводит новые эффекты. Для дополнительного измерения, которое много меньше, чем уже являющаяся малой длина струны ℓ_s , могут возникнуть новые низколежащие состояния! Они соответствуют струнам, которые обматываются вокруг дополнительного измерения. Такие состояния не имеют аналога в квантовой механике точечной частицы,

и мы изучим их подробнее в главе 17. В теории струн остается верным вывод, что из малого дополнительного измерения не возникают новые состояния с малой энергией, но при дополнительном условии, что измерение не должно быть существенно меньше, чем ℓ_s . Как мы узнаем в главе 17, в теории струн эффекты компактного измерения, имеющего радиус меньше, чем ℓ_s , нельзя отличить от от таких же эффектов другого компактного измерения радиусом больше ℓ_s .

Задачи

Задача 2.1. Упражнения с единицами измерений

- (а) Найдите соотношение между кулоном (Кл) и СГСЭ-единицей заряда.
- (б) Объясните смысл единицы К (градус Кельвина), используемой для измерения температуры, и объясните ее связь с базовыми единицами длины, массы и времени.
- (в) Постройте и оцените безразмерное число, используя заряд электрона e (определенный в гауссовой системе единиц) и постоянные \hbar и c. (В системе единиц Хевисайда—Лоренца квадрат заряда e^2 в гауссовой системе заменяется на $e^2/4\pi$.)

Задача 2.2. Преобразования Лоренца для координат светового конуса

Рассмотрите координаты $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и связанные с ними координаты светового конуса (x^+, x^-, x^2, x^3) . Запишите следующие преобразования Лоренца, выразив их через координаты светового конуса:

- (a) буст с параметром скорости β в направлении x^{1} ;
- (б) вращение на угол θ плоскости $(x^1, x^2);$
- (в) буст с параметром скорости β в направлении x^3 .

Задача 2.3. Лоренцевские преобразования, производные и квантовые операторы

- (a) Запишите лоренцевские преобразования для компонент вектора a_{μ} под действием буста вдоль оси x^{1} .
- (б) Покажите, что величины $\partial/\partial x^{\mu}$ преобразуются под действием буста вдоль оси x^1 так же, как рассмотренный в п. (а) 4-вектор a_{μ} . Это служит подтверждением того, что в данном конкретном случае частные производные по координатам с верхними индексами x^{μ} ведут себя как 4-вектор с нижними индексами. Поэтому часто эти производные записывают в виде ∂_{μ} .
- (в) Покажите, что в квантовой механике выражения для 4-вектора энергииимпульса через производные может быть записано в виде

$$p_{\mu} = rac{\hbar}{i} rac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Задача 2.4. Лоренцевские преобразования как матрицы

Матрица L, удовлетворяющая (2.46), является преобразованием Лоренца. Покажите следующее:

- (a) если L_1 и L_2 лоренцевские преобразования, то и L_1L_2 лоренцевское преобразование;
- (б) если L лоренцевское преобразование, то и L^{-1} лоренцевское преобразование;
- (в) если L лоренцевское преобразование, то и L^T лоренцевское преобразование.

Задача 2.5. Построение простых орбифолдов

- (а) Рассмотрим окружность S^1 , представленную как действительная прямая с отождествлением $x \simeq x + 2$, Выберем в качестве фундаментальной области $-1 < x \le 1$. Окружность есть пространство $-1 \le x \le 1$ с отождествленными точками $x = \pm 1$. Орбифолд S^1/\mathbb{Z}_2 определяется наложением \mathbb{Z}_2 -отождествления $x \simeq -x$. Опишите действие этого отождествления на окружность. Покажите, что на окружности существуют две точки, которые остаются фиксированными под действием \mathbb{Z}_2 . Найдите фундаментальную область для двух отождествлений. Опишите простыми словами орбифолд S^1/\mathbb{Z}_2 .
- (б) Рассмотрим тор T^2 , представленный как плоскость (x, y) с отождествлениями $x \simeq x + 2$ и $y \simeq y + 2$. Выберите в качестве фундаментальной области $-1 < x, y \le 1$. Орбифолд T^2/\mathbb{Z}_2 определяется наложением \mathbb{Z}_2 -отождествления $(x, y) \simeq (-x, -y)$. Докажите, что существуют четыре точки на торе, остающиеся фиксированными при \mathbb{Z}_2 преобразовании. Покажите, что орбифолд T^2/\mathbb{Z}_2 топологически есть двумерная сфера, естественно представимая как прямоугольная наволочка со сшитыми краями.

► Задача 2.6. Построение орбифолда T²/Z₃

Рассмотрим комплексную плоскость z = x + iy, подвергнутую следующим двум отождествлениям:

$$z \simeq T_1(z) = z + 1$$
, и $z \simeq T_2(z) = z + e^{i\pi/3}$.

- (a) Фундаментальной областью с её границей является параллелограм, три вершины которого находятся в точках z = 0, z = 1 и $z = e^{i\pi/3}$. Где находится четвертая вершина? Сделайте рисунок и укажите отождествления на границе. Получившееся пространство есть косой тор.
- (б) Рассмотрим теперь дополнительное отождествление Z₃

$$z\simeq R(z)=e^{2\pi i/3}z$$

Чтобы понять, как это отождествление действует на косой тор, нарисуйте короткую диагональ, разделяющую тор на два равносторонних треугольника. Тщательно опишите действие \mathbb{Z}_3 на каждый из двух треугольников (напомним, что за действием R может следовать произвольное действие с T_1, T_2 и их обратными).

(в) Определите три фиксированные точки отождествления \mathbb{Z}_3 на торе. Покажите, что орбифолд T^2/\mathbb{Z}_3 топологически является двумерной сферой, естественно представляемой как треугольная подушка со сшитыми сторонами и утлами в фиксированных точках.

Задача 2.7. Более общая конструкция конусов

Рассмотрим плоскость (x, y) и комплексную координату z = x + iy. Мы видели, что отождествление $z \simeq e^{2\pi i/N} z$ с целым N может быть использовано для построения конуса.

Исследуем теперь отождествление

$$z\simeq e^{2\pi i\,M/N}z.$$

где $N > M \ge 2$ — взаимно простые целые числа (их наибольший общий делитель равен единице). Может показаться, что фундаментальная область обеспечивается точками z, для которых $0 \le \arg(z) < 2\pi M/N$. Поиграйте теперь с малыми значениями M и N, чтобы убедиться, что это неверно. Найдите фундаментальную область для отождествления. [Указание: используйте следующий результат. Если заданы два взаимно простых целых числа a и b, то существуют целые числа m и n такие, что ma + nb = 1. Найти m и n не так-то просто, если не использовать алгоритм Евклида. Попробуйте найти, например, целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению 187m + 35n = 1.]

Задача 2.8. Пространственно-временные диаграммы и преобразования Лоренца

Рассмотрите пространственно-временную диаграмму, на которой оси x^0 и x^1 лоренцевской системы S представлены вертикальной и горизонтальной осями, соответственно. Покажите, что оси x'^0 и x'^1 лоренцевской системы S', связанной с S формулами (2.36), возникают в исходной пространственно-временной диаграмме как наклонные оси. Найдите утол между этими осями. Покажите подробно, как возникают оси при $\beta > 0$ и $\beta < 0$, указав в каждом случае направления возрастания значений координат.

Задача 2.9. Светоподобная компактификация

Отождествление $x \simeq x + 2\pi R$ есть утверждение, что числовая ось с координатой x была компактифицирована в окружность радиусом R. В этом отождествлении временное измерение оставалось неприкосновенным. Рассмотрим теперь странную «светоподобную» компактификацию, при которой мы отождествляем события, пространственные и временные координаты которых связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} + 2\pi \begin{pmatrix} R \\ -R \end{pmatrix}.$$
 (1)

- (а) Перепишите это отождествление, используя координаты светового конуса.
- (б) Рассмотрите координаты (ct', x'), связанные с (ct, x) бустом с параметром скорости β. Выразите отождествление через штрихованные координаты. Чтобы физически интерпретировать соотношение (1), рассмотрите семейство отождествлений

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} + 2\pi \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 + R_s^2} \\ -R \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где R_s есть длина, которая в конце концов будет приравнена нулю, и тогда (2) сведется к (1).

- (в) Покажите, что существует полученная бустом система отсчета S', в которой отождествление (2) становится стандартным отождествлением (т. е. пространственная координата отождествляется, а временная координата — нет). Найдите параметр скорости S' по отношению к S и радиус компактификации в этой лоренцевской системе S'.
- (г) Представьте ваш ответ к п. (в) на пространственно-временной диаграмме. Укажите две точки, связанные отождествлением (2), и пространственную и временную оси лоренцевской системы S', в которой компактификация стандартна.
- (д) Заполните пустые места в следующем предложении: светоподобная компактификация радиусом R возникает путем лоренцевского преобразования стандартной компактификации радиуса ... с лоренц-фактором $\gamma \sim R/...$ в пределе, когда ... $\rightarrow 0$.

Задача 2.10. Пространственно-временной орбифолд в двух измерениях

Рассмотрим двумерный мир с координатами x^0 и x^1 . Буст с параметром скорости β вдоль оси x^1 описывается двумя первыми уравнениями в (2.36). Мы хотим понять структуру двумерного пространства, возникающего после отождествления

$$(x^0, x^1) \sim (x'^0, x'^1).$$
 (1)

Мы отождествляем пространственно-временные точки, координаты которых связаны бустом!

(а) Используйте результат задачи 2.2, п. (а), чтобы переписать (1) как

$$(x^+, x^-) \sim (e^{-\lambda}x^+, e^{\lambda}x^-), \quad \text{где} \quad e^{\lambda} \equiv \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$
 (2)

Какова область изменения λ ? Что является фиксированной точкой орбифолда? Предположите, что $\beta > 0$ и следовательно $\lambda > 0$.

(б) Нарисуйте пространственно-временную диаграмму, укажите оси x^+ и x^- , и нарисуйте семейство кривых

$$x^+x^-=a^2, \qquad (3)$$

где a > 0 — действительная константа, которая помечает различные кривые. Укажите, какие кривые соответствуют малым a, а какие — большим. Для каждого a уравнение (3) описывает две несвязные кривые. Покажите, что отождествление (2) связывает точки обеих кривых.

- (в) Используйте выражение $-ds^2 = -2dx^+x^-$ для интервала, чтобы показать, что любая кривая, описываемая уравнением (3), пространственноподобна.
- (г) Рассмотрите кривые $x^+x^- = a^2$ для некоторого фиксированного *a*. Отождествление (2) переводит каждую из этих кривых в окружность. Найдите инвариантную длину этой окружности, интегрируя подходящий корень из ds^2 между двумя соседними отождествленными точками. Сформулируйте ваш ответ, выразив его через *a* и λ . *Ответ:* $\sqrt{2}a\lambda$.

Грубо говоря, пока время идет от минус бесконечности к плюс бесконечности, параметр *a* меняется от бесконечности до нуля и затем обратно устремляется к бесконечности. Такой орбифолд представляет вселенную, пространством которой является окружность. Окружность вначале большая, затем она сжимается до нулевого размера, после чего расширяется снова. У этого орбифолда только один недостаток: кривые $x^+x^- = -a^2$ на самом деле являются замкнутыми времениподобныеми окружностями.

Задача 2.11. Дополнительное измерение и статистическая механика

Запишите двойную сумму, представляющую функцию распределения Z(a, R) статистической механики для квантово-механической системы⁶⁾, рассмотренной в разделе 2.10. Обратите внимание, что Z(a, R) факторизуется: $Z(a, R) = Z(a)\widetilde{Z}(R)$.

- (a) Вычислите явно функцию Z(a, R) в пределе очень высокой температуры ($\beta = 1/kT \rightarrow 0$). Докажите, что эта функция распределения совпадает с функцией распределения частицы в двумерном *ящике* со сторонами *a* и $2\pi R$. Это показывает, что при высоких температурах эффекты дополнительного измерения становятся видимыми.
- (б) Предположите, что $R \ll a$, так что имеются температуры, которые велики, если рассматривается размер ящика a, но малы, если речь идет о компактном измерении. Запишите неравенство, включающее kT и другие константы, чтобы выразить эту возможность. Оцените Z(a, R) в этом режиме, включив старшую поправку, связанную с малым дополнительным измерением.

$$Z = \sum_{i} g_{i} \exp\left(-\beta E_{i}\right),$$

где g_i — кратность вырождения *i*-го уровня энергии E_i . — Прим. ред. перевода.

⁶⁾ Здесь идет речь о вычислении статистической суммы, например, по формуле

Глава З

Электромагнетизм и гравитация в многомерных пространствах

Являясь одной из возможных теорий всех взаимодействий, теория струн включает максвелловскую электродинамику и ее нелинейных родственников, а также гравитацию. Мы рассмотрим релятивистскую формулировку четырехмерной электродинамики и покажем, насколько она облегчает определение электродинамики при других размерностях. Мы дадим краткое описание эйнштейновской теории гравитации и с помощью перехода к ньютоновскому пределу обсудим связь между планковской длиной и гравитационной постоянной в разных измерениях. Далее мы изучим влияние компактификации на гравитационную постоянную и объясним, каким образом большие дополнительные измерения могли бы избежать детектирования.

3.1. Классическая электродинамика

В противоположность ньютоновской механике, классическая электродинамика является релятивистской теорией. На самом деле, рассматривая электродинамику, Эйнштейн пришел к формулировке частной теории относительности. Электродинамика имеет особенно элегантную формулировку, в которой становится явным релятивистский характер теории. Эта релятивистская формулировка допускает естественное обобщение на бо́льшее число измерений. Прежде чем обсуждать релятивистскую формулировку, мы должны повторить уравнения Максвелла, описывающие динамику электрического и магнитного полей.

Хотя в наши дни большинство курсов электродинамики используют международную систему единиц СИ, для обсуждений релятивистских вопросов и дополнительных измерений значительно удобнее система Хевисайда—Лоренца. В этой системе единиц уравнения Максвелла в вакууме имеют следующий вид:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$
(3.4)

Из приведенных уравнений видно, что поля \vec{E} и \vec{B} измеряются одними и теми же единицами. Первые два уравнения — это уравнения Максвелла, свободные от источников. Вторая пара уравнений включает источники: плотность заряда ρ , измеряемая в единицах заряда, приходящегося на единичный объем, и плотность тока \vec{j} , измеряемая в единицах тока, приходящегося на единицу площади. Сила Лоренца, определяющая скорость изменения импульса заряженной частицы в электромагнитном поле, принимает вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right).$$
(3.5)

Так как дивергенция магнитного поля \vec{B} равна нулю, само поле может быть записано как ротор вектора — хорошо известного векторного потенциала \vec{A} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{3.6}$$

В электростатике электрическое поле \vec{E} обладает нулевым ротором, и поэтому может быть записано как (минус) градиент скаляра, хорошо известного скалярного потенциала Φ . В электродинамике, как указывает уравнение (3.1), ротор \vec{E} не всегда равен нулю. Подставляя (3.6) в (3.1), находим линейную комбинацию \vec{E} и производной по времени от \vec{A} , ротор которой равен нулю:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Выражение в скобках полагается равным $-\nabla \Phi$ и электрическое поле \vec{E} можно записать через скалярный потенциал и векторный потенциал:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi.$$
(3.8)

Хотя введенные выше потенциалы (Φ , \vec{A}) кажутся просто вспомогательными величинами, используемыми для записи электрического и магнитного полей, мы знаем из квантовой механики, что на самом деле потенциалы более фундаментальны, чем напряженности полей \vec{E} и \vec{B} . Гамильтониан, описывающий движение заряженной частицы, использует потенциалы, а не напряженности полей. Поэтому разумно изучить возможные неясности в определении потенциалов. Как мы сейчас покажем, потенциалы полей \vec{E} и \vec{B} определены неоднозначно.

Если мы заменим \vec{A} на $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \epsilon$, где ϵ — произвольная функция координат и времени, то с учетом того, что ротор градиента равен нулю, новое магнитное поле \vec{A}' будет равно старому:

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times A + \nabla \times \nabla \epsilon = \vec{B}.$$
(3.9)

Изменение \vec{A} влечет за собой изменение \vec{E} , как это ясно из формулы (3.8). Это можно компенсировать, изменив и потенциал Φ . В самом деле, если положить

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \epsilon,$$
 (3.10)
ни \vec{B} , ни \vec{E} не будут меняться. Приведенное выше изменение потенциалов называется калибровочным преобразованием, а ϵ является параметром калибровки.

Упражнение-разминка 3.1. Проверьте, что заданное формулой (3.8) поле *E* инвариантно относительно калибровочного преобразования (3.10).

Два набора потенциалов (Φ , \vec{A}) и (Φ' , \vec{A}'), связанные калибровочным преобразованием, физически эквивалентны. Отсюда следует, что физически эквивалентные наборы потенциалов приводят к тождественным электрическим и магнитным полям. Однако может случиться так, что потенциалы (Φ , \vec{A}) и (Φ' , \vec{A}') приводят к одинаковым электрическому и магнитному полям, но при этом не удается найти такую функцию ϵ , чтобы выполнялись соотношения (3.10). В этом случае потенциалы не являются калибровочно эквивалентными и должны рассматриваться как физически различные, несмотря на то, что соответствующие им поля \vec{E} и \vec{B} одинаковы! Эта удивительная ситуация может возникать в пространствевремени с компактными пространственными измерениями, и проявится в дальнейшем при изучении D-бран (глава 19). В пространстве Минковского такое невозможно.

При наличии компактных пространственных измерений возникает еще одна тонкость. При заданных полях \vec{E} и \vec{B} могут не существовать потенциалы Φ и \vec{A} , которые удовлетворяют соотношениям (3.6) и (3.8) и хорошо определены в компактной части пространства. На помощь приходят калибровочные преобразования. Не является строго необходимым иметь однозначно определенные потенциалы (Φ , \vec{A}) во всем компактном пространстве. Множество потенциалов, определенных на сшитых вместе кусочках, полностью покрывающих компактное пространство, является *допустимым*, если в областях перекрытия любых двух кусочков соответствующие потенциалы связаны калибровочными преобразованиями. С учетом замечания, что потенциалы нужны в квантовой механике, мы должны заключить, что конфигурация полей \vec{E} и \vec{B} , не возникающая из допустимых потенциалов, не подлежит рассмотрению.

После введения потенциалов свободные от источников уравнения Максвелла (3.1) и (3.2) удовлетворяются автоматически. Уравнения (3.3) и (3.4) несут дополнительную информацию. Они используются для вывода уравнений для Φ и \vec{A} .

3.2. Электромагнетизм в трех измерениях

Что такое электромагнетизм в трех пространственных измерениях? Один из способов сформулировать теорию электромагнетизма в трех измерениях — это начать с четырехмерной теории, и исключить одно пространственное измерение. Такая процедура называется размерной редукцией.

В четырех пространственно-временных измерениях электрическое и магнитное поля имеют по три пространственных компоненты: (E_x, E_y, E_z) и (B_x, B_y, B_z) , соответственно. Может показаться, что редукция к миру без *z*-координаты будет сводиться к отбрасыванию *z*-компонент у обоих полей. Как ни удивительно, этот номер не проходит! Это невозможно в силу уравнений Максвелла и выражения для силы Лоренца.

Чтобы построить согласованную трехмерную теорию, мы должны быть уверены, что динамика не зависит от направления вдоль z, т. е. от того направления, которое мы хотим исключить. Естественно, все движения должны быть ограничены плоскостью (x, y), для этого нужно потребовать, что ни одна величина не должна зависеть от z. Это не обязательно означает отбрасывание величин с индексом z.

При построении теории с меньшим числом измерений будем руководствоваться выражением для силы Лоренца (3.5). Предположим, что магнитного поля нет. Тогда, для того, чтобы сохранить z-компоненту импульса равной нулю, мы должны иметь $E_z = 0$, т. е. z-компонента электрического поля должна исчезнуть. Случай магнитного поля более удивителен. Пусть электрическое поле равно нулю. Если скорость частицы есть вектор в плоскости (x, y), компонента магнитного поля, лежащая в этой плоскости, будет порождать за счет векторного произведения силу в направлении оси z. С другой стороны, z-компонента магнитного поля будет порождать силу в плоскости (x, y)! Мы заключаем, что B_x и B_y следует положить равными нулю, в то время как можно сохранить B_z . Собирая все условия, имеем

$$E_z = B_x = B_y = 0. (3.11)$$

Оставшиеся компоненты полей E_x , E_y и B_z могут зависеть только от x и y. В трехмерном мире с координатами t, x, y индекс z у B_z не является векторным индексом. Поэтому в таком сжатом мире B_z ведет себя как лоренцевский скаляр (точнее, этот объект является псевдоскаляром). Суммируя, имеем двумерный вектор \vec{E} и скалярное поле B_z .

Можно проверить согласованность ограничений, посмотрев на x- и y-компоненты выражения (3.1):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}.$$
 (3.12)

Так как правые части этих уравнений обращаются в нуль в силу (3.11), левые части должны также исчезать — это и происходит. Каждый член в левой части равен нулю, потому, что он содержит либо E_z , либо производную по z. В задаче 3.3 вы можете проверить согласованность оставшихся уравнений.

Вывести уравнения трехмерной электродинамики оказалось не очень трудно, значительно труднее угадать, какой должна быть пятимерная электродинамика. Как мы увидим далее, явная релятивистская формулировка уравнений Максвелла приводит к обобщению на случай других размерностей.

3.3. Явно релятивистская электродинамика

В релятивистской формулировке максвелловских уравнений ни электрическое, ни магнитное поле не являются частью 4-вектора. Напротив, 4-вектор получается путем комбинации скалярного потенциала Ф с векторным потенциалом \vec{A} :

$$A^{\mu} = (\Phi, A^{1}, A^{2}, A^{3}). \tag{3.13}$$

Соответствующий объект с нижними индексами имеет вид

$$A_{\mu} = (-\Phi, A^{1}, A^{2}, A^{3}). \tag{3.14}$$

Имся A_{μ} , мы строим объскт, известный как напряженность поля ¹⁾ $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \tag{3.15}$$

Здесь $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Из формулы (3.15) следует, что $F_{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.\tag{3.16}$$

Из этого свойства вытекает, что все диагональные компоненты $F_{\mu\nu}$ обращаются в нуль:

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0. \tag{3.17}$$

Вычислим несколько компонентов $F_{\mu\nu}$. Пусть *i* обозначает пространственный индекс, т.е. индекс, принимающий значения 1, 2 или 3. Используя (3.15) и (3.8), находим:

$$F_{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = -E_i.$$
(3.18)

Аналогично можно вычислить F_{12} :

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z, \qquad (3.19)$$

так как $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Продолжая в том же духе, можно вычислить все компоненты матрицы $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$
 (3.20)

Мы видим, что электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{B} являются составными частями напряженности поля $F_{\mu\nu}$.

Обсуждавшееся выше калибровочное преобразование (3.10) может быть изящно записано в нерелятивистских обозначениях как

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon.$$
 (3.21)

Здесь A_{μ} и A'_{μ} — связанные калибровкой потенциалы, а $\epsilon(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат.

Упражнение-разминка 3.2. Проверьте корректность перехода из (3.10) в (3.21).

¹⁾ Контравариантный тензор $F^{\mu\nu}$ (3.29) обычно называют тензором электромагнитного поля. — Прим. ред. перевода.

Так как калибровочные преобразования оставляют инвариантными поля \vec{E} и \vec{B} , напряженность поля $F_{\mu\nu}$ должна быть калибровочно инвариатной. Действительно, легко проверить, что

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A'_{\nu} - \partial_{\nu}A'_{\mu} =$$

= $\partial_{\mu}(A_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon) - \partial_{\nu}(A_{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon) =$
= $F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\epsilon - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\epsilon =$
= $F_{\mu\nu}.$ (3.22)

На последнем шаге мы использовали то, что частные производные коммутируют.

Напомним, что использование потенциалов вместо векторов \vec{E} и \vec{B} автоматически определяет решение уравнений Максвелла без источников (3.1) и (3.2). Как эти же уравнения записываются с помощью напряженности поля $F_{\mu\nu}$? Они должны оыть записаны так, чтобы автоматически выполняться, если выполняется (3.15). Рассмотрим следующую комбинацию напряженностей поля:

$$T_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu}. \tag{3.23}$$

С устови(3.15) величина $T_{\lambda\mu\nu}$ тождественно обращается в нуль:

$$\partial_{\lambda}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) + \partial_{\mu}(\partial_{\nu}A_{\lambda} - \partial_{\lambda}A_{\nu}) + \partial_{\nu}(\partial_{\lambda}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\lambda}) = 0, \qquad (3.24)$$

если при этом использовать коммутативность частных производных. Обращение $T_{\lambda\mu\nu}$ в нуль, т. е.

$$\partial_{\lambda}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} = 0, \qquad (3.25)$$

представляет множество дифференциальных уравнений для напряженности поля. Эти уравнения в точности эквивалентны уравнениям Максвелла без источников. Чтобы это стало яснее, заметим, что $T_{\lambda\mu\nu}$ удовлетворяет условиям антисимметрии

$$T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\mu\lambda\nu}, \quad T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\lambda\nu\mu}. \tag{3.26}$$

Эти два уравнения следуют из (3.23) и свойства антисимметрии $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ напряженности поля. Из уравнений следует, что T изменяет знак в результате перестановки двух любых соседних индексов.

Упражнение-разминка 3.3. Проверьте уравнения (3.26).

Любой объект с произвольно большим числом индексов, изменяющий знак при перестановке каждой пары соседних индексов, будет изменять знак при перестановке любых двух индексов: чтобы поменять местами любые два индекса, вам необходимо сделать нечетное число перестановок соседних индексов (проверьте). Объект, изменяющий знак при перестановке любых двух индексов, называется полностью антисимметричным. Поэтому T полностью антисимметричен.

76

۴.,

Так как T полностью антисимметричен, он обращается в нуль, когда любые два из его индексов принимают одинаковое значение. Значение T не равно нулю только тогда, когда все три его индекса различны. В этом случае все возможные упорядочения этих трех фиксированных значений будут давать значения T, отличающиеся самое большее знаком, при T равном нулю перестановки индексов не создадут новых условий. Так как у нас есть четыре пространственновременные координаты, выбор трех разных индексов может быть сделан только четырьмя различными способами — исключая каждый раз один из индексов. Таким образом, обращение T в нуль дает четыре нетривиальных уравнения. Эти четыре уравнения являются тремя компонентами уравнения (3.1) и уравнением (3.2). Например, обращение в нуль T_{012} дает

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$
 (3.27)

Это *z*-компонента уравнения (3.1). Три другие способа выбора индексов приводят к остающимся трем уравнениям (задача 3.2).

Как в такой схеме записать уравнения Максвелла (3.3) и (3.4)? Поскольку эти уравнения содержат источники, мы должны ввести 4-вектор *плотности тока*:

$$j^{\mu} = (c\rho, j^1, j^2, j^3),$$
 (3.28)

где ρ плотность заряда, а $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$ — плотность тока. Кроме того, мы поднимаем индексы тензора поля, чтобы получить тензор электромагнитного поля с верхними индексами:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{3.29}$$

Упражнение-разминка 3.4. Покажите, что

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad F^{0i} = -F_{0i}, \quad F^{ij} = -F_{ij}.$$
 (3.30)

Уравнение (3.29) совместно с определением $F_{\mu\nu}$ дает выражение

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}) = \eta^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}(\eta^{\nu\beta}A_{\beta}) - \eta^{\nu\beta}\partial_{\beta}(\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha}).$$
(3.31)

Здесь мы внесли под знак производных компоненты матриц $\eta^{\mu\nu}$, т. к. они являются константами. Нам известны правила поднимания и опускания индексов для частных производных, поэтому пишем $\partial^{\mu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \partial_{\alpha}$. В результате

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}. \qquad (3.32)$$

Из формул (3.30) и (3.20) следует, что

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$
 (3.33)

Используя это уравнение и вектор тока (3.28), мы можем компактно записать уравнения Максвелла (3.3) и (3.4) (см. задачу 3.2):

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c} j^{\mu}. \tag{3.34}$$

В отсутствие источников это уравнение принимает вид

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{2}A^{\mu} = 0, \qquad (3.35)$$

где мы использовали обозначение $\partial^2 = \partial^{\mu} \partial_{\mu}$.

Уравнения (3.15) совместно с уравнениями (3.34) эквивалентны уравнениям Максвелла в четырех измерениях. Мы примем эти уравнения за основу для определения теории Максвелла в пространстве произвольного числа измерений. В d пространственных измерениях лоренцевский вектор A^{μ} имеет компоненты (Φ, \vec{A}) , где $\vec{A} - d$ -мерный пространственный вектор.

Например, в трехмерном пространстве-времени матрица $F_{\mu\nu}$ есть антисимметричная матрица (3 × 3), получающаяся из (3.20) отбрасыванием последней строки и последнего столбца:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B_z \\ E_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}.$$
 (3.36)

Это немедленно воспроизводит главный результат раздела 3.2: B_x , B_y и E_z следует положить равными нулю.

Руководствуясь формулой (3.33), назовем F^{0i} при произвольном числе измерений электрическим полем E_i :

$$E_i \equiv F^{0i} = -F_{0i}. \tag{3.37}$$

Электрическое поле — пространственный вектор. Из уравнения (3.16) следует, что при любом числе измерений

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \Phi.$$
(3.38)

Магнитное поле отождествляется с F^{ij} компонентами напряженности поля. В четырехмерном пространстве-времени F^{ij} есть антисимметричная матрица (3 × 3). Три определяющих ее величины являются компонентами вектора магнитного поля (см. (3.33)). При числе измерений, отличающемся от 4, магнитное поле уже не является пространственным вектором. В трех пространственно-временных измерениях магнитное поле есть однокомпонентная величина. В пяти пространственно-временных измерениях магнитное поле але имеет столько же независимых компонент, сколько их может иметь антисимметричная матрица (4 × 4), т. е. 6. Такое количество компонент не укладывается в пространственный вектор.

Нашей следующей целью будет определение электрического поля, образованного точечным зарядом в пространстве с произвольным, но фиксированным числом пространственных измерений. Для этого мы должны сначала узнать, как вычислять объемы многомерных сфер. Переходим к этому вопросу.

3.4. Отступление: сферы в многомерных пространствах

Так как мы хотим рассматривать пространства с разным числом измерений, нужно быть точным, когда речь идет о сферах и их объемах. Выражаясь небрежно, мы можем перепутать сферы и *шары*, по крайней мере в том точном смысле, в котором они определены в математике. Когда вы говорите, что объем сферы радиусом R равен $(4/3)\pi R^3$, вы на самом деле имеете в виду, что это есть объем *три-шара* B^3 — трехмерного пространства, ограниченного двумерной два-сферой S^2 . В трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 с координатами x^1 , x^2 и x^3 мы записываем три-шар как область, определенную неравенством

$$B^{3}(R): x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + x_{3}^{2} \leq R^{3}.$$
 (3.39)

Эта область ограничена два-сферой

$$S^{2}(R): x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + x_{3}^{2} = R^{2}.$$
 (3.40)

Индексы в B и S обозначают размерность обсуждаемого пространства. Когда мы опускаем явно аргумент R, мы подразумеваем, что R = 1. Вам знакомы и пространства с меньшей размерностью. Так, B^2 — это двумерный диск: область \mathbb{R}^2 , ограниченная одномерной окружностью единичного радиуса S^1 . При произвольном числе измерений шары и сферы определяются как подпространства \mathbb{R}^d :

$$B^{d}(R): x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + \ldots + x_{d}^{2} \leq R^{2}.$$
 (3.41)

Это область, ограниченная сферой $S^{d-1}(R)$:

$$S^{d-1}(R): x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = R^2.$$
 (3.42)

Последнее замечание по терминологии: чтобы избежать недоразумений, мы всегда будем говорить об объемах. Если пространство одномерно, мы говорим объем, подразумевая длину. В двумерном пространстве мы говорим объем, подразумевая площадь. Все многомерные пространства имеют просто объем. Объемы однои двумерных сфер равны

$$\operatorname{vol}(S^{1}(R)) = 2\pi R, \quad \operatorname{vol}(S^{2}(R)) = 4\pi R^{2}.$$
 (3.43)

Хотя читатель и сталкивался раньше с другими сферами, возможно, ему неизвестно, чему равен объем S^3 .

Так как объем измеряется в единицах длины в степени, равной размерности пространства, то объем сферы радиусом R связан с объемом сферы единичного радиуса соотношением

$$\operatorname{vol}(S^{d-1}(R)) = R^{d-1} \operatorname{vol}(S^{d-1}).$$
 (3.44)

Поскольку зависимость объема от радиуса легко восстанавливается, достаточно знать объемы сфер единичного радиуса:

$$vol(S^1) = 2\pi, \quad vol(S^2) = 4\pi.$$
 (3.45)

Приступим теперь к вычислению объема сферы S^{d-1} . Для этого рассмотрим пространство \mathbb{R}^d с координатами x_1, x_2, \ldots, x_d и положим радиальную координату rравной

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2. \tag{3.46}$$

Желаемый объем мы найдем, вычислив двумя разными способами следующий интеграл:

$$I_{d} = \int_{\mathbb{R}^{d}} dx_{d} e^{-r^{2}} dx_{1} dx_{2} \dots \qquad (3.47)$$

Сначала будем действовать непосредственно. Подставляя (3.46) в показатель экспоненты, получим, что интеграл превратится в произведение гауссовых интегралов:

$$I_d = \prod_{i=1}^d \int_{-\infty}^\infty dx_i \, e^{-x_i^2} = (\sqrt{\pi})^d = \pi^{d/2}.$$
 (3.48)

Теперь проведем вычисления обходным путем. Возьмем интеграл, разбив \mathbb{R}^{d} на сферические оболочки. Так как пространство постоянного r есть сфера $S^{d-1}(r)$, объем оболочки между r и r + dr равен объему $S^{d-1}(r)$, умноженному на dr. Поэтому

$$I_{d} = \int_{0}^{\infty} dr \operatorname{vol}(S^{d-1}(R)) e^{-r^{2}} = \operatorname{vol}(S^{d-1}) \int_{0}^{\infty} dr r^{d-1} e^{-r^{2}} =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{vol}(S^{d-1}) \int_{0}^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1}, \qquad (3.49)$$

здесь мы использовали (3.44) и на заключительном шаге поменяли переменную интегрирования на $t = r^2$. Последний интеграл в правой части можно выразить через очень полезную специальную функцию — гамма-функцию. Для положительных x гамма-функция $\Gamma(x)$ определена как

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} dt \ e^{-t} t^{x-1}, \quad x > 0.$$
 (3.50)

Если условие x > 0 не соблюдается, интеграл расходится вблизи t = 0. С учетом этого определения, выражение (3.49) принимает вид

$$I_d = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(S^{d-1}) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \tag{3.51}$$

Сравнивая с предыдущим вычислением (3.48), получаем окончательный результат:

$$\operatorname{vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$
 (3.52)

Остается вычислить значение $\Gamma(d/2)$. Так как *d* целое, мы должны определить значения гамма-функции как для целых, так и для полуцелых аргументов. Чтобы найти $\Gamma(1/2)$, используем определение (3.49) и положим $t = u^2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\infty} dt \ e^{-t} t^{-1/2} = 2 \int_{0}^{\infty} du \ e^{-u^{2}} = \sqrt{\pi}.$$
 (3.53)

Аналогично

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} dt \ e^{-t} = 1.$$
 (3.54)

Для больших аргументов вычисление гамма-функции упрощается, если воспользоваться рекуррентным соотношением. Чтобы получить это соотношение, начнем с формулы

$$\Gamma(x+1) = \int_{0}^{\infty} dt \, e^{-t} t^{x}, \quad x > 0, \qquad (3.55)$$

которое можно переписать в виде

$$\Gamma(x+1) = -\int_{0}^{\infty} dt \left(\frac{d}{dt} e^{-t}\right) t^{x} = -\int_{0}^{\infty} dt \left(\frac{d}{dt}(e^{-t}t^{\bar{x}}) - xe^{-t}t^{x-1}\right). \quad (3.56)$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \tag{3.57}$$

Используя это рекуррентное соотношение, находим, например

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
 (3.58)

Гамма-функция целых аргументов связана с факториалом:

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 4!.$$

Поэтому, при $n \in \mathbb{Z}$ и $n \ge 1$ имеем:

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$
 (3.59)

по определению 0! = 1. Теперь можно проверить нашу формулу (3.52) для уже знакомых случаев единичных шаров:

$$\operatorname{vol}(S^{1}) = \operatorname{vol}(S^{2-1}) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi,$$

$$\operatorname{vol}(S^{2}) = \operatorname{vol}(S^{3-1}) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi,$$
(3.60)

что согласуется с известными значениями. Для менее знакомого случая S^3 находим:

$$\operatorname{vol}(S^3) = \operatorname{vol}(S^{4-1}) = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2.$$
 (3.61)

Упражнение-разминка 3.5. Покажите, что $\operatorname{vol}(B^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$.

3.5. Электрические поля в многомерных пространствах

В этом разделе мы вычислим электрическое поле, создаваемое точечным зарядом в мире с d пространственными измерениями. Здесь d может равняться трем, и в этом случае ответ известен, или быть меньше трех, но нас особенно интересует случай d > 3. Чтобы это осуществить, используем общую версию уравнений Максвелла, годящуюся для произвольного числа пространственных измерений. Можно полагать, что электрическое поле точечного заряда центральносимметрично. Наше вычисление позволит узнать радиальную зависимость и нормировку электрического поля. С минимальными модификациями этот результат даст информацию о гравитационных полях точечных частиц в d измерениях.

Для вычислений нам понадобится нулевая компонента уравнения (3.34):

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \rho. \tag{3.62}$$

Так как $F^{0i} = E_i$ (см. (3.37)), это уравнение представляет собой просто теорему Гаусса:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho. \tag{3.63}$$

Теорема Гаусса верна при любом числе измерений! Уравнение (3.63) можно использовать для определения электрического поля точечного заряда. Напомним сначала, как это делается в знакомом случае трех пространственных измерений.

Рассмотрим точечный заряд q, два-сферу $S^2(r)$ радиусом r, в центре которой находится этот заряд, и три-шар $B^3(r)$, границей которого является два-сфера. Проинтегрируем обе стороны уравнения (3.63) по три-шару, тогда

$$\int_{B^3} d(\text{vol}) \, \nabla \cdot \vec{E} = \int_{B^3} d(\text{vol}) \, \rho. \tag{3.64}$$

Применим теорему о дивергенции²⁾ к левой части равенства и заметим, что интеграл по объему справа равен полному заряду:

$$\int_{S^2(r)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = q. \tag{3.65}$$

Так как величина E(r) поля \vec{E} на два-сфере постоянна, получаем, что

$$\operatorname{vol}(S^{2}(r))E(r) = q. \tag{3.66}$$

Объем два-сферы есть просто ее площадь $4\pi r^2$, так что

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}.\tag{3.67}$$

Это знакомый результат для электрического поля точечного заряда в трех пространственных измерениях. Величина электрического поля падает с расстоянием как $1/r^2$.

Для числа измерений, большего трех, можно отталкиваться от формулы (3.63), только нужно выяснить, выполняется ли в таких пространствах теорема о дивергенции. Оказывается, что это так и есть. Сформулируем сначала теорему в *d* пространственных измерениях, а затем приведем ее доказательство.

Рассмотрим *d*-мерное подмножество V^d пространства \mathbb{R}^d , и пусть ∂V^d обозначает границу V^d . Кроме того, пусть \vec{E} будет вектором поля в \mathbb{R}^d . Теорема о дивергенции утверждает, что

$$\int_{V^d} d(\text{vol}) \,\nabla \cdot \vec{E} = \text{поток } \vec{E} \text{ через поверхность } \partial V^d = \int_{\partial V^d} \vec{E} \cdot d\vec{v}. \tag{3.68}$$

Последнее выражение в правой части требует некоторого пояснения. В любой точке на ∂V^d пространство ∂V^d локально аппроксимируется (d-1)-мерной касательной гиперплоскостью. Для малого куска ∂V^d вокруг этой точки, связанный с ним вектор $d\vec{v}$ есть вектор, ортогональный гиперплоскости, направленный из объема, причем величина этого вектора равна объему рассматриваемого малого куска. Заметим, что такое объяснение находится в согласии с нашими знаниями о случае \mathbb{R}^3 , где $d\vec{v}$ соответствует вектору элемента площади $d\vec{a}$.

Проверим теперь теорему о дивергенции для случая четырех пространственных измерений. Следуя стратегии, используемой в элементарных учебниках, достаточно доказать теорему о дивергенции для малого гиперкуба, после чего результат для произвольных подпространств будет следовать из разбиения таких пространств на много малых гиперкубов. Так как вообразить четырехмерный гиперкуб не так уж легко, мы можем использовать трехмерную картину с четырехмерными метками (рис. 3.1). Используем декартовы координаты x, y, z, w,

²⁾ В российской математической и физической литературе эта теорема называется теоремой Остроградского—Гаусса. — Прим. пер.



Рис. 3.1. Попытка представить четырехмерный гиперкуб. Представлены две грани постоянного *х* (заштриховано) вместе с исходящими нормальными векторами

и рассмотрим куб, грани которого лежат на гиперплоскостях, определенных как плоскости постоянного значения одной из координат. Пусть одна грань куба и противоположная ей грань лежат на гиперплоскостях постоянного x и постоянного x + dx, соответственно. Исходящие векторы нормали — это \vec{e}_x для грани с фиксированной координатой x + dx, и $(-\vec{e}_x)$ для грани с фиксированной координатой x. Объем каждой из этих двух граней равняется dy dz dw, где dy, dz, dwвместе с dx являются длинами граней куба. Для произвольного электрического поля $\vec{E}(x, y, z, w)$ только x-компонента дает вклад в поток через эти две грани. Этот вклад равен

$$\left[E_x(x+dx, y, z, w) - E_x(x, y, z, w)\right] dy \, dz \, dw \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \, dw. \tag{3.69}$$

Аналогичные выражения верны для потока через три другие пары граней. Полный суммарный поток от маленького куба равен

Ποτοκ
$$\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_w}{\partial w}\right) dx \, dy \, dz \, dw = \nabla \cdot \vec{E} \, d(\text{vol}).$$
 (3.70)

Этот результат в точности соответствует теореме о дивергенции (3.68), примененной к бесконечно малому гиперкубу. Именно это мы и хотели показать.

Теперь можно вернуться к вычислению электрического поля, создаваемого точечным зарядом в мире с d пространственными измерениями. Рассмотрим точечный заряд q, сферу $S^{d-1}(r)$ радиусом r, в центре которой находится заряд (это сфера, окружающая заряд) и шар $B^d(r)$, границей которого является сфера $S^{d-1}(r)$. Мы снова интегрируем обе стороны уравнения (3.62) по шару $B^d(r)$:

$$\int_{B^d} d(\text{vol}) \nabla \cdot \vec{E} = \int_{B^d} d(\text{vol}) \rho.$$
(3.71)

Объемный интеграл в правой части дает полный заряд, и теорема о дивергенции (3.68) связывает левую часть с интегралом потока:

Поток
$$\vec{E}$$
 через поверхность $S^{d-1}(r) = q.$ (3.72)

Поток равен величине электрического поля, умноженного на объем $S^{d-1}(r)$, так что

$$E(\mathbf{r})\operatorname{vol}(S^{d-1}(\mathbf{r})) = q. \tag{3.73}$$

Используя (3.52), находим, что

$$E(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{q}{\mathbf{r}^{d-1}}.$$
 (3.74)

Это есть значение электрического поля точечного заряда в мире с d пространственными измерениями. При d = 3 мы восстанавливаем закон обратных квадратов для электрического поля. В пространствах с большим числом измерений электрическое поле спадает на больших расстояниях быстрее. Для каждого дополнительного пространственного измерения мы получаем дополнительный множитель 1/r в радиальной зависимости электрического поля.

- Упражнение-разминка 3.6. Проверьте, что при d = 3 формула (3.74) совпадает с формулой (3.67).
- Упражнение-разминка 3.7. Сила \vec{F} , действующая на пробный заряд q в электрическом поле \vec{E} , равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Каковы единицы заряда в разных измерениях?

Интерес представляет и электростатический потенциал Ф. Для стационарных полей формула (3.38) дает:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \tag{3.75}$$

Это уравнение совместно с теоремой Гаусса приводит к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -\rho, \qquad (3.76)$$

которое можно использовать для вычисления потенциала, создаваемого распределением зарядов. Два предыдущих уравнения справедливы при любом числе измерений, если, конечно, использовать подходящие определения градиента и лапласиана.

3.6. Гравитация и планковская длина

Общая теория относительности Эйнштейна — по сути, теория гравитации. В этой очень элегантной теории динамические переменные кодируют геометрию пространства-времени. Когда гравитационные поля достаточно слабы, а скорости малы, достаточно точной является ньютоновская теория тяготения, так что нет нужды работать с более сложным аппаратом общей теории относительности. Мы можем использовать ньютоновскую теорию для того, чтобы понять, как определена планковская длина в различных размерностях и как она связана с гравитационной постоянной. Здесь и в оставшейся части этой главы мы рассмотрим эти интересные вопросы. Тем не менее, когда гравитация возникает в теории струн, это происходит на языке общей теории относительности Эйнштейна. Для того чтобы различить появление гравитации среди квантовых колебаний релятивистской струны, нужно чуть ближе познакомиться с языком общей теории относительности. Здесь мы лишь коснемся понятий, используемых этой поразительной теорией.

Большинство физиков не ожидает, что общая теория относительности окажется верной на поистине малых расстояниях или при невероятно больших гравитационных полях. Это та область, в которой оказывается необходимой теория струн — первый серьезный кандидат на квантовую теорию гравитации. Общая теория относительности является пределом теории струн на больших расстояниях/при слабом гравитационном поле. Теория струн лишь *модифицирует* общую теорию относительности; это необходимо для того, чтобы согласовать ее с квантовой механикой. Концептуальная схема, лежащая в основе этих модификаций, до сих пор не ясна. Без сомнения, ясность возникнет после того, как мы в ближайшие годы лучше поймем теорию струн.

Пространство-время специальной теории относительности — пространство Минковского — арена для физических явлений в *отсутствии* гравитационных полей. Геометрические свойства пространства-времени Минковского заложены в формулу метрики (2.21), определяющей инвариантный интервал, разделяющий два соседних события:

$$-ds^{2} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \qquad (3.77)$$

Здесь метрика Минковского $\eta_{\mu\nu}$ — постоянная метрика, которую можно представить в виде матрицы, на главной диагонали которой стоят числа (-1, 1, ..., 1). Говорят, что пространство Минковского есть плоское пространство. При наличии гравитационного поля метрика становится динамической. Можно записать

$$-ds^{2} = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}, \qquad (3.78)$$

где постоянный тензор $\eta_{\mu\nu}$ заменяется на метрику $g_{\mu\nu}(x)$. Если присутствует гравитационное поле, то метрика в общем случае является нетривиальной функцией пространственно-временных координат. По определению, метрика $g_{\mu\nu}$ симметрична:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x).$$
 (3.79)

Принято также определять $g^{\mu\nu}(x)$ как обратную к матрице $g_{\mu\nu}(x)$:

$$g^{\mu\alpha}(x)g_{\alpha\nu}(x)=\delta^{\mu}_{\nu}. \qquad (3.80)$$

Во многих физических явлениях гравитация очень слаба, и метрика $g_{\mu\nu}(x)$ может быть выбрана очень близкой к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Тогда можно записать:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \qquad (3.81) \ ,$$

и рассматривать $h_{\mu\nu}(x)$ как малую флуктуацию в окрестности метрики Минковского. Такое разложение производится, например, при описании гравитацие онных волн. Гравитационные волны образуют малую «рябь» на фоне метрики

Минковского. Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля записываются с помощью пространственно-временной метрики $g_{\mu\nu}(x)$. Из этих уравнений следует, что источники материи и энергии искривляют пространственно-временное многообразие. В случае слабых гравитационных полей уравнения Эйнштейна могут быть с помощью (3.81) разложены по степеням $h_{\mu\nu}$. Вдали от источников результирующее линеаризованное уравнение для $h_{\mu\nu}$ имеет вид³⁾

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_{\alpha} (\partial^{\mu} h^{\nu\alpha} + \partial^{\nu} h^{\mu\alpha}) + \partial^{\mu} \partial^{\nu} h = 0.$$
 (3.82)

Здесь $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$ и $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$. Уравнение (3.82) есть гравитационный аналог уравнения (3.35), описывающего максвелловские поля при отсутствии источников. В то время, как (3.35) является точным уравнением, (3.82) верно только для слабых гравитационных полей. Это линеаризованное приближение нелинейного уравнения для h.

Аналогия с электромагнетизмом распространяется и на существование калибровочных преобразований. Эйнштейновская гравитация обладает калибровочными преобразованиями. Они возникают потому, что использование различных систем координат приводит к эквивалентному описанию гравитационной физики. В этой книге при изучении теории струн вы столкнетесь с возможностью свободы выбора координат поверхностей, порождаемых движущимися струнами. В общей теории относительности бесконечно малое изменение координат

$$x^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) \tag{3.83}$$

можно рассматривать как бесконечно малое изменение метрики $g_{\mu\nu}$, и, используя (3.81), как бесконечно малое изменение флуктуирующего поля $h^{\mu\nu}$. Можно показать, что изменение дается выражением

$$\delta h^{\mu\nu} = \delta_0 h^{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{O}(h), \quad \delta_0 h^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu. \tag{3.84}$$

Как указано выше, бесконечно малое изменение $\delta h^{\mu\nu}$ равно сумме $\delta_0 h^{\mu\nu}$ и поправки, записанной как $\mathcal{O}(\epsilon, h)$, которая линейна по ϵ , а также по флуктуациям самого поля h. Инвариантность полного нелинейного уравнения движения относительно калибровочного преобразования $\delta h^{\mu\nu}$ требует инвариантности линеаризованного уравнения движения (3.82) относительно $\delta_0 h^{\mu\nu}$. Действительно, когда мы варьируем величины h в (3.82) используя $\delta_0 h^{\mu\nu}$, мы получаем слагаемые, линейные по ϵ , но не содержащие h. Эти слагаемые должны полностью сокращаться, так как все другие вариации будут содержать по крайней мере одно поле h. Это ясно как для вариаций (3.82) с использование слагаемых, представленных выражением $\mathcal{O}(\epsilon, h)$, так и для вариаций всех членов, как квадратичных, так и более высокого порядка по h, содержащихся в полном уравнении движения. В главе 10 мы проверим инвариантность (3.82) относительно преобразования $\delta_0 h^{\mu\nu}$. В максвелловской теории у калибровочного параметра нет индексов, но в общей теории относительности калибровочный параметр имеет векторный индекс.

³⁾ Подробный вывод линеаризованного уравнения Эйнштейна (3.82) для слабых полей см., например: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. § 108. — Прим. ред. перевода.

Как мы отмечали ранее, ньютоновская гравитация возникает из общей теории относительности в приближении слабых гравитационных полей и движений с малыми скоростями. Во многих случаях ньютоновской гравитации оказывается достаточно для решения задачи. С этого момента и до конца этой главы мы будем использовать ньютоновскую гравитацию для того, чтобы понять определение планковской длины в различных размерностях, и выяснить, каким образом ведут себя гравитационные постоянные, когда некоторые пространственные измерения свернуты. Результаты, которые мы получим, оказываются верными также и в полной общей теории относительности.

Ньютоновский закон тяготения в четырех измерениях утверждает, что сила притяжения между двумя массами m_1 и m_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга, равна

$$|\vec{F}^{(4)}| = \frac{Gm_1m_2}{r_2}, \qquad (3.85)$$

где G обозначает четырехмерную ньютоновскую постоянную. Отсюда следует, что размерность гравитационной постоянной G

$$[G] = [Cила] \frac{L^2}{M^2} = \frac{ML}{T^2} \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2}.$$
 (3.86)

Численное значение постоянной G определяется экспериментально:

$$G = 6,674 \times 10^{-11} \, \frac{\mathrm{M}^3}{\mathrm{KF} \cdot \mathrm{c}^2}.$$
 (3.87)

Так как [c] = L/T и $[\hbar] = ML^2/T$, три фундаментальные константы G, c, \hbar могут быть записаны как

$$G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{M^3}{\kappa r \cdot c^2}, \quad c = 2,998 \times 10^8 \frac{M}{c^2},$$

$$\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \frac{\kappa r \cdot M^2}{c^2}.$$
 (3.88)

При изучении гравитации иногда удобно использовать «планковскую» систему единиц. Так как в нашем распоряжении есть три базисные единицы: длины, массы и времени, мы можем найти новые единицы длины, времени и массы, такие, что три фундаментальные константы G, c, \hbar примут единичные численные значения в такой системе. Эти единицы называются планковской длиной ℓ_P , планковским временем t_P и планковской массой m_P , соответственно. В этих единицах

$$G = 1 \cdot \frac{\ell_{\rm P}^3}{m_{\rm P} t_{\rm P}^2}, \quad c = 1 \cdot \frac{\ell_{\rm P}}{t_{\rm P}}, \quad \hbar = 1 \cdot \frac{m_{\rm P} \ell_{\rm P}^2}{t_{\rm P}}, \quad (3.89)$$

причем, в противоположность выражению (3.87), без дополнительных численных констант. Предыдущие соотношения позволяют записать $\ell_{\rm P}$, $t_{\rm P}$ и $m_{\rm P}$ через G, c и \hbar . Легко найти, что

$$\ell_{\rm P} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \,\,{\rm cm},\tag{3.90}$$

$$t_{\rm P} = \frac{\ell_{\rm P}}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,391 \times 10^{-44} \,{\rm c},$$
 (3.91)

$$m_{\rm P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-5} \,\mathrm{r.}$$
 (3.92)

Эти числа представляют те масштабы, на которых могут быть существенны эффекты релятивистской квантовой гравитации. Действительно, планковская длина необычайно мала, а планковское время — невероятно короткий промежуток времени, за который свет проходит планковскую длину! В то время, как эйнштейновскую гравитацию можно использовать вплоть до относительно самых ранних моментов времени в истории вселенной, теория квантовой гравитации (например, теория струн) необходима для изучения гравитации на расстояниях порядка планковской длины или исследования вселенной тогда, когда ее возраст равнялся планковскому времени.

Существует эквивалентный способ описания планковской длины: ℓ_P — это единственная длина, которую можно построить, используя *только* степени *G*, *c* и \hbar . Таким образом, пишем:

$$\boldsymbol{\ell}_{\mathsf{P}} = (\boldsymbol{G})^{\alpha} (\boldsymbol{c})^{\beta} \boldsymbol{\hbar}^{\gamma}. \tag{3.93}$$

и подбираем постоянные α , β , γ так, чтобы правая часть имела размерность длины.

(•) Упражнение-разминка 3.8. Покажите, что это условие однозначно фиксирует $\alpha = \gamma = 1/2$ и $\beta = -3/2$, воспроизводя тем самым результат (3.90).

Может показаться, что m_P — не слишком большая масса, но на самом деле с точки зрения физики элементарных частиц это весьма большая масса. Масса m_P примерно в 10¹⁹ раз больше массы протона. Если фундаментальная теория природы основана на базисных постоянных G, c, \hbar , то представляет большую загадку, почему массы элементарных частиц настолько меньше «обычной» массы m_P , которая может быть построена из базисных постоянных. Эта загадка обычно называется *проблемой иерархии*.

В связи с планковской массой рассмотрим следующий вопрос: какой должна быть масса протона *M*, для того, чтобы сила гравитационного притяжения между двумя протонами компенсировала силу их электростатического отталкивания? Приравнивая величины электрической и гравитационной сил, находим:

$$\frac{GM^2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi r^2} \Rightarrow GM^2 = \frac{e^2}{4\pi}.$$
 (3.94)

Удобно поделить обе части этого равенства на ћс, тогда

$$\frac{GM^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \Rightarrow \frac{M^2}{m_P^2} \approx \frac{1}{137}, \qquad (3.95)$$

здесь было использовано равенство (3.92). Отсюда мы находим $M \approx m_P/12$, т.е. *М* равна примерно одной десятой планковской массы. Безразмерное отношение $e^2/(4\pi\hbar c)$ называется постоянной тонкой структуры. Ранее мы оценили ее

значение, используя определение электрического заряда в системе Хевисайда— Лоренца, где $e = 4.8 \times 10^{-10}$ СГСЭ-ед. (см. задачу 2.1(в)).

 Упражнение-разминка 3.9. Масса электрона $m_e = 0,9109 \times 10^{-27}$ г, или эквивалентная энергия $m_e c^2 = 0,5110$ МэВ. Покажите, что энергия, эквивалентная массе Планка, равна $m_P c^2 = 1,221 \times 10^{19}$ ГэВ (1 ГэВ = 10^9 эВ). Эта энергия называется планковской энергией.

3.7. Гравитационные потенциалы

Мы хотим выяснить, что происходит с гравитационной постоянной G, когда пытаемся описать гравитацию в пространстве-времени иных размерностей. Чтобы понять это, исследуем гравитационные потенциалы в ньютоновской гравитации. В этом разделе мы получим уравнение, которое связывает гравитационный потенциал с распределением масс в пространстве-времени с произвольным, но фиксированным числом пространственных измерений. Сделав это, мы узнаем, как определить соответствующую гравитационную постоянную. Этот результат будет использован в следующем разделе, чтобы определить при любом числе измерений планковскую длину через соответствующую гравитационную постоянную.

Введем гравитационное поле \vec{g} , единицами которого является сила, приходящаяся на единицу массы. Это определение аналогично определению электрического поля как силы, действующей на пробную частицу: сила, действующая на данную пробную массу m в точке, где гравитационное поле равно \vec{g} , есть $m\vec{g}$. Мы полагаем \vec{g} равным взятому со знаком минус градиенту потенциала V_q :

$$\vec{g} = -\nabla V_g. \tag{3.96}$$

Будем считать, что это уравнение верно при любом числе измерений. Формула (3.96) имеет следующий смысл: если вы передвигаете частицу по замкнутой петле в статическом гравитационном поле, то полная работа, совершаемая против сил гравитационного поля, равна нулю.

Упражнение-разминка 3.10. Докажите сделанное утверждение.

Каковы единицы гравитационного потенциала? Из формулы (3.96) следует:

$$\left[\vec{g}\right] = \frac{\left[\mathsf{Силa}\right]}{M} = \frac{\left[V_{g}\right]}{L} \implies \left[V_{g}\right] = \frac{\left[\exists \mathsf{нергия}\right]}{M}.$$
(3.97)

Единицей гравитационного потенциала при любом числе измерений является энергия, приходящаяся на единицу массы. Гравитационный потенциал $V_g^{(4)}$ точечной массы в четырех измерениях равен

$$V_g^{(4)} = -\frac{GM}{r}.$$
 (3.98)

Найдем уравнение для гравитационного потенциала, используя аналогию с электромагнетизмом. В электромагнетизме мы нашли уравнение для электростатиче-

ского потенциала, верное при любом числе измерений. Это уравнение (3.76):

$$\nabla^2 \Phi = -\rho. \tag{3.99}$$

Четырехмерный скалярный потенциал точечного заряда q равен

$$\Phi^{(4)} = \frac{q}{4\pi r},\tag{3.100}$$

и он удовлетворяет уравнению (3.99), где ρ — плотность точечного заряда. По аналогии, можно сделать предположение, что четырехмерный гравитационный потенциал (3.98) удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 V_g^{(4)} = 4\pi G \rho_m, \tag{3.101}$$

где ρ_m — плотность материи. Поскольку это уравнение верно в четырех измерениях, для других размерностей нужна лишь небольшая модификация. Заметим, что левая часть при любом числе измерений имеет одну и ту же размерность: единицы V_g всегда одни и те же, а размерность лапласиана всегда есть обратная величина квадрата длины. Правая часть должна иметь ту же размерность в любом числе измерений. Так как ρ_m есть плотность массы, она имеет разную размерность при разном числе измерений, и, как следствие, единицы G должны меняться при изменении размерности. Перепишем поэтому рассматриваемое уравнение более точно в виде

$$\nabla^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m, \qquad (3.102)$$

где индекс D отмечает, что мы работаем в D-мерном пространстве-времени. Индексы, указанные в скобках, обозначают размерность *пространства-времени*. В частности, мы тождествляем $G^{(4)}$ с четырехмерной постоянной Ньютона. В общем случае, мы будем использовать D для обозначения размерности пространства-времени, а d — для обозначения числа пространственных измерений. Очевидно, что D = d + 1.

Уравнение (3.102) определяет ньютоновскую гравитацию в пространствах с произвольным числом измерений. Как и в случае электрического поля точечного заряда, гравитационное поле точечной массы в мире с d пространственными измерениями убывает как $(1/r^{d-1})$. В результате, сила, действующая между двумя точечными массами, находящимися на расстоянии r друг от друга, убывает как $(1/r^{d-1})$. При трех пространственных измерениях это знакомый нам закон обратных квадратов для зависимости силы притяжения от расстояния. Если D = 6 (мир с двумя дополнительными измерениями), гравитационная сила убывает как $(1/r^4)$.

3.8. Планковская длина в разных размерностях

Мы определяем планковскую длину в случае произвольного числа измерений так же, как это было сделано в четырех измерениях: планковская длина это единственная длина, построенная только с использованием степеней гравия .

тационной постоянной $G^{(D)}$, с и \hbar . Чтобы вычислить планковскую длину, нужно определить размерность $G^{(D)}$. Это легко сделать, если вспомнить, что размерность $G^{(D)}\rho_m$ (правой части (3.102)) одинакова в случае произвольного числа измерений. Например, сравнивая случаи четырех и пяти измерений, имеем:

$$\left[G^{(5)}\right]\frac{M}{L^4} = \left[G\right]\frac{M}{L^3} \implies \left[G^{(5)}\right] = L[G]. \tag{3.103}$$

Размерность $G^{(5)}$ по сравнению с размерностью G содержит одну дополнительную степень длины. С помощью формулы (3.89) можно выразить размерность G через размерность длины и размерности с и \hbar :

$$[G] = \frac{[c]^3 L^2}{[\hbar]}.$$
 (3.104)

Тогда из (3.103) следует, что

$$\left[G^{(5)}\right] = \frac{[c]^3 L^3}{[\hbar]}.$$
(3.105)

Так как планковская длина единственным образом строится из гравитационной постоянной, а также с и \hbar , можно убрать скобки в предыдущем выражении и заменить *L* на пятимерную планковскую длину $\ell_p^{(5)}$:

$$\left(\ell_{\rm P}^{(5)}\right)^3 = \frac{\hbar G^{(5)}}{c^3}.$$
 (3.106)

Восстанавливая четырехмерную планковскую длину, получаем:

$$\left(\ell_{\rm P}^{(5)}\right)^3 = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right) \frac{G^{(5)}}{G} \Rightarrow \left(\ell_{\rm P}^{(5)}\right)^3 = \left(\ell_{\rm P}\right)^2 \frac{G^{(5)}}{G}.$$
 (3.107)

Гравитационные постоянные в четырех и пяти измерениях нельзя сравнить непосредственно, так как они измеряются в разных единицах. Однако планковские длины сравнивать можно. Если планковская длина одинакова в четырех и пяти измерениях, тогда $G^{(5)}/G = \ell_P$, т. е. гравитационные постоянные различаются одной степенью общей планковской длины.

Нетрудно обобщить предыдущее выражение на пространство-время *D* измерений.

Упражнение-разминка 3.11. Покажите, что (3.106) и (3.107) заменяются в общем случае на

$$\left(\ell_{\mathbf{P}}^{(D)}\right)^{D-2} = \frac{\hbar G^{(D)}}{c^3} = \left(\ell_{\mathbf{P}}\right)^2 \frac{G^{(D)}}{G}.$$
 (3.108)

3.9. Гравитационные постоянные и компактификация

Если теория струн верна, наш мир действительно обладает более высокой размерностью. Базовая теория гравитации определяется тогда в многомерном мире при некотором значении многомерной планковской длины. Поскольку мы наблюдаем только четыре измерения, дополнительные измерения могут быть свернуты, образуя компактное пространство малого объема. Тогда мы можем спросить, чему равно эффективное значение четырехмерной планковской длины? Как будет показано ниже, эффективная четырехмерная планковская длина зависит от объема дополнительных измерений, а также от значения многомерной планковской длины.

Эти наблюдения допускают возможность того, что планковская длина в эффективно четырехмерном мире — знаменитое число, примерно равное 10^{-33} см, может не совпадать с фундаментальной планковской длиной в первоначальной многомерной теории. Возможно ли, что фундаментальная планковская длина много больше, чем знакомая четырехмерная длина? Мы ответим на этот вопрос в следующем разделе. В этом разделе мы обсудим влияние компактификации на гравитационные константы.

Как следует вычислять гравитационную постоянную в четырех измерениях, если нам задана гравитационная постоянная в пяти измерениях? Во-первых, мы замечаем, что необходимо свернуть одно пространственное измерение, в противном случае не возникнет эффективного четрыехмерного пространства-времени. Как будет видно, размер дополнительного измерения входит в формулу, связывающую гравитационные константы. Чтобы получить точные соотношения, рассмотрим пятимерное пространство-время, в котором одно измерение образует маленькую окружность радиуса R. Нам задана константа $G^{(5)}$ и мы хотим вычислить $G^{(4)}$.

Пусть (x^1, x^2, x^3) обозначают три пространственных измерения бесконечной протяженности, а x^4 обозначает компактифицированное измерение с длиной окружности $2\pi R$ (рис. 3.2). Поместим однородное кольцо полной массой M



Рис. 3.2. Мир с четырьмя пространственными измерениями, одно из которых, а именно x^4 , компактифицировано в окружность радиусом R. Кольцо полной массой M расположено вдоль этого компактного измерения

вдоль окружности при $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Получим распределение массы, однородное вдоль измерения x^4 . Нас интересует гравитационный потенциал $V_g^{(5)}$, возникающий при таком распределении массы. Мы могли бы поместить точечную массу в некоторой фиксированной точке x^4 , но это делает вычисления более сложными (задача 3.9). В данном случае гравитационный потенциал $V_g^{(5)}$ не зависит от x^4 . Полную массу M можно записать как

полная масса =
$$M = 2\pi Rm$$
, (3.109)

где т — масса, приходящаяся на единицу длины.

Чему равна плотность массы в таком пятимерном мире? Она отлична от нуля только при $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Чтобы представить такую плотность массы, используем дельта-функции. Напомним, что дельта-функция $\delta(x)$ может быть представлена как сингулярная функция, значение которой равно нулю везде

за исключением точки x = 0, причем интеграл $\int_{-\infty} dx \, \delta(x) = 1$. Из вида этого

интеграла следует, что если x имеет размерность длины, то $\delta(x)$ имеет размерность обратной длины. Так как пятимерная плотность массы сконцентрирована при $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, разумно включить в формулу для нее произведение трех дельта-функций $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$. Мы утверждаем, что

$$\rho(5) = m \,\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3). \tag{3.110}$$

Проверим, прежде всего, размерности. Плотность массы $\rho^{(5)}$ должна иметь размерность M/L^4 . Все сходится, так как *m* имеет размерность единицы массы, деленной на единицу длины, а три дельга-функции обеспечивают дополнительный множитель L^{-3} . Предположение (3.110) может отличаться от точного ответа на числовой безразмерный множитель, например, на двойку. Для заключительной проверки интегрируем $\rho^{(5)}$ по всему пространству, в результате должна получиться полная масса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^{1} dx^{2} dx^{3} \int_{0}^{2\pi R} dx^{4} \rho^{(5)} =$$

$$= m \int_{-\infty}^{\infty} dx^{1} \delta(x^{1}) \int_{-\infty}^{\infty} dx^{2} \delta(x^{2}) \int_{-\infty}^{\infty} dx^{3} \delta(x^{3}) \int_{0}^{2\pi R} dx^{4} =$$

$$= m 2\pi R. \qquad (3.111)$$

Это действительно полная масса, согласно (3.109). Для эффективно четырехмерного наблюдателя масса — точечная, и расположена она в точке $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Поэтому данный наблюдатель записывает

$$\rho^{(4)} = M \,\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3). \tag{3.112}$$

Обратите внимание на соотношение

$$\rho^{(5)} = \frac{1}{2\pi R} \,\rho^{(4)}.\tag{3.113}$$

Используем эту информацию в уравнениях для гравитационного потенциала. Используя пятимерные версии соотношений (3.102) и (3.113), находим

$$\nabla^2 V_g^{(5)} = 4\pi G^{(5)} \rho^{(5)} = 4\pi \frac{G^{(5)}}{2\pi R} \rho^{(4)}. \tag{3.114}$$

Как мы замечали выше, $V_g^{(5)}$ не зависит от x^4 , поэтому лапласиан, на самом деле, четырехмерен. Так как эффективный четырехмерный гравитационный потенциал равен $V_g^{(5)}$, предыдущее уравнение принимает вид уравнения тяготения в четырех измерениях, где константа между множителями 4π и $\rho^{(4)}$ равна четырехмерной гравитационной постоянной.

Таким образом, мы показали, что

$$G = \frac{G^{(5)}}{2\pi R} \Rightarrow \frac{G^{(5)}}{G} = 2\pi R \equiv \ell_C, \qquad (3.115)$$

где ℓ_C есть длина дополнительного компактифицированного измерения. Это то, что мы искали: связь между гравитационными постоянными, выраженная через размер дополнительного измерения.

Обобщение (3.115) на случай более чем одного дополнительного измерения осуществляется непосредственно. Находим:

$$\frac{G^{(D)}}{G} = (\ell_C)^{D-4}, \qquad (3.116)$$

где ℓ_C — длина каждого из дополнительных измерений. Если различные измерения сворачиваются в окружности разной длины, правая часть предыдущей формулы заменяется на произведение различных длин. На самом деле это произведение есть объем V_C дополнительных измерений, так что

$$\frac{G^{(D)}}{G} = V_C. \tag{3.117}$$

3.10. Большие дополнительные измерения

Мы произвели всю подготовительную работу. В разделе 3.8 мы нашли связь между планковской длиной и гравитационной постоянной в пространстве любого числа измерений. В разделе 3.9 мы определили, каким образом гравитационные постоянные оказываются связанными друг с другом после компактификации. Теперь мы готовы определить, каким образом фундаментальная планковская

длина в многомерной теории с компактификацией связана с планковской длиной в эффективной четырехмерной теории.

Для начала рассмотрим пятимерный мир с планковской длиной $\ell_{\rm P}^{(5)}$ и одной пространственной координатой, свернутой в окружность длиной ℓ_C . Что тогда есть $\ell_{\rm P}$? Из формул (3.106) и (3.115) находим, что

$$\left(\ell_{\rm P}^{(5)}\right)^3 = \left(\ell_{\rm P}\right)^2 \frac{G^{(5)}}{G} = \left(\ell_{\rm P}\right)^2 \ell_C.$$
 (3.118)

Решая относительно $\ell_{\rm C}$, получаем:

$$\ell_{\rm C} = \frac{\left(\ell_{\rm P}^{(5)}\right)^3}{\left(\ell_{\rm P}\right)^2}.$$
 (3.119)

Это соотношение позволяет рассмотреть возможность того, что мир на самом деле пятимерен, причем фундаментальная планковская длина $\ell_{\rm P}^{(5)}$ много больше, чем 10^{-33} см. Конечно, мы должны иметь $\ell_{\rm P} \sim 10^{-33}$ см. В конце концов, это четырехмерная планковская длина, значение которой дается формулой (3.90).

Современные ускорители исследуют расстояния вплоть до порядка 10^{-16} см. Если это или несколько меньшее расстояние является фундаментальной величиной, можно выбрать $\ell_{\rm p}^{(5)} \sim 10^{-18}$ см. Каким тогда будет ℓ_C ? При $\ell_{\rm p}^{(5)} \sim 10^{-18}$ см и $\ell_{\rm p} \sim 10^{-33}$ см из уравнения (3.119) находим, что $\ell_C \sim 10^{12}$ см $\sim 10^7$ км. Это более чем в двадцать раз превышает расстояние от Земли до Луны. Подобное большое дополнительное измерение было бы уже давно обнаружено.

Не сумев построить реалистичный сценарий в пяти измерениях, попробуем построить его в шести измерениях. При произвольном D из формул (3.108) и (3.116) получаем

$$\left(\ell_{\rm P}^{(D)}\right)^{D-2} = \left(\ell_{\rm P}\right)^2 \frac{G^{(D)}}{G} = \left(\ell_{\rm P}\right)^2 \left(\ell_C\right)^{D-4}.$$
 (3.120)

Находя отсюда l_C , имеем:

$$\ell_{\rm C} = \ell_{\rm P}^{(D)} \left(\frac{\ell_{\rm P}^{(D)}}{\ell_{\rm P}}\right)^{2/(D-4)}.$$
(3.121)

При D = 6 и $\ell_P \sim 10^{-18}$ из этой формулы получаем:

$$\ell_{\rm C} = \frac{\left(\ell_{\rm P}^{(6)}\right)^2}{\ell_{\rm P}} \sim 10^{-3}.$$
 (3.122)

Этот вариант значительно интереснее! Ближайщей величиной является микрон I мкм = 10^{-6} м, в одном миллиметре содержится 100 микрометров. Мы находим, что $\ell_C \sim 10$ мкм. Могут ли существовать дополнительные измерения длиной 10^{-3} см? Вы можете подумать, что это все еще слишком большая длина, так как даже микроскопы могут исследовать значительно меньшие расстояния. Кроме того, мы отмечали выше, что ускорители способны исследовать расстояния порядка 10^{-16} см. Как ни удивительно, но возможно, что «большие дополнительные измерения» существуют, просто мы их еще не видели.

Существование дополнительных измерений может быть подтверждено путем проверки закона, определяющего гравитационное притяжение двух масс. Для расстояний, много больших шкалы компактификации ℓ_C , мир эффективно четырехмерен, так что зависимость силы притяжения двух масс от расстояния между ними должна точно следовать ньютоновскому закону обратных квадратов. С другой стороны, для расстояний, меньших ℓ_C , мир эффективно многомерен, и закон притяжения должен измениться. Сила притяжения между двумя массами, ведущая себя как $1/r^4$, где r — расстояние, согласуется с существованием двух компактных дополнительных измерений.

Оказывается, что теорию гравитации на малых расстояниях очень трудно проверить; сила тяготения чрезвычайно мала, и паразитные кулоновские силы должны очень точно сокращаться. Руководствуясь главным образом возможным существованием больших дополнительных измерений, физики поставили эксперимент по проверке закона обратных квадратов на расстояниях меньших одного миллиметра. Проведенные к нашему времени эксперименты не обнаружили никакого отклонения от закона обратных квадратов вплоть до расстояний порядка одной десятой миллиметра. Это означает, что дополнительные измерения, если они существуют, должны иметь размер меньше одной десятой миллиметра. Как следует из (3.122), компактные измерения размером одна сотая миллиметра все еще согласуются с экспериментом.

Можно задать вопрос: как обстоит дело с иными, нежели гравитация, силами? Электромагнетизм был проверен до значительно меньших расстояний, и мы знаем, что кулоновская сила очень точно подчиняется закону обратных квадратов. Например, резерфордовское рассеяние альфа-частиц на нуклонах подтверждает, что закон обратных квадратов выполняется до 10^{-11} см. Так как зависимость кулоновской силы от расстояния должна была бы измениться на расстояниях, меньших размера дополнительных измерений, этот факт, по-видимому, исключает большие дополнительные измерения. Однако, возможность существования таких измерений сохраняется в теории струн, где наш пространственный мир мог бы быть трехмерной гиперплоскостью, пересекающей дополнительные измерения. Эта гиперплоскость называется D3-браной. Такая D3-брана есть D-брана с тремя пространственными измерениями.

Открытые струны обладают замечательным свойством, заключающимся в том, что их концы должны всегда оставаться прикрепленными к D-бранам. Во множестве феноменологических моделей, построенных в рамках теории струн, именно флуктуации открытых струн порождают знакомые лептоны, кварки и калибровочные поля, включая максвелловское калибровочное поле. Отсюда следует, что эти поля прикреплены к D-бранам и *не ощущают* наличия дополнительных измерений. Если максвелловское поле живет на D-бране, силовые линии электрического поля, идущие от заряда, остаются на D-бране и не переходят в дополнительные измерения, при любой шкале расстояний закон силы не меняется. Замкнутые струны не ограничены D-бранами, и поэтому тяготение, возникаюшее из замкнутых струн, ощущает наличие дополнительных измерений.

Хотя планковская длина ℓ_P является важным масштабом длины в четырех измерениях, если существуют большие дополнительные измерения, то истинно

фундаментальная планковская длина была бы намного больше, чем эффективная четырехмерная планковская длина. Возможность существования больших дополнительных измерений кажется несколько неестественной — почему дополнительные измерения должны быть много больше, чем фундаментальный масштаб длины? Однако это не новая проблема, а скорее проблема большой иерархии под другой маской. Мы замечали ранее, что физика частиц сталкивается с загадочной проблемой иерархии между планковской массой и массами элементарных частиц. В сценарии с большими дополнительными измерениями постулируется, что иерархия возникает из-за дополнительных измерений, которые много больше фундаментального масштаба длины. В любом случае поистине волнующий факт состоит в том, что современные экспериментальные данные не исключают существования больших дополнительных измерений. Открытие больших дополнительных измерений которые много существования больших дополнительных измерений больших дополнительных измерений.

Однако возможно, что дополнительные измерения хоть и много больше, чем $\ell_P \sim 10^{-33}$ см, но все же достаточно малы. Если пространство-время имеет десять измерений, то, полагая D = 10 и $\ell_P^{(10)} \sim 10^{-18}$ см в формуле (3.121), получим $\ell_C \sim 10^{-13}$ см, т.е. расстояние, намного меньшее, чем те, которые можно проверить с помощью настольных гравитационных экспериментов. Дополнительные измерения такого или меньшего размера следует искать, используя ускорители частиц.

Задачи

Задача 3.1. Лоренцевская ковариантность для движения в электромагнитных полях^{† 4)}

Уравнение движения под действием силы Лоренца (3.5) можно записать в релятивистской форме как

$$\frac{dp_{\mu}}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{ds}, \qquad (1)$$

где p_{μ} — 4-импульс. Проверьте явно, что это уравнение воспроизводит (3.5), когда μ — пространственный индекс. Как выглядит (1), если μ = 0? Имеет ли это уравнение смысл? Является ли (1) калибровочно-инвариантным уравнением?

Задача 3.2. Уравнения Максвелла в четырех измерениях

- (a) Покажите, что уравнения Максвелла без источников возникают из уравнения $T_{\mu\lambda\nu} = 0$.
- (б) Покажите, что уравнения Максвелла с источниками возникают из уравнения (3.34).

Задача 3.3. Электромагнетизм в трех измерениях

(a) Найдите редуцированные уравнения Максвелла в трех измерениях, начав с уравнений Максвелла и выражения для силы в четырех измерениях, используя рецепт (3.12) и предположив, что ни одно поле не может зависеть от направления координаты z.

^{4) †} Результаты задач с этим знаком будут использованы в дальнейшем.

(б) Повторите анализ трехмерного электромагнетизма, начав с лоренц-ковариантной формулировки. Примите $A^{\mu} = (\Phi, A^1, A^2)$, исследуйте $F_{\mu\nu}$, уравнения Максвелла (3.34) и релятивистскую форму силы, выведенную в задаче 3.1.

Задача 3.4. Электрические поля и потенциалы точечных зарядов

- (a) Покажите, что из уравнения Максвелла $T_{0ij} = 0$ для полей, независящих от времени, верно $\partial_i E_j \partial_j E_i = 0$. Объясните, почему это условие соответствует уравнению $\vec{E} = -\nabla \Phi$.
- (б) Покажите, что в случае *d* пространственных измерений потенциал Ф, создаваемый точечным зарядом *q*, задается формулой

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \frac{q}{\mathbf{r}^{d-2}}.$$

Задача 3.5. Вычисление дивергенции в многомерном пространстве

Пусть $\vec{f} = f(r)\hat{r}$ — векторная функция в \mathbb{R}^d . Здесь \hat{r} — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора, а r — расстояние от начала координат. Выведите формулу для $\nabla \cdot \vec{f}$, применяя теорему о дивергенции к сферической оболочке радиусом r и шириной dr. Проверьте, что для d = 3 полученный ответ сводится к $\nabla \cdot \vec{f} = f'(r) + 2f(r)/r$.

► Задача З.б. Аналитическое продолжение гамма-функции[†]

Рассмотрим определение гамма-функции комплексного аргумента z, действительная часть которого положительна:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \ e^{-t} t^{z-1}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Используя это уравнение, покажите, что при Re(z) > 0

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{1} dt \, t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^{n}}{n!} \right) + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n}}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_{1}^{\infty} dt \, e^{-t} t^{z-1}.$$

Объясните, почему правая часть этой формулы хорошо определена для Re (z) > -N - 1. Из этого следует, что правая часть является аналитическим продолжением $\Gamma(z)$ для Re (z) > -N - 1. Сделайте из этого вывод, что у гамма-функции есть полюса в точках 0, -1, -2, ..., и найдите значение вычета в точке z = -n (где n — положительное целое число).

Задача 3.7. Простые эффекты квантовой гравитации малы¹

(а) Чему равнялся бы «гравитационный» боровский радиус атома водорода, если бы электрон притягивался к протону силой гравитации? Стандартный боровский радиус равен $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 5,29 \times 10^{-9}$ см.

(б) В системе единиц, где G, c и \hbar положены равными единице, температура черной дыры равна $kT = 1/(8\pi M)$. Вставьте в эту формулу нужное количество степеней G, c и \hbar . Оцените температуру черной дыры массой в миллион солнечных масс. Чему равна масса черной дыры, температура которой равна комнатной температуре?

Задача 3.8. Энергия вакуума и связанная с ней шкала расстояний

Наблюдения показывают, что расширение Вселенной постоянно ускоряется, возможно, за счет плотности энергии вакуума. Плотность массы, связанная с этой энергией, примерно равна $\rho_{vac} = 7,7 \times 10^{-27}$ кг/м³. Ряд физиков пытаются понять ускорение Вселенной, вводя модификации в теорию гравитации, поэтому полезно знать, какие масштабы длин будут иметь значение. Если предположить, что единственными относящимся к делу параметрами являются ρ_{vac} , \hbar и с, то можно сконструировать параметр длины ℓ_{vac} , перемножив степени:

$$l_{
m vac} =
ho^{lpha}_{
m vac} \hbar^{eta} c^{\gamma}$$

Чему должны быть равны значения α , β , γ в приведенной выше формуле? Чему равно численное значение ℓ_{vac} ? Выразите ответ в мкм.

Задача 3.9. Движение планет в четырех и большем числе измерений

Рассмотрим движение планет по плоским круговым орбитам вокруг тяжелых звезд в нашем четырехмерном пространстве-времени и в пространствах с дополнительными пространственными измерениями. Мы хотим исследовать стабильность этих орбит по отношению к возмущениям, сохраняющим эти орбиты плоскими. Такое возмущение возникает, например, если метеорит, движущийся в плоскости орбиты, сталкивается с планетой и меняет ее угловой момент.

Покажите, что в то время, как в нашем четырехмерном мире круговые планетные орбиты стабильны относительно таких возмущений, они перестают быть стабильными в пяти или более измерениях. [Указание: может оказаться полезным использование эффективного потенциала для движения в поле центральных сил.]

Задача 3.10. Гравитационное поле точечной массы в компактифицированном пятимерном мире

Рассмотрим пятимерное пространство-время с пространственными координатами (x, y, z, w), которые *еще не* компактифицированы. Точечная масса M помещена в начале координат (x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0).

(a) Найдите гравитационный потенциал $V_g^{(5)}$. Запишите ответ через M, $G^{(5)}$ и $r = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^{1/2}$. [Указание: используйте $\Delta^2 V_g^{(5)} = 4\pi G^{(5)} \rho_m$ и теорему о дивергенции.]

Пусть теперь w становится окружностью радиусом a, при этом масса остается фиксированной, как показано на рис. 3.3.

(б) Запишите точное выражение для гравитационного потенциала $V_g^{(5)}(x, y, z, 0)$. Этот потенциал есть функция $R \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и может быть записан в виде бесконечной суммы.



Рис. 3.3. К задаче 3.10: точечная масса *M* в пятимерном пространстве-времени с одним компактным измерением

(в) Покажите, что при $R \gg a$ гравитационный потенциал принимает вид четырехмерного гравитационного потенциала, причем ньютоновская постоянная $G^{(4)}$ выражается через $G^{(5)}$ как в (3.115). [Указание: превратите бесконечную сумму в интеграл.]

Эти результаты подтверждают как соотношение между четырех- и пятимерными ньютоновскими постоянными при компактификации, так и возникновение четырехмерного потенциала на расстояниях, больших по сравнению с размером компактного измерения.

Задача 3.11. Точное выражение для гравитационного потенциала

Бесконечная сумма в задаче 3.10 может быть точно вычислена с помощью тождества:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\pi nx)^2} = \frac{1}{x} \operatorname{cth}\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (a) Найдите точную замкнутую форму выражения для гравитационного потенциала $V_q^{(5)}(x, y, z, 0)$ в компактифицированной теории.
- (б) Разложите этот ответ в ряд, чтобы вычислить главную поправку к гравитационному потенциалу в пределе $R \gg a$. Для какого значения R/a поправка будет порядка 1 %?
- (в) Используйте точный ответ из (а) для разложения потенциала при $R \ll a$. Найдите первые два члена разложения. Узнаете ли вы ведущее слагаемое?

Глава 4

Нерелятивистские струны

Полное понимание тонкостей теории релятивистских струн требует понимания основ физики нерелятивистских струн. У этих струн имеются масса и натяжение. Они могут совершать поперечные и продольные колебания. Мы рассматриваем уравнения движения нерелятивистских струн и развиваем Лагранжев формализм для описания их динамики.

4.1. Уравнения движения струны для случая поперечных колебаний

Начнем изучение струн с обсуждения поперечных колебаний натянутой струны. Направление вдоль струны называется продольным, а направления, ортогональные струне, называются поперечными. Для простоты обозначений мы рассматриваем случай, когда существует только одно поперечное направление. Обобщение на дополнительные поперечные направления очевидно.

Работая в плоскости (x, y), рассмотрим классическую нерелятивистскую струну, концы которой закреплены в точках (0, 0) и (a, 0). В статической конфигурации струна натянута вдоль оси x между этими двумя точками. В процессе поперечных колебаний координата x каждой точки струны не изменяется со временем, поперечное смещение точки задается ее координатой y. Направление вдоль x продольное, а вдоль y — поперечное. Чтобы описать классическую механику однородной струны, нам нужно знать две вещи: натяжение T_0 и массу, приходящуюся на единицу длины, μ_0 . Полная масса струны равна в этом случае $M = \mu_0 a$.

Кратко познакомимся с единицами. Натяжение имеет размерность силы, так что

$$[T_0] = [\mathsf{силa}] = \frac{[\mathsf{энергия}]}{|L|}. \tag{4.1}$$

Если вы растягиваете струну на бесконечно малое расстояние dx, ее натяжение при растяжении остается приблизительно постоянным, и изменение энергии равно совершенной работе $T_0 dx$. Полная масса струны не изменяется. Однако, если бы мы рассматривали релятивистсие струны, статическая струна с большим количеством энергии имела бы большую массу. Используя (4.1) и замечая, что энергия измеряется в единицах массы, умноженных на квадрат скорости света,



Рис. 4.1. Короткий отрезок классической нерелятивистской струны, колеблющейся в поперечном направлении. С учетом разных наклонов в двух концевых точках возникает суммарная вертикальная сила

а μ_0 — единица массы, приходящаяся на единицу длины, имеем

$$[T_0] = \frac{M}{L} [v]^2 = [\mu_0] [v]^2.$$
(4.2)

Для нерелятивистской струны оба параметра — T_0 и μ_0 — являются настраивамыми, и скорость в правой части полученного нами равенства может оказаться скоростью поперечных волн. Из предыдущей формулы следует, что натяжение струны T_0 и линейная плотность массы μ_0 у релятивистской струны могла бы быть связана соотношением $T_0 = \mu_0 c^2$, так как c — каноническая скорость в теории относительности. В главе 6 мы увидим, что это действительно правильное соотношение в случае релятивистской струны.

Возвращаясь к классической нерелятивистской струне, выведем уравнение движения. Рассмотрим малый отрезок статической струны от точки x до точки x + dx при y = 0. Поперечные колебания этого куска показаны на рис. 4.1. В момент времени t поперечное смещение струны равно y(t, x) в точке x + dx. Предположим, что колебания малы, подразумевая под этим то, что в любые моменты времени

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1,$$
 (4.3)

в любой точке струны. Это гарантирует, что поперечное смещение струны мало по сравнению с длиной струны. Длина струны изменяется мало, так что можно предположить, что натяжение T_0 остается неизменным.

Наклон струны в точках x и x + dx немного различен. Эта разница в наклоне означает, что натяжение струны изменяет направление и рассматриваемый отрезок струны подвергается действию результирующей силы. Для поперечных колебаний нам нужно вычислить только вертикальную составляющую этой силы; горизонтальная составляющая силы пренебрежимо мала (задача 4.1). Вертикальная составляющая силы в точке (x + dx, y + dy) с хорошей точностью равна T_0 , умноженному на производную $\partial y/\partial x$, вычисленную в точке x + dx, и направлена вверх; аналогично, вертикальная составляющая силы в точке (x, y) равна T_0 , умноженному на производную $\partial y/\partial x$, вычисленную в точке x, и направлена вниз. Поэтому суммарная вертикальная сила dF_{ν} равна

$$dF_{\nu} = T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \approx T_0 \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right. dx. \tag{4.4}$$

Масса dm этого отрезка струны, первоначально располагавшегося между точками x и x + dx, определяется произведением плотности массы μ_0 и dx. Согласно закону Ньютона, суммарная вертикальная сила равна массе, умноженной на ускорение, и направлена по вертикали. Поэтому можно просто записать

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu_0 dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$
 (4.5)

Сокращая dx с обеих сторон равенства и переставляя слагаемые, получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$
(4.6)

Мы пришли к волновому уравнению! Напомним, что для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (4.7)$$

параметр v_0 есть скорость волн. Таким образом, для поперечных волн, бегущих по натянутой струне, скорость v_0 этих волн равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}.$$
 (4.8)

Чем больше натяжение или чем легче струна, тем быстрее бегут волны.

4.2. Граничные и начальные условия

Так как уравнение (4.6) является дифференциальным уравнением в частных производных, содержащим производные по пространственным координатам и времени, для того, чтобы зафиксировать решения, мы должны в общем случае задать как граничные, так и начальные условия. Наиболее общими типами граничных условий являются граничные условия Дирихле и Неймана.

Для рассматриваемой струны граничные условия Дирихле задают положения концов струны. Например, если мы прикрепим каждый конец струны к стенке (рис. 4.2. слева), мы наложим граничные условия Дирихле

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0.$$
 (4.9)

А если мы прикрепим невесомую петлю к каждому концу струны и позволим петлям скользить по двум стержням без трения, мы наложим граничные условия Неймана. Для рассматриваемой струны граничные условия Неймана задают значения производной $\partial y/\partial x$ на концах струны. Так как петли невесомы и скользят



Рис. 4.2. Слева: струна, на концы которой наложены граничные условия Дирихле. Справа: струна, на концы которой наложены граничные условия Неймана

по стержням без трения, то производная $\partial y/\partial x$ должна обращаться в нуль в точках x = 0, x = a (рис. 4.2 справа). Если бы это было не так, то наклон струны к стержню был бы отличен от нуля, и компонента натяжения струны ускоряла бы летли в направлении оси y. Так как каждая петля невесома, их ускорение было бы бесконечно большим. Это невозможно, поэтому мы накладываем граничные условия Неймана

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x=0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x=a) = 0.$$
(4.10)

Такие условия применяются для струн, концевые точки которых могут свободно двигаться в направлении *y*.

Посмотрим, как решается волновое уравнение для конкретного набора начальных условий. Общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$y(t, x) = h_{+}(x - v_0 t) + h_{-}(x + v_0 t), \qquad (4.11)$$

где h_+ и h_- — произвольные функции *одной* переменной. Решение представляет суперпозицию двух волн: волны h_+ , бегущей направо, и волны h_- , бегущей налево. Предположим, что начальные значения y и $\partial y/\partial x$ в момент времени t = 0 известны. Используя формулу (4.11), видим, что эта информация приводит к уравнениям

$$y(0, x) = h_+(x) + h_+(x),$$
 (4.12)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,x) = -v_0 h'_+(x) + v_0 h'_-(x), \qquad (4.13)$$

где слева стоят известные функции, а штрихи означают производные по аргументам. Используя (4.12), можно выразить h_- через h_+ . Подставляя в (4.13), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для h_+ . Решив это уравнение (используя при этом подходящие граничные условия), мы вновь можем использовать (4.12), на этот раз, для того, чтобы найти явный вид h_- . При известных h_+ и h_- полное решение уравнений движения дается выражением (4.11).

4.3. Частоты поперечных колебаний

Предположим, что у нас есть струна, каждая точка которой колеблется в направлении оси y по синусоидальному закону с одинаковой фазой. Это означает, что y(t, x) имеет вид

$$y(t, x) = y(x) \sin (\omega t + \phi), \qquad (4.14)$$

где ω — угловая частота колебаний, а ϕ — постоянная общая фаза. Наша цель состоит в том, чтобы найти разрешенные частоты колебаний. Подставляя (4.14) в (4.6) и сокращая общий зависящий от времени множитель, находим:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0.$$
(4.15)

Это обычное дифференциальное уравнение второго порядка для профиля колебаний y(x). Разрешенные частоты отбираются этим уравнением в совокупности с граничными условиями. Так как ω , μ_0 и T_0 — постоянные, решение дифференциального уравнения выражается через тригонометрические функции. При граничных условиях Дирихле (4.9) имеем нетривиальные решения

$$y_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$
 (4.16)

где A_n — произвольные константы. Значение n = 0 не включено, так как ему соответствует неподвижная струна. Подставляя $y_n(x)$ в (4.15), находим разрешенные частоты ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0} \left(\frac{n\pi}{a}\right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$
 (4.17)

Таковы частоты колебаний в случае струны Дирихле. Струны скрипки являются струнами Дирихле. Чтобы настроить скрипичную струну на правильную частоту, следует подогнать натяжение струны. Чем больше натяжение, тем выше частота тона, что и предсказывается формулой (4.17).

В случае граничных условий Неймана (4.10), получаем пространственные решения

$$y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\pi nx}{a}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (4.18)

На этот раз решение с n = 0 менее тривиально: струна не колеблется, но перемещается как целое в положение $y(t, x) = A_0$. Частоты колебаний, которые находятся подстановкой (4.18) в (4.15), такие же, как в случае (4.17). Таким образом, частоты колебаний в случае задач Дирихле и Неймана одинаковы. Случай Неймана допускает одно дополнительное решение, не включенное в общую формулу (4.14): струна может перемещаться с постоянной скоростью. Действительно, y(t, x) = at + b с постоянными a и b удовлетворяет как граничным условиям, так и исходному волновому уравнению (4.7).

4.4. Более общий случай колеблющихся струн

Кратко обсудим некоторые задачи, тесно связанные с рассмотренными в предыдущем разделе. Например, мы можем считать, что плотность массы струны $\mu(x)$ является функцией положения. Форма волнового уравнения (4.6) не изменяется, так как оно было выведено на основании локальных соображений: исследовался малый отрезок струны, который выбирался настолько малым, чтобы плот-

ность массы этого отрезка была приближенно постоянной. Поэтому получаем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu(x)}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$
(4.19)

Для нормальных колебаний используем решения вида (4.14) и находим, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\mu(x)}{T_0} \,\omega^2 y(x) = 0. \tag{4.20}$$

Это уравнение уже не так легко решить, и детальный анализ возможен только, если задан конкретный вид $\mu(x)$. В задачах 4.3 и 4.7 рассматриваются некоторые конкретные распределения масс, и с помощью вариационного подхода можно получить верхнюю границу для наименьшей частоты колебаний.

До сих пор мы рассматривали только поперечно колеблющиеся струны. Струны допускают и продольные колебания, хотя для релятивистских струн это невозможно. Представьте струну, натянутую вдоль оси x, и рассмотрите бесконечно малый отрезок, который в состоянии равновесия имеет координаты (x, x + dx). Предположим далее, что в момент времени t концы этого бесконечно малого отрезка продольно смещаются от положения равновесия на расстояния $\eta(t, x)$ и $\eta(t, x + dx)$, соответственно. Если эти две величины не одинаковы, данный отрезок струны сжат или растянут. Для этой системы можно получить уравнение движения, аналогично тому, как это было сделано выше для поперечного движения. Однако, невозможно допустить, что натяжение постоянно вдоль струны. Для поперечных колебаний суммарная сила, действующая на малый отрезок струны, возникает из-за разных углов, под которыми одно и то же натяжение приложено к противоположным концам малого отрезка. Если струна всегда лежит вдоль оси x, то суммарная сила может действовать на отрезок, только если натяжение на двух концах различно. Поэтому волны вдоль продольно колеблющейся струны сопровождается волнами натяжения (задача 4.2).

4.5. Краткий обзор Лагранжевой механики

По определению, функция Лагранжа L системы равна

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}, \tag{4.21}$$

где T — кинетическая энергия системы, а V — ее потенциальная энергия. Для точечной частицы массой m, движущейся вдоль оси x под влиянием не зависящего от времени потенциала V(x), нерелятивистская функция Лагранжа принимает вид

$$L(t) = \frac{1}{2} m(\dot{x}(t))^2 - V(x(t)), \quad \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}. \quad (4.22)$$

Необходимо подчеркнуть, что эта функция Лагранжа есть неявная функция времени, так как не содержит зависимости от времени явно. Зависимость от времени возникает из-за зависимости от времени координаты x(t). Действие S определяется как

$$S = \int_{\mathcal{P}} L(t) dt, \qquad (4.23)$$

Ľ,

где \mathcal{P} — путь x(t) между начальным положением x_i в начальный момент времени t_i и конечным положением x_f в конечный момент времени $t_f > t_i$. Один из таких путей показан на рис. 4.3.

Действие — это функционал. В то время как в функцию одной переменной закладывается одно число — аргумент — на входе и она возвращает другое число на выходе, то в функционал на входе закладывается функция и возвращается число на выходе. Так как функция обычно определена своими значениями в бесконечно большом числе точек, функционал можно понимать как функцию от бесконечно большого числа переменных. В нашем случае аргументом функционала действия является функция x(t), которая определяет путь \mathcal{P} . Подчеркнем то, что является f



Рис. 4.3. Путь \mathcal{P} , представляющий возможное одномерное движение x(t) частицы в интервале времени $[t_i, t_f]$



Рис. 4.4. Путь x(t) и его вариация $x(t) + \delta x(t)$. Эта вариация $\delta x(t)$ обращается в нуль в точках $t = t_i$ и $t = t_j$
аргументом S, используя обозначение S[x]. Здесь [x] представляет всю функцию x(t). Запись S[x(t)] может привести к недоразумению, так как в этом случае предполагается, что S в конечном итоге является функцией t, что на самом деле не так.

В более явном виде, для любого пути x(t) действие задается выражением

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{x}(t))^2 - V(x(t)) \right\} dt.$$
 (4.24)

Очень важно подчеркнуть, что действие S можно вычислить для любого пути x(t), а не только для путей, соответствующих физически реализуемому движению. Именно потому, что S можно вычислить для всех путей, действие является очень мощным инструментом для нахождения тех путей, которые могут быть физически реализованы.

Принцип Гамильтона утверждает, что путь \mathcal{P} , который реально совершает система, это тот путь, для которого действие S стационарно. Более точно, если этот путь \mathcal{P} подвергнуть бесконечно малому изменению, в первом порядке по вариации пути действие останется неизменным. Если использовать функцию x(t), определяющую путь, то возмущенный путь имеет вид $x(t) + \delta x(t)$ (см. рис. 4.4). Для любого момента времени t вариация $\delta x(t)$ есть расстояние по вертикали между первоначальным путем и проварьированным путем. Как показано на рисунке, мы рассматриваем только такие вариации, для которых начальные и конечные положения $x_i = x_i(t)$ и $x_f = x(t_f)$ неизменны (концы закреплены):

$$\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0. \tag{4.25}$$

Вычислим теперь действие $S[x + \delta x]$ для возмущенного пути $x(t) + \delta x(t)$:

$$S[x + \delta x] = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \left(x(t) + \delta x(t) \right) \right)^2 - V(x(t) + \delta x) \right\} dt =$$
$$= S[x] + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ m\dot{x}(t) \frac{d}{dt} \delta x(t) - V'(x(t)) \delta x(t) \right\} dt + \mathcal{O}((\delta x)^2). \quad (4.26)$$

При переходе к последнему выражению мы разложили V в ряд Тейлора по x(t). Слагаемые порядка $(\delta x)^2$ и выше не нужны для того, чтобы определить, является ли действие стационарным или нет. Поэтому мы оставляем их неопределенными и обозначаем их вклад как $\mathcal{O}((\delta x)^2)$. Новое действие можно записать как $S + \delta S$, где δS линейно по δx . Из приведенного выше уравнения видно, что δS дается выражением

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ m \dot{x}(t) \ \frac{d}{dt} \ \delta x(t) - V'(x(t)) \delta x(t) \right\} dt.$$
(4.27)

Чтобы найти уравнения движения, следует переписать вариацию δS в виде $\delta S = \int dt \, \delta x(t) \{\ldots\}$. В частности, δx не должно стоять под знаком производной. Этого можно достичь с помощью интегрирования по частям:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m \dot{x}(t) \delta x(t) \right) - m \ddot{x}(t) \delta x(t) - V'(x(t)) \delta x(t) \right\} dt =$$

= $m \dot{x}(t_f) \delta x(t_f) - m \dot{x}(t_i) \delta x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t) \left(-m \ddot{x}(t) - V'(x(t)) \right) dt.$ (4.28)

Используя (4.25), приводим вариацию к виду

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t) \left(-m\ddot{x}(t) - V'(x(t)) \right) dt. \qquad (4.29)$$

Действие стационарно, если δS обращается в нуль для любой вариации $\delta x(t)$. Чтобы это было выполнено, выражение, на которое умножается $\delta x(t)$ под интегралом, должно обращаться в нуль:

$$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t)). \tag{4.30}$$

Это второй закон Ньютона, примененный к движению частицы в потенциальном поле V(x). Мы восстановили ожидаемое уравнение движения, потребовав стационарности действия в результате вариации.

Предположим, что мы определили путь, по которому движется частица от x_i до x_f . Как мы видели, в этом случае действие стационарно по отношению к вариациям, которые обращаются в нуль в начальный и конечный моменты времени. А стационарно ли действие по отношению к вариациям, которые изменяют начальное положение в момент t_i или конечное положение в момент t_f ? В общем случае ответ отрицательный. Это можно увидеть из уравнения (4.28). Слагаемое с интегралом обращается в нуль, но при $\delta x(t_f) \neq 0$ первое слагаемое в правой части не обращается в нуль, если только не обращается в нуль конечный импульс частицы $m\dot{x}(t_f)$. Аналогично обстоит дело при $\delta x(t_i) \neq 0$.

Принцип Гамильтона утверждает, что действие стационарно на классическом решении. Но классическое решение не всегда определяет минимум действия. Можно построить простой пример, в котором классическое решение является седловой точкой функционала действия, т. е. увеличивается для некоторых вариаций и уменьшается для других. Подробности см. в задаче 4.6.

4.6. Функция Лагранжа нерелятивистской струны

Вернемся к струне с постоянной плотностью массы μ_0 , постоянным натяжением T_0 и концами, находящимися в точках x = 0 и x = a. Ее кинетическая энергия есть просто сумма кинетических энергий всех бесконечно малых отрезков, из которых состоит струна. Поэтому можно написать:

$$T = \int_{0}^{a} \frac{1}{2} (\mu_0 \, dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2. \tag{4.31}$$

Потенциальная энергия возникает из той работы, которая должна быть выполенена, чтобы растянуть отрезки. Рассмотрим беконечно малый кусочек струны, занимающий положение от (x, 0) до (x + dx, 0) когда струна находится в равновесии. Если кусочек струны мгновенно растягивается от (x, y) до $(x + dx, y + dy)^{-1}$ (см. рис. 4.1), то изменение длины Δl бесконечно малого отрезка оказывается равным

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) \simeq dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \quad (4.32)$$

здесь мы использовали приближение малых колебаний (4.3) для того, чтобы отбросить члены более высокого порядка в разложении квадратного корня. Так как выполненная работа по растягиванию каждого бесконечно малого отрезка струны равна $T_0 \Delta l$, полная потенциальная энергия V равна

$$V = \int_{0}^{a} \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (4.33)$$

Функция Лагранжа струны равна T - V:

$$L(t) = \int_{0}^{a} \left[\frac{1}{2} \mu_{0} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^{2} - \frac{1}{2} T_{0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{2} \right] dx \equiv \int_{0}^{a} \mathcal{L} dx, \qquad (4.34)$$

где *L* носит название плотности Лагранжиана:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\,\mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\,T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \tag{4.35}$$

Поэтому действие для струны равно

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right].$$
(4.36)

В этом действии «путь» есть функция y(t, x), определенный в области пространства (t, x), указанной на рис. 4.5.



Рис. 4.5. Движение струны задается функцией y(t, x), определенной в области $t \in [t_i, t_f]$, $x \in [0, a]$. Граничные условия заданы в точках x = 0 и x = a для всех $t \in [t_i, t_f]$. Начальные и конечные условия заданы в моменты $t = t_i$ и $t = t_f$, соответственно, для всех $x \in [0, a]$

Чтобы найти уравнение движения, следует изучить вариацию действия при $y(t,x) \rightarrow y(t,x) + \delta y(t,x)$. Осуществляя варьирование так же, как и ранее, получаем:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial (\delta y)}{\partial x} \right].$$
(4.37)

Упражнение-разминка 4.1. Докажите формулу (4.37).

Производные не должны действовать на вариации¹⁾, поэтому перепишем каждое из двух слагаемых как полную производную за вычетом слагаемого, в котором производная не действует на вариацию:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \,\delta y \right) - \mu_0 \,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \,\delta y + \frac{\partial}{\partial x} \left(-T_0 \,\frac{\partial y}{\partial x} \,\delta y \right) + T_0 \,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \,\delta y \right]. \tag{4.38}$$

Производная по времени в первом слагаемом сводится к значениям в точках t_f и t_i , в то время как пространственная производная дает значения в концевых точках струны:

$$\delta S = \int_{0}^{a} \left[\mu_{0} \frac{\partial y}{\partial t} \, \delta y \right]_{t=t_{i}}^{t=t_{f}} dx + \int_{t_{i}}^{t_{f}} \left[-T_{0} \frac{\partial y}{\partial x} \, \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt - \int_{t_{i}}^{t_{f}} dt \int_{0}^{a} dx \left(\mu_{0} \frac{\partial^{2} y}{\partial t^{2}} - T_{0} \frac{\partial^{2} y}{\partial x^{2}} \right) \delta y. \quad (4.39)$$

¹⁾ Поскольку данное утверждение не имеет обоснования в тексте, проще воспользоваться перестановочностью операций варьирования и дифференцирования $\delta \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta y$. — *Прим. ред. перевода.* Наше окончательное выражение для δS содержит три слагаемых. Каждое должно независимо обращаться в нуль. Третье слагаемое, например, определяется движением струны в интервале $x \in (0, a)$ и $t \in (t_i, t_f)$. В данном случае граничные условия не ограничивают $\delta y(t, x)$, поэтому мы полагаем равным нулю коэффициент при δy и восстанавливаем наше исходное уравнение (4.6). Первое слагаемое в (4.39) определяется конфигурацией струны в моменты времени t_i и t_f . Если мы зафиксируем эти конфигурации, то по существу положим $\delta y(t_i, x)$ и $\delta y(t_f, x)$ равными нулю. Это влечет за собой обращение первого слагаемого в нуль. Мы сталкиваемся с аналогичной ситуацией при исследовании свободной частицы.

Второе слагаемое в (4.39) — новое. В явном виде оно равно

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(t,a) \delta y(t,a) + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(t,0) \delta y(t,0) \right] dt \qquad (4.40)$$

и относится к движению концов струны y(t, 0) и y(t, a). Нам нужно граничное условие для каждого из двух слагаемых в этом выражении. Пусть x_* обозначает координату x концевой точки: x_* может равняться либо нулю, либо a. Выбор концевой точки означает фиксацию значения x_* . Мы можем обратить каждое слагаемое в (4.40) в нуль, задав либо граничные условия Дирихле, либо граничные условия Неймана. Рассмотрим концевую точку x_* и связанное с ней слагаемое в (4.40). Если мы накладываем граничное условие Дирихле, положение выбранной конечной точки фиксируется во времени, и мы требуем, чтобы вариация $\delta y(t, x_*)$ обращалась в нуль. Из этого следует, что выбранное слагаемое обратится в нуль. С другой стороны, если мы предполагаем, что концевая точка может свободно перемещаться, то вариация $\delta y(t, x_*)$ ничем не ограничена. Слагаемое исчезает, если наложить условие:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x_*) = 0$$
, граничные условия Неймана. (4.41)

Граничные условия Дирихле можно записать в такой форме, что станет явным их сходство с граничными условиями Неймана. Если концевые точки струны фиксированы, производные по времени от координат концевых точек должны обращаться в нуль:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x_*) = 0$$
, граничные условия Дирихле. (4.42)

Сходство с (4.41) поразительно. Единственное отличие состоит в том, что пространственные производные превратились во временные. Если записать граничные условия Дирихле в этой форме, мы еще должны задать значения координат в фиксированных концевых точках.

Чтобы лучше понять физическое содержание граничных условий, рассмотрим импульс струны p_y . У импульса нет других компонент, так как мы предположили,

что движение ограничено только направлением вдоль оси *у*. Этот импульс есть просто сумма импульсов каждого бесконечно малого отрезка вдоль струны:

$$p_y = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \, dx. \tag{4.43}$$

Посмотрим, сохраняется ли он:

$$\frac{dp_{y}(t)}{dt} = \int_{0}^{a} \mu_{0} \frac{\partial^{2} y}{\partial t^{2}} dx = \int_{0}^{a} T_{0} \frac{\partial^{2} y}{\partial x^{2}} dx = T_{0} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a}, \quad (4.44)$$

где мы использовали волновое уравнение (4.6). Мы видим, что в случае граничных условий Неймана (4.41) импульс сохраняется, но для граничных условий Дирихле импульс в общем случае не сохраняется! Действительно, когда концы струны прикреплены к стенке, эта стенка постоянно действует на струну с определенной силой. Например, в низшей нормальной моде струны Дирихле суммарный импульс постоянно осциллирует между направлениями +y и -y.

Почему это важно для теории струн? Долгое время теоретики-струнники не принимали всерьез возможность граничных условий Дирихле. Казалось нефизическим, что импульс струны может перестать сохраняться. Кроме того, к чему же могли быть прикреплены концы открытой струны? Ответ таков: они прикреплены к D-бранам — новому типу динамических протяженных объектов. Если струна прикреплена к D-бране, то общий импульс может сохраняться: импульс, теряемый струной, поглощается D-браной. Детальный анализ поведения члена, индуцированного варьированием, на пространственных границах является рещающим для осознания возможности существования D-бран в теории струн.

Завершим эту главу более общим выводом уравнения движения струны. Для этого используем формулу (4.35), чтобы записать действие в виде

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \, \mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}\right). \tag{4.45}$$

Определим также величины

$$\mathcal{P}^{t} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \mathcal{P}^{x} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}, \quad (4.46)$$

где $y' = \partial y / \partial x$. Это просто производные \mathcal{L} по лервому и второму аргументам, соответственно. В явном виде они равны

$$\mathcal{P}^{t} = \mu_{0} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \mathcal{P}^{x} = -T_{0} \frac{\partial y}{\partial x}.$$
 (4.47)

Когда мы варьируем траекторию движения по δy , вариация действия определяется выражением

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \,\delta \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \,\delta y' \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mathcal{P}^t \delta \dot{y} + \mathcal{P}^x \delta y' \right]. \tag{4.48}$$

Используя стандартные преобразования, находим, что

$$\delta S = \int_{0}^{a} \left[\mathcal{P}^{t} \,\delta y \right]_{t=t_{i}}^{t=t_{f}} dx + \int_{t_{i}}^{t_{f}} \left[\mathcal{P}^{x} \,\delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt - \int_{t_{i}}^{t_{f}} dt \int_{0}^{a} dx \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{t}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^{x}}{\partial x} \right) \delta y.$$

$$(4.49)$$

Упражнение-разминка 4.2. Выведите формулу (4.49).

Упражнение-разминка 4.3. Детально сравните выражения (4.49) и (4.39).

Вариация (4.49) приводит к уравнению движения

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{t}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^{x}}{\partial x} = 0.$$
(4.50)

Используя (4.46), мы окончательно убеждаемся, что это есть волновое уравнение (4.6).

Заметим, что величина \mathcal{P}^t , задаваемая формулой (4.47), совпадает с плотностью импульса в уравнении (4.43). Это не случайность. В Лагранжевой механике производная функции Лагранжа по скорости равна сопряженному импульсу. Для струны \dot{y} играет роль скорости, так что \mathcal{P}^t , производная лагранжиана по \dot{y} , есть плотность импульса.

В дополнение к сказанному заметим, что для концов струны, которые могут свободно двигаться, обращение в нуль δS требует $\mathcal{P}^x = 0$. Как видно из (4.47), это граничное условие Неймана. Кроме того, \mathcal{P}^t обращается в нуль на концах струны в случае граничного условия Дирихле (4.42). Более детальный анализ этих фактов будет дан в главе 8, где будет показано, что \mathcal{P}^t и \mathcal{P}^x имеют интересную двумерную интерпретацию.

Задачи

Задача 4.1. Согласованность малых поперечных колебаний

Проведите заново анализ поперечных колебаний, рассмотренных в разделе 4.1. Вычислите горизонтальную силу dF_h , действующую на малый отрезок струны, показанный на рис. 4.1. Покажите, что для малых колебаний эта сила намного меньше, чем вертикальная сила dF_v , ответственная за поперечные колебания.

Задача 4.2. Продольные волны на струнах

Рассмотрите струну с однородной плотностью массы μ_0 , натянутую между точками x = 0 и x = a. Пусть равновесное натяжение равно T_0 . Продольные волны возможны тогда, когда натяжение струны изменяется при ее растяжении и сжатии. Для отрезка такой струны с равновесной длиной L малое изменение ΔL

115

длины струны сопровождается малым изменением натяжения ΔT , причем

$$\frac{1}{\tau_0} \equiv \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T}.$$

Здесь **т**₀ — коэффициент натяжения, измеряемый в единицах натяжения. Найдите уравнение, которому подчиняются малые продольные колебания такой струны. Найдите скорость волн.

Задача 4.3. Конфигурация из двух соединенных струн

Струна, натяжение которой равно T_0 , растянута от x = 0 до x = 2a. Часть струны $x \in (0, a)$ обладает постоянной плотностью массы μ_1 , а другая часть струны $x \in (a, 2a)$ — постоянной плотностью массы μ_2 . Рассмотрим дифференциальное уравнение (4.20), определяющее нормальные колебания.

- (a) Какие граничные условия должны быть наложены на y(x) и $\frac{dy}{dx}(x)$ в точке x = a?
- (б) Напишите условия, определяющие возможные частоты колебаний.
- (в) Рассчитайте наинизшую частоту колебаний такой струны, если $\mu_1 = \mu_0$ и $\mu_2 = 2\mu_0$.

Задача 4.4. Эволюция начальной конфигурации открытой струны

Струна, натяжение которой равно T_0 , плотность массы μ_0 и скорость волны $v_0 = \sqrt{T_0/\mu_0}$, растягивается от (x, y) = (0, 0) до (x, y) = (a, 0). Конечные точки струны фиксированы, а сама струна может колебаться в направлении оси y.

(a) Запишите y(t, x) как в (4.11), и докажите, что приведенные выше граничные условия Дирихле требуют выполнения равенств:

$$h_+(u) = -h_-(-u)$$
 и $h_+(u) = h_+(u+2a)$. (1)

Здесь $u \in (-\infty, \infty)$ — фиктивная переменная, являющаяся аргументом функций h_{\pm} .

Рассмотрите проблему начальных значений для этой струны. При t = 0 поперечное смещение тождественно равно нулю, и скорость равна

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = v_0 \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad x \in (0,a).$$
(2)

(б) Вычислите $h_+(u)$ для $u \in (-a, a)$. Определяет ли это $h_+(u)$ для всех u?

(в) Вычислите y(t, x) для x и $v_0 t$ в области D, определяемой двумя условиями

$$D = \{(x, v_0 t) \mid 0 \leq x \pm v_0 t < a\}.$$

Изобразите область D на плоскости с осями x и v_0t .

(г) В момент t = 0 середина струны x = a/2 имеет наибольшую скорость среди всех точек струны. Покажите, что скорость средней точки достигает нуля в момент времени $t_0 = a/(2v_0)$, и что $y(t_0, a/2) = a/12$. Это максимальное вертикальное смещение струны.

116

Задача 4.5. Движение замкнутой струны

Можно довольно аккуратно описать движение нерелятивистской замкнутой струны, рассматривая струну, замкнутую вокруг цилиндра большого охвата $2\pi R$, на котором она туго натянута за счет натяжения T_0 . Мы предполагаем, что струна может двигаться по поверхности цилиндра, не испытывая никакого трения. Пусть x — координата вдоль окружности, охватывающей цилиндр: $x \simeq x + 2\pi R$, и пусть y — координата, перпендикулярная x, изменяющаяся в направлении оси цилиндра. Как и ожидалось, общее решение поперечного движения дается формулой

$$y(x,t) = h_+(x-v_0t) + h_-(x+v_0t),$$

где $h_+(u)$ и $h_-(v)$ — произвольные функции одной переменной, причем $-\infty < u$, $v < \infty$. Масса струны, приходящаяся на единицу длины равна μ_0 , а $v_0 = \sqrt{T_0/\mu_0}$.

- (a) Установите условие периодичности, которому должна удовлетворять функция y(x, t) из-за отождествления, примененного к координате x. Покажите, что производные $h'_+(u)$ и $h'_-(v)$ являются периодическими функциями u и v, соответственно.
- (б) Покажите, что можно записать:

$$h_{+}(u) = \alpha u + f(u), \quad h_{-}(v) = \beta v + g(v),$$
 (1)

где f и g — периодические функции, а α и β — константы. Получите соотношение между α и β , вытекающиее из (а).

(в) Вычислите общий момент импульса струны в направлении y. Coxpansercs ли он?

Задача 4.6. Стационарное действие: минимумы и седловины

Частицу, осуществляющую гармоническое движение вдоль оси x, можно использовать для демонстрации того, что классические решения не всегда являются минимумами функционала действия. Действие для такой частицы имеет вид

$$S[x] = \int_{0}^{t_{f}} L \, dt = \int_{0}^{t_{f}} dt \, \frac{1}{2} \, m(\dot{x}^{2} - \overline{\omega}^{2} x^{2}),$$

где m — масса частицы, $\overline{\omega}$ — частота колебаний, а движение происходит в интервале времени $t \in [0, t_f]$. Рассмотрим классическое решение $\overline{x}(t)$ и его вариацию $\delta x(t)$, обращающуюся в нуль в точках t = 0 и $t = t_f$.

(а) Покажите, что вариация действия точно равна

$$\delta S[\delta x] \equiv S[\overline{x} + \delta x] - S[\overline{x}] = \frac{1}{2} m \int_{0}^{t_{f}} dt \left[\left(\frac{d\delta x}{dt} \right)^{2} - \overline{\omega}^{2} x^{2} \right].$$

Примечательно, что δS зависит только от δx ; \bar{x} выпадает из ответа.

(б) Полный набор вариаций, обращающихся в нуль при t = 0 и $t = t_f$ принимает вид

$$\delta_n x = \sin \omega_n t$$
, rige $\omega_n = \frac{\pi n}{t_f}$ is $n = 1, 2, ..., \infty$.

Общая вариация δx , обращающаяся в нуль при t = 0 и $t = t_f$, есть линейная суперпозиция вариаций $\delta_n x$ с произвольными коэффициентами b_n . Вычислите $\delta S[\delta_n x]$ (ваш ответ должен обращаться в нуль при $\omega_n = \overline{\omega}$). Докажите, что

$$\delta S\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n\delta_n x\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\delta S[b_n\delta_n x].$$

(в) Покажите, что при $t_f < \pi/\overline{\omega}$ получается $\delta S[\delta_n x] > 0$ для всех $n \ge 1$. Объясните, почему это условие гарантирует, что классическое решение является минимумом действия. Покажите, что для $\pi/\overline{\omega} < t_f < 2\pi/\overline{\omega}$ все вариации $\delta_n x$ приводят к $\delta S > 0$, за исключением $\delta_1 x$, для которой $\delta S < 0$. В этом случае классическое решение является седловой точкой: существуют вариации, увеличивающие действие, и вариации, уменьшающие его. С ростом t_f число вариаций $\delta_n x$, уменьшающих действие, растет.

Задача 4.7. Вариационная задача для струны

Рассмотрим струну, растянутую от x = 0 до x = a с натяжением T_0 и плотностью массы $\mu(x)$, зависящей от координаты. Концы струны зафиксированы и могут колебаться в направлении оси y. Уравнение (4.20) определяет частоты колебаний ω_i и соответствующие профили $\psi_i(x)$ для этой струны.

(a) Определите вариационную процедуру, определяющую верхнюю границу наименьшей частоты колебаний ω_0 . (Это можно сделать примерно так же, как в квантовой механике, где энергия E_0 основного состояния системы с гамильтонианом H удовлетворяет условию $E_0 \leq (\psi, H\psi)/(\psi, \psi)$.) В качестве полезного первого шага рассмотрите скалярное произведение

$$(\psi_i,\psi_j)\equiv\int\limits_0^a\mu(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\,dx$$

и покажите, что оно обращается в нуль при $\omega_i \neq \omega_j$. Объясните, почему ваша вариационная процедура работает.

(б) Рассмотрите случай $\mu(x) = \mu_0 x/a$. Используйте вариационный принцип, чтобы найти простое ограничение на наинизшую частоту колебаний. Сравните с ответом $\omega_0^2 \simeq (18,956) T_0/(\mu_0 a^2)$, полученным прямым численным решением задачи на собственные значения.

Задача 4.8. Вывод уравнения Эйлера—Лагранжа¹

(a) Рассмотрите действие для динамической переменной q(t):

$$S = \int dt L(q(t), \dot{q}(t); t). \qquad (1)$$

Вычислите вариацию δS действия в результате вариации $\delta q(t)$ координаты. Используя условие $\delta S = 0$, найдите уравнение движения для координаты q(t) (уравнение Эйлера—Лагранжа).

(б) Рассмотрите действие динамической полевой переменной $\phi(t, \vec{x})$. Как указано, поле есть функция пространства и времени, и кратко может быть записано как пространственно-временная функция $\phi(x)$. Действие получается интегрированием плотности лагранжиана \mathcal{L} по пространству-времени. Плотность лагранжиана есть функция поля и пространственно-временных производных поля:

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)).$$
 (2)

Здесь $d^D x = dt dx^1 \dots dx^d$ и $\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$. Вычислите вариацию действия δS , полученную в результате вариации поля $\delta \phi(x)$. Используя условие $\delta S = 0$, найдите уравнение поля для $\phi(x)$ (уравнение Эйлера—Лагранжа).

Глава 5

Релятивистская точечная частица

Чтобы сформулировать динамику системы, мы можем рассмотреть либо уравнения движения, либо действие. В случае релятивистской точечной частицы довольно легко записать уравнения движения. Но действие настолько физично и геометрично, что имеет свою ценность. Важно то, что угадать уравнения движения релятивистской струны довольно трудно, действие же является естественным обобщением действия для релятивистской частицы, которое мы рассмотрим в этой главе. Завершим главу обсуждением заряженной релятивистской частицы.

5.1. Действие для релятивистской точечной частицы

В этом разделе мы узнаем, как сформулировать релятивистскую теорию, описывающую свободную точечную частицу массой m > 0. Свободная частица — это частица, на которую не действуют никакие силы. Наш анализ начнется с предварительных замечаний о единицах измерения и нерелятивистских частицах.

Для любой динамической системы действие S получается путем интегрирования лагранжиана по времени. Так как функция Лагранжа измеряется в единицах энергии, действие имеет размерность энергии, умноженной на время:

$$[S] = M \frac{L^2}{T^2} T = \frac{ML^2}{T}.$$
 (5.1)

Очевидно, что действие имеет ту же размерность, что и постоянная \hbar . Действительно, из вида квантово-механического соотношения неопределенностей следует, что произведение неопределенностей энергии и времени имеет порядок \hbar .

Действие S_{nr} свободной нерелятивистской частицы задается интегралом по времени от кинетической энергии:

$$S_{\rm nr} = \int L_{\rm nr} \, dt = \int \frac{1}{2} \, m v^2(t) \, dt, \quad v^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad v = |\vec{v}|. \tag{5.2}$$

Вытекающее из принципа Гамильтона уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0. \tag{5.3}$$

Свободная частица движется с постоянной скоростью, так как даже свободная *релятивистская* частица должна двигаться с постоянной скоростью. А откуда мы знаем, что в рамках теории относительности действие S_{nr} неправильно? Возможно, простейший ответ состоит в том, что это действие позволяет частице двигаться с *любой* постоянной скоростью, даже превышающей скорость света. В это выражение для действия скорость света даже не входит. Действие S_{nr} не может быть действием для релятивистской точечной частицы.

Построим теперь релятивистское действие S для свободной точечной частицы. Мы сделаем сначала разумное предположение о виде действия, и затем проверим, хорошо ли оно работает. Так как нас интересует релятивистская физика, удобно представить движение частицы в *пространстве-времени*. Путь, который проходит частица в пространстве-времени, называют *мировой линией* частицы. Даже неподвижная частица описывает линию в пространстве-времени, так как время течет всегда.

Физически приемлемое действие должно приводить к лоренц-инвариантным уравнениям движения. Сосредоточимся на этом вопросе. Предположим, что конкретный лоренцевский наблюдатель сообщает вам, что наблюдается частица, движущаяся в соответствии с уравнениями движения, или попросту говоря, частица совершает физическое движение. Утверждение одного наблюдателя, что конкретное движение допустимо, будет несовместимо с утверждением другого наблюдателя, что то же самое движение запрещено. Если уравнения движения выполняются в заданной лоренцевской системе, они должны выполняться и во всех лоренцевских системах. Это и означает лоренцевскую инвариантность уравнений движения.

Мы собираемся записать выражение для действия и потратить время на получение уравнений движения. Существует ли способ наложить на действие какое-то ограничение, которое приведет к лоренц-инвариантности уравнений движения? Да, такой способ существует. Мы требуем, чтобы действие было лоренцевскием скаляром: для каждой мировой линии частицы все лоренцевские наблюдатели должны получить одно и то же значение для действия. Так как у действия нет пространственно-временных индексов, такое требование представляется разумным. Если действие является лоренцевскием скаляром, уравнения движения будут лоренцинвариантными. Причина ясна и проста. Предположим, что один лоренцевский наблюдатель утверждает, что для заданной мировой линии действие стационарно по отношению ко всем вариациям мировой линии. Так как все лоренцевские наблюдатели согласны относительно величины действия для любой мировой линии, они все согласятся, что действие стационарно вдоль обсуждаемой мировой линии. Согласно принципу Гамильтона, мировая линия, приводящая к стационарности действия, удовлетворяет уравнениям движения, и поэтому все лоренцевские наблюдатели согласятся, что на обсуждаемой мировой линии выполняются уравнения движения.

Лоренцевская инвариантность накладывает сильные ограничения на возможные формы действия. На самом деле есть веские основания беспокоиться, что лоренцевская инвариантность — слишком сильное ограничение на действие. Например, нерелятивистское действие в (5.2) не инвариантно по отношению к галилеевым бустам $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \vec{v}_0$ с постоянной \vec{v}_0 . Такой буст есть преобразование симметрии, так как уравнение движения (5.3) инвариантно относительно этого преобразования. Аналогично может случиться так, что уравнения движения релятивистской точечной частицы являются лоренц-инвариантными, а действие — нет. К счастью, в нашем случае этого усложнения не возникает; мы найдем удовлетворительное полностью лоренц-инвариантное действие.

Упражнение-разминка 5.1. Вычислите явно вариацию действия S_{nr} по отношению к бусту Галилея.

Мы знаем, что действие есть функционал: на входе он берет множество функций, описывающих мировую линию, и выдает на выходе число S. Представьте частицу, пространственно-временная траектория которой исходит из начала ко-



Рис. 5.1. Пространственно-временная диаграмма с несколькими мировыми линиями, связывающими начало координат с пространственно-временной точкой (ct_f, x_f)

ординат и заканчивается в точке (ct_f, \vec{x}_f) . Как показано на рис. 5.1 (где для простоты используется одно пространственное измерение), существует много возможных мировых линий между начальной и концевой точками. Примем, что для любой мировой линии все лоренцевские наблюдатели вычисляют одно и то же значение для действия. Пусть Р обозначает одну мировую линию. Какая величина, связанная с Р, приводит к согласию всех лоренцевских наблюдателей? Это пройденное собственное время! Все лоренцевские наблюдатели приходят к согласию относительно интервала времени, который прошел по часам, закрепленным на движущейся частице. Таким образом, примем, что действие для мировой линии \mathcal{P} пропорционально связанному с ней собственному времени.

Чтобы сформулировать эту идею количественно, вспомним, что

$$-ds^{2} = -c^{2}dt^{2} + (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2}, \qquad (5.4)$$

и что бесконечно малый промежуток собственного времени равен ds/c (для времениподобных интервалов верно $ds^2 = (ds)^2$). Интеграл от (ds/c) по пути \mathcal{P} равен собственному времени, прошедшему при движении по \mathcal{P} . Так как собственное время измеряется в единицах времени, то для того, чтобы получить единицы действия, нам нужен дополнительный множитель, измеряемый в единицах энергии или единицах массы, умноженной на квадрат скорости. Этот множитель должен быть лоренц-инвариантным для того, чтобы сохранить лоренцевскую инвариантность частично угаданного нами выражения (ds/c). В качестве массы можно использовать массу частицы m, а в качестве скорости — фундаментальную в теории относительности скорость c. Мы не можем использовать скорость частицы, так как она не лоренц-инвариантна. Тогда получается множитель mc^2 , что, по существу, есть энергия покоя частицы. Поэтому угаданный нами вид действия есть интеграл от $mc^2(ds/c) = mc \, ds$. Конечно, остается еще возможность, что потерян безразмерный численный фактор. Оказывается, что нужно дописать знак минус, но единичный коэффициент правилен. Таким образом, мы утверждаем, что правильный вид действия есть

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds. \tag{5.5}$$

Действие равно взятой со знаком минус энергии покоя, умноженной на собственное время. Такое действие выглядит настолько просто, что это может вызвать замешательство. Вероятно, оно совершенно непохоже на те виды действия, которые вам приходилось видеть ранее. Суть этого выражения можно сделать более понятным, если выбрать конкретного лоренцевского наблюдателя и выразить действие как интеграл от лагранжиана по времени. С помощью (5.4) мы связываем *ds* c *dt*:

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$
 (5.6)

Это позволяет записать действие (5.5) как интеграл по времени:

$$S = -mc^{2} \int_{t_{i}}^{t_{f}} dt \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}, \qquad (5.7)$$

где t_i и t_f — значения времени в начальной и концевой точках мировой линии \mathcal{P} , соответственно. Из этого варианта записи действия мы видим, что релятивистская функция Лагранжа для точечной частицы равна

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$
 (5.8)

Функция Лагранжа равна взятой со знаком минус энергии покоя, умноженной на релятивистский множитель, она не имеет смысла при v > c, потому что перестает быть действительной. Таким образом обеспечивается выполнение постулата о существовании максимальной скорости. Этого можно было ожидать; собственное время определено только для движения со скоростью, не превышающей скорости света. Все пути, показанные на рис. 5.1, представляют движение, при котором скорость частицы никогда не превышает скорости света. Действие определено только для таких путей. В любой точке любого из этих путей касательный вектор к пути является времениподобным.

Чтобы показать, что эта такая Лагранжа приводит к знакомой физике в пределе малых скоростей, разложим квадратный корень, предполагая, что $v \ll c$. Удерживая только первый член разложения, имеем:

$$L \simeq -mc^{2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^{2}}{c^{2}}\right) = -mc^{2} + \frac{1}{2}mv^{2}.$$
 (5.9)

Постоянные слагаемые в функции Лагранжа не влияют на уравнения движения, так что слагаемое $(-mc^2)$ можно не учитывать. Оставшееся существенное слагаемое совпадает с нерелятивистской функцией Лагранжа (5.2), показывая, что возникает знакомая нерелятивистская физика. Это также подтверждает правильность нормировки релятивистского лагранжиана.

Канонический импульс есть производная функции Лагранжа по скорости. Используя (5.8), находим, что

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -mc^2 \left(-\frac{\vec{v}}{c^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
(5.10)

Это как раз равно релятивистскому импульсу точечной частицы. А что можно сказать о гамильтониане? Он определяется формулой

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
(5.11)

где результат записан как функция скорости частицы, а не как функция ее импульса. Как и ожидалось, ответ совпадает с релятивистской энергией точечной частицы (2.68).

Таким образом, мы воспроизвели знакомую физику релятивистской частицы, исходя из довольно необычного действия (5.5). Это действие очень элегантно: оно кратко записывается через геометрическую величину *ds*, имеет ясную физическую интерпретацию — полное собственное время, — и явно гарантирует лоренц-инвариантность той физики, которую описывает.

5.2. Репараметризационная инвариантность

В этом разделе мы исследуем важное свойство действия точечной частицы (5.5). Это свойство называется репараметризационной инвариантностью. Чтобы вычислить интеграл в выражении для действия, наблюдатель может найти полезным параметризовать мировую линию частицы. Репараметризационная инвариантность действия означает, что величина действия не зависит от выбранной для его расчета параметризации. Так и должно быть, потому что действие (5.5) определено, на самом деле, независимо от любой параметризации: интегрирование можно осуществить, разбив \mathcal{P} на маленькие куски и складывая значения *mc ds* для каждого куска. Чтобы осуществить это, вообще не требуется никакой параметризации. Однако на практике мировые линии описываются как параметризованные линии, и для вычисления действия *ucnonьзуется* параметризация.



Рис. 5.2. Мировая линия, полностью параметризованная au. Все пространственно-временные координаты x^{μ} являются функциями au

Мы параметризуем мировую линию \mathcal{P} точечной частицы, используя параметр τ (рис. 5.2). Этот параметр должен строго возрастать при движении по мировой линии от начальной точки x_i^{μ} до концевой точки x_f^{μ} , но в остальном произволен. Когда τ меняется в интервале [τ_i, τ_f], он описывает движение частицы. Иметь параметризацию мировой линии означает знать выражения для координат x^{μ} как функций τ :

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau). \tag{5.12}$$

Мы требуем также, чтобы

$$x_i^{\mu} = x^{\mu}(\tau_i), \quad x_f^{\mu} = x^{\mu}(\tau_f).$$
 (5.13)

Заметим, что параметризуется даже временная координата x^0 . Обычно мы используем время как параметр и описываем положение как функцию времени. Именно так мы делали в разделе 5.1. Но если мы хотим рассматривать пространственные и временную координаты на равном основании, мы должны параметризовать их все с помощью дополнительного параметра τ .

Запишем заново подынтегральное выражение ds, используя параметризованную мировую линию. Для этого используем $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ и запишем

$$ds^{2} = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} (d\tau)^{2}. \qquad (5.14)$$

Для любого движения, скорость которого не превышает скорости света, $ds^2 = (ds)^2$ и поэтому действие (5.5) принимает вид

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau.$$
 (5.15)

Это явный вид действия в случае, когда путь параметризован параметром τ .

Мы уже видели, что значение действия одинаково для всех лоренцевских наблюдателей. Зафиксируем теперь наблюдателя, который вычислил действие,

используя некоторый параметр τ . Будет ли значение действия зависеть от выбора параметра? Ответ отрицательный. Наблюдатель может репараметризовать мировую линию, при этом значение действия не изменится. Таким образом, *S репараметризационно-инвариантно*. Чтобы увидеть это, предположим, что мы изменили параметр τ на τ' . Тогда, следуя цепному правилу,

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}.$$
(5.16)

Подставляя в (5.15), получаем:

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau'} \frac{dx^{\nu}}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau} d\tau = -mc \int_{\tau_i'}^{\tau_f'} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau'} \frac{dx^{\nu}}{d\tau'} d\tau'. \quad (5.17)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и (5.15), и это доказывает репараметризационную инвариантность. Поскольку проверка этого свойства довольно проста, мы говорим, что действие (5.15) *явно* репараметризационно-инвариантно.

5.3. Уравнения движения

Переходим к уравнениям движения. Для этого следует вычислить вариацию δS действия (5.5), когда мировая линия частицы варьируется на малую величину $\delta x^{\mu}(\tau)$. Здесь τ — произвольный параметр вдоль пути. Тогда вариация равна просто

$$\delta S = -mc \int \delta(ds). \tag{5.18}$$

Вариацию ds можно найти из более простой вариации $ds^2 = (ds)^2$. Варьируя обе стороны равенства (5.14), находим:

$$2ds\,\delta(ds) = -2\eta_{\mu\nu}\,\delta\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\tau}(d\tau)^{2}.$$
(5.19)

Множитель 2 в правой части возникает из-за того, что, в силу симметрии, вариации $dx^{\mu}/d\tau$ и $dx^{\nu}/d\tau$ дают один и тот же результат. Так как вариация скорости равна производной по времени от вариации координаты,

$$\delta\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) = \frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau}.$$
(5.20)

Используя этот результат и несколько упрощая (5.19), получаем

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{ds} d\tau = \frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau} \frac{dx_{\mu}}{ds} d\tau, \qquad (5.21)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ было использовано для опускания индекса у dx^{ν} . Теперь можно продвинуться вперед и проварьировать действие с помощью (5.18):

$$\delta S = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau} \frac{dx_{\mu}}{ds} d\tau.$$
 (5.22)

Здесь мы ввели явно пределы интегрирования: τ_i и τ_f обозначают значения параметра в начальной и концевой точках мировой линии, соответственно. Заметим, что

$$mc \frac{dx_{\mu}}{ds} = mu_{\mu} = p_{\mu}, \qquad (5.23)$$

и в результате вариация действия принимает вид

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau} p_{\mu} d\tau.$$
 (5.24)

Чтобы получить уравнение движения, нужно под интегралом получить δx^{μ} , умноженное на некоторое выражение; тогда уравнение движения просто соответствует обращению этого выражения в нуль. Так как под интегралом все еще имеются производные, действующие на δx^{μ} , перепишем подынтегральное выражение как полную производную плюс дополнительные слагаемые, содержащие δx^{μ} как множитель:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\delta x^{\mu} p_{\mu} \right) - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \, \delta x^{\mu}(\tau) \, \frac{dp_{\mu}}{d\tau}. \tag{5.25}$$

Первый интеграл дает $\delta x^{\mu}p_{\mu}$, вычисленное на границах мировой линии. Поскольку мы зафиксировали координаты на границах, это выражение обращается в нуль. Так как второе слагаемое должно исчезать при произвольных $\delta x^{\mu}(\tau)$, мы получаем уравнение движения

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau} = 0. \tag{5.26}$$

Очевидно, что $dp^{\mu}/d\tau$ также обращается в нуль. Уравнение движения утверждает, что импульс p_{μ} (или p^{μ}) точечной частицы постоянен вдоль ее мировой линии. Это утверждение является параметризационно независимым. Если функция постоянна вдоль линии, ее производная по любому параметру, используемому для описания линии, будет обращаться в нуль. Действительно, параметр τ в (5.26) произволен. Мы получили это уравнение, варьируя релятивистское действие для точечной частицы, и используя полностью релятивистские обозначения. **Упражнение-разминка 5.2.** Покажите, что уравнение (5.26) подразумевает, что

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau'} = 0 \tag{5.27}$$

верно для произвольного параметра $\tau'(\tau)$. Что должно выполняться для $d\tau'/d\tau$ для того, чтобы τ' было таким же хорошим параметром, как и τ ?

Если мы параметризуем мировую линию собственным временем *s*, то из уравнения (5.26) будет следовать, что

$$\frac{dp^{\mu}}{ds} = 0. \tag{5.28}$$

Используя (5.23), чтобы записать импульс как производную координаты по собственному времени, находим, что

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} = 0. \tag{5.29}$$

Это эквивалентная форма записи уравнения движения. Постоянство dx^{μ}/ds означает, что на пути, размеченном равными интервалами собственного времени, изменение x^{μ} между любой последовательной парой мсток одинаково. Уравнение (5.29) не выполняется, когда *s* заменяется на произвольный параметр τ . Это понятно: произвольный параметр означает произвольно расположенные метки, так что изменение x^{μ} между любой последовательной парой новых меток не обязано быть одинаковым. На самом деле можно записать чуть более сложный вариант уравнения (5.29), использующий произвольный параметр и явно репараметризационно-инвариантный (задача 5.2).

Мы достигли цели этого раздела: показали, как вывести физически ожидаемое уравнение движения (5.26) (или (5.29)), исходя из лоренц-инвариантного действия (5.5). Как объяснено выше, гарантируется, что результирующее уравнение движения лоренц-инвариантно. Проверим это явно.

Под действием лоренцевских преобразований координаты x^{μ} преобразуются так, как указано в уравнении (2.38): $x'^{\mu} = L^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$, где постоянные величины $L^{\mu}_{\ \nu}$ можно рассматривать как элементы обратимой матрицы L. Так как ds одинаково во всех лоренцевских системах отсчета, уравнение движения в штрихованных координатах имеет вид (5.29) с заменой x^{μ} на x'^{μ} :

$$0 = \frac{d^2 x^{\prime \mu}}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2} \left(L^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \right) = L^{\mu}_{\ \nu} \frac{d^2 x^{\nu}}{ds^2}.$$
 (5.30)

Поскольку матрица L обратима, из этого уравнения следует уравнение (5.29). Иными словами, если уравнение движения выполняется в штрихованных координатах, оно выполняется и в нештрихованных координатах. Это и есть лоренцинвариантность уравнений движения.

5.4. Электрически заряженная релятивистская частица

До сих пор мы рассматривали свободную точечную частицу, которая движется с постоянной 4-скоростью или постоянным 4-импульсом. Если точечная частица электрически заряжена и существуют нетривиальные электромагнитные поля, то на частицу будут действовать силы и ее 4-импульс не будет постоянным. На самом деле известно, каким образом импульс такой частицы изменяется со временем. Производная импульса по времени определяется уравнением (3.5) для силы Лоренца, релятивистская запись которой приведена в задаче 3.1:

$$\frac{dp_{\mu}}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{ds}.$$
(5.31)

Это довольно сложное уравнение, включающее напряженность поля и 4-скорость частицы. Так как ds возникает с обеих сторон равенства, это уравнение справедливо и для произвольного параметра τ :

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$
(5.32)

В духе предыдущего анализа можно попытаться записать действие, которое после вариации приводит к этому уравнению движения. Действие оказывается на удивление простым.

Так как максвелловское поле воздействует на точечную частицу вдоль ее мировой линии \mathcal{P} , мы должны добавить к действию (5.5) интеграл по \mathcal{P} , учитывающий взаимодействие частицы с электромагнитным полем. Интеграл должен быть лоренц-инвариантным, и форма (5.32) указывает, что интеграл содержит 4-скорость частицы. Поскольку 4-скорость содержит один пространственно-временной индекс, для того, чтобы получить лоренцевский скаляр, следует умножить ее на другую величину тоже с одним индексом. Естественным кандидатом является калибровочный потенциал A_{μ} . Мы утверждаем, что вклад взаимодействия в действии имеет вид

$$\frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} d\tau A_{\mu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau).$$
(5.33)

Здесь q — электрический заряд, а интеграл берется по мировой линии \mathcal{P} , параметризованной произвольным параметром τ . При каждом τ вектор $(dx^{\mu}/d\tau)$ скалярно умножается на калибровочный потенциал A_{μ} , вычисленный в точке $x(\tau)$, где находится частица. Подынтегральное выражение можно записать короче как $A_{\mu}dx^{\mu}$, сократив множители $d\tau$. В этой форме записи вклад взаимодействия явно не зависит от параметризации. Мировая линия частицы является одномерным пространством, и естественное поле, которое может взаимодействовать с частицей лоренц-инвариантным образом, это поле с одним индексом. Этот факт имеет интересное обобщение, когда мы рассматриваем движение струн. Поскольку струны одномерны, они при движении в пространстве-времени вычерчивают двумерные мировые листы. Мы увидим, что струны естественным образом взаимодействуют с полями, имеющими два лоренцевских индекса!

Полное действие для электрически заряженной точечной частицы получается добавлением слагаемого (5.33) к (5.5):

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds + \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_{\mu}(x) dx^{\mu}. \qquad (5.34)$$

Это лоренц-инвариантное действие просто и элегантно. Уравнение движения 5,32) получается из него, если положить равной нулю вариацию S в результате изменения δx^{μ} мировой линии частицы. Я не хочу лишать вас удовольствия самостоятельного вывода этого важного результата. Поэтому оставляю для задачи 5.5 варьирование действия (5.34) и вывод уравнения движения.

Задачи

Задача 5.1. Уравнение движения точечной частицы и репараметризация

Если путь точечной частицы параметризован собственным временем, уравнение движения имеет вид (5.29). Рассмотрим теперь новый параметр $\tau = f(s)$. Найдите наиболее общую функцию f, для которой из (5.29) следует

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}=0$$

Задача 5.2. Уравнение движения частицы при произвольной параметризации

Проварьируйте действие точечной частицы (5.15) и найдите *явно* репараметризационно-инвариантную форму уравнения движения свободной частицы.

Задача 5.3. Ток заряженной точечной частицы

Рассмотрите точечную частицу с зарядом q, движение которой в (D = d + 1)-мерном пространстве-времени описывается функциями $x^{\mu}(\tau) = [x^{0}(\tau), \vec{x}(\tau)]$, где τ — параметр. Движущаяся частица порождает электромагнитный ток $j^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$.

- (a) Используя дельта-функцию, запишите выражения для компонент тока $j^0(\vec{x}, t)$ и $j^i(\vec{x}, t)$.
- (б) Покажите, что ваши ответы в п. (а) возникают из интегрального представления

$$j^{\mu}(t, \vec{x}) = qc \int d\tau \, \delta^D \left(x - x(\tau) \right) \, \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}$$

Здесь $\delta^D(x) \equiv \delta(x^0)\delta(x^1)\dots\delta(x^d).$

► Задача 5.4. Функция Гамильтона нерелятивистской заряженной частицы[†]

Действие для нерелятивистской частицы с массой m и зарядом q, взаимодействующей с электромагнитным полем, получается заменой первого слагаемого в (5.34) для нерелятивистского действия свободной точечной частицы:

$$S=\int rac{1}{2} mv^2 dt + rac{q}{c} \int A_\mu(x) \, rac{dx^\mu}{dt} \, dt.$$

Мы выбрали время для параметризации второго интеграла.

- (a) Перепишите действие S через потенциалы (Φ, \vec{A}) и обычную скорость \vec{v} . Как выглядит функция Лагранжа?
- (б) Вычислите канонический импульс p, сопряженный с координатой частицы, и покажите, что он равен

$$ec{p}=mec{v}+rac{q}{c}ec{A}$$

(в) Постройте функцию Гамильтона заряженной частицы и покажите, что она равна

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \Phi.$$

Задача 5.5. Уравнения движения заряженной точечной частицы

Рассмотрите вариацию действия (5.34) в результате вариации $\delta x^{\mu}(x)$ траектории частицы. Вариация первого слагаемого в действии была получена в разделе 5.3. Проварьируйте второе слагаемое (записанное более явно в (5.33)) и покажите, что уравнение движения есть (5.32). Начните вычисления с объяснения того, почему

$$\delta A_{\mu} \big(x(\tau) \big) = rac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{
u}} \big(x(\tau) \big) \delta x^{
u}(\tau).$$

Задача 5.6. Динамика электромагнитного поля и заряженной частицы¹

Действие, описывающее динамику как электромагнитного поля, так и заряженной точечной частицы, дается выражением

$$S'=-mc\int\limits_{\mathcal{P}} ds+rac{q}{c}\int\limits_{\mathcal{P}} A_{\mu}(x)\,dx^{\mu}-rac{1}{4c}\int d^{D}xF_{\mu
u}F^{\mu
u}.$$

Здесь $d^{D}(x) = dx^{0}dx^{1} \dots dx^{d}$. Заметим, что действие S' есть гибрид: последнее слагаемое есть интеграл по пространству-времени, а два первых слагаемых — интегралы по мировой линии частицы. Первое слагаемое включено для полноты и не будет играть никакой роли. Получите уравнение электромагнитного поля при наличии заряженной частицы, вычислив вариацию S' под действием вариации δA_{μ} калибровочного потенциала. Ответом должно быть уравнение (3.34), а ток вычислен в задаче 5.3. [Указание: чтобы проварьировать $A_{\mu}(x)$ в действии, записанном в виде интеграла по мировой линии, полезно переписать это слагаемое с помощью дельта-функций в виде полного интеграла по пространствувремени.]

► Задача 5.7. Действие точечной частицы в искривленном пространстве

В разделе 3.6 мы рассматривали инвариантный интервал $ds^2 = -g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}$ в искривленном пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$. Движение точечной частицы массой *m* в искривленном пространстве описывается с помощью действия

$$S=-mc\int ds.$$

Покажите, что уравнение движения принимает вид

$$rac{d}{ds}igg[g_{\mu
ho}\;rac{dx^{\mu}}{ds}igg]=rac{1}{2}\;rac{\partial g_{\mu
u}}{\partial x^{
ho}}\;rac{dx^{\mu}}{ds}\;rac{dx^{
u}}{ds}$$

Уравнение движения называется уравнением геодезической. Когда метрика постоянна, символы Кристоффеля обращаются в нуль, и мы возвращаемся к знакомому уравнению движения свободной точечной частицы.

132

Глава 6

Релятивистские струны

Приступаем к изучению классической релятивистской струны, которая во многих отношениях значительно более элегантна, чем рассмотренная выше нерелятивистская струна. Воодушевленные примером точечной частицы, мы сосредоточимся на изучении поверхности, которую прочерчивает струна в пространстве-времени. В качестве действия мы используем собственную площадь этой поверхности — так называемое действие Намбу—Гото. Мы изучим репараметризационное свойство этого действия, установим натяжение струны и найдем уравнения движения. Для открытых струн мы сосредоточимся на движении концевых точек и введем понятие D-бран. Наконец, мы увидим, что единственным физически содержательным движением является движение в поперечном к струне направлении.

6.1. Функционал площади пространственных поверхностей

Действие для релятивистской струны должно быть функционалом траектории струны. Точно так же, как частица вычерчивает линию в пространстве-времени, струна вычерчивает поверхность. Линия, прочерченная частицей в пространствевремени, называется мировой линией. Двумерную поверхность, прочерченную струной в пространстве-времени, будем называть *мировым листом*. Например, замкнутая струна будет вычерчивать трубку, в то время как открытая струна будет вычерчивать полосу. Эти двумерные мировые листы показаны на пространственно-временной диаграмме рис. 6.1. Линии постоянного x^0 на этих поверхностях являются струнами. Это те объекты, которые видит наблюдатель в фиксированный момент времени x^0 . Они являются открытыми кривыми на поверхности, описывающей эволюцию открытой струны (слева), и замкнутыми кривыми для поверхности, описывающей эволюцию замкнутой струны (справа).

В главе 5 мы узнали, что действие точечной частицы пропорционально собственному времени, прошедшему вдоль мировой линии точечной частицы. Собственное время, умноженное на *c*, является лоренц-инвариантной «собственной длиной» мировой линии. Для струн мы определим лоренц-инвариантную «собственную площадь» мирового листа. Действие релятивистской струны пропорционально этой собственной площади и называется действием Намбу—Гото.

Функционалы площади полезны и в других приложениях: например, мыльная пленка, удерживаемая между двумя кольцами, автоматически образует поверх-



Рис. 6.1. Мировые листы, прочерчиваемые открытой струной (слева) и замкнутой струной (справа)



Рис. 6.2. Пространственная поверхность, натянутая между двумя кольцами. Если бы это была мыльная пленка, она заняла бы поверхность минимальной площади

ность минимальной площади, соединяющую одно кольцо с другим (рис. 6.2). Мировой лист струны и мыльный пузырь между двумя кольцами — очень разные типы поверхностей. В любой заданный момент времени лоренцевский наблюдатель будет видеть двумерную поверхность мыльной пленки целиком, но на двумерном мировом листе может видеть всего лишь одну струну. Представьте, что мыльная пленка неподвижна в какой-то лоренцевской системе отсчета. В этом случае время не имеет отношения к описанию пленки, и мы рассматриваем пленку как

134

пространственноподобную поверхность, а именно, поверхность, натянутую на два пространственных измерения. Поверхность существует во всей своей полноте в любой момент времени. Мы сначала рассмотрим знакомые поверхности, а затем приложим наши знания к случаю поверхностей в пространстве-времени.

Линия в пространстве может быть параметризована с помощью одного параметра. Поверхность в пространстве двумерна, поэтому требуется задать два параметра ξ^1 и ξ^2 . Если задана параметризованная поверхность, на ней можно нарисовать линии постоянных ξ^1 и ξ^2 . Эти линии покрывают поверхность сеткой. Будем называть объемлющим пространством мир, в котором живет двумерная поверхность. В случае мыльного пузыря в трех измерениях объемлющее пространство — это трехмерное пространство x^1 , x^2 и x^3 . Параметризованная поверхность описывается набором функций

$$\vec{x}(\xi^1,\xi^2) = \left(x^1(\xi^1,\xi^2),x^2(\xi^1,\xi^2),x^3(\xi^1,\xi^2)\right).$$
(6.1)

Пространство параметров определено интервалами изменения параметров ξ^1 и ξ^2 . Например, это может быть квадрат, если мы используем параметры $\xi^1, \xi^2 \in [0, \pi]$. Физическая поверхность есть образ пространства параметров при отображении $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ и является поверхностью в объемлющем пространстве. Мы можем, по меньшей мере локально, рассматривать параметры ξ^1 и ξ^2 как координаты на физической поверхности. Обратное к \vec{x} отображение переводит поверхность в пространство параметров. Локально это отображение взаимооднозначно и присваивает каждой точке пространства две координаты — значения параметров ξ^1 и ξ^2 .

Мы хотим вычислить площадь малого элемента поверхности в объемлющем пространстве. Начнем с рассмотрения бесконечно малого прямоугольника в пространстве параметров. Обозначим стороны прямоугольника $d\xi^1$ и $d\xi^2$. Мы хотим найти dA — площадь образа этого малого прямоугольника в объемлющем пространстве. Как показано на рис. 6.3, это площадь реального кусочка поверхности, соответствующей бесконечно малому прямоугольнику в пространстве параметров.



Рис. 6.3. Слева: малый прямоугольник, выделенный в параметрическом пространстве. Справа: поверхность в объемлющем пространстве с образом этого малого прямоугольника — параллелограммом, сторонами которого являются векторы $d\vec{v}_1$ и $d\vec{v}_2$ (изогнутой стрелкой указано увеличенное изображение параллелограмма)

Конечно, нет никаких оснований считать, что этот бесконечно малый кусочек поверхности в объемлющем пространстве является прямоугольником. В общем случае это параллелограмм. Назовем стороны этого параллелограмма $d\vec{v}_1$ и $d\vec{v}_2$. Они являются образами при отображении \vec{x} векторов ($d\xi^1$, 0) и (0, $d\xi^2$), соответственно. Мы можем записать их как

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2.$$
 (6.2)

Такая запись имеет смысл, например, $\partial \vec{x}/\partial \xi^1$ представляет скорость изменения пространственных координат по отношению к ξ^1 . Умножая эту скорость на длину $d\xi^1$ горизонтальной стороны малого прямоутольника в пространстве параметров, получаем вектор $d\vec{v}_1$, представляющий эту сторону в объемлющем пространстве. Вычислим теперь площадь dA. Используем формулу для площади параллелограмма

$$dA = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin\theta| = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2\theta}, \qquad (6.3)$$

где θ — угол между векторами $d\vec{v}_1$ и $d\vec{v}_2$. Записывая это через скалярные произведения векторов, получим

$$dA = \sqrt{\left(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1\right)\left(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2\right) - \left(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2\right)^2}.$$
 (6.4)

Окончательно, используя (6.2), получим:

$$dA = d\xi^{1} d\xi^{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{1}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{1}}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{2}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{2}}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{1}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{2}}\right)^{2}}.$$
 (6.5)

Это — общее выражение для элемента площади параметризованной пространственной поверхности. Полный функционал площади А определяется формулой

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}.$$
 (6.6)

Интеграл берется в пределах, равных пределам изменения параметров ξ^1 и ξ^2 . Решением задачи о минимальной площади на пространственной поверхности является функция $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$, минимизирующая функционал A.

6.2. Репараметризационная инвариантность площади

Как мы видели, параметризация поверхности позволяет записать элемент площади в явном виде. Площадь поверхности, более того, площадь любого куска поверхности не должна зависеть от выбранной для вычислений параметризации. Именно это мы подразумеваем, когда говорим, что площадь должна быть репараметризационно-инвариантной.

Так как мы вскоре сопоставим действие релятивистской струны с определенным понятием собственной площади, оно также должно быть репараметризационно-инвариантным. Это означает, что мы будем свободны в выборе наиболее удобной параметризации без изменения лежащей в основе физики. Удачный выбор параметризации позволит нам изящным образом решить уравнения движения релятивистской струны.

Таким образом, репараметризационная инвариантность есть важное понятие, и его следует глубоко осознать. Для этого попробуем сделать его явным в наших формулах. Цель последующего анализа — показать, как это можно сделать.

Начнем с вопроса, является ли функционал площади A в (6.6) репараметризационно-инвариантным? Мы безусловно можем надеяться, что это так. Действительно, на первый взгляд он кажется явно репараметризационно-инвариантным. В конце концов, если кто-то репараметризует поверхность координатами $\tilde{\xi}^{1}(\xi^{1})$ и $\tilde{\xi}^{2}(\xi^{2})$, то все производные, возникающие согласно цепному правилу¹⁾, должным образом сокращаются.

(•) Упражнение-разминка 6.1. Проверьте предыдущее утверждение. Иными словами, покажите, что формула (6.6), записанная полностью через параметры с тильдой $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$, идентична формуле (6.6) при $\tilde{\xi}^1 = \tilde{\xi}^1(\xi^1)$ и $\tilde{\xi}^2 = \tilde{\xi}^2(\xi^2)$.

Однако приведенная выше репараметризация не является самой общей, так как в ней не происходит смешивания координат ξ^1 и ξ^2 . Предположим, однако, что мы совершаем репараметризацию $\tilde{\xi}^1(\xi^1,\xi^2)$ и $\tilde{\xi}^2(\xi^1,\xi^2)$. На этот раз можно проверить, используя довольно трудоемкие вычисления, что выражение (6.6) инвариантно по отношению к такой репараметризации. Однако, эта инвариантность интуитивно не совсем ясна. Чтобы сделать репараметризационную инвариантность (6.6) явной, мы должны иначе переписать функционал площади.

Начнем с наблюдения, как преобразуется мера интегрирования. Теорема о замене переменных из анализа утверждает, что

$$d\xi^{1} d\xi^{2} = \left| \det \left(\frac{\partial \xi^{i}}{\partial \tilde{\xi}^{j}} \right) \right| d\tilde{\xi}^{1} d\tilde{\xi}^{2} = \left| \det M \right| d\tilde{\xi}^{1} d\tilde{\xi}^{2}, \qquad (6.7)$$

где $M = [M_{ij}]$ — матрица, определенная как $M_{ij} = \partial \xi^i / \partial \widetilde{\xi}^j$. Аналогично,

$$d\tilde{\xi}^{1} d\tilde{\xi}^{2} = \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^{i}}{\partial \xi^{j}} \right) \right| d\xi^{1} d\xi^{2} = \left| \det \tilde{M} \right| d\xi^{1} d\xi^{2}, \qquad (6.8)$$

где $\widetilde{M} = [\widetilde{M}_{ij}]$ — матрица, определенная как $\widetilde{M}_{ij} = \partial \widetilde{\xi}^i / \partial \xi^j$. Комбинируя выражения (6.7) и (6.8), видим, что

$$|\det M| \cdot |\det \widetilde{M}| = 1. \tag{6.9}$$

¹⁾ Цепное правило — правило вычисления производной сложной функции: $\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$. — Прим. ред. перевода.

Рассмотрим теперь поверхность S в объемлющем пространстве, которая описывается функциями отображения $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$. Пусть ds — длина вектора $d\vec{x}$, касательного к поверхности. Тогда можно записать, что

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \tag{6.10}$$

Для поверхностей в пространстве, которые мы сейчас рассматриваем, не принято включать знак минус перед ds^2 (сравните с (2.21)). Вектор $d\vec{x}$ можно выразить через частные производные и дифференциалы $d\xi^1$, $d\xi^2$:

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{1}} d\xi^{1} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{2}} d\xi^{2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{i}} d\xi^{i}.$$
(6.11)

По повторяющемуся индексу i подразумевается суммирование по возможным значениям — 1 и 2. Возвращаясь к (6.10), имеем

$$ds^{2} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{i}} d\xi^{i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{j}} d\xi^{j}\right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{i}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^{j}} d\xi^{i} d\xi^{j}.$$
(6.12)

Это можно кратко записать в виде

$$ds^{2} = g_{ij}(\xi) \, d\xi^{i} \, d\xi^{j}, \qquad (6.13)$$

где $g_{ij}(\xi)$ определена как

$$g_{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j}.$$
 (6.14)

Величина $g_{ij}(\xi)$ известна как индуцированная метрика на S. Она называется метрикой, так как (6.13) имеет с точностью до знака форму уравнения (3.78), где мы ввели общее понятие метрики. Это метрика на S, так как с учетом того, что ξ^i играет роль координат на S, уравнение (6.13) определяет расстояния на S. Говорят, что метрика индуцирована, так как для определения расстояний на S она использует метрику окружающего пространства, в которое S вложена. Действительно, скалярное произведение, возникшее в (6.14), должно действовать в пространстве, куда вложена S, и поэтому заранее предполагается, что в этом пространстве существует метрика. У нас есть только два параметра ξ^1 и ξ^2 , так что полная матрица g_{ij} принимает вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}.$$
 (6.15)

Мы приходим к поистине удивительному результату! Детерминант g_{ij} есть в точности та величина, которая стоит под корнем в (6.6). Полагая

$$g \equiv \det(g_{ij}), \tag{6.16}$$

можно записать

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \tag{6.17}$$

Это элегантная формула для площади, выраженная через детерминант индуцированной метрики. Вместо того, чтобы пытаться понять репарамеризационную инвариантность (6.6), мы сосредоточимся на эквивалентном, но более простом выражении (6.17).

Теперь мы можем понять инвариантность площади на языке трансформационных свойств метрики g_{ij} . Ключ к пониманию находится в выражении (6.13). Квадрат элемента длины ds^2 — это геометрическое свойство вектора $d\vec{x}$, которое не должно зависеть от конкретной параметризации, использованной для его вычисления. Поэтому для любого другого набора параметров ξ и метрики $\tilde{g}(\xi)$ должно выполняться следующее равенство:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q.$$
(6.18)

Используем правила дифференцирования для того, чтобы выразить дифференциалы $d\xi$ через дифференциалы $d\xi$:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^{i} d\xi^{j} = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^{p}}{\partial \xi^{i}} \frac{\partial \tilde{\xi}^{q}}{\partial \xi^{j}} d\xi^{i} d\xi^{j}.$$
(6.19)

Так как этот результат верен для любого выбора дифференциалов $d\xi$, находим связь между метрикой в координатах ξ и $\tilde{\xi}$:

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}.$$
(6.20)

Используя \widetilde{M} , определенное в формуле (6.8), перепишем (6.20) как

$$g_{ij}(\xi) = \widetilde{g}_{pq} \widetilde{M}_{pi} \ \widetilde{M}_{qj} = (\widetilde{M}^{\mathsf{T}})_{ip} \widetilde{g}_{pq} \widetilde{M}_{qj}.$$
(6.21)

В матричной записи правая часть есть произведение трех матриц. Используя правило для определения детерминанта произведения и определение (6.16), получаем:

$$g = (\det \widetilde{M}^{\mathsf{T}})\widetilde{g}(\det \widetilde{M}) = \widetilde{g}(\det \widetilde{M})^2.$$
 (6.22)

Возьмем квадратный корень

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |\det \tilde{M}|, \qquad (6.23)$$

и получим свойство преобразования для квадратного корня из детерминанта метрики.

Наконец, мы готовы проверить репараметризационную инвариантность (6.17). Используя (6.7), (6.23) и (6.9), имеем

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 |\det M| \sqrt{\tilde{g}} |\det \tilde{M}| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}, \qquad (6.24)$$

что доказывает репараметризационную инвариантность функционала площади. Для тренированного глаза формула площади (6.17) явно репараметризационноинвариантна. Это означает, что если вы знаете, как преобразуется метрика, достаточно просто установить инвариантность. Не требуется никаких громоздких вычислений.

🕑 Упражнение-разминка 6.2. Рассмотрите уравнение $\partial \xi^i / \partial \xi^j = \delta^i_j$ и используйте цепное правило, чтобы доказать свойство матриц

$$M\dot{M} = 1. \tag{6.25}$$

Покажите, что верно и $\widetilde{M}M = 1$. Наконец, покажите, что det M det $\widetilde{M} = 1$. Этот результат сильнее доказанного в (6.9).

6.3. Функционал площади для пространственно-временных поверхностей

Перейдем к интересующему нас вопросу — случаю поверхностей в *пространстве-времени*. Эти поверхности получаются представлением истории струн в пространстве-времени, точно так же, как пространственно-временная мировая линия получается представлением истории частицы. В случае струн мы получаем двумерную поверхность, называемую мировым листом струны. Пространственно-временные поверхности, подобные мировым листам струн, не столь уж сильно отличаются от пространственных поверхностей, рассмотренных в предыдущенм разделе. Они двумерны и для их описания необходимо два параметра. Вместо того, чтобы обозначать эти параметры ξ^1 и ξ^2 , дадим им специальные обозначения — τ и σ .

Если задать обычные пространственно-временные координаты $x^{\mu} = (x^0, x^1, \dots, x^d)$, поверхность будет описываться отображающими функциями

$$x^{\mu}(\tau,\sigma), \tag{6.26}$$

которые отображают некоторую область в пространстве параметров (τ, σ) в пространство-время. Следуя стандартному соглашению, принятому в теории струн, мы слегка изменим обозначения. Обозначим вышеупомянутые отображающие функции заглавными буквами

$$X^{\mu}(\tau,\sigma), \tag{6.27}$$

Мы не изменяем смысла функций. Если задана фиксированная точка (τ, σ) в пространстве параметров, эта точка отображается в точку с пространственновременными координатами

$$(X^0(\tau,\sigma), X^1(\tau,\sigma), \ldots, X^d(\tau,\sigma)).$$
 (6.28)

Почему мы перешли к заглавным буквам Х? Предположим, мы использовали бы один и тот же символ для обозначения пространственно-временных координат



Рис. 6.4. Слева: пространство параметров (τ, σ) с выделенным малым прямоугольником. Справа: поверхность в объемлющем пространстве-времени, на которой показан образ малого прямоугольника — параллелограм, сторонами которого являются векторы dv_1^{μ} и dv_2^{μ}

и отображающих функций. Тогда мы могли бы все же различать их, записывая как x и $x^{\mu}(\tau, \sigma)$, но не имели бы удовольствия опускать аргументы (τ, σ) . С другой стороны, введя X^{μ} , мы можем отбросить аргументы (τ, σ) и все же знать, что имеем в виду отображающие функции струны. Мы будем называть X^{μ} координатами струны.

Как и ранее, параметры τ и σ можно рассматривать, по крайней мере локально, как координаты мирового листа. Отображение, обратное к X^{μ} , переводит мировой лист в пространство параметров и локально присваивает каждой точке на поверхности две координаты — значения параметров τ и σ . Специально создавая возможность неразберихи, физики используют также термин мировой лист для обозначения двумерного пространства параметров, образ которого при отображении X^µ дает нам... мировой лист! Если это не оговорено явно, мы будем сохранять использование термина мировой лист для пространственно-временной поверхности. На рис. 6.4 рассматривается открытая струна: слева мы видим поверхность пространства параметров, а справа — пространственно-временную поверхность. В этом пространстве параметров σ меняется в конечном интервале, а τ может изменяться от минус до плюс бесконечности. Грубо говоря, параметр au связан со временем на струнах (подробнее об этом ниже), а параметр σ связан с расположениями точек вдоль струн. Мировые линии концевых точек струны имеют постоянные значения σ , так что они параметризуются значениями τ . Когда течет τ , должно течь и время. Следовательно, по крайней мере в концевых точках,

$$\left. \frac{\partial X^0}{\partial \tau} \right|_{\text{концевая точка}} \neq 0.$$
 (6.29)

Будем считать, что это выполнено и для других значений σ .

Чтобы найти элемент площади, поступим так же, как в случае пространственной поверхности, используя на этот раз релятивистские обозначения. Ситуация показана на рис. 6.4. Малый прямоугольник со сторонами $d\tau$ и $d\sigma$ в пространстве параметров становится четырехсторонним элементом площади в пространствевремени. Этот четырехугольник натянут на векторы dv_1^{μ} и dv_2^{μ} . Далее,

$$dv_1^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} d\sigma,$$
 (6.30)

что аналогично полученной ранее пространственной формуле (6.2). Теперь можно использовать аналог (6.4) в качестве кандидата на элемент площади dA:

$$dA \stackrel{?}{=} \sqrt{(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2}, \qquad (6.31)$$

где точка означает релятивистское скалярное произведение. Использование этого произведения гарантирует, что элемент площади лоренц-инвариантен: это элемент собственной площади. Мы поставили знак вопроса над равенством, так как осталась невыясненной одна проблема. Даже если сейчас это не очевидно, знак выражения под корнем отрицателен. Чтобы иметь возможность извлечь квадратный корень, нужно поменять местами два слагаемых под корнем. Это изменение не нарушит лоренцевскую инвариантность. Совершая такую перестановку и используя (6.30), находим, что собственная площадь определяется формулой

$$A = \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X_{\mu}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X_{\mu}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} \, \frac{\partial X_{\nu}}{\partial \sigma}\right)}. \tag{6.32}$$

Переходя к релятивистским скалярным произведениям, имеем:

$$A = \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}.$$
 (6.33)

Чтобы понять, почему приведенный выше знак правилен, мы должны убедиться, что выражение под корнем положительно для любой точки на мировом листе струны.

Что локально характеризует пространственно-временную поверхность, заметаемую струной? Ответ довольно любопытен. Рассмотрим точку на мировом листе и множество всех векторов, касательных к поверхности в этой точке. Такие векторы образуют двумерное векторное пространство. Мы утверждаем, что в этом векторном пространстве существует базис, образованный двумя векторами, один из которых пространственноподобен, а другой времениподобен. Отсюда следует, что в каждой точке мирового листа одновременно существуют времениподобное и пространственноподобное касательные направления. Правда, есть одна оговорка: на каждой струне в фиксированный момент времени может существовать конечное множество исключительных точек, в которых касательные к мировому листу не включают времениподобного вектора. Как мы увидим, в этих точках струна движется со скоростью света.

Струна, которую мы пытаемся определить, не может иметь куски конечного размера, движущиеся со скоростью света. В этом случае струна содержала бы не только конечное, но и непрерывное множество точек, в которых касательные к мировому листу не включали бы времениподобных векторов. Представьте, на-



Рис. 6.5. Струна, расположенная вдоль направления *x* и движущаяся вдоль направления *y* со скоростью света. Такое движение не разрешено. Все касательные векторы к мировому листу в любой точке *P* струны являются либо пространственноподобными, либо нулевыми

пример, прямой кусок струны, лежащий вдоль оси x и движущийся со скоростью света вдоль оси у. В любой точке этой струны все векторы, касательные к мировому листу, являются пространственноподобными, за исключением нулевых векторов в одном определенном направлении. Чтобы увидеть это, рассмотрим рис. 6.5, на котором показана струна в разные близкие моменты времени. Касательные векторы в Р хорошо аппроксимируются векторами, соединяющими событие P с любым соседним событием P' на мировом листе. Так как P и P' это точки на одной и той же струне в разные моменты времени, пространственная часть касательного вектора выглядит на рисунке как стрелка, соединяющая Р и $P'^{(2)}$. Рассмотрим все стрелки, соединяющие P с точками на полуокружности, проведенной вокруг Р. Любое касательное направление на мировом листе в точке Р представляется одной из таких точек. Касательный к мировому листу вектор, связанный с PQ, очевидно пространственноподобен, так как P и Q происходят в один и тот же момент времени. Типичная касательная, связанная со стрелкой PR, все еще пространственноподобна: за прошедшее время P может попасть в R двигаясь со скоростью света, но чтобы попасть в R, она должна двигаться быстрее света. Все касательные направления пространственноподобны, за исключением связанного с PS, которое является нулевым. Это показывает, что в точке P не существует времениподобной касательной. Так как P — произвольная точка на исходном куске струны, нигде на этом куске не существует времениподобного вектора, касательного к мировому листу.

В каждой точке мирового листа существует пространственноподобное направление, которое легко представить: если сделать фотографию струны в какойто момент времени, то каждый касательный вектор, направленный вдоль длины струны, указывает в пространственноподобном направлении. Действительно, в вашей системе отсчета события, определяющие струну, одновременны, но пространственно разделены.

Чтобы понять необходимость во времениподобном векторе в регулярных точках на мировом листе, рассмотрим сначала мировую линию точечной частицы. Каса-

143

²⁾ Здесь P' — собирательное обозначение соседних событий, т. е. $P' = \{Q, R, S...\}$. — Прим. ред. перевода.

тельный вектор к мировой линии времениподобен. В каждой точке мировой линии этот касательный вектор может быть использован для описания лоренцевского наблюдателя, видящего частицу находящейся в покое. Пространственноподобный касательный к мировой линии вектор нефизичен, так как он описывает частицу, движущуюся со скоростью, большей скорости света. Ситуация со струнами более тонкая, так как нет способа сообщить, как на них движутся отдельные точки. Как будет полностью очевидно, струна не состоит из составных частей, положения которых мы можем проследить (исключение: мы способны проследить концевые точки открытой струны). Тем не менее, времениподобная касательная к мировому листу в данной точке струны позволяет описать мгновенного лоренцевского наблюдателя, видящего точку, находящуюся в покое. По соображениям непрерывности, если есть времениподобная касательная в одной точке, то их должно быть много. Каждая из этих времениподобных касательных определяет различных мгновенных лоренцевских наблюдателей, видящих точку в покое. Это совместимо с нашей неспособностью однозначно проследить движение точки на струне. Если мы наблюдаем струну в два близких момента времени, мы не можем сказать, куда какая точка движется, но мы должны уметь находить для каждой точки p струны в конечном положении некоторую точку p' струны в начальном положении, которая могла бы достичь p, двигаясь со скоростью, меньшей или равной скорости света с.

Одновременное существование времениподобных и пространственноподобных направлений в каждой точке на мировом листе является нашим критерием физического движения. Он гарантирует, что формула (6.33) имеет смысл.

Утверждение. Если в каждой точке *P* некоторой поверхности существуют одновременно времениподобное и пространственноподобное направления, величина под знаком квадратного корня в формуле (6.33) всегда положительна, т.е.

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0.$$
 (6.34)

Доказательство. Рассмотрим множество касательных векторов $v^{\mu}(\lambda)$ в точке P, полученных как

$$v^{\mu}(\lambda) = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} + \lambda \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}, \qquad (6.35)$$

где $\lambda \in (-\infty, \infty)$ — параметр. Так как $\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}$ — линейно независимые касательные векторы, то изменяя λ , мы получим с точностью до постоянного масштаба все касательные векторы в P, за исключением $\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}$, получающегося в пределе $\lambda \to \infty$ (рис. 6.6). Конкретные масштабы вектора несущественны при определении того, является ли вектор времениподобным или пространственно-подобным. Чтобы определить, является ли $v^{\mu}(\lambda)$ времениподобным или пространственно-странственноподобным, рассмотрим его квадрат:

$$v^{2}(\lambda) = v^{\mu}(\lambda)v_{\mu}(\lambda) = \lambda^{2}\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^{2} + 2\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^{2}.$$
 (6.36)


Рис. 6.6. Слева: множество касательных векторов $v(\lambda)$ в точке P на мировом листе. Справа: график $v^2(\lambda)$ как функция λ . В зависимости от значения λ , вектор $v(\lambda)$ может быть пространственно- или времениподобным

Производные от X являются просто числами, так что у нас возникает квадратичный полином по λ . Чтобы в P получились как времениподобные, так и пространственноподобные касательные векторы, величина $v^2(\lambda)$ должна при изменении λ принимать как отрицательные, так и положительные значения. Иными словами, уравнение $v^2(\lambda) = 0$ должно иметь два действительных корня. Для этого дискриминант квадратного уравнения $v^2(\lambda) = 0$ должен быть положителен. Из формулы (6.36) следует, что для этого требуется выполнение условия

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0, \qquad (6.37)$$

что в точности совпадает с условием (6.34), которое мы хотели доказать!

Так как всегда существуюте пространственноподобные касательные, график $v^2(\lambda)$ на рис. 6.6 должен содержать область, где $v^2(\lambda) > 0$. Рассмотрим точку P на мировом листе, где все касательные направления пространственноподобны, за исключением единственного нулевого направления. Тогда $v^2(\lambda) > 0$, за исключением единственного значения λ , для которого v^2 стремится к нулю. Уравнение $v^2(\lambda) = 0$ должно иметь единственный корень, и соответствующий дискриминант, равный нулю. Отсюда следует, что величина под знаком корня в действии (6.33), должна быть равна нулю в точке P. Любое возможное движение струны в P должно лежать на касательной к мировому листу в P. Так как движение вдоль пространственноподобных направлений нефизично, приемлемым остается только нулевой вектор: струна движется со скоростю света в P.

6.4. Действие для струны Намбу-Гото

Теперь, когда мы уверены, что функционал собственного действия в (6.33) корректно определен, можно ввести действие для релятивистской струны. Оно пропорционально соответствующей площади мирового листа. Чтобы получить требуемые единицы действия, нужно умножить функционал площади на подходящую константу.

Как и должно быть, функционал площади в (6.33) имеет размерность квадрата длины. Это вытекает из того, что X^{μ} имеет размерность длины, а каждое слагаемое под знаком квадратного корня содержит четвертую степень X. Единицы измерения τ и σ сокращаются. Каждое слагаемое под корнем содержит две производные по σ и две производные по τ . Их единицы сокращаются с единицами дифференциалов. Тем не менее, мы примем, что σ имеет размерность длины, а τ имеет размерность времени. Мы делаем это, предвосхищая связь между τ и временем, а также σ и положениями точек на струне. Итак,

$$[\tau] = T, \quad \sigma = L, \quad [X^{\mu}] = L, \quad [A] = L^2.$$
 (6.38)

Так как действие S должно иметь размерность ML^2/T , а площадь A имеет размерность L^2 , мы должны домножить соответствующую площадь на величину размерности M/T. Натяжение струны T_0 имеет размерность силы, а сила, деленная на скорость, имеет желаемые единицы M/T. Поэтому, чтобы получить величину с размерностью действия, мы можем умножить соответствующую площадь на T_0/c . Используя (6.33), мы полагаем действие струны равным

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}.$$
 (6.39)

Здесь $\sigma_1 > 0$ — некоторая константа, и мы ввели следующие обозначения для производных:

$$\dot{X}^{\mu} \equiv \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}, \quad X^{\mu} \equiv \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}.$$
 (6.40)

Конечно, мы еще не доказали, что символ T_0 в действии струны действительно точно интерпретируется как натяжение, но это будет сделано в разделе 6.7. Мы также обоснуем правильность общего отрицательного знака в выражении для действия. Действие S есть действие Намбу—Гото для релятивистской струны.

Критически важно, что это действие является репараметризационно-инвариантным. Можно действовать так же, как мы действовали с пространственными поверхностями, чтобы записать действие Намбу—Гото в явно репараметризационно-инвариантном виде. В этом случае имеем:

$$-ds^{2} = dX^{\mu} dX_{\mu} = \eta_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}.$$
(6.41)

Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского объемлющего пространства. Индексы α и β принимают два значения — 1 и 2, — и мы положили $\xi^1 = \tau$, $\xi^2 = \sigma$. Точно так же, как это делалось для пространственных поверхностей, определим индуцированную метрику $\gamma_{\alpha\beta}$ на мировом листе:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \; \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \; \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial X}{\partial \xi^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^{\beta}}. \tag{6.42}$$

Более явно матрица $\gamma_{\alpha\beta}$ (2 × 2) равна

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}$$
(6.43)

С помощью этой метрики можно записать действие Намбу—Гото в явно репараметризационно-инвариатном виде:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau \, d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}). \tag{6.44}$$

Анализ репараметризационной инвариантности для пространственных поверхностей, выполненный в разделе 6.2, без изменений переносится на данный случай. Действие (6.44) не только явно репараметризационно-инвариантно, оно записано в еще более компактной форме, чем (6.39). В этой форме действие Намбу—Гото легко обобщается для описания динамики объектов, имеющих большее число измерений, чем струны. Действие такого типа полезно как первое приближение к динамике D-бран.

6.5. Уравнения движения, граничные условия и D-браны

В этом разделе мы получим уравнения движения вариацией действия струны. При этом появится возможность обсудить различные граничные условия, которые могут быть наложены на концы открытой струны. Граничные условия Дирихле будут интерпретированы как следствие существования D-бран.

Начнем с записи действия Намбу—Гото (6.39) в виде двойного интеграла от плотности лагранжиана \mathcal{L} :

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \ L = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \ \mathcal{L}(\dot{X}^{\mu}, X^{\mu}), \tag{6.45}$$

где *L* определяется формулой

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X^{\mu}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}.$$
 (6.46)

Уравнения движения релятивистской струны можно получить, положив равной нулю вариацию действия (6.45). Вариация равна

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} \frac{\partial (\delta X^{\mu})}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial (\delta X^{\mu})}{\partial \sigma} \right], \qquad (6.47)$$

где мы использовали формулу

$$\delta \dot{X}^{\mu} = \delta \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial (\delta X^{\mu})}{\partial \tau}, \qquad (6.48)$$

и аналогичную формулу для δX^{μ} . Величины $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^{\mu}$ и $\partial \mathcal{L} / \partial X'^{\mu}$ будут часто нами использоваться, поэтому удобно ввести для них новые обозначения. Мы так уже делали для нерелятивистской струны в разделе 4.6. На этот раз имеем:

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_{\mu} - (X')^2 \dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}},$$
(6.49)

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_{\mu} - (\dot{X})^2 X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}.$$
(6.50)

Упражнение-разминка 6.3. Проверьте формулы (6.49) и (6.50).

Используя эти обозначения, получим, что вариация δS в (6.47) равна

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\delta X^{\mu} \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\delta X^{\mu} \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \right) - \delta X^{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (6.51)$$

Первое слагаемое в правой части является полной производной по τ , оно даст вклады пропорциональные $\delta X^{\mu}(\tau_f,\sigma)$ и $\delta X^{\mu}(\tau_i,\sigma)$. Так как течение au подразумевает течение времени, мы можем представить, что начальное и конечное состояние струны фиксированы, и ограничиться вариациями, для которых $\delta X^{\mu}(\tau_{f},\sigma) = \delta X^{\mu}(\tau_{i},\sigma) = 0$. Мы всегда будем предполагать такие вариации, так что об этих слагаемых можно забыть. Тогда вариация оказывается равной

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^{\mu} \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \right]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \, \delta X^{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} \right). \tag{6.52}$$

Так как второе слагаемое правой части должно исчезать для любых вариаций δX^{μ} движения, мы полагаем

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} = 0 \tag{6.53}$$

Это уравнение движения релятивистской струны, как открытой, так и замкнутой. Один только взгляд на определения (6.49) и (6.50) показывает, что это уравнение чудовищно сложно. Ключ к его решению лежит в репараметризационной инвариантности действия Намбу-Гото. Выбор умной параметризации может невероятно упростить работу.

Первое слагаемое в правой части формулы (6.52) имеет отношение к концевым точкам струны. На самом деле это ряд слагаемых, по два для каждого значения индекса μ . Точнее, список имеет вид

$$\int_{\tau_{1}}^{\tau_{1}} d\tau \left(\delta X^{0}(\tau,\sigma_{1}) \mathcal{P}_{0}^{\sigma}(\tau,\sigma_{1}) - \delta X^{0}(\tau,0) \mathcal{P}_{0}^{\sigma}(\tau,0) + \delta X^{1}(\tau,\sigma_{1}) \mathcal{P}_{1}^{\sigma}(\tau,\sigma_{1}) - \delta X^{1}(\tau,0) \mathcal{P}_{1}^{\sigma}(\tau,0) + \\ \vdots \\ + \delta X^{d}(\tau,\sigma_{1}) \mathcal{P}_{d}^{\sigma}(\tau,\sigma_{1}) - \delta X^{d}(\tau,0) \mathcal{P}_{d}^{\sigma}(\tau,0) \right).$$
(6.54)

Нам требуется граничное условие для *каждого* слагаемого в приведенном списке. Всего получается 2D = 2(d + 1) граничных условий.

Сосредоточимся на отдельном слагаемом, т. е. зафиксируем μ и выберем одну концевую точку. Пусть σ_* обозначает σ -координату концевой точки; σ_* может равняться нулю или σ_1 . Выбор концевой точки означает фиксацию значения σ_* . Как и ранее, существуют два естественных граничных условия, которые можно наложить в концевой точке. Первое — это граничное условие Дирихле, когда концевая точка струны закреплена в течение всего движения:

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}(\tau,\sigma_*)=0, \quad \mu\neq 0. \tag{6.55}$$

Поскольку время изменяется с течением τ (см. (6.29)), значение $\mu = 0$ должно быть исключено. Для пространственных направлений единственно возможными являются граничные условия Дирихле. Принимая, что постоянство по τ означает постоянство во времени, из уравнения (6.55) следует, что μ -координата выбранной концевой точки струны фиксирована во времени. Альтернативно, вместо того, чтобы требовать, чтобы обращалась в нуль производная по τ , мы можем просто задать постоянное значение для $X^{\mu}(\tau, \sigma_*)$. Если концевая точка струны закреплена, вариации в этой точке обращаются в нуль: $\delta X^{\mu}(\tau, \sigma_*) = 0$. Это гарантирует обращение в нуль соответствующего слагаемого в (6.54).

Второе возможное граничное условие — это условие свободных концов:

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}(\tau,\sigma_{*})=0. \tag{6.56}$$

Это условие, если необходимо, также может обратить в нуль соответствующее слагаемое в (6.54), оно называется условием свободных концов, так как не накладывает никаких ограничений на вариацию $\delta X^{\mu}(\tau, \sigma_*)$ координат струны в концевой точке. Координаты точки могут принимать какие угодно значения, необходимые для того, чтобы вариация действия обратилась в нуль. Граничное условие для свободной концевой точки должно быть применимо при $\mu = 0$:

$$\mathcal{P}_0^{\sigma}(\tau,\sigma_1) = \mathcal{P}_0^{\sigma}(\tau,0) = 0. \tag{6.57}$$

Для нерелятивистской струны граничное условие на свободных концах влечет за собой обращение в нуль \mathcal{P}^x при выборе граничного условия Неймана на координату струны (см. (4.46)). В конечном счете мы поймем (6.56) как граничное условие Неймана. Аналогично, будет показано, что граничное условие Дирихле (6.55) требует обращения в нуль \mathcal{P}^{τ}_{μ} на концах струны.

Граничные условия (6.55) и (6.56) могут быть наложены многими разными способами. Для каждого пространственного направления и в каждой концевой точке можно выбрать либо граничные условия Дирихле, либо условия Неймана. Так как замкнутые струны не имеют концевых точек, для них не требуется граничных условий.

Исследуем подробнее случай граничных условий Дирихле. Из изучения нерелятивистских струн ясно, что граничные условия Дирихле возникают, если концевые точки струны закреплены на каких-либо физических объектах. Рассмотрим, например, рис. 4.2. Левая струна прикреплена к двум точкам, правая струна может свободно скользить вверх и вниз в концевых точках: эти точки закреплены на одномерных линиях, и горизонтальное движение концевых точек запрещено. Объекты, на которых должны лежать концевые точки открытой струны, характеризуются размерностью, точнее, числом имеющихся у них пространственных измерений. Эти объекты называются D-бранами, где буква D означает Дирихле. Объекты, которые фиксируют концевые точки струны слева на рис. 4.2, нульмерны. Они называются D0-бранами. Линии, ограничивающие концевые точки струны справа на рисунке, одномерны. Их называют D1-бранами.

Dp-брана — это объект с p пространственными измерениями. Так как концевые точки струны должны лежать на Dp-бране, задается множество граничных условий Дирихле. Например, плоская D2-брана в трехмерном пространстве определяется одним условием, скажем, $x^3 = 0$ (рис. 6.7). Это означает, что D2-брана находится в плоскости (x^1, x^2). Граничное условие Дирихле применимо к координате струны X^3 , которая должна обращаться в нуль в концевых точках струны. Так как движение концевых точек открытой струны свободно вдоль направлений по бране, координаты X^1 и X^2 удовлетворяют свободным граничным условиям. Когда концевые точки открытой струны имеют свободные граничные условия вдоль всех пространственных направлений, это все еще D-брана, но на этот раз она называется *пространственно заполненной* D-браной. Эта D-брана простирается по всему пространству, и так как концевые точки открытой струны могут находиться где угодно на D-бране, они полностью свободны.

Для (квантовых) релятивистских струн совместность граничных условий Дирихле позволяет нам обнаруживать свойства D-бран. Они существуют в теории струн и являются физическими объектами, а не вводятся в теорию искусственно. Необязательно, чтобы D-браны имели бесконечную протяженность или были



Рис. 6.7. D2-брана, растянутая на плоскости (x^1, x^2) . Концевые точки открытой струны могут свободно двигаться по плоскости, оставаясь прикрепленными к ней. Во все моменты времени координата x^3 концевых точек должна обращаться в нуль. Это граничное условие Дирихле для координаты струны X^3

гиперплоскостями. Они обладают вычислимыми плотностями энергии и большим количеством примечательных свойств. Начиная с главы 15, мы будем детально изучать D-браны.

6.6. Статическая калибровка

Чтобы продвинуться в понимании действия для релятивистской струны, мы должны удобно параметризовать мировой лист. Мы можем свободно выбрать параметризацию — это следует из репараметризационной инвариантности действия струны. Репараметризационная инвариантность в теории струн аналогична калибровочной инвариантности в электродинамике. Уравнения Максвелла обладают симметрией относительно калибровочных преобразований, это позволяет использовать различные потенциалы A_{μ} для описания одних и тех же электромагнитных полей \vec{E} и \vec{B} . Подходящий выбор калибровки может помочь выявить физику явления. Аналогично, мы можем использовать различные координатные сетки на мировом листе для описания одного и того же движения струны. Подходящий выбор сетки может сильно упростить задачу. Хороший выбор параметризации был полезен даже для релятивистской точечной частицы — ее уравнение движения стало максимально простым, когда траекторию параметри-

В этом разделе мы обсудим только частичную параметризацию на мировом листе. Мы зафиксируем линии постоянного τ , связав τ с временной координатой $X^0 = ct$ в некоторой выбранной лоренцевской системе.



Рис. 6.8. Слева: полоса в пространстве параметров открытой струны. Вертикальный отрезок AB есть линия $\tau = t_0$. Справа: мировой лист открытой струны в объемлющем пространстве. Струна в момент времени $t = t_0$ есть пересечение мирового листа с гиперплоскостью $t = t_0$. В статической калибровке струна в момент времени $t = t_0$ есть образ отрезка AB при $\tau = t_0$

Рассмотрим гиперплоскость постоянного времени $t = t_0$ в объемлющем пространстве (рис. 6.8). Эта плоскость будет пересекать мировой лист вдоль кривой, которая для наблюдателей в выбранной нами лоренцевской системе будет являться струной в момент времени t_0 . Мы будем считать эту кривую кривой постоянного τ ; на самом деле, мы считаем, что это есть кривая $\tau = t_0$. Распространяя определение на все моменты времени t, мы будем считать, что для любой точки Q на мировом листе

$$\tau(Q) = t(Q). \tag{6.58}$$

Такой выбор τ -параметризации называется *статической калибровкой*, так как линии постоянного τ являются «статическими струнами» в избранной лоренцевской системе.

Мы не будем пытаться сейчас выбрать σ каким-либо сложным образом. Для открытой струны мы выберем один край мирового листа как кривую $\sigma = 0$, а другой край — как кривую $\sigma = \sigma_1$:

$$\sigma \in [0, \sigma_1],$$
 открытая струна. (6.59)

Мы нарисовали линии постоянной σ на поверхности вполне произвольно, имея в виду, конечно, что эти линии изменяются гладко, не пересекаются и согласуются с двумя кривыми, являющимися границей мирового листа (рис. 6.8). Построение эквипотенциальных линий σ эквивалентно заданию явной σ -параметризации для всех струн. В случае замкнутых можно действовать таким же образом, но с одной важной оговоркой: должно существовать отождествление в пространстве параметров (τ , σ). Направление σ должно быть превращено в окружность, так что пространство параметров (τ , σ) превратится в цилиндр. Это необходимо, потому что мировой лист замкнутой струны топологически эквивалентен цилиндру. Обозначая σ_c длину окружности σ , получаем отождествление Точки, которые отождествляются этим соотношением в пространстве параметров, отображаются в одну и ту же точку на мировом листе замкнутой струны. Замкнутые струны могут быть параметризованы, если использовать любой интервал σ длиной σ_c , например

$$\sigma \in [0, \sigma_c]$$
, замкнутая струна. (6.61)

Рассмотрим некоторые приложения нашего выбора τ . Можно записать формулу (6.58), как

$$X^{0}(\tau,\sigma) \equiv ct(\tau,\sigma) = c\tau, \qquad (6.62)$$

или просто

$$\tau = t. \tag{6.63}$$

Следовательно, совокупность координат струны X^{μ} можно описать как

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \{c\tau, \vec{X}^{\mu}(\tau,\sigma)\}, \qquad (6.64)$$

где вектор \vec{X} представляет пространственные координаты струны. Тогда находим:

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial X^{0}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right),$$

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial X^{0}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right).$$
(6.65)

Видно, что эта параметризация весьма аккуратно разделяет пространственные и временные компоненты.

Теперь, после того, как сделан выбор координат τ , можно провести простую проверку, чтобы подтвердить, что мы получили правильный знак под корнем в действии Намбу—Гото (6.39). Представим себе маленький кусочек струны, находящийся в покое. Так как этот кусочек не движется, $\partial \vec{X}/\partial t = 0$. Используя (6.65), получаем, что квадратный корень в (6.39) становится равным

$$\sqrt{0 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 (-c^2)}.$$
 (6.66)

Как и ожидалось, величина под знаком корня положительна. Если случится так, что вы забудете знак под корнем в действии струны, у вас есть хороший способ быстро это проверить.

6.7. Натяжение и энергия растянутой струны

Произведем теперь первый расчет с помощью действия Намбу—Гото — наш первый расчет в теории струн! Мы собираемся проанализировать растянутую релятивистскую струну. Конечные точки струны фиксированы в точках $x^1 = 0$ и $x^1 = a > 0$, с нулевыми значениями координат дополнительных пространственных измерений. Поэтому мы обозначим пространственные координаты концевых



Рис. 6.9. Струна длиной a располагается вдоль оси x^1 и параметризована как $X^1(\tau, \sigma) = f(\sigma)$

точек как $(0, \vec{0})$ и $(a, \vec{0})$. Включение единого (d - 1)-мерного вектора $\vec{0}$ указывает на то, что струна располагается только вдоль первой пространственной координаты.

Мы вычислим действие для этой растянутой струны, используя статическую калибровку $X^0 = c\tau$. Так как статическая струна натянута вдоль x от $x^1 = 0$ до $x^1 = a$, можно записать

$$X^{1}(\tau,\sigma) = f(\sigma), \quad X^{2} = X^{3} = \ldots = X^{d} = 0,$$
 (6.67)

где

$$f(0) = 0, \quad f(\sigma_1) = a,$$
 (6.68)

и функция $f(\sigma)$ непрерывна и возрастает на интервале $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Такая струна изображена на рис. 6.9. Функция f должна быть строго возрастающей для того, чтобы каждой точке вдоль струны можно было приписать единственную координату σ .

Отсюда теперь следует, что

$$\dot{X}^{\mu} = (c, 0, \vec{0}), \quad X^{\mu} = (0, f', \vec{0}),$$
 (6.69)

где $f' = df/d\sigma > 0$. Поэтому

$$(\dot{X})^2 = -c^2, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0.$$
 (6.70)

Теперь мы можем вычислить действие (6.39):

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{0 - (-c^2)(f')^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma}.$$
 (6.71)

Подынтегральное выражение является полной производной, так что

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \left(f(\sigma_1) - f(0) \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-T_0 a \right), \tag{6.72}$$

здесь мы использовали (6.68). Заметим, что значение действия не зависит от функции f, использованной для параметризации струны. Это явное подтверждение репараметризационной инвариантности действия струны.

Попробуем интерпретировать полученный результат. Для этого вспомним, что действие есть интеграл от функции Лагранжа L по времени. Когда кинетическая энергия обращается в нуль, L = -V, где V — потенциальная энергия. Поскольку струна статична, кинетическая энергия отсутствует, поэтому

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \, (-V). \tag{6.73}$$

Сравнивая это с выражением (6.72), заключаем, что

$$V = T_0 a. \tag{6.74}$$

Потенциальная энергия растянутой струны равна просто T_0a . Что это означает? Если натяжение статической струны равно T_0 , независимо от ее длины, T_0a есть количество энергии, которую нужно затратить, чтобы создать струну длиной a. Представьте, что вы начинаете с бесконечно малой струны и начинаете ее растягивать. Так как вы совершаете работу, вы передаете струне энергию, на самом деле, вы создаете энергию покоя или массу. Масса μ_0 на единицу длины равна

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{a} = T_0 \implies \mu_0 = \frac{T_0}{c^2}.$$
 (6.75)

Масса (или энергия покоя) возникает только потому, что у струны есть натяжение. Из-за этого релятивистскую струну часто называют безмассовой струной. Приведенное вычисление подтверждает отождествление T_0 с натяжением струны. Оно также подтверждает необходимость знака минус перед действием (6.39), в противном случае потенциальная энергия растянутой струны оказалась бы отрицательной.

Имеется один вопрос, мимо которого мы проскочили. Мы предполагали в проведенном анализе, что подстановка (6.67) удовлетворяет уравнениям движения струны. Если это не так, конфигурация не может быть физически реализована. Проверим, что уравнения движения удовлетворяются.

Во-первых, заметим, что, в силу (6.69), ни \dot{X}^{μ} , ни X^{μ} не зависят от τ . Поэтому ни \mathcal{P}^{τ} ни \mathcal{P}^{σ} также не зависят от τ (см. (6.49) и (6.50)). В этом случае уравнение движения (6.53) сводится к

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} = 0. \tag{6.76}$$

Это означает, что $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ не должно зависеть от σ . Возвращаемся опять к (6.50) и, используя (6.70), находим

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{c^2 X'_{\mu}}{\sqrt{c^2 (f')^2}} = -T_0 \frac{X'_{\mu}}{f'}.$$
(6.77)

Это выражение отлично от нуля только при $\mu = 1$ и в этом случае $X'_1 = f'$, так что \mathcal{P}^{σ} , действительно, не зависит от σ . Таким образом, уравнения движения удовлетворяются. Даже граничные условия удовлетворяются. Как мы видели в разделе 6.5, не существует условий, при которых можно проверить координаты струны, удовлетворяющих граничным условиям Дирихле в концевых точках. В нашей задаче это означает, что не существует дополнительных условий, которые необходимо проверить для любой из пространственных координат. Для нулевой координаты уравнение (6.57) требует свободного граничного условия $\mathcal{P}_0^{\sigma} = 0$, это выполняется в силу (6.77).

6.8. Действие в терминах поперечной скорости

Мы выбрали частичную параметризацию мирового листа, наложив условие $X^0 = ct = c\tau$. При таком выборе линия постоянного τ на мировом листе соответствует струне, которую видит выбранный нами лоренцевский наблюдатель при $t = \tau$.

Можем ли мы определить нечто вроде скорости струны? Так как $\vec{X}(\tau, \sigma)$ это пространственные координаты струны, то представляется, что производная $\partial \vec{X} / \partial \tau$ является самой близкой к скорости величиной. Однако такая скорость зависит от выбора σ . Например, ее направление определяется вдоль линий постоянного σ . Так как σ можно выбирать совершенно произвольно, то сохранение σ постоянной при взятии производной, очевидно, представляется не очень физически значимым!

Физически фиксация σ -параметризации струны — довольно хитроумная задача, так как струна — объект без субструктуры. При сравнении струны в два близких момента времени невозможно сказать, что точка движется от одного положения к другому. Чтобы говорить о точках на струне, необходима σ -параметризация, а благодаря репараметризационной инвариантности становится яс-



Рис. 6.10. Струна в момент времени t и плоскость, ортогональная струне в точке p. В момент времени t + dt струна пересекает плоскость в точке p'. Для определения поперечной скорости мы предполагаем, что p движется к p'

но, что такая параметризация неоднозначна. Отсюда следует, что продольное движение на струне не имеет физического смысла.

Все же существует инвариантная скорость, которую можно определить на струне. Однако это *поперечная скорость*. Мы рассматриваем движение струны в *пространстве* и представляем, что каждая точка на струне движется перпендикулярно струне (рис. 6.10). Рассмотрим струну в какой-то фиксированный момент времени t и отметим на ней точку p. Нарисуем гиперплоскость, ортогональную струне в точке p. Через бесконечно малый промежуток времени dt, в момент времени t + dt, струна сдвинется, но все еще будет пересекать плоскость, на этот раз в точке p'. Поперечную скорость можно определить, предположив, что точка p движется к p'. Чтобы определить такую скорость, не требуется никакой параметризации струны.

Говоря об эволюции струн, мы можем обсуждать две поверхности. Одна это мировой лист, поверхность в пространстве-времени, представляющая историю струны. Другая — это поверхность в пространстве. Такая пространственная поверхность образуется, если объединить все струны, наблюдаемые в разные моменты времени. Такая поверхность образовалась бы, если бы струна при движении оставляла бы след. Поперечная скорость \vec{v}_{\perp} в любой точке на струне — это вектор, ортогональный струне и касательный к пространственной поверхности струны. Так как \vec{v}_{\perp} является репараметризационно-инвариантным компонентом скорости струны, мы вправе ожидать, что это понятие войдет в выражение для действия струны.

Чтобы определить поперечную скорость \vec{v}_{\perp} , полезно рассмотреть единичный вектор, касательный к струне. Для этого мы введем сейчас параметр *s*, который более физичен, чем почти произвольный параметр σ : меру длины вдоль струны *s*. Рассмотрим фиксированную струну и определим $s(\sigma)$, как длину струны в интервале $[0, \sigma]$. Тогда, например, s(0) = 0, а $s(\sigma_1)$ будет длиной всей открытой струны. Так как ds — это длина бесконечно малого вектора $d\vec{X}$, определенного интервалом $d\sigma$ вдоль струны, имеем:

$$ds = |d\vec{X}| = \left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma}\right| |d\sigma|.$$
(6.78)

Рассмотрим теперь величину $\partial \vec{X} / \partial \sigma$, являющуюся скоростью изменения \vec{X} по отношению к длине струны. Прежде всего, заметим, что это единичный вектор:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|^2 \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1.$$
(6.79)

Производная $\partial \vec{X} / \partial \sigma$ берется при фиксированном t, так что она лежит вдоль линии постоянного t. Поскольку линии постоянного t и есть сами струны, про-изводная касательна к струне. Кроме того

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds},\tag{6.80}$$

следовательно, $\partial \vec{X} / \partial s$ также касателен к струне. Поскольку этот вектор имеет единичную длину,

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$$
 — единичный вектор, касательный к струне. (6.81)

Мы определили \vec{v}_{\perp} как компонент скорости $\partial \vec{X} / \partial \tau$ в направлении, перпендикулярном струне (см. рис. 6.11). Для того чтобы найти компоненту какоголибо вектора \vec{u} , перпендикулярную единичному вектору \vec{n} , нужно вычислить $\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Поэтому, используя наш единичный вектор $\partial \vec{X} / \partial s$ вдоль струны,



Рис. 6.11. Маленький кусок мирового листа, на котором показан вектор $\partial \vec{X} / \partial \tau$, поперечная скорость \vec{v}_{\perp} и единичный вектор $\partial \vec{X} / \partial s$

имеем

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}.$$
(6.82)

В будущем нам понадобится v_{\perp}^2 , после небольших расчетов получим

$$v_{\perp}^{2} = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^{2} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^{2}.$$
 (6.83)

Наша цель теперь — записать действие струны через \vec{v}_{\perp} и, если требуется, другие величины. Используя статическую калибровку $\tau = t$ и уравнения (6.65), находим:

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2, \quad (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}.$$
 (6.84)

С помощью этих соотношений мы упрощаем выражение под знаком квадратного корня в действии струны:

$$(\dot{X} \cdot X')^{2} - (\dot{X})^{2} (X')^{2} = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^{2} + \left[c^{2} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^{2}\right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^{2} = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^{2} \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^{2} + c^{2} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^{2}\right]. \quad (6.85)$$

Последние слагаемые этого выражения можно изящно выразить через v_{\perp}^2 . Используя (6.83), получаем:

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2), \qquad (6.86)$$

или

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \, \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}.$$
 (6.87)

Это простое выражение для плотности лагранжиана струны показывает, что \vec{v}_{\perp} является естественной динамической переменной. Кроме того, продольная ком понента скорости совершенно несущественна. Мы можем теперь записать действие как

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}.$$
 (6.88)

Здесь $ds/d\sigma = |\partial \vec{X} / \partial \sigma|$. Кроме того, мы не сокращаем $d\sigma$, так как обычно удобно иметь интеграл по фиксированной области параметра. Мы ввели *s* как функцию σ , равную длине струны при фиксированном времени. Согласно этому определению, длина *s* струны не постоянна, что позволяет нам сравнивать струны в различные моменты времени.

Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}.$$
 (6.89)

Эта формула была записана как интеграл по параметру длины специально для того, чтобы подробнее рассмотреть интерпретацию этого выражению. Для каждого бесконечно малого куска струны $T_0 ds$ является его энергией покоя. В результате лагранжиан есть интеграл по струне от (минус) энергии покоя, умноженной на локальный релятивистский множитель. В этой форме мы узнаем естественное обобщение лагранжиана (5.8) релятивистской частицы.

Действие (6.88) пригодно как для открытых, так и для замкнутых струн. Внешне оно кажется довольно простым, но все же приводит к довольно сложным уравнениям движения для всех случаев, кроме наиболее симметричных. Чтобы получить простые уравнения движения, мы должны сделать достаточно разумный выбор σ . Кроме того, для открытых струн нужно понять, как движутся концевые точки.

Завершим раздел упрощением выражений (6.49) и (6.50) для $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ и $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ в статической калибровке. Начнем с $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Знаменатель равен (6.87), а числитель упрощается с помощью соотношений (6.84). Находим

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \dot{X}^{\mu} - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) X^{\mu\prime}}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$
 (6.90)

Перенесем $ds/d\sigma$ из знаменателя в числитель, и превратим производные по σ в производные по s:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \dot{X}^{\mu} + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$
 (6.91)

Компонент $\mu = 0$ этой величины существенно упрощается. Так как $\dot{X}^0 = c$ и $\partial X^0 / \partial s = c \ \partial t / \partial s = 0$, находим

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}.$$
(6.92)

Почти аналогичное вычисление для $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ дает

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}^{\mu} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$
(6.93)

Упражнение-разминка 6.4. Докажите соотношение (6.93).

Из формулы (6.93) следует, что $\mathcal{P}^{\tau 0}$ и $\vec{\mathcal{P}}^{\tau}$ равны, соответственно

$$\mathcal{P}^{r_0} = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad \vec{\mathcal{P}}^r = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}.$$
 (6.94)

6.9. Движение концевых точек открытой струны

Перейдем к анализу движения концевых точек открытой релятивистской струны. Мы рассматриваем концевые точки, свободно движущиеся во всех направлениях. Это означает, что мы имеем заполняющую пространство D-брану (см. раздел 6.5). Свободные концевые точки удовлетворяют граничным условиям (6.56), что требует обращения в нуль $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ в концевых точках. Мы обнаружим два важных свойства свободного движения концевых точек открытой струны:

- концевые точки движутся со скоростью света;
- концевые точки движутся перпендикулярно струне.

Для внутренних точек струны понятие скорости неоднозначно. Однако для концевых точек струны скорость хорошо определена: при определении скорости точек не возникает никакой неоднозначности! Таким образом, наши утверждения о движении концевых точек содержательны. Во втором утверждении поперечное

к струне движение означает, что скорость концевой точки ортогональна касательной к струне в концевой точке.

Для доказательства указанных свойств напомним, что $\mathcal{P}^{\sigma 0}$ должно обращаться в нуль в концевых точках. Используя (6.92) и замечая, что квадратный корень в знаменателе не может равняться бесконечности, получаем, что числитель должен обращаться в нуль:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \tag{6.95}$$

Так как $\partial \vec{X}/\partial s$ — единичный вектор, касательный к струне, а $\partial \vec{X}/\partial t$ — скорость концевой точки, это выражение доказывает, что концевые точки движутся перпендикулярно струне. Это второе наше утверждение. В согласии с такой интерпретацией, используя соотношения (6.95) и (6.82), мы видим, что в концевых точках $\vec{v}_{\perp} = \partial \vec{X}/\partial t \equiv \vec{v}$. На самом деле соотношение (6.95) позволяет обратиться в нуль скорости концевых точек, и в этом случае свойство поперечности выполнялось бы тривиально. Однако этого случиться не может: как мы сейчас покажем, концевые точки движутся со скоростью света.

Используя (6.95), упрощаем выражение (6.91) для $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ в концевых точках:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}.$$
 (6.96)

Для пространственных координат $\mu = 1, ..., d$ уравнение (6.96) дает

$$\vec{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0. \tag{6.97}$$

Так как $\partial \vec{X} / \partial s$ — единичный вектор, мы заключаем, что

$$\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{c}^2. \tag{6.98}$$

Концевые точки свободной открытой струны движутся со скоростью света.

Из этого вывода следует, что знаменатель в (6.92) на самом деле обращается в нуль в концевых точках. При этом уравнение (6.95) продолжает выполняться, в противном случае $\mathcal{P}^{\sigma 0}$ расходилось бы, а не обращалось в нуль в концевых точках. На самом деле когда мы достигаем концевых точек струны, числитель в (6.92) должен обращаться в нуль быстрее знаменателя, обеспечивая обращение в нуль всего отношения.

Задачи

Задача 6.1. Индуцированная метрика на двумерной поверхности

Двумерная поверхность в плоском трехмерном пространстве описывается функцией уровня z = h(x, y), так что точки на поверхности имеют вид (x, y, h(x, y)). Эта поверхность естественно параметризуется величинами x и y. Напомним формулу (6.14), которая представляет метрику $g_{ij}(\xi)$, индуцированную на поверхности, параметризованной координатами (ξ^1, ξ^2).

- (a) Вычислите компоненты метрики g_{ij} через h и ее производные. Запишите формулу для g_{ij} в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + \dots$.
- (б) Запишите максимально упрощенную подходящую форму интеграла площади $(A = \int d\xi^{\dagger} d\xi^{2} \sqrt{g}).$

Задача 6.2. Определение метрики на сфере S² с помощью стереографической поверхности

Рассмотрим единичную сферу $S^2 \in \mathbb{R}^3$ с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Обозначим точку на сфере $\vec{x} = (x, y, z)$. В стереографической параметризации сферы мы используем параметры ξ^1 и ξ^2 , и точки на сфере задаются как (см. (6.1))

$$ec{x}(\xi^1,\xi^2) = ig(x(\xi^1,\xi^2),y(\xi^1,\xi^2),z(\xi^1,\xi^2)ig).$$

При заданных параметрах (ξ^1, ξ^2) соответствующая точка на сфере лежит на линии, проходящей через северный полюс N = (0, 0, 1) и точку $(\xi^1, \xi^2, 0)$. Заметим, что сам северный полюс не принадлежит никаким конечным значениям параметров.

- (a) Нарисуйте схему описанной конструкции. Чему равны требуемые интервалы значений ξ^1 и ξ^2 , если мы хотим параметризовать всю сферу (за исключением северного полюса)?
- (б) Вычислите функции $x(\xi^1, \xi^2), y(\xi^1, \xi^2)$ и $z(\xi^1, \xi^2)$.
- (в) Вычислите четыре компоненты индуцированной метрики $g_{ij}(\xi)$. Это метрика на сфере, описанная с помощью параметров ξ . Расчет довольно длинный, но результат достаточно прост (используйте символьный манипулятор!).
- (г) Проверьте ваш результат, вычислив площадь сферы с помощью формулы (6.17).

▶ Задача 6.3. Неравенство Шварца в ℝ^{1,1}

Рассмотрим двумерное векторное пространство V с постоянной метрикой, такой, что существует времениподобный вектор t' ($t'^2 = t' \cdot t' < 0$) и пространственно-подобный вектор s' ($s'^2 = s' \cdot s' > 0$).

- (a) Покажите, что вы можете построить векторы t и s такие, что $t \cdot t = -1$, $s \cdot s = 1$, a $t \cdot s = 0$. [Указание: выберите t в направлении t'.] Векторы t и s образуют канонический базис в V, которое теперь отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{1,1}$.
- (б) Рассмотрите теперь два произвольных вектора \dot{v}_1 и v_2 в V. Используйте базис, определенный в (а), чтобы доказать, что

$$(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)^2 \geqslant \boldsymbol{v}_1^2\boldsymbol{v}_2^2,$$

где равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы v_1 и v_2 параллельны. Этот результат дает дополнительные возможности в доказательстве (6.34).

Задача 6.4. Растянутая струна и нерелятивистский предел

Исследуйте действие (6.88) для релятивистской струны с концами, закрепленными в точках $(0, \vec{0})$ и $(a, \vec{0})$, как в разделе 6.7. Рассмотрите нерелятивистское приближение, когда $|\vec{v}_1| \ll c$ и осцилляции малы (см. (4.3)). Вы можете обозначить через \vec{y} совокупность поперечных координат X^2, \ldots, X^d и записать $\vec{y}(t, x)$, где x — координата, соответствующая X^1 . Объясните, почему верны следующие соотношения:

$$ds^2 = dx^2 + dec y \cdot dec y, \quad ec v_\perp pprox rac{\partial y}{\partial t}.$$

Покажите, что действие сводится, с точностью до аддитивной постоянной, к действию для нерелятивистской струны, совершающей малые поперечные колебания. Чему равны натяжение и линейная плотность массы для такой струны? Чему равна аддитивная постоянная?

Задача 6.5. Альтернативный вывод нерелятивистского предела

Рассмотрите ту же систему в нерелятивистском приближении, которое обсуждалось в задаче 6.4. На этот раз, однако, начните анализ с действия Намбу—Гото (6.39) и работайте в статической калибровке. Кроме того, параметризуйте струны, используя $X^1 = x = a\sigma/\sigma_1$. Такая параметризация разрешена в случае малых осцилляций. Более того, она разрешена для любого движения, для которого X^1 растущая вдоль струны функция.

Задача б.б. Плоское движение открытой струны с закрепленными концевыми точками

Рассмотрите движение релятивистской открытой струны в плоскости (x, y). Концы точки струны закреплены в точках (x, y) = (0, 0) и (x, y) = (a, 0), где a > 0. Мы хотим изучить движения, которые можно описать, используя функцию y(t, x), равную вертикальному смещению струны на интервале $x \in [0, a]$. Покажите, что лагранжиан (6.89) можно записать в виде:

$$L = -T_0 \int_0^a dx \sqrt{1 + y'^2 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}}$$

Здесь $y' = \partial y / \partial x$ и $\dot{y} = \partial y / \partial t$.

Задача 6.7. Эволюция во времени замкнутой в кольцо струны

При t = 0 замкнутая струна образует окружность радиусом R в плоскости (x, y)и имеет нулевую скорость. Эволюция этой струны во времени может быть изучена с помошью действия (6.88). Струна будет сохранять форму окружности, но ее радиус станет функцией времени R(t). Запишите лагранжиан L как функцию радиуса R(t) и его производных по времени. Вычислите зависимость радиуса и скорости от времени. Нарисуйте пространственно-временную поверхность, заметаемую струной, на трехмерном графике с осями x, y, ct. [Указание: вычислите связанный с L гамильтониан, и используйте закон сохранения энергии.]

Задача б.8. Ковариантный анализ движения концевых точек открытой струны

Из явного вида $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ выведите $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Докажите, что концевые точки свободной открытой струны движутся со скоростью света, используя результат этого вычисления.

▶ Задача 6.9. Гамильтониан релятивистских струн[†]

Рассмотрим лагранжиан струны \mathcal{L} в статической калибровке, записанной через $\partial_{\sigma} \vec{X}$ и $\partial_t \vec{X}$. Покажите, что плотность канонического импульса $\vec{\mathcal{P}}(\tau, \sigma)$ дается формулой

$$ec{\mathcal{P}}(au,\sigma)\equivrac{\partial\mathcal{L}}{\partialig(\partial_tec{X}ig)}=rac{T_0}{c^2}\,rac{ec{v}_\perp}{\sqrt{1-rac{v_\perp^2}{c^2}}}\,rac{ds}{d\sigma}.$$

Рассчитайте гамильтониан \mathcal{H} , выраженный тоже через \vec{v}_{\perp} и $ds/d\sigma^{3}$. Запишите полную функцию Гамильтона как

$$\mathcal{H}=\int d\sigma \ \mathcal{H}=\int ds(\ldots)$$

и покажите, что ваш ответ согласуется с интерпретацией, что энергия струны есть энергия поперечного движения струны, масса которой возникает только из натяжения.

Задача 6.10. Круговая струна в пространстве де Ситтера

Действие Намбу—Гото в искривленном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$ можно записать так же, как формулу (6.39), при условии, что все скалярные произведения используют метрику $g_{\mu\nu}$:

$$egin{aligned} \dot{X} \cdot X' &= g_{\mu
u}(X) \dot{X}^{\mu} X^{
u
\prime}, \ (\dot{X})^2 &= g_{\mu
u}(X) \dot{X}^{\mu} \dot{X}^{
u}, \ (X')^2 &= g_{\mu
u}(X) \dot{X}^{\prime\mu} X^{\prime
u}. \end{aligned}$$

Рассмотрим струны в расширяющемся четырехмерном пространстве-времени де Ситтера, для которого метрика $g_{\mu\nu}$ может быть выбрана диагональной со значениями

$$g_{00} = -1$$
, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = e^{2Ht}$.

Постоянная Хаббла H имеет размерность обратного времени, так что произведение Ht безразмерно.

(a) Предположим, что $X^0 \equiv ct = c\tau$ и запишем $X^{\mu} = \{X^0, \vec{X}\}$. Запишите действие Намбу—Гото через производные по t и σ от \vec{X} .

164

³⁾ Здесь и в задаче 6.10 предложено записать гамильтониан через скорости \vec{v}_{\perp} и \dot{R} . Напомним, что в стандартном гамильтоновом формализме гамильтониан выражается в терминах канонических координат и импульсов. — Прим. ред. перевода.

(6) Рассмотрим теперь круговую струну в плоскости (x^1, x^2) , а именно

$$X^{1}(\tau,\sigma)=r(t)\cos\sigma, \quad X^{2}(\tau,\sigma)=r(t)\sin\sigma, \quad \sigma\in[0,2\pi],$$

где r(t) — радиус, который следует определить. Используйте этот прием, чтобы упростить действие для струны и провести интегрирование по σ . Запишите свой результат в виде

$$S = \int dt L(\dot{r}(t), r(t); t)$$

и определите функцию Лагранжа $L(\dot{r}(t), r(t); t)$, явно зависящую от времени. Так как e^{2Ht} входит в метрику как множитель, физически измеряемый радиус струны на самом деле равен $R(t) = e^{Ht}r(t)$. Запишите функцию Лагранжа через R и \dot{R} .

- (в) Рассмотрите струны с постоянным R и используйте лагранжиан для нахождения потенциала V(R) таких струн. Постройте график этого потенциала и убедитесь, что он хорошо определен только при условии $R \leq c/H$. Найдите критическую точку потенциала и соответствующее значение R. Находится ли эта статическая струна в устойчивом равновесии?
- (г) С помощью функции Лагранжа от *R* и *R* вычислите соответствующую функцию Гамильтона, выраженную через *R* и *R*. Упростите ответ. Сохраняется ли такая функция Гамильтона при физическом движении?

Задача 6.11. Открытые струны, заканчивающиеся на D-бранах разных размерностей

Рассмотрите мир с *d* пространственными измерениями. D*p*-брана — протяженный объект с *p* пространственными измерениями: *p*-мерная гиперплоскость внутри *d*-мерного пространства. Исследуем свойства струн, заканчающихся на D*p*-бране, где $0 \le p < d$. Случай p = d, когда D-брана заполняет все пространство, обсуждался в разделе 6.9.

Для Dp-браны пусть x^i , где i = 1, ..., p, соответствует направлениям на Dp-бране, а x^a , где a = p + 1, ..., d, соответствует направлениям, ортогональным Dp-бране. Положение Dp-браны задается величинами $x^a = 0$, где a = p + 1, ..., d. Концевые точки открытой струны лежат на Dp-бране. Если ограничиться концевой точкой с $\sigma = 0$, выполняется соотношение

$$X^{a}(\tau, \sigma=0)=0, \quad a=p+1,\ldots,d.$$

Движение концевой точки вдоль направлений x^i D-браны произвольно, мы работаем в статической калибровке.

- (а) Установите условия, которым удовлетворяют \mathcal{P}_0^{σ} , \mathcal{P}_i^{σ} и \mathcal{P}_a^{σ} в концевой точке (отсутствие условия тоже возможно!). Докажите, что
- (б) все граничные условия автоматически удовлетворяются, если струна заканчивается на D0-бране;

- (в) для струны, заканчивающейся на DI-бране, касательная к струне в концевой точке ортогональна к DI-бране, а на скорость концевой точки ограничений нет;
- (г) для струны, заканчивающейся на Dp-бране с $p \ge 2$ имеются две возможности:
 - (i) струна ортогональна Dp-бране в концевой точке, а скорость концевой точки не связана ограничениями, или
 - (ii) струна не ортогональна D*p*-бране в концевой точке, а эта точка движется со скоростью света перпендикулярно струне.

Глава 7

Параметризация струны и классическое движение

Мы строим линии постоянного σ , перпендикулярные линиям постоянного τ , и используем плотность энергии, которую переносит струна, для того чтобы полностью зафиксировать σ -параметризацию. Получающаяся система уравнений движения струн включает волновые уравнения и два нелинейных ограничения. Мы находим общее решение, описывающее движение открытых струн со свободными концевыми точками. Далее мы находим общее решение, которое описывает движение открытых струн с незакрепленными концами. Мы рассматриваем свободную эволюцию замкнутых струн и находим; что для нее характерны возникающие и затем исчезающие каспы. Обсуждаются космические струны и гравитационное линзирование, которое они могут порождать.

7.1. Выбор σ -параметризации

Мы уже узнали несколько фактов о движении релятивистских струн. В частности, мы выяснили, что концевые точки свободной открытой струны движутся со скоростью света перпендикулярно струне. Этот результат был получен с использованием статической калибровки $X^0 \equiv ct = c\tau$, которая частично фиксирует параметризацию мирового листа. Если мы выбрали такую калибровку, движение струны определяется функциями $X(t, \sigma)$. При изменении t и σ функция $\vec{X}(t,\sigma)$ описывает пространственную поверхность струны — поверхность в пространстве, состоящую из положений струны во все моменты времени. В этой главе пространственная поверхность струны будет называться просто поверхностью струны. Кроме того, мы везде будем использовать статическую калибровку. Утверждение, что концевые точки открытой струны движутся перпендикулярно струне, подразумевает, что векторы, касательные к границе поверхности струны, ортогональны струнам. Наша цель состоит в том, чтобы найти удобную σ -параметризацию поверхности струны. Если мы знаем такую параметризацию, мы знаем также σ -параметризацию мирового листа и, в конечном счете, полную параметризацию мирового листа.

Мы покажем сейчас, как использовать конкретную σ -параметризацию отдельной струны для построения удобной σ -параметризации всех струн, а следовательно, всей поверхности струны. Предположим, что струна в момент времени t = 0 задает некоторую σ -параметризацию с $\sigma \in [0, \sigma_1]$ (см. рис. 7.1). Рассмотрим теперь струну при $t = \epsilon$, где ϵ — бесконечно малая величина. На поверхности



Рис. 7.1. Использование параметризации струны при t = 0 для построения параметризации струны при $t = \epsilon$. На поверхности струны линии постоянного σ выбираются перпендикулярными линиям постоянного t

струны можно нарисовать короткие отрезки, перпендикулярные струне при t = 0. Пусть эти отрезки пересекают струну при $t = \epsilon$. Рассмотрим точку σ_0 на струне при t = 0 и короткий перпендикуляр, восстановленный из этой точки. Мы утверждаем, что пересечение этого перпендикуляра со струной при $t = \epsilon$ также имеет $\sigma = \sigma_0$. Совершая это над всеми точками струны при t = 0, получаем параметризацию струны при $t = \epsilon$. Повторяя эту процедуру, используем струну при $t = \epsilon$ для параметризации струны при $t = 2\epsilon$. Продолжаем таким образом, действуя в пределе очень малых ϵ . Результатом является множество линий постоянного σ , которые везде ортогональны струнам (т. е. ортогональны линиям постоянного t). Эта конструкция может быть построена как для открытых, так и для замкнутых струн. Для замкнутых струн σ -интервал $[0, \sigma_c]$ для струны при t = 0 становится интервалом для всех других струн. Для открытых струн σ -интервал $[0, \sigma_1]$ для струны при t = 0 также становится интервалом для всех других струн. Это происходит потому, что границы поверхности струны ортогональны к струнам, и в результате границы являются линями постоянного σ .

Резюмируя, σ -параметризация данной струны может быть использована для построения линий постоянного σ , которые всегда перпендикулярны линиям постоянного t. При такой параметризации поверхности струны касательная $\partial \vec{X} / \partial \sigma$ к струнам и касательная $\partial \vec{X} / \partial t$ к линиям постоянного σ перпендикулярны друг другу в каждой точке:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \tag{7.1}$$

Так как скорость $\partial \vec{X} / \partial t$ перпендикулярна струне, она совпадает с \vec{v}_{\perp} (см. (6.82)):

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$$
 для всех точек, (7.2)

причем не только в концевых точках, где это выполняется независимо от параметризации. Вспоминая, что *s* есть параметр длины вдоль струны, из уравнения (7.1) следует $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$, что позволяет упростить предыдущие результаты для $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ и $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Находим, что выражение (6.93) становится равным

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t}.$$
(7.3)

Аналогично, выражение (6.91) запишется как

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}.$$
 (7.4)

Уравнение (7.4) выполнено в концевых точках открытой струны независимо от σ -параметризации (см. (6.96)); при теперешней параметризации оно выполнено везде вдоль струны.

7.2. Физическая интерпретация уравнения движения струны

Использовав σ -параметризацию для упрощения ряда предыдущих выражений, обратимся теперь к уравнениям движения струны (6.53). При $t = \tau$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma}.$$
(7.5)

Рассмотрим сначала компоненты этого уравнения, для которых $\mu = 0$. Из (7.4) следует, что $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$. Кроме того, из уравнения (7.3) получаем

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = \frac{T_0}{c} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}.$$
(7.6)

Возвращаясь к уравнению движения (7.5), получаем

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{c\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0.$$
(7.7)

Чтобы понять физический смысл этого результата, рассмотрим маленький кусочек струны, связанный с $d\sigma$, являющимся малым фиксированным числом. Движение этого отдельного кусочка струны хорошо определено сейчас, после того, как мы зафиксировали линии постоянного σ . Так как ds обозначает длину кусочка струны $d\sigma$, величина ds может зависеть от времени. Если мы умножим выражение внутри производной в (7.7) на постоянную величину $d\sigma$, получим, что выражение

$$\frac{T_0 \, ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \tag{7.8}$$

не зависит от времени. Величина (7.8) имеет размерность энергии, так что можно предположить, что это релятивистская энергия, связанная с кусочком струны. Действительно, это согласуется с нашими выводами раздела 6.7, где было показано, что энергия покоя статической растянутой струны определяется ее длиной, умноженной на натяжение T_0 . Энергия покоя в приведенном выше выражении равна $T_0 ds$, а релятивистский множитель в знаменателе превращает (7.8) в полную энергию. Поэтому выражение (7.7) утверждает, что энергия в *каждом* кусочке струны $d\sigma$ сохраняется. Это очень интересный факт. Из него следует, например, что энергия открытой струны в области $[0, \sigma_0]$ не зависит от времени при любом фиксированном значении σ_0 .

Вышеприведенная интерпретация подтверждается также вычислением энергии *E* релятивистской струны (задача 6.9). Решая эту задачу, Вы нашли, что гамильтониан равен

$$H = \int \frac{T_0 \, ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}},\tag{7.9}$$

откуда следует, что (7.8) есть энергия куска струны.

Вернемся к пространственным компонентам уравнения движения струны. Пространственные компоненты $\vec{\mathcal{P}}^{\tau}$ величины $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ можно установить из выражения (7.3):

$$\vec{\mathcal{P}}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2} \, \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \, \vec{v}_{\perp}, \tag{7.10}$$

170

и аналогично, из (7.4)

$$\bar{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}.$$
(7.11)

Теперь можно подставить эти выражения назад в формулу (7.5), так что

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \vec{v}_\perp \right] = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t}, \quad (7.12)$$

где на последнем шаге было использовано соотношение (7.7). Это уравнение можно несколько небрежно интерпретировать с помощью «эффективной» нерелятивистской струны. Напомним, что уравнения движения классической нерелятивистской струны имеют вид:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial \vec{y}}{\partial x} \right], \qquad (7.13)$$

где x — параметр длины вдоль направления, определяемого статической растянутой струной, а \vec{y} — поперечное смещение. Как нам нужно переделать (7.12), чтобы получилось (7.13)? Мы используем множитель $ds/d\sigma$ в правой части, чтобы преобразовать производную по σ в левой части в производную по s:

$$\frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)} \right].$$
(7.14)

Для малых осцилляций параметр длины *s* вдоль колеблющейся струны грубо равен параметру *x* вдоль направления статической струны. Поэтому мы можем сравнить это уравнение с (7.13) и заключить, что релятивистская струна обладает зависящими от скорости эффективным натяжением $T_{\rm eff}$ и эффективной массой $\mu_{\rm eff}$, которые определяются выражениями

$$T_{\rm eff} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}, \quad \mu_{\rm eff} = \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$
 (7.15)

Так как концевые точки свободной открытой струны движутся со скоростью $v_{\perp} = c$, эффективное натяжение струны обращается в концевых точках в нуль. Можно сказать, что концевые точки должны двигаться со скоростью света для того, чтобы обеспечить обращение в нуль натяжения в этих точках. Это единственный способ, при котором релятивистская струна может иметь натяжение и это имело бы смысл при наличии свободных открытых концов. В концевых точках эффективная плотность массы расходится. Здесь нет проблемы — такая же расходимость присутствует в плотности энергии, возникающей в подынтегральном выражении в (7.9). Несмотря на сингулярное поведение в концевых точках, интеграл оказывается конечным, как и требуется, так что в конце концов мы описываем струны с конечной энергией.

7.3. Волновое уравнение и связи

Уравнение (7.14) все еще довольно сложное. Может показаться, что зафиксировав линии постоянного σ , мы исключили репараметризации, которые могли бы помочь упростить уравнения движения. Однако, это не так. Мы показывали, как построить линии постоянного σ , если у нас есть одна параметризованная струна. Теперь нужно попробовать параметризовать эту первую струну самым наилучшим образом!

Ниже излагается физический способ сделать это. Мы параметризуем струну так, что каждый ее отрезок с одинаковым параметром длины σ несет одинаковое количество энергии. Мы будем параметризовать струну, используя энергию! Такая параметризация приводит к простым уравнениям движения. Чтобы показать это, перепишем (7.14) предположительно в другом виде, заменив производные по *s* на производные по σ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right].$$
(7.16)

Определим теперь величину $A(\sigma)$:

$$A(\sigma) = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$
 (7.17)

Мы уже показывали в выражении (7.7), что $A(\sigma)$ не зависит от времени. Выберем σ так, чтобы A = 1. С учетом этого определения уравнение движения (7.16) принимает вид знакомого волнового уравнения

J.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}.$$
(7.18)

Это большое упрощение. Чтобы найти σ , приводящее к A = 1, припишем $\sigma = 0$ одной из концевых точек открытой струны и продолжим свой путь вдоль струны, приписывая каждому куску струны ds интервал $d\sigma$, задаваемый выражением

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} = \frac{1}{T_0} dE.$$
 (7.19)

172

Первое равенство равносильно требованию, чтобы A = 1, а второе равенство следует из отождествления (7.8) с энергией dE, переносимой малым куском струны. В такой параметризации плотность энергии $dE/d\sigma$ есть константа, равная натяжению. Уравнение (7.19) можно проинтегрировать от концевой точки $\sigma = 0$ вплоть до точки Q, тогда

$$\sigma(Q) = \frac{E(Q)}{T_0}.$$
(7.20)

Приписанная точке Q координата $\sigma(Q)$ равна энергии E(Q), которую переносит кусок струны, протянутый от выбранной концевой точки до точки Q, деленной на натяжение. Из предыдущего уравнения следует также, что

$$\sigma \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \tag{7.21}$$

где Е — полная энергия струны.

Наш выбор σ , сделанный для всех струн, совместим с условием ортогональности (7.1). На самом деле, линии постоянных σ не изменились, изменились только приписанные им значения σ . Линии постоянного σ означают, что энергия в куске струны [0, σ] постоянна, такие линии перпендикулярны струне.

Условие параметризации (7.19) на самом деле эквивалентно дифференциальной связи, наложенной на координаты \vec{X} . Перепишем сначала первое равенство в (7.19) в виде

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} v_\perp^2 = 1.$$
 (7.22)

Вспоминая, что $\partial \vec{X} / \partial s$ есть единичный вектор, и пользуясь формулой (7.2), найдем

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) = 1.$$
 (7.23)

Проверим наконец граничные условия. Из формулы (7.14) имеем

$$\vec{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}.$$
 (7.24)

Поэтому граничное условие для свободных концевых точек выглядит очень просто:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$$
, для концевых точек. (7.25)

жř.

При выбранной параметризации граничное условие для свободных концевых точек, впервые введенное в (6.56), является просто граничным условием Неймана.

Мы имеем всего четыре уравнения, которые нужно решить для определения движения релятивистской струны: (7.18), (7.1), (7.23) и (7.25). Соберем их вместе:

волновое уравнение:
$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0.$$
 (7.26)

условие параметризации:
$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0,$$
 (7.27)

условие параметризации: $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1,$ (7.28)

граничное условие: $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma=0} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma=\sigma} = 0.$ (7.29)

Для струны с энергией E эти уравнения требуют, чтобы $\sigma_1 = E/T_0$. Для полноты включим (7.19), записанное теперь в виде

$$\frac{1}{T_0} \frac{dE}{d\sigma} = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = 1.$$
(7.30)

Наконец, из уравнений (7.3) и (7.4) получаем:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t},\tag{7.31}$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}.\tag{7.32}$$

7.4. Произвольное движение открытой струны

Наша цель в этом разделе — описать произвольное движение открытой струны со свободными граничными условиями. Поэтому мы детально исследуем способы решиния уравнения (7.26)–(7.29).

Рассмотрим сначала волновое уравнение для \vec{X} . Это уравнение немедленно решается с помощью произвольных векторных функций от ($ct \pm \sigma$). Поэтому мы пишем

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{G}(ct-\sigma) \right).$$
(7.33)

Граничное условие в концевой точке $\sigma = 0$ требует, чтобы

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma=0} = 0 \implies \vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0, \qquad (7.34)$$

где штрих означает производную по аргументу. Так как ct принимает все возможные значения, написанное выше уравнение выполняется для всех значений

174

аргумента. Обозначая аргумент и, получаем:

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{d\vec{G}(u)}{du} \Rightarrow \vec{G}(u) = \vec{F}(u) + \vec{a}_0, \qquad (7.35)$$

где \vec{a}_0 — постоянный вектор. Возвращаясь к (7.33), имеем теперь

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{F}(ct-\sigma) + \vec{a}_0 \right). \tag{7.36}$$

Можно включить постоянный вектор \vec{a}_0 в определение \vec{F} (назвать $\vec{F}(u) + \vec{a}_0/2$ новым \vec{F}), и тогда решение примет вид

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{F}(ct-\sigma) \right). \tag{7.37}$$

Рассмотрим теперь граничное условие при $\sigma = \sigma_1$:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \implies \vec{F}'(ct+\sigma_1) - \vec{F}'(ct-\sigma_1) = 0.$$
(7.38)

Если положить $u = ct - \sigma_1$, то предыдущее условие примет вид

$$\frac{d\vec{F}}{du}(u+2\sigma_1) = \frac{d\vec{F}}{du}(u). \tag{7.39}$$

Из этого уравнения следует, что производная функции \vec{F} периодична с периодом $2\sigma_1$. Интегрируя, находим, что функция \vec{F} квазипериодична: за период $2\sigma_1$ она изменяется на фиксированную константу. Это условие можно записать как

$$\vec{F}(u+2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}.$$
 (7.40)

где \vec{v}_0 — векторная постоянная интегрирования с размерностью скорости, а другие постоянные были добавлены для удобства. На этом анализ граничных условий завершается.

Изучим теперь, какие ограничения накладывают условия параметризации (7.27) и (7.28) на функцию \vec{F} . Стандартный прием заключается в том, чтобы сложить и вычесть первое и второе уравнения, тогда получим уравнение

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \pm 2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1, \qquad (7.41)$$

которое может быть короче записано в виде

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1.$$
 (7.42)

Заметим, что это эквивалентно двум связям (7.27) и (7.28). С помощью (7.37) мы можем вычислить производные, которые входят в связи:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \right),$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma) \right).$$
(7.43)

В результате

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma).$$
(7.44)

Отсюда следует, что связи (7.42) требуют, чтобы $\vec{F}' \cdot \vec{F}' = 1$ для всех аргументов \vec{F} . Иными словами, вектор $\vec{F}'(u)$ является единичным вектором:

$$\left|\frac{d\vec{F}(u)}{du}\right|^2 = 1.$$
(7.45)

Это серьезный шаг вперед: связи привели к простому условию на $\vec{F}(u)$. Так как \vec{F} есть векторная функция параметра u, мы можем мысленно представить себе $\vec{F}(u)$, как параметризованную кривую в пространстве. Уравнение (7.45) имеет простую интерпретацию:

$$u$$
 есть параметр длины вдоль кривой $F(u)$. (7.46)

Это объясняется следующим образом. Рассмотрим две близкие точки $\vec{F}(u + du)$ и $\vec{F}(u)$ на кривой. Их векторная разность $d\vec{F} = \vec{F}(u + du) - \vec{F}(u)$ имеет длину $|d\vec{F}|$. Из уравнения (7.45) следует, что $|d\vec{F}| = |du|$, показывая, что изменение параметра |du| есть расстояние между двумя близкими точками.

Теперь можно подвести итог нашего анализа уравнений движения. Общее решение, описывающее движение открытой струны со свободными концевыми точками, дается формулой

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{F}(ct-\sigma) \right), \quad \sigma \in [0,\sigma_1], \quad (7.47)$$

где $\sigma_1 = E/T_0, E$ — энергия струны, а \vec{F} удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{d\vec{F}(u)}{du}\right|^{2} = 1 \quad \text{if} \quad \vec{F}(u+2\sigma_{1}) = \vec{F}(u) + 2\sigma_{1} \frac{\vec{v}_{0}}{c}.$$
(7.48)

Задача свелась к тому, чтобы найти векторную функцию \vec{F} , удовлетворяющую уравнениям (7.48). Второе из этих уравнений говорит нам, что достаточно найти

176



Рис. 7.2. Векторная функция $\vec{F}(u)$ изменяется на постоянный вектор $(2\sigma_1 \vec{v}_0/c)$ при $u \to u + 2\sigma_1$. Параметризованная кривая $\vec{F}(u)$ полностью определяет движение открытой струны со свободными концевыми точками

 $\vec{F}(u)$ на интервале $u \in [0, 2\sigma_1]$. Это определяет $\vec{F}(u)$ для всех u, и следовательно, полностью определяет $\vec{X}(t, \sigma)$. Интерпретация \vec{v}_0 будет дана ниже. Иллюстрация \vec{F} показана на рис. 7.2.

Функция $\vec{F}(u)$ имеет физическую интерпретацию. Из (7.47) следует, что движение концевой точки с $\sigma = 0$ открытой струны описывается выражением

$$\vec{X}(t,0) = \vec{F}(ct).$$
 (7.49)

Поэтому мы видим, что

$$\vec{F}(u)$$
 есть положение концевой точки $\sigma = 0$ в момент времени $\frac{u}{c}$. (7.50)

Дополнительно можно дать физическую интерпретацию постоянной скорости \vec{v}_0 . Из второго уравнения (7.48) имеем

$$\vec{F}(2\sigma_1) = \vec{F}(0) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c},$$
 (7.51)

и, выражая \vec{F} через положения концевой точки $\sigma = 0$, находим:

$$\vec{X}\left(t=\frac{2\sigma_1}{c},0\right)=\vec{X}(t=0,0)+\left(\frac{2\sigma_1}{c}\right)\vec{v}_0.$$
(7.52)

Это показывает, что \vec{v}_0 есть средняя скорость концевой точки $\sigma = 0$ в интервале времени $[0, 2\sigma_1/c]$.

Упражнение-разминка 7.1. Покажите, что v₀ есть на самом деле средняя скорость любой точки σ на струне, вычисленная на любом интервале времени длительностью 2σ₁/c.



Рис. 7.3. Открытая струна длиной l вращается с угловой скоростью ω в плоскости (x, y)

• Упражнение-разминка 7.2. Покажите, что скорость любой точки струны есть периодическая функция времени с периодом $2\sigma_1/c$, т. е. $\dot{\vec{X}}(t,\sigma) = \vec{X}(t+2\sigma_1/c,\sigma)$.

Так как \vec{F} можно реконструировать, глядя только на концевую точку $\sigma = 0$, можно задать вопрос: как долго мы должны наблюдать эту концевую точку, чтобы определить полное движение в прошлом и будущем открытой струны с энергией E? Так как для определения движения достаточно иметь значения $\vec{F}(u)$ в интервале от u = 0 до $u = 2\sigma_1$, мы должны наблюдать $\vec{X}(t, 0)$ в интервале от t = 0 до $t = 2\sigma_1/c$. Поскольку $\sigma_1 = E/T_0$, мы должны наблюдать концевую точку в течение $\Delta t = 2E/cT_0$. Это равно удвоенному времени, необходимому свету для того, чтобы пройти расстояние E/T_0 , т. е. длину статической струны с энергией E.

Используем теперь эту конструкцию для описания движения прямой открытой струны с энергией E, которая жестко вращается вокруг фиксированной средней точки в плоскости (x, y) (рис. 7.3).

Наша первая цель — воспроизвести функцию $\vec{F}(u)$. Эту функцию можно легко построить, так как мы многое знаем о движении концевых точек. Предполагая, что струна имеет длину ℓ и вращается с угловой скоростью ω , опишем движение концевой точки $\sigma = 0$ формулой

$$\vec{X}(t,0) = \frac{\ell}{2}(\cos \omega t, \sin \omega t), \qquad (7.53)$$

мы используем вектор с двумя компонентами, так как движение ограничено плоскостью (x, y). Полагая $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$, имеем

$$\vec{F}(u) = \frac{\ell}{2} \left(\cos \frac{\omega u}{c}, \sin \frac{\omega u}{c} \right).$$
 (7.54)

Заметим, что если вектор \vec{v}_0 в (7.48) обращается в нуль, то функция \vec{F} периодична. Точнее, \vec{v}_0 обращается в нуль, так как она есть средняя скорость за период. В течение периода скорость тоже изменяется периодически, и средняя скорость любой точки за полный оборот равна нулю. При $\vec{v}_0 = 0$ из формулы (7.48) следует $\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u)$. Используя (7.54), получаем

$$\frac{\omega}{c}(2\sigma_1) = 2\pi m \implies \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} m, \qquad (7.55)$$

где m — целое число. Легко видеть, что мы должны выбрать m = 1. Для этого достаточно вычислить выражение $\vec{X}(0, \sigma)$, описывающее струну в момент времени, равный нулю:

$$\vec{X}(0,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(\sigma) + \vec{F}(-\sigma) \right) = \frac{\ell}{2} \left(\cos \frac{\pi m \sigma}{\sigma_1}, 0 \right).$$
(7.56)

Для m = 1 $\vec{X}(0, \sigma)$ прочерчивает струну при $\sigma \in [0, \sigma_1]$. При произвольном m функция $\vec{X}(0, \sigma)$ прочерчивает струну m раз при $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Выбирая m = 1, находим

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} = \frac{\pi T_0}{E}.$$
(7.57)

Мы получили угловую скорость вращения, выраженную через энергию. Первое условие в (7.48) определяет длину *l*. Дсйствительно,

$$\frac{d\vec{F}}{du} = \frac{\omega\ell}{2c} \left(-\sin\frac{\omega u}{c}, \cos\frac{\omega u}{c} \right), \tag{7.58}$$

и в результате

$$\left|\frac{d\vec{F}}{du}\right| = \left(\frac{\omega\ell}{2c}\right)^2 = 1 \implies \ell = \frac{2c}{\omega} = \frac{2\sigma_1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{E}{T_0}.$$
 (7.59)

Эта длина на множитель $2/\pi$ меньше, чем длина статической струны с энергией E. Это важно, так как такая струна обладает кинетической энергией. С другой стороны,

$$E=\frac{\pi}{2}T_0\ell,\qquad(7.60)$$

значит, энергия вращающейся струны на множитель $\pi/2$ превышает энергию статической струны той же длины. Заметим также, что $\omega(\ell/2) = c$, значит, концевые точки движутся со скоростью света. В этом решении энергия пропорциональна длине струны. Возможно, удивительно, что с ростом энергии струны угловая скорость ω уменьшается. Но концевые точки струны должны двигаться со скоростью света, так что если длина струны растет, угловая скорость должна уменьшаться.

Определив ω и ℓ , мы на самом деле определили движение струны. Однако интересно записать полное выражение для движения *параметризованной* струны $\vec{X}(t, \sigma)$. Выразив вектор \vec{F} в (7.54) через σ_1 , получим

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi u}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi u}{\sigma_1} \right). \tag{7.61}$$

Наконец, используя выражение (7.47),

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left(\cos \frac{\pi(ct+\sigma)}{\sigma_1} + \cos \frac{\pi(ct-\sigma)}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi(ct+\sigma)}{\sigma_1} + \sin \frac{\pi(ct-\sigma)}{\sigma_1} \right),$$
(7.62)

и после упрощения,

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right).$$
(7.63)

Параметризованная струна интересна нам тем, что ее плотность энергии постоянна и не зависит от параметра σ . В задаче 7.2 вам предстоит вычислить энергию $\mathcal{E}(s)$, приходящуюся на единицу длины струны как функцию расстояния *s* от центра:

$$\mathcal{E}(s) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{4s^2}{\ell^2}}}.$$
 (7.64)

В центре струны плотность энергии $\mathcal{E}(0)$ совпадает с T_0 . Так и должно быть, поскольку центр струны (s = 0) не движется. Плотность энергии расходится на концах струны $s = \pm \ell/2$. Однако полная энергия конечна.

7.5. Движения замкнутых струн и каспы

Рассмотрим произвольное движение свободной замкнутой струны. Как и в случае открытых струн, воспользуемся как волновым уравнением (7.26), так и условиями параметризации (7.27) и (7.28). Решение волнового уравнения можно записать в виде

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u) + \vec{G}(v) \right),$$
 (7.65)

где мы ввели переменные u и v, определенные как

$$u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma. \tag{7.66}$$

Вычисляя производные \vec{X} , немедленно находим, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{X}}{\partial t} = \frac{1}{2} \big(\vec{F}'(u) + \vec{G}'(v) \big), \qquad (7.67)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v) \right), \qquad (7.68)$$

где штрихи означают производные по аргументу. Теперь можно образовать линейные комбинации

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}'(u) \quad \varkappa \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -\vec{G}'(v). \tag{7.69}$$

180
Условия параметризации, преобразованные в (7.42), приводят к ограничениям

$$\left|\vec{F}'(u)\right|^2 = \left|\vec{G}'(v)\right|^2 = 1,$$
 для любых $(u, v).$ (7.70)

Для замкнутых струн у нас нет граничных условий, зато есть условие периодичности. Так как, в силу (7.30), $d\sigma = dE/T_0$, параметр σ замкнутой струны имеет отождествление

$$\sigma \simeq \sigma + \sigma_1$$
 при $\sigma_1 = rac{E}{T_0},$ (7.71)

где E есть энергия струны. При росте σ на величину σ_1 , мы возвращаемся в ту же точку на замкнутой струне и поэтому

$$\vec{X}(t,\sigma+\sigma_1) = \vec{X}(t,\sigma) \tag{7.72}$$

является условием периодичности. С помощью (7.65) это условие можно записать в виде

$$\vec{F}(u+\sigma_1) + \vec{G}(v-\sigma_1) = \vec{F}(u) + \vec{G}(v), \qquad (7.73)$$

или

$$\vec{F}(u+\sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v-\sigma_1).$$
 (7.74)

Функции $\vec{F}(u)$ и $\vec{G}(v)$ не обязательно должны быть периодическими функциями с периодом σ_1 , но они должны изменяться на один и тот же вектор, когда их аргументы возрастают на σ_1 . Так как u и v — независимые переменные, частные производные от (7.74) по u и v равны

$$\vec{F}'(u+\sigma_1) = \vec{F}'(u)$$
 и $\vec{G}'(v+\sigma_1) = \vec{G}'(v).$ (7.75)

Уравнения (7.70) и (7.75) требуют, чтобы $\vec{F}'(u)$ и $\vec{G}'(v)$ были периодическими единичными векторами; их концы могут описывать две независимые параметризованные замкнутые кривые на поверхности единичной сферы (рис. 7.4). Движение замкнутой струны полностью определяется, с точностью до константы, этими двумя параметризованными кривыми. Действительно, кривые фиксируют $\vec{F}'(u)$ и $\vec{G}'(v)$ и, после интегрирования, определяют функцин $\vec{F}(u)$ и $\vec{G}(v)$ с точностью до постоянных интегрирования, тогда $\vec{X}(t, \sigma)$ определен с точностью до постоянного вектора.

В общем, возникает интересная ситуация. Как показано на рис. 7.4, две параметризованные кривые $\vec{F}'(u)$ и $\vec{G}'(v)$ могут пересечься при некоторых значениях u_0 и v_0 параметров u и v:



Рис. 7.4. Концы единичных векторов $\vec{F}'(u)$ и $\vec{G}'(v)$ определяют две замкнутые параметризованные кривые, которые, в данном случае, пересекаются в точках $u = u_0$ и $v = v_0$

$$\vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(v_0) \tag{7.76}$$

Пусть t_0 и σ_0 — значения t и σ , определенные через u_0 и v_0 с помощью (7.66). Тогда из (7.67) следует, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(t_0,\sigma_0) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u_0) + \vec{G}'(v_0) \right) = \vec{F}'(u_0). \tag{7.77}$$

Так как \vec{F}' — единичный вектор, из (7.77) получаем что при $t = t_0$ точка $\sigma = \sigma_0$ на струне достигает скорости света! Кроме того, движение точки происходит в направлении $\vec{F}'(u_0)$. Дополнительная информация следует из (7.68):

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \sigma}(t_0, \sigma_0) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u_0) - \vec{G}'(v_0) \right) = \vec{0}.$$
(7.78)

Это означает, что параметризация струны в точке $t = t_0$ становится сингулярной в точке $\sigma = \sigma_0$. Чтобы исследовать форму струны вблизи $\sigma = \sigma_0$, мы фиксируем $t = t_0$ и используем тейлорово разложение в окрестности $\sigma = \sigma_0$:

$$\vec{X}(t_0,\sigma) = \vec{X}(t_0,\sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}(t_0,\sigma_0) + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}(t_0,\sigma_0) + \frac{1}{3!}(\sigma - \sigma_0)^3 \frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial \sigma^3}(t_0,\sigma_0) + \dots$$
(7.79)

Из (7.78) и определений

$$\vec{X}_0 = \vec{X}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{T} \equiv \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{R} \equiv \frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial \sigma^3}(t_0, \sigma_0), \quad (7.80)$$

следует, что в разложении (7.79) сокращается линейное по ($\sigma - \sigma_0$) слагаемое и

$$\vec{X}(t_0,\sigma) = \vec{X}_0 + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^2 \vec{T} + \frac{1}{3!}(\sigma - \sigma_0)^3 \vec{R} + \dots$$
 (7.81)

В общем случае \vec{T} и \vec{R} не параллельны и не обращаются в нуль. Отсюда следует, что в точке $\sigma = \sigma_0$ мы имеем *касп*. На струне касп — это точка, где два исходящих направления вдоль струны образуют нулевой угол. Или, что то же самое, в каспе ориентированная касательная к струне изменяет направление. Уравнение (7.81) описывает касп в точке \vec{X}_0 : при увеличении σ в окрестности точки σ_0 , струна приближается к \vec{X}_0 вдоль \vec{T} при σ , приближающемся к σ_0 ; и удаляется от \vec{X}_0 вдоль \vec{T} при σ , удаляющемся от σ_0 . Действительно, в окрестности \vec{X}_0 разность ($\sigma - \sigma_0$) очень мала, и в разложении (7.81) доминирует слагаемое, содержащее \vec{T} . Когда мы движемся от \vec{X}_0 , касп раскрывается за счет слагаемого с \vec{R} . Если выбрать систему координат, в которой вершина каспа находится в начале координат, вектор \vec{T} направлен вдоль положительного направления оси y, а вектор \vec{R} лежит в плоскости (x, y), тогда сам касп прочерчитит кривую $y \sim x^{2/3}$ (убедитесь в этом, решая задачу 7.7).

Если касп возникает для параметров (u_0, v_0) , он проявится и для параметров $(u_0 + m\sigma_1, v_0 + n\sigma_1)$, где m и n — произвольные целые числа. В результате, с течением времени каспы будут периодически возникать и исчезать в различных

182

точках струны. При задании любых двух параметризованных путей $\vec{F}'(u)$ и $\vec{G}'(v)$ на два-сфере может возникнуть несколько различных точек пересечения. Каждая из них может порождать множество каспов.

7.6. Космические струны

Наш анализ классического движения релятивистских струн можно применить к изучению космических струн. Вполне возможно, что физика ранней Вселенной сводится к струнам, которые не являются микроскопическими, а расширяются вместе со Вселенной, становясь очень большими. Движение струн космических масштабов можно изучать в классическом приближении. К 2007 году никаких космических струн не обнаружено¹⁾. Открытие космической струны стало бы заметным событием. Так как оказывается, что причиной возникновения космических струн могут быть явления, не связанные с теорией струн, то, даже в том случае, если их откроют, потребуется много работы, чтобы доказать, что космическая струна является струной теории струн.

Самый прямой способ детектирования космической струны связан с гравитационным линзированием²⁾. Чтобы понять это, начнем с обсуждения гравитационных эффектов, создаваемых прямой бесконечно длинной релятивистской струной. Предположим, что мы поместили массовую частицу на некотором расстоянии от такой струны. Так как у струны есть энергия покоя, можно предположить, что частица будет испытывать гравитационное притяжение. На самом деле, это не так, действующая на частицу сила строго равна нулю. Этот результат общей теории относительности не имеет места в ньютоновской теории тяготения, в которой гравитационное притяжение определяется только эффективной плотностью массы струны μ_0 . В общей теории относительности дополнительный вклад вносит натяжение струны, сводящееся к гравитационному отталкиванию. Полная сила притяжения пропорциональна ($\mu_0 - T_0/c^2$), т. е. такой комбинации, которая точно обращается в нуль для релятивистских струн.

Хотя струна не испытывает гравитационного притяжения, она влияет на геометрию ортогональных ей плоскостей. Предположим, вы обходите струну, сохраняя расстояние r до нее постоянным. Длина окружности C, по которой обошли струну, должна быть меньше ожидаемого значения $2\pi r$. Точнее, для любого радиального расстояния r

$$\frac{c}{r}=2\pi-\Delta, \qquad (7.82)$$

где постоянная Δ называется *дефицитом угла*. Двумерные пространства, ортогональные струне, на самом деле являются конусами с дефицитом угла Δ . Струна проходит через вершины конусов. Действительно, конусы — это пространства,

¹⁾ На момент выхода русского перевода (2010 г.) ситуация с открытием космических струн остается прежней. — Прим. ред. перевода.

²⁾ Существование космических струн может быть также подтверждено наблюдением мощного синхротронного излучения от линейных источников (см.: *Witten E.* Superconducting Strings // Nucl. Phys. 1986. В 228. Р. 557). — Прим. ped. nepegoda.



Рис. 7.5. Слева: комплексная плоскость *z*, из которой вырезано множество точек, аргумент которых больше нуля и меньше Δ . Справа: знакомая картина конуса, полученного отождествлением линий *AM* и *AM*'

в которых круговые петли на постоянном расстоянии от вершины удовлетворяют (7.82). Это можно понять, если построить конус, взяв для начала плоскость. Если представить плоскость, используя комплексную переменную z = x + iy (как это было сделано при изучении орбифолдов в разделе 2.8), то конус возникает при вырезании области $0 \leq \arg(z) \leq \Delta$ и отождествлении получившейся границы по формуле $z \simeq e^{i\Delta}z$. Это показано на рис. 7.5, где изображена также окружность с центом в вершине конуса z = 0. При обсуждении линзирования мы предположим для простоты, что наблюдатель O и световой источник S лежат на одном конусе, т. е. они имеют одно и то же значение координаты на струне.

Дефицит угла Δ , порождаемый релятивистской струной, зависит от натяжения струны и от значения постоянной Ньютона G. Вычисления в рамках общей теории относительности показывают, что

$$\Delta = \frac{8\pi GT_0}{c^4} = \frac{8\pi G\mu_0}{c^2}.$$
 (7.83)

Как мы вскоре увидим, угол Δ тесно связан с углами линзирования, типичные значения которых измеряются в угловых секундах. Замечая, что $1'' = 4,85 \times 10^{-6}$ рад, мы можем записать

$$\Delta = 5,18'' \times \left(\frac{G\mu_0/c^2}{10^{-6}}\right). \tag{7.84}$$

• Упражнение-разминка 7.3. Используя значения G и c, покажите, что

$$\Delta = 3,85'' \times \left(\frac{\mu_0}{10^{21} \ \kappa c/m}\right). \tag{7.85}$$

Шестикилометровая струна с $\Delta = 3,85''$ будет иметь массу, равную массе Земли.

Лучше понять значения Δ можно, если переписать (7.83) как явно безразмерное отношение массы Планка $m_{\rm P}$ и массы струны m_s . За массу струны примем единственную массу, которую можно построить, используя только степени μ_0 , *с* и \hbar . 🕑 Упражнение-разминка 7.4. Покажите, что

$$m_s = \sqrt{\frac{\hbar\mu_0}{c}}.\tag{7.86}$$

Вспоминая, что $m_{\rm P}=\sqrt{\hbar c/G}$, находим:

$$\frac{m_s}{m_{\rm P}} = \sqrt{\frac{G\mu_0}{c^2}},\tag{7.87}$$

и в результате

$$\Delta = 8\pi \left(\frac{m_s}{m_{\rm P}}\right). \tag{7.88}$$

Малое значение Δ возникает для m_s , малых по сравнению с m_P .

Чтобы обсудить явление линзирования, вспомним сначала ряд свойств геодезических. Кривая, которая соединяет две фиксированные точки, является геодезической, если ее длина стационарна при произвольных бесконечно малых деформациях (вариациях) обращающихся в нуль в фиксированных точках 3). Длина не изменяется в первом порядке по таким деформациям. На плоскости существует лишь одна геодезическая между двумя любыми точками - прямая линия, соединяющая эти точки. В более сложных пространствах геодезическая не обязана быть единственной или иметь минимальную длину. Существует бесконечно большое число геодезических, соединяющих северный и южный полюсы 2-сферы, причем каждая представляет полуокружность постоянной долготы. Для двух произвольных точек на поверхности 2-сферы имеются две геодезические — короткая и длинная. Действительно, две точки определяют большой круг, а геодезическими являются две взаимно дополнительные дуги, соединяющие эти точки. Короткая геодезическая есть кратчайший путь между двумя точками. Длинная геодезическая есть только путь постоянной длины, седловая точка для функционала длины; одни деформации делают ее длиннее, а другие — короче. На самом деле, длинная геодезическая может быть непрерывным образом деформирована в короткую. На цилиндре любые две точки можно соединить бесконечным числом геодезических. Эти геодезические характеризуются числом оборотов, осуществляемых вокруг цилиндра, чтобы попасть из одной точки в другую.

() Упражнение-разминка 7.5. Нарисуйте и найдите длину пяти первых кратчайших геодезических, соединяющих точки (0, 0) и (1, 0) на цилиндре $(x, y) \simeq (x, y+1)$.

На конусе структура геодезических сложна. Рассмотрим две точки P и Q и соединяющие их геодезические. Число геодезических зависит от дефицита угла Δ на конусе в вершине A и угла между P и Q, определяемого как положительный угол, получающийся поворотом по часовой стрелке и переводящем AP в AQ. Угол ϕ должен обязательно быть меньше, чем полный угол α при вершине:

$$\phi \leqslant \alpha \equiv 2\pi - \Delta. \tag{7.89}$$

³⁾ Иными словами, геодезические являются экстремумами функционала длины кривой на многообразии, уравнения которых следуют из вариационного принципа. — Прим. ред. перевода.



Рис. 7.6. Источник S и наблюдатель O на расстояниях d_S и d_O , соответственно, от вершины конуса A с дефицитом угла Δ . Для простоты, вдоль источника проходит разрез, который возникает при отождествлении точек S и S'. Лучи SO и S'O от источника приходят к наблюдателю по направлениям, разделенным углом линзирования $\delta \phi = \alpha + \beta$

Вычисление полного числа геодезических см. в задаче 7.8. Здесь мы ограничимся случаем $\Delta \ll 1$, имеющем отношение к возможным астрофизическим задачам. Предположим, что наблюдатель O находится на расстоянии d_O от струны, а источник света S — на расстоянии d_S от струны. Линзирование возникает в том случае, когда источник S находится прямо напротив наблюдателя O, за струной. В этом случае имеются две геодезические, соединяющие S и O и находящиеся по разные стороны струны. Свет использует обе геодезические, чтобы достичь наблюдателя O, который детектирует два одинаковых изображения источника S. Наличие двух одинаковых изображений есть характерный признак линзирования струнами, возникающее потому, что у конусов нет кривизны нигде, кроме вершины. Линзирование компактными телами может давать более двух изображений, и так как соответствующая геометрия искривлена, изображения искажены и могут сильно отличаться друг от друга.

Чтобы сделать геодезические наглядными, представим конус, поместив источник на двух радиальных линиях, которые должны быть отождествлены под углом с раствором Δ (рис. 7.6). Источник возникает в точках S и S', а две геодезические, соединяющие источник и наблюдателя, представляют собой прямые линии SO и S'O. Угол $\delta\phi$ между SO и S'O в точке O является углом линзирования, т. е. углом между изображениями, которые видит наблюдатель. Из рисунка видно, что

$$\delta \phi = \alpha + \beta. \tag{7.90}$$

Кроме того, так как Δ есть сумма внешних углов треугольников *SAO* и *S'AO*, то

$$\Delta = \alpha + \beta + \alpha' + \beta'. \tag{7.91}$$

Поскольку каждый угол в правой стороне вышеприведенной формулы положителен, а $\Delta \ll 1$, то каждый из них мал: $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \ll 1$. Из теоремы синусов, используя приближение малых углов, получаем:

$$\frac{\sin\alpha}{d_S} = \frac{\sin\alpha'}{d_O}, \quad \frac{\sin\beta}{d_S} = \frac{\sin\beta'}{d_O} \Rightarrow \frac{\alpha}{d_S} = \frac{\alpha'}{d_O}, \quad \frac{\beta}{d_S} = \frac{\beta'}{d_O}.$$
 (7.92)

186

Разрешая полученное равенство относительно α' и β' и подставляя в (7.91), имеем:

$$\Delta = \alpha + \beta + \frac{d_0}{d_s}(\alpha + \beta) = \delta\phi\left(1 + \frac{d_0}{d_s}\right), \tag{7.93}$$

где мы также использовали (7.90). Окончательно

$$\delta\phi = \frac{\Delta}{1 + d_O/d_S}.\tag{7.94}$$

Мы видим, что угол линзирования $\delta\phi$ ограничен сверху величиной Δ . Он достигает этой верхней границы при $d_S \to \infty$. Из рис. 7.6 становится также ясно, что линзирование возникает только тогда, когда *O* находится внутри сектора *MAM'*. Если *O* находится вне этого сектора, имеется только одна геодезическая, и наблюдатель *O* видит только одно изображение.

За последние несколько лет выяснилось, что те изображения галактик, которые считались возникшими в результате линзирования космическими струнами, являются изображениями двух похожих, но разных галактик. Так как считается, что космические струны двигаются с околосветовыми скоростями, возможно, что линзы существуют только ограниченный промежуток времени, и их обнаружение бросает вызов ученым.

Можно косвенным образом убедиться в существовании космических струн. Они могут давать вклады в анизотропию температуры космического микроволнового фона. Отсутствие наблюдаемых свидетельств этого явления приводит к ограничению

$$\frac{G\mu_0}{c^2} < 3 \times 10^{-7}.\tag{7.95}$$

Формула (7.84) показывает, что для струн, подчиняющихся этому ограничению, углы линзирования будут меньше пары угловых секунд. Кроме того, движение космических струн порождает гравитационные волны. На самом деле, рассмотренные в предыдущем разделе каспы являются эффективными генераторами гравитационных волн. Возможно, что такие волны можно наблюдать с помощью детекторов гравитационных волн даже для струн с $G\mu_0/c^2 \sim 10^{-13}$. Хотя шансы и невелики, космические струны могут стать первыми экспериментальными подтверждениями выводов теории струн.

Задачи

Задача 7.1. Короткие доказательства, касающиеся свойств открытых струн в полностью свободными концевыми точками

Докажите следующие четыре утверждения, относящиеся к открытым струнам со свободными концевыми точками.

(a) Если одна концевая точка открытой струны в течение всего времени лежит на гиперплоскости, то и вся открытая струна в течение всего времени лежит на той же самой гиперплоскости.

- (б) Если одна концевая точка открытой струны в течение всего времени находится на расстоянии R от точки P_0 , то и вся открытая струна все время находится на расстоянии R от P_0 .
- (в) Если одна концевая точка открытой струны в течение всего времени лежит в некотором выпуклом подпространстве, то и вся открытая струна все время лежит в этом выпуклом подпространстве. [Это обобщение результатов, доказанных в пп. (а) и (б).]
- (г) Покажите, что длина ℓ открытой струны, параметризованной с помощью энергии (раздел 7.3), дается выражением

$$\ell = \int_0^{\sigma_1} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \, d\sigma.$$

Задача 7.2. Дальнейшее исследование жестко вращающейся струны

Пусть $s \in (-\ell/2, \ell/2)$ — параметр длины для жестко вращающейся струны, рассмотренной в разделе 7.4, причем s = 0 в неподвижном центре струны. Пусть $\mathcal{E}(s)$ обозначает энергию единицы длины как функцию s.

- (a) Покажите, что $\mathcal{E}(s) = \frac{T_0}{\sqrt{1 4s^2/\ell^2}}$. Нарисуйте график $\mathcal{E}(s)$ как функцию *s*. Обратите внимание, что $\mathcal{E}(s)$ имеет интегрируемые особенности в концевых точках струны, и покажите, что полная энергия равна $\pi \ell T_0/2$.
- (б) Для каких точек на струне локальная плотность энергии равна средней плотности энергии?
- (в) Вычислите энергию $\widehat{E}(s)$, переносимую струной на интервале [-s, s]. Чему должно быть равно значение $\frac{s}{(\ell/2)}$ для того, чтобы эта энергия равнялась: половине полной энергии струны? 90% полной энергии?

Задача 7.3. Временная эволюция первоначально статической замкнутой релятивистской струны

Эволюция во времени замкнутых струн в статической калибровке подчиняется уравнениям (7.26), (7.27) и (7.28).

- (a) Предположим, что $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(0,\sigma) = 0$ и запишем общее решение для $\vec{X}(t,\sigma)$ через векторную функцию $\vec{F}(u)$ едной переменной. Что потребуют от \vec{F} условия параметризации?
- (б) На замкнутой струне параметр σ определен на окружности $\sigma \simeq \sigma + \sigma_1$. Какое условие нужно наложить на $\vec{X}(t, \sigma)$, чтобы это выполнялось? Какие приложения существуют у таких \vec{F} ?
- (в) Рассмотрим замкнутую струну, которая статична при t = 0 и вычерчивает замкнутую кривую γ длиной ℓ . Как связаны σ_1 и ℓ ? Найдите время $t_P > 0$, меньшее чем ℓ/c , через которое замкнутая струна вновь прочертит кривую γ . Сравните $\vec{X}(t_P, \sigma) \subset \vec{X}(0, \sigma)$ для струны в нулевой момент времени.

(г) Опишите операции, которые следует выполнить с помощью компьютера (вычисляющего интегралы и обратные функции), чтобы воспроизвести эволюцию во времени изначально статической замкнутой струны произвольной формы, лежащей в плоскости (x, y)? Предположите, что начальная струна задана вам как параметризованная замкнутая кривая $(x(\lambda), y(\lambda))$ с некоторым параметром $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Задача 7.4. Релятивистская скакалка Кейси

Рассмотрим релятивистскую открытую струну с закрепленными концевыми точками:

$$\vec{X}(t,0) = \vec{x}_1, \quad \vec{X}(t,\sigma_1) = \vec{x}_2.$$
 (1)

Граничное условие при $\sigma = 0$ удовлетворяется следующим решением волнового уравнения:

$$\vec{X}(t,\sigma) = \vec{x}_1 + \frac{1}{2} \big(\vec{F}(ct+\sigma_1) - \vec{F}(ct-\sigma_1) \big).$$
(2)

Здесь \vec{F} — векторная функция одной переменной.

- (a) Используйте (2) и граничное условие при $\sigma = \sigma_1$ для нахождения условия на $\vec{F}(u)$.
- (б) Запишите ограничение на $\vec{F}(u)$, возникающее из условий параметризации (7.42).

В качестве приложения познакомимся с попыткой Кейси использовать релятивистскую открытую струну как скакалку. Для этого она удерживает открытую струну (в трех пространственных измерениях) правой рукой в начале координат $\vec{x}_1 = (0, 0, 0)$, а левой рукой — в точке $z = L_0$ на оси z, иначе говоря, в точке $\vec{x}_2 = (0, 0, L_0)$ (рис. 7.7). Когда она начинает прыгать, мы видим, что касательный к струне вектор \vec{X}' в начале координат вращается вокруг оси z, образуя с ней угол γ .

- (в) Используя приведенную информацию, запишите выражение для $\vec{F}'(u)$.
- (г) Найдите величину σ_1 , выраженную через длину L_0 и угол γ .
- (д) Вычислите $\vec{X}(t, \sigma)$ для движения релятивистской скакалки Кейси.
- (е) Как распределена энергия струны как функция z?

• Задача 7.5. Плоское движение открытой струны с закрепленными концевыми точками Рассмотрим движение релятивистской открытой струны в плоскости (x, y). Конечные точки струны прикреплены к точкам (x, y) = (0, 0) и (x, y) = (a, 0), a > 0. В противоположность релятивистской скакалке, струна теперь остается в плоскости (x, y). Движение описывается выражением

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct+\sigma) - \vec{F}(ct-\sigma) \right), \tag{1}$$

где $\vec{F}'(u)$ — векторная функция одной переменной, удовлетворяющая условиям

$$\left|\frac{d\vec{F}}{du}\right|^{2} = 1, \quad \varkappa \quad \vec{F}(u+2\sigma_{1}) = \vec{F}(u) + (2a,0).$$
(2)



Рис. 7.7. К задаче 7.4: релятивистская скакалка Кейси

Рассмотрим гипотезу вида

$$\vec{F}'(u) \equiv \frac{d\vec{F}}{du} = \left(\cos\left[\gamma\cos\frac{\pi u}{\sigma_1}\right], \sin\left[\gamma\cos\frac{\pi u}{\sigma_1}\right]\right). \tag{3}$$

- (а) Согласуется ли эта гипотеза с условиями (2)?
- (б) Вычислите $\vec{X}'(0, \sigma)$. Положив $\vec{X}(0, \sigma) \equiv (x(\sigma), y(\sigma))$, найдите $dy/d\sigma$ и постройте ее как функцию $\sigma \in [0, \sigma_1]$, предполагая для удобства, что $0 < \gamma < \pi/2$. Используя эти данные, сделайте грубый набросок положения струны $y(\sigma)$ как функции σ при t = 0.
- (в) Вычислите $\vec{X}'(t, \sigma)$ и используйте эту величину для описания движения струны вблизи начала координат. Как можно интерпретировать величину γ ?
- (г) Используйте второе условие в (2), чтобы найти интегральное соотношение между a, σ_1 и γ . Предполагая, что γ мало, найдите приближенное явное соотношение между этими тремя переменными, учитывая слагаемые до γ^2 .
- (д) Покажите, что $a/\sigma_1 = J_0(\gamma)$, где J_0 функция Бесселя нулевого порядка. [Указание: Посмотрите интегральные представления бесселевых функций.]

Задача 7.6. Плоское движение и формирование каспов

Продолжим рассмотрение решения, полученного в задаче 7.5, где было показано, что $a/\sigma_1 = J_0(\gamma)$. Здесь a — расстояние между закрепленными концевыми точками открытой струны, а σ_1 — параметр длины струны, равный длине струны в любой момент времени, когда струна имеет нулевую скорость (почему?). Связь между a и угловой переменной γ необычна, так как J_0 не является периодической функцией. Это означает, что движения открытой струны, соответствующие значениям γ и $\gamma + 2\pi$, не совпадают.

190

(а) Покажите, что мгновенный наклон струны описывается выражением

$$\vec{X}'(t,\sigma) = \cos\left(\gamma\sin\frac{\pi ct}{\sigma_1}\sin\frac{\pi\sigma}{\sigma_1}
ight)(\cos\beta,\sin\beta), \quad \text{где} \quad \beta = \gamma\cos\frac{\pi ct}{\sigma_1}\cos\frac{\pi\sigma}{\sigma_1}.$$

Покажите, что при $ct = \sigma_1/2$ струна горизонтальна.

 (б) Докажите, что мгновенная (поперечная) скорость струны удовлетворяет соотношению

$$\left|\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right| = \left|\sin\left(\gamma \sin\frac{\pi ct}{\sigma_1}\sin\frac{\pi \sigma}{\sigma_1}\right)\right|.$$

Обратите внимание на то, что при t = 0 струна имеет нулевую скорость. Докажите, что при любых $\gamma < \pi/2$ ни одна точка струны никогда не достигает скорости света. Кроме того, покажите, что при $\gamma = \pi/2$ средняя точка струны $\sigma = \sigma_1/2$ достигает скорости света в случае, когда струна горизонтальна.

- (в) Легко прослеживаемый случай получается при $\gamma = \sqrt{2}(\pi/2)$ ($\cong 127,3^{\circ}$). Покажите, что при $ct = \sigma_1/4$ одна точка струны достигает скорости света. Исследуйте струну в чуть более поздний момент времени $ct = \sigma_1/3$, и покажите, что существуют две точки, имеющие скорость, равную скорости света, а также найдите соответствующие значения σ . Проанализируйте \vec{X}' как функцию σ и покажите, что в каждой из этих точек струна имеет касп.
- (г) Используйте вашу любимую математическую программу для построения картины струны, рассмотренной в п. (в) в разные моменты времени (вам потребуется численное интегрирование). Предположите, что a = 1 и убедитесь, что $\sigma_1 \approx 10,155$. Как выглядит струна в моменты времени ct = 0, $\sigma_1/4$ и $\sigma_1/3$?

Задача 7.7. Каспы, возникающие в процессе эволюции замкнутых струн

В этой задаче мы выведем несколько свойств каспов, возникающих в процессе эволюции свободных замкнутых струн. Для этого детальнее исследуем уравнение (7.81).

(а) Используя разложение Тейлора функций $\vec{F}(u)$ и $\vec{G}(v)$ в окрестности u_0 и v_0 , докажите, что

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}''(u_0) + \vec{G}''(v_0) \right), \quad \vec{R} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'''(u_0) - \vec{G}'''(v_0) \right), \quad (1)$$

где штрихи означают производные по аргументу. Предположите, что указанное в формуле (7.76) пересечение путей на два-сфере регулярно: пути не параллельны в точке пересечения, и ни $\vec{F}''(u_0)$, ни $\vec{G}''(v_0)$ не равны нулю. Объясните, почему \vec{T} не равно нулю и ортогонально $\vec{F}'(u_0)$. В общем случае \vec{R} не обращается в нуль, хотя это возможно при специальных условиях.

(б) Формула (7.81) показывает, что касп открывается в направлении вектора \vec{T} и локально находится на плоскости, натянутой на векторы \vec{T} и \vec{R} . Зафиксируйте начало системы координат в точке \vec{X}_0 , задайте положительное направление оси y вдоль вектора \vec{T} и поместите ось x так, чтобы \vec{R} лежал в плоскости (x, y). Покажите, что вблизи каспа $y \sim x^{2/3}$. В какой плоскости лежит скорость каспа? (в) Рассмотрим функции $\vec{F}(u)$ и $\vec{G}(v)$, задаваемые формулами

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi u}{\sigma_1}, -\cos \frac{2\pi u}{\sigma_1}, 0 \right),$$

$$\vec{G}(v) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \left(\sin \frac{4\pi v}{\sigma_1}, 0, -\cos \frac{4\pi v}{\sigma_1} \right).$$
 (23)

Убедитесь, что условия (7.70) и (7.74) удовлетворяются. Для каспа в точке $t = \sigma = 0$ определите его направление, плоскость, в которой он лежит, и его скорость. Сделайте рисунок.

(г) Покажите, что движение замкнутой струны периодично с периодом $\sigma_1/(4c)$. (Вспомните, что в задаче 7.3 было найдено, что струна возвращается к своему исходному положению за меньший промежуток времени, чем функция $F(ct + \sigma)$ повторяет себя.) Сколько каспов образуется за период?

Задача 7.8. Подсчет геодезических на конусе

Пусть $\Delta < 2\pi$ — дефицит угла конуса и $\alpha = 2\pi - \Delta$ — угол при вершине *A*. Рассмотрим две точки *P* и *Q* на конусе, разделенные углом $\phi > 0$: луч из вершины, проходящий через *Q*, получается из луча из вершины, проходящего через *P*, вращением по часовой стрелке на угол ϕ . Число *N* геодезических, соединяющих точки *P* и *Q*, дается формулой

$$N = \left[\frac{\pi - \phi}{\alpha}\right] + \left[\frac{\pi + \phi}{\alpha}\right] + 1,$$

где [x] обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x. Удобное изображение конической области и ее копий дано на рис. 7.8.

- (a) Убедитесь в справедливости (1), подсчитав число геодезических от P до Q и от Pдо изображений Q, получающихся в направлениях против часовой стрелки.
- (б) Проверьте, что N есть инвариант относительно замены $\phi \to \alpha - \phi$ и объясните, почему так должно быть.



Рис. 7.8. Серым отмечен конус с углом при вершине развертки α ; две точки, *P* и *Q*, разделены углом ϕ

(в) Случай, относящийся к гравитационному линзированию, — это $\Delta < \pi$. Каковы возможные значения N как функции ϕ ?

192

Глава 8

Токи на мировых листах

Для того чтобы глубже понять явление, физики часто обращаются к идеям симметрии и инвариантности. Свойства симметрии динамических систем и сохраняющиеся величины тесно связаны друг с другом. Мы узнаем, что в теории струн существуют токи, текущие по двумерному мировому листу, заметаемому струной в пространстве-времени. Связанные с этими токами сохраняющиеся заряды являются ключевыми величинами, характеризующими свободное движение струн. Мы приводим простую физическую интерпретацию объектов \mathcal{P}^{τ} и \mathcal{P}^{σ} , с которыми уже сталкивались ранее.

8.1. Сохранение электрического заряда

Начнем изучение вопроса с обзора физики и математики закона сохранения заряда в рамках теории Максвелла. Этот классический пример поможет развить более общее представление о сохраняющихся токах.

В электромагнетизме сохраняющийся ток — это 4-вектор $j^{\alpha} = (c\rho, \vec{j})$, где ρ — плотность заряда, а \vec{j} — плотность тока. Почему мы говорим, что j^{α} — это сохраняющийся ток? По определению, так как он удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\alpha} j^{\alpha} = 0. \tag{8.1}$$

Любой 4-вектор, удовлетворяющий такому уравнению, называется сохраняющимся током. Термин «сохраняющийся ток» немного вводит в заблуждение, но так принято говорить. Более точно следует говорить о сохраняющемся *заряде*, так как сохраняется именно заряд, связанный с током. Посмотрим, как возникает этот закон сохранения.

Если разделить пространственные и временной индексы в (8.1), получим:

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$
 (8.2)

Почему же из этого уравнения следует сохранение заряда? В электромагнетизме полный заряд Q(t) в фиксированном объеме V есть просто интеграл от плотности заряда ρ по объему:

$$Q(t) = \int_{V} \rho(t, \vec{x}) d^{3}x = \int_{V} \frac{j^{0}(t, \vec{x})}{c} d^{3}x.$$
 (8.3)

7 Бартон Цвибах

С точностью до константы заряд является интегралом по пространству от нулевой компоненты тока. Его производная по времени дается выражением

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V} \frac{\partial j^{0}}{\partial x^{0}} d^{3}x. \qquad (8.4)$$

Используя уравнение (8.2), можно записать:

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{V} \nabla \cdot \vec{j} \, d^3x. \tag{8.5}$$

Пусть S — граница V, тогда по теореме Гаусса

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{S} \vec{j} \cdot d\vec{a}.$$
 (8.6)

В этом уравнении содержится физическое утверждение о сохранении заряда: заряд, заключенный в объеме V может изменяться только за счет потока заряда через поверхность S, ограничивающую этот объем. Во многих случаях мы выбираем V настолько большим, что ток \vec{j} обращается в нуль на поверхности S. В этих случаях

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \tag{8.7}$$

Тогда заряд Q не зависит от времени и про него говорят, что он «сохраняется». Кроме того, хорошо установлено, что электрический заряд является лоренц-инвариантным: все инерциальные наблюдатели, измеряющие заряд, получают одно и то же число. Не все сохраняющиеся величины являются лоренц-инвариантными. Например, энергия сохраняется, но энергия не является лоренц-инвариантной величиной. Детальнее мы рассмотрим эти факты в задачах 8.1 и 8.2.

8.2. Возникновение сохраняющихся зарядов из симметрий лагранжиана

Одним из самых полезных свойств функций Лагранжа является то, что ими можно пользоваться для вывода сохраняющихся величин. Такие величины помогают понять динамику системы. В этом разделе мы начнем наше исследование в рамках Лагранжевой механики и поймем, как построить сохраняющуюся величину, связанную с симметрией. Затем мы обратимся к лагранжианам и покажем, как построить связанные с симметрией сохраняющиеся токи.

Пусть $L(q(t), \dot{q}(t); t)$ — функция Лагранжа, зависящая от координаты q(t), скорости $\dot{q}(t)$ и, возможно, даже имеющая явную зависимость от времени. Кроме того, рассмотрим вариацию координаты q(t):

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t),$$
 (8.8)

194

где $\delta q(t)$ — некоторая конкретная бесконечно малая вариация. Например, если q(t) представляет путь частицы, то указанная вариация представляет собой инструкцию о том, как меняется путь: положение в момент времени t изменяется на $\delta q(t)$. Предположим, что у нас есть правило, говорящее о том, как изменяется каждый путь q(t). Это означает, что для любого заданного пути q(t) мы знаем, как построить соответствующую вариацию $\delta q(t)$. Такое правило можно записать в виде

$$\delta q(t) = \epsilon h(q(t); t), \qquad (8.9)$$

где ϵ — бесконечно малая постоянная, а h — некоторая функция.

В результате изменения пути (8.8) возникает индуцированное изменение скорости $\dot{q}(t)$:

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \frac{d(\delta q(t))}{dt}.$$
 (8.10)

Чтобы определить, как изменяется $L(q(t), \dot{q}(t); t)$ в результате вариации (8.8), мы должны также проварьировать скорость $\dot{q}(t)$ согласно (8.10). В дальнейшем будем говорить о вариации q(t), неявно подразумевая и соответствующую вариацию $\dot{q}(t)$. Так как δq — бесконечно малая, то вариация лагранжиана состоит только из слагаемых, линейных по δq . Если эти слагаемые обращаются в нуль, то говорят, что функция Лагранжа инвариантна. Кроме того, преобразование (8.8) называют в этом случае *преобразованием симметрии*. Правило, говорящее нам о том, как варьировать любой путь так, чтобы лагранжиан не изменялся, — это преобразование симметрии. Правило конкретизируется заданием функции h в (8.9).

Теперь сформулируем наше утверждение: если функция Лагранжа L инвариантна относительно вариации (8.8), то величина Q, определенная как

$$\epsilon Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \,\delta q, \qquad (8.11)$$

сохраняется во времени при *физическом движении*. Это означает, что для любого движения q(t), удовлетворяющего уравнениям движения, «заряд» Q есть константа¹⁾:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \tag{8.12}$$

Обратите внимание, ϵ в левой части уравнения (8.11) сокращается с ϵ , возникающим в δq (см. (8.9)).

Чтобы доказать уравнение сохранения заряда, рассмотрим уравнения Эйлера— Лагранжа, вытекающие из вариации действия $S = \int dt L$ (их вывод представлен

¹⁾ Для таких сохраняющихся величин обычно используется термин «интеграл движения». — Прим. ред. перевода.

в задаче 4.8). Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{8.13}$$

Так как функция Лагранжа не изменяется при вариациях координаты и скорости (8.8) и (8.10), мы должны иметь

$$\frac{\partial L}{\partial q} \,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \,\frac{d}{dt} (\delta q) = 0. \tag{8.14}$$

Используя (8.13) для исключения $\partial L/\partial q$, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) = 0, \qquad (8.15)$$

откуда вытекает, что (8.12) верно для всех Q, удовлетворяющих уравнению (8.11).

Применим этот новый результат, касающийся сохраняющихся величин, к функции Лагранжа $L(\dot{q}(t))$, зависящей только от скорости. Как мы в этом случае можем варьировать q(t), не изменяя функцию Лагранжа? Один способ применить преобразование $q(t) \rightarrow q(t) + \epsilon$, где ϵ — любая постоянная. В этой вариации $\delta q(t) = \epsilon$ и функция h в (8.9) просто равна единице. Это преобразование — трансляция в однородном пространстве: в любой момент времени tположение частицы изменяется на одну и ту же величину ϵ . Соответственно, скорость не изменяется: $\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + d\epsilon/dt = \dot{q}(t)$. Так как функция Лагранжа зависит только от скорости, она не изменяется, и у нас возникает симметрия. Используя (8.11), находим:

$$\epsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, \delta q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, \epsilon \; \Rightarrow \; Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p. \tag{8.16}$$

Мы видим, что Q — импульс, соответствующий координате q. Эта величина сохраняется, так как в функции Лагранжа не содержится координаты. Заметьте, что закон сохранения dQ/dt = 0 совпадает с уравнением Эйлера—Лагранжа (8.13). Этот пример иллюстрирует знакомый результат Лагранжевой механики: если функция Лагранжа системы не содержит некоторой координаты, то сопряженный этой координате импульс сохраняется. Например, для нерелятивистской свободной частицы $L = m(\dot{q})^2/2$, и в этом случае $Q = m\dot{q}$.

Рассмотрим теперь симметричные плотности лагранжиана. В то время как из симметрии функции Лагранжа следуют законы сохранения «зарядов», симметри плотности лагранжиана соттветствуют законам сохранения *токов*. Запише действие как интеграл от лагранжиана по всему набору координат ξ^{α} в некотором подходящем «мире»:

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a). \qquad (\vec{8}, \vec{5})$$

Здесь k обозначает число пространственных измерений мира. Таким миром может быть пространство-время Минковского целиком, некоторое его подпространство

или, например, двумерное параметрическое пространство на мировом листе струны. Поля $\phi^a(\xi)$ являются функциями координат, и

$$\partial_{\alpha}\phi^{a} = \frac{\partial\phi^{a}}{\partial\xi^{\alpha}} \tag{8.18}$$

— производные полей по координатам. Каждое значение индекса *a* соответствует компоненте поля. Рассмотрим теперь бесконечно малую вариацию

$$\phi^{a}(\xi) \to \phi^{a}(\xi) + \delta \phi^{a}(\xi), \qquad (8.19)$$

и связанную с ней вариацию производных поля $\partial_{\alpha} \phi^{a}$. Бесконечно малые вариации удобно записать в виде правила

$$\delta \phi^a = \epsilon^i h_i^a(\phi), \qquad (8.20)$$

позволяющего варьировать любую произвольную конфигурацию поля. Здесь ϵ^i — множество бесконечно малых постоянных, и для краткости опущены все индексы в аргументах h_i^a . Мы включили индекс в ϵ^i , так как вариация может зависеть от нескольких параметров. Например, пространственно-временная трансляция включает столько параметров, сколько имеется пространственно-временных измерений. Так как индекс *i* в (8.20) повторяется, это означает, что по нему производится суммирование. Следует ясно различать разные типы индексов, с которыми мы работаем:

- α индекс, помечающий мировые координаты ξ^{α} или компоненты векторов,
- *i* индекс, помечающий параметры в преобразовании симметрии,
- а индекс, помечающий компоненты поля в лагранжиане. (8.21)

Если \mathcal{L} инвариантен относительно преобразования (8.19) и соответствующих вариаций производных поля тогда величины j_i^{α} , определенные как

$$\epsilon^{i} j^{\alpha}_{i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \,\delta\phi^{a}, \qquad (8.22)$$

являются сохраняющимися токами:

$$\partial_{\alpha} j_i^{\alpha} = 0. \tag{8.23}$$

Приведем краткое доказательство. Уравнение (8.23) выполняется для любой полевой конфигурации, удовлетворяющей Лагранжевым уравнениям движения. В (8.22) по повторяющемуся полевому индексу a производится суммирование. Если в (8.20) присутствует индекс i, то у нас возникает несколько токов, пронумерованных индексом i, по одному на каждый параметр вариации. Компоненты токов, число которых равно размерности мира, проиндексированы буквой α . Важно не перепутать совершенно различную роль, которую играют эти два типа индексов:

$$j_i^{\alpha}$$
: *i* помечает различные токи,
 α помечает компоненты токов. (8.24)

Мы показали в разделе 8.1, что сохраняющиеся токи порождают сохраняющиеся заряды. Эти заряды есть интегралы по пространству от нулевой компоненты тока. Отсюда, токи j_i^{α} порождают сохраняющиеся заряды

$$Q_i = \int d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k j_i^0. \qquad (8.25)$$

Имеется столько же сохраняющихся зарядов, сколько параметров содержится в преобразовании симметрии.

Упражнение-разминка 8.1. Проверьте, что из (8.23) следует, что

$$\frac{dQ_i}{d\xi^0} = 0. \tag{8.26}$$

где токи j_i^{lpha} достаточно быстро обращаются в нуль на пространственной бесконечности.

Чтобы доказать (8.23), запишем совместно уравнения Эйлера—Лагранжа, связанные с действием (8.17) (см. задачу 4.8), и утверждение об инвариантности:

$$\partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{a}} = 0, \qquad (8.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \,\delta \phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi^a)} \,\partial_\alpha (\delta \phi^a) = 0. \tag{8.28}$$

Используя первое уравнение для того, чтобы исключить $\partial \mathcal{L} / \partial \phi^a$ из второго уравнения, получим:

$$\partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \right) \delta \phi^{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \partial_{\alpha} (\delta \phi^{a}) = \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \delta \phi^{a} \right) = 0, \qquad (8.29)$$

и это показывает, что для токов, определенных как в (8.22), выполняется соотношение (8.23).

Мы будем использовать (8.22) для построения сохраняющихся токов, живущих на мировом листе струны. В действительности, сохраняющиеся заряды и сохраняющиеся токи существуют при несколько менее строгих ограничениях, чем сформулированные в этом разделе. В качестве преобразования симметрии функции Лагранжа или плотности лагранжиана можно рассматривать преобразования, при которых функция Лагранжа или лагранжиан изменяются на полную производную. Эти идеи используются в задачах 8.9 и 8.10.

8.3. Сохраняющиеся токи на мировом листе

Мы хотим приписать каждой струне релятивистский импульс p_{μ} , который сохраняется, если струна движется свободно. Даже несмотря на то, что у импульса p_{μ} есть индекс, это не ток, а, скорее, «заряд». На самом деле, так как каждая компонента p_{μ} должна сохраняться по отдельности, мы имеем дело со случаем множества сохраняющихся зарядов.

В обозначениях предыдущего раздела Q_i означает различные заряды, так что индекс μ в p_{μ} играет роль индекса i у Q_i , т.е. он нумерует различные заряды. Каков же тогда смысл индекса α в j_i^{α} ? Мы увидим, что этот индекс помечает координаты на мировом листе. Токи живут на мировом листе!

В действии струны (6.39) лагранжиан интегрируется по координатам мирового листа τ и σ , а не по пространственно-временным координатам x^{μ} . В этом случае «мир» (8.17) двумерен, и индекс α в (8.21) принимает два значения. В результате, сохраняющиеся токи живут на мировом листе: у них две компоненты и они являются функциями координат мирового листа. В более явной форме

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_0 X^\mu)$$
 при $(\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma),$ (8.30)

где $\partial_{\alpha} = \partial/\partial \xi^{\alpha}$. Сравнивая с (8.17), мы видим, что полевые переменные ϕ^{α} являются просто координатами струны X^{μ} . Заметим, что действие струны зависит только от производных координат струны.

Чтобы найти сохраняющиеся токи, нам нужно знать вариации поля δX^{μ} , не изменяющие лагранжиан. Одна такая вариация равна

$$\delta X^{\mu}(\tau,\sigma) = \epsilon^{\mu}, \qquad (8.31)$$

где ϵ^{μ} — постоянная, т.е. не зависит от τ и σ . Это преобразование является постоянной пространственно-временной трансляцией: каждая точка на мировом листе смещается на один и тот же вектор ϵ^{μ} . Плотность лагранжиана инвариантна, так как зависит только от производных $\partial_{\alpha} X^{\mu}$, вариации которых обращаются в нуль: $\delta(\partial_{\alpha} X^{\mu}) = \partial_{\alpha}(\delta X^{\mu}) = \partial_{\alpha} \epsilon^{\mu} = 0$. Теперь ясна роль различных индексов в (8.21): α — индекс координат на мировом листе, *i* и *a* — пространственновременные индексы.

Построим теперь сохраняющийся ток. Используя (8.22) и позволяя индексам i и a пробегать значения μ , имеем:

$$\epsilon^{\mu} j^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} X^{\mu})} \, \delta X^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} X^{\mu})} \, \epsilon^{\mu}. \tag{8.32}$$

Сокращая общий множитель ϵ^{μ} с двух сторон этого уравнения, находим выражение для токов:

$$j^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} X^{\mu})} \Rightarrow (j^{0}_{\mu}, j^{1}_{\mu}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu \nu}}\right).$$
(8.33)

Мы встречались с такими производными от \mathcal{L} ранее — они входили в уравнения (6.49) и (6.50). На самом деле, можно сопоставить

$$j^{\alpha}_{\mu} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu} \Rightarrow (j^{0}_{\mu}, j^{1}_{\mu}) = (\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}, \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}).$$
 (8.34)

Это очень интересный результат: верхними индексами τ и σ в \mathcal{P}_{μ} отмечают компоненты тока на мировом листе. Уравнение закона сохранения тока имеет вид

$$\partial_{\alpha} \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} = 0.$$
 (8.35)

Это просто уравнение движения релятивистской струны (6.53)

Так как токи $\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}$ несут индекс μ , сохраняющиеся заряды также помечены этим же индексом. Следуя (8.25), чтобы получить заряды, нужно проинтегрировать нулевую компоненту \mathcal{P}^{τ}_{μ} токов по пространству. В данном случае это означает интегрирование по σ :

$$p_{\mu}(\tau) = \int_{0}^{\sigma_{1}} \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}(\tau, \sigma) \, d\sigma. \qquad (8.36)$$

Интеграл берется при фиксированном τ . Мы назвали сохраняющиеся заряды p_{μ} , так как они отвечают переносящемуся струной пространственно-временному импульсу. Действительно, как мы видели, эти заряды возникают из пространственно-временной трансляционной инвариантности. Так как (8.36) дает полный пространственно-временной импульс как интеграл по струне, параметризованной координатой σ , мы получаем:

$$\mathcal{P}^{\prime}_{\mu}$$
 есть плотность по σ (8.37) пространственно-временного импульса, переносимого струной.

Здесь \mathcal{P}^{τ}_{μ} — производная плотности лагранжиана по скорости \dot{X}^{μ} , так что ее, в согласии с (8.37), можно интерпретировать как плотность канонического импульса. Похожая трактовка была получена для нерелятивистских струн: величину \mathcal{P}^{t} , определенную ранее формулой (4.46), можно интерпретировать на основании (4.43) как плотность импульса.

Проверим закон сохранения, дифференцируя (8.36) по τ и используя уравнение движения (8.35):

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau} = \int_{0}^{\sigma_{1}} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} \, d\sigma = -\int_{0}^{\sigma_{1}} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} = -\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} \Big|_{0}^{\sigma_{1}}.$$
(8.38)

Для замкнутой струны координаты $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_1$ представляют одну и ту же точку на мировом листе, так что правая часть обращается в нуль. Для открытой

струны со свободными концевыми точками из граничных условий (6.56) следует, что $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ обращается в этих точках в нуль, так что опять правая часть обращается в нуль. В обоих этих случаях p_{μ} сохраняется:

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau} = 0. \tag{8.39}$$

В этом уравнении содержится несколько больше, чем в нашем предыдущем утверждении (8.12) о сохранении заряда. Производная в (8.39) берется по τ , но не по t. Поэтому можно задать вопрос: сохраняется ли p_{μ} во времени мирового листа или во времени Минковского? Мы обсудим этот вопрос подробнее в следующем разделе. Короткий ответ: сохраняется в обоих случаях.

Если открытая струна удовлетворяет граничным условиям Дирихле по некоторым пространственным направлениям, импульс струны вдоль этих направлений может не сохраняться. Действительно, граничное условие (6.55) не гарантирует, что правая часть (8.38) обращается в нуль. Мы уже отмечали возможность такого несохранения для нерелятивистских струн (раздел 4.6). В теории открытых струн, когда у нас есть D-браны, не заполняющие пространство, возникают граничные условия Дирихле. В этом случае импульс струны может не сохраняться, но полный импульс струны и D-браны сохраняется.

8.4. Полный ток импульса

Уравнение (8.39) очень занимательно. Это закон сохранения на мировом листе, а не в пространстве-времени. Иного мы и не могли ожидать: помимо всего, токи живут на мировом листе, их индексы — это индексы мирового листа, а их аргументы — координаты мирового листа. С точки зрения пространствавремени токи обращаются в нуль везде, кроме поверхности, заметенной струной.

Если мы доверяем репараметризационной инвариантности, мы легко можем получить стандартный пространственно-временной закон сохранения, выбрав статическую калибровку $t = \tau$. Интеграл в (8.36) является тогда интегралом по струнам, линии постоянного времени соответствуют точке зрения избранного лоренцевского наблюдателя. Тогда закон сохранения (8.39) принимает вид

$$\frac{dp_{\mu}}{dt}=0. \tag{8.40}$$

Лоренцевский наблюдатель подтверждает, что импульс сохраняется во времени.

Уравнение (8.39) вместе с (8.36) утверждает, что при любой параметризации мирового листа мы можем вычислить единственную величину p_{μ} , используя любую линию постоянного τ . Как мы сейчас объясним, эта величина должна совпадать с независящим от времени импульсом p_{μ} , полученным с помощью статической калибровки.

Рассмотрим движущуюся струну, фиксированного лоренцевского наблюдателя и конкретный выбор параметризации мирового листа. В такой параметриза-



Рис. 8.1. Слева: полный поток импульса, исходящего из односвязной области ${\cal R}$ на мировом листе равен нулю. Справа: односвязная область, граница которой включает кривую γ и струну $ar\gamma$

ции линии постоянного τ в некоторой области мирового листа являются линями постоянного t. В результате, в этой области имеется статическая калибровка. В остальной части мирового листа параметризация гладко изменяется: линии постоянного τ уже не являются линиями постоянного времени. В силу (8.39) на остальной части мирового листа интеграл (8.36) должен все же давать то же значение p_{μ} , несмотря на то, что линии постоянного τ не являются струнами.

Из этих рассуждений следует, что *любая* кривая на мировом листе может быть использована для расчета сохраняющегося импульса p_{μ} . Однако уравнение (8.36) позволяет нам вычислить импульс только, если кривая есть кривая постоянного τ . Покажем теперь, как следует обобщить (8.36), чтобы иметь возможность вычислить импульс p_{μ} , используя (почти) произвольную кривую на мировом листе совместно с произвольной параметризацией мирового листа. Когда мы имеем дело с открытыми струнами, кривая должна растянуться от одной границы к другой. Когда мы имеем дело с замкнутыми струнами, кривая должна быть замкнутой нерастяжимой кривой.

Пересмотрим формулу (8.36), в которой производится интегрирование τ -компоненты двумерного тока ($\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}, \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$) по кривой постоянного τ . Величина, вычисляемая в этом интеграле, есть на самом деле *поток* тока вдоль кривой. Так как σ -компонента $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ тока касательна к кривой постоянного τ , она не дает вклада в поток. В общем случае, рассмотрим бесконечно малый сегмент ($d\tau, d\sigma$) вдоль ориентированной замкнутой кривой Γ , которая замыкает односвязную область \mathcal{R} на мировом листе (рис. 8.1). Так как ($d\tau, d\sigma$) параллелен ориентированной касательной, исходящая нормаль к сегменту есть ($d\sigma, -d\tau$). Разумно определить исходящий поток тока через сегмент как скалярное произведение вектора тока и исходящего вектора нормали:

поток через бесконечно малый сегмент границы =

$$= \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}, \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\right) \cdot \left(d\sigma, -d\tau\right) = \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \, d\sigma - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \, d\tau. \tag{8.41}$$

Покажем теперь, что определенный так поток обращается в нуль, если его вычислить вдоль растяжимой замкнутой кривой Γ на мировом листе. Это разумный результат, так как растяжимая замкнутая кривая окружает область \mathcal{R} , и мы не ожидаем, что область является источником импульса или его стоком. Исходящий поток через Г записывается как

$$p_{\mu}(\Gamma) = \oint_{\Gamma} \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \, d\sigma - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \, d\tau \right). \tag{8.42}$$

С помощью двумерного варианта теоремы Гаусса поток тока $\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}$ из \mathcal{R} равен интегралу от дивергенции $\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}$ по \mathcal{R} :

$$p_{\mu}(\Gamma) = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} \right) d\tau \, d\sigma = 0, \tag{8.43}$$

так как \mathcal{P}^{a}_{μ} есть сохраняющийся ток. Именно это мы хотели показать.

Упражнение-разминка 8.2. Рассмотрим R² с координатами (x, y) и односвязную область M, окруженную границей Γ, ориентированной против часовой стрелки. Теорема Гаусса для вектора (A^x, A^y) гласит:

$$\oint_{\Gamma} (A^x \, dy - A^y \, dx) = \iint_{M} \left(\frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} \right) \, dx \, dy. \tag{8.44}$$

Проверьте, что это уравнение выполняется для малого прямоугольника, координаты углов которого равны (x_0, y_0) , $(x_0 + dx, y_0)$, $(x_0 + dx, y_0 + dy) u$ $(x_0, y_0 + dy)$. Этого достаточно, чтобы доказать справедливость формулы (8.44) путем разбиения M на совокупность малых прямоугольников. Для перехода от (8.42) κ (8.43) мы использовали (8.44) для \mathbb{R}^2 с координатами (τ, σ) и вектором $(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}, \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu})$.

Обобщим теперь (8.36) следующим образом. Для произвольной кривой γ , берущей начало на границе $\sigma = 0$ мирового листа и заканчивающейся на границе $\sigma = \sigma_1$, определим

$$p_{\mu}(\gamma) = \int_{\gamma} \left(\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} \, d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} \, d\tau \right). \tag{8.45}$$

Если γ есть кривая постоянного τ , тогда $d\tau = 0$ везде вдоль γ , и $p_{\mu}(\gamma)$ сводится к (8.36). Докажем теперь, что $p_{\mu}(\gamma)$, определенный в самом общем виде формулой (8.45), действительно совпадает с p_{μ} , определенным в (8.36). Рассмотрим кривую γ , натянутую от одной границы мирового листа до другой, и кривую $\overline{\gamma}$ постоянного τ , как показано на рис. 8.1). Пусть α и β обозначают ориентируемые пути вдоль границы мирового листа, такие, что замкнутая кривая Γ , окружающая заштрихованную область, определяется формулой

$$\Gamma = \vec{\gamma} - \beta - \gamma + \alpha. \tag{8.46}$$

Кривая Γ ориентирована против часовой стрелки и стягиваема. В результате поток $p_{\mu}(\Gamma)$ обращается в нуль:

$$p_{\mu}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left(\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} d\tau \right) = \left(\int_{\overline{\gamma}} - \int_{\gamma} + \int_{\alpha} - \int_{\beta} \right) \left(\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} d\tau \right) = 0.$$
(8.47)

Так как α и β — кривые, на которых $d\sigma$ обращается в нуль, вклад в интегралы дает только $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} d\tau$. Но $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ обращается в нуль в концевых точках струны (для свободных концов), так что эти интегралы тождественно обращаются в нуль. Остаются только интегралы по γ и $\overline{\gamma}$, так что

$$\int_{\gamma} \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \, d\sigma - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \, d\tau \right) = \int_{\overline{\gamma}} \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \, d\sigma - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \, d\tau \right) = \int_{\overline{\gamma}} \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \, d\sigma = p_{\mu}, \qquad (8.48)$$

где мы учли, что на $\bar{\gamma} d\tau = 0$, и использовали (8.36). Этим доказывается, что $p_{\mu}(\gamma) = p_{\mu}$ для любой точки γ , связывающей границы мирового листа $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_1$. Следовательно, можно переписать (8.45) как

$$p_{\mu} = \int_{\gamma} \left(\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} \, d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} \, d\tau \right). \tag{8.49}$$

Теперь закон сохранения есть утверждение, что приведенный выше интеграл не зависит от выбора кривой γ , до тех пор, пока концевые точки γ лежат на граничных компонентах мирового листа.

Аналогичные рассуждения применимы и к случаю замкнутых струн. Мы рассматриваем произвольную нетривиальную замкнутую кривую γ , один раз обернутую вокруг мирового листа, и другую аналогичную нетривиальную замкнутую кривую $\overline{\gamma}$ постоянного τ для некоторой произвольной, но фиксированной параметризации. Две кривые образуют границу кольцевой области \mathcal{R} (рис. 8.2). Совершенно аналогичные аргументы показывают, что оба контура дают одинаковый вклад в p_{μ} . Поэтому можно вычислить импульс замкнутой струны, используя любую замкнутую кривую, один раз обернутую вокруг мирового листа.

Как произвольный лоренцевский наблюдатель должен использовать уравнение (8.49)? Наблюдатель смотрит на струну в какой-то момент t и спрашивает о ее импульсе. Это требует использования формулы (8.49), где кривая γ соответствует обсуждаемой струне. В случае произвольной параметризации γ не должна быть кривой постоянного τ . В более поздний момент времени t' наблюдатель снова спрашивает про импульс. В этот момент струна соответствует кривой γ' , в общем случае отличной от γ . В силу независимости выбора от кривой выражения (8.49),



Рис. 8.2. Мировой лист замкнутой струны с произвольной нетривиальной замкнутой кривой γ и замкнутой кривой γ при постоянном γ Область между кривыми есть R

наблюдатель заключает, что импульс не изменяется. Иными словами, импульс сохраняется во времени.

Завершим этот раздел сопоставлением с известными результатами. Используя фиксированный момент времени τ струны γ для вычисления (8.49), получим

$$p^{0} = \int_{\gamma} \mathcal{P}^{\tau 0} d\sigma, \quad \vec{p} = \int_{\gamma} \vec{\mathcal{P}}^{\tau} d\sigma.$$
 (8.50)

Значения плотностей импульса в статической калибровке возьмем из формулы (6.94). Таким образом, мы находим, что энергия и пространственный импульс струны задаются выражениями

$$p^{0} \equiv \frac{E}{c} = \frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{T_{0} \, ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^{2}}{c^{2}}}}, \quad \vec{p} = \int_{\gamma} \frac{T_{0} \, ds}{c^{2}} \frac{\vec{v}_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^{2}}{c^{2}}}}.$$
(8.51)

Приведенное выше выражение для энергии струны совпадает с (7.9). Выражение для импульса разумно: импульс, переносимый малым кусочком струны, дается произведением массы $T_0 ds/c^2$ и скорости, умноженной на релятивистский фактор γ .

8.5. Лоренцевская симметрия и связанные с ней токи

По построению, действие релятивистской струны лоренц-инвариантно. Оно записано с помощью лоренцевских векторов, свернутых так, чтобы образовать лоренцевские скаляры. Это означает, что лоренцевские преобразования координат X^{μ} оставляют действие инвариантным. В этом разделе мы построим сохраняющиеся заряды, связанные с лоренцевской симметрией.

Эти заряды будут особенно полезны при изучении квантовой теории струн в главе 12. Как бы мы не квантовали классическую систему, существует возможность, что будут потеряны ключевые симметрии классической теории. Если при квантовании теряется лоренцевская симметрия, квантовая теория струн станет, по меньшей мере, весьма спорной. Мы должны убедиться, что квантовая теория лоренц-инвариантна. Чтобы вычислить сохраняющиеся заряды, нам сначала понадобятся инфинитезимальные преобразования Лоренца. Вспомним (раздел 2.2), что лоренцевские преобразования являются линейными преобразованиями координат X^{μ} , оставляющими инвариантной квадратичную форму $\eta_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu}$. Каждое бесконечно малое линейное преобразование имеет вид $X^{\mu} \to X^{\mu} + \delta X^{\mu}$, где

$$\delta X^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} X_{\nu}. \tag{8.52}$$

Здесь $\epsilon^{\mu\nu}$ — матрица бесконечно малых постоянных величин. Лоренц-инвариантность накладывает условия на постоянные $\epsilon^{\mu\nu}$. Мы требуем, чтобы $\delta(\eta_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu}) = 0$ и поэтому

$$2\eta_{\mu\nu}(\delta X^{\mu})X^{\nu} = 2\eta_{\mu\nu}(\epsilon^{\mu\rho}X_{\rho})X^{\nu} = 2\epsilon^{\mu\rho}X_{\rho}X_{\mu} = 0.$$
 (8.53)

Представим, что матрица ϵ разделена на антисимметричную и симметричную части. Антисимметричная часть не дает вклада в $\epsilon^{\mu\rho} X_{\rho} X_{\mu}$. Из обращения в нуль $\epsilon^{\mu\rho} X_{\rho} X_{\mu}$ для всех значений X_{μ} следует, что симметричная часть ϵ равна нулю. Отсюда следует, что общее решение дается антисимметричной матрицей $\epsilon^{\mu\nu}$:

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}.\tag{8.54}$$

Таким образом, инфинитезимальные преобразования Лоренца очень просты: это преобразования вида $\delta X^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} X_{\nu}$ с антисимметричными параметрами $\epsilon^{\mu\nu}$. Результат верен для любого числа пространственно-временных измерений, так как лоренцевские преобразования всегда оставляют $\eta_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu}$ инвариантной.

- Упражнение-разминка 8.3. Рассмотрим фиксированную 2 × 2 матрицу A^{ab} (a, b = 1, 2), удовлетворяющую условию A^{ab}v_av_b = 0 для любых значений v₁ и v₂. Запишите четыре слагаемых левой части и из условия их обращения в нуль покажите в явном виде, что матрица A^{ab} должна быть антисимметрична.
- Упражнение-разминка 8.4. Повторите предыдущее упражнение для 4 × 4 матрицы є^{µν} (µ, ν = 0, 1, 2, 3), удовлетворяющей условию є^{µν} v_µv_ν = 0 для любых значений v₀, v₁, v₂, v₃.
- Упражнение-разминка 8.5. Покажите, что из (8.54) следует $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$.
- Упражнение-разминка 8.6. Исследуйте буст (2.36) для очень малых β . Запишите $x^{\prime\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu}$ и вычислите элементы матрицы $\epsilon^{\mu\nu}$. Покажите, что $\epsilon^{10} = -\epsilon^{01} = \beta$, и что все остальные элементы равны нулю. Это подтверждает, что для бесконечно малого буста матрица $\epsilon^{\mu\nu}$ антисиммерична.

Покажем теперь явно, что лагранжиан струны инвариантен относительно лоренцевских преобразований. Все слагаемые, возникающие в этом лагранжиане, имеют вид

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}, \qquad (8.55)$$

где ξ^{α} и ξ^{β} равны либо τ , либо σ . Мы утверждаем, что каждое такое слагаемое лоренц-инвариантно. Действительно,

$$\delta\left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}\right) = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \delta X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}\right) =$$
$$= \eta_{\mu\nu} \left(\epsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \epsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X_{\rho}}{\partial \xi^{\beta}}\right) =$$
$$= \epsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \epsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \delta X^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}}, \qquad (8.56)$$

где мы использовали $\eta_{\mu\nu}$ для опускания первого индекса у постоянных ϵ . Заменяя $\mu \rightarrow \dot{\rho}$ и $\rho \rightarrow \nu$ во втором слагаемом, получаем

$$\delta\left(\eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\xi^{\alpha}}\,\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\xi^{\beta}}\right) = (\epsilon_{\nu\rho} + \epsilon_{\rho\nu})\,\frac{\partial X^{\rho}}{\partial\xi^{\alpha}}\,\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\xi^{\beta}} = 0, \qquad (8.57)$$

в силу антисимметрии є. Это явно доказывает инвариантность действия струны.

206

Теперь можно использовать формулу (8.22) для записи токов. Из (8.52) следует, что роль малого параметра ϵ^i играет $\epsilon^{\mu\nu}$. Поэтому получаем:

$$\epsilon^{\mu\nu}j^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}X^{\mu})} \,\delta X^{\mu} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}\epsilon^{\mu\nu}X_{\nu}. \tag{8.58}$$

Так как ток $j^{\alpha}_{\mu\nu}$ умножается на антисимметричную матрицу $\epsilon^{\mu\nu}$, он должен быть также антисимметричным, так как любая симметричная часть тока зануляется в левой стороне равенства. Используя антисимметрию $\epsilon^{\mu\nu}$, можно записать правую часть равенства как

$$\epsilon^{\mu\nu}j^{\alpha}_{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu}\right) \left(X_{\mu}\mathcal{P}^{\alpha}_{\nu} - X_{\nu}\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}\right). \tag{8.59}$$

Выражение для токов может быть непосредственно взято из этого уравнения, так как сомножитель $\epsilon^{\mu\nu}$ в правой части явно антисимметричен. Поскольку общая нормировка токов находится в нашей власти, мы определяем токи $\mathcal{M}^{\alpha}_{\mu\nu}$ равенством

$$\mathcal{M}^{\alpha}_{\mu\nu} = X_{\mu}\mathcal{P}^{\alpha}_{\nu} - X_{\nu}\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}. \tag{8.60}$$

По построению,

$$\mathcal{M}^{\alpha}_{\mu\nu} = -\mathcal{M}^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{8.61}$$

Уравнение сохранения тока имеет вид

$$rac{\partial \mathcal{M}^{ au}_{\mu
u}}{\partial au} + rac{\partial \mathcal{M}^{\sigma}_{\mu
u}}{\partial \sigma} = 0, \hspace{1cm} (8.62)$$

и, по аналогии с (8.49), заряды (т. е. сохраняющиеся величины) определяются формулой

$$M_{\mu\nu} = \int_{\gamma} \left(\mathcal{M}^{\tau}_{\mu\nu} \, d\sigma - \mathcal{M}^{\sigma}_{\mu\nu} \, d\tau \right). \tag{8.63}$$

Заряды, как и токи, антисимметричны:

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}.$$
 (8.64)

Сохранение зарядов $M_{\mu\nu}$ есть результат независимости определения (8.63) от формы контура. Для замкнутых струн независимость от контура обусловлено приведенными ранее соображениями для случая импульса. Чтобы обеспечить независимость от контура для открытых струн, следует учесть одно обстоятельство. Интегралы $M_{\mu\nu}$ не должны содержать вкладов от линий на границе мирового листа. Это, в свою очередь, требует обращения в нуль $\mathcal{M}^{\sigma}_{\mu\nu}$ на границе. Это условие выполняется, так как $\mathcal{M}^{\sigma}_{\mu\nu}$ включает \mathcal{P}^{σ} мультипликативно, и \mathcal{P}^{σ} обращается в нуль на границе мирового листа. Как объяснялось в случае импульса, лоренцевский наблюдатель, измеряющий $M_{\mu\nu}$, используя струны в разные моменты времени, придет к выводу, что $dM_{\mu\nu}/dt = 0$.

Мы можем также вычислить лоренцевские заряды $M_{\mu\nu}$, используя линии постоянного τ . В этом случае

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{\tau}_{\mu\nu}(\tau,\sigma) \, d\sigma = \int \left(X_{\mu} \mathcal{P}^{\tau}_{\nu} - X_{\nu} \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \right) \, d\sigma. \tag{8.65}$$

Так как матрица $M_{\mu\nu}$ антисимметрична, имеется шесть сохраняющихся зарялов в четырех измерениях. Пусть *i* и *j* — пространственные индексы, M_{0i} три заряда, ассоциированные с тремя основными бустами, а M_{ij} — три заряда, связанные с тремя основными вращениями. Если $\vec{\mathcal{P}}^{\tau}$ — плотность импульса, то нормировка, выбранная в (8.60), обеспечивает, что \mathcal{M}_{ij}^{τ} в точности равен плотности углового момента. Как следствие, компоненты M_{ij} измеряют угловой момент струны \vec{L} через обычные соотношения $L_i = \epsilon_{ijk}M_{jk}/2$. Здесь ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный символ, причем $\epsilon_{123} = 1$. Более явно, $L_1 = M_{23}$, $L_2 = M_{31}$ и $L_3 = M_{12}$.

Заряды, связанные с бустами, равны

$$M^{0i} = \int d\sigma \left(ct \mathcal{P}^{\tau i} - X^i \mathcal{P}^{\tau 0} \right) = ct \ p^i - \int d\sigma \ X^i \mathcal{P}^{\tau 0}. \tag{8.66}$$

Умножая на c/E, где E — сохраняющаяся энергия струны, имеем

$$\frac{cM^{0i}}{E} = t \frac{c^2 p^i}{E} - \frac{1}{E} \int d\sigma X^i c \mathcal{P}^{\tau 0}. \qquad (8.67)$$

Так как $c\mathcal{P}^{\tau 0}$ есть плотность энергии вдоль струны, последнее слагаемое в правой части приведенного выше соотношения можно отождествить с зависящим от времени положением $X^{i}_{u.m.}(t)$ центра масс (энергии) струны. Таким образом, мы получаем

$$X_{u.M.}^{i}(t) = \frac{cM^{0i}}{E} + t \frac{c^{2}p^{i}}{E}.$$
(8.68)

Величина $c^2 p^i / E$ интерпретируется как скорость центра масс, так как она совпадает со скоростью точечной частицы с импульсом p^i и энергией E. Формула (8.68) описывает движение центра масс. Сохраняющиеся заряды M^{0i} вместе с Eопределяют положение центра масс в момент времени t = 0.

8.6. Параметр наклона lpha'

Натяжение струны T_0 является единственным размерным параметром, входящим в действие струны. В этом разделе мы обоснуем определение другого параметра — параметра наклона α' . Эти два параметра связаны, можно использовать один либо другой. Параметр α' имеет интересную физическую интерпретацию, которая используется со времени возникновения идеи струн. Если мы рассмотрим жестко вращающуюся открытую струну, то α' есть коэффициент пропорциональности, связывающий угловой момент J струны, измеренный в единицах \hbar , с квадратом ее энергии E. Точнее,

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2. \tag{8.69}$$

Так как левая часть равенства безразмерна, то величина α' имеет размерность обратного квадрата энергии:

$$[\alpha'] = \frac{1}{[E]^2}.$$
 (8.70)

Появление постоянной Планка \hbar в (8.69) есть просто соглашение. Постоянная α' была введена в квантовой теории струн, и ее связь с натяжением струны включает \hbar . Однако, для наших целей важен сам факт пропорциональности между J и E^2 . Это соотношение не содержит \hbar , если мы используем натяжение струны T_0 .

Чтобы проверить заданную формулой (8.69) пропорциональность, рассмотрим прямую открытую струну с энергией E, жестко вращающуюся в плоскости (x, y). Это в точности та задача, которая исследовалась в разделе 7.4. Единственный отличный от нуля компонент углового момента есть M_{12} , и его величина обозначается $J = |M_{12}|$. Из формулы (8.65) следует, что

$$M_{12} = \int_{0}^{\sigma_{1}} \left(X_{1} \mathcal{P}_{2}^{\tau} - X_{2} \mathcal{P}_{1}^{\tau} \right) d\sigma. \qquad (8.71)$$

Чтобы вычислить интеграл, нам нужны формулы для координат и импульсов вращающейся струны. Напомним формулу (7.63)

$$\vec{X}(t,\sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi c t}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi c t}{\sigma_1} \right), \qquad (8.72)$$

которая определяет компоненты (X_1, X_2) вращающейся струны. Используя уравнение (7.31), находим:

$$\vec{\mathcal{P}}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{T_0}{c} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left(-\sin \frac{\pi c t}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi c t}{\sigma_1} \right), \quad (8.73)$$

где правая часть дает компоненты $(\mathcal{P}_1^{\tau}, \mathcal{P}_2^{\tau})$. Таким образом, интеграл в (8.71) равен

$$M_{12} = \frac{\sigma_1}{\pi} \frac{T_0}{c} \int_0^{\sigma_1} \cos^2 \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} d\sigma = \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c}.$$
 (8.74)

Как и следовало ожидать для сохраняющегося заряда, зависимость от времени исчезла. Так как $J = |M_{12}|$ и $\sigma_1 = E/T_0$, находим, что

$$J = \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2.$$
 (8.75)

Таким образом, угловой момент пропорционален квадрату энергии струны. Сравнивая с формулой (8.69), мы получаем, что

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \quad \varkappa \quad T_0 = \frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c}. \tag{8.76}$$

Эти формулы связывают параметр наклона α' с натяжением струны T_0 .

Упражнение-разминка 8.7. Чтобы показать, насколько необычно соотношение J ~ E², рассмотрим одномерный прямой стержень постоянной длины и постоянной однородной массы, вращающийся вокруг средней точки. Покажите, что нерелятивистская энергия и угловой моменты связаны соотношением J ~ \sqrt{E}.

Можно получить ожидаемое соотношение $J \sim E^2$ путем следующих оценок. Мы знаем, что для жесткого ротатора $J = I\omega$, где I — момент инерции. Для тела массой M и линейными размерами порядка L имеем $I \sim ML^2$. Таким образом $J \sim ML^2\omega$. Для вращающейся релятивистской струны $M \sim E$, $L \sim E$ и $\omega \sim 1/E$ (см. (7.57)). В результате $J \sim E^2$.

Название «параметр наклона» возникло из-за того, что α' является наклоном графиков J/\hbar , если их построить как функцию квадрата энергии. На самом деле, траектории Редже являются приближенными линиями, возникающими при построении графика углового момента адронных возбуждений как функции квадрата энергии. В начале 1970-х гг., когда теория струн исследовалась в качестве теории сильных взаимодействий, параметр наклона α' был экспериментально измеряемой величиной, входящей в действие для струны. Действие (6.39), которое мы записывали через T_0 , принимает вид

$$S = \frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_i} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}.$$
 (8.77)

Оказывается, что в большинстве современных работ по теории струн вместо натяжения струны T_0 используется параметр наклона α' . В разделе 3.6 мы использовали \hbar , c и ньютоновскую постоянную G для вычисления характерной длины ℓ_P , называемой планковской длиной. В теории струн можно использовать \hbar , c и размерный параметр α' для построения характерной длины ℓ_s , называемой длиной струны.

Упражнение-разминка 8.8. Покажите, что

$$\ell_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}. \tag{8.78}$$

С точностью до множителей \hbar и *c*, длина струны ℓ_s есть квадратный корень из α' . Эта связь с фундаментальным масштабом длины позволяет дать еще одну физическую интерпретацию параметра наклона α' .

Задачи

Задача 8.1. Лоренцевские инварианты и их плотности

Мы хотим понять, каким образом лоренцевская инвариантность электрического заряда приводит к тому, что плотность заряда является нулевой компонентой лоренцевского вектора.

Рассмотрим две лоренцевские системы отсчета S и S', причем S' движется в положительном направлении оси +x системы S со скоростью v. В системе S имеется кубический ящик объемом L^3 с ребрами длиной L, выстроенными вдоль осей системы координат. Ящик покоится и заполнен покоящимся веществом с однородной плотностью заряда ρ_0 . В этой системе плотность тока равна нулю, $\vec{j} = \vec{0}$. Заметим, что наблюдатель в S' видит ящик, подвергнувшийся лоренцевскую сокращению вдоль оси x.

- (а) Используйте лоренц-инвариантность заряда для вычисления плотности заряда и плотности тока $(c\rho', \vec{j}')$, описывающих вещество в ящике согласно наблюдениям в S'. Проверьте, что значения $(c\rho_0, \vec{0})$ и $(c\rho', \vec{j}')$ ведут себя как 4-векторы $j^{\mu} \equiv (c\rho_0, \vec{0})$ и $j'^{\mu} \equiv (c\rho', \vec{j}')$ в том смысле, что величины $(c\rho', \vec{j}')$ получаются из величин в системе покоя $(c\rho_0, \vec{0})$ с помощью лоренцевского буста.
- (б) Запишите формулу для тока j^{μ} через ρ_0 и 4-скорость ящика, и проверьте, что ваш результат верен в системах S и S'.

Задача 8.2. Лоренцевская инвариантность электрического заряда

Явная проверка лоренц-инвариантности электрического заряда довольно хитроумна, так что эта задача *бросает вызов* читателю! Рассмотрим, как обычно, систему отсчета S и систему S', движущуюся в положительном направлении оси +x системы S со скоростью v. Полный заряд в системе S получается интегрированием по всему пространству в определенный момент времени t = 0:

$$Q\equiv\int d^3x\,\rho(t=0,\vec{x}),$$

а в штрихованной системе S' дается интегралом по всему пространству при t'=0:

$$Q'\equiv\int d^3x'\,
ho'(t'=0,\,ec x').$$

Мы хотим доказать, что Q' = Q. Сложность состоит в том, что наблюдатели в S и S' не могут прийти к согласию о том, что такое равное время. Будем предполагать, что $j^{\alpha} = (c\rho, \vec{j})$ есть 4-вектор, который сохраняется: $\partial_{\alpha} j^{\alpha} = 0$. Кроме того, плотности зарядов и токов считаются обращающимися в нуль на бесконечности во все моменты времени.

(a) Запишите в явном виде преобразования, связывающие $(t, \vec{x}) c (t', \vec{x}') u (c\rho, \vec{j}) c (c\rho', \vec{j}')$. Считайте, что ρ и \vec{j} являются функциями аргументов (t, x, y, z). Докажите, что

$$Q'=\int d^3x'\,\gamma igg[
hoigg(\gamma\,rac{vx'}{c^2},\gamma x',y',z'igg)-rac{v}{c^2}\,j^xigg(\gamma\,rac{vx'}{c^2},\gamma x',y',z'igg)igg].$$

Чтобы сделать выражение для Q' как можно более похожим на выражение для Q, измените переменные интегрирования, воспользовавшись заменами $x = \gamma x', y = y', z = z'$. Напишите результирующее выражение для Q'. Убедитесь, что при v = 0 вы получите Q' = Q.

(б) Цель состоит в том, чтобы показать, что Q' не зависит от скорости v. В этом случае равенство Q' и Q при v = 0 влечет за собой равенство Q' и Q для всех скоростей. Покажите, что производную Q' по скорости можно записать в виде

$$\frac{dQ'}{dv} = \frac{1}{c^2} \int d^3x \left[x \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial j^x}{\partial t} \right) - j^x \right] \bigg|_{t = vx/c^2, x, y, z}.$$
 (1)

(в) Используйте уравнение сохранения $\partial_{\alpha} j^{\alpha} = 0$, чтобы показать, что подынтегральное выражение в (1) является полной производной. Тогда из наших условий на бесконечности следует, что

$$\frac{dQ'}{dv}=0$$

что завершает доказательство равенства Q' = Q. Для вас полезным может оказаться равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}j^{x}\left(\frac{vx}{c^{2}}, x, y, z\right)\right)_{y,z} = \left[\frac{v}{c^{2}}\frac{\partial j^{x}}{\partial t} + \frac{\partial j^{x}}{\partial x}\right]\Big|_{t=vx/c^{2}, x, y, z}, \quad (2)$$

где нижние индексы y, z в левой стороне равенства означают, что частная производная берется при фиксированных значениях этих переменных (но не t). Уравнение (2) есть просто утверждение о производных, и оно станет вам ясным, если вы поймете обозначения.

Задача 8.3. Угловой момент как сохраняющийся заряд

Рассмотрим функцию Лагранжа L, зависящую только от величины скорости \vec{q} частицы, движущейся в обычном трехмерном пространстве.

- (a) Запишите бесконечно малую вариацию δq, соответствующую малому вращению вектора q. Объясните, почему она оставляет функцию Лагранжа инвариантной.
- (б) Постройте сохраняющийся заряд, связанный с этим преобразованием симметрии. Убедитесь, что эта сохраняющаяся величина есть (векторный) угловой момент.

Задача 8.4. Обобщение на заряды и специальный случай токов

- (a) Обобщите формулы (8.9) и (8.11) на случай, когда имеются различные параметры симметрии ϵ^i и множество координат q^a . Убедитесь, что ваши заряды сохраняются.
- (б) Рассмотрите систему (8.17) для «мира» без пространственных измерений. Чему равны возможные значения индекса α? Что дают уравнения (8.22), (8.23) и (8.25)? Сравните с результатом части (а) этой задачи.

Задача 8.5. Лоренцевские заряды для релятивистской точечной частицы^Т

Рассмотрим действие точечной частицы (5.15):

$$S = -mc \int d au \sqrt{-\eta_{\mu
u}} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{
u},$$

где $\dot{x}^{\mu}(\tau) = dx^{\mu}(\tau)/d\tau$. Это действие можно рассматривать как механическое, тогда x^{μ} — координата, а τ играет роль времени; или как полевое действие, тогда x^{μ} есть поле в мире без пространственных измерений и с $\xi^{0} = \tau$.

- (а) Покажите, что $x^{\mu}(\tau) \to x^{\mu}(\tau) + \epsilon^{\mu}$ с постоянными ϵ^{μ} является симметрией. Найдите связанные с этой симметрией сохраняющиеся заряды, и проверьте явно их сохранение. Сравните с импульсами $p^{\mu}(\tau)$, определенными каноническим образом из функции Лагранжа.
- (б) Запишите бесконечно малые преобразования Лоренца для $x^{\mu}(\tau)$ и объясните, почему действие инвариантно относительно этих преобразований.
- (в) Найдите выражения для лоренцевских зарядов, выраженные через $x^{\mu}(\tau)$ и $p^{\mu}(\tau)$. Убедитесь, что найденные вами лоренцевские заряды при соответствующих значениях индексов совпадают с зарядами углового момента. Проверьте их сохранение в явном виде.
- ► Задача 8.6. Простые оценки, включающие α', T₀ и ℓ_s
 - (a) В физике адронов $\alpha' \approx 0.95$ ГэВ⁻². Вычислите натяжение адронной струны в тоннах и длину струны в см.
 - (б) Предположим, что длина струны равна $\ell_s \approx 10^{-30}$ см. Вычислите α' в ГэВ⁻² и натяжение струны в тоннах.

Задача 8.7. Угловой момент вращающейся струны

Формула (8.51) говорит нам, что импульс $d\vec{p}$, переносимый небольшим куском струны, равен

$$dec{p}=rac{T_0\,ds}{c^2}\,rac{ec{v}_\perp}{\sqrt{1-rac{v_\perp^2}{c^2}}}.$$

Используйте этот результат, чтобы путем прямого интегрирования рассчитать угловой момент J, который несет вращающаяся открытая струна. Убедитесь, что ваш результат совпадает с (8.75).

Задача 8.8. Угловой момент скакалки Кейси

Рассмотрим решение задачи 7.4 в виде релятивистской скакалки. Рассчитайте величину J_z *z*-компоненты углового момента (измеренного по отношению к началу координат) как функцию расстояния L_0 и угла γ . Покажите, что $J_z/\hbar = (\sin^2 \gamma) \alpha' E^2$, где E — энергия струны.

Задача 8.9. Обобщение процедуры поиска законов сохранения зарядов

Рассмотрим заново схему расчета, приведшего к сохраняющемуся заряду Q, определенному в (8.11). Предположим теперь, что преобразование (8.8) не оставляет функцию Лагранжа инвариантной, а ее изменяет ее на полную производную по времени:

$$\delta L = \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda), \tag{1}$$

где Λ — некоторая вычислимая функция координат, скоростей и, возможно, времени. Покажите, что существует модифицированный сохраняющийся заряд, имеющий вид

$$\epsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \,\delta q - \epsilon \Lambda. \tag{2}$$

Так как преобразование, изменяющее *L* на полную производную, приводит к сохраняющемуся заряду, то говорят, что это преобразование симметрии.

В качестве приложения рассмотрим функцию Лагранжа $L(q(t), \dot{q}(t))$, не зависящую явно от времени. Преобразование вида

$$q(t) \rightarrow q(t+\epsilon) \approx q(t) + \epsilon \dot{q}(t),$$
 (3)

представляет постоянную бесконечно малую трансляцию во времени. Покажите, что трансляция (3) есть симметрия в смысле (1). Вычислите Λ и постройте сохраняющийся заряд Q. Знаком ли вам полученный результат?

Задача 8.10. Обобщение процедуры поиска законов сохранения токов

Предположим, что преобразование (8.19) не оставляет инвариантной плотность лагранжиана \mathcal{L} , а изменяет ее на полную производную:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} (\epsilon^{i} \Lambda_{i}^{\alpha}), \qquad (1)$$

где Λ_i^{α} есть множество вычисляемых функций от полей, производных полей и, возможно, координат. Покажите, что существует сохраняющийся ток, имеющий вид

$$\epsilon^{i} j^{\alpha}_{i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi^{a})} \,\delta \phi^{a} - \epsilon^{i} \Lambda^{\alpha}_{i}. \tag{2}$$

Так как преобразование, изменяющее \mathcal{L} на полную производную, приводит к со-

214

В качестве приложения рассмотрим плотность лагранжиана $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$, которая не имеет явной зависимости от мировых координат ξ^{α} . Преобразование

$$\phi^a(\xi^\beta) \rightarrow \phi^a(\xi^\beta + \epsilon^\beta) \approx \phi^a + \epsilon^\beta \partial_\beta \phi^a,$$
 (3)

где ϵ^{β} — бесконечно малый постоянный вектор, представляет результат постоянной трансляции. Покажите, что (3) есть симметрия в смысле (1), причем

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \mathcal{L}. \tag{4}$$

Покажите, что сохраняющиеся токи j^{α}_{β} принимают вид

$$j^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\phi^{a})} \ \partial_{\beta}\phi^{a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\mathcal{L}.$$
(5)

Знакомо ли вам j_0^0 ? На самом деле величины j_{β}^{α} определяют тензор энергииимпульса T_{β}^{α} .

Глава 9

Релятивистские струны на световом конусе

Вводится класс калибровок, которые фиксируют параметризацию мирового листа, приводят к паре ограничений и позволяют выписать уравнения движения, являющиеся волновыми уравнениями. В одной из этих калибровок, называемой калибровкой светового конуса, координата X^+ полагается пропорциональной τ , и калибровка позволяет получить полное и явное решение уравнений движения. В этой калибровке динамика струны определяется движением в поперечных направлениях и значениями двух нулевых мод. Мы придем к классическим модам Вирасоро как к осцилляторным модам координаты X^- , и узнаем, как вычислить массу произвольной конфигурации струны.

9.1. Варианты выбора au

При первом знакомстве с динамикой классических струн мы использовали для упрощения статическую калибровку. При такой калибровке время мирового листа τ отождествляется с временной координатой X^0 пространства-времени соотношением

$$\boldsymbol{X}^{0}(\tau,\sigma) = c\tau. \tag{9.1}$$

Теперь мы собираемся рассмотреть более общие случаи калибровки. Среди исследуемого нами класса калибровок одна — калибровка светового конуса окажется особенно полезной. Пользуясь ею, мы сумеем полностью решить уравнение движения струны в явном виде. Наше решение, найденное в статической калибровке, не было вполне явным — движение характеризовалось векторной функцией с ограничениями (см. (7.48)).

Мы сосредоточимся на калибровках, для которых τ полагается равным линейной комбинации координат струны. Это условие можно записать как

$$n_{\mu}X^{\mu}(\tau,\sigma) = \lambda\tau. \tag{9.2}$$

Если выбрать $n_{\mu} = (1, 0, ..., 0)$ и $\lambda = c$, это выражение принимает вид (9.1). Чтобы понять смысл (9.2), введем связанное с ним уравнение

$$n_{\mu}x^{\mu} = \lambda \tau, \qquad (9.3)$$

где мы вместо x^{μ} запишем X^{μ} , чтобы подчеркнуть, что имеем дело с произвольными пространственно-временными координатами. Рассмотрим теперь два


Рис. 9.1. Калибровочное условие $n \cdot X = \lambda \tau$ фиксирует струны как кривые, совпадающие с пересечением мирового листа и гиперплоскостей, перпендикулярных вектору n^{μ}

выписанных выше уравнения при одном и том же фиксированном значении τ . Если x_1^{μ} и x_2^{μ} — две точки, удовлетворяющие (9.3), то $n_{\mu}(x_1^{\mu} - x_2^{\mu}) = 0$. Отсюда следует, что любой вектор, соединяющий точки в пространстве (9.3), ортогонален вектору n^{μ} . Множество всех точек, удовлетворяющих (9.3), образует гиперплоскость, нормальную к n^{μ} .

Теперь можно прояснить смысл формулы (9.2). Точки X^{μ} , удовлетворяющие уравнению $n_{\mu}X^{\mu} = \lambda \tau$, — это те точки, которые лежат *одновременно* на мировом листе и на гиперплоскости (9.3). Уравнение (9.2) утверждает, что всем таким точкам следует присвоить одно и то же значение τ — времени на мировом листе. Если мы определим струну как множество точек $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ с постоянными τ , в калибровке (9.2) струны лежат на гиперплоскостях вида (9.3). Струна с временем τ на мировом листе есть пересечение мирового листа с гиперплоскостью $n \cdot x = \lambda \tau$, как показано на рис. 9.1.

Мы хотим, чтобы струны были пространственноподобными объектами. Точнее, интервал ΔX^{μ} между любыми двумя точками на струне должен быть пространственноподобным или, в крайнем случае, нулевым в некотором пределе, но никогда не времениподобным. Покажем теперь, что времениподобный вектор n^{μ} в калибровке (9.2) гарантирует, что струна пространственноподобна. В этой калибровке любой интервал ΔX^{μ} вдоль струны удовлетворяет условию $n \cdot \Delta X = 0$. Так как это условие лоренц-инвариантно, его можно рассматривать в лоренцевской системе, где единственной ненулевой компонентой n^{μ} является временная компонента. В этой системе ΔX^{μ} не может иметь временной компоненты. Поэтому он является пространственноподобным вектором. Если n^{μ} — нулевой вектор (например, (1, 1, 0, ..., 0)), можно показать, что из условия $n \cdot \Delta X = 0$ вытекает, что ΔX^{μ} в общем случае пространственноподобен и лишь иногда нулевой (задача 9.1). Будем считать, что в (9.2) вектор n^{μ} — нулевой. Такой выбор можно рассматривать как предел последовательности выборов, все из которых включают времениподобный вектор n^{μ} .

При произвольном выборе n^{μ} калибровки, определенные формулой (9.2), не являются лоренцковариантными. Выбор n^{μ} отбирает конкретную линейную комбинацию пространственноподобных координат, которая полагается равной τ . Не существует линейной комбинации координат, остающейся инвариантной при произвольных лоренцевских преобразованиях. Поэтому калибровочное преобразование в разных лоренцевских системах отсчета принимает разный вид, т. е. калибровка не является лоренц-ковариантной.

В этом месте удобно рассмотреть метод обращения с размерностями. До сих пор мы использовали соглашение, по которому τ и σ имели размерность времени и координаты, соответетственно. С этого момента примем, что τ и σ являются *безразмерными*. В гл. 8 мы доказали, что для открытых струн со свободными концами существует хорошо определенный сохраняющийся импульс p^{μ} . Используем этот лоренцевский вектор, чтобы переписать наше калибровочное условие (9.2) в виде

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \overline{\lambda}(n \cdot p)\tau. \tag{9.4}$$

Так как скалярное произведение $n \cdot p$ постоянно, весь эффект сводится к тому, что мы изменили λ на другую постоянную $\tilde{\lambda}$. Когда открытые струны прикреплены к D-бранам, сохраняются не все компоненты импульса струны. Поскольку мы хотели бы, чтобы наш анализ был справедлив даже в этом случае, предположим, что вектор n^{μ} выбран так, что $n \cdot p$ сохраняется. Это условие слабее условия сохранения импульса. Предположим, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ в концевых точках открытой струны, так как это условие естественно гарантирует сохранение $n \cdot p$ (см. выражение (8.38), скалярно умноженное на n^{μ}).

Если выписать вектор n^{μ} явно с обеих сторон уравнения (9.4), то масштаб n^{μ} можно сделать несущественным. Имеет значение только направление n^{μ} . Вспоминая, что $n \cdot X$ имеет размерность длины, $n \cdot p$ — размерность импульса, а τ безразмерно, представим, что мы делим обе стороны этого уравнения на единицу времени. Тогда мы видим, что $\tilde{\lambda}$ имеет размерность скорости, деленной на силу. Канонический выбор скорости есть *c*, а канонический выбор силы — натяжение струны T_0 . Поэтому естественно положить

$$\widetilde{\lambda} \sim \frac{c}{T_0} = 2\pi \alpha' \hbar c^2, \qquad (9.5)$$

где мы использовали (8.76) для того, чтобы связать натяжение струны с α' . Прежде чем окончательно зафиксировать $\tilde{\lambda}$, позвольте еще упростить операции с размерностями.

На кону — наша способность проследить возникновение размерностей различных физических величин. Мы можем упростить задачу, решив проследить лишь за *одной* базовой единицей вместо трех (длины, времени, массы). По соглашению, мы осуществляем это, полагая две фундаментальные константы равными единице:

$$\hbar = c = 1, \tag{9.6}$$

так, как будто эти константы безразмерны! Отсюда вытекают два следствия. Во-первых, все \hbar и c в наших формулах бесследно исчезают. Эта проблема не слишком серьезна, так как если нам известна полная размерность выражения, в котором \hbar и c были положены равными единице, мы можем однозначно восстановить зависимость от \hbar и c. Во-вторых, базовые единицы становятся зависимыми друг от друга, так что остается только одна независимая единица. Так как [c] = L/T, из условия c = 1 вытекает, что

$$L = T. \tag{9.7}$$

На этой стадии $[\hbar] = ML^2/T$ превращается в $[\hbar] = ML$. При $\hbar = 1$ получаем

$$M = \frac{1}{L}.$$
 (9.8)

Таким образом, все единицы можно записать через массу или длину (никто не использует время!). Можно сказать, что когда мы полагаем $\hbar = c = 1$ и следим только за одной единицей, мы используем естественную систему единиц.

Возвращаясь к (9.5), видим, что размерность α' становится равной

$$[\alpha'] = \frac{1}{[T_0]} = \frac{L}{M} = L^2.$$
(9.9)

Хотя полная размерность α' равна обратному квадрату энергии, мы видим, что в естественной системе единиц α' имеет размерность квадрата длины. Это находится в согласии с нашим результатом (8.78). В естественных единицах длина струны равна

$$\ell_s = \sqrt{\alpha'}.\tag{9.10}$$

Для справки, действие Намбу—Гото (8.77) в естественных единицах записывается в виде

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2} (X')^2}.$$
 (9.11)

В естественных единицах соотношение (9.5) устанавливает пропорциональность $\tilde{\lambda}$ параметру наклона α' . Для открытых струн выбираем $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$, и уравнение (9.4) принимает вид

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2lpha'(n \cdot p) \tau$$
 для открытых струн. (9.12)

Это — окончательная форма калибровочного условия, фиксирующего *т*-параметризацию мирового листа.

Когда мы используем естественные единицы, масштаб длины можно выразить через масштабы массы или энергии. При заданной длине ℓ можно единственным образом построить массу m, используя только ℓ , \hbar и c. Эта единственная масса равна $m = \hbar/(\ell c)$, или, эквивалентно, $mc^2 = \hbar c/\ell$. Для быстрых оценок мы используем $\hbar c \simeq 200 \text{ МэВ} \times 10^{-15} \text{ м.}$

 Упражнение-разминка 9.1. Покажите, что энергия, эквивалентная длине большого дополнительного измерения 10⁻¹⁸ см, примерно равна 20 ТэВ (1 ТэВ = 10¹² эВ).

9.2. Соответствующая σ -параметризация

Зафиксировав τ -параметризацию, найдем соответствующую ей σ -параметризацию. В статической калибровке σ -параметризация определялась условием постоянства плотности энергии $\mathcal{P}^{\tau 0}$ по всем струнам (кривым постоянного τ). Действительно, полагая $A(\sigma)$ в (7.17) равным единице путем подходящего выбора σ , мы принимаем $\mathcal{P}^{\tau 0}$ в (7.6) постоянным. Так как в статической калибровке используется $n_{\mu} = (0, 1, ..., 0)$, мы, на самом деле, требуем постоянства $n_{\mu}\mathcal{P}^{\tau \mu}$.

Надлежащее обобщение на случаи, когда n^{μ} произвольно, состоит в условии постоянства $n_{\mu}\mathcal{P}^{\tau\mu} = n \cdot \mathcal{P}$ по всем струнам. Дополнительно мы требуем для всех открытых струн, чтобы область параметризации $\sigma \in [0, \pi]$. Чтобы показать, что мы можем удовлетворить этим условиям, исследуем, каким образом $\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma)$ преобразуется при σ -параметризации. Глядя на (6.49), замечаем, что числитель содержит две производные по σ , а знаменатель фактически одну, и в силу этого $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ при репараметризации преобразуется подобно $d/d\sigma$. Отсюда для двух заданных параметризаций струны σ и $\tilde{\sigma}$ имеем

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau,\sigma) = \frac{d\widetilde{\sigma}}{d\sigma} \,\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau,\widetilde{\sigma}) \;\Rightarrow\; n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau,\sigma) = \frac{d\widetilde{\sigma}}{d\sigma} \,n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau,\widetilde{\sigma}). \tag{9.13}$$

Если мы снабдим струну $\tilde{\sigma}$ -параметризацией, в которой $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \tilde{\sigma})$ зависит от $\tilde{\sigma}$, то сможем выбрать параметр σ так, что $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma)$ не будет зависеть от σ . Это легко делается настройкой значения $d\tilde{\sigma}/d\sigma$, так что окончательно правая сторона в предыдущем равенстве становится равной числу, которое может зависеть только от τ . Затем мы делаем следующую репараметризацию, которая изменяет масштаб σ на постоянный множитель $b: \sigma \to b\sigma$. Это сохраняет независимость $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}$ от σ , но позволяет, подходящим образом настроив b, ограничить область параметризации значениями $\sigma \in [0, \pi]$. При такой окончательной параметризации имеем

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\tau}(\tau, \sigma) = \boldsymbol{a}(\tau), \tag{9.14}$$

где $a(\tau)$ — некоторая функция τ . На самом деле, $a(\tau)$ не может зависеть от τ , и ее значение уже фиксировано наложенными нами условиями. Интегрирова-

ние (9.14) по струне $\sigma \in [0, \pi]$ дает

$$\int_{0}^{\pi} d\sigma \ n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma) = n \cdot p = \pi a(\tau) \implies a(\tau) = \frac{n \cdot p}{\pi}.$$
 (9.15)

Так как $n \cdot p$ сохраняется, $a(\tau)$ не зависит от τ . Возвращаясь к выражению (9.14), получаем, что

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau} = \frac{n \cdot p}{\pi}$$
 — константа мирового листа открытой струны. (9.16)

В этой параметризации плотность импульса $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}$ постоянна, так что величина σ , присвоенная точке, пропорциональна количеству $n \cdot p$ импульса, который несет кусок струны, ограниченный концевой $\sigma = 0$ и данной точками.

Исследуем теперь уравнение движения $\partial_{\tau} \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} + \partial_{\sigma} \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = 0$. Умножая это уравнение скалярно на n^{μ} , получаем условие

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^{\tau}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}) = 0.$$
(9.17)

Первое слагаемое обращается в нуль в силу (9.16), так что остается только

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}) = 0. \tag{9.18}$$

Это означает, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ не зависит от σ .

Поясним теперь, почему для открытых струн $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$. В силу уравнения (9.18), достаточно показать, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ обращается в нуль в некоторой точке каждой струны. Как отмечено после формулы (9.4), мы предполагаем, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ на концах струны, так как это гарантирует сохранение $n \cdot p$. Следовательно, по крайней мере для открытых струн

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\sigma}=\boldsymbol{0}.\tag{9.19}$$

Замкнутые струны рассматриваются аналогичным образом. Мы параметризуем их, полагая плотность импульса $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}$ постоянной и снова заключаем, что $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}$ — постоянная *на мировом листе*. Для замкнутых струн мы хотим, чтобы область $\sigma \in [0, \pi]$, так что (9.16) превращается в

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau} = \frac{n \cdot p}{2\pi}$$
 для замкнутых струн. (9.20)

С учетом этого изменения, удобно записать τ -параметризацию замкнутых струй без множителя 2, присутствующего в формуле (9.12):

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \alpha'(n \cdot p) \tau$$
 для замкнутых струн. (9.21)

Уравнение (9.18) выполняется и для замкнутых струн, но мы не можем доказать, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$; на замкнутой струне нет специальной точки, про которую известно, что $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ равно нулю. Кроме того, заметим следующую тонкость: неясно, как выбирать точку $\sigma = 0$ при каждом значении τ . Обе проблемы могут быть разрешены одновременно. Рассматривая мировой лист замкнутой струны как набор замкнутых струн (кривых постоянного τ), мы выбираем $\sigma = 0$ произвольно на *од*ной струне. Затем мы выбираем $\sigma = 0$ на всех других струнах, требуя $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$.

Чтобы показать, как это делается, начнем с использования соотношения (6.50) для вычисления $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$:

$$n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_{\tau}(n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_{\sigma}(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}.$$
(9.22)

Из (9.21) следует, что $\partial_{\sigma}(n \cdot X) = 0$, и поэтому $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ равно

$$n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_{\tau}(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}.$$
(9.23)

Достаточно доказать, что мы можем обратить $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ в нуль в одной точке каждой струны. Так как $\partial_{\tau}(n \cdot X)$ — константа, мы должны показать, что $\dot{X} \cdot X' = 0$ в некоторой точке на каждой струне.

Выберем произвольную точку P на данной струне и объявим, что это та точка, для которой $\sigma = 0$ (рис. 9.2). Мы говорим, что существует (с точностью до масштаба) единственный вектор v^{μ} , касательный к мировому листу в точке P и ортогональный к пространственноподобному вектору X^{μ} , касательному



Рис. 9.2. Построение линии $\sigma = 0$ на мировом листе замкнутой струны после присвоения точке P значения $\sigma = 0$

222

к струне. Это нетрудно показать. На мировом листе существует времениподобный касательный вектор t^{μ} в точке *P*. Так как $X^{\mu'}$ и t^{μ} не параллельны, они порождают пространство, касательное к мировому листу в *P*. Если $t_{\mu}X^{\mu'} = 0$, то t^{μ} есть желаемый вектор v^{μ} . Если $t_{\mu}X^{\mu'} \neq 0$, мы можем определить

$$v^{\mu} = t^{\mu} + bX^{\mu}, \qquad (9.24)$$

и разрешить это уравнение относительно постоянной b, так, чтобы $v_{\mu}X^{\mu} = 0$:

$$t \cdot X' + bX' \cdot X' = 0 \Rightarrow v^{\mu} = t^{\mu} - \frac{t \cdot X'}{X' \cdot X'} X^{\mu'}. \qquad (9.25)$$

Упражнение-разминка 9.2. Покажите, что вектор v^µ в (9.25) времениподобен.

Далее объявляется, что точка $\sigma = 0$ на соседних струнах задается формулой $X^{\mu}(P) + \epsilon v^{\mu}$ при бесконечно малом ϵ . Поэтому вектор v^{μ} касателен к желаемой линии $\sigma = 0$ в точке P. Полностью линия $\sigma = 0$ строится, исходя из требования, чтобы в каждой точке ее касательная была ортогональна $X^{\mu'}$. Поскольку касательная к линии $\sigma = 0$ пропорциональна \dot{X}^{μ} , мы гарантируем, что $\dot{X} \cdot X' = 0$ вдоль линии $\sigma = 0$. Так мы можем получить $\dot{X} \cdot X'$ и следовательно, $n \cdot P^{\sigma}$ обращающимися в нуль в одной точке на каждой струне. В результате, имеем везде $n \cdot P^{\sigma} = 0$. Поэтому формула (9.19) может быть использована как для открытых, так и для замкнутых струн:

$$n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$$
 и для открытых, и для замкнутых струн. (9.26)

Теперь мы можем закончить параметризацию открытых и замкнутых струн. Определяющие уравнения в обоих случаях сводятся к

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{X}(\tau, \sigma) = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}) \tau, \qquad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{\beta} \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\tau}, \qquad (9.27)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 2 & для открытых струн, \\ 1 & для замкнутых струн. \end{cases}$$
 (9.28)

Хотя мы и сумели построить линию $\sigma = 0$ на мировом листе замкнутой струны, но наше построение очевидно неоднозначно. Мы должны выбрать одну произвольную точку на каждой струне. Любая другая точка на этой одной струне может быть использована как точка $\sigma = 0$. Это означает, что параметризация мирового листа замкнутой струны может быть сдвинута строго вдоль направления σ . Не существует способа избежать этой неоднозначности. Калибровочное условие не фиксирует однозначно параметризацию мирового листа замкнутой струны. Этот факт будет иметь приложение в теории замкнутых струн.

9.3. Уравнения связи и волновые уравнения

Исследуем теперь те ограничения на X' и \dot{X} , которые налагаются выбранной параметризацией. Обращение в нуль $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ совместно с (9.23) и замечанием, что $\partial_{\tau}(n \cdot X)$ есть ненулевая постоянная, приводит к уравнению

$$\dot{X} \cdot X' = 0. \tag{9.29}$$

В статической калибровке $X^{0'} = 0$ и (9.29) сводится к ранее полученной формуле (7.1): $\vec{X} \cdot \vec{X}' = 0$. Уравнение (9.29) — это связь, следующая из нашей параметризации.

Используем теперь (9.29) для упрощения выражения (6.49) для \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^{\mu}}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}.$$
(9.30)

С помощью этого результата второе уравнение в (9.27) дает

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{X'^2(n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}.$$
 (9.31)

Так как $n \cdot \dot{X} = \beta \alpha' (n \cdot p)$ (см. (9.27)), множители β сокращаются и мы находим

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \qquad (9.32)$$

где было использовано то, что $X'^2 \neq 0$. За исключением единиц, которые теперь стали другими, это согласуется с предыдущим результатом (7.23), который мы получили, используя статическую калибровку, кроме того, полученное выражение включает только пространственные компоненты. Уравнения (9.29) и (9.32) являются уравнениями связи, следующими из нашего выбора параметризации. Вместе они имеют вид:

$$\dot{X} + X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0.$$
 (9.33)

Эти два условия удобно записать компактно

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \tag{9.34}$$

Заметим, что связи принимают такой вид для любого значения β в (9.27). Наш выбор β для открытых и замкнутых струн приводит к удобным областям σ , но возможны и другие варианты выбора.

Заданные нами связи значительно упрощают выражения для плотности импульса $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ и $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Чтобы использовать связи для упрощения, нам необходимо взять положительный квадратный корень в знаменателе (9.30). Так как $X'^2 > 0$, то с помощью (9.32) имеем

$$\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^2 X'^2} = X'^2. \tag{9.35}$$

Возвращаясь к (9.30),

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \tag{9.36}$$

Плотность импульса $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$, записанная в (6.50), упрощается и принимает вид

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X^{\mu\prime}}{\sqrt{-\dot{X}^2 X^{\prime 2}}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X^{\mu\prime}}{X^{\prime 2}}, \qquad (9.37)$$

после чего, используя (9.32), имеем

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}. \tag{9.38}$$

Плотности импульсов являются простыми производными от координат. Подставляя эти выражения в уравнения поля $\partial_{\tau} \mathcal{P}^{\tau \mu} + \partial_{\sigma} \mathcal{P}^{\sigma \mu} = 0$, находим

$$\ddot{X}^{\mu} - X^{\mu \prime \prime} = 0. \tag{9.39}$$

При нашей параметризации уравнения движения являются просто волновыми уравнениями! Обратим внимание, что для того, чтобы получить волновое уравнение, был необходим знак минус в правой части (9.38). Для открытых струн со свободными концами волновые уравнения дополняются требованием обращения в нуль в концевых точках $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$, а следовательно и $X^{\mu\nu}$.

9.4. Волновое уравнение и разложение по модам

Теперь мы явно решим в самом общем виде волновое уравнение (9.39) для открытых струн. При этом нам придется ввести ряд основных обозначений, используемых в теории струн. Предположим, что у нас есть заполняющая пространство D-брана. В результате все координаты струн X^{μ} удовлетворяют свободным граничным условиям в концевых точках. Мы знаем, что самое общее решение $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ волнового уравнения (9.39) имеет вид

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2} \left(f^{\mu}(\tau+\sigma) + g^{\mu}(\tau-\sigma) \right), \qquad (9.40)$$

где f^{μ} и g^{μ} — произвольные функции одного аргумента. Используя (9.38), находим, что граничные условия $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ для свободных концов требуют граничных условий Неймана

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} = 0$$
 при $\sigma = 0, \pi.$ (9.41)

Граничное условие при $\sigma = 0$ дает

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}(\tau,0) = \frac{1}{2} \left(f^{\mu\prime}(\tau) - g^{\mu\prime}(\tau) \right) = 0.$$
(9.42)

Так как производные f^{μ} и g^{μ} совпадают, сами f^{μ} и g^{μ} могут отличаться только на константу c^{μ} . После замены $g^{\mu} = f^{\mu} + c^{\mu}$ в (9.40), константа c^{μ} может быть включена в определение f^{μ} . В результате

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2} \left(f^{\mu}(\tau+\sigma) + f^{\mu}(\tau-\sigma) \right). \tag{9.43}$$

Рассмотрим теперь граничное условие при $\sigma = \pi$:

$$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}(\tau,\pi) = \frac{1}{2} \left(f^{\mu\prime}(\tau+\pi) - f^{\mu\prime}(\tau-\pi) \right) = 0. \tag{9.44}$$

Поскольку это уравнение должно выполняться при всех τ , находим, что f^{μ} есть периодическая функция с периодом 2π . Так как 2π — это естественный период, наше решение параметризовать открытую струну параметром $\sigma \in [0, \pi]$ пришлось кстати.

Теперь запишем общий ряд Фурье для периодической функции $f^{\mu'}(u)$:

$$f^{\mu\nu}(u) = f_1^{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu} \cos nu + b_n^{\mu} \sin nu). \qquad (9.45)$$

Интегрируя это выражение, получаем разложение для $f^{\mu}(u)$:

$$f^{\mu}(u) = f_0^{\mu} + f_1^{\mu}u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{\mu}\cos nu + B_n^{\mu}\sin nu), \qquad (9.46)$$

где мы включили возникающие при интегрировании постоянные в новые постоянные. Подставляем это выражение для f(u) в (9.43), и после упрощений получим:

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = f_0^{\mu} + f_1^{\mu}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{\mu}\cos n\tau + B_n^{\mu}\sin n\tau\right)\cos n\sigma.$$
(9.47)

Мы хотим заменить коэффициенты в выражении (9.47) новыми коэффициентами. имеющими простой физический смысл. На первом шаге вводим константы a_n^{μ}

1

с помощью соотношений

$$A_{n}^{\mu}\cos n\tau + B_{n}^{\mu}\sin n\tau = -\frac{i}{2}\left(\left(B_{n}^{\mu} + iA_{n}^{\mu}\right)e^{in\tau} - \left(B_{n}^{\mu} - iA_{n}^{\mu}\right)e^{-in\tau}\right) \equiv \\ \equiv -i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}\left(a_{n}^{\mu*}e^{in\tau} - a_{n}^{\mu}e^{-in\tau}\right).$$
(9.48)

Здесь * обозначает комплексное сопряжение. Цель множителя $\sqrt{2\alpha'}$ состоит в том, чтобы сделать константы a_n^{μ} безразмерными. Когда мы начнем рассматривать квантовую гравитацию, эти константы и комплексно-сопряженные им превратятся в операторы рождения и уничтожения. В формуле (9.48) введены обозначения, обычно используемые специалистами в области теории струн.

Константа f_1^{μ} в формуле (9.47) имеет простую физическую интерпретацию. Используя (9.36), можно записать плотность импульса в виде

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^{\mu} + \dots, \qquad (9.49)$$

где многоточие обозначает слагаемые, зависящие от $\cos n\sigma$ $(n \neq 0)$. Чтобы найти полный импульс p^{μ} , мы интегрируем $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ по области $\sigma \in [0, \pi]$. К счастью, слагаемые, представленные многоточием, не дают вклада, так как интеграл по $\cos n\sigma$ обращается в нуль. Получаем:

$$p^{\mu} = \int_{0}^{\pi} \mathcal{P}^{\tau \mu} \, d\sigma = \frac{1}{2\pi \alpha'} \, \pi f_{1}^{\mu} \, \Rightarrow \, f_{1}^{\mu} = 2\alpha' p^{\mu}. \tag{9.50}$$

Значит, величина f_1^{μ} пропорциональна пространственно-временному импульсу, переносимому струной. Обозначая $f_0^{\mu} = x_0^{\mu}$ и собирая все полученные выше результаты, находим, что (9.47) принимает общепринятый вид

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu} \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^{\mu} e^{-in\tau}\right) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}.$$
 (9.51)

Слагаемые правой части явно соответствуют нулевой моде, импульсу и колебаниям струны. Если все коэффициенты a_n^{μ} осцилляций обращаются в нуль, формула представляет движение точечной частицы.

(b) Упражнение-разминка 9.3. Проверьте явно, что $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ действительно.

Введем теперь ряд обозначений, которые позволят нам записать простые выражения для производных $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ по τ и σ . Начнем с определения

$$\alpha_0^{\mu} = \sqrt{2\alpha'} p^{\mu}. \tag{9.52}$$

Кроме того, определим

$$\alpha_n^{\mu} = a_n^{\mu}\sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^{\mu} = a_n^{\mu*}\sqrt{n}, \quad n \ge 1.$$
(9.53)

Важно заметить, что

$$\alpha_{-n}^{\mu} = (\alpha_{n}^{\mu})^{*}. \tag{9.54}$$

Кроме того, в то время как a_n^{μ} определены только для целых положительных n, α_n^{μ} определены для любого целого n, включая 0. Используя эти новые обозначения, можно переписать X^{μ} как

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_{0}^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{\mu}\tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^{\mu}e^{in\tau} - \alpha_{n}^{\mu}e^{-in\tau}\right)\cos n\sigma.$$
(9.55)

Удобно просуммировать по всем целым числам, исключая нуль:

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{\mu}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}e^{-in\tau}\cos n\sigma.$$
(9.56)

Это завершает решение волновых уравнений с граничными условиями Неймана. В полученном уравнении решение будет определено, как только мы конкретизируем константы x_0^{μ} и α_n^{μ} при $n \ge 0$.

Удобно записать здесь производные от X^{μ} по τ и σ . Из формулы (9.56) мы видим, что

$$\dot{X}^{\mu} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} \cos n\sigma e^{-in\,r}, \qquad (9.57)$$

$$X^{\mu\nu} = -i\sqrt{2\alpha^{\prime}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} \sin n\sigma e^{-in\tau}, \qquad (9.58)$$

где Z обозначает множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нулевых). Наконец, особенно симпатично выглядят две линейные комбинации предыдущих производных:

$$\dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(9.59)

Мы нашли решения волновых уравнений, удовлетворяющих подходящим граничным условиям, но мы должны также убедиться, что выполняются уравнения связи (9.33). Если произвольно задать все константы α_n^{μ} , уравнения связей удовлетворяться не будут. Чтобы найти решение, удовлетворяющее и волновым уравнениям, и уравнениям связей, мы используем калибровку светового конуса.

9.5. Решение уравнений движения на световом конусе

Решение уравнений движения на световом конусе использует координаты светового конуса для описания движения струн, и ряд условий калибровки светового конуса. В главе 2 мы видели, что использование координат светового конуса означает использование x^+ и x^- вместо x^0 и x^1 , т.е. сводится просто к замене координат. Условия калибровки светового конуса более существенны. Калибровки, которые мы изучим в этой главе, представляют собой очень специфический выбор координат мирового листа, одним из таких выборов является калибровка светового конуса.

Выбор калибровки светового конуса означает наложение условий (9.27) с вектором n^{μ} , который приводит к равенству $n \cdot X = X^{+}$. Выбирая

$$n_{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right),$$
 (9.60)

мы действительно находим:

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+.$$
 (9.61)

Используя эти соотношения в (9.27), имеем:

$$X^+(\tau,\sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+},$$
 (9.62)

где $\beta = 2$ для открытых струн и $\beta = 1$ для закрытых струн. Второе уравнение говорит нам, что плотность p^+ постоянна вдоль струны.

Стратегия, лежащая в основе калибровки светового конуса, заключается в использовании особенно простой формы X^+ , чтобы показать, что в X^- нет никакой динамики (с точностью до нулевой моды), и что вся динамика содержится в *поперечных* координатах X^2, X^3, \ldots, X^d . Эти поперечные координаты будут обозначаться X^I , где поперечный индекс I пробегает значения от 2 до d:

$$X^{I} = (X^{2}, X^{3}, \dots, X^{d}).$$
 (9.63)

Чтобы двигаться дальше, посмотрим на уравнения связей (9.34). Используя определение (2.59) релятивистского скалярного произведения в координатах светового конуса, мы можем записать эти связи как

$$-2(\dot{X}^{+}\pm X^{+\prime})(\dot{X}^{-}\pm X^{-\prime})+(\dot{X}^{I}\pm X^{I\prime})^{2}=0, \qquad (9.64)$$

где $(a^{I})^{2} = a^{I}a^{I}$ и, как обычно, по повторяющимся индексам производится суммирование. Так как $X^{+\prime} = 0$ и $\dot{X}^{+} = \beta \alpha' p^{+}$,

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2p^{+}} (\dot{X}^{I} \pm X^{I'})^{2}.$$
(9.65)

Записывая предыдущую формулу, мы предположили, что $p^+ \neq 0$. В то время, как p^+ безусловно удовлетворяет неравенству $p^+ \ge 0$, может случиться, что p^+ равно нулю. Чтобы это случилось, импульс p^1 должен скомпенсироваться энергией, а это может произойти только в случае, когда безмассовая частица двигается точно в отрицательном направлении x^1 . Таким образом, поскольку обращение p^+ в нуль — довольно необычное событие, мы будем считать, что p^+ всегда положительно. Если мы столкнемся с ситуацией, когда p^+ равно нулю, формализм светового конуса будет неприменим.

Заметим особую роль, которую сыграл выбор координат и калибровки светового конуса в упрощении выражений с производными от X^- . Координаты светового конуса были полезны, так как недиагональная метрика в (+, -) секторе позволила нам найти производные от X^- , не извлекая квадратного корня! Нам нужно было просто разделить на \dot{X}^+ . А благодаря калибровке светового конуса \dot{X}^+ была равна константе.

Уравнения (9.65) определяют как \dot{X}^- , так и $X^{-\prime}$ через X^I , и X^- определена с точностью до константы интегрирования. Все, что требуется, — это значение X^- в некоторой точке P на мировом листе, после чего мы можем проинтегрировать соотношение

$$dX^{-} = \frac{\partial X^{-}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial X^{-}}{\partial \sigma} d\sigma \qquad (9.66)$$

и найти значение X^- в любой другой точке Q. На мировом листе открытой струны мы можем выбрать для интегрирования любой путь от $P \ltimes Q$, и результат, $X^-(Q)$, не будет зависеть от пути, как показано в задаче 9.2. На мировом листе замкнутой струны имеется дополнительное условие совместности. Представьте контур интегрирования, начинающийся в P и заканчивающийся в P после обхода вокруг мирового листа. Нет гарантий, что интегрирование dX^- по этому контуру даст нуль, т. е. тот результат, который точно хорошо определяет X^- . Если мы выбираем контур с постоянным τ , мы должны потребовать, чтобы

$$\int_{0}^{2\pi} d\sigma \, \frac{\partial X^{-}}{\partial \sigma} = 0. \tag{9.67}$$

Это нетривиальное ограничение; см. задачу 9.5.

Наш анализ показывает, что полная эволюция струны определяется следующим множеством объектов:

$$X^{I}(\tau,\sigma), p^{+}, x_{0}^{-},$$
 (9.68)

где x_0^- — константа интегрирования, необходимая для определения X^- .

Сосредоточимся на случае открытых струн ($\beta = 2$). Мы рассматриваем явное решение для поперечных координат X^{I} и вычисляем связанные с ними X^{-} . Используя общее решение в (9.56), имеем:

$$\boldsymbol{X}^{I}(\tau,\sigma) = \boldsymbol{x}_{0}^{I} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{I}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{I}e^{-in\tau}\cos n\sigma.$$
(9.69)

Кроме того, для координаты X^+ калибровочное условие дает

$$X^{+}(\tau,\sigma) = 2\alpha' p^{+}\tau = \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{+}\tau. \qquad (9.70)$$

Как мы видим, нулевую моду координаты и осцилляции координаты **X⁺ можно** положить равными нулю:

$$x_0^+ = 0, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}^+ = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$
 (9.71)

Что можно сказать об X^- ? Координата X^- , являющаяся линейной комбинацией X^0 и X^1 , удовлетворяет тому же волновому уравнению и тем же граничным условиям, как и все другие координаты. Мы можем поэтому использовать то же разложение, что и в (9.56), и написать

$$X^{-}(\tau,\sigma) = x_{0}^{-} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{-}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{-}e^{-in\tau}\cos n\sigma. \qquad (9.72)$$

Используя уравнение (9.59) с $\mu = -$ и $\mu = I$, находим:

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{-} e^{-in(r \pm \sigma)}, \qquad (9.73)$$

$$\dot{X}^{I} \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{I} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(9.74)

Мы используем эти уравнения и (9.65), чтобы найти минусовые осцилляции¹⁾:

$$\sqrt{2\alpha^{\prime}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{-} e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^{+}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_{p}^{I} \alpha_{q}^{I} e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} =$$
$$= \frac{1}{2p^{+}} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p}^{I} \alpha_{n-p}^{I} e^{-in(\tau \pm \sigma)} =$$
$$= \frac{1}{2p^{+}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p}^{I} \alpha_{n-p}^{I} \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(9.75)

Отсюда следует, что мы вправе определить α_n^- как

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I.$$
(9.76)

Это точное решение! Теперь у нас есть явные выражения для коэффициентов минусовых осцилляций α_n^- , выраженные через поперечные осцилляции. В правой части пространственно-временные индексы суммируются только по значениям поперечных координат.

¹⁾ Минусовые осцилляции — осцилляции координаты X⁻. — Прим. ред. перевода.

Общее решение, описывающее возможное движение, задается набором произвольных значений p^+ , x_0^- , x_0^I и всеми константами α_n^I . Это точно определяет $X^I(\tau, \sigma)$ в (9.69) и $X^+(\tau, \sigma)$ в (9.70). Используя (9.76), мы можем вычислить постоянные α_n^- , которые совместно с x_0^- определяют $X^-(\tau, \sigma)$ в (9.72). Следовательно, построено полное решение.

Квадратичная комбинация осцилляций в правой части (9.76) чрезвычайно полезна и именуется поперечной модой Вирасоро L_n^{\perp} :

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \qquad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \tag{9.77}$$

В частности, при n = 0 мы используем (9.52) и находим

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = 2\alpha'p^- = \frac{1}{p^+}L_n^\perp \Rightarrow 2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp. \tag{9.78}$$

Используя приведенное в (9.77) значение α_n^- , можно переписать уравнения (9.73) и (9.65) как

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \frac{1}{p^{+}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{n}^{\perp} e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^{+}} (\dot{X}^{I} \pm X^{I'})^{2}.$$
(9.79)

Упражнение-разминка 9.4. Покажите, что

$$X^{-}(\tau,\sigma) = x_{0}^{-} + \frac{1}{p^{+}} L_{0}^{\perp}\tau + \frac{i}{p^{+}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_{n}^{\perp} e^{-in\tau} \cos n\sigma.$$
(9.80)

В этом выражении очевидно, что моды Вирасоро являются теми модами, по которым производится разложение координаты $X^{-}(\tau, \sigma)$.

Полезно вычислить массу струны, совершающую произвольное движение. Массу можно вычислить, используя релятивистское соотношение

$$M^{2} = -p^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{I}p^{I}. \qquad (9.81)$$

Так как масса сохраняется при движении, предположим, что она зависит от постоянных коэффициентов a_n^I , определяющих классическое решение. Чтобы вычислить массу, начнем с (9.78), подставим значение L_n^{\perp} из (9.77) и используем определения в (9.52) и (9.53):

$$2p^{+}p^{-} = \frac{1}{\alpha'}L_{0}^{\perp} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\alpha_{0}^{I}\alpha_{0}^{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n}^{I*}\alpha_{n}^{I}\right) = p^{I}p^{I} + \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}^{I*}a_{n}^{I}.$$
 (9.82)

Подставляя это выражение в правую часть формулы (9.81), находим окончательно:

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n}^{I*} a_{n}^{I}.$$
 (9.83)

Этот результат очень интересен. Квадрат массы записан как сумма слагаемых, каждое из которых имеет вид $a^*a = |a|^2 \ge 0$. Таким образом, мы находим, что $M^2 \ge 0$. Это показывает, что масса классической струны $M = \sqrt{M^2}$ есть действительное число (по соглашению, принимаемое за положительное). На самом деле, такой результат трудно получить, не используя калибровку светового конуса. Мы видим также, что можно настроить коэффициенты a_n^I , чтобы получить решения для классических струн с произвольными значениями массы. Если все коэффициенты a_n^I обращаются в нуль, получаем безмассовый объект $M^2 = 0$. Действительно, когда все a_n^I обращаются в нуль, струна коллапсирует в движущуюся точку: из формулы (9.69) имеем $X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I \tau$, и зависимость от σ исчезает.

() Упражнение-разминка 9.5. Вычислите $X^-(\tau, \sigma)$, когда все a_n^I обращаются в нуль. Обратите внимание, что зависимость X^- от σ исчезает.

Классический результат (9.83) для M^2 не выживает при квантовании. Во-первых, M^2 квантуется, т. е. состояния струн не обнаруживают непрерывного спектра масс. Это хорошо, так как в природе мы не наблюдаем состояний частиц, обладающих непрерывными значениями масс. Более того, уравнение (9.83) не дает достаточного числа безмассовых состояний. Те несколько безмассовых состояний, которые обнаруживаются, ведут себя совершенно иначе, чем безмассовые состояния максвелловской теории. Для замкнутых струн несколько безмассовых состояний, получающихся аналогичным анализом, ведут себя совершенно непохоже на безмассовые состояния гравитации. Квантовая механика добавляет дополнительную константу к формуле для M^2 как для открытых, так и для замкнутых струн. Эти дополнительные константы позволяют найти состояния, соответствующие состояниям физических теорий. Теория струн имеет шанс описать калибровочные теории и гравитацию, так как квантование изменяет соотношение (9.83) и соответствующую формулу для замкнутых струн.

Задача 9.1. Векторы, ортогональные нулевым²⁾ векторам, — сами являются нулевыми или пространственноподобными

Пусть n^{μ} — нетривиальный нулевой вектор ($n_{\mu}n^{\mu} = 0$) в D-мерном пространстве Минковского. В дополнение к этому пусть b^{μ} — вектор, удовлетворяющий условию $n_{\mu}b^{\mu} = 0$. Докажите следующее.

²⁾ Под нулевыми векторами здесь и далее понимаются светоподобные векторы, т. е. векторы, лежащие на световом конусе. — Прим. ред. перевода.

- (a) Вектор b^{μ} либо нулевой, либо пространственноподобный.
- (б) Если b^{μ} нулевой вектор, тогда $b^{\mu} = \lambda n^{\mu}$ для некоторой константы λ .
- (в) Множество векторов b^{μ} , удовлетворяющих условию $n_{\mu}b^{\mu} = 0$, есть векторное пространство V размерности (D 1). Подмножество нулевых векторов b^{μ} есть векторное подпространство V размерности единица.

Этот результат показывает, что для калибровок (9.2) с нулевым n^{μ} и при D > 2 струны почти всегда оказываются пространственноподобными объектами. Кроме того, гиперплоскость, ортогональная к n^{μ} , содержит n^{μ} . Это легко проверяется в двух измерениях:

(г) Пусть D = 2. Рассмотрим пространственно- временную диаграмму, подобную показанной на рис. 2.2. Как выглядит нулевой вектор n^{μ} , такой, что $n \cdot X = X^+$? Убедитесь, что n^{μ} направлен вдоль линий постоянной величины X^+ .

Задача 9.2. Проверка на согласованность решения для X⁻

- (а) С помощью (9.65) найдите $\partial_{\tau} X^{-}$ и $\partial_{\sigma} X^{-}$. Покажите, что условие согласованности $\partial_{\sigma}(\partial_{\tau} X^{-}) = \partial_{\tau}(\partial_{\sigma} X^{-})$ выполнено, если поперечные координаты X^{I} удовлетворяют волновому уравнению. Докажите, что это условие гарантирует, что X^{-} , определенное интегрированием (9.66), не зависит от выбранного пути.
- (б) Покажите, что X^- , вычисленное с помощью (9.65), удовлетворяет волновому уравнению, если этому уравнению удовлетворяют поперечные координаты X^I .
- (в) Предположим, что в концевых точках открытой струны некоторые поперечные координаты светового конуса X^{I} удовлетворяют граничным условиям Неймана, а некоторые граничным условиям Дирихле. Докажите, что вычисленные с помощью (9.65) координаты X^{-} всегда удовлетворяют граничным условиям Неймана.

Задача 9.3. Вращающаяся открытая струна в калибровке светового конуса

Рассмотрим движение струны, определяемое условиями $x_0^- = x_0^I = 0$ и почти всеми нулевыми коэффициентами α_n^I за исключением

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_{-1}^{(2)*} = a, \quad \alpha_1^{(3)} = \alpha_{-1}^{(3)*} = ia.$$
 (1)

Здесь a — безразмерная действительная константа. Мы хотим построить решение, описывающее открытую струну, вращающуюся в плоскости (x^2, x^3) .

- (а) Чему равна масса (энергия) такой струны?
- (б) Постройте явно функции $X^2(\tau, \sigma)$ и $X^3(\tau, \sigma)$. Чему равна длина струны. выраженная через параметры *a* и α' ?
- (в) Вычислите L_n^{\perp} моды для всех *n*, используйте результат для построения $X^-(\tau, \sigma)$. Ваш ответ не должен зависеть от σ !
- (г) Определите величину p^+ , используя заданное для этой струны условие $X^1(\tau, \sigma) = 0$. Найдите соотношение между t и τ .

(1) Убедитесь в том, что в вашем решении энергия струны и се угловая частота вращения связаны с длиной струны так же, как в соотношении (7.59).

Задача 9.4. Точное решение движения открытой струны: как коллапсирует открытая струна?

Рассмотрим движение струны, определяемое условиями $x_0^- = x_0^I = 0$ и всеми нулевыми коэффициентами α_n^I за исключением

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_{-1}^{(2)*} = a.$$

Здесь a — безразмерная действительная постоянная. Мы хотим построить решение, представляющее открытую струну, колеблющуюся в плоскости (x^1, x^2) и обладающую *нулевым* импульсом в этой плоскости.

(а) Покажите, что движение струны описывается уравнениями

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{a} X^0(\tau, \sigma) = \sqrt{2} \left(\tau + \frac{1}{4} \sin 2\tau \cos 2\sigma \right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{a} X^1(\tau, \sigma) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin 2\tau \cos 2\sigma,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{a} X^2(\tau, \sigma) = 2 \sin \tau \cos \sigma.$$

- (б) Убедитесь в том, что с течением времени t, течет и время τ . В выбранной лоренцевской системе струны являются линиями на мировом листе, определенными при постоянном времени X^0 . Найдите значения τ , для которых линии постоянного τ являются струнами. Опишите эти струны.
- (в) При $\tau = 0$ струна имеет нулевую длину. Подробно изучите движение при $\tau \ll 1$. Вычислите $\tau = \tau(t, \sigma)$ и используйте этот результат, чтобы найти $X^{1}(t, \sigma)$ и $X^{2}(t, \sigma)$. Докажите, что когда струна расширяется из нулевого размера, она лежит в области $\cos \theta \ge -1/3$ окружности с центром в начале координат, радиус которой растет со скоростью света (θ измеряется по отношению к положительной оси x^{1}). Обратите внимание, что концевые точки струны движутся перпендикулярно струне.
- (г) С помощью вашей любимой программы постройте параметрический график мирового листа струны как поверхности в трех измерениях. Используйте X^1 , X^2 и X^0 вместо x, y, z, соответственно, а также параметры τ , σ . Для дальнейшего наглядного изображения движения струны постройте струну в плоскости (x^1, x^2) при различных значениях времени X^0 . Это требует (численного) нахождения τ как функции X^0 и σ .

Задача 9.5. Замкнутая струна в калибровке светового конуса

Рассмотрим замкнутую струну, для которой

$$X^{(2)}(\tau,\sigma) = \sqrt{2lpha'} \left(a \sin{(\tau-\sigma)} + b \cos{(\tau-\sigma)} + \overline{a} \sin{(\tau+\sigma)} + \overline{b} \cos{(\tau+\sigma)} \right)$$

и все остальные поперечные координаты $X^{I}(\tau, \sigma)$ равны нулю. В этой формуле a, b, \bar{a} и \bar{b} — действительные константы. Обратите внимание, что a и b — это коэффициенты при волнах, распространяющихся в сторону возрастания σ , в то время как \bar{a} и \bar{b} — коэффициенты при волнах, распространяющихся в сторону уменьшения σ . Как обычно для замкнутых струн, мы полагаем $X^{+}(\tau, \sigma) = \alpha' p^{+} \tau$ и используем $\sigma \in [0, 2\pi]$.

- (a) Оказывается, не всегда возможно построить решение уравнений движения для произвольных значений констант a, b, \bar{a} и \bar{b} . Исследуйте вычисление $X^{-}(\tau, \sigma)$ и запишите условие, которому должны удовлетворять эти константы.
- (6) Ваше условие должно позволять задать $a = b = \bar{a} = \bar{b} = r$. Используйте эти значения, чтобы вычислить $X^{-}(\tau, \sigma)$, и определите массу струны.

Глава 10

Поля и частицы на световом конусе

Мы приступаем к изучению классических уравнений движения в скалярных, максвелловских и гравитационных полях. Мы используем калибровку светового конуса, чтобы найти решения этих уравнений движения в виде плоских волн, а также число степеней свободы, характеризующих эти поля. Мы объясним, каким образом квантование таких классических полей порождает состояния частиц — скалярных частиц, фотонов и гравитонов. Этим мы готовим основу для последующего распознавания таких состояний среди квантовых состояний релятивистских струн.

10.1. Введение

Исследуя движения классической струны, мы обладали довольно большой свободой при выборе координат мирового листа. Свобода была прямым следствием репараметризационной инвариантности действия, и мы использовали ее, чтобы невероятно упростить уравнения движения. Репараметризационная инвариантность есть пример калибровочной инвариантности, а выбор параметризации есть пример выбора калибровки. Мы убедились в том, что что калибровка светового конуса — параметризация, в которой τ связана со временем светового конуса X^+ и σ выбрана так, что плотность p^+ есть константа — была полезной при получении полного и частных решений уравнения движения.

Классические теории поля иногда обладают калибровочными инвариантами. Например, классическая электродинамика описывается в терминах калибровочных потенциалов A_u, калибровочная инвариантность такого описания часто с успехом используется в расчетах. Классическая теория скалярного поля проще, чем классический электромагнетизм. Однако эта теория редко изучается, так как элементарные скалярные частицы — сорт частиц, связанных с квантовой теорией скалярных полей, — до сих пор не обнаружены. С другой стороны, фотоны — частицы, связанные с квантовой теорией электромагнитного поля, можно найти везде! Скалярные частицы могут играть важную роль в Стандартной модели физики частиц, где они могут помочь включить механизм нарушения симметрии. Таким образом, физики могут когда-нибудь в будущем обнаружить скалярные частицы. Теория единственного скалярного поля не обладает калибровочной инвариантностью. Мы изучим эту теорию, потому что она является простейшей теорией поля, а скалярные частицы возникают в теории струн. Наиболее знаменитой скалярной частицей в теории струн является тахион. Также важен дилатон — безмассовая скалярная частица.

Классическая полевая теория гравитации Эйнштейна значительно сложнее классического электромагнетизма. Как мы объяснили в разделе 3.6, в гравитации динамической переменной является двухиндексная метрика поля $g_{\mu\nu}(x)$. Гравитация обладает очень широкой калибровочной инвариантностью. Калибровочные преобразования включают репараметризацию пространства-времени.

Мы рассмотрим скалярные, электромагнитные и гравитационные поля. Калибровка светового конуса позволит нам серьезно упростить (линеаризованные) уравнения движения, найти их решения в виде плоских волн и подсчитать число степеней свободы, характеризующих решения. Мы рассмотрим также вкратце, каким образом квантование плосковолновых решений порождает состояния частиц. Это квантовые состояния, связанные с теориями поля. Мы проквантуем релятивистскую струну в гл. 12, сопоставим квантовые состояния струны с состояниями частиц тех теорий поля, которые мы изучим в данной главе. Мы используем здесь калибровку светового конуса, так как собираемся квантовать релятивистскую струну именно в этой калибровке.

10.2. Действие для скалярных полей

Скалярное поле — это просто одна действительная функция координат пространства-времени. Ее записывают в виде $\phi(t, \vec{x})$ или короче как $\phi(x)$. Термин скаляр означает скаляр по отношению к преобразованиям Лоренца: все лоренцевские наблюдатели согласятся со значением скалярного поля в любой фиксированной точке пространства-времени. У скалярного поля нет лоренцевских индексов.

Обоснуем теперь простейший вид принципа действия, который можно использовать для определения динамики скалярного поля. Рассмотрим сначала кинетическую энергию. В механике кинетическая энергия частицы пропорциональна квадрату скорости. Для скалярного поля плотность кинетической энергии *T* объявляется пропорциональной квадрату скорости изменения поля со временем:

$$T = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2.$$
 (10.1)

Мы говорим о плотностях, так как в любой фиксированный момент времени T есть функция координаты. Полная кинетическая энергия будет равна интегралу от плотности T по объему пространства.

Рассмотрим теперь плотность потенциальной энергии. Существует один естественный класс слагаемых. Предположим, что равновесное значение поля есть $\phi = 0$. Для простого гармонического осциллятора, положение равновесия которого находится в точке x = 0, потенциальная энергия ведет себя, как $V \sim x^2$. Если мы хотим, чтобы поле предпочитало находиться в своем равновесном состоянии, это должно быть заложено в потенциале. Простейший потенциал, удовлетворяющий этому условию, это квадратичная функция

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$
 (10.2)

Любопытно отметить, что введенная здесь постоянная m имеет размерность массы. Действительно, так как выражения в правых частях приведенных выше двух зыражений должны иметь одинаковые размерности ([T] = [V]), и в каждом из них содержатся два множителя ϕ , мы требуем, чтобы $[m] = [\partial_0] = L^{-1} = M$ исм. (9.8)).

Теперь мы можем попробовать образовать лагранжиан, скомбинировав две энергии и положив

$$\mathcal{L} \stackrel{?}{=} T - V = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$
 (10.3)

Однако такая плотность лагранжиана не является лоренц-инвариантной. Второе слагаемое в правой части есть скаляр, но первое слагаемое таковым не является, так как в него явно входит время. Мы потеряли вклад, представляющий потерю энергии за счет изменения скалярного поля в пространстве. Это особенно важно в рамках специальной теории относительности: если какая-то энергия тратится на то, чтобы поле изменялось во времени, должна также тратиться энергия и на то, чтобы поле изменялось в пространстве. Дополнительный вклад связан поэтому с пространственными производными скалярного поля и может быть записан в виде

$$V' = \frac{1}{2} \sum_{i} (\partial_i \phi)^2 = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2.$$
 (10.4)

гле ∂_i — производные по пространственным координатам. Мы записали это слагаемое как новый вклад V' в потенциальную энергию, а не как вклад в кинетическую энергию. На это есть несколько причин. Во-первых, это требуется лоренцинвариантностью: из двух возможных противоположных знаков в лагранжиане только один согласуется с лоренц-инвариантностью. Во-вторых, кинетическая энергия всегда связана с производными по времени. В-третьих, вычисление полной энергии подтверждает правильность выбора. Действительно, с учетом нового дополнительного слагаемого лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = T - V' - V = \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \qquad (10.5)$$

где по повторяющимся пространственным индексам подразумевается суммирование. Отрицательный знак между двумя первыми слагаемыми в правой части позволяет собрать их в одно, используя метрику Минковского:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \,\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{1}{2} \,m^2 \phi^2. \tag{10.6}$$

Так как все индексы опущены, плотность лагранжиана является лоренц-инвариантом. Связанное с ним действие есть

$$S = \int d^{\mathcal{D}}x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2} m^{2}\phi^{2} \right), \qquad (10.7)$$

где $d^D x = dx^0 dx^1 \dots dx^d$ и D = d + 1 — число пространственно-временных размерностей. Это действие для *свободного* скалярного поля массой *m*. Говорят, что поле свободно, когда его уравнения движения линейны. Если каждое слагаемое в действии квадратично по полю, как в (10.7), уравнения движения будут линейными по полю. Несвободное поле называют взаимодействующим и в этом случае действие содержит слагаемые третьего и более высоких порядков по полю. Чтобы найти плотность энергии поля, вычислим гамильтониан \mathcal{H} . Сопряженный импульс П дается выражением

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi, \qquad (10.8)$$

где для вычисления мы использовали формулу (10.5). Тогда гамильтониан строится как

$$\mathcal{H} = \Pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}. \tag{10.9}$$

Упражнение-разминка 10.1. Покажите, что гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$
 (10.10)

Три слагаемых в \mathcal{H} соответствуют T, V' и V, соответственно. Именно это мы ожидали из физических соображений для плотности энергии. Полная энергия E равна функции Гамильтона H, которая в свою очередь, есть пространственный интеграл от гамильтониана \mathcal{H} :

$$E = H = \int d^{d}x \left(\frac{1}{2} \partial_{0}\phi \partial_{0}\phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^{2} + \frac{1}{2} m^{2} \phi^{2} \right).$$
(10.11)

Чтобы найти уравнения движения из действия (10.7), рассмотрим вариацию $\delta\phi$ поля и положим вариацию действия равной нулю. После выделения полной производной, находим

$$\delta S = \int d^D x \left(-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta\phi) \partial_\nu \phi - m^2 \phi \delta\phi \right) =$$

=
$$\int d^D x \, \delta\phi \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi \right) = 0.$$
(10.12)

Поэтому уравнение движения для ϕ имеет вид

$$\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi - m^{2}\phi = 0. \qquad (10.13)$$

Если определить $\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$, тогда

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0.$$
 (10.14)

Если выписать явно слагаемые с пространственными и временной производными, получаем так называемое уравнение Клейна—Гордона¹⁾

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi - m^2 \phi = 0. \qquad (10.15)$$

Теперь рассмотрим некоторые классические решения этого уравнения.

10.3. Классические решения в виде плоских волн

Можно найти решения уравнения классического скалярного поля (10.15) в виде плоских волн. Рассмотрим, например, выражение

$$\phi(t, \vec{x}) = a e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}},$$
(10.16)

где a и E — константы, а \vec{p} — произвольный вектор. Подставив функцию в уравнение поля (10.15), можно определить допустимые значения E, выраженные через \vec{p} и m:

$$E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \Rightarrow E = \pm E_p, \quad E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$
 (10.17)

Квадратный корень выбран положительным, так что $E_p > 0$. Существует небольшая проблема с решением (10.16). В то время как ϕ является вещественным полем, решение (10.16) не вещественно. Чтобы сделать его вещественным, мы просто добавляем к нему комплексно-сопряженное:

$$\phi(t, \vec{x}) = a e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^* e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}.$$
(10.18)

Это решение зависит от комплексного числа *a*. Общее решение уравнения (10.15) получается суперпозицией решений приведенного выше типа для всех значений \vec{p} . Так как \vec{p} изменяется непрерывно, общая суперпозиция есть на самом деле интеграл. У классического поля нет простой квантово-механической интерпретации. Если воспринимать два слагаемых решения как волновые функции, первое будет представлять волновую функцию частицы с импульсом \vec{p} и положительной энергией E_p . Второе слагаемое — волновую функцию с импульсом $(-\vec{p})$ и отрицательной энергией $(-E_p)$. Это неприемлемо. Чтобы применить квантовую механику к классическому полю, необходимо проквантовать поле, в результате возникнут состояния частиц с положительной энергией, что мы кратко обсудим в следующем разделе.

Для исследования уравнения классического поля (почти всегда) применяют фурье-преобразование скалярного поля $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p).$$
 (10.19)

¹⁾ Более справедливо называть это уравнение — уравнением Клейна—Фока—Гордона. — Прим. ред. перевода.

Здесь $\phi(p)$ — фурье-образ $\phi(x)$. Мы всегда будем явно указывать аргумент ϕ , так что не возникнет никаких недоразумений и путаницы между полем в пространстве-времени и полем в импульсном пространстве. Заметим, что мы совершаем фурье-преобразование по всем пространственно-временным координатам, включая время: $p \cdot x = -p^0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x}$. Тот факт, что $\phi(x)$ вещественно, означает, что $\phi(x) = (\phi(x))^*$. Используя формулу (10.19), запишем это условие в виде

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(p))^*.$$
(10.20)

Заменим $p \to -p$ в левой части этого равенства. Такое изменение переменной интегрирования не влияет на интеграл $\int d^{D}p$, так что можно записать

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(-p) - (\phi(p))^*) = 0, \qquad (10.21)$$

собрав все слагаемые в левую часть. Эта левая часть есть функция x, которая должна тождественно обращаться в нуль. Кроме того, в скобках стоит фурьспреобразование функции в импульсном пространстве, поэтому сама функция должна обращаться в нуль:

$$(\phi(p))^* = \phi(-p).$$
 (10.22)

Это и есть условие вещественности в импульсном пространстве.

Подставляя (10.19) в (10.14) и действуя оператором ∂^2 на $e^{ip \cdot x}$, находим:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (-p^2 - m^2) \phi(p) e^{ipx} = 0.$$
 (10.23)

Для того чтобы это выражение обращалось в нуль для всех значений x, необходимо

$$(p^2 + m^2)\phi(p) = 0$$
 для всех p . (10.24)

Это простое уравнение: $(p^2 + m^2)$ есть просто число, на которое умножается $\phi(p)$, и произведение должно обращаться в нуль. Решить это уравнение означает конкретизировать значения $\phi(p)$ для всех значений p. Так как каждый множитель может обращаться в нуль, мы должны исследовать два случая:

- (i) $p^2 + m^2 \neq 0$, в этом случае скалярное поле обращается в нуль: $\phi(p) = 0$;
- (ii) $p^2 + m^2 = 0$, в этом случае скалярное поле $\phi(p)$ произвольно.

Гиперповерхность $p^2 + m^2 = 0$ в импульсном пространстве называется *массовой оболочкой*. При $p^{\mu} = (E, \vec{p})$ массовая оболочка есть геометрическое место точек в импульсом пространстве, для которых $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, т. е. гиперболоид, представленный на рис. 10.1. Поэтому массовая оболочка есть множество точек $(\pm E_p, \vec{p})$ для всех значений \vec{p} . Мы знаем, что $\phi(p)$ обращается в нуль вне массовой оболочки и произвольна (с точностью до конкретных условий) на массовой оболочке. Рис. 10.1. Массовая оболочка соответствует гиперболоиду $E^2 - p^2 = m^2$ (показаны только два пространственных измерения). Согласно уравнению движения, масса m скалярного поля $\phi(p)$ равна нулю вне гиперболоида. На гиперболоиде поле произвольно, с точностью до условия, которое связывает значения поля в диаметрально противоположных точках

Введем теперь понятие классических степеней свободы. Для точки p^{μ} на массовой оболочке решение определяется заданием комплексного числа $\phi(p)$. Это число автоматически определяет решение в точке $(-p^{\mu})$, также принадлежащей массовой оболочке: $\phi(-p) = (\phi(p))^*$. Таким образом, комплексное число фиксирует значения поля для *двух* точек на массовой оболочке. Нам нужно, в среднем, по одному действительному числу на каждую точку на массовой оболочке. Можно сказать, что поле, удовлетворяющее уравнению (10.24), представляет одну степень свободы, приходящуюся на точку на массовой оболочке.

Завершим этот раздел записью уравнения движения скалярного поля в координатах светового конуса. Пусть \vec{x}_T обозначает вектор, компоненты которого являются поперечными координатами x^I :

$$\vec{x}_T = (x^2, x^3, \dots, x^d).$$
 (10.25)

В этих обозначениях совокупность пространственно-временных координат равна (x^+, x^-, \vec{x}_T) . Уравнение (10.14), записанное в координатах светового конуса, имеет вид

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^{+}}\frac{\partial}{\partial x^{-}}+\frac{\partial}{\partial x^{I}}\frac{\partial}{\partial x^{I}}-m^{2}\right)\phi(x^{+},x^{-},\vec{x}_{T})=0.$$
(10.26)

Чтобы упростить это уравнение, мы совершаем фурье-преобразование пространственной компоненты поля, переходя от x^{-} к p^{+} и от x^{I} к p^{I} . Пусть \vec{p}_{T} обозначает вектор, компоненты которого — поперечные импульсы p^{I} :

$$\vec{p}_T = (p^2, p^3, \dots, p^d).$$
 (10.27)

Тогда фурье-преобразование записывается как

$$\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \int \frac{d^{D-2}\vec{p}_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^-p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T). \quad (10.28)$$

Подставляя теперь эту форму скалярного поля в (10.26), находим

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}(-ip^+)-p^Ip^I-m^2\right)\phi(x^+,p^+,\vec{p}_T)=0 \qquad (10.29)$$



и деля на $2p^+$, получаем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^{+}}-\frac{1}{2p^{+}}(p^{I}p^{I}+m^{2})\right)\phi(x^{+},p^{+},\vec{p}_{T})=0.$$
(10.30)

Это то уравнение, которое мы искали. В противоположность исходному лоренц-ковариантному уравнению движения, содержащему производные второго порядка по времени, уравнение в координатах светового конуса есть дифференциальное уравнение первого порядка по времени светового конуса. Уравнение (10.30) имеет формальную структуру уравнения Шрёдингера, которое также первого порядка по времени. Этот факт окажется полезным при изучении того, как квантовая точечная частица связана со скалярным полем.

Другая версия уравнения (10.30) понадобится нам при дальнейшей работе. Используя новый параметр времени τ , связанный с x^+ как $x^+ = p^+ \tau / m^2$, мы находим:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{2m^2}(p^Ip^I+m^2)\right)\phi(\tau,p^+,\vec{x}_T)=0.$$
(10.31)

Упражнение-разминка 10.2. Рассмотрите уравнение массовой оболочки $p^2 + m^2 = 0$ в координатах светового конуса. Покажите, что

$$p^{-} = \frac{1}{2p^{+}}(p^{I}p^{I} + m^{2}). \qquad (10.32)$$

10.4. Квантовые скалярные поля и состояния частиц

Квантовая теория поля — естественный язык для описания квантового поведения элементарных частиц и их взаимодействий. Квантовая теория поля — это квантовая механика, примененная к классическим полям. В квантовой механике классические динамические переменные превращаются в операторы. Например, координата и импульс классической частицы превращаются в операторы координаты и импульса. Если нашими динамическими переменными являются классические поля, то квантовые операторы станут *операторами поля* (полевыми *операторами*). Таким образом, поля в квантовой теории есть операторы. Пространство состояний в квантовой теории поля обычно описывается с помощью множества *состояний частиц*. В квантовой теории поля есть также операторы энергии и импульса, результатом их действия на состояние частицы является энергия и импульс частицы, описываемой данным состоянием.

В этом разделе мы коротко исследуем, каким образом возникают только что описанные свойства. Развивая решение в виде плоских волн (10.18), которое описывает суперпозицию комплексных волн с импульсами \vec{p} и $-\vec{p}$ (при $\vec{p} \neq 0$), рассмотрим классическую полевую конфигурацию $\phi_p(\tau, \vec{x})$ в виде

$$\phi_p(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right). \tag{10.33}$$

Здесь видны два отличия. Во-первых, зависимость от времени сделана более общей путем введения функции a(t) и комплексно-сопряженной ей функции $a^*(t)$. Множитрель a(t) есть динамическая переменная, определяющая конфигурацию поля. Во-вторых, мы ввели нормировочный множитель \sqrt{V} , где V предполагается равным объему пространства. Нормировочный множитель включает также квадратный корень из энергии E_p , определенной формулой (10.17).

Можно представить пространство как ящик со сторонами L_1, L_2, \ldots, L_d , в этом случае $V = L_1 L_2 \ldots L_d$. Помещая поле в ящик, мы обычно требуем его периодичности. Поле ϕ_p периодично, если каждая компонента p_i вектора \vec{p} удовлетворяет соотношению

$$p_i L_i = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$
 (10.34)

Здесь n_i — целые числа. Каждая компонента импульса квантуется.

Попытаемся теперь применить квантовую механику к полю, заданному (10.33). Для этого вычислим действие скалярного поля (10.7) при $\phi = \phi_p(t, \vec{x})$:

$$S = \int dt \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \phi_p)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_p)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right).$$
(10.35)

Для того чтобы вычислить эту величину, нужно возвести в квадрат поле, его производную по времени и градиент. При возведении в квадрат каждого из этих слагаемых мы получаем при перекрестном умножении два типа слагаемых: те, которые обладают пространственной зависимостью вида $\exp(\pm 2i\vec{p}\cdot\vec{x})$, и те, у которых нет такого множителя. Мы утверждаем, что пространственный интеграл $\int d^d x$ от слагаемых с пространственной зависимостью есть нуль, так что эти слагаемые не дадут вклад в интеграл. Действительно, условия квантования в (10.34) приводят к тому, что

$$\int_{0}^{L_{1}} dx^{1} \dots \int_{0}^{L_{d}} dx^{d} \exp(\pm 2i\vec{p} \cdot \vec{x}) = 0.$$
(10.36)

Для слагаемых без пространственной зависимости пространственный интеграл сводится к множителю V, который сокращается с произведением множителей \sqrt{V} в знаменателе (10.33). В результате

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right).$$
(10.37)

Упражнение-разминка 10.3. Убедитесь, что формула (10.37) верна.

Аналогично используем (10.11) для вычисления энергии поля *H*:

$$H = \frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) + \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t). \qquad (10.38)$$

Упражнение-разминка 10.4. Убедитесь, что формула (10.38) верна.

Действие (10.37) описывает динамику двух простых гармонических осцилляторов. Так как a(t) — комплексная динамическая переменная, мы можем записать

$$a(t) = q_1(t) + iq_2(t),$$
 (10.39)

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — вещественные координаты. Записанное через $q_1(t)$ и $q_2(t)$, действие принимает вид

$$S = \int dt \, L = \sum_{i=1}^{2} \int dt \, \left(\frac{1}{2E_p} \, \dot{q}_i^2(t) - \frac{1}{2} \, E_p \, q_i^2(t) \right). \tag{10.40}$$

Мы видим, что $q_1(t)$ и $q_2(t)$ действительно представляют координаты двух одинаковых простых гармонических осцилляторов. Канонические импульсы равны

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i(t)}{E_p} \implies p_1(t) + ip_2(t) = \frac{1}{E_p} \dot{a}(t). \tag{10.41}$$

Следующие из вариации действия (10.40) уравнения движения имеют вид

$$\ddot{q}_i(t) = -E_p^2 q_i(t), \quad i = 1, 2.$$
 (10.42)

В действительности, удобно работать с комплексной комбинацией a(t). После подстановки в (10.39) уравнения движения упрощаются до одного комплексного уравнения

$$\ddot{a}(t) = -E_p^2 a(t). \tag{10.43}$$

Уравнение (10.43) немедленно решается в виде экспонент. Так как это уравнение второго порядка, имеются два решения:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}.$$
 (10.44)

Величина a(t) комплексна, никакого условия вещественности здесь нет. При записи решения мы ввели две независимые комплексные постоянные a_p и a^*_{-p} . Подставляя это решение в (10.38), находим

$$H = E_p(a_p^*a_p + a_{-p}^*a_{-p}). \tag{10.45}$$

Заметим, что зависимость от времени исчезла; энергия сохраняется.

В классической теории скалярного поля существует интегральное выражение, определяющее пространственно-временной импульс \vec{P} , переносимый полем. В данном случае импульс поля сохраняется, а формула для него может быть получена из анализа решения задачи 8.10. Мы не будем это здесь обсуждать, а просто выпишем ответ

$$\vec{P} = -\int d^d x (\partial_0 \phi) \nabla \phi. \qquad (10.46)$$

В задаче 10.1 вам предлагается вычислить \vec{P} для конфигурации поля (10.33), если a(t) дается формулой (10.44). Результат, который вы получите, имеет вид

$$\vec{P} = \vec{p} (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p}). \tag{10.47}$$

Рассматриваемая система состоит из двух гармонических осцилляторов. Из выражения для H следует, что в квантовой теории a_p и a_{-p} становятся операторами уничтожения, а a_p^* и a_{-p}^* — операторами рождения, a_p^\dagger и a_{-p}^\dagger , соответственно²⁾. Кратко проверим корректность этого предположения. Требуется, чтобы осцилляторы удовлетворяли стандартным коммутационным соотношениям

$$[a_p, a_p^{\dagger}] = 1, \quad [a_{-p}, a_{-p}^{\dagger}] = 1.$$
 (10.48)

Любой коммутатор, включающий оператор с нижним индексом p и оператор с нижним индексом (-p), объявляется равным нулю. Переменная a(t) в (10.44) становится теперь оператором. Выпишем его форму вместе с формой эрмитово сопряженного ему оператора $a^{\dagger}(t)$, а также формой производных по времени:

$$a(t) = a_{p}e^{-iE_{p}t} + a_{-p}^{\dagger}e^{iE_{p}t},$$

$$a^{\dagger}(t) = a_{p}^{\dagger}e^{iE_{p}t} + a_{-p}e^{-iE_{p}t},$$

$$\dot{a}(t) = -iE_{p}(a_{p}e^{-iE_{p}t} - a_{-p}^{\dagger}e^{iE_{p}t}),$$

$$\dot{a}^{\dagger}(t) = iE_{p}(a_{p}^{\dagger}e^{iE_{p}t} - a_{-p}e^{-iE_{p}t}).$$
(10.49)

Произведя небольшие вычисления, можно убедиться, что единственными не обращающимися в нуль коммутаторами между a(t), $a^{\dagger}(t)$, $\dot{a}(t)$ и $\dot{a}^{\dagger}(t)$ являются

$$[a(t), \dot{a}^{\dagger}(t)] = [a^{\dagger}(t), \dot{a}(t)] = 2iE_{p}.$$
(10.50)

Мы можем теперь показать, что эти коммутационные соотношения влекут за собой другие коммутационные соотношения, которые мы хотели бы наложить на координаты и соответствующие им импульсы:

$$[q_1(t), p_1(t)] = [q_2(t), p_2(t)] = i.$$
(10.51)

Это можно сделать, используя уравнения (10.39) и (10.41), разрешенные относительно координат и импульсов:

$$q_1(t) = \frac{1}{2} (a(t) + a^{\dagger}(t)), \quad p_1(t) = \frac{1}{2E_p} (\dot{a}(t) + \dot{a}^{\dagger}(t)), \quad (10.52)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2i} (a(t) - a^{\dagger}(t)), \quad p_2(t) = \frac{1}{2iE_p} (\dot{a}(t) - \dot{a}^{\dagger}(t)).$$
 (10.53)

Теперь можно проверить, что, например,

$$[q_1(t), p_1(t)] = \frac{1}{4E_p} [a(t) + a^{\dagger}(t), \dot{a}(t) + \dot{a}^{\dagger}(t)] =$$
$$= \frac{1}{4E_p} (2iE_p + 2iE_p) = i, \qquad (10.54)$$

²⁾ Знак «†» означает эрмитово сопряжение, т. е. комплексное сопряжение + транспонирование. — Прим. ред. перевода.

как и ожидалось. Аналогично можно проверить другие коммутаторы, и таким образом убедиться, что постулированные коммутационные соотношения (10.48) правильны.

Упражнение-разминка 10.5. Проверьте, что $[q_2(t), p_2(t)] = i u [q_1(t), p_2(t)] = 0.$

На квантовом уровне функция Гамильтона (10.45) становится оператором

$$H = E_p (a_p^{\dagger} a_p + a_{-p}^{\dagger} a_{-p}), \qquad (10.55)$$

описывающим пару простых гармонических осцилляторов, с частотой E_p каждый. Импульс (10.46) становится оператором

$$\vec{P} = \vec{p} \left(a_p^{\dagger} a_p - a_{-p}^{\dagger} a_{-p} \right). \tag{10.56}$$

Обратите внимание, что осцилляторы с индексом (-p) входят в импульс с отрицательным знаком. Эта формула поможет интерпретировать полученные ниже соотношения.

Первые два уравнения в (10.49) можно подставить в (10.33) и получить операторный вариант конфигурации поля:

$$\phi_{p}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p}}} \left(a_{p} e^{-iE_{p}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{p}^{\dagger} e^{iE_{p}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) + \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p}}} \left(a_{-p} e^{-iE_{p}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{-p}^{\dagger} e^{iE_{p}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right).$$
(10.57)

Мы видим, что ϕ_p есть на самом деле оператор, зависящий от координат пространства-времени, или оператор поля. Вторая строка в формуле (10.57) получена из первой строки путем замены $\vec{p} \to -\vec{p}$, которая не влияет на E_p . В самом общем виде квантовое поле $\phi(x)$ включает вклады от всех значений пространственного импульса \vec{p} :

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^{\dagger} e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right).$$
(10.58)

Коммутационные соотношения для осцилляторов являются естественным обобщением этих соотношений в (10.48):

$$\begin{bmatrix} a_p, a_k^{\dagger} \end{bmatrix} = \delta_{pk}, \quad \begin{bmatrix} a_p, a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_p^{\dagger}, a_k^{\dagger} \end{bmatrix} = 0. \quad (10.59)$$

Все нижние индексы здесь являются пространственными векторами, записанными без стрелок, чтобы избежать путаницы в уравнениях. Дельта-символ Кронскера δ_{pk} равен нулю всегда, кроме случая $\vec{p} = \vec{k}$, когда он равен единице³⁾. Коль скоро мы рассматриваем вклады от всех значений импульсов, предыдущее выражение для оператора Гамильтона (10.55) и оператора импульса (10.56) следует изменить. Можно показать, что

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p a_p^{\dagger} a_p, \qquad (10.60)$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^{\dagger} a_p. \tag{10.61}$$

Мы не будем доказывать эти соотношения, но они выглядят вполне правдоподобно.

Пространство состояний этой квантовой системы строится так же, как пространство состояний простого гармонического осциллятора. Мы предполагаем существование вакуумного состояния $|\Omega\rangle$, которое имеет те же свойства, что и основное состояние $|0\rangle$ простого гармонического осциллятора, это состояние уничтожается операторами уничтожения a_p : $a_p |\Omega\rangle = 0$ для всех \vec{p} . Отсюда следует, что $H |\Omega\rangle = 0$, что превращает вакуум в состояние нулевой энергии. Это вакуумное состояние интерпретируется как состояние, в котором нет частиц. С другой стороны, состояние

$$a_p^{\dagger}|\Omega\rangle$$
 (10.62)

интерпретируется как состояние, содержащее ровно одну частицу. Мы утверждаем, что это частица обладает импульсом \vec{p} . Чтобы убедиться в этом, подействуем на состояние оператором импульса (10.61) и воспользуемся соотношениями (10.59). Тогда

$$\vec{P}a_p^{\dagger}|\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} \vec{k}a_k^{\dagger} [a_k, a_p^{\dagger}]|\Omega\rangle = \vec{p}a_p^{\dagger}|\Omega\rangle.$$
(10.63)

Энергия состояния вычисляется аналогично путем действия на него оператором Гамильтона *H*:

$$Ha_{p}^{\dagger}|\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} E_{k}a_{k}^{\dagger}[a_{k}, a_{p}^{\dagger}]|\Omega\rangle = E_{p}a_{p}^{\dagger}|\Omega\rangle.$$
(10.64)

Состояние $a_p^{\dagger}|\Omega\rangle$ обладает положительной энергией. Если оператор квантового поля содержит как положительные, так и отрицательные компоненты, то состояния, представляющие частицы, имеют положительную энергию. Состояния $a_p^{\dagger}|\Omega\rangle$ являются одночастичными состояниями.

Пространство состояний содержит также многочастичные состояния. Это состояния, построенные действием на вакуум произведения операторов рождения:

$$a_{p_1}^{\dagger}a_{p_2}^{\dagger}\ldots a_{p_k}^{\dagger}|\Omega\rangle.$$
 (10.65)

249

³⁾ Обычно индексы в символе Кронскера δ_{nk} принимают целочисленные значения, в таком случае их не нужно отделять запятой. В теории поля эти индексы могут быть векторными (как в (10.59)) или составными (как в (12.116)), тогда они отделяются запятой. — Прим. ред. перевода.

Такое состояние с k операторами рождения, действующими на вакуум, представляет состояние с k частицами. Эти частицы имеют импульсы $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ и энергии $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_k}$. Импульсы \vec{p}_i не обязательно должны быть все разными.

🕑 Упражнение-разминка 10.6. Покажите, что собственные значения операторов

 \vec{P} и H, действующих на (10.65), равны $\sum_{n=1}^{k} \vec{p}_n$ и $\sum_{n=1}^{k} E_{p_n}$, соответственно.

b Упражнение-разминка 10.7. Убедитесь, что $N=\sum_{ec{p}}a_p^\dagger a_p$ есть оператор числа

частиц: действуя на состояние, он определяет число частиц в данном состоянии.

Наш анализ классических решений в предыдущем разделе привел к заключению, что на каждую точку на массовой оболочке приходится одна частица. На квантовом уровне мы сосредоточимся на рассмотрении одночастичных состояний, следовательно, ограничимся физической частью массовой оболочки, для которой энергия положительна ($p^0 = E > 0$). На каждую точку на физической массовой оболочке приходится единственное одночастичное состояние, оно определяется пространственным импульсом \vec{p} .

Для того чтобы описать состояния частиц в координатах светового конуса, нужны провести минимальные изменения. Физическая часть массовой оболочки параметризуется поперечными импульсами \vec{p}_T и импульсами светового конуса p^+ , для которых $p^+ > 0$. Значение энергии светового конуса p^- фиксировано. Таким образом, вместо того, чтобы помечать осцилляторы индексом \vec{p} , мы просто пометим их индексами p^+ и \vec{p}_T . Одночастичное состояние тогда запишется как

одночастичное состояние скалярного поля:
$$a_{p^+,p_T}^{\dagger}|\Omega\rangle$$
. (10.66)

Приведенный в (10.61) оператор импульса имеет естественный вид в координатах светового конуса. Различные компоненты оператора выглядят так:

$$\widehat{p}^{+} = \sum_{p^{+}, p_{T}} p^{+} a_{p^{+}, p_{T}}^{\dagger} a_{p^{+}, p_{T}},$$

$$\widehat{p}^{I} = \sum_{p^{+}, p_{T}} p^{I} a_{p^{+}, p_{T}}^{\dagger} a_{p^{+}, p_{T}},$$

$$\widehat{p}^{-} = \sum_{p^{+}, p_{T}} \frac{1}{2p^{+}} (p^{I} p^{I} + m^{2}) a_{p^{+}, p_{T}}^{\dagger} a_{p^{+}, p_{T}}.$$
(10.67)

В последнем соотношении величина, на которую умножаются осцилляторы, есть значение p^- , определенное из уравнения массовой поверхности (10.32). Это соотношение аналогично (10.60), где E_p есть энергия, определенная уравнением массовой поверхности.

10.5. Максвелловские поля и состояния фотона

Обратимся к анализу максвелловских полей и соответствующих квантовых состояний. В противоположность скалярному полю, для которого нет калибровочной инвариантности, электромагнитные поля обладают калибровочной инвариантностью, это делает наш анализ более тонким и интересным. Чтобы упростиь изучение уравнения поля, наложим калибровочное условие, определяющее калибровку светового конуса. Тогда нам удастся описать квантовые состояния максвелловского поля.

Уравнения электромагнитного поля записываются через электромагнитный векторный потенциал $A_{\mu}(x)$. Как мы видели в разделе 3.3, напряженность поля $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\delta A_{\nu} = \partial_{\mu} \epsilon, \qquad (10.68)$$

где ϵ — параметр калибровки. Уравнения поля принимают вид

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_{\nu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = 0, \qquad (10.69)$$

и могут быть записаны как

$$\partial^2 A^{\mu} - \partial^{\mu} (\partial \cdot A) = 0. \tag{10.70}$$

Сравним это уравнение с уравнением (10.14) для скалярного поля. В случае максвелловского поля нет никаких намеков на массовое слагаемое — такое слагаемое должно выделяться тем, что не содержит пространственно-временных производных. Ниже мы подтвердим, что максвелловское поле действительно безмассовое.

Чтобы определить уравнение движения в импульсном пространстве, запишем преобразование Фурье всех компонент векторного потенциала:

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^{D}p}{(2\pi)^{D}} e^{ipx} A^{\mu}(p). \qquad (10.71)$$

причем из вещественности $A^{\mu}(x)$ следует, что $A^{\mu}(-p) = (A^{\mu}(p))^*$. Подставляя (10.71) в (10.70), получаем уравнение

$$p^{2}A^{\mu} - p^{\mu}(p \cdot A) = 0. \qquad (10.72)$$

Можно также совершить фурье-преобразование калибровочного соотношения (10.68). В импульсном представлении получим связь $\delta A^{\mu}(p)$ с фурье-преобразованием $\epsilon(p)$ калибровочного параметра:

$$\delta A^{\mu}(p) = i p_{\mu} \epsilon(p). \tag{10.73}$$

Так как калибровочный параметр $\epsilon(x)$ вещественен, имеем $\epsilon(-p) = \epsilon^*(p)$. Калибровочное преобразование (10.73) совместно с вещественностью $\delta A^{\mu}(p)$. В самом деле,

$$\left(\delta A_{\mu}(p)\right)^{*} = -ip_{\mu}\left(\epsilon(p)\right)^{*} = i(-p_{\mu})\epsilon(-p) = \delta A_{\mu}(-p). \tag{10.74}$$

Обратим внимание на роль множителя *i* для получения нужных знаков.

Закончив с предварительными результатами, мы можем проанализировать уравнение (10.72), подвергнутое калибровке (10.73). Для этого удобнее работать с компонентами светового конуса для калибровочного поля:

$$A^{+}(p), A^{-}(p), A^{I}(p).$$
 (10.75)

Калибровочное преобразование (10.73) принимает вид

$$\delta A^+ = ip^+\epsilon, \quad \delta A^- = ip^-\epsilon, \quad \delta A^I = ip^I\epsilon.$$
 (10.76)

Накладываем калибровочное условие. Как мы подчеркивали ранее, при работе с формализмом светового конуса мы всегда предполагаем $p^+ \neq 0$. Приведенные выше калибровочные преобразования помогают понять, что при правильном выборе ϵ можно положить A^+ равным нулю. Действительно, если применить калибровочное преобразование

$$A^+ \rightarrow A'^+ = A^+ + ip^+\epsilon, \qquad (10.77)$$

то A'^+ обращается в нуль, если выбрать $\epsilon = iA^+/p^+$. Иными словами, всегда можно сделать равной нулю компоненту максвелловского поля с индексом «+», применив калибровочное преобразование. Это будет нашим определяющим условием калибровки светового конуса в теории Максвелла.

Условие калибровки светового конуса:
$$A^+(p) = 0.$$
 (10.78)

Полагая A^+ равным нулю, мы фиксируем калибровочный параметр ϵ , при этом все остальные калибровочные преобразования становятся невозможными, так как если $A^+ = 0$, любое последующее калибровочное преобразование сделает его отличным от нуля. Есть одно небольшое исключение: любой параметр вида $\epsilon(p) = \epsilon(p^-, p^I)\delta(p^+)$ сохранит равенство $A^+ = 0$, так как $p^+\epsilon(p) = 0$. Заслуживает внимания сходство с теорией струн в калибровке светового конуса. В теории открытых струн в калибровке светового конуса все репараметризационные инвариантности мирового листа фиксированы. Кроме того, даже если X^+ не равна нулю, эта величина очень проста: соответствующая нулевая мода и осцилляторы обращаются в нуль (см. раздел 9.5).

Калибровочное условие (10.78) существенно упрощает уравнение движения (10.72). Выбирая $\mu = +$, находим:

$$p^+(p \cdot A) = 0 \implies p \cdot A = 0. \tag{10.79}$$

Уравнение можно разложить, используя индексы светового конуса:

$$-p^{+}A^{-} - p^{-}A^{+} + p^{I}A^{I} = 0.$$
 (10.80)

Так как $A^+ = 0$, соотношение определяет A^- через поперечные компоненты A^I :

$$A^{-} = \frac{1}{p^{+}} (p^{I} A^{I}).$$
 (10.81)
Это напоминает анализ струны в координатах светового конуса, когда X^- было найдено через поперечные координаты (и нулевую моду). Если подставить (10.79) в (10.72), все, что останется от уравнения поля, будет уравнение

$$p^2 A^{\mu}(p) = 0. \tag{10.82}$$

Для $\mu = +$ это уравнение выполняется тривиально, так как $A^+ = 0$. Для $\mu = I$ получаем множество нетривиальных условий

$$p^2 A^I(p) = 0. (10.83)$$

Для $\mu = -$ получаем $p^2 A^-(p) = 0$. Это соотношение автоматически удовлетворяется в силу (10.81) и (10.83).

Для каждого значения I уравнение (10.83) принимает вид уравнения движения безмассового скаляра. Таким образом, $A^{I}(p) = 0$, если $p^{2} \neq 0$. Отсюда вытекает, что $A^{-} = 0$ и, так как A^{+} равно нулю, полное калибровочное поле обращается в нуль. При $p^{2} = 0$ величины $A^{I}(p)$ не ограничены никакими связями, и $A^{-}(p)$ определяются как функции A^{I} (см. (10.81)). Таким образом степени свободы максвелловского поля переносятся (D-2) поперечными полями $A^{I}(p)$ при $p^{2} = 0$. Можно сказать, что у нас приходится по (D-2) степеней свободы на каждую точку на массовой оболочке.

На самом деле, можно показать, что при $p^2 \neq 0$ нет никаких степеней свободы, не делая никакого выбора калибровки. Хотя не каждое поле равно нулю, каждое поле при $p^2 \neq 0$ калибровочно эквивалентно нулевому полю. Если поле отличается от нулевого поля только калибровочным преобразованием, мы говорим, что это поле является чистой калибровкой. Напомним, что поля A_{μ} и A'_{μ} калибровочно эквивалентны, если $A_{\mu} = A'_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ для любой скалярной функции χ . Выбирая $A'_{\mu} = 0$, получаем, что $A_{\mu} = \partial_{\mu}\chi$ калибровочно эквивалентно нулевому полю и является поэтому чистой калибровкой. Термин «чистая калибровка» удобен: A_{μ} принимает вид калибровочного преобразования. В импульсном пространстве чистая калибровка есть поле, которое можно записать в виде

чистая калибровка:
$$A_{\mu}(p) = i p_{\mu} \chi(p),$$
 (10.84)

при некотором выборе χ . Перепишем теперь уравнение движения (10.72) как

$$p^2 A_\mu = p_\mu (p \cdot A). \tag{10.85}$$

Так как $p^2 \neq 0$, можно записать

$$A_{\mu} = ip_{\mu}\left(\frac{-ip \cdot A}{p^2}\right). \tag{10.86}$$

Сравнивая с (10.84), видим, что A_{μ} есть чистая калибровка. Это означает, при $p^2 \neq 0$ у максвелловского поля нет никаких степеней свободы. Для любых приложений можно считать, что никакого поля в этом случае нет.

Коротко обсудим фотонные состояния. Каждое из независимых классических полей A^{I} можно разложить, как это мы делали для скалярного поля в (10.58). Чтобы сделать это, введем, как вы можете догадаться по аналогии, осцилляторы a_{p}^{I} и $a_{p}^{I\dagger}$, где нижний значок p представляет значения p^{+} и \vec{p}_{T} . Таким образом, мы получаем (D-2) сортов осцилляторов. Вводя вакуум $|\Omega\rangle$, можно теперь записать однофотонные состояния как

$$a_{p^+,p_T}^{I\dagger}|\Omega
angle$$
 (10.87)

Здесь I — метка поляризации. Говорят, что фотонное состояние (10.87) поляризовано в I-ом направлении. Так как у нас есть (D-2) возможных поляризаций, мы имеем (D-2) линейно независимых однофотонных состояний для каждой точки физического сектора массовой поверхности. Произвольное однофотонное состояние с импульсом (p^+, \vec{p}_T) есть линейная суперпозиция предыдущих состояний.

Однофотонное состояние:
$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle.$$
 (10.88)

Здесь поперечный вектор ξ_I называется вектором поляризации.

В четырехмерном пространстве-времени теория Максвелла приводит к D-2=2 однофотонным состояниям для каждого фиксированного пространственного импульса. Это знакомо читателю, по крайней мере, на классическом уровне. Электромагнитная плоская волна, распространяющаяся в заданном направлении и имеющая определенную фиксированную длину волны (т. е. фиксированный импульс), может быть записана как суперпозиция двух плоских волн, представляющих независимые состояния поляризации.

10.6. Гравитационные поля и состояния гравитонов

В теории струн гравитация возникает в рамках общей теории относительности Эйнштейна. Мы коротко обсуждали это в разделе 3.6. Динамической полевой переменной является метрика пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$, которая в приближении слабых гравитационных полей может быть записана в виде $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$. Как $g_{\mu\nu}$, так и $h_{\mu\nu}$ симметричны относительно перестановки индексов. Уравнения поля $g_{\mu\nu}$ — уравнения Эйнштейна — можно использовать для вывода линеаризованных уравнений движения флуктуаций метрики $h_{\mu\nu}$. Эти уравнения были выписаны в (3.82). Определяя $h_{\mu\nu}(p)$ как фурье-преобразование $h_{\mu\nu}(x)$, находим, что в импульсном пространстве уравнение может быть записано в виде

$$S^{\mu\nu}(p) \equiv p^2 h^{\mu\nu} - p_{\alpha}(p^{\mu}h^{\nu\alpha} + p^{\nu}h^{\mu\alpha}) + p^{\mu}p^{\nu}h = 0.$$
(10.89)

Если бы мы рассматривали уравнения Эйнштейна с источниками, правая часть уравнения включала бы слагаемые, представляющие тензор энергии-импульса

источников. В приведенном выше уравнении $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\mu}$ и индексы у $h_{\mu\nu}$ можно поднимать и опускать, используя метрику Минковского $\eta_{\mu\nu}$ и обратный тензор $\eta^{\mu\nu}$. Так как каждое слагаемое в (10.89) содержит две производные, флуктуации $h_{\mu\nu}$ связаны с безмассовыми возбуждениями.

Как мы вскоре увидим, уравнение движения (10.89) инвариантно относительно калибровочных преобразований, обсуждавшихся в разделе 3.6:

$$\delta_0 h^{\mu\nu}(p) = i p^{\mu} \epsilon^{\nu}(p) + i p^{\nu} \epsilon^{\mu}(p). \qquad (10.90)$$

Бесконечно малый калибровочный параметр $\epsilon^{\mu}(p)$ является вектором. В гравитации калибровочная инвариантность — это репараметризационная инвариантность: выбор системы координат, использованной для параметризации пространства-времени, не влияет на физику.

Проверим, что уравнение (10.89) инвариантно относительно калибровочного преобразования (10.90). Сначала вычислим $\delta_0 h$ и найдем

$$\delta_0 h = \eta_{\mu\nu} \delta_0 h^{\mu\nu} = i \eta_{\mu\nu} (p^{\mu} \epsilon^{\nu} + p^{\nu} \epsilon^{\mu}) = 2ip \cdot \epsilon.$$
(10.91)

Поэтому результирующая вариация $S^{\mu\nu}$ равна

$$\delta_0 S^{\mu\nu} = ip^2 (p^{\mu} \epsilon^{\nu} + p^{\nu} \epsilon^{\mu}) - ip_{\alpha} p^{\mu} (p^{\nu} \epsilon^{\alpha} + p^{\alpha} \epsilon^{\nu}) - - ip_{\alpha} p^{\nu} (p^{\mu} \epsilon^{\alpha} + p^{\alpha} \epsilon^{\mu}) + 2ip^{\mu} p^{\nu} p \cdot \epsilon.$$
(10.92)

Но это выражение можно переписать в виде

$$\delta_0 S^{\mu\nu} = ip^2 (p^{\mu} \epsilon^{\nu} + p^{\nu} \epsilon^{\mu}) - ip^{\mu} p^{\nu} (p \cdot \epsilon) - ip^2 p^{\mu} \epsilon^{\nu} - ip^{\mu} p^{\nu} (p \cdot \epsilon) - ip^2 p^{\nu} \epsilon^{\mu} + 2ip^{\mu} p^{\nu} p \cdot \epsilon.$$
(10.93)

Видно, что все слагаемые в (10.93) сокращаются, так что $\delta_0 S^{\mu\nu} = 0$. Уравнение движения проявляет требуемую калибровочную инвариантность.

Так как метрика $h^{\mu\nu}$ симметрична и имеет два индекса, каждый из которых принимает значения (+, -, I), мы должны рассмотреть следующие объекты:

$$(h^{II}, h^{+I}, h^{-I}, h^{+-}, h^{++}, h^{--}).$$
 (10.94)

Попытаемся обратить в нуль все поля в (10.94), содержащие индекс +. Для исследования калибровочных преобразований этих величин используем (10.90):

$$\boldsymbol{\delta}_0 \boldsymbol{h}^{++} = 2\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}^+\boldsymbol{\epsilon}^+, \qquad (10.95)$$

$$\delta_0 h^{+-} = ip^+ \epsilon^- + ip^- \epsilon^+, \qquad (10.96)$$

$$\delta_0 h^{+I} = i p^+ \epsilon^I + i p^I \epsilon^+. \tag{10.97}$$

Как и ранее, предполагаем, что $p^+ \neq 0$. Из (10.95) видно, что разумный выбор ϵ^+ позволяет с помощью калибровки отбросить h^{++} , этим фиксируется наш выбор ϵ^+ . Глядя на соотношение (10.96), видим, что хотя мы зафиксировали ϵ^+ , мы все еще можем определить ϵ^- , которое откалибрует h^{+-} , этим условием фиксируется ϵ^- . Аналогично, мы можем использовать (10.97) и подходящий выбор ϵ^I ,

чтобы положить h^{+I} равным нулю. Итак, мы полностью использовали свободу калибровки, чтобы положить равными нулю все компоненты $h^{\mu\nu}$ с индексами +. Это определяет калибровку светового конуса для гравитационного поля.

Калибровка светового конуса:
$$h^{++} = h^{+-} = h^{+I} = 0.$$
 (10.98)

Оставшиеся степени свободы связаны с

$$(h^{II}, h^{-I}, h^{--}).$$
 (10.99)

Теперь мы должны посмотреть, какие требования накладываются уравнениями движения (10.89). Воспользовавшись калибровочными условиями (10.98), где $\mu = \nu = +$, находим

$$(p^+)^2 h = 0 \Rightarrow h = 0.$$
 (10.100)

В более явной форме

$$h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -2h^{+-} + h^{II} = 0 \Rightarrow h^{II} = 0,$$
 (10.101)

так как в нашей калибровке $h^{+-} = 0$. Уравнение $h^{II} = 0$ означает, что матрица h^{II} имеет равный нулю след. С учетом h = 0 уравнение движения (10.89) сводится к

$$p^{2}h^{\mu\nu} - p^{\mu}(p_{\alpha}h^{\nu\alpha}) - p^{\nu}(p_{\alpha}h^{\mu\alpha}) = 0. \qquad (10.102)$$

Положим $\mu = +$, тогда $p^+(p_{\alpha}h^{\nu\alpha}) = 0$ и, в результате,

$$p_{\alpha}h^{\nu\alpha}=0. \tag{10.103}$$

Если соотношение (10.103) выполнено, уравнение (10.102) сводится к

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0. \tag{10.104}$$

Это все, что остается от уравнения движения! Прежде чем тщательно исследовать это знакомое уравнение, внимательнее рассмотрим соотношение (10.103). Единственный свободный индекс в этом соотношении — это индекс ν . При $\nu = +$ уравнение тривиально, так как в нашей калибровке $h^{+\alpha}$ равны нулю. Рассмотрим теперь $\nu = I$. Тогда $p_{\alpha}h^{I\alpha} = 0$, что можно развернуть в виде

$$-p^{+}h^{I-} - p^{-}h^{I+} + p_{J}h^{IJ} = 0 \implies h^{I-} = \frac{1}{p^{+}}p_{J}h^{IJ}. \qquad (10.105)$$

Аналогично, если $\nu = -$, то получаем $p_{\alpha}h^{I\alpha} = 0$, что в развернутой форме равно

$$-p^{+}h^{--} - p^{-}h^{-+} + p_{I}h^{-I} = 0 \implies h^{--} = \frac{1}{p^{+}}p_{I}h^{-I}.$$
(10.106)

Уравнения (10.105) и (10.106) выражают компоненты h с индексами «-» через поперечные⁴⁾ компоненты h^{IJ} . В этом содержание (10.103).

256

⁴⁾ Здесь Ј является «поперечным» индексом, равно как *I. — Прим. ред. перевода.*

Возвращаемся к уравнению (10.104). Это уравнение тривиально выполняется для любого поля с индексом +. Уравнение нетривиально для поперечных индексов:

$$p^2 h^{IJ}(p) = 0. (10.107)$$

Уравнения $p^2 h^{I-} = 0$ и $p^2 h^{--} = 0$ автоматически выполняются с учетом наших решений (10.105), (10.106) и (10.107). Уравнение (10.107) требует, чтобы $h^{IJ}(p) = 0$ 1ля $p^2 \neq 0$, и в этом случае обращаются в нуль все остальные компоненты $h^{\mu\nu}$. При $p^2 = 0$ на $h^{IJ}(p)$ нет никаких условий за исключением требования равенства нулю следа $h_{II}(p) = 0$. Все остальные компоненты определены через поперечные компоненты.

Мы приходим к выводу, что степени свободы классического D-мерного гравитационного поля переносятся симметричным бесследовым поперечным тензорным полем \hbar^{IJ} , компоненты которого удовлетворяют уравнению движения безмассового скаляра. Этот тензор имеет столько же компонент, сколько симметричная бесследовая квадратная матрица размером (D-2). Число компонент n(D)такой матрицы равно

$$n(D) = \frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3). \quad (10.108)$$

Кроме того, как и ранее, мы считаем безмассовый скаляр как одну степень свободы, приходящуюся на точку на массовой оболочке. Поэтому мы говорим, что классическая гравитационная волна имеет n(D) степеней свободы на точку на массовой поверхности. В четырехмерном пространстве-времени имеются два поперечных направления, так что симметричная бесследовая матрица (2×2) имеет две независимые компоненты. Следовательно, в четырех измерениях мы имеем n(4) = 2 степени свободы. В пяти измерениях имеем n(5) = 5 степеней свободы, в десяти измерениях n(10) = 35 степеней свободы и в 26 измерениях n(26) = 299 степеней свободы. Чтобы получить состояния гравитона, каждое из независимых классических полей h^{IJ} разлагается по операторам рожления и уничтожения, как это было сделано ранее для скалярного поля в (10.58). Чтобы произвести это разложение, нам нужны осцилляторы a_{p^+,p_T}^{IJ} и $a_{p^+,p_T}^{IJ\dagger}$. Вводим вакуум $|\Omega\rangle$ и базисные состояния

$$a_{p^+,p_T}^{IJ\dagger}|\Omega\rangle. \tag{10.109}$$

Одногравитонное состояние с импульсом (p^+, p_T) есть линейная суперпозиция этих состояний.

Одногравитонное состояние:
$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+,p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad \xi_{II} = 0.$$
 (10.110)

Здесь ξ_{IJ} — тензор поляризации гравитона. Классическое условие бесследовости, найденное выше, превращается в квантовой теории в условие бесследовости $\xi_{II} = 0$ тензора поляризации. Так как ξ_{IJ} есть бесследовая симметричная матрица

размером (D-2), на каждую точку на физической массовой оболочке приходится n(D) линейно независимых состояний гравитона.

Задачи

Задача 10.1. Импульс классического скалярного поля

Покажите, что интеграл (10.46), взятый по полевой конфигурации (10.33), равен

$$ec{P}=-rac{i}{2}rac{ec{p}}{E_p}(\dot{a}^*a-a^*\dot{a})$$

Используя (10.44), покажите, что $\vec{P} = \vec{p}(a_p^*a_p - a_{-p}^*a_{-p})$, как и показано в (10.47).

Задача 10.2. Коммутатор квантового скалярного поля

(a) Рассмотрите периодическую функцию $f(\vec{x})$ в ящике, описанном уравнением (10.34). Такую функцию можно разложить в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}.$$
 (1)

Покажите, что

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{V} \int d\vec{x}' f(\vec{x}') e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'}.$$
 (2)

Подставьте (2) в (1) и получите представление *d*-мерной дельта-функции $\delta^d(\vec{x} - \vec{x}')$ в виде бесконечной суммы.

(б) Рассмотрите полное разложение скалярного поля (10.58). Рассчитайте соответствующее разложение $\Pi(t, \vec{x}) = \partial_0 \phi(t, \vec{x})$. Покажите, что

$$\left[\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{x})\right] = i\,\delta^d(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{3}$$

Это коммутатор оператора поля и соответствующего оператора сопряженного импульса при фиксированном времени. Большинство дискуссий по квантовой теории поля начинается с постулирования этого коммутатора.

Задача 10.3. Компоненты светового конуса для лоренцевских тензоров¹

- (a) Проверьте, что лоренц-ковариантное уравнение $A^{\mu} = B^{\mu}$ при $\mu = 0, 1, ..., d$ предполагает выполнение равенств $A^+ = B^+$, $A^- = B^-$ и $A^I = B^I$. Пусть задан лоренцевский тензор $R^{\mu\nu}$. Как следует определить компоненты светового конуса $R^{+-}, R^{++}, ...$? Чтобы найти их, заметим, что определение должно действовать для *любого* тензора, в том числе для $R^{\mu\nu} = A^{\mu}B^{\nu}$. Таким образом, например, $R^{+-} = A^+B^-$, и, представив A^+ и B^- через лоренцевские компоненты, вы можете определить R^{+-} через R^{00}, R^{01}, R^{10} и R^{11} .
- (б) Выразите R^{++}, R^{+-}, R^{-+} и R^{--} через лоренцевские компоненты $R^{\mu\nu}$. Объясните, почему равенство $R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$ между лоренцевскими тензорами влечет за собой равенство компонент светового конуса.

- (в) Проверьте, что ваш результат (б) приводит к ожидаемым результатам для компонент светового конуса метрики Минковского η⁺⁺, η⁺⁻, η⁻⁺ и η⁻⁻.
- (г) Рассмотрите антисимметричный тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ в четырех измерениях. Рассчитайте компоненты светового конуса F^{+-} , F^{+I} , F^{-I} и F^{IJ} , выразив их через лоренцевские компоненты $F^{\mu\nu}$. Перепишите ваши ответы, выразив их через поля \vec{E} и \vec{B} .

Задача 10.4. Постоянное электрическое поле в калибровке светового конуса

Найдите потенциалы, описывающие постоянное однородное электрическое поле $\vec{E} = E_0 \vec{e_x}$ в калибровке светового конуса ($A^+ = (A^0 + A^1)/\sqrt{2} = 0$). Запишите $A^$ и A^I через координаты светового конуса x^+ , x^- и x^I .

Задача 10.5. Гравитационные поля, являющиеся чистой калибровкой

Следуя определению максвелловских полей, являющихся чистой калибровкой, определите гравитационные поля, которые являются чистой калибровкой. Докажите, что любое гравитационное поле $h_{\mu\nu}(p)$, удовлетворяющее уравнениям движения, при $p^2 \neq 0$ является чистой калибровкой.

► Задача 10.6. Уравнения поля и состояния частиц для поля Кальба—Рамона B_µ¹

Рассмотрим теорию поля для безмассового антисимметричного тензорного калибровочного поля $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Это калибровочное поле есть тензорный аналог максвелловского калибровочного поля A_{μ} . В максвелловской теории мы определяли напряженность поля $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$.

Используя $B_{\mu\nu}$, мы определяли напряженность поля $H_{\mu\nu\rho}$:

$$H_{\mu
u
ho}\equiv\partial_{\mu}B_{
u
ho}+\partial_{
u}B_{
ho\mu}+\partial_{
ho}B_{\mu
u}.$$

(a) Покажите, что $H_{\mu\nu\rho}$ полностью антисимметричен. Докажите, что $H_{\mu\nu\rho}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\epsilon_{\nu} - \partial_{\nu}\epsilon_{\mu}.$$

$$\epsilon'_{\mu} = \epsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda,$$

порождает такие же калибровочные преобразования, как и ϵ_{μ} .

- (в) Используя координаты светового конуса и импульсное пространство, докажите, что $\epsilon^+(p)$ можно положить равным нулю при подходящем выборе $\lambda(p)$. Таким образом, эффективная калибровочная симметрия поля Кальба--Рамона порождается калибровочными параметрами $\epsilon^I(p)$ и $\epsilon^-(p)$.
- (г) Рассмотрев пространственно-временное действие

$$S \sim \int d^D x \left(-\frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu
ho}
ight),$$

найдите уравнение поля $B_{\mu\nu}$ и запишите его в импульсном пространстве.

- (д) Каковы удобные калибровочные условия на световом конусе для $B^{\mu\nu}$? Имея в виду результат (в), покажите, что эти калибровочные условия могут быть реализованы с помощью калибровочной инвариантности. Анализируя уравнения движения, покажите, что $p^2 B_{\mu\nu} = 0$ и найдите компоненты $B_{\mu\nu}$, которые представляют истинно независимые степени свободы.
- (е) Докажите, что одночастичные состояния поля Кальба-Рамона имеют вид

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \zeta_{IJ} a_{p^+,p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle.$$
 (1)

К какому типу относится матрица ζ_{IJ} ?

► Задача 10.7. Массивное векторное поле[†]

Цель этой задачи — рассмотреть массивный вариант максвелловского поля. Мы увидим, что в D-мерном пространстве-времени массивное векторное поле имеет (D-1) степеней свободы.

Рассмотрим действие $S = \int d^D x \mathcal{L}$ с лагранжианом

$$\mathcal{L}=-rac{1}{4}F_{\mu
u}F^{\mu
u}-rac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu-rac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+mA^\mu\partial_\mu\phi.$$

Первое слагаемое в \mathcal{L} знакомо нам по максвелловскую полю. Второе выглядит как массивное слагаемое для максвелловского поля, но само по себе оно недостаточно для определения массивного поля. Дополнительные слагаемые содержат действительное скалярное поле ϕ , которое, как мы увидим, *исчезает* с тем, чтобы придать массу калибровочному полю.

- (a) Покажите, что лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно бесконечно малого калибровочного преобразования $\delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \epsilon$, $\delta \phi = \ldots$, где точки означают выражения, которые вы должны определить. В то время как максвелловские калибровочные преобразования нам знакомы, необычно калибровочное преобразование действительного скалярного поля.
- (б) Проварьируйте действие и напишите уравнения поля для A^{μ} и ϕ .
- (в) Покажите, что калибровочные преобразования позволяют положить $\phi = 0$. Так как поле ϕ исчезает, мы говорим, что оно *«съедено»*. Как при этом упростятся уравнения поля в (б)?
- (г) Запишите упрощенные уравнения в импульсном пространстве и покажите, что при $p^2 \neq -m^2$ не существует нетривиальных решений, в то время как при $p^2 = -m^2$ решение требует, чтобы у поля была (D-1) степень свободы. (Может оказаться полезным использовать лоренцевские преобразования, чтобы представить вектор p^{μ} , удовлетворяющий условию $p^2 = -m^2$, как вектор, обладающий компонентой только в одном направлении.)

Глава 11

Релятивистская квантовая точечная частица

Мы изучаем квантование релятивистской точечной частицы в калибровке светового конуса, это подготовит нас к квантованию струны. Мы строим квантовую теорию, требуя, чтобы операторы Гейзенберга удовлетворяли классическим уравнениям движения, показываем, что квантовые состояния релятивистской точечной частицы совпадают с одночастичными состояниями квантового скалярного поля; кроме того, уравнение Шрёдингера для волновых функций частицы совпадает с уравнениями классического скалярного поля. Наконец, мы определяем лоренцевские генераторы в калибровке светового конуса.

11.1. Точечная частица в калибровке светового конуса

В этом разделе мы изучаем классическую релятивистскую точечную частицу в помощью калибровки светового конуса. На самом деле эта задача намного легче той, с которой мы столкнулись в главе 9, исследуя классическую релятивистскую струну в калибровке светового конуса. В этой главе мы столкнемся с трудностями квантования для более простой частицы. Многие идеи, необходимые для квантования струны, используются также и при квантовании точечной частицы.

Действие для релятивистской точечной частицы изучалось нами в главе 5. Начнем с анализа выражения, заданного формулой (5.15), где для параметризации движения частицы используется произвольный параметр τ :

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau. \qquad (11.1)$$

Записывая это действие, мы положили c = 1. Кроме того, мы будем, там где это удобно, полагать и $\hbar = 1$. Наконец, параметр τ будет безразмерным точно так, как в релятивистской струне, начиная с главы 9. Мы можем упростить обозначения, записав

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \dot{x}^{2}.$$
 (11.2)

Если рассматривать τ как переменную времени, а $x^{\mu}(\tau)$ — как координаты, то действие S определяет функцию Лагранжа L в виде

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L \, d\tau, \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}. \tag{11.3}$$

Как обычно, импульс получается дифференцированием функции Лагранжа по скорости:

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\mu}} = \frac{m \dot{x}^{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}^2}}.$$
(11.4)

Уравнения Эйлера—Лагранжа, получающиеся из функции Лагранжа, имеют вид

$$\frac{dp_{\mu}}{d\tau} = 0. \tag{11.5}$$

Все компоненты импульса являются интегралами движения. С учетом (11.4) легко проверить, что компоненты импульса удовлетворяют уравнению связи

$$p^2 + m^2 = 0. (11.6)$$

Чтобы определить калибровку светового конуса для частицы, полагаем координату x^+ частицы пропорциональной τ .

Условие калибровки светового конуса
$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau$$
. (11.7)

Множитель m^2 в правой части равенства необходим для того, чтобы заработали единицы измерения. Рассмотрим теперь компоненту p^+ уравнения (11.4):

$$p^{+} = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^{2}}} \dot{x}^{+} = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^{2}}} \frac{p^{+}}{m}.$$
 (11.8)

Сокращая общий множитель p^+ , и возводя в квадрат, находим:

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2}.$$
 (11.9)

Этот результат помогает упростить выражение (11.4) для импульса:

$$p_{\mu} = m^2 \dot{x}_{\mu}.$$
 (11.10)

Появление m^2 вместо *m* обязано нашему выбору безразмерной величины τ . Теперь, из уравнения (11.5) получаем

$$\ddot{x}_{\mu} = 0.$$
 (11.11)

Разлагая уравнение связи (11.6) по компонентам светового конуса, находим:

$$-2p^{+}p^{-} + p^{I}p^{I} + m^{2} = 0 \implies p^{-} = \frac{1}{2p^{+}}(p^{I}p^{I} + m^{2}). \quad (11.12)$$

262

Значение p^- определяется значением p^+ и компонентами p^I поперечного импульса \vec{p}_T . Разрешая (11.10) относительно p^- , получаем уравнение

$$\frac{dx^{-}}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^{-}, \qquad (11.13)$$

интегрирование которого дает

$$x^{-}(\tau) = x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}}\tau,$$
 (11.14)

гле x_0^- — постоянная интегрирования. Уравнение (11.10) приводит также к уравнению $dx^I/d\tau = p^I/m^2$, интегрирование которого дает

$$x^{I}(\tau) = x_{0}^{I} + \frac{p^{I}}{m^{2}}\tau,$$
 (11.15)

гле x_0^I — постоянная интегрирования. Заметим, что условие калибровки светового конуса (11.7) требует, чтобы $x^+(\tau)$ не содержало постоянной x_0^+ .

Описание движения точечной частицы теперь завершено. Из уравнения (11.12) следует, что импульс полностью определен, как только мы зафиксировали p^+ и компоненты p^I поперечного импульса \vec{p}_T . Движение в направлении x^- определяется формулой (11.14), как только мы задали значение x_0^- . Поперечное движение определено заданием $x^I(\tau)$ или x_0^I , так как мы предполагаем p^I известными. Для симметричного описания координат и импульсов в квантовой теории, выбираем x^I как динамические переменные. Для точечной частицы динамическими переменными будут поэтому

динамические переменные :
$$(x^{I}, x_{0}^{-}, p^{I}, p^{+}).$$
 (11.16)

11.2. Гейзенберговское и шрёдингеровское представления

Традиционно в квантовой механике существуют два основных подхода к понятию эволюции во времени. В шрёдингеровском представлении состояние системы эволюционирует во времени, а операторы остаются неизменными. В гейзенберговском представлении операторы эволюционируют во времени, а состояние остается неизменным. Из этих двух представлений гейзенберговское теснее связано с классической механикой, в которой динамические переменные (становящиеся операторами в квантовой механике) эволюционируют во времени. Оба представления, — Шрёдингера и Гейзенберга, — окажутся полезными при построении квантовых теорий релятивистской точечной частицы и релятивистской струны. Так как при развитии квантовых теорий мы хотим использовать наше понимание классической динамики, начнем с того, что сосредоточимся на представлении Гейзенберга. Как гейзенберговское, так и шрёдингеровское представления используют одно и то же пространство состояний. В то время как в представлении Гейзенберга состояние конкретной физической системы фиксировано во времени, в представлении Шрёдингера состояние системы постоянно изменяет направление в пространстве состояний по закону, определяемому уравнением Шрёдингера. Хотя в общем случае мы рассматриваем операторы в шрёдингеровском представлении как независящие от времени, существуют и такие операторы, которые *явно* зависят от времени. Такие операторы образуются из независящих от времени операторов и переменной t: например, операторы координаты и импульса q и pне зависят от времени, однако оператор $\mathcal{O} = q + pt$ зависит от времени явно. В такой ситуации даже гамильтониан H(p, q; t) может быть зависящим от времени оператором.

Теперь, когда мы переходим от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга, мы сталкиваемся с операторами, обладающими двумя типами зависимости от времени. Как отмечалось ранее, гейзенберговские операторы зависят от времени, но такая временная зависимость может быть как *неявной*, так и *явной*. Говорят, что гейзенберговский эквивалент независящего от времени шрёдингеровского оператора обладает неявной зависимостью от времени. Эта неявная зависимость от времени обязана своим происхождением тому, что мы перенесли в операторы зависимость от времени состояний представления Шрёдингера. Если гейзенберговский оператор явно зависит от времени, значит, на него была перенесена зависимость от времени соответствующего шрёдингеровского оператора.

Когда мы переходим от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга, независящие от времени шрёдингеровские операторы, например, q и p, становятся операторами q(t) и p(t), соответственно. Шрёдингеровский коммутатор [q, p] = i превращается в коммутатор

$$[q(t), p(t)] = i. (11.17)$$

Хотя q(t) и p(t) зависят от времени, эта зависимость неявная. Если $\xi(t)$ — гейзенберговский оператор, возникающий из независящего от времени шрёдингеровского оператора, эволюция $\xi(t)$ определяется уравнением

$$i\frac{d\xi(t)}{dt} = [\xi(t), H(p(t), q(t); t)].$$
(11.18)

Здесь H(p(t), q(t); t) — гейзенберговский гамильтониан, соответствующий, возможно зависящему от времени, шрёдингеровскому гамильтониану H(p, q; t).

Если $\mathcal{O}(t)$ — гейзенберговский оператор, соответстующий явно зависящему от времени шрёдингеровскому оператору, то эволюция $\mathcal{O}(t)$ от времени определяется уравнением

$$i\frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} = i\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t} + [\mathcal{O}(t), H(p(t), q(t); t)]. \qquad (11.19)$$

Это уравнение сводится к (11.18), когда у оператора нет явной зависимости от времени. Если гамильтониан H(p(t), q(t)) не зависит от времени явно, то можно использовать (11.18) с $\xi = H$, и получить

$$\frac{d}{dt}H(p(t),q(t))=0.$$
(11.20)

В этом случае гамильтониан является интегралом движения.

Приведенное выше обсуждение следует дополнить правилами перехода от шрёдингеровских операторов к гейзенберговским. Предположим, что шрёдингеровский гамильтониан H(p, q) не зависит от времени. В этом случае состояние $|\Psi\rangle$ в момент времени t = 0 эволюционирует во времени, и при заданном tопределяется выражением

$$|\Psi, t\rangle = e^{-iHt} |\Psi\rangle. \tag{11.21}$$

Упражнение-разминка 11.1. Убедитесь, что |Ψ, t> удовлетворяет уравнению Шрёдингера

.

$$i\frac{d}{dt}|\Psi,t\rangle = H|\Psi,t\rangle.$$
 (11.22)

Из формулы (11.21) ясно, что оператор e^{iHt} переводит зависящие от времени состояния в состояние покоя.

$$e^{iHt}|\Psi,t\rangle = |\Psi\rangle. \tag{11.23}$$

Если подействовать этим оператором на произведение $\alpha | \Psi, t \rangle$, где α — шрёдингеровский оператор, получим:

$$e^{iHt}\alpha|\Psi,t\rangle = e^{iHt}\alpha e^{-iHt}|\Psi\rangle \equiv \alpha(t)|\Psi\rangle,$$
 (11.24)

гле $\alpha(t) = e^{iHt} \alpha e^{-iHt}$ — гейзенберговский оператор, соответствующий шрёдингеровского оператору α . Такое определение применимо и для шрёдингеровского оператора $\alpha_{S(t)}$, имеющего явную зависимость от времени, и в этом случае соответствующий гейзенберговский оператор равен $\alpha_{H(t)} = e^{iHt} \alpha_S(t) e^{-iHt}$. Конструкция гарантирует, что если задано множество шрёдингеровских операторов, удовлетворяющих определенным коммутационным соотношениям, то и соответствующие гейзенберговские операторы удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям.

() Упражнение-разминка 11.2. Покажите, что если соотношение $[\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_3$ выполнено для шрёдингеровских операторов α_1, α_2 и α_3 , то для соответствующих гейзенберговских операторов выполнено соотношение $[\alpha_1(t), \alpha_2(t)] = \alpha_3(t)$.

Этот результат остается верным, даже если гамильтониан зависит от времени (задача 11.2). Он подтверждает вид коммутатора (11.17), если заметить, что на постоянную правую часть не распространяется правило, превращающее шрёдингеровский оператор в гейзенберговский.

11.3. Квантование точечной частицы

Построим теперь квантовую теорию на основании классической теории релятивистской точечной частицы. Определим подходящие шрёдингеровские и гейзенберговские операторы, включая гамильтониан, и опишем пространство состояний. Все это мы будем делать в калибровке светового конуса.

Наш первый шаг — выбор множества независящих от времени шрёдингеровых операторов. Разумный выбор обеспечивается динамическими переменными в (11.16).

Операторы Шрёдингера, независящие от времени: $(x^{I}, x_{0}^{-}, p^{I}, p^{+})$. (11.25)

Можно было бы использовать значки-крышки для того, чтобы отличать операторы от их собственных значений, но в большинстве случаев это не требуется. Мы параметризуем траекторию точечной частицы с помощью τ , так что связанные гейзенберговские операторы имеют вид.

Операторы Гейзенберга:
$$(x^{I}(\tau), x_{0}^{-}(\tau), p^{I}(\tau), p^{+}(\tau))$$
. (11.26)

Постулируем следующие коммутационные соотношения для шрёдингеровских операторов:

$$[x^{I}, p^{J}] = i\eta^{IJ}, \quad [x_{0}^{-}, p^{+}] = i\eta^{-+} = -i, \qquad (11.27)$$

причем все остальные коммутаторы равны нулю. Первый коммутатор — хорошо знакомый коммутатор пространственных координат с соответствующими пространственными импульсами (напомним, что $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$). Второй коммутатор тоже понятен, ведь в конце концов, x_0^- рассматривается как пространственная координата на световом конусе, а p^+ — соответствующий сопряженный импульс. Второй коммутатор, как и первый, содержит в правой части метрику η , несущую индексы координаты и импульса.

Как объяснялось выше, гейзенберговские операторы удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и шрёдингеровские операторы:

$$[x^{I}(\tau), p^{J}(\tau)] = i\eta^{IJ}, \quad [x_{0}^{-}(\tau), p^{+}(\tau)] = -i, \qquad (11.28)$$

и все остальные коммутаторы равны нулю.

Мы обсудили операторы, соответствующие независимым наблюдаемым в классической теории. Но точно так же, как имеются классические наблюдаемые, определяемые из независимых, существуют квантовые операторы, построенные из множества независимых шрёдингеровских операторов и времени. Такие дополнительные операторы — $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и p^- . Эти операторы *определены* с помощью квантовых аналогов уравнений (11.7), (11.14) и (11.12):

$$x^+(\tau) \equiv \frac{p^+}{m^2}\tau,\tag{11.29}$$

$$x^{-}(\tau) \equiv x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}}\tau,$$
 (11.30)

$$p^{-} \equiv \frac{1}{2p^{+}} (p^{I} p^{I} + m^{2}).$$
 (11.31)

Заметим, что p^- не зависит от времени. Однако $x^+(\tau)$ и $x^-(\tau)$ — зависящие от времени шрёдингеровские операторы.

Коммутационные соотношения, включающие операторы $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и p^- , определяются постулированными в (11.27) коммутационными соотношениями вместе с определяющими уравнениями (11.29)–(11.31). Решение выбрать операторы в (11.25) за независимые операторы нашей квантовой теории было очень важным. Например, если бы мы выбрали в качестве независимых операторы x^+ и p^- , мы были бы вынуждены записать коммутационное соотношение $[x^+, p^-] = -i$. Однако в выбранной нами схеме эта величина обращается в нуль, так как $[p^+, p^I] = 0$.

Мы все еще не определили гамильтониан H. Так как p^- — это энергия в координатах светового конуса (см. (2.94)), мы ожидаем, что она порождает эволюцию x^+ :

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \leftrightarrow p^-. \tag{11.32}$$

Хотя x^+ есть время светового конуса, мы параметризуем наши операторы с помощью τ , так что можно ожидать, что H порождает эволюцию по τ , которая связана, но не тождественна эволюции по x^+ . Поскольку $x^+ = p^+ \tau / m^2$, мы можем предположить, что эволюция по τ будет описываться оператором

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+} \iff \frac{p^+}{m^2} p^-.$$
(11.33)

Поэтому мы постулируем гейзенберговский гамильтониан

$$H(\tau) = \frac{p^{+}(\tau)}{m^{2}}p^{-}(\tau) = \frac{1}{2m^{2}}(p^{I}(\tau)p^{I}(\tau) + m^{2}). \quad (11.34)$$

Заметим, что $H(\tau)$ явно не содержит времени. Уравнение (11.20) показывает, что гамильтониан действительно не зависит от времени.

Убедимся, что этот гамильтониан порождает ожидаемые уравнения движения. Во-первых, проверим, что H приводит к правильной временной эволюции гейзенберговских операторов (11.26), которые возникают из независящих от времени шрёдингеровских операторов. Уравнение, управляющее временной эволюцией этих операторов есть (11.18). Начнем с p^+ и p^I :

$$irac{dp^+(\tau)}{d\tau} = \left[p^+(\tau), H(\tau)
ight] = 0, \quad irac{dp^I(\tau)}{d\tau} = \left[p^I(\tau), H(\tau)
ight] = 0.$$
 (11.35)

Оба эти коммутатора обращаются в нуль, так как H есть функция только $p^{I}(\tau)$, а все импульсы между собой коммутируют. Уравнения (11.35) — это хороший результат, так как классические импульсы p^{+} и p^{I} являются интегралами движения. Это позволяст записать $p^{I}(\tau) = p^{I}$ и $p^{+}(\tau) = p^{+}$. Проверим теперь зависимость от τ гейзенберговского оператора $x^{I}(\tau)$:

$$i\frac{dx^{I}(\tau)}{d\tau} = \left[x^{I}(\tau), \ \frac{1}{2m^{2}}(p^{J}p^{J} + m^{2})\right] = i\frac{p^{I}}{m^{2}}.$$
 (11.36)

Здесь мы воспользовались тем, что $[x^I, p^J p^J] = [x^I, p^J]p^J + p^J[x^I, p^J] = 2i p^I$. Сокращая общий множитель *i* в (11.36), находим

$$\frac{dx^I(\tau)}{d\tau} = \frac{p^I}{m^2}.$$
(11.37)

Этот результат находится в согласии с нашими классическими ожиданиями и позволяет записать

$$x^{I}(\tau) = x_{0}^{I} + \frac{p^{I}}{m^{2}}\tau, \qquad (11.38)$$

где x_0^I — оператор, не имеющий никакой зависимости от времени. Наконец, мы должны проверить $x_0^-(\tau)$. Так как $x_0^-(\tau)$ коммутирует с $p^I(\tau)$,

$$i\frac{dx_0^-(\tau)}{d\tau} = \left[x_0^-(\tau), \ \frac{1}{2m^2}(p^Ip^I + m^2)\right] = 0. \tag{11.39}$$

Как и ожидалось, этот оператор является интегралом движения, и мы можем написать $x_0(\tau) = x_0$. Таким образом, в том, что касается операторов (11.25), наш анзатц для H (11.34) функционирует так, как положено гамильтониану.

Обратимся к оставшимся операторам $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и $p^-(\tau)$. Из них $p^-(\tau)$ есть функция только p^I (и p^+) и поэтому не зависит от времени. Легко показать, что коммутатор с H обращается в нуль, так что для этого оператора нам нечего больше проверять. Гейзенберговские операторы $x^+(\tau)$ и $x^-(\tau)$ возникают из шрёдингеровских операторов с явной зависимостью от времени, так что для вычисления их эволюции во времени мы используем (11.19). Например,

$$i\frac{dx^{-}(\tau)}{d\tau} = i\frac{\partial x^{-}}{\partial \tau} + [x^{-}(\tau), H(\tau)]. \qquad (11.40)$$

Поскольку $x^{-}(\tau) \equiv x_{0}^{-} + p^{-}\tau/m^{2}$ и как x_{0}^{-} , так и p^{-} коммутируют с p^{I} , мы видим, что $[x^{-}(\tau), H(\tau)] = 0$. Следовательно

$$\frac{dx^{-}(\tau)}{d\tau} = \frac{p^{-}}{m^{2}},\tag{11.41}$$

что является ожидаемым результатом. Аналогично, поскольку $x^+(\tau) = p^+ \tau / m^2$, находим, что $[x^+(\tau), H(\tau)] = 0$ и поэтому

$$\frac{dx^+(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x^+}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2}.$$
 (11.42)

Эти вычисления показывают, что наш анзатц (11.34) для гамильтониана порождает ожидаемые уравнения эволюции операторов.

Упражнение-разминка 11.3. В соотношении (11.38) мы ввели x₀^I как постоянный оператор. Покажите, что dx₀^I/dτ следует вычислять, рассматривая x₀^I как явно зависящий от времени гейзенберговский оператор, определенный соотношением (11.38).

Чтобы завершить построение квантовой теории точечной частицы, мы должны развить пространство состояний, установить уравнение Шрёдингера и опрелелить физические состояния. Независящие от времени состояния в квантовой теории помечаются собственными значениями максимального набора коммутирующих операторов. Для введенного в (11.25) множества операторов максимальное коммутирующее подмножество может включать только один элемент из пары (x^-, p^+) и один элемент из каждой из пар (x^I, p^I) . Так как обычно удобно работать в импульсном пространстве, мы будем работать с операторами p^+ и p^I . Таким образом, мы запишем состояния в виде

состояние точечной квантовой частицы:
$$|p^+, \vec{p}_T\rangle$$
, (11.43)

где p^+ — собственное значение оператора p^+ , а \vec{p}_T — поперечный импульс, компоненты которого являются собственными значениями операторов p^I :

$$\widehat{p}^{+}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = p^{+}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle, \quad \widehat{p}^{I}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = p^{I}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$
(11.44)

С учетом (11.31) эти уравнения требуют, чтобы

$$\widehat{p}^{-}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = \frac{1}{2p^{+}}(p^{I}p^{I}+m^{2})|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$
(11.45)

В дополнение к этому гамильтониан (11.34), действующий на состояния, дает

$$H|p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle = \frac{1}{2m^{2}}(p^{I}p^{I} + m^{2})|p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle. \qquad (11.46)$$

Тогда из этого следует, что зависящие от времени состояния

$$\exp\left(-i\frac{1}{2m^2}(p^Ip^I+m^2)\tau\right)|p^+,\vec{p}_T\rangle \tag{11.47}$$

удовлетворяют уравнению Шрёдингера. Они являются *физическими* зависящими от времени состояниями, связанными с состояниями (11.43).

В более общем случае мы рассматриваем зависящие от времени суперпозиции базисных состояний в (11.43):

269

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ \, d\vec{p}_T \, \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$
(11.48)

Поскольку p^+ и \vec{p}_T являются непрерывными переменными, в предыдущей формуле необходим интеграл. Чтобы построить общую зависящую от τ суперпозицию, мы вводим произвольную функцию $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$. На самом деле эта функция является волновой функцией в импульсном пространстве, связанной с состоянием $|\Psi, \tau\rangle$. Действительно, если определить дуальные бра-векторы $\langle p^+, \vec{p}_T |$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle p'^+, \vec{p}_T' | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta(p'^+ - p^+) \delta(\vec{p}_T' - \vec{p}_T),$$
 (11.49)

то видно, что

$$\langle \boldsymbol{p}^+, \, \boldsymbol{\vec{p}}_T | \Psi, \, \tau \rangle = \psi(\tau, \, \boldsymbol{p}^+, \, \boldsymbol{\vec{p}}_T). \tag{11.50}$$

Уравнение Шрёдингера для состояния $|\Psi, \tau \rangle$ имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\Psi,\tau\rangle = H|\Psi,\tau\rangle.$$
 (11.51)

Используя состояние (11.48) и гамильтониан (11.34), находим:

$$\int dp^{+} d\vec{p}_{T} \left[i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, p^{+}, \vec{p}_{T}) - \frac{1}{2m^{2}} (p^{I} p^{I} + m^{2}) \psi(\tau, p^{+}, \vec{p}_{T}) \right] |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle = 0. \quad (11.52)$$

Так как все базисные векторы $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ линейно независимы, выражение в скобках должно обращаться в нуль для всех значений импульсов:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(\tau,p^+,\vec{p}_T) = \frac{1}{2m^2}(p^Ip^I + m^2)\psi(\tau,p^+,\vec{p}_T). \qquad (11.53)$$

В этом соотношении мы узнаем уравнение Шрёдингера для волновой функции $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ в импульсном пространстве. Если волновая функция удовлетворяет уравнению Шрёдингера, состояние $|\Psi, \tau\rangle$ является физическим зависящим от времени состоянием. Этим завершается наше исследование квантовой теории точечной частицы.

11.4. Квантовая частица и скалярные частицы

Определенные в (11.43) состояния квантовой точечной частицы могут напомнить одночастичные состояния (10.66) в квантовой теории скалярного поля. На самом деле это соответствие фундаментально.

Существует естественное отождествление квантовых состояний релятивистской точечной частицы массой *m* с одночастичными состояниями квантовой теории скалярного поля массой *m*:

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow a^{\dagger}_{p^+, \vec{p}_T} |\Omega\rangle.$$
 (11.54)

Отождествление возможно, потому что метки состояний точечной частицы совпадают с метками операторов рождения одночастичных состояний скалярной квантовой теории поля. Соответствие между квантовой точечной частицей и квантовой теорией скалярного поля может быть расширено от пространства состояний к операторам, действующим на пространстве состояний. Теория квантовой точечной частицы содержит операторы p^+ , p^I и p^- и это же верно в квантовой теории поля, как показано в (10.67). Если мы отождествим пространства состояний с помощью (11.54), тогда два множества операторов будут давать одинаковые собственные значения.

Указанные наблюдения приводят к выводу, что состояния квантовой точечной частицы и одночастичные состояния скалярной теории поля неразличимы. Но, поскольку скалярная теория поля содержит операторы рождения, которые могут многократно действовать на вакуумное состояние, эта теория имеет многочастичные состояния, не возникающие при квантовании точечной частицы. Действительно, в теории квантовой точечной частицы отсутствуют операторы рождения. Так как скалярная теория поля дает естественное описание многочастичных состояний, про нее можно сказать, что она более полна.

Как можно предугадать, что одночастичные состояния квантовой *скалярной* теории поля совпадут с состояниями квантовой точечной частицы? Ответ довольно интересен: уравнение Шрёдингера для волновых функций квантовой точечной частицы имеет вид классического волнового уравнения для скалярного поля. Точнее:

существует каноническое соответствие между волновыми функциями квантовой точечной частицы и классическим скалярным полем, так что уравнение Шрёдингера для волновых функций квантовой точечной частицы становится классическим полевым уравнением для скалярного поля.

Один элемент этого соответствия — классическое полевое уравнение для скалярного поля. В калибровке светового конуса это уравнение принимает вид (10.31)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{2m^2}(p^Ip^I+m^2)\right)\phi(\tau,p^+,\vec{p}_T)=0.$$
(11.55)

Это дифференциальное уравнение первого порядка по τ . Другой элемент соответствия — это уравнение Шрёдингера (11.53). Два уравнения тождественны, если мы отождествим волновую функцию $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ и скалярное поле $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$:

$$\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) \leftrightarrow \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T). \tag{11.56}$$

Это и есть заявленное соответствие.

Квантование точечной частицы есть пример *первичного квантования*. При первичном квантовании координаты и импульсы классической механики превращаются в квантовые операторы, затем строится пространство состояний. В общем, результатом становится множество одночастичных состояний. Вторичное квантование относится к квантованию классической теории поля, его результатом является квантовая теория поля с полевыми операторами и многочастичными состояниями. Наш анализ позволяет увидеть, каким образом вторичное квантование следует за первичным. Первичное квантование механики классической точечной частицы приводит к одночастичным состояниям. Затем мы интерпретируем уравнение Шрёдингера для соответствующих волновых функций как полевое уравнение для скалярного поля. Вторичное квантование, на этот раз классической теории поля, приводит к множеству многочастичных состояний.

До сих пор мы квантовали только *свободную* релятивистскую точечную частицу. Все квантовые состояния, в том числе многочастичные, полученные путем вторичного квантования, являются свободными частицами. Как же мы получим взаимодействия между частицами? Такие процессы включаются в теорию скалярного поля добавлением в действие членов взаимодействия. Все слагаемые, которые мы до сих пор включали, были квадратичны по полям. Слагаемые взаимодействия включают произведения трех или более полей. Так как пространство состояний квантовой точечной частицы не содержит многочастичных состояний, описание взаимодействий на языке первичного квантования не очень удобно. С другой стороны, в рамках квантовой теории поля взаимодействия рассматриваются вполне естественно.

11.5. Операторы импульса светового конуса

Так как функция Лагранжа L точечной частицы в (11.3) зависит только от производных координат по τ , она инвариантна относительно трансляций

$$\delta x^{\mu}(\tau) = \epsilon^{\mu} \tag{11.57}$$

с постоянной ϵ^{μ} . Сохраняющимся зарядом, связанным с этим преобразованием симметрии, является импульс частицы p_{μ} . Это следует из формул (8.16) и (11.4).

Что случается с сохраняющимися зарядами в квантовой теории? Они становятся квантовыми операторами, обладающими одним удивительным свойством: они генерируют, путем коммутации, квантовый вариант преобразования симметрии, которое породило их классически!

Это свойство становится наглядным, если мы использовать схему, в которой явная лоренцевская инвариантность классической теории сохраняется при квантовании. Это *не та* схема, которую мы использовали при квантовании точечной частицы. При квантовании в калибровке светового конуса координаты x^0 и x^1 частицы требуют особого рассмотрения, это затушевывает лоренцевскую инвариантность теории. Мы не будем обсуждать подробности лоренц-ковариантного квантования точечной частицы, для наших целей достаточно просто сделать несколько замечаний, а ковариантное квантование струны подробнее обсуждается в главе 24.

При лоренц-ковариантном квантовании точечной частицы мы используем гейзенберговские операторы $x^{\mu}(\tau)$ и $p^{\mu}(\tau)$. Обратите внимание — даже временная

$$[x^{\mu}(\tau), p^{\nu}(\tau)] = i \eta^{\mu\nu}, \qquad (11.58)$$

а также

$$x^{\mu}(\tau), x^{\nu}(\tau) = 0$$
 и $[p^{\mu}(\tau), p^{\nu}(\tau)] = 0.$ (11.59)

Соотношение (11.58) выглядит разумно. Индексы соответствуют, что обеспечивает согласованность с лоренцевской ковариантностью. Кроме того, когда μ и ν принимают значения пространственных переменных, коммутационные соотношения становятся знакомыми. Мы уже знаем, что соотношение (11.58) не согласуется с коммутаторами в калибровке светового конуса из раздела 11.3. В этом разделе $[x^+(\tau), p^-(\tau)] = 0$, в то время как (11.58) предсказывает ненулевой результат. Равенство двух объектов, несущих лоренцевские индексы, возникает тогда, когда они пробегают значения на световом конусе +, - и *I*. Например, уравнение $R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$ дает $R^{+-} = S^{+-}$ (задача 10.3). В результате формула (11.58) принимает вид $[x^+(\tau), p^-(\tau)] = i\eta^{+-} = -i$. Проверим теперь, что оператор $p^{\mu}(\tau)$ генерирует трансляции. Более точно, убедимся в том, что $i\epsilon_{\rho}p^{\rho}(\tau)$ генерирует трансляцию (11.57):

$$\delta x^{\mu}(\tau) = \left[i\epsilon_{\rho}p^{\rho}(\tau), x^{\mu}(\tau)\right] = i\epsilon_{\rho}(-i\eta^{\rho\mu}) = \epsilon^{\mu}.$$
(11.60)

Это интересный результат, но совершенно непонятно, какое он имеет отношение к нашему квантованию в калибровке светового конуса. Мы должны проверить, генерируют ли трансляции операторы импульса в калибровке светового конуса.

Для этого разложим оператор $i\epsilon_{\rho}p^{\rho}(\tau)$ по компонентам светового конуса:

$$i\epsilon_{\rho}p^{\rho}(\tau) = -i\epsilon^{-}p^{+} - i\epsilon^{+}p^{-} + i\epsilon^{I}p^{I}. \qquad (11.61)$$

Мы опустили аргументы τ у импульсов в правой части, так как они не зависят от τ (см. раздел 11.3). Заметим, что здесь p^- дается формулой (11.31). Проверим (11.60), положив $\epsilon^I \neq 0$ и $\epsilon^+ = \epsilon^- = 0$:

$$\delta x^{\mu}(\tau) = i\epsilon^{I} [p^{I}, x^{\mu}(\tau)]. \qquad (11.62)$$

Мы ожидали, что $\delta x^{I}(\tau) = \epsilon^{I}$ и $\delta x^{+}(\tau) = \delta x^{-}(\tau) = 0$. Все эти ожидания оправдались. Выбирая $\mu = I$ и используя коммутатор (11.28), находим: $\delta x^{I}(\tau) = \epsilon^{I}$. Чтобы вычислить действие оператора на $x^{+}(\tau)$ и $x^{-}(\tau)$, следует использовать их определения:

$$x^{+}(\tau) = \frac{p^{+}}{m^{2}}\tau, \quad x^{-}(\tau) = x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}}\tau.$$
 (11.63)

Вспоминая, что p^{I} коммутирует со всеми импульсами и с x_{0}^{-} , мы убеждаемся, что $\delta x^{+}(\tau) = \delta x^{-}(\tau) = 0$.

() Упражнение-разминка 11.4. Проверьте (11.60) при $\epsilon^- \neq 0$ и $\epsilon^+ = \epsilon^I = 0$. Чтобы сделать это, вычислите $\delta x^{\mu}(\tau) = -i\epsilon^-[p^+, x^{\mu}(\tau)]$. Убедитесь, что $\delta x^-(\tau) = \epsilon^-$ и что остальные координаты не изменяются.

Осталось проверить, генерирует ли оператор p^- ожидаемые трансляции. Так как p^- есть нетривиальная функция других импульсов, могут возникнуть сложности! На этот раз рассмотрим преобразования, которые порождаются с помощью (11.60) с $\epsilon^+ \neq 0$ и $\epsilon^- = \epsilon^I = 0$:

$$\delta x^{\mu}(\tau) = -i\epsilon^{+} [p^{-}, x^{\mu}(\tau)]. \qquad (11.64)$$

Было бы наивно предпологать, что $\delta x^+(\tau) = \epsilon^+$ не реализуется: выбирая $\mu = +$ и используя (11.63), видим, что

$$\delta x^+(\tau) = -i\epsilon^+ \left[p^-, \ p^+ \frac{\tau}{m^2} \right] = 0. \tag{11.65}$$

Но остается неизменным только $x^+(\tau)$, другие компоненты, которые должны были бы на первый взгляд остаться неизменными, меняются:

$$\delta x^{I}(\tau) = -i\epsilon^{+}[p^{-}, x^{I}(\tau)] = -i\epsilon^{+}\frac{1}{2p^{+}}(-2ip^{I}) = -\epsilon^{+}\frac{p^{I}}{p^{+}}, \qquad (11.66)$$

$$\delta x^{-}(\tau) = -i\epsilon^{+} \left[p^{-}, x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}} \tau \right] = -i\epsilon^{+} \left[p^{-}, x_{0}^{-} \right] = -\epsilon^{+} \frac{p^{-}}{p^{+}}.$$
 (11.67)

В этих вычислениях только один шаг требует некоторых объяснений. Как мы нашли $[p^-, x_0^-]$? Единственная причина, по которой p^- не коммутирует с x_0^- , заключается в том, что p^- зависит от p^+ . На самом деле нам нужно знать коммутатор $[x_0^-, 1/p^+]$. Его можно найти следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_0^-, \frac{1}{p^+} \end{bmatrix} = x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- = \frac{1}{p^+} p^+ x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- p^+ \frac{1}{p^+} = \frac{1}{p^+} [p^+, x_0^-] \frac{1}{p^+} = \frac{i}{p^{+2}}.$$
(11.68)

Упражнение-разминка 11.5. С помощью (11.68) покажите, что

$$[x_0^-, p^-] = i \frac{p^-}{p^+}.$$
 (11.69)

Формулы (11.65), (11.66) и (11.67) показывают, что p^- не генерирует ожидаемых преобразований. Что же случилось? Оказывается, что p^- на самом деле генерирует как трансляцию, *так и* репараметризацию мировой линии частицы. Мы знаем, что действие частицы инвариантно относительно изменений параметризации $\tau \to \tau'(\tau)$. Однако, когда мы описывали симметрии в главе 8, мы рассматривали их как изменения динамических переменных системы. Изменение параметризации также можно описать подобным образом. Записывая $\tau \to \tau' = \tau + \lambda(\tau)$ с бесконечно малой λ , мы замечаем, что подходящее изменение

$$\perp x^{\mu}(\tau) \xrightarrow{\scriptstyle \blacksquare} x^{\mu}(\tau + \lambda(\tau)) = x^{\mu}(\tau) + \lambda(\tau)\partial_{\tau}x^{\mu}(\tau), \qquad (11.70)$$

позволяет написать

$$\delta x^{\mu}(\tau) = \lambda(\tau) \partial_{\tau} x^{\mu}(\tau). \tag{11.71}$$

Мы заявляем, что это есть симметрии теории точечной частицы. Действительно, изменение (11.71) не оставляет инвариантным лагранжиан точечной частицы. Лагранжиан изменяется на полную производную по τ (задача 11.4), но этого, на самом деле, достаточно, чтобы обладать симметрией (см. задачу 8.9).

Покажем теперь, что p^- генерирует трансляцию и репараметризацию. Ожидаемая трансляция была $\delta x^+ = \epsilon^+$. С другой стороны, из (11.71) следует, что репараметризация x^+ дает $\delta x^+ = \lambda \partial_\tau x^+$. Имея в виду (11.65), получаем, что ожидаемая трансляция плюс репараметризация дают нулевую вариацию, так что

$$0 = \epsilon^{+} + \lambda \partial_{\tau} x^{+}(\tau) = \epsilon^{+} + \lambda \frac{p^{+}}{m^{2}} \Rightarrow \lambda = -\frac{m^{2}}{p^{+}} \epsilon^{+}.$$
(11.72)

Параметр репараметризации λ оказывается константой. Мы можем теперь использовать этот результат для «объяснения» преобразований (11.66) и (11.67), которые генерирует p^- , действуя на x^I и x^- . Для этих координат не существует грансляции, но репараметризация все еще применима. Поэтому вариация

$$\delta x^{I}(\tau) = \lambda \partial_{\tau} x^{I}(\tau) = -\frac{m^{2}}{p^{+}} \epsilon^{+} \frac{p^{I}}{m^{2}} = -\epsilon^{+} \frac{p^{I}}{p^{+}}, \qquad (11.73)$$

$$\delta x^{-}(\tau) = \lambda \partial_{\tau} x^{-}(\tau) = -\frac{m^{2}}{p^{+}} \epsilon^{+} \frac{p^{-}}{m^{2}} = -\epsilon^{+} \frac{p^{-}}{p^{+}}, \qquad (11.74)$$

находится в идеальном согласии с преобразованиями, которые генерирует p^- . Мы можем также понять, почему p^- не изменяет x^+ . Если бы x^+ изменилась на постоянную величину ϵ^+ , новая координата x^+ не удовлетворяла бы калибровочному условию на световом конусе, и поэтому x^+ просто пропорциональна τ . На самом деле p^- генерирует трансляцию плюс компенсирующее преобразование, необходимое для сохранения калибровочного условия на световом конусе! Это преобразование оказывается репараметризацией мировой линии.

Заключительные замечания об операторах импульса. Лоренц-ковариантные операторы импульса, которые мы использовали для обоснования нашего анализа, генерируют простые трансляции и коммутируют друг с другом. Отсюда непосредственно вытекает, что, если использовать координаты светового конуса, операторы $p^{\pm} = (p^0 \pm p^1)/\sqrt{2}$ и поперечные операторы p^I коммутируют. Обсуждавшиеся выше операторы импульса в калибровке светового конуса являются совершенно другими объектами. Они сложным образом действовали на координаты, и p^- определялось через поперечные импульсы и p^+ . Тем не менее, все операторы импульса в калибровке светового конуса.

11.6. Лоренцевские генераторы светового конуса

В разделе 8.5 мы определили сохраняющиеся заряды, связанные с лоренцевской инвариантностью лагранжиана релятивистской струны. Аналогичные заряды существуют для релятивистской точечной частицы. Как было найдено в (8.52), бесконечно малые лоренцевские преобразования координат точечной частицы $x^{\mu}(\tau)$ имеют вид

$$\delta x^{\mu}(\tau) = \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu}(\tau), \qquad (11.75)$$

где $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ — множество бесконечно малых постоянных. Соответствующие лоренцевские заряды определяются выражением

$$M^{\mu\nu} = x^{\mu}(\tau)p^{\nu}(\tau) - x^{\nu}(\tau)p^{\mu}(\tau), \qquad (11.76)$$

что вы должны были получить в задаче 8.5. Эти заряды сохраняются в классическом смысле. Мы ожидаем, что квантовые заряды сгенерируют лоренцевские преобразования координат. И вновь в этом можно убедиться, используя операторы лоренцевского ковариантного квантования. В этом случае квантовые заряды определяются выражением (11.76), где $x^{\mu}(\tau)$ и $p^{\mu}(\tau)$ являются введенными выше гейзенберговскими операторами, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (11.58) и (11.59). Как $x^{\mu}(\tau)$, так и $p^{\mu}(\tau)$ являются эрмитовыми операторами. Лоренцевские заряды $M^{\mu\nu}$

$$(M^{\mu\nu})^{\dagger} = p^{\nu}(\tau)x^{\mu}(\tau) - p^{\mu}(\tau)x^{\nu}(\tau) = M^{\mu\nu}, \qquad (11.77)$$

так как две константы, возникающие при перестановке координат и импульсов к первоначальному порядку, сокращаются.

🕑 Упражнение-разминка 11.6. Покажите, что

$$[M^{\mu\nu}, x^{\rho}(\tau)] = i\eta^{\mu\rho} x^{\nu}(\tau) - i\eta^{\nu\rho} x^{\mu}(\tau).$$
(11.78)

Этот коммутатор позволяет проверить, что квантовые лоренцевские заряды генерируют лоренцевские преобразования:

$$\delta x^{\rho}(\tau) = \left[-\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \ x^{\rho}(\tau) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \left(\eta^{\mu\rho} x^{\nu}(\tau) - \eta^{\nu\rho} x^{\mu}(\tau) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\nu} x_{\nu}(\tau) + \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\mu} x_{\mu}(\tau) = \epsilon^{\rho\nu} x_{\nu}(\tau). \quad (11.79)$$

Соотношение (11.78) можно использовать в координатах светового конуса, просто вводя в него индексы светового конуса. Например,

$$[M^{-I}, x^{+}(\tau)] = i\eta^{-+}x^{I}(\tau) - i\eta^{I+}x^{-}(\tau) = -ix^{I}(\tau), \qquad (11.80)$$

так как $\eta^{I+} = 0$. Здесь оператор M^{-I} есть лоренц-ковариантный генератор, выраженный в координатах светового конуса. Это *не есть* лоренцевский генератор в калибровке светового конуса. Такие операторы мы еще не строили.

Имея набор квантовых операторов, интересно вычислить их коммутаторы. Например, в квантовой механике известно, что компоненты L_x , L_y и L_z углового момента удовлетворяют совокупности коммутационных соотношений ($[L_x, L_y] = iL_z$ и других), которые определяют алгебру Ли углового момента. Рассматривавшиеся ранее операторы импульса p^{μ} определяют очень простую алгебру: они все коммутируют друг с другом. Мы хотели бы знать, чему равен коммутатор двух лоренцевских генераторов. Вычисление включает несколько шагов (задача 11.5). Используя соотношение (11.78) и аналогичное соотношение для $[M^{\mu\nu}, p^{\rho}]$, можно найти, что коммутатор записывается как линейная комбинация четырех лоренцевских генераторов:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}M^{\rho\mu}.$$
 (11.81)

Этот результат определяет лоренцевскую алгебру Ли. Соотношение (11.81) должно удовлетворяться аналогичными операторами $M^{\mu\nu}$ любой лоренц-инвариантной квантовой теории. Если оказывается невозможным построить такие операторы, теория не является лоренц-инвариантной. Этот вывод окажется ключевым при квантовании струн, так как условие (11.81) накладывает дополнительные ограничения, имеющие важные физические следствия.

Упражнение-разминка 11.7. Так как М^{µν} = - М^{νµ}, левая часть (11.81) изменяет знак при перестановке µ и ν. Убедитесь, что правая часть также изменяет знак при такой перестановке.

Теперь можно использовать (11.81) для определения коммутаторов лоренцевских зарядов в *координатах* светового конуса. Лоренцевские генераторы даются выражениями

$$M^{IJ}, M^{+I}, M^{-I}$$
 $M^{+-}.$ (11.82)

Рассмотрим, например, коммутатор $[M^{+-}, M^{+1}]$. Чтобы использовать (11.81), заметим особенности правой части этого соотношения: каждое η содержит по одному индексу от каждого из генераторов в левой части. Для $[M^{+-}, M^{+1}]$ единственный способ получить ненулевое значение η — использовать индекс «-» первого генератора и «+» второго. Неисчезающее слагаемое находится на втором месте в правой части (11.81), и мы находим

$$[M^{+-}, M^{+I}] = -i\eta^{-+}M^{+I} = iM^{+I}.$$
 (11.83)

Аналогично

$$[M^{-1}, M^{-J}] = 0. (11.84)$$

Здесь η должен использовать индексы I и J, но тогда два других индекса войдут в M, получится M^{--} , обращающийся в нуль в силу антисимметрии.

• Упражнение-разминка 11.8. Покажите, что $M^{+-} = M^{10}$. Из этого следует, что M^{+-} генерирует буст в направлении x^1 . До сих пор мы рассматривали ковариантные лоренцевские заряды в *координатах* светового конуса. Теперь следует найти лоренцевские заряды для квантования частицы в *калибровке* светового конуса. Предыдущее обсуждение импульсов показывает, что мы сталкиваемся с тремя вопросами.

- Как следует определить эти заряды?
- Преобразования какого типа они генерируют?
- 3) Каковы коммутационные соотношения, которым они удовлетворяют?

В оставшейся части этого раздела мы детально рассмотрим первый вопрос. Прежде чем сделать это, дадим краткие ответы на второй и третий вопросы, оставляя подробный анализ этих вопросов задачам 11.6 и 11.7. Следует ожидать, что лоренцевские генераторы в калибровке светового конуса генерируют преобразования Лоренца координат и импульсов, но в ряде случаев эти преобразования сопровождаются репараметризацией мировой линии. Что касается третьего вопроса, лоренцевские генераторы в калибровке светового конуса будут удовлетворять тем же коммутационным соотношениям, что и ковариантные операторы в координатах светового конуса. Это означает, что лоренцевская симметрия сохраняется в теории квантовой точечной частицы на световом конусе. Успех построения априори неочевиден. Неясно, будет ли уменьшенный набор операторов в калибровке светового конуса достаточен для построения квантовых лоренцевских зарядов, генерирующих лоренцевские (плюс другие) преобразования и удовлетворяющих алгебре Лоренца.

Простейшая гипотеза о виде генераторов калибровки светового конуса состоит в использовании координат светового конуса в ковариантной формуле (11.76) и последующей замене $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и p^- , используя их определения в калибровке светового конуса в (11.29), (11.30) и (11.31). Попробуем выполнить это предписание для M^{+-} :

$$M^{+-} \stackrel{?}{=} x^{+}(\tau)p^{-}(\tau) - x^{-}(\tau)p^{+}(\tau) \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} \frac{p^{+}\tau}{m^{2}} - \left(x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}}\tau\right)p^{+} \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} -x_{0}^{-}p^{+}.$$
(11.85)

Так как x_0^- и p^+ не зависят от τ , это же верно для M^{+-} . Однако возникает небольшая трудность. Опператор M^{+-} неэрмитов: $(M^{+-})^{\dagger} - M^{+-} = [x_0^-, p^+] \neq 0$. Этот крах эрмитовости иллюстрирует то, как использование калибровки светового конуса может повлиять на основные свойства операторов. Ковариантные лоренцевские генераторы были автоматически эрмитовы, но это не выполняется для генераторов калибровки светового конуса. Таким образом, у нас есть основания определить эрмитов генератор M^{+-} как

$$M^{+-} = -\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-). \qquad (11.86)$$

Примем это за лоренцевский генератор M^{+-} калибровки светового конуса.

Самым сложным из всех является генератор M^{-1} . К тому же, он и самый интересный. Предписание, использованное для M^{+-} , на этот раз дает

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x^{-}(\tau)p^{I} - x^{I}(\tau)p^{-} \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} \left(x_{0}^{-} + \frac{p^{-}}{m^{2}}\tau\right)p^{I} - \left(x_{0}^{I} + \frac{p^{I}\tau}{m^{2}}\right)p^{-} \stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} x_{0}^{-}p^{I} - x_{0}^{I}p^{-}.$$
(11.87)

Как и ранее, зависимость от τ исчезает, но результат все равно сложен, так как p^- есть нетривиальная функция всех дугих импульсов. Определим M^{-1} как эрмитову версию оператора, полученного выше:

$$M^{-I} \equiv x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I). \qquad (11.88)$$

Если лоренцевские заряды в калибровке светового конуса должны удовлетворять алгебре Лоренца, то, как мы отмечали в (11.84), должно выполняться равенство

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0. (11.89)$$

Удовлетворяет ли M^{-I} , определенный формулой (11.88), этому уравнению? Ответ положителен, в чем вы сами можете убедиться, решая задачу 11.6. Этот результат необходим для того, чтобы обеспечить лоренцевскую инвариантность квантовой теории. Все другие коммутаторы лоренцевских генераторов также приводят к корректным результатам.

Вычисление коммутатора $[M^{-I}, M^{-J}]$ в квантовой теории струн довольно сложно, но ответ очень интересен. Оказывается, что этот коммутатор равен нулю тогда и только тогда, когда струна распространяется в пространстве-времени некоторой определенной размерности, и кроме того, только в случае, если определение массы изменяется так, что в спектре открытой струны можно найти безмассовые калибровочные поля! Теория струн настолько закрепощена, что она лоренц-инвариантна только для фиксированной размерности пространствавремени.

Задачи

Задача 11.1. Уравнение движения для гейзенберговских операторов

Предположим, что шрёдингеровский гамильтониан H = H(p, q) не зависит от времени. В этом случае независящий от времени шрёдингеровский оператор ξ порождает гейзенберговский оператор

$$\xi(t)=e^{iHt}\xi e^{-iHt}.$$

Покажите, что этот оператор удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d\xi(t)}{dt} = \big[\xi(t), H\big(p(t), q(t)\big)\big].$$

Это вычисление доказывает, что для независящих от времени гамильтонианов справедливо уравнение (11.18).

Задача 11.2. Гейзенберговские операторы и зависящие от времени гамильтонианы

В случае, когда шрёдингеровский гамильтониан H = H(p, q; t) зависит от времени, временная эволюция состояний порождается унитарным оператором U(t):

$$|\Psi, t\rangle = U(t)|\Psi\rangle, \tag{1}$$

где U(t) нетривиальным образом зависит от *H*. Здесь $|\Psi\rangle$ обозначает состояние в нулевой момент времени и U(0) = 1.

(а) Используя уравнение Шрёдингера, покажите, что

$$i\frac{dU(t)}{dt} = HU(t).$$
⁽²⁾

Обозначим для краткости $U \equiv U(t)$. Так как U^{-1} , действуя на $|\Psi, t\rangle$, дает независящее от времени состояние, рассуждения, аналогичные приведенным в (11.24), позволяют определить гейзенберговский оператор, соответствующий шрёдингеровскому оператору α , как

$$\alpha(t) = U^{-1} \alpha U. \tag{3}$$

(б) Пусть *ξ* — независящий от времени шрёдингеровский оператор, а *ξ(t)* — соответствующий гейзенберговский оператор, определенный с помощью (3). Покажите, что

$$i\frac{d\xi(t)}{dt} = [\xi(t), H(p(t), q(t); t)].$$

Это вычисление доказывает, что уравнение (11.18) выполняется для зависящих от времени гамильтонианов.

(в) Пусть для шрёдингеровских операторов α_1 , α_2 и α_3 выполнено соотношение $[\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_3$. Покажите, что для соответствующих гейзенберговских операторов выполнено

$$[\alpha_1(t), \alpha_2(t)] = \alpha_3(t).$$

Задача 11.3. Классическая динамика на гамильтоновом языке

Рассмотрим классическое фазовое пространство (q, p), траекторию (q(t), p(t)) и наблюдаемую v(q(t), p(t); t). По стандартным правилам дифференцирования

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial q}\frac{dq}{dt}.$$
 (1)

С учетом определения скобок Пуассона

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}, \qquad (2)$$

покажите, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \{v, H\}.$$
(3)

Сравнивая этот результат с (11.19), мы видим аналогию между временной эволюцией произвольного оператора \mathcal{O} и классической гамильтоновой эволюцией наблюдаемой v в фазовом пространстве.

Для вывода (3) понадобятся классические уравнения движения на гамильтоновом языке. Эти уравнения можно получить, потребовав, чтобы интеграл

$$\int dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t); t))$$

был стационарен при независимых вариациях $\delta q(t)$ и $\delta p(t)$.

Задача 11.4. Репараметризационные симметрии точечной частицы

Покажите, что вариация

$$\delta x^\mu(au) = \lambda(au) \partial_ au x^\mu(au)$$

индуцирует вариацию δL лагранжиана точечной частицы, которую можно записать в виде

$$\delta L(\tau) = \partial_{\tau} (\lambda(\tau) L(\tau)).$$

Это доказывает, что репараметризации δx^{μ} являются симметриями в том смысле, который определен в задаче 8.9. Покажите, что связанные с этими репараметризационными симметриями заряды обращаются в нуль. Если λ не зависит от τ , репараметризация представляет собой бесконечно малую постоянную трансляцию по τ . В этом случае сохраняющимся зарядом является гамильтониан. Покажите в явном виде, что каноническим образом определенный из лагранжиана точечной частицы гамильтониан обращается в нуль.

Задача 11.5. Лоренцевские генераторы и алгебра Лоренца

В этой задаче мы рассматриваем лоренц-ковариантные заряды (11.76).

- (a) Вычислите коммутатор $[M^{\mu\nu}, p^{\rho}]$.
- (б) Вычислите коммутатор $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$ и убедитесь, что выполняется соотношение (11.81).
- (в) Рассмотрите алгебру Лоренца в координатах светового конуса. Вычислите

$$[M^{\pm I}, M^{JK}], [M^{\pm I}, M^{\mp J}], [M^{+-}, M^{\pm I}]$$
 и $[M^{\pm I}, M^{\pm J}].$

 Задача 11.6. Коммутатор [M⁻¹, M^{-J}] для частицы в калибровке светового конуса

Цель данного вычисления — в том, чтобы показать, что

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0. (1)$$

(a) Проверьте, что оператор M^{-I} в калибровке светового конуса имеет вид

$$M^{-I} = (x_0^- p^I - x_0^I p^-) + \frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}.$$
 (2)

Проведите вычисление выражения (1), различая два типа слагаемых в (2). Вычислите вклады в коммутатор от смешанных слагаемых и от последнего слагаемого.

(б) Проведите вычисление выражения (1), используя вклад от первого слагаемого в правой части (2).

Задача 11.7. Преобразования, порождаемые лоренцевскими генераторами в калибровке светового конуса M⁺⁻ и M^{-I}

- (а) Вычислите коммутатор M^{+-} (определенный в (11.86)) с координатами светового конуса $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и $x^I(\tau)$. Покажите, что M^{+-} порождает ожидаемые лоренцевские преобразования этих координат.
- (б) Вычислите коммутатор M^{-I} с координатами светового конуса $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ и $x^J(\tau)$. Покажите, что M^{-I} порождает ожидаемые лоренцевские преобразования вместе с компенсирующей репараметризацией мировой линии. Вычислите параметр λ для этой репараметризации. [*Указание*: репараметризация принимает «эрмитизированную» форму $\delta x^{\mu}(\tau) = \frac{1}{2} (\lambda \delta_{\tau} x^{\mu} + \delta_{\tau} x^{\mu} \lambda)$.]

Глава 12

Релятивистские квантовые открытые струны

Наконец мы переходим к квантованию релятивистской открытой струны. Мы используем калибровку светового конуса, чтобы задать коммутационные соотношения и определить гамильтониан в гейзенберговской картине. Мы обнаружим бесконечное множество операторов рождения и уничтожения, помеченных целым числом и поперечным векторным индексом. Осцилляторы, соответствующие направлению X^- , являются поперечными операторами Вирасоро. Неоднозначности, с которыми мы сталкиваемся при определении квантовой теории, снимаются требованием лоренц-инвариантности теории. Среди этих неоднозначностей — размерность пространства-времени, которая фиксируется на значении 26, и массовая формула, которая слегка отличается от классического аналога, так что спектр допускает безмассовые фотонные состояния. Спектр также содержит тахионное состояние, указывающее на нестабильность D25-браны.

12.1. Гамильтониан светового конуса и коммутаторы

Наконец мы можем приступить к квантованию релятивистской струны. Мы приобрели определенные навыки при формулировке динамики классических релятивистских струн, и детально изучили, как следует квантовать более простой, но все же нетривиальный случай релятивистской точечной частицы. Кроме того, окинув взглядом основы теории скалярных, электромагнитных и гравитационных квантовых полей в калибровке светового конуса, мы сумеем оценить приложения квантовой теории открытых струн. В этой главе мы будем заниматься открытыми струнами. С настоящего момента будем предполагать существование заполняющей пространство D-браны. В следующей главе мы проквантуем замкнутую струну.

Как и ранее, мы будем интерпретировать классические уравнения движения в калибровке светового конуса как уравнения для соответствующих гейзенберговских операторов. Поэтому нам необходимо сделать обзор результатов анализа классической релятивистской струны на световом конусе.

Мы нашли класс параметризаций мирового листа (9.27), для которых уравнения движения являются волновыми уравнениями $\ddot{X}^{\mu} - X^{\mu''} = 0$. Это примечательное упрощение возникло ценой наложения двух ограничений $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$. С учетом этих ограничений плотности импульса являются простыми производными от координат:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu\prime}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \tag{12.1}$$

Эти уравнения выполняются во всех калибровках в рамках рассматриваемого класса. В частности, они верны в калибровке светового конуса. Для открытых струн в калибровке светового конуса полагаем $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ и решаем уравнение для X^- через поперечные координаты X^I . Действительно, используя (9.65) при $\beta = 2$, имеем

$$\dot{X}^{-} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^{+}} (\dot{X}^{I} \dot{X}^{I} + X^{I'} X^{I'}). \qquad (12.2)$$

Это позволяет дать явное выражение для $\mathcal{P}^{\tau-}$

$$\mathcal{P}^{\tau^{-}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^{+}} (2\pi\alpha')^{2} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^{2}} \right) = \frac{\pi}{2p^{+}} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^{2}} \right).$$
(12.3)

Вскоре нам понадобятся эти уравнения.

В качестве первого шага при определении квантовой теории релятивистской струны в калибровке светового конуса мы должны привести список шрёдингеровских операторов. Руководствуясь списком (11.25) шрёдингеровских операторов для квантовой точечной частицы, выберем наши независящие от τ шрёдингеровские операторы.

Шрёдингеровские операторы:
$$(X^{I}(\sigma), x_{0}^{-}, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^{+}).$$
 (12.4)

Тогда определены соответствующие гейзенберговские операторы.

Гейзенберговские операторы:
$$(X^{I}(\tau, \sigma), x_{0}^{-}(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^{+}(\tau))$$
. (12.5)

Так как операторы (12.4) не зависят явно от τ , это же верно и для гейзенберговских операторов (12.5). Как и в случае точечной частицы, мы ожидаем, что $x_0^$ и p^+ являются полностью независимыми от τ гейзенберговскими операторами.

Установим теперь коммутационные соотношения. Для шрёдингеровских операторов $X^{I}(\sigma)$ и $\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)$ мы сталкиваемся с фактом, что эти операторы зависят от σ . Разумно потребовать, чтобы такие операторы не коммутировали только в том случае, если они берутся в одной и той же точке вдоль струны. Мы не ожидаем, что (одновременные) измерения в разных точках на струне, интерферируют друг с другом. Поэтому мы полагаем

$$[X^{I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'). \qquad (12.6)$$

284

Здесь дельта-функция используется для того, чтобы подчеркнуть обращение коммутатора в нуль при $\sigma \neq \sigma'$. Мы использовали дельта-функцию Дирака, а не дельта-символ Кронекера, так как σ является непрерывной переменной. Соотношение (12.6) естественно дополняется коммутационными соотношениями

$$[X^{I}(\sigma), X^{J}(\sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = 0$$
(12.7)

H

$$[x_0^-, p^+] = -i. \tag{12.8}$$

Операторы x_0^- и p^+ коммутируют со всеми остальными шрёдингеровскими операторами:

$$[x_0^-, X^I(\sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = [p^+, X^I(\sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = 0.$$
(12.9)

Поэтому для соответствующих гейзенберговских операторов единственными неисчезающими коммутационными соотношениями при равных временах являются

$$[X^{I}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau,\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma'), \qquad (12.10)$$

а также

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i.$$
 (12.11)

Все остальные коммутаторы обращаются в нуль:

$$\begin{bmatrix} X^{I}(\tau,\sigma), X^{J}(\tau,\sigma') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{\tau I}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau,\sigma') \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x_{0}^{-}(\tau), X^{I}(\tau,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0}^{-}(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau,\sigma) \end{bmatrix} = 0, \qquad (12.12)$$

$$\begin{bmatrix} p^{+}(\tau), X^{I}(\tau,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{+}(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau,\sigma) \end{bmatrix} = 0.$$

Построим теперь гамильтониан. Наш гамильтониан должен порождать трансляцию по τ . Из приобретенного при рассмотрении точечной частицы опыта мы знаем, что p^- генерирует X^+ трансляции. Но в калибровке светового конуса $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, так что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}.$$
 (12.13)

Отсюда следует, что гамильтониан, который генерирует сдвиги по τ , должен быть равен

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^{\pi} d\sigma \, \mathcal{P}^{\tau-}. \qquad (12.14)$$

Оказывается, что это действительно правильный гамильтониан струны. Используя (12.3), гамильтониан можно записать в явном виде как гейзенберговский оператор

$$H(\tau) = \pi \alpha' \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi \alpha')^2} \right).$$
(12.15)

Гамильтониан H должен генерировать квантовые уравнения движения, которые являются операторными версиями классических уравнений движения. Если выразить гамильтониан через поперечные моды Вирасоро из главы 9, он будет выглядеть очень просто. Мы видели в этой главе, что $L_0^{\perp} = 2\alpha' p^+ p^-$ (формула (9.78)), так что из (12.14) немедленно следует

$$H = L_0^{\perp}.$$
 (12.16)

Это выражение для гамильтониана, возможно, является самым запоминающимся, хотя, как мы увидим далее, истинный гамильтониан немного иной. Операторные произведения \mathcal{PP} и X'X' в (12.15) на самом деле неоднозначны и требуют аккуратного определения. Кроме того, лоренцевская инвариантность потребует вычитания из H вычисляемой постоянной.

Теперь, когда у нас имеется приемлемый кандидат на роль гамильтониана, мы должны вывести уравнения движения. Любой гейзенберговский оператор $\xi(\tau, \sigma)$, возникающий из независящего от времени шрёдингеровского оператора $\xi(\sigma)$, должен удовлетворять уравнению

$$i\dot{\xi}(\tau,\sigma) = [\xi(\tau,\sigma), H(\tau)],$$
 (12.17)

где $H(\tau)$ дается выражением (12.15). Так как $H(\tau)$ построен из гейзенберговских операторов, не имеющих явной зависимости от времени, мы можем подставить $H(\tau)$ для $\xi(\tau, \sigma)$ в (12.17). Мы приходим к выводу, что гамильтониан полностью не зависит от времени: $H(\tau) = H$. Кроме того, можно увидеть, что $x_0^-(\tau)$ и $p^+(\tau)$ коммутируют с H. Следовательно, эти операторы не зависят от времени, и мы будем обозначать их x_0^- и p^+ . Коммутатор (12.11) примет тогда вид

$$[x_0^-, p^+] = -i. \tag{12.18}$$

Гейзенберговское уравнение движения для $X^{I}(\tau, \sigma)$ имеет вид

$$i\dot{X}^{I}(\tau,\sigma) = \left[X^{I}(\tau,\sigma), H(\tau)
ight] = \left[X^{I}(\tau,\sigma), \ \pilpha' \int\limits_{0}^{\pi} d\sigma' \,\mathcal{P}^{ au J}(\tau,\sigma') \mathcal{P}^{ au J}(\tau,\sigma')
ight],$$

где мы опустили второе слагаемое в H, поскольку оно коммутирует с $X^{I}(\tau, \sigma)$:

$$\left[X^{I}(\tau,\sigma), X^{J'}(\tau,\sigma')\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma'} \left[X^{I}(\tau,\sigma), X^{J}(\tau,\sigma')\right] = 0.$$
(12.19)

Мы также вновь включили в $H(\tau)$ временной параметр, выбрав время так, чтобы получить легко вычисляемые коммутаторы при равных временах. Используя (12.10), находим:

$$i\dot{X}^{I}(\tau,\sigma) = \pi\alpha' \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} d\sigma' \,\mathcal{P}^{\tau J}(\tau,\sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma-\sigma'). \qquad (12.20)$$

После интегрирования и сокращения общего множителя *i*, находим:

$$\dot{X}^{I}(\tau,\sigma) = 2\pi \alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau,\sigma).$$
(12.21)

К счастью, это совпадает с классическим уравнением движения (12.1). Аналогично можно проверить остальные уравнения движения. Например, можно вычислить $\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}$ и использовать полученный результат для проверки того, что выражение

$$\ddot{X}^{I} - X^{I''} = 0 \tag{12.22}$$

есть квантовое уравнение движения (задача 12.1). Когда мы превращаем классическую теорию струн в квантовую теорию, классические граничные условия становятся операторными уравнениями. Например, граничные условия Неймана

$$\partial_{\sigma} X^{I}(\tau,\sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$
 (12.23)

значат буквально, что оператор $\partial_{\sigma} X^{I}(\tau, \sigma)$ обращается в нуль на концах открытой струны.

Мы выяснили в главе 9, что особенно просты и полезны линейные комбинации производных ($\dot{X}^{I} \pm X^{I'}$). Завершим раздел вычислением коммутаторов этих производных. Начнем с использования (12.21), чтобы переписать коммутатор (12.10) как

$$[X^{I}(\tau,\sigma), \dot{X}^{J}(\tau,\sigma')] = 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \delta(\sigma-\sigma'). \qquad (12.24)$$

Беря производную по σ от этого выражения, получаем:

$$\left[X^{I'}(\tau,\sigma), \dot{X}^{J}(\tau,\sigma')\right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma-\sigma').$$
(12.25)

Дифференцируя $[X^{I}(\tau, \sigma), X^{J}(\tau, \sigma')] = 0$ по σ и σ' и вспоминая, что $[\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0$, находим, что производные по τ и σ от координат коммутируют друг с другом по отдельности:

$$\left[\boldsymbol{X}^{I'}(\tau,\sigma), \boldsymbol{X}^{J'}(\tau,\sigma')\right] = \left[\dot{\boldsymbol{X}}^{I}(\tau,\sigma), \dot{\boldsymbol{X}}^{J}(\tau,\sigma')\right] = 0.$$
(12.26)

Рассмотрим теперь коммутатор

$$[(\dot{X}^{I} + X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^{J} + X^{J'})(\tau, \sigma')], \qquad (12.27)$$

который вследствие (12.26) равен

$$\left[\dot{X}^{I}(\tau,\sigma), X^{J'}(\tau,\sigma')\right] + \left[X^{I'}(\tau,\sigma), \dot{X}^{J}(\tau,\sigma')\right].$$
(12.28)

Второе слагаемое дается выражением (12.25). Первое слагаемое равно

$$-\left[X^{J'}(\tau,\sigma'),\dot{X}^{I}(\tau,\sigma)\right] = -(2\pi\alpha')i\eta^{JI}\frac{d}{d\sigma'}\delta(\sigma'-\sigma) = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma').$$

Здесь мы использовали то, что производная по σ' от функции разности ($\sigma - \sigma'$) равна производной от той же функции по σ , взятой с минусом. Кроме того, мы использовали свойство дельта-функции $\delta(x) = \delta(-x)$. Теперь ясно, что оба слагаемых в (12.28) равны, так что

$$\left[(\dot{X}^{I}+X^{I'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^{J}+X^{J'})(\tau,\sigma')\right]=4\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma').$$
 (12.29)

На самом деле в общем случае мы получили, что

$$\left[(\dot{X}^{I}\pm X^{I'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^{J}\pm X^{J'})(\tau,\sigma')\right]=\pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'),\qquad(12.30)$$

так как вклад дают только перекрестные слагаемые. Наконец

$$[(\dot{X}^{I} \pm X^{I'})(\tau, \sigma), \ (\dot{X}^{J} \mp X^{J'})(\tau, \sigma')] = 0.$$
(12.31)

Соотношения (12.30) и (12.31) выполняются при $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$.

12.2. Коммутационные соотношения для осцилляторов

Полученные ранее коммутационные соотношения требуют осторожного обращения, так как они содержат полевые операторы и используют дельта-функции. Эти соотношения представляют бесконечное множество соотношений, которые выполняются для непрерывных значений σ и σ' . Поэтому полезно переписать их в дискретной форме, а именно как счетное множество коммутационных соотношений. Для этого исследуем разложения по модам в разделе 9.4. Они следуют из классических волновых уравнений и граничных условий для заполняющей пространство D-браны. Так как волновые уравнения и граничные условия остаются справедливыми в квантовой теории, мы можем использовать разложение по модам и в квантовой теории. Однако классические моды α_n^I становятся квантовыми операторами с нетривиальными коммутационными соотношениями.

Напомним решение (9.69) волнового уравнения с граничными условиями Неймана:

$$X^{I}(\tau,\sigma) = x_{0}^{I} + \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{I} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n}^{I} \cos n\sigma \ e^{-in\tau}.$$
(12.32)
Кроме того из (9.74) имеем

$$(\dot{X}^{I} + X^{I'})(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{I} e^{-in(\tau + \sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi],$$

$$(\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{I} e^{-in(\tau - \sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi].$$
(12.33)

Выписанные равенства верны при $\sigma \in [0, \pi]$, так как координаты открытой струны определены только в интервале $\sigma \in [0, \pi]$. Построим теперь функцию от σ с периодом 2π , которая естественно записывается через координаты открытой струны. Чтобы сделать это, *вычислим* второе из предыдущих уравнений при значении $-\sigma$:

$$(\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{I} e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0].$$
(12.34)

Интервал $\sigma \in [-\pi, 0]$ необходим, потому что в противном случае левая сторона равенства не определена. Теперь определяем оператор $A^{I}(\tau, \sigma)$ равенством

$$A^{I}(\tau,\sigma) \equiv \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{I} e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad A^{I}(\tau,\sigma+2\pi) = A^{I}(\tau,\sigma).$$
(12.35)

Указанная периодичность есть прямое следствие определения. Теперь уже просто связать A^{I} с координатами открытой струны на интервале $\sigma \in [-\pi, \pi]$ длиной 2π . При $\sigma \in [0, \pi]$ мы используем верхнее уравнение в (12.33), а при $\sigma \in [-\pi, 0]$ используем (12.34):

$$A^{I}(\tau,\sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^{I} + X^{I'})(\tau,\sigma), & \sigma \in [0,\pi]; \\ (\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau,-\sigma), & \sigma \in [-\pi,0]. \end{cases}$$
(12.36)

Оператор A^{I} окажется полезным для определения коммутационных соотношений для α_{0}^{I} осцилляторов. Для этого мы должны вычислить коммутатор $[A^{I}(\tau, \sigma), A^{J}(\tau, \sigma')]$. С учетом (12.36), вычисление его в полном интервале σ , $\sigma' \in [-\pi, \pi]$ требует четырех отдельных вычислений:

$$\begin{bmatrix} (\dot{X}^{I} + X^{I'})(\tau, \sigma), \ (\dot{X}^{J} + X^{J'})(\tau, \sigma') \end{bmatrix}, \qquad \sigma, \sigma' \in [0, \pi], \\ \begin{bmatrix} (\dot{X}^{I} + X^{I'})(\tau, \sigma), \ (\dot{X}^{J} - X^{J'})(\tau, -\sigma') \end{bmatrix}, \qquad \sigma \in [0, \pi], \ \sigma' \in [-\pi, 0], \\ \begin{bmatrix} (\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau, -\sigma), \ (\dot{X}^{J} + X^{J'})(\tau, \sigma') \end{bmatrix}, \qquad \sigma \in [-\pi, 0], \ \sigma' \in [0, \pi], \\ \begin{bmatrix} (\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau, -\sigma), \ (\dot{X}^{J} - X^{J'})(\tau, -\sigma') \end{bmatrix}, \qquad \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0].$$

$$(12.37)$$

Первый коммутатор для $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$ просто считывается из (12.30):

$$\left[(\dot{X}^{I}+X^{I'})(\tau,-\sigma),\ (\dot{X}^{J}+X^{J'})(\tau,\sigma')\right]=4\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{12.38}$$

Последний коммутатор для $\sigma, \sigma' \in [-\pi, 0]$ также получается из (12.30):

$$\begin{split} [(\dot{X}^{I} - X^{I'})(\tau, -\sigma), \ (\dot{X}^{J} + X^{J'})(\tau, -\sigma')] &= -4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') = \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \end{split}$$

и совпадает с результатом (12.38) для первого коммутатора. Для второго и третьего коммутаторов в (12.37) можно использовать (12.31) и убедиться, что оба они обращаются в нуль. На самом деле правая часть (12.38) также обращается в нуль, так как в этих случаях σ и σ' не могут быть равны. Отсюда, результат для всех четырех коммутаторов можно резюмировать как

$$\left[A^{I}(\tau,\sigma),A^{J}(\tau,\sigma')\right] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'), \quad \sigma,\sigma'\in[-\pi,\pi].$$
(12.39)

Используя (12.35) и сокращая общий множитель $2\alpha'$, получаем из предыдущего результата, что

$$\sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} \left[\alpha_{m'}^{I},\alpha_{n'}^{J}\right] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma-\sigma').$$
(12.40)

Это соотношение верно для $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$. Применим к обоим частям равенства интегральные операции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \, e^{im\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma' \, e^{in\sigma'}. \tag{12.41}$$

В левой стороне (12.40) интегралы оставляют слагаемое с m' = m и n' = n:

$$e^{-i(m+n)\tau} \left[\alpha_m^I, \alpha_n^J \right]. \tag{12.42}$$

В правой стороне (12.40) интегралы дают

$$i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \ e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_{0}^{2\pi} d\sigma' \ e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') =$$

= $i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \ e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \ e^{i(m+n)\sigma} =$
= $-n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}.$ (12.43)

Приравнивая результаты (12.42) и (12.43), находим, что

$$[\alpha_{m}^{I}, \alpha_{n}^{J}] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} e^{+i(m+n)\tau} = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}, \qquad (12.44)$$

так как для описания значений m = -n можно использовать дельта-символ Кронекера. Поэтому коммутационное соотношение равно

$$\left[\alpha_{m}^{I},\alpha_{n}^{J}\right] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}.$$
(12.45)

Это фундаментальное коммутационное соотношение между α -модами. Заметим, что α_0^I коммутирует со всеми другими осцилляторами. Это вполне разумно: как показано в (9.52), α_0^I пропорциональна импульсу струны

$$\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} \, p^I, \tag{12.46}$$

и следует ожидать, что она имеет нетривиальный коммутатор только с x_0^J .

Чтобы завершить список всех возможных коммутаторов, мы должны найти коммутаторы x_0^I и осцилляторов α_n^J . Для этого рассмотрим соотношение (12.24) и проинтегрируем обе его части по $\sigma \in [0, \pi]$. В левой части слагаемые с осцилляторами в $X^I(\tau, \sigma)$ не дают вклада, а в правой части исчезает дельта-функция, что даст множитель единицу:

$$\left[\boldsymbol{x}_{0}^{I}+\sqrt{2\alpha'}\,\boldsymbol{\alpha}_{0}^{I}\boldsymbol{\tau},\,\dot{\boldsymbol{X}}^{J}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\sigma}')\right]=2\alpha'\boldsymbol{i}\boldsymbol{\eta}^{IJ}.$$
(12.47)

Так как \dot{X}^{J} есть сумма слагаемых, содержащих α_{n}^{J} , получим $[\alpha_{0}^{I}, \dot{X}^{I}] = 0$. Дополнительно, используя разложение по модам для \dot{X}^{J} , находим, что выражение (12.47) принимает вид

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}} [x_0^I, \alpha_{n'}^J] \cos n' \sigma' e^{-in'\tau} = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}.$$
(12.48)

Сгруппируем слагаемые в левой части этого соотношения так:

$$[x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [x_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \cos n'\sigma' = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}.$$
(12.49)

Применим к обеим частям этого равенства интегральную операцию $\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} d\sigma \cos n\sigma$,

с n ≥ 1. Тогда

$$[x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = 0, \qquad (12.50)$$

или эквивалентно

$$[x_0^I, \alpha_n^J]e^{-in\tau} + [x_0^I, \alpha_{-n}^J]e^{in\tau} = 0.$$
(12.51)

Так как левая часть должна обращаться в нуль для всех значений τ , каждое слагаемое по отдельности должно обращаться в нуль (докажите это!). Отсюда

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0$$
 при $n \neq 0.$ (12.52)

Дополнительно, из уравнения (12.49) следует, что

$$[\boldsymbol{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_0^J] = \sqrt{2\boldsymbol{\alpha}'} \, \boldsymbol{i} \boldsymbol{\eta}^{IJ}. \tag{12.53}$$

В совокупности с (12.46) получаем ожидаемый коммутатор

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0^I, \boldsymbol{p}^J \end{bmatrix} = \boldsymbol{i} \boldsymbol{\eta}^{IJ}. \tag{12.54}$$

Как и в знакомой квантовой механике, операторы x_0^I и p^I — эрмитовы:

$$(\boldsymbol{x}_0^I)^{\dagger} = \boldsymbol{x}_0^I, \quad (\boldsymbol{p}^I)^{\dagger} = \boldsymbol{p}^I.$$
 (12.55)

Вычисления, проделанные для получения коммутационных соотношений, потребовали довольно много стадий, которые мы разобрали детально. Когда речь пойдет о замкнутых струнах или открытых струнах на произвольных конфигурациях D-бран, потребуются аналогичные вычисления. Мы сумеем выполнить их, осуществляя только что проделанные выкладки с минимальными модификациями.

Сейчас полезно детально исследовать коммутационные соотношения (12.45) для мод α_n^I . Как будет показано ниже, они эквивалентны модам бесконечного набора операторов рождения и уничтожения. Чтобы увидеть это, начнем с определения *осцилляторов*, вдохновленные видом введенных в (9.53) классических переменных:

$$\alpha_n^{\mu} = a_n^{\mu} \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^{\mu} = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \ge 1.$$
(12.56)

В этих соотношениях как α , так и a — классические переменные. Теперь они становятся операторами. Классические переменные, комплексно-сопряженные друг другу, становятся в квантовой теории операторами, эрмитово сопряженными друг другу. Поэтому мы можем сохранить первое из приведенных определений, но второе должно быть изменено. Для мод светового конуса $\mu = I$ принимаем

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \quad \text{i} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \ge 1.$$
(12.57)

Заметим, что при таком определении

$$(\alpha_n^I)^{\dagger} = \alpha_{-n}^I, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
 (12.58)

Это выражение верно при n = 0, так как мода α_0^I , которая пропорциональна p^I , также эрмитова. Полезно подчеркнуть, что в то время как моды α_n^I определены для всех целых n, операторы a_n^I и $a_n^{I\dagger}$ определены только для положительных n.

Важным следствием свойств эрмитовости является то, что $X^{I}(\tau, \sigma)$, которая в классической теории была действительной, является теперь эрмитовым оператором.

Упражнение-разминка 12.1. Используя разложение (12.32) и условия эрмитовости (12.55) и (12.58), покажите, что

$$\left(X^{I}(\tau,\sigma)\right)^{\dagger} = X^{I}(\tau,\sigma). \tag{12.59}$$

Множитель *i* перед суммой в (12.32) необходим для того, чтобы это равенство выполнялось.

Теперь можно переформулировать коммутационные соотношения для α -мод через осцилляторы $(a_n^I, a_n^{I\dagger})$. Для этого перепишем (12.45) в виде

$$\left[\alpha_{m}^{I},\alpha_{-n}^{J}\right]=m\delta_{m,n}\,\eta^{IJ}.$$
(12.60)

Когда m и n — целые числа противоположного знака, правая часть обращается в нуль, и два оператора в коммутаторе имеют номера мод одного знака. Поэтому мы получаем, что

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0.$$
(12.61)

Если в (12.60) оба т и п положительны, находим, что

$$\left[\sqrt{m} a_m^I, \sqrt{n} a_n^{J\dagger}\right] = m \delta_{m,n} \eta^{IJ}.$$
(12.62)

Перенося квадратные корни в правую часть, получим:

$$\left[a_{m}^{I}, a_{n}^{J\dagger}\right] = \frac{m}{\sqrt{mn}} \delta_{m, n} \eta^{IJ}. \qquad (12.63)$$

Так как правая часть обращается в нуль во всех случаях, кроме m = n, это выражение упрощается:

$$\left[a_{m}^{I}, a_{n}^{J\dagger}\right] = \delta_{m, n} \eta^{IJ}. \qquad (12.64)$$

Это выражение, совместно с (12.61) показывает, что $(a_m^I, a_m^{I\dagger})$ удовлетворяет коммутационным соотношениям канонических операторов уничтожения и рождения простого квантового гармонического осциллятора. Для каждого значения $m \ge 1$ числа мод и каждого поперечного направления на световом конусе *I* существует пара операторов рождения и уничтожения. Коммутационные соотношения диагональны: осцилляторы, соответствующие различным числам мод или различным координатам светового конуса, коммутируют. Если числа мод и метки координат согласованы, коммутатор равен единице. На языке операторов α с $n \ge 1$

$$\alpha_n^I$$
 оператор уничтожения,
 α_{-n}^I оператор рождения $(n \ge 1)$.
 (12.65)

Для последующих ссылок перепишем разложение $X^{I}(\tau, \sigma)$ в (12.32) по операторам рождения и уничтожения. Разделяя сумму по всем целым числам на суммы

по положительным и отрицательным целым числам и используя (12.46), находим:

$$X^{I}(\tau,\sigma) = x_{0}^{I} + 2\alpha' p^{I} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{n}^{I} e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^{I} e^{in\tau}\right) \frac{\cos n\sigma}{n}.$$
 (12.66)

Заменяя моды а соответствующими осцилляторами, получаем

$$\boldsymbol{X}^{I}(\tau,\sigma) = \boldsymbol{x}_{0}^{I} + 2\alpha' \boldsymbol{p}^{I} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\boldsymbol{a}_{n}^{I} \boldsymbol{e}^{-in\tau} - \boldsymbol{a}_{n}^{I\dagger} \boldsymbol{e}^{in\tau}\right) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}.$$
 (12.67)

Это разложение оператора координаты по операторам рождения и уничтожения.

Попробуем подвести итоги. Список операторов, с которых мы начали, был дан в (12.5). Мы видели, что операторы $X^{I}(\tau, \sigma)$ и $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ могут быть заменены на бесконечную коллекцию осцилляторов плюс пары нулевых мод (x_0^{I}, p^{I}) . Так как два других оператора в списке x_0^{-} и p^+ также обладают нулевыми модами, полный набор базисных операторов теории струн состоит из коллекции нулевых мод плюс бесконечное множество операторов рождения и уничтожения. Этот результат настолько важен, что мы теперь выведем его другим способом, явно показав, каким образом возникают простые квантовые гармонические осцилляторы.

12.3. Струны как гармонические осцилляторы

Цель этого раздела — получить физически более ясный вывод результатов, полученных в предыдущем разделе. В частности, мы заново выведем разложение по модам (12.67) и коммутационные соотношения между операторами в этом разложении. Эти результаты вытекают из фундаментального коммутационного соотношения (12.10) вместе с операторными уравнениями движения (12.22) и операторными граничными условиями (12.23). Коммутационные соотношения (12.10), возможно, наименее интуитивны, так как в них входит дельта-функция. В этом разделе дельта-функции употребляться не будут.

Наша стратегия такова. Мы придумаем простой лагранжиан, описывающий динамику координат светового конуса X^{I} . Это не слишком трудная задача, так как нам известны уравнения движения для X^{I} , их граничные условия и определение канонических импульсов $\mathcal{P}^{\tau I}$. Затем мы разложим координату $X^{I}(\tau, \sigma)$ как функцию σ , но с зависящими от τ коэффициентами разложения. Используя лагранжиан, мы покажем, что эти коэффициенты разложения на самом деле являются координатами гармонических осцилляторов с неограниченно растущей энергией! В итоге мы свяжем эти осцилляторы с полученными при предыдущем анализе операторами рождения и уничтожения.

Чтобы ввести обозначения, начнем с обзора основных свойств квантового гармонического осциллятора. Пусть $q_n(t)$ — координата классического простого гармонического осциллятора, и действие задается выражением

$$S_n = \int L_n(t) \, dt = \int dt \, \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_n^2(t) - \frac{n}{2} q_n^2(t) \right). \tag{12.68}$$

Мы узнаем в этом выражении действие гармонического осциллятора, так как кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, а потенциальная энергия пропорциональна квадрату координаты. Для такой функции Лагранжа импульс p_n , сопряженный координате q_n , равен

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{1}{n} \dot{q}_n. \tag{12.69}$$

После небольшого вычисления находим функцию Гамильтона

$$H_n(p_n, q_n) = p_n \dot{q}_n - L_n = \frac{n}{2}(p_n^2 + q_n^2). \qquad (12.70)$$

В этом уравнении n играет роль частоты ω гармонического осциллятора. Чтобы определить квантовый осциллятор, мы вводим шрёдингеровские операторы q_n и p_n , подчиняющиеся каноническим коммутационным соотношениям

$$[q_n, p_n] = i. (12.71)$$

Операторы рождения и уничтожения можно определить как

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_n - iq_n), \quad a_n^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_n + iq_n).$$
 (12.72)

Можно проверить, что, вследствие (12.71), операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[a_n, a_n^{\dagger}] = 1. \tag{12.73}$$

Обращая соотношения (12.72), находим:

$$q_n = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_n - a_n^{\dagger}), \quad p_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n + a_n^{\dagger}).$$
 (12.74)

Эти выражения можно использовать для выражения функции Гамильтона H_n через операторы рождения и уничтожения. Мы приходим к знакомому результату

$$H_n = n \left(a_n^{\dagger} a_n + \frac{1}{2} \right). \tag{12.75}$$

Рассмотрим теперь тейзенберговские операторы $(a_n(t), a_n^{\dagger}(t))$, связанные с шрёдингеровыми операторами (a_n, a_n^{\dagger}) . Как подчеркивалось в разделе 11.2, гейзенберговские операторы удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и шрёдингеровские операторы:

$$[a_n(t), a_n^{\dagger}(t)] = 1.$$
 (12.76)

Гейзенберговское уравнение движения для $a_n(t)$ имеет вид

$$\dot{a}(t) = i \left[H_n(t), a_n(t) \right] = in \left[a_n^{\dagger}(t) a_n(t), a_n(t) \right] = -in \, a_n(t) \tag{12.77}$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение

$$a_n(t) = e^{-int}a_n(0) = e^{-int}a_n,$$
 (12.78)

где a_n есть постоянный гейзенберговский оператор, равный $a_n(t)$ при t = 0. Аналогичное вычисление дает

$$a_n^{\dagger}(t) = e^{int} a_n^{\dagger}(0) = e^{int} a_n^{\dagger}.$$
 (12.79)

Из последнего уравнения видно, что круговая частота осцилляций действительно равна n. Наконец, имея эти результаты и соотношение (12.74), можно найти явную зависимость от времени оператора $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_n(t) - a_n^{\dagger}(t) \right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_n e^{-int} - a_n^{\dagger} e^{int} \right).$$
(12.80)

Этим завершается наш обзор простого квантового гармонического осциллятора.

Обратимся к обсуждению действия, описывающего динамику поперечных координат светового конуса $X^{I}(\tau, \sigma)$. Мы заявляем, что действие дается простым выражением

$$S = \int d\tau \, d\sigma \, \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'} \right). \tag{12.81}$$

Это действие намного проще, чем действие Намбу—Гото; например, в нем нет квадратного корня. Первое слагаемое, содержащее производные по времени, представляет кинетическую энергию. Второе слагаемое, содержащее пространственные производные, представляет потенциальную энергию. Связанный с X^{I} канонический импульс совпадает с плотностью импульса $\mathcal{P}^{\tau I}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{I}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{I} = \mathcal{P}^{\tau I}, \qquad (12.82)$$

что очевидно, если сравнить выражение с (12.1). Это подтверждает, что \mathcal{L} правильно нормирован. Уравнения движения для X^{I} следуют из вариации

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\partial_{\tau} (\delta X^{I}) \dot{X}^{I} - \partial_{\sigma} (\delta X^{I}) X^{I'} \right).$$
(12.83)

Ограничиваясь вариациями, в которых начальное и конечное положения фиксированы, можно отбросить полную производную по τ и получить:

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \left[\left(X^{I'} \delta X^{I} \right) \Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} d\sigma \, \delta X^{I} \left(\ddot{X}^{I} - X^{I''} \right) \right]. \tag{12.84}$$

Ясно, что требование стационарности действия дает как волновое уравнение (12.22) для координат, так и граничные условия на концах струны. В качестве заключи-

тельной проверки совместности действия вычислим функцию Гамильтона

$$H = \int_{0}^{\pi} d\sigma \mathcal{H} = \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I} \dot{X}^{I} - \mathcal{L} \right).$$
(12.85)

Записав производную по au от X^I через $\mathcal{P}^{ au I}$, находим

$$H = \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\pi \alpha' \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{1}{4\pi \alpha'} X^{I'} X^{I'} \right).$$
(12.86)

Эта функция Гамильтона совпадает с той, которую мы постулировали и проверяли в разделе 12.1.

Используем теперь действие (12.81) для квантования теории. Для этого заменим динамическую переменную $X^{I}(\tau, \sigma)$ набором динамических переменных, не зависящих от σ . Это осуществляется путем записи разложения

$$X^{I}(\tau,\sigma) = q^{I}(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{I}(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}.$$
 (12.87)

Это самое общее выражение, удовлетворяющее граничным условиям Неймана в концевых точках. Конкретная нормировка, использованная для введения коэффициентов разложения, была выбрана для удобства.

Следующий шаг состоит в вычислении действия (12.81), используя разложение для $X^{I}(\tau, \sigma)$. Для этого мы используем

$$\dot{X}^{I} = \dot{q}^{I}(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{n}^{I}(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$X^{I'} = -2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_{n}^{I}(\tau)\sqrt{n} \sin n\sigma.$$
(12.88)

Вычисление действия S, используя приведенные разложения, осуществляется непосредственно, так как интегралы по σ от (cos $n\sigma$ cos $m\sigma$) и (sin $n\sigma$ sin $m\sigma$) обращаются в нуль, за исключением случая n = m. Находим:

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{4\alpha'} \dot{q}^{I}(\tau) \dot{q}^{I}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_{n}^{I}(\tau) \dot{q}_{n}^{I}(\tau) - \frac{n}{2} q_{n}^{I}(\tau) q_{n}^{I}(\tau) \right) \right].$$
(12.89)

Упражнение-разминка 12.2. Докажите выражение (12.89).

Сравнивая действие (12.89) с тем, которое записано в (12.68), видим, что $q_n^I(\tau)$ при $n \ge 1$ — это координаты простого гармонического осциллятора. Частота осцилляций $q_n^I(\tau)$ равна *n*. В этом и состоит физическая интерпретация коэффициентов разложения в (12.87). Так как действие для $q_n^I(\tau)$ точно совпадает с действием S_n , не требуется проводить новую работу для вычисления функции

Гамильтона, за исключением нулевой моды q^{I} :

$$\boldsymbol{p}^{I} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{I}} = \frac{1}{2\alpha'} \dot{\boldsymbol{q}}^{I} \quad \boldsymbol{H} \quad [\boldsymbol{q}^{I}, \boldsymbol{p}^{J}] = \boldsymbol{i} \boldsymbol{\eta}^{IJ}. \tag{12.90}$$

Тогда функция Гамильтона равна

$$H = \alpha' p' p' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} (p_n' p_n' + q_n' q_n'), \qquad (12.91)$$

где мы использовали (12.70) для записи той части функции Гамильтона, которая обусловлена осцилляторами. Предыдущий анализ гейзенберговского оператора $q_n(\tau)$ привел к решению (12.80). Это означает, что для осцилляторов $q_n^I(\tau)$ имеем

$$q_n^I(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau} \right), \qquad (12.92)$$

где a_n^I , $a_n^{I\dagger}$ — канонически нормированные операторы уничтожения и рождения. Для гейзенберговского оператора $q^I(\tau)$ находим:

$$\dot{q}^{I}(\tau) = i \left[H, q^{I}(\tau) \right] = i \alpha' \left[p^{J} p^{J}(\tau), q^{I}(\tau) \right] = 2 \alpha' p^{I}(\tau).$$
(12.93)

Заметим, что p^{I} — независящий от au гейзенберговский оператор. Мы решаем это дифференциальное уравнение для $q^{I}(au)$, записывая

$$q^{I}(\tau) = x_0^{I} + 2\alpha' p^{I} \tau. \qquad (12.94)$$

Здесь x_0^I — постоянный оператор, который с учетом (12.90) удовлетворяет соотношению $[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$. Наконец, можно подставить наши решения (12.92) и (12.94) в разложение (12.87) для X^I и получить

$$X^{I}(\tau,\sigma) = x_{0}^{I} + 2\alpha' p^{I} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n}^{I} e^{-in\tau} - a_{n}^{I\dagger} e^{in\tau}\right) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (12.95)$$

в полном согласии с ранее выведенным выражением (12.67). Мы вывели разложение по модам и коммутационные соотношения, отождествили классические переменные с осцилляторами и не использовали дельта-функции. Сделав это в данном случае, при квантовании других струнных конфигураций мы будем просто использовать абстрактный подход предыдущего раздела — он указывает прямой и быстрый путь к желаемым ответам.

12.4. Поперечные операторы Вирасоро

Мы выписали разложения по модам поперечных координат $X^{I}(\tau, \sigma)$ и достаточно ясно увидели связь с гармоническими осцилляторами. Что можно сказать о других координатах светового конуса — $X^{+}(\tau, \sigma)$ и $X^{-}(\tau, \sigma)$? Разложение X^{-}

действительно просто:

$$X^{+}(\tau,\sigma) = 2\alpha' p^{+}\tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{+}\tau. \qquad (12.96)$$

Как обсуждалось в разделе 9.5 для классического случая, это означает, что мы положили

$$x_0^+ = 0, \quad \alpha_n^+ = 0, \quad n \neq 0.$$
 (12.97)

Для координаты X^+ разложение по модам обеспечивалось соотношением (9.72):

$$X^{-}(\tau,\sigma) = x_{0}^{-} + \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{-}\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n}^{-} e^{-in\tau} \cos n\sigma.$$
(12.98)

Кроме этого уравнения, мы использовали связи, чтобы выразить X^- через X^I , p^+ и постоянную интегрирования x_0^- . Это приводило к тому, что моды α_n^- могли быть записаны через моды α_n^I , как было показано в уравнении (9.77):

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp,$$
 (12.99)

где

$$L_n^{\perp} \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I.$$
(12.100)

По повторяющемуся индексу I производилось суммирование по поперечным направлениям светового конуса. В главе 9 мы назвали L_n^{\perp} поперечными *модами* Вирасоро. Однако, зная, что моды α стали операторами, будем теперь называть L_n^{\perp} поперечными *операторами* Вирасоро. Шаги, приведшие к (12.100), остаются справедливыми в квантовой теории, за исключением того, что моды α ранее рассматривались как коммутирующие классические переменные. Теперь мы знаем, что операторы α не коммутируют. Поэтому мы обязаны спросить, является ли упорядочение двух операторов α в (12.100) корректной операцией. Правильнее было бы спросить, имеет ли значение упорядочение. Так как два оператора α перестают коммутировать только тогда, когда номера их мод в сумме дают нуль, два оператора α перестают коммутировать только при n = 0. Таким образом, L_0^{\perp} является единственным неоднозначным оператором.

Многое стоит на кону при правильном упорядочении L_0^{\perp} . Оператор L_0^{\perp} является, на самом деле, гамильтонианом светового конуса, как мы показали в формуле (12.16). Кроме того, в конце главы 9 мы видели, что L_0^{\perp} непосредственно участвует в вычислении масс состояний струны. Мы отмечали также, что квантовая теория должна внести определенную тонкость в процедуру вычисления массы. Итак, эта тонкость возникла: мы должны определить квантовый оператор L_0^{\perp} ! Поэтому рассмотрим L_0^{\perp} более детально:

$$L_{0}^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ p \in \mathbb{Z} \\ p \in \mathbb{Z}}} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{p}^{I} = \frac{1}{2} \alpha_{0}^{I} \alpha_{0}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{p}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{p}^{I} \alpha_{-p}^{I}.$$
(12.101)

Первая сумма справа нормально упорядочена: операторы уничтожения возникают правее операторов рождения¹⁾. Полезно иметь дело с нормальными операторами, так как они простым образом действуют на вакуумное состояние, мы не можем использовать операторы, не имеющие хорошо определенного действия_н на вакуумное состояние. Поскольку последняя сумма в правой части (12.101) не является нормальным оператором, перепишем ее в виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I] \right) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} p\eta^{II} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2}(D-2)\sum_{p=1}^{\infty} p.$$
(12.102)

Если вы посмотрите на последнее слагаемое в предыдущем выражении, вы заметите, что оно расходится: в него входит сумма всех положительных целых чисел! Ясно, что это создает проблему. Что нам с этим делать? Один способ состоит в том, чтобы просто пренебречь указанной трудностью, заявив, что это наше дело, как мы определим L_0^{\perp} . В таком способе есть доля истины, но все же это не совсем правильно. Добавление константы к L_0^{\perp} изменяет значения масс состояний струн, и уж во всяком случае, предыдущее вычисление обращает внимание на то, что эта аддитивная постоянная могла бы быть не равной нулю или даже бесконечной. Учитывая предыдущее вычисление, запишем

$$L_0^{\perp} = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \qquad (12.103)$$

Оператор L_0^{\perp} входит в наше вычисление массы через определение p^- . Из (12.99) при p = 0 следует

$$\sqrt{2\alpha'}\,\alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp. \tag{12.104}$$

Этим определяется стратегия. Во-первых, мы определяем раз и навсегда, L_0^{\perp} как нормально упорядоченный оператор (12.103) без включения упорядочивающей постоянной:

$$L_0^{\perp} = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I.$$
(12.105)

¹⁾ Нормальное упорядочение, нормальная форма операторов и нормальные произведения, когда все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения, — удобный вычислительный прием, исключающий нулевые энергии, заряды и другие псевдофизические величины при вычислении матричных элементов (см. подробнее «Введение в теорию квантованных полей» Н. Н. Боголюбова и Я. В. Ширкова). — Прим. ред. перевода.

Заметим, что L_0^{\perp} эрмитов: $(L_0^{\perp})^{\dagger} = L_0^{\perp}$. Во-вторых, мы вводим упорядочивающую постоянную *а* в формулу (12.104)²⁾:

$$2\alpha' p^{-} \equiv \frac{1}{p^{+}} (L_0^{\perp} + a). \qquad (12.106)$$

Если мы серьезно отнесемся к попытке упорядочить L_0^{\perp} , мы должны заключить, что

$$a \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p.$$
 (12.107)

Ниже мы обсудим одну примечательную интерпретацию этого уравнения, которая дает, на самом деле, правильный результат. Мы примем, что *a* есть неопределенная постоянная и, как будет показано в разделе 12.5, из требования квантовой согласованности теории струн можно будет определить постоянную *a*, равную интересному конечному значению. Прежде, чем продолжать, посмотрим, как включение *a* изменяет вычисление оператора квадрата массы. Используя определение $M^2 = -p^2$ и формулы (12.105) и (12.106), находим, что

$$M^{2} = -p^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{I}p^{I} = \frac{1}{\alpha'}(L_{0}^{\perp} + a) - p^{I}p^{I} = \frac{1}{\alpha'}\left(a + \sum_{p=1}^{\infty} na_{n}^{I\dagger}a_{n}^{I}\right).$$
 (12.108)

Как и следовало ожидать, постоянная *а* приводит к постоянному сдвигу оператора квадрата массы.

Невозможно удержаться от искушения интерпретировать формулу (12.107). Важный математический результат утверждает, что правая часть равенства имеет конечное значение. Для доказательства рассмотрим дзета-функцию $\zeta(s)$, определяемую бесконечной суммой

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1.$$
 (12.109)

Предполагается, что аргумент *s* дзета-функции является комплексным числом, но, как указано выше, сумма сходится только в случае, если действительная часть аргумента больше единицы. Мы можем использовать аналитическое продолжение для определения дзета-функции при всех возможных значениях аргумента. Оказывается, что $\zeta(s)$ конечна для всех значений *s* за исключением s = 1. В частности, как следует из решения задачи 12.4, $\zeta(-1) = -1/12$. С учетом (12.109) отсюда следует, что

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$
 (12.110)

Это удивительная интерпретация бесконечной суммы $\sum_{p=1}^{\infty} p$. Результат не только конечен, но он еще и отрицателен! Подставляя его в (12.107), получаем, что

²⁾ Постоянную а часто называют константой нормального упорядочивания. — Прим. ред. перевода.

$$a = -\frac{1}{24}(D-2).$$
 (12.111)

Это на самом деле правильное значение a, что мы объясним в разделе 12.5. Догадка приводит к правильному результату, мы увидим далее, что согласованность требует значения D = 26, так что на самом деле a = -1. Как раз в точности такое значение сдвига оператора квадрата массы нужно для того, чтобы спектр открытых струн включал безмассовые фотонные состояния!

Обсудив детально L_0^{\perp} , рассмотрим теперь другие поперечные операторы Вирасоро. Так как $(\alpha_n^J)^{\dagger} = \alpha_{-n}^J$, можно ожидать, что $(\alpha_n^-)^{\dagger} = \alpha_{-n}^-$ или эквивалентно, с учетом (12.99),

$$(L_n^{\perp})^{\dagger} = L_{-n}^{\perp}.$$
 (12.112)

Мы уже проверяли это соотношение для n = 0. Для $n \neq 0$ можно легко доказать это свойство эрмитовости, используя (12.100):

$$(L_{n}^{\perp})^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{n-p}^{I} \alpha_{p}^{I})^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{p}^{I})^{\dagger} (\alpha_{n-p}^{I})^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{-n+p}^{I}.$$
(12.113)

Так как осцилляторы в каждом слагаемом суммы коммутируют, можно поменять их местами. Полагая к тому же $p \to -p$, получаем ожидаемый результат:

$$(L_n^{\perp})^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n-p}^I \alpha_p^I = L_{-n}^{\perp}.$$
 (12.114)

Возможно, самым интересным свойством операторов Вирасоро является то, что они не коммутируют. Мы видели, что α_m^I и α_n^I коммутируют за исключением случая, когда m + n равно нулю. Для мод α_n^- это не так. Два оператора Вирасоро L_m^{\perp} и L_n^{\perp} никогда не коммутируют, если $m \neq n$. Коммутационные свойства операторов Вирасоро довольно сложны, так что мы рассмотрим их в порядке возрастания общности.

Для разогрева, рассмотрим коммутатор оператора Вирасоро и осциллятора α_n^J . Имеем:

$$\begin{bmatrix} L_m^{\perp}, \alpha_n^J \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \alpha_{m-p}^I \begin{bmatrix} \alpha_p^I, \alpha_n^J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J \end{bmatrix} \alpha_p^I \end{pmatrix}.$$
(12.115)

Вычисляя коммутаторы и вспоминая, что $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$, находим:

$$\left[L_{m}^{\perp},\alpha_{n}^{J}\right] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(p \delta_{p+n,0} \alpha_{m-p}^{J} + (m-p) \delta_{m-p+n,0} \alpha_{p}^{J} \right).$$
(12.116)

Из-за присутствия дельта-символов Кронекера только одно слагаемое дает вклад в каждую сумму: p = -n в первом слагаемом и p = m + n во втором. Поэтому

$$[L_{m}^{\perp}, \alpha_{n}^{J}] = \frac{1}{2} (-n\alpha_{m+n}^{J} - n\alpha_{m+n}^{J}). \qquad (12.117)$$

Отсюда наш окончательный результат равен

$$\left[L_m^{\perp}, \alpha_n^J\right] = -n\alpha_{m+n}^J. \tag{12.118}$$

Модовое число в правой части есть сумма модовых чисел в левой части. Иначе и не может быть, так как основной коммутатор операторов α заменяет два оператора с противоположными модовыми числами на константу, и при этом полное модовое число сохраняется. Кроме того, сохраняется пространственный индекс оператора. Формула (12.118) выполняется для всех значений m, включая m = 0. Действительно, соотношение (12.100), которое мы использовали, дает L_0^{\perp} с точностью до константы, которая хотя и бесконечна, но не может повлиять на коммутатор. Однако полезно проверить это утверждение непосредственно.

- Упражнение-разминка 12.3. Вычислите $[L_0^{\perp}, \alpha_n^J]$, используя (12.105), и убедитесь, что (12.118) имеет место для m = 0.
- 🕑 Упражнение-разминка 12.4. Покажите, что

$$\left[L_m^{\perp}, \boldsymbol{x}_0^{I}\right] = -i\sqrt{2\alpha'} \,\alpha_m^{I}. \tag{12.119}$$

Рассмотрим теперь коммутатор двух операторов Вирасоро L_m^{\perp} и L_n^{\perp} . Вычисление довольно тонкое, и легко получить неправильные ответы. Мы избежим тонкостей, проверяя на каждом шагу вычислений, что наши выражения нормально упорядочены. Для этого начнем с переписывания оператора Вирасоро (12.100) в таком виде, что он дает правильный результат даже для L_0 . Для этого сумму распишем как

$$L_{m}^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{k \ge 0} \alpha_{m-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_{k}^{I} \alpha_{m-k}^{I}. \qquad (12.120)$$

Для любого значения m правая часть этого выражения нормально упорядочена: в первой сумме α справа есть оператор уничтожения (или нулевая мода), а во второй сумме α слева есть оператор рождения. Теперь производим вычисления:

$$egin{aligned} \left[L_m^{\perp},L_n^{\perp}
ight] &= rac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}\left[lpha_{m-k}^Ilpha_k^I,L_n^{\perp}
ight] + rac{1}{2}\sum_{k< 0}\left[lpha_k^Ilpha_{m-k}^I,L_n^{\perp}
ight] = \ &= rac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}\left[lpha_{m-k}^I,L_n^{\perp}
ight] lpha_k^I + rac{1}{2}\sum_{k< 0}lpha_k^I\left[lpha_{m-k}^I,L_n^{\perp}
ight] + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\alpha_{m-k}^{I}[\alpha_{k}^{I},L_{n}^{\perp}]+\frac{1}{2}\sum_{k<0}[\alpha_{k}^{I},L_{n}^{\perp}]\alpha_{m-k}^{I}.$$
 (12.121)

Вычисляя коммутаторы, получаем:

$$\begin{bmatrix} L_{m}^{\perp}, L_{n}^{\perp} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k \ge 0} (m-k) \alpha_{m+n-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_{k}^{I} \alpha_{m+n-k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k \ge 0} k \alpha_{m-k}^{I} \alpha_{k+n}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{k+n}^{I} \alpha_{m-k}^{I}.$$
(12.122)

Слагаемые первой строки правой части уравнения всегда нормально упорядочены. Слагаемые во второй строке в зависимости от значений m и n могут требовать упорядочения. Рассмотрим два случая: $m + n \neq 0$ и m + n = 0.

Случай $m + n \neq 0$. Все пары осцилляторов в правой части (12.122) коммутируют, так что мы получаем

$$\begin{bmatrix} L_{m}^{\perp}, L_{n}^{\perp} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \alpha_{m-k}^{I} \alpha_{k+n}^{I} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k-n) \alpha_{m+n-k}^{I} \alpha_{k}^{I} = \\ = (m-n) \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m+n-k}^{I} \alpha_{k}^{I}.$$
(12.123)

При переходе от первой ко второй строке мы сделали замену $k \to k - n$ во второй сумме. Так как $m + n \neq 0$, результирующий оператор не требует упорядочения и совпадает с L_{m+n}^{\perp} . Мы таким образом показали, что

$$\left[L_{m}^{\perp}, L_{n}^{\perp}\right] = (m-n)L_{m+n}^{\perp}, \quad m+n \neq 0.$$
 (12.124)

Коммутатор двух операторов Вирасоро есть оператор Вирасоро с модовым числом, равным сумме модовых чисел операторов, образующих коммутатор. Предыдущий результат неверен, если m + n = 0, в этом случае ответ другой. Тем не менее, как математическая конструкция, множество операторов L_n^{\perp} с $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих (12.124) *для всех* m и n, определяет интересную алгебру Ли (задача 12.5). Эта алгебра называется алгеброй Вирасоро без центрального расширения или алгеброй де Витта.

Случай m + n = 0. В этом случае пишем n = -m и формула (12.122) принимает вид

$$\begin{bmatrix} L_{m}^{\perp}, L_{-m}^{\perp} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k<0}^{\infty} (m-k) \alpha_{k}^{I} \alpha_{-k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_{m-k}^{I} \alpha_{k-m}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k<0}^{\infty} k \alpha_{k-m}^{I} \alpha_{m-k}^{I}.$$
(12.125)

Дтя того чтобы сравнить различные слагаемые, полезно поменять индексы суммирования, так, чтобы самый правый осциллятор всегда был α_k^I . Для этого полагаем $k \to -k$ во втором слагаемом первой строки, $k \to m + k$ в первом слагаемом второй строки и $k \to m - k$ во втором слагаемом второй строки:

$$\begin{bmatrix} L_{m}^{\perp}, L_{-m}^{\perp} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^{I} \alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{k=-m+1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^{I} \alpha_{k}^{I}. \quad (12.126)$$

Предположим теперь, без потери общности, что m > 0. Тогда все слагаемые оказываются нормально упорядоченными, за исключением тех, которые содержатся в подчеркнутой сумме, для нее $-m \leq k \leq 0$. Разбивая сумму, видим, что подчеркнутое слагаемое становится равным

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(m-k)\alpha_{k}^{I}\alpha_{-k}^{I} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m+k)\alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(m-k)[\alpha_{k}^{I},\alpha_{-k}^{I}] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(m-k)\alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m+k)\alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I}.$$

Вычисляя коммутатор и подставляя результат обратно в (12.126), получаем:

$$\left[L_{m}^{\perp}, L_{-m}^{\perp}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k)\alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k)\alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I} + (D-2)A(m), \quad (12.127)$$

где A(m) есть константа

$$A(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} k(m-k) = \frac{1}{2}m \sum_{k=1}^{m} k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} k^{2}.$$
 (12.128)

Чтобы вычислить A(m), нам понадобится следующий результат.

• Упражнение-разминка 12.5. Докажите по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6} (2m^3 + 3m^2 + m). \qquad (12.129)$$

С помощью (12.129) находим

$$A(m) = \frac{1}{4}m^2(m+1) - \frac{1}{12}(2m^3 + 3m^2 + m) = \frac{1}{12}(m^3 - m). \quad (12.130)$$

Разлагая суммы в (12.127) и подставляя значение A(m), находим

$$\left[L_{m}^{\perp}, L_{-m}^{\perp}\right] = 2m \left(\frac{1}{2}\alpha_{0}^{I}\alpha_{0}^{I} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k}^{I}\alpha_{k}^{I}\right) + \frac{1}{12}(D-2)(m^{3}-m).$$
(12.131)

Видно, что оператор в скобках есть L_0^{\perp} . Следовательно наш окончательный результат есть

$$[L_m^{\perp}, L_{-m}^{\perp}] = 2mL_0^{\perp} + \frac{1}{12}(D-2)(m^3-m).$$
 (12.132)

Этим завершается вычисление для случая m + n = 0.

Общее выражения для коммутатора двух операторов Вирасоро мы получим, если запишем формулу, переходящую в (12.124) при $m + n \neq 0$ и в (12.132) при m + n = 0. Это легко достигается, так что в результате

$$\left[L_{m}^{\perp},L_{n}^{\perp}\right] = (m-n)L_{m+n}^{\perp} + \frac{D-2}{12}(m^{3}-m)\delta_{m+n,0}. \qquad (12.133)$$

Множество операторов L_n^{\perp} с $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих (12.133), определяет алгебру Вирасоро с центральным расширением. Второе слагаемое в правой части предыдущей формулы называется центральным расширением. Это константа, или, точнее, константа, умноженная на тождественный оператор (оператор, действующий на любое состояние и дающий опять же это состояние). Говорят, что это слагаемое центрально, так как оно коммутирует со всеми другими операторами алгебры. Для m = 0 и $m = \pm 1$ центральное слагаемое обращается в нуль. Поэтому в коммутаторе $[L_1, L_{-1}]$ нет центрального слагаемого. Вероятно, алгебра Вирасоро есть самая важная алгебра в теории струн. Как мы увидим в разделе 12.5, при квантовании теории струн в калибровке светового конуса — это составляет предмет данной главы — операторы Вирасоро входят в определение лоренцевских генераторов.

Завершим этот раздел изучением того, как операторы Вирасоро действуют на координаты струны. Так как действие квантовых операторов выражается через коммутаторы, мы должны найти коммутатор оператора Вирасоро с оператором координаты $X^{I}(\tau, \sigma)$. Мы увидим, что операторы Вирасоро генерируют репараметризацию мирового листа.

Используя разложение координат (12.32), находим:

$$\begin{bmatrix} L_m^{\perp}, X^I(\tau, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m^{\perp}, x_0^I \end{bmatrix} + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos n\sigma \ e^{-in\tau} \begin{bmatrix} L_m^{\perp}, \alpha_n^I \end{bmatrix} =$$
$$= -i\sqrt{2\alpha'} \ \alpha_m^I - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \cos n\sigma \ e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I, \qquad (12.134)$$

где для вычисления коммутаторов мы использовали (12.118) и (12.119). Правую часть в предыдущем выражении можно записать как одну сумму:

$$egin{aligned} \left[L_{m}^{\perp},X^{I}(\tau,\sigma)
ight]&=-i\sqrt{2lpha'}\,\sum_{n\in\mathbb{Z}}\cos n\sigma\,e^{-in au}lpha_{m+n}^{I}=\ &=-i\sqrt{2lpha'}\,rac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}ig(e^{-in(au-\sigma)}+e^{-in(au+\sigma)}ig)lpha_{m+n}^{I}= \end{aligned}$$

$$=-i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)}+e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)}\right)\alpha_n^I,$$

пследнем шаге мы сделали замену $n \rightarrow n - m$. Окончательно

$$egin{aligned} \left[L_{m}^{1},X^{I}(\tau,\sigma)
ight]&=-rac{i}{2}\,e^{im(\tau-\sigma)}\sqrt{2lpha'}\,\sum_{n\in\mathbb{Z}}\,e^{-in(\tau-\sigma)}lpha_{n}^{I}-\ &-rac{i}{2}\,e^{im(\tau+\sigma)}\sqrt{2lpha'}\,\sum_{n\in\mathbb{Z}}\,e^{-in(\tau+\sigma)}lpha_{n}^{I}. \end{aligned}$$

Чтобы интерпретировать этот результат, необходимо выразить правую часть через производные от координат струны. Это делается с помощью (12.33):

$$\begin{bmatrix} L_m^{\perp}, X^{I}(\tau, \sigma) \end{bmatrix} = -\frac{i}{2} e^{im(\tau-\sigma)} (\dot{X}^{I} - X^{I'}) - \frac{i}{2} e^{im(\tau+\sigma)} (\dot{X}^{I} + X^{I'}) = = -i e^{im\tau} \cos m\sigma \, \dot{X}^{I} + e^{im\tau} \sin m\sigma \, X^{I'}.$$
(12.135)

Уравнение принимает вид

$$\left[L_{m}^{1}, X^{I}(\tau, \sigma)\right] = \xi_{m}^{\tau} \dot{X}^{I} + \xi_{m}^{\sigma} X^{I'}, \qquad (12.136)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{m}^{\tau}(\tau,\sigma) &= -i \, e^{im\tau} \cos m\sigma, \\ \boldsymbol{\xi}_{m}^{\sigma}(\tau,\sigma) &= e^{im\tau} \sin m\sigma. \end{aligned} \tag{12.137}$$

Мы утверждаем, что интерпретация (12.136) состоит в том, что операторы Вирасоро генерируют репараметризации мирового листа. В частности, они изменяют координаты τ и σ :

$$\begin{aligned} \tau &\to \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \\ \sigma &\to \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma), \end{aligned} \tag{12.138}$$

где ϵ — бесконечно малый параметр. Чтобы убедиться в этом, заметим, что тейлорово разложение дает

$$X^{I}(\tau + \epsilon \xi_{m}^{\tau}, \sigma + \epsilon \xi_{m}^{\sigma}) = X^{I}(\tau, \sigma) + \epsilon \left(\xi_{m}^{\tau} \dot{X}^{I} + \xi_{m}^{\sigma} X^{I'}\right) = X^{I}(\tau, \sigma) + \epsilon \left[L_{m}^{\perp}, X^{I}(\tau, \sigma)\right].$$
(12.139)

Это уравнение утверждает, что действие операторов Вирасоро на координаты струны порождает те же самые изменения, которые возникли бы в результат репараметризации мирового листа. Это мы и хотели показать.

Как выглядит репараметризация, порождаемая оператором L_0^{\perp} ? Полагая m = 0 в (12.137), находим $\xi_0^{\tau} = -i$ и $\xi_0^{\sigma} = 0$. В результате из (12.136) получаем

$$[L_0^{\perp}, X^I] = -i\partial_{\tau} X^I, \qquad (12.140)$$

и мы узнаем в этом выражении гейзенберговское уравнение движения для X^{I} . Действительно, L_{0}^{\perp} есть, с точностью до константы, гамильтониан струны, и сле-

довательно он должен порождать трансляции во времени. Кроме того, интересно заметить, что для всех $m \xi_m^{\sigma}$ обращается в нуль при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$. Это означает, что репараметризация, порождаемая операторами Вирасоро, не изменяет координаты концевых точек струны. Областью значений σ остается $[0, \pi]$.

Функции ξ_m^{τ} и ξ_m^{σ} в (12.137) не являются вещественными, так что при использовании их в (12.138) нарушается вещественность координат τ и σ . Эта трудность знакома из квантовой механики: вещественные преобразования порождаются антиэрмитовыми операторами, оператор импульса $\vec{p} = -i\nabla$ эрмитов и поэтому именно антиэрмитовая комбинация $i\vec{p} = \nabla$ порождает вещественные трансляции. Из операторов L_m^{\perp} и L_{-m}^{\perp} мы можем создать две антиэрмитовые комбинации

$$L_m^{\perp} - L_{-m}^{\perp}$$
 \varkappa $i(L_m^{\perp} + L_{-m}^{\perp}).$ (12.141)

Рассмотрим первую комбинацию. Из (12.136) следует, что параметрами преобразования, генерируемого оператором $(L_m^{\perp} - L_{-m}^{\perp})$, являются

$$\xi^{\tau} = \xi^{\tau}_{m} - \xi^{\tau}_{-m} = 2 \sin m\tau \cos m\sigma,$$

$$\xi^{\sigma} = \xi^{\sigma}_{m} - \xi^{\sigma}_{-m} = 2 \cos m\tau \sin m\sigma.$$
(12.142)

• Упражнение-разминка 12.6. Покажите, что параметры преобразования, генерируемые оператором $i(L_m^{\perp} + L_{-m}^{\perp})$, равны

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\tau} &= 2\cos m\tau \cos m\sigma, \\ \boldsymbol{\xi}^{\sigma} &= -2\sin m\tau \sin m\sigma. \end{aligned} \tag{12.143}$$

Мы обсудили операторы Вирасоро довольно детально: исследовали их точное определение и видели, как они влияют на вычисление масс; определили алгебру их коммутаторов и выяснили, как они действуют на координаты струны. В следуюшем разделе мы покажем, что операторы Вирасоро входят также в определение операторов, порождающих лоренцевские преобразования.

12.5. Лоренцевские генераторы

В главе 8 лоренцевская инвариантность действия струны позволила найти множество сохраняющихся на мировом листе токов $\mathcal{M}^{\alpha}_{\mu\nu}$, помеченных индексами μ и ν , $\mu \neq \nu$. Результирующие сохраняющиеся заряды $M_{\mu\nu}$ приведены в (8.65), и для открытых струн с $\sigma \in [0, \pi]$ они имеют вид

$$M_{\mu\nu} = \int_{0}^{\pi} \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\tau}(\tau,\sigma) \, d\sigma = \int_{0}^{\pi} \left(X_{\mu} \mathcal{P}_{\nu}^{\tau} - X_{\nu} \mathcal{P}_{\mu}^{\tau} \right) \, d\sigma. \tag{12.144}$$

Используя (12.1) и поднимая пространственно-временные индексы, имеем

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{0}^{\pi} \left(X^{\mu} \dot{X}^{\nu} - X^{\nu} \dot{X}^{\mu} \right) d\sigma. \qquad (12.145)$$

Построение подходящих квантовых операторов может оказаться деликатной зазачей, так что попробуем получить интуитивные представления, рассуждая классически. Явные разложения по модам X^{μ} и \dot{X}^{ν} приведены в уравнениях (9.56) и (9.57). Так как $M^{\mu\nu}$ точно не зависит от τ , для вычисления (12.145) достаточно выбрать независящие от τ слагаемые, возникающие в произведениях. Например,

$$X^{\mu}\dot{X}^{\nu} = x_{0}^{\mu}(\sqrt{2\alpha'}\,\alpha_{0}^{\nu}) + i2\alpha'\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{\mu}\alpha_{-n}^{\nu}\cos^{2}n\sigma + \dots, \qquad (12.146)$$

где многоточие означает зависящие от τ слагаемые, которые должны выпасть при вычислении $M^{\mu\nu}$. Из этого уравнения, а также аналогичного уравнения с переменой μ и ν местами находим, что после интегрирования (12.145) принимает вид

$$M^{\mu\nu} = x_0^{\mu} p^{\nu} - x_0^{\nu} p^{\mu} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^{\mu} \alpha_n^{\nu} - \alpha_{-n}^{\nu} \alpha_n^{\mu} \right).$$
(12.147)

Упражнение-разминка 12.7. Докажите справедливость (12.147).

В выражении (12.147) классические лоренцевские генераторы выражены через моды осцилляций. Мы должны выяснить, можем ли мы использовать это соотношение с α , рассматриваемыми как операторы, для определения квантовых лоренцевских генераторов. Мы будем использовать (12.147), чтобы *предложить* форму квантовых лоренцевских генераторов в теории струн в калибровке светового конуса. Так как каноническая структура теории в калибровке светового конуса непривычна, нет гарантий, что мы сможем построить согласованную систему квантовых лоренцевских генераторов. Неспособность построить квантовые лоренцевские генераторы будет означать, что квантовая теория струн не может быть физически лоренц-инвариантной.

В калибровке светового конуса наиболее деликатным квантовым лоренцевскием генератором является M^{-I} , так как координата X^- является довольно нетривиальной функцией поперечных координат. Согласованный оператор M^{-I} должен порождать лоренцевские преобразования координат струн, возможно, сопровождаемые репараметризацией мирового листа. Действительно, в более простом случае точечной частицы действие M^{-I} включает репараметризацию мирового листа. Генератор M^{-I} должен также удовлетворять коммутационному соотношению

$$\left[M^{-I}, M^{-J}\right] = 0. \tag{12.148}$$

Чтобы найти кандидата на M^{-I} , рассмотрим соотношение (12.147) и запишем

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I - x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-). \qquad (12.149)$$

Это лишь первое приближение, хотя оно и выглядит довольно удачно. Удовлетворительный оператор M^{-I} должен быть одновременно эрмитов и нормально упорядочен. Рассмотрим сначала эрмитовость. Первое слагаемое в правой части (12.149) эрмитово, так как x_0^- и p^I коммутируют. Однако второе слагаемое неэрмитово, так как x_0^I и p^- не коммутируют. Простое решение состоит в симметризации этого слагаемого:

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-).$$
(12.150)

Последнее слагаемое полностью эрмитово, так как $(\alpha_n^I)^{\dagger} = \alpha_{-n}^I$ и $(\alpha_n^-)^{\dagger} = \alpha_{-n}^I$. Рассмотрим теперь нормальное упорядочение. Все ли операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения? Да, так как осцилляторы α^- являются нормально упорядоченными операторами Вирасоро. Наконец, для полноты, мы должны дать определение p^- . Как утверждается в (12.106), p^- включает неопределенную константу *a*, отражающую трудности при упорядочении оператора Вирасоро L_0^{\perp} . Учитывая это определение и записывая другие осцилляторы с минусовыми индексами через операторы Вирасоро, находим:

$$M^{-I} = x_0^{-} p^{I} - \frac{1}{4\alpha' p^{+}} \left(x_0^{I} (L_0^{\perp} + a) + (L_0^{\perp} + a) x_0^{I} \right) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'} p^{+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(L_{-n}^{\perp} \alpha_n^{I} - \alpha_{-n}^{I} L_n^{\perp} \right).$$
(12.151)

Теперь, когда у нас есть кандидат на квантовый лоренцевский заряд M^{-I} , мы можем обсудить вычисление коммутатора $[M^{-I}, M^{-J}]$.

Многое стоит на кону в этом вычислении. На самом деле это одно из самых важных вычислений в теории струн. Наш лоренцевский заряд имеет два неопределенных параметра: размерность D пространства-времени, неявно содержащуюся в суммах по поперечным направлениям, и константу a, влияющую на массы частиц. Вычисление длинное и использующее многие выведенные ранее результаты, включая коммутационные соостношения для операторов Вирасоро. Мы не будем пытаться воспроизвести его здесь и приведем результат:

$$\begin{bmatrix} M^{-I}, M^{-J} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_{-m}^{I} \alpha_{m}^{J} - \alpha_{-m}^{J} \alpha_{m}^{J} \right) \times \\ \times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24} (D - 2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24} (D - 2) + a \right] \right\}.$$
(12.152)

Правая часть есть сумма слагаемых, каждое из которых содержит оператор $(\alpha_{-m}^{I}\alpha_{m}^{J} - \alpha_{-m}^{J}\alpha_{m}^{I})$ для различных значений *m*. Такие слагаемые не могут взаимно сократиться, так что приведенный коммутатор обращается в нуль тогда и только тогда, когда коэффициент в больших скобках обращается в нуль при всех положительных целых *m*:

$$m\left[1-\frac{1}{24}(D-2)\right]+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{24}(D-2)+a\right]=0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$
(12.153)

Достаточно исследовать это условие для m = 1 и m = 2, чтобы придти к выводу, что каждое из слагаемых в скобках должно просто обращаться в нуль. Имеем поэтому

$$1 - \frac{1}{24}(D-2) = 0 \quad \varkappa \quad \frac{1}{24}(D-2) + a = 0. \tag{12.154}$$

Первое уравнение определяет размерность пространства-времени:

$$D = 26.$$
 (12.155)

Тогда второе уравнение определяет постоянную а:

$$a = \frac{1}{24}(D-2) = -\frac{24}{24} = -1.$$
 (12.156)

Это значение *a* совпадает с полученным в (12.111) путем упорядочения L_0^{\perp} и использования дзета-функции для интерпретации возникающей бесконечности. Для будущих ссылок при a = -1 выражение для p^- в (12.106) принимает вид

$$2\alpha' p^{-} \equiv \frac{1}{p^{+}} (L_0^{\perp} - 1). \qquad (12.157)$$

Вдобавок, в силу (12.14) гамильтониан струны равен теперь

$$H = L_0^{\perp} - 1. \tag{12.158}$$

Здесь, конечно, L_0^{\perp} есть нормально упорядоченный оператор без дополнительных констант. Предыдущее уравнение есть точная версия уравнения (12.16).

Подведем итоги: мы выяснили, что из условия лоренц-инвариантности квантовой теории струн вытекает фиксированная размерность пространства-времени и постоянный сдвиг масс частиц. В теории суперструн аналогичное вычисление фиксирует размерность пространства-времени значением D = 10. Тот факт, что теория струн не может быть хорошей лоренц-инвариантной квантовой теорией для любой произвольной размерности, показывает, что теория струн очень жестко определена³⁾. Более того, так как размерность пространства-времени однозначно выбирается требованием согласованности, мы можем сказать, что теория струн предсказывает размерность пространства-времени!

12.6. Построение пространства состояний

Классическая открытая струна не является разумной физической теорией, так как предполагается, что массы состояний струны принимают непрерывный спектр значений. В классической теории только основное состояние является

³⁾ Друтими словами, теория струн исключает какой-либо произвол, не допускает каких-либо мозификаций или улучшений, т.е. является единственной допустимой теорией. — Прим. ред. перевода.

безмассовым, причем у этого состояния нет никаких меток о поляризации. В результате, классические открытые струны не имеют состояний, которые могли бы быть интерпретированы как фотоны. Чудо квантовой теории струн заключается в том, что обе эти проблемы решаемы. Непрерывный спектр исчезает после квантования. Предполагаемое фотонное состояние возникает потому, что сдвиг квадратов масс вниз приводит к безмассовым состояниям с индексами поляризации.

Начнем с введения основных состояний квантовой струны. Такая струна имеет тот же набор нулевых мод, что и точечная частица. У нас есть канонически сопряженные пары (x_0^I, p^I) и (x_0^-, p^+) . Поэтому, так же как для точечной частицы (см. (11.43)), мы вводим состояния

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle. \tag{12.159}$$

Эти состояния называются *основными состояниями* для всех значений импульсов, указанных индексами. Они также объявляются вакуумными состояниями для всех осцилляторов в теории струн. Таким образом, по определению, они уничтожаются всеми a_n^I :

$$a_n^I | p^+, \vec{p}_T \rangle = 0, \quad n \ge 1, \quad I = 2, \dots, 25.$$
 (12.160)

Как порождаются состояния из $|p^+, \vec{p}_T\rangle$? Мы просто действуем на них операторами рождения. Их бесконечно много и на них можно действовать бесконечно большое число раз любым конкретным оператором рождения. Список операторов рождения, находящихся в нашем распоряжении, бесконечен, но его можно организовать следующим образом:

Здесь поляризационный индекс I заключен в скобки. Произвольное базисное состояние $|\lambda\rangle$ пространства состояний можно записать как

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I^{\dagger}})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$
(12.162)

Здесь неотрицательное целое число $\lambda_{n,I}$ обозначает количество операторов рождения $a_n^{I^{\dagger}}$. Как можно видеть, состояние $|\lambda\rangle$ конкретизировано указанием того. сколько раз каждый из операторов в списке (12.161) действует на основное состояние. Информация передается списком неотрицательных целых чисел $\lambda_{n,I}$ для всех $n \ge 1$ и I = 2, ..., 25. Так как все операторы рождения коммутируют друг с другом, порядок, в котором они возникают, не имеет значения. Мы ограничиваемся случаем, когда состояния имеют только конечное число операторов

рождения, действующих на основные состояния. Это означает, что для каждого состояния $|\lambda\rangle$ только конечное число $\lambda_{n,I}$ отличны от нуля. Гильбертово пространство струны есть бесконечномерное векторное пространство: оно натянуто на бесконечный набор линейно независимых базисных состояний $|\lambda\rangle$, именно поэтому теория струн описывает бесконечное число различных частиц. Произвольное состояние в гильбертовом пространстве есть линейная суперпозиция базисных состояний $|\lambda\rangle$.

Чтобы понять физическое значение указанных состояний, рассмотрим оператор квадрата массы (12.108) с учетом найденого нами значения константы нормального упорядочения a = -1:

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n}^{I^{\dagger}} a_{n}^{I} \right).$$
 (12.163)

Возникшая в (12.163) сумма достаточно важна, чтобы получить собственное имя. Она называется оператором числа частиц N^{\perp} :

$$N^{\perp} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I^{\dagger}} a_n^{I}, \quad M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^{\perp}). \quad (12.164)$$

Таким образом, N^{\perp} есть сумма стандартных операторов числа частиц, по одному на каждый гармонический осциллятор в струне. Главное свойство N^{\perp} состоит в том, что его коммутатор с оператором рождения дает число мод этого оператора:

$$\left[\boldsymbol{N}^{\perp},\boldsymbol{a}_{n}^{I^{\dagger}}\right]=\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_{n}^{I^{\dagger}},\qquad(12.165)$$

в чем можно непосредственно убедиться. Кроме того

$$[N^{\perp}, a_n^I] = -na_n^I. \tag{12.166}$$

Так как оператор числа частиц нормально упорядочен, он аннигилирует основные состояния:

$$N^{\perp}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = 0.$$
 (12.167)

Заметим попутно, что оператор числа частиц N^{\perp} входит в определение L_0^{\perp} в (12.105). Можно записать

$$L_0^{\perp} = \alpha' p^I p^I + N^{\perp}. \tag{12.168}$$

Попрактикуемся немного в использовании N^{\perp} , вычислив действие этого оператора на некоторые базисные состояния. Рассмотрим, например, действие оператора числа частиц на $a_2^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle$:

$$N^{\perp}a_{2}^{I^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = [N^{\perp},a_{2}^{I^{\dagger}}]|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle + a_{2}^{I^{\dagger}}N^{\perp}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = 2a_{2}^{I^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$

Это состояние есть собственное состояние N^{\perp} с собственным значением 2. Попробуем рассмотреть более сложное состояние:

$$N^{\perp}a_{3}^{J^{\dagger}}a_{2}^{J^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = [N^{\perp},a_{3}^{J^{\dagger}}]a_{2}^{J^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle + a_{3}^{J^{\dagger}}N^{\perp}a_{2}^{J^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = 5a_{3}^{J^{\dagger}}a_{2}^{J^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$
(12.169)

Ясно, что когда оператор числа частиц действует на базисное состояние, собственное значение есть сумма волновых чисел операторов рождения, возникающих в состоянии. В общем случае, для базисного состояния $|\lambda\rangle$ в (12.162) имеем

$$N^{\perp}|\lambda\rangle = N_{\lambda}^{\perp}|\lambda\rangle$$
 при $N_{\lambda}^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n\lambda_{n,I}.$ (12.170)

Так как N^{\perp} аддитивно входит в оператор квадрата массы (12.164), мы видим, что осциллятор с волновым числом *n* вносит *n* единиц $1/\alpha'$ в M^2 . Собственные значения N^{\perp} являются целыми неотрицательными числами, так что для всех состояний струн $M^2 \ge -1/\alpha'$.

В пространстве состояний открытой струны естественно определяется внутреннее произведение⁴⁾. Для определения этого внутреннего произведения вводим бра-векторы $\langle p^+, \vec{p}_T |$, которые эрмитово сопряжены кет-векторам $|p^+, \vec{p}_T \rangle$, и объявляем, что

$$\langle p'^+, \vec{p}_T' | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta(p'^+ - p^+) \delta(\vec{p}_T' - \vec{p}_T).$$
 (12.171)

Дельта-функции необходимы, так как эрмитовость операторов p^+ и \vec{p}_T гарантирует, что указанное произведение обращается в нуль, за исключением случая, когда собственные значения p^+ и \vec{p}_T состояний тождественны. Для базисного состояния $|\lambda\rangle$ в (12.162) мы вводим эрмитово сопряженное бра-состояние $\langle\lambda|$. определенное как

$$\langle \lambda | = \langle p^+, \vec{p}_T | \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^I)^{\lambda_{n,I}}.$$
 (12.172)

Эрмитово сопряженное к $|\lambda\rangle b$ состоянию, где b — число, есть просто $b^*\langle\lambda|$. Внутреннее произведение (λ', λ) между двумя базисными состояниями $|\lambda'\rangle$ и $|\lambda\rangle$ определяется как

$$(\lambda', \lambda) = \langle \lambda' | \lambda \rangle.$$
 (12.173)

Для произвольных состояний внутреннее произведение определяется утверждением, что оно линейно по второму аргументу и антилинейно по первому аргументу. Чтобы вычислить $\langle \lambda' | \lambda \rangle$, нужно перенести операторы уничтожения в $\langle \lambda' \rangle$ к основному состоянию в $|\lambda\rangle$, а операторы рождения в $|\lambda\rangle - \kappa$ основному состоянию в $\langle \lambda' |$. При переносе этих операторов друг через друга мы будем использовать коммутационные соотношения (12.73), которые возникают в стандартной форме, так как переносимые операторы уничтожения находятся левее операторов рождения. Если какой-нибудь коммутатор не равен нулю, он равен +1, поэтому, упросив выражение, мы получим положительное число, умножен-

⁴⁾ То же что скалярное произведение в полном линейном векторном пространстве. — Прим. рес перевода.

ное на «основное» произведение (12.171). Например, возьмем $|\lambda'\rangle = a_1^{I^{\dagger}} |p'^+, \vec{p}_T'\rangle$ н $|\lambda\rangle = a_1^{J^{\dagger}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$. Тогда

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = \langle p'^+, \vec{p}_T' | a_1^I a_1^{J^\dagger} | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta^{IJ} \delta(p'^+ - p^+) \vec{\delta}(\vec{p}_T' - \vec{p}_T), \qquad (12.174)$$

где мы получили ответ, заменив произведение осцилляторных операторов их коммутатором и используя (12.171). Так как дельта-функции положительны, мы заключаем, что все базисные состояния $|\lambda\rangle$ имеют положительную норму: $(\lambda, \lambda) > 0$. Внутреннее произведение не обращается в нуль, так как операторы уничтожения, действующие на бра, спариваются с операторами рождения, действующими на кет. Технически из-за дельта-функций (λ, λ) бесконечно, но эта бесконечность становится безопасной, когда мы рассматриваем непрерывные суперпозиции состояний. Используя линейность и антилинейность внутренне-го произведения, заключаем, что любое состояние имеет положительную норму. Это согласуется с нашим утверждением, что пространство состояний открытой струны является гильбертовым пространством.

• Упражнение-разминка 12.8. Объясните, почему $(\lambda', \lambda) = 0$ всякий раз, когда базисные состояния $|\lambda'\rangle$ и $|\lambda\rangle$ различны.

Для каждого состояния $|\lambda\rangle$ в (12.162) мы можем построить соответствующее независящее от времени физическое состояние

$$\exp\left(-i(L_0^{\perp}-1)\tau\right)|\lambda\rangle, \qquad (12.175)$$

которое удовлетворяет уравнению Шрёдингера с гамильтонианом (12.158). При квантовании струны на световом конусе зависящее от времени состояние является физическим, если оно удовлетворяет уравнению Шрёдингера. В следующем разделе мы рассмотрим более общие суперпозиции зависящих от времени состояний.

Теперь мы готовы более детально обсуждать конкретные состояния. Начнем с простейших основных состояний. Это единственные состояния, для которых $N^{\perp} = 0$. Как и в случае точечной частицы, состояния $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ являются одночастичными состояниями скалярного поля. Это состояния скалярной частицы. Чему равна масса этой скалярной частицы? Чтобы ответить на вопрос, подействуем на состояния оператором M^2 :

$$M^{2}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = \frac{1}{\alpha'}(-1+N^{\perp})|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle = -\frac{1}{\alpha'}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$
(12.176)

Значение M^2 полностью обязано своим происхождением константе упорядочения. Если эта константа равна нулю, то и массы должны быть равны нулю. На самом деле сущестование безмассовых скаляров сомнительно — в природе они не наблюдались. Однако результат выглядит странно: $M^2 = -1/\alpha' < 0$. Волновая функция состояния указывает на то же самое: $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ может быть поставлена в соответствие с классическим скалярным полем. Такое скалярное

поле, обладающее отрицательным квадратом массы, называется *тахионом*⁵⁾. Отрицательный квадрат массы есть признак нестабильности: потенциал скалярного поля ведет себя как $V = \frac{1}{2}M^2\phi^2$ (см. (10.2)), так что отрицательный квадрат масс M^2 просто означает, что стационарная точка $\phi = 0$ нестабильна. При $\phi \neq 0$, можно уменьшить энергию. Мы рассмотрим этот вопрос подробнее в разделе 12.8.

Рассмотрим теперь возбужденные состояния с наинизшим значением M^2 . Они возникают тогда, когда N^{\perp} принимает наименьшее возможное ненулевое значение $N^{\perp} = 1$. Примечательно, что с учетом константы упорядочения состояния с $N^{\perp} = 1$ имеют $M^2 = 0$. Это безмассовые состояния, если бы константа упорядочения принимала нецелые значения, в квантовой теории струн не было бы безмассовых состояний. Для того чтобы получить состояния с $N^{\perp} = 1$, нам нужно подействовать любым из поперечных осцилляторов $a_1^{I^{\dagger}}$ на основные состояния $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Это означает, что у нас имеется D - 2 = 24 безмассовых состояния:

$$a_1^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 a_1^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$$
 (12.177)

Произвольное безмассовое состояние есть линейная комбинация указанных выше базисных состояний:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I^{\dagger}} | p^+, \vec{p}_T \rangle.$$
 (12.178)

Это выражение может напомнить состояния фотона (10.88), которые мы нашли при анализе максвелловской теории в калибровке светового конуса:

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I^{\dagger}} |\Omega\rangle.$$
 (12.179)

Мы можем сопоставить состояния. В обоих случаях ξ_1 есть произвольный поперечный вектор, а между состояниями существует соответствие:

$$a_1^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{I^{\dagger}}|\Omega\rangle.$$
 (12.180)

Оба состояния имеют в точности одинаковые лоренцевские индексы, они переносят одинаковые импульсы и имеют одинаковую массу. Это доказывает примечательный результат. Квантовые состояния теории открытых струн включают состояния фотонов! Мы начали изучать теорию открытых струн с действия Намбу—Гото. В этом действии нигде нет и намека на электромагнитную калибровочную инвариантность. Тем не менее, мы показали, что теория открытых

⁵⁾ Тахионы — гипотетические частицы, скорость которых и превышает скорость света в вакууме c: u > c; тогда из соотношения $M^2 = E^2 c^{-4} - p^2 c^{-2} = (1 - u^2 c^{-2}) E^2 c^{-4}$ следует, что $M^2 < 0$. Существование свободных тахионов противоречит принципу причинности. Однако участие тахионов в таких процессах, как обмен виртуальными частицами или перенос возбуждений внутри частиц как протяженных объектов (теория солитонов, теория струн, нелокальная теория поля) не приводит к противоречию с основными принципами. — Прим. ред. перевода.

струн содержит возбуждения максвелловского поля. Этот ошеломляющий реэльтат в значительной степени обязан сдвигу масс, с которым мы сталкиваемся при переходе от классической к квантовой теории открытой струны.

Полезно еще раз повторить этот результат. В главе 10 мы показали, что квантовые состояния свободной теории Максвелла — состояния фотонов — являются (D - 2) безмассовыми состояниями, помеченными поперечным лоренцевскием индексом. Этот индекс важен: он указывает, что состояния преобразуются друг в друга под действием лоренцевских преобразований. Именно такого рода состояния возникли при квантовании струны. К тому же, совокупность волновых функций $\psi_I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$, связанных с состояниями (12.177), сочетается с компонентами A_I максвелловского калибровочного поля. Наконец, уравнение Шрёдингера 11я этих волновых функций соответствует уравнению максвелловского поля в калибровке светового конуса, мы покажем это в следующем разделе.

Завершим раздел рассмотрением состояний с $N^{\perp} = 2$. Они строятся действием на основные состояния операторов $a_1^{I^{\dagger}}a_1^{J^{\dagger}}$ или $a_2^{I^{\dagger}}$. Число состояний, построенных с помощью $a_1^{I^{\dagger}}a_1^{J^{\dagger}}$, равно числу независимых элементов в симметричной матрице размера $(D-2) \times (D-2)$, т. е. $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)$; число состояний, построенных с помощью $a_2^{I^{\dagger}}$, равно (D-2). Отсюда полное число состояний равно

$$\frac{1}{2}(D-2)(D-1) + (D-2) = \frac{1}{2}(D-2)(D+1)$$
(12.181)

и их квадрат массы дается значением $M^2 = 1/\alpha'$. Такие частицы известны как массивные тензорные, и при D = 26 существует всего 324 таких состояния. Наши результаты для всех состояний с $N^{\perp} \leq 2$ собраны в табл. 12.1. Формула, полезная для подсчета состояний при больших значениях N^{\perp} , выведена в задаче 12.11. Например, эта формула показывает, что при $N^{\perp} = 3$, действуя на основные состояния операторами $a_1^{I^{\dagger}}a_1^{J^{\dagger}}a_1^{K^{\dagger}}$, вы получите 2600 состояний.

Каждое состояние $|\lambda\rangle$ квантовой струны представляет одночастичное состояние с конечным импульсом. Так, $a_1^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle$ есть однофотонные состояния, а $a_1^{I^{\dagger}}a_J^{I^{\dagger}}|p^+, \vec{p}_T\rangle$ — одночастичные тензорные состояния (но *не* двухфотонные со-

Таблица 12.1

N⊥	λ)	$\alpha' M^2$	Число состояний	Волновая функция
0	$ p^+, \vec{p}_T angle$	-1	1	$\psi(au, p^+, ec{p}_T)$
1	$a_1^{I^\dagger} p^+, ec{p}_T angle$	0	<i>D</i> – 2	$\psi_I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$
2 🖄	$a_1^{I^\dagger}a_1^{J^\dagger} p^+,ec{p}_T angle$	1	$\frac{1}{2}(D-2)(D+1)$	$\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$
	$a_2^{I^\dagger} p^+, ec{p}_T angle$		-	$\psi_I(\tau, \boldsymbol{p}^+, \vec{\boldsymbol{p}}_T)$

Перечень состояний открытой струны с $N^{\perp}\leqslant 2$



Рис. 12.1. Неориентированная открытая струна есть квантовое состояние, которое можно получить суперпозицией состояний, отличающихся только своей ориентацией. Неориентированная струна инвариантна относительно обращения ориентации

стояния). Каждое состояние $|\lambda\rangle$ имеет дискретные индексы $\lambda_{n,I}$ и непрерывные метки p^+ и \vec{p}_T . Каждому множеству дискретных индексов соответствует одна волновая функция, как показано в таблице. Соответственно, для каждого набора дискретных индексов имеется одно квантовое поле. Многочастичные состояния описываются с помощью этих квантовых полей. Теория полного квантового поля, описывающего всю совокупность квантовых полей, связанных с одночастичные ми состояниями струны, называется *струнной теорией поля*.

Квантовая теория, которую мы до сих пор обсуждали, — это теория ориентированных открытых струн. Квантовый оператор $X^{I}(\tau, \sigma)$ содержит параметр $\sigma \in [0, \pi]$, и следовательно ориентацию, определяемую как направление возрастания σ . Возможно построить теорию неориентированных струн (задача 12.12). Ключевая идея состоит в том, что можно определить оператор Ω , являющийся симметрией теории (он коммутирует с гамильтонианом) и обращающий ориентируемость струн. Теория неориентированных струн получается ограничением спектра ориентированной струны на множество состояний, которые инвариантны относительно действия Ω . Неориентированные струны — это не струны без ориентации: их следует рассматривать как квантовую суперпозицию состояний, которая, как целое, инвариантна относительно обращения ориентации. Как показано на рис. 12.1, неориентированное состояние можно представить как суперпозицию состояния струны и того же самого состояния с противоположной ориентацией.

12.7. Уравнения движения

Чтобы конкретизировать соответствие между состояниями струн и квантовыми полями, рассмотрим уравнения Шрёдингера, которым удовлетворяют волновые функции струн. Мы видели в разделе 11.4, что уравнение Шрёдингера для волновой функции точечной частицы изоморфно классическому полевому уравнению скалярного поля. Мы хотим повторить этот анализ для струны.

Чтобы построить из базисных состояний струны произвольные зависящие от времени состояния, нам нужны волновые функции. Рассмотрим, например, базисное состояние

$$a_{n_1}^{I_1^{\mathsf{I}}} \dots a_{n_k}^{I_k^{\mathsf{I}}} | p^+, \vec{p}_T \rangle.$$
 (12.182)

Произвольное зависящее от времени состояние, построенное суперпозицией баэнсных состояний, имеет вид

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \psi_{I_1...I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_{n_1}^{I_1^\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$
(12.183)

Поляризационные индексы, которые несут осцилляторы, совпадают с индексными метками волновой функции $\psi_{I_1...I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$. Это уравнение есть струнный аналог уравнения (11.48), описывающего произвольное зависящее от времени состояние точечной частицы. Для произвольных тахионных состояний функция (12.183) становится равной

$$|\mathsf{тахион}, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \,\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (12.184)$$

1ля фотонных состояний пишем

$$|\phi_{0}\tau_{0}\mu_{1},\tau\rangle = \int dp^{+} d\vec{p}_{T} \psi_{I}(\tau,p^{+},\vec{p}_{T})a_{1}^{I^{\dagger}}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle. \qquad (12.185)$$

Уравнение Шрёдингера, которым описываются произвольные состояния (12.183), имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\Psi,\tau\rangle = H|\Psi,\tau\rangle.$$
 (12.186)

Здесь гамильтониан равен

$$H = (L_0^{\perp} - 1) = \alpha' p^I p^I + N^{\perp} - 1 = \alpha' (p^I p^I + M^2), \qquad (12.187)$$

при преобразовании мы использовали (12.158) и (12.168). Используя явное выражение состояний (12.183), из уравнения (12.186) получаем

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_{I_1\ldots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^{\perp} - 1)\psi_{I_1\ldots I_k}, \qquad (12.188)$$

где N^{\perp} обозначает собственное значение оператора N^{\perp} в состоянии (12.183).

Упражнение-разминка 12.9. Покажите, что уравнение (12.188) возникает из уравнения Шрёдингера (12.186). Аналогичные вычисление были сделаны нами при выводе (11.53).

Для тахионных состояний (12.184) $N^{\perp} = 0$ и мы получаем

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = (\alpha'p^Ip^I - 1)\psi. \qquad (12.189)$$

Для фотонных состояний (12.185) $N^{\perp} = 1$ и мы получаем

$$i\frac{\partial\psi_I}{\partial\tau} = \alpha' p^J p^J \psi_I. \qquad (12.190)$$

Сравним теперь эти уравнения Шрёдингера с соответствующими классическими полевыми уравнениями. Мы показали в главе 10, что уравнение скалярного поля

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0.$$
 (12.191)

может быть записано аналогично уравнению (10.30):

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2)\right)\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0.$$
(12.192)

Полагая $x^+ = 2 \alpha' p^+ \tau$, имеем теперь

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\alpha'(p^{I}p^{I}+m^{2})\right)\phi(\tau,p^{+},\vec{p}_{T})=0.$$
(12.193)

при $m^2 = -1/\alpha'$ это уравнение в точности совпадает с (12.189), что подтверждает отождествление тахиона со скалярным полем. Возможно, еще удивительнее то, что уравнение (12.193) структурно эквивалентно уравнению Шрёдингера (12.188), которому удовлетворяет *любая* волновая функция струны: единственная разница состоит в том, что волновые функции несут индексы. В результате, если соответствие должно сохраниться, классическое уравнение поля, ассоциированного с любым состоянием струны, должно иметь вид (12.191), где поле несет ряд индексов.

Это может показаться странным: например, разве максвелловские классические полевые уравнения не более сложны, чем полевое уравнение для скаляра? Только не в калибровке светового конуса. Мы отмечали это ранее: уравнение (10.83) показало, что поперечные компоненты калибровочного поля удовлетворяют уравнению $p^2 A^I(p) = 0$. Этот уравнение имеет вид (12.191) с $m^2 = 0$. Шаги. приводящие от (12.191) к (12.193), в применении к $\partial^2 A^I = 0$ дают

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \alpha' p^J p^J\right) A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0.$$
(12.194)

Это классическое полевое уравнение для максвелловского поля находится в полном соответствии с уравнением Шрёдингера (12.190) для волновых функций с $N^{\perp} = 1$.

12.8. Тахионы и распад D-бран

Мы завершаем эту главу обсуждением физики тахиона. Ранее мы объяснили. что тахионное состояние имеет наименьшее возможное значение M^2 :

$$M^2|p^+,\vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}|p^+,\vec{p}_T\rangle. \qquad (12.195)$$

Ассоциированное с этим состоянием поле есть скалярное поле. Что означает для этого скаляра отрицательное значение M^2 ? Физика тахиона открытой струны стала загадкой почти сразу после появления теории струн. Ряд начавшихся



Рис. 12.2. Потенциал $V(\phi) = M^2 \phi^2/2$ отвечает положительным значениям квадрата массы, точка $\phi = 0$ — устойчивая критическая точка (*a*). Потенциал $V(\phi) = M^2 \phi^2/2$ отвечает отрицательным значениям квадрата массы, точка $\phi = 0$ — неустойчивая критическая точка (б)

в 1999 г. исследований существенно прояснили роль тахиона как открытой струны. Обсудим то, что стало известно.

Первая наша цель — обсудить нестабильность тахионов. Для этого рассмотрим лагранжиан классического скалярного поля в духе раздела 10.2. В общем случае

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - V(\phi), \qquad (12.196)$$

где $V(\phi)$ есть потенциал скалярного поля. Для пространственно однородной полевой конфигурации $\nabla \phi = 0$, и плотность потенциальной энергии описывается потенциалом $V(\phi)$. Вытекающее из вариационного принципа уравнение движения имеет вид

$$\partial^2 \phi - V'(\phi) = 0,$$
 (12.197)

где штрих означает производную по аргументу. Более явно

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi - V'(\phi) = 0. \qquad (12.198)$$

() Упражнение-разминка 12.10. Докажите, что уравнение (12.197) возникает из вариации действия $S = \int d^D x \mathcal{L}$.

Чтобы понять нестабильность тахионной скалярной теории поля, достаточно рассмотреть свободную часть тахионного лагранжиана; взаимодействия будут описаны позже. Для теории свободного скалярного поля потенциал $V(\phi)$ принимает вид

$$V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2.$$
 (12.199)

Здесь M^2 есть квадрат массы скалярного поля (при включении взаимодействий этот потенциал изменится). Когда $M^2 > 0$, потенциал $V(\phi)$ имеет стабильный минимум при $\phi = 0$. Когда $M^2 < 0$, потенциал $V(\phi)$ имеет нестабильный

максимум при $\phi = 0$ (рис. 12.2). Мы можем понять следствия включения таких потенциалов, изучив уравнение движения поля. Используя конкретную форму *V*, получаем из уравнения (12.198)

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi - M^2 \phi = 0. \qquad (12.200)$$

Чтобы упростить наш анализ, предположим, что поле ϕ зависит только от времени. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + M^2\phi(t) = 0. \qquad (12.201)$$

Если $M^2 = M \cdot M > 0$, решения этого уравнения представляют осцилляции:

$$\phi = A \cos{(Mt)} + B \sin{(Mt)} = C \sin{(Mt + \alpha_0)}. \quad (12.202)$$

Это есть интерпретация скалярного поля с «хорошим» квадратом массы. Скалярное поле может «находиться» в точке $\phi = 0$ всегда, так как это стабильная точка: если поле смещается, оно просто осциллирует вокруг $\phi = 0$.

Рассмотрим теперь тахион, являющийся примером скаляра с отрицательным квадратом массы. В этом случае удобно записать $M^2 = -\beta^2 = -\beta \cdot \beta$, и уравнение (12.201) принимает вид

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} - \beta^2\phi(t) = 0, \qquad (12.203)$$

с $\beta^2 > 0$. На этот раз решения имеют вид

$$\phi(t) = A \operatorname{ch} (\beta t) + B \operatorname{sh} (\beta t). \qquad (12.204)$$

Рассмотрим, например, решение $\phi(t) = \text{sh}(\beta t)$. В нулевой момент времени поле ϕ равно нулю, но при стремлении времени к бесконечности ϕ также стремится к бесконечности. Можно представить это так, как будто поле скатывается в правую сторону потенциала на рис. 12.26. На самом деле для любого нетривиального решения ϕ обязательно достигает бесконечного абсолютного значения либо в далеком прошлом, либо в далеком будущем. Тахион может находиться при $\phi = 0$ всегда, используя тривиальное решение $\phi(t) = 0$, но любое бесконечно малое возмущение приведет его к процессу стремительного скатывания. Значение $\phi = 0$ есть разрешенная критическая точка, но она нестабильна. Невозможно реалистично представить себе, что тахион будет оставаться вблизи $\phi = 0$ бесконечно большой промежуток времени. В этом состоит нестабильность теории, содержащей тахион. Так как квадрат массы тахиона открытой струны равен ($1/\alpha'$), свободная часть тахионного потенциала равна

$$V_{\rm rax}^{\rm cBo6} = \frac{1}{2\alpha'}\phi^2.$$
 (12.205)

Для произвольных потенциалов $V(\phi)$ можно использовать механическую аналогию. Можно представить себе пространственно однородное скатывание скалярного поля в потенциале $V(\phi)$, рассматривая движение частицы в потенциале

V(x), где заменяющая ϕ переменная x есть координата вдоль траектории движения. Действительно, соответствующие уравнения совпадают. Для произвольного потенциала $V(\phi)$ однородное скатывание определяется уравнением

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -V'(\phi), \qquad (12.206)$$

в то время как скатывание частицы единичной массы в потенциальном поле V(x) управляется вторым законом Ньютона:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x). \tag{12.207}$$

Наличие тахиона сигнализирует о нестабильности теории открытых струн. Точнее, существует определенная нестабильность в теории открытых струн на фоне заполняющей пространство D25-браны. Ясно, что мы должны попытаться понять судьбу этой нестабильности: если тахион начинает скатываться, то когда он остановится? В течение некоторого времени мало кто соглашался с тем, что это срочный вопрос. Приводились аргументы, что наряду с отсутствием фермионов тахион — еще одна хорошая причина рассматривать теорию открытых струн нереалистичной и не заслуживающей больших усилий. Некоторые ученые считали тахион знаком того, что теория бозонных струн просто противоречива. В течение ряда лет казалось, что теории суперструн — тип теорий струн, включающих фермионы, — успешно избегают тахионов. Однако последующие исследования показали, что тахионы могут возникать, когда мы строим реалистичные модели, основанные на суперструнах. Стало ясно, что мы должны попытаться осмыслить тахионы.

Теория открытых струн, имеющаяся в наших руках, — это теория струн на D25-бране, заполняющей все пространственные измерения. D25-брана — это физический объект, а не просто математическая конструкция, и поэтому она обладает постоянной плотностью энергии T_{25} , которую на самом деле можно точно вычислить. Теперь можно сформулировать основную идею: теория открытых струн есть, в определенном смысле, теория самой D25-браны! Мы рассматривали тахионы как состояния струн, прикрепленных к D-бране. Оказывается, что D-брана с прикрепленными открытыми струнами есть возбужденное состояние D-браны. Если это так, тахионное состояние является возбуждением, которое может понизить энергию D-браны. Существование тахиона говорит нам, что D25-брана нестабильна!

Так как тахион описывает физику D25-браны, плотность энергии этой браны дает вклад в потенциальную энергию системы, и она должна быть включена в тахионных потенциал. В результате потенциал в (12.205) изменяется и становится равным

$$V_{\rm rax}(\phi) = T_{25} - \frac{1}{2\alpha'}\phi^2 + \beta\phi^3 + \dots \qquad (12.208)$$

Мы включили в тахионный потенциал кубический член и представили все остальные возможные слагаемые многоточием. Все кубические члены или члены более



Рис. 12.3. Тахионный потенциал открытой струны, закрепленной на D25-бране. Точка $\phi = 0$ соответствует нестабильной D-бране. В критической устойчивой точке ϕ^* струна имеет нулевую энергию

высокого порядка по полю соответствуют эффектам взаимодействий. Указанный потенциал корректно описывает наши утверждения относительно D25-браны. Нестабильная точка $\phi = 0$ представляет мир с D25-браной, и поэтому имеет плотность энергии T_{25} . Чтобы узнать, что происходит, когда тахион начинает скатываться вниз, нам нужно вычислить полный тахионный потенциал $V_{\text{тах}}(\phi)$.

Прежде чем вычислять этот потенциал, можно попытаться предвидеть результат. Если D25-брана нестабильна, она распадется. Стабильная конечная точка этого процесса будет мир без D25-браны. Если это так, то тахионный потенциал должен иметь стабильную критическую точку при некотором $\phi = \phi^*$ с $V_{\text{rax}}(\phi^*) = 0$. Эта стабильная критическая точка будет представлять фон с нулевой энергией, тот фон, где D25-брана, которую сделал нестабильной тахион, полностью исчезла! Ожидаемая форма тахионного потенциала показана на рис. 12.3.

Это предположение теперь убедительно проверено. Используя полевую теорию открытых струн, был вычислен полный тахионный потенциал и, что примечательно, оказалось возможным указать критическую точку с нулевой энергией. Учитывая этот результат, а также дополнительное свидетельство, полученное другим способом, физики показали, что тахионная нестабильность есть нестабильность D25-браны.

Что происходит, когда тахион скатывается вниз к стабильному минимуму и D25-брана исчезает? Все открытые струны должны также исчезнуть, так как концевые точки открытой струны прикреплены к D-бранам. Однако замкнутые струны могут существовать при отсутствии D-бран. Вся энергия, первоначально запасенная в D25-бране, переходит в замкнутые струны. В стабильной критической точке ϕ^* все частицы, которые возникли как возбуждения открытых струн. включая тахион, должны исчезнуть. Это показывает, что теория вблизи ϕ^* довольно сложна. Вакуумная струнная теория поля есть попытка сформулировать теорию струн вблизи вакуума ϕ^* , где исчезают как D-браны, так и открытые струны.

Появились новые интересные факты о тахионах и D-бранах. Было показано. что Dp-браны с p < 25 сами являются большими когерентными возбуждениями
тахионного поля D25-браны. В определенном смысле, D-браны сделаны из татвонов! Это также верно с минимальными модификациями в теории суперструн. В этой теории определенные D-браны несут заряд, и поэтому сохранение заряда обеспечивает их стабильность относительно распада. На самом деле в теории открытых струн на фоне любой такой D-браны нет тахионов. Однако, конфитурация, состоящая из D-браны и совпадающей противоположно заряженной инти-D-браны, нестабильна: два объекта могут аннигилировать без нарушения сохранения заряда. Открытые струны, протянутые от D-браны к анти-D-бране, содержат тахион, а именно, суперструнный тахион! Этот тахион описывает нестабильность пары D-брана/анти-D-брана. Изучение аннигиляции D-брана/анти-D-брана играет важную роль в использованнии теории струн для описания ранней Вселенной. Таким образом, возможно, разрешится загадка тахионов, сыгравших важную роль в струнной космологии.

Задачи

Задача 12.1. Уравнение Гейзенберга для плотности импульса

Мы проверили в (12.21), что $\dot{X}^{I} = 2\pi \alpha' \mathcal{P}^{\tau I}$ вытекает из уравнения Гейзенберга $i\dot{\xi} = [\xi, H]$, когда $\xi = X^{I}$. Вычислите $\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}$ и используйте этот результат для проверки того, что классическое уравнение движения $\ddot{X}^{I} - X^{I''} = 0$ выполняется как операторное уравнение.

Задача 12.2. Явная проверка обращения в нуль ряда коммутаторов

Используя разложение по модам (12.32) и коммутационные соотношения для операторов α , убедитесь в явном виде, что выполняется уравнение (12.26):

$$\left[X^{I'}(\tau,\sigma),X^{J'}(\tau,\sigma')\right] = \left[\dot{X}^{I}(\tau,\sigma),\dot{X}^{J}(\tau,\sigma')\right] = 0.$$

Задача 12.3. Явная проверка основного коммутатора

(а) Используя явное разложение по модам для X^{I} и $\mathcal{P}^{\tau J}$, а также коммутационные соотношения (12.45) и (12.54), покажите, что

$$[X^{I}(\tau,\sigma),\mathcal{P}^{\tau J}(\tau,\sigma')] = i\eta^{IJ}\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\cos n\sigma\cos n\sigma'.$$

(б) Если предыдущий результат согласуется с выражением (12.10), то мы должны иметь

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos n\sigma \cos n\sigma'.$$
 (1)

Это выражение следует из полноты системы функций $\cos n\sigma \, c \, n \ge 0$ на интервале $\sigma \in [0, \pi]$. Полноту легко объяснить: любая функция $f(\sigma)$, определенная на интервале $\sigma \in [0, \pi]$ может быть продолжена на интервал $\sigma \in [-\pi, \pi]$, если допустить $f(-\sigma) \equiv f(\sigma)$ для $\sigma \in [0, \pi]$. Получившаяся функция есть четная функция σ и на основании основного свойства фурьеразложения она может быть разложена по косинусам. Поэтому мы можем представить любую функцию $f(\sigma) \in \sigma \in [0, \pi]$ в виде

$$f(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\sigma.$$
 (2)

Докажите формулу (1), вычислив A_n и подставив результат обратно в правую часть (2).

Задача 12.4. Аналитическое продолжение дзета-функции

Рассмотрим определение гамма-функции

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{s-1}.$$

Положим в этом интеграле $t \to nt$; используя полученное выражение, докажите, что

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \, \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \text{Re}\,(s) > 1. \tag{1}$$

Проверьте также разложение при малых t

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + \mathcal{O}(t^2).$$
⁽²⁾

Используя предыдущее уравнение, покажите, что при Re(s) > 1

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_{0}^{\infty} dt \, t^{s-1} \left(\frac{1}{e^{t}-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)} + \int_{0}^{\infty} dt \, \frac{t^{s-1}}{e^{t}-1} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)} + \frac{1}{2s} + \frac$$

Объясните, почему правая сторона предыдущего равенства хорошо определена при Re (s) > -2. Отсюда следует, что правая сторона определяет аналитическое продолжение левой стороны к Re (s) > -2. Вспомните полюсную структуру функции $\Gamma(s)$ (задача 3.6) и покажите, что $\zeta(0) = -1/2$ и $\zeta(-1) = -1/12$.

Задача 12.5. Алгебра Вирасоро является алгеброй Ли

Векторное пространство L с элементами x, y, z, ... и билинейной скобкой $[\cdot, \cdot]$. которая из двух элементов L воспроизводит какой-либо элемент L, есть алгебра Ли, если выполнены два следующих условия.

- 1) антисимметрия: [x, y] = -[y, x] для всех элементов x и y из L;
- 2) тождество Якоби: для всех элементов x, y и z из L:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Рассмотрим векторное пространство L, натянутое на операторы Вирасоро с модами $n \in \mathbb{Z}$. Покажите, что коммутаторы в (12.124), которые предполагаются выполненными для всех значений m и n, определяют алгебру Ли. Затем рассмотрите коммутаторы в (12.133) и покажите, что они также определяют алгебру Ли.

Задача 12.6. Условия согласованности центральных членов алгебры Вирасоро

Коммутационные соотношения Вирасоро принимают вид

$$[L_m^{\perp}, L_n^{\perp}] = (m-n)L_{m+n}^{\perp} + C(m)\delta_{m+n,0}, \qquad (1)$$

гле C(m) — функция m, которая была вычислена непосредственно в этой главе. Цель этой задачи — найти ограничения на C(m), которые вытекают из условия, что (1) образует алгебру Ли.

- (а) Что говорит о C(m) требование антисимметрии алгебры Ли? Чему равно C(0)?
- (б) Рассмотрим теперь тождество Якоби для генераторов L_m^{\perp} , L_n^{\perp} , и L_k^{\perp} при m + n + k = 0. Покажите, что

$$(m-n)C(k) + (n-k)C(m) + (k-m)C(n) = 0.$$
 (2)

- (в) Используйте соотношение (2), чтобы показать, что $C(m) = \alpha m$ и $C(m) = \beta m^3$ при постоянных α и β образуют согласованные центральные расширения.
- (г) Рассмотрите уравнение (2) при k = 1. Покажите, что C(1) и C(2) опредляют все C(n).

Задача 12.7. Упражнения с операторами Вирасоро

- (a) Используйте алгебру Вирасоро (12.133), чтобы показать, что если состояние аннигилируется операторами L_1 и L_2 , оно аннигилируется всеми L_n при $n \ge 1$.
- (б) Рассмотрим операторы Вирасоро L_0 , L_1 и L_{-1} . Выпишем три соответствующих коммутатора. Образуют ли эти операторы подалгебру алгебры Вирасоро? Существует ли в этом случае центральное слагаемое? Вычислите результат действия всех трех этих операторов на состояние $|0\rangle$ с нулевым импульсом.

Задача 12.8. Действие операторов Вирасоро на состояния

- (a) Используя (12.100), запишите состояние $L_{-6}^{\perp}|0\rangle$ как конечную сумму слагаемых с действующими на вакуум осцилляторами. Проделайте то же самое для $L_{-2}^{\perp}L_{-2}^{\perp}|0\rangle$.
- (б) Запишите $L_2^{\perp}L_{-2}^{\perp}|0\rangle$ и $L_{-2}^{\perp}L_2^{\perp}|0\rangle$ как конечные суммы слагаемых с действующими на вакуум осцилляторами. Используя этот результат, вычислите $[L_2^{\perp}, L_{-2}^{\perp}]|0\rangle$. Убедитесь, что ваше вычисление согласуется с алгеброй Вирасоро (12.133).

- Задача 12.9. Репараметризация, генерируемая операторами Вирасоро
 - (a) Рассмотрим струну при $\tau = 0$. Какая из комбинаций (12.141) репараметризует координату σ струны, сохраняя $\tau = 0$? Когда $\tau = 0$ сохраняется, репараметризация мирового листа является на самом деле репараметризацией *струны*. Покажите, что генераторы этих репараметризаций образуют подалгебру алгебры Вирасоро.
 - (б) Опишите произвольную репараметризацию *мирового листа*, оставляющую фиксированной среднюю точку $\sigma = \pi/2$ открытой струны с $\tau = 0$. Выразите эту репараметризацию, используя бесконечное множество ограничивающих параметров.
- Задача 12.10. Репараметризация и связи
 - (a) Проверьте, что параметры репараметризации в (12.137) удовлетворяют соотношениям (нижний индекс *m* для удобства опущен)

$$\dot{\xi}^{\tau}=\xi^{\sigma\prime},\quad \dot{\xi}^{\sigma}=\xi^{\tau\prime}.$$

(б) Рассмотрите порожденные операторами Вирасоро репараметризации (12.138) как изменения координат

$$au' = au + \epsilon \xi^{ au}(au, \sigma), \quad \sigma' = \sigma + \epsilon \xi^{\sigma}(au, \sigma).$$

Заметим, что для бесконечно малых ϵ предыдущее уравнение также требует. чтобы

 $au= au'-\epsilon \xi^ au(au',\sigma'), \quad \sigma=\sigma'-\epsilon \xi^\sigma(au',\sigma').$

Покажите, что если классические связи

$$\partial_{\tau} X \cdot \partial_{\sigma} X = 0, \quad (\partial_{\tau} X)^2 + (\partial_{\sigma} X)^2 = 0$$

предполагаются выполненными в координатах (τ, σ) , то они также будут выполнены (в порядке ϵ) в координатах (τ', σ') .

► Задача 12.11. Подсчет симметричных произведений[†]

Докажите, что число N различных произведений вида

$$a^{I_1}a^{I_2}\ldots a^{I_n},$$

где верхние индексы I_1, I_2, \ldots, I_n пробегают k значений 1, 2, ..., k, описывается формулой

$$N = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k+1}{2} \cdot \frac{k+2}{3} \dots \frac{k+n-1}{n}$$

Указание. Можно представить каждое произведение, используя n тождественных шариков и k - 1 тождественных разделителей. Например, при k = 6 и n = 9 имеем:

• |•• | |••• |• |•• $\leftrightarrow a^1 a^2 a^2 a^4 a^4 a^4 a^5 a^6 a^6$.

Эвдача 12.12. Неориентированные открытые струны

Открытая струна $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ с $\sigma \in [0, \pi]$ и фиксированным τ представляет собой зараметризованную кривую в пространстве-времени. Ориентация на струне есть направление роста σ на этой кривой.

(а) Рассмотрим теперь открытую струну $X^{\mu}(\tau, \pi - \sigma)$ при том же τ . Какова связь второй струны с первой? Как связаны их концевые точки и ориентации? Сделайте грубый рисунок, показывающий исходную струну как сплошную кривую в пространстве-времени, а вторую струну как пунктирную кривую в пространстве-времени.

Введем обращающий ориентацию оператор твиста Ω, такой, что

$$\Omega X^{I}(\tau,\sigma)\Omega^{-1} = X^{I}(\tau,\pi-\sigma).$$
(1)

Кроме того, объявим

$$\Omega x_0^- \Omega^{-1} = x_0^-, \quad \Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+.$$
⁽²⁾

(б) Используя разложение открытой струны по осцилляторам (12.32), вычислите

$$\Omega x_0^I \Omega^{-1}, \quad \Omega \alpha_0^I \Omega^{-1} \quad \varkappa \quad \Omega \alpha_n^I \Omega^{-1} \quad (n \neq 0).$$

(в) Покажите, что

$$\Omega X^{-}(\tau,\sigma)\Omega^{-1}=X^{-}(\tau,\pi-\sigma).$$

Так как

$$\Omega X^{+}(\tau, \sigma) \Omega^{-1} = X^{+}(\tau, \pi - \sigma),$$

соотношение (1) на самом деле выполняется для всех координат струны. Мы говорим, что обращение ориентации есть симметрия теории открытых струн, так как она оставляет гамильтониан H инвариантным: $\Omega H \Omega^{-1}$. Объясните, почему это верно.

(г) Предположим, что основные состояния инвариантны относительно твиста:

$$\Omega|\boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{\vec{p}_{T}}\rangle = \Omega^{-1}|\boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{\vec{p}_{T}}\rangle = |\boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{\vec{p}_{T}}\rangle.$$

Перечислите состояния открытой струны для $N^{\perp} \leq 3$ и приведите для них собственные значения оператора твиста. Докажите, что в общем случае

$$\Omega = (-1)^{N^{\perp}}.$$

(д) Говорят, что состояние неориентировано, если оно инвариантно относительно твиста. Если бы вам было нужно построить теорию неориентированных открытых струн, то какое состояние из части (г) вы бы отбросили? В общем случае, какие уровни первоначального пространства состояний струны должны быть отброшены?

► Задача 12.13. Тахионный потенциал

Рассмотрим скалярные теории поля вида

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right). \tag{1}$$

Мы исследуем три различных скалярных потенциала:

$$V_1(\phi) = \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{3\phi_0} (\phi - \phi_0)^2 \left(\phi + \frac{1}{2}\phi_0\right), \qquad (2a)$$

$$V_2(\phi) = -\frac{1}{4\alpha'}\phi^2 \ln\left(\frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right),\tag{26}$$

$$V_3(\phi) = \frac{1}{8\alpha'}\phi_0^2 \left(\frac{\phi^2}{\phi_0^2} - 1\right)^2,$$
 (2B)

где ϕ_0 — (положительная) константа. Для каждого из трех потенциалов V_i сделайте следующее.

- (a) Постройте график $V_i(\phi)$ как функцию ϕ .
- (б) Найдите критические точки потенциала и значения потенциалов в этих точках. Каждая критическая точка представляет возможный фон для скалярной теории поля.
- (в) В каждой критической точке ϕ разложите действие для флуктуаций ϕ вокрут этой точки, т.е. положите $\phi = \phi + \psi$, где флуктуации ψ малы. Квадратичное по ψ слагаемое (без производных) может быть использовано для определения массы скалярной частицы. Определите массу скалярной частицы для каждой критической точки.

Потенциал V_1 есть грубая модель тахионного потенциала на нестабильной Dбране, потенциал V_2 есть точный (эффективный) тахионный потенциал на нестабильной D-бране. Потенциал V_3 есть грубая модель суперструнного тахионного потенциала на мировом объеме D-браны и сопутствующей анти-D-браны.

330

Глава 13

Релятивистские квантовые замкнутые струны

За исключением фиксированного положения и нулевых мод импульса, операторный вид квантовых замкнутых струн можно рассматривать как два коммутирующих оператора открытых струн. Даже в калибровке светового конуса репараметризационная инвариантность не может быть полностью зафиксирована: не существует естественного пути выбора начальной точки для замкнутой струны. В результате спектр замкнутой струны подчинен условию $L_0^{\perp} - \overline{L}_0^{\perp} = 0$, которое отбирает состояния, инвариантные относительно жестких¹⁾ вращений струны. Мы обнаружим, что квантовые состояния безмассовой замкнутой струны включают одночастичные гравитонные состояния, что делает теорию струн квантовой теорией гравитации. Дополнительно мы обнаружим состояния Кальба—Рамона и дилатонные состояния. Эти состояния контролируют интенсивность струнных взаимодействий. Мы изучим замкнутые струны на орбифолде $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$.

13.1. Разложение по модам и коммутационные соотношения

В первое время после открытия теории струн считалось, что она является теорией сильновзаимодействующих частиц — теорией адронов. Согласованность теории открытых струн требовала включения замкнутых струн. Но с замкнутыми струнами возникла проблема: среди возбуждений замкнутых струн существовали безмассовые состояния со спином два. Ни один из известных адронов не имел таких свойств. Несмотря на многочисленные усилия, все попытки устранить эти состояния замкнутых струн из спектра окончились неудачей.

Оказалось, что такие безмассовые состояния можно отождествить с состояниями гравитона, и в конечном итоге физики осознали, что теория замкнутых струн может рассматриваться как теория квантовой гравитации. В этой главе мы проквантуем релятивистскую замкнутую струну и увидим, каким образом возникают состояния гравитона. Многое в процедуре квантования будет напоминать квантование открытой струны в главе 12, но есть и ряд новых свойств. Начнем с напоминания некоторых важных свойств замкнутых струн, которые мы изучили в главе 9. Там мы рассматривали семейство калибровок (см. (9.27)), которые

¹⁾ Термины жесткие вращения (трансляции) применяются в описании движения тел как целого, иногда их именуют «твердотельными». — Прим. ред. перевода.

определялись условиями

$$n \cdot X = \alpha'(n \cdot p)\tau, \quad n \cdot p = 2\pi n \cdot \mathcal{P}^{\tau}.$$
 (13.1)

Второс условис требуст, чтобы параметр σ покрывал интервал длиной 2π :

$$\sigma \in [0, 2\pi]. \tag{13.2}$$

Здесь $\sigma = 0$ и $\sigma = 2\pi$ представляют одну и ту же точку на замкнутой струне. Интервал $\sigma \in [0, 2\pi]$ для замкнутых струн вдвое больше интервала $\sigma \in [0, \pi]$, используемого для открытых струн. Мы видим, что условие (13.1) не полностью фиксирует параметризацию замкнутых струн. В противоположность открытым струнам у замкнутых струн нет специальной точки, которая может быть выбрана как $\sigma = 0$. Мы выгодно используем этот произвол: сделав выбор точки $\sigma = 0$ на одной замкнутой струне, можно наложить условие $X' \cdot \dot{X} = 0$ подходящим выбором точки $\sigma = 0$ на всех остальных замкнутых струнах на мировом листе. После этого мы все еще имеем возможность сделать замену $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$, с некоторой одинаковой для всех струн константой σ_0 . Это жесткое вращение линий постоянного σ есть репараметризационная инвариантность действия замкнутой струны, которую невозможно зафиксировать. Когда мы построим квантовые состояния замкнутой струны, это наложит ограничения на состояния.

Условие $X' \cdot \dot{X} = 0$ вместе с условиями репараметризации (13.1) подразумевает $X'^2 + \dot{X}^2 = 0$. Таким образом, мы получили знакомые условия

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0,$$
 (13.3)

и плотности импульсов стали простыми производными от координат:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\prime\mu}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \tag{13.4}$$

Наконец, было показано, что все координаты струны удовлетворяют волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right) X^{\mu} = 0.$$
 (13.5)

Рассмотрим теперь классическое решение уравнения движения для замкнутой струны. Общее решение волнового уравнения имеет вид

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = X^{\mu}_{L}(\tau+\sigma) + X^{\mu}_{R}(\tau-\sigma), \qquad (13.6)$$

где X_L^{μ} (индекс L соответствует движению влево) есть волна, движущаяся в сторону более отрицательных σ , а X_R^{μ} (индекс R соответствует движению вправо) есть волна, движущаяся в сторону более положительных σ . Для открытых струн волны, движущиеся налево и направо, были связаны друг с другом граничными условиями в концевых точках. У замкнутой струны нет концевых точек, но можно работать с условием периодичности. Пространством параметров (τ , σ) для **замк**нутых струн является цилиндр, поэтому для правильного описания замкнутых струн мы компактифицируем координату σ мирового листа:

$$\sigma \simeq \sigma + 2\pi. \tag{13.7}$$

Две точки на мировом листе, разность координат σ которых кратна 2π , являются одной точкой. На самом деле для описания замкнутых струн можно использовать любой интервал вида $[\sigma_0, \sigma_0 + 2\pi]$; выбор, сделанный в (13.2), лишь один из возможных. Когда мы включаем координату τ , отождествление точек в пространстве параметров задается правилом

$$(\tau, \sigma) \simeq (\tau, \sigma + 2\pi).$$
 (13.8)

Мы требуем, чтобы X^{μ} принимало одно и то же значение в любых двух точках, которые представляют одну точку в пространстве параметров

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = X^{\mu}(\tau,\sigma+2\pi) \quad \text{для всех } \tau \text{ и } \sigma. \tag{13.9}$$

С этим условием легче иметь дело, и его легче интерпретировать, чем наивное условие $X^{\mu}(\tau, 0) = X^{\mu}(\tau, 2\pi)$. Условие периодичности (13.9) подходит для струн, распространяющихся в односвязном пространстве, т. е. пространстве, в котором каждая замкнутая струна может быть непрерывно стянута в точку. Например, пространство Минковского односвязно. Если пространственное направление свернуто в окружность, то замкнутые струны, обернутые вокруг этой окружности, не могут быть стянуты в сторону. Поэтому пространство не односвязно, и координата вдоль окружности не является однозначной. Для такой координаты условие периодичности (13.9) должно быть изменено (см. главу 17).

Покажем теперь, что условие периодичности (13.9) индуцирует небольшое, но важное условие, связывающее волны, движущиеся вправо и влево. Определим две новые переменные

$$u = \tau + \sigma, \quad v = \tau - \sigma.$$
 (13.10)

Выраженное через новые переменные, уравнение (13.6) принимает вид

$$X^{\mu} = X_{L}^{\mu}(u) + X_{R}^{\mu}(v).$$
 (13.11)

Когда $\sigma \to \sigma + 2\pi$, переменные *u* и *v* возрастают и уменьшаются на 2π , соответственно. В результате, условие периодичности (13.9) дает

$$X_L^{\mu}(u) + X_R^{\mu}(v) = X_L^{\mu}(u+2\pi) + X_R^{\mu}(v-2\pi), \qquad (13.12)$$

или, эквивалентно,

$$X_L^{\mu}(u+2\pi) - X_L^{\mu}(u) = X_R^{\mu}(v) - X_R^{\mu}(v-2\pi). \qquad (13.13)$$

Это уравнение устанавливает, что движущиеся влево и вправо волны на самом деле зависят друг от друга: если одна перестает быть периодической, вторая должна измениться на ту же величину. Так как u и v являются независимыми

переменными, производная правой части по u и производная левой части по v равенства (13.13) должны обращаться в нуль. Следовательно мы находим, что $X_L^{\mu'}(u)$ и $X_R^{\mu'}(v)$ являются строго периодическими функциями с периодом 2π (для функций одной переменной штрих означает производные по отношению к аргументу). Поэтому мы можем написать разложение по модам

$$X_{L}^{\mu\prime}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n}^{\mu} e^{-inu},$$

$$X_{R}^{\mu\prime}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{\mu} e^{-inv}.$$
(13.14)

Для разложения $X_L^{\mu'}(u)$ было введено множество α -мод с чертой. Даже хотя они записаны одинаково, α -моды без черты, использованные в разложении $X_R^{\mu'}(v)$, не имеют никакого отношения к модам открытых струн в главе 12. В теории замкнутых струн нам нужны два множества α -мод: с чертой и без черты. Инте-грируя уравнение (13.14), находим

$$X_{L}^{\mu}(u) = \frac{1}{2}x_{0}^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\overline{\alpha}_{0}^{\mu}u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\overline{\alpha}_{n}^{\mu}}{n} \,e^{-inu},$$

$$X_{R}^{\mu}(v) = \frac{1}{2}x_{0}^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\alpha_{0}^{\mu}v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_{n}^{\mu}}{n} \,e^{-inv},$$
(13.15)

где нулевые моды координат $x_0^{L\mu}$ и $x_0^{R\mu}$ возникли как постоянные интегрирования. Это несколько удивительно, ведь в конце концов в теории открытой струны была единственная координатная нулевая мода, канонически сопряженная с импульсом струны. Мы покажем, что в этом случае важна только сумма двух нулевых мод; однако, в главе 17 нам встретится пространство, которое не является односвязным, и в этом случае каждая из координатных нулевых мод будет играет роль.

Апериодичность $X_R^{\mu}(v)$ и $X_L^{\mu}(u)$ есть следствие появления в (13.15) линейных слагаемых. Условие (13.13) ограничивает эти слагаемые, так что

$$2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\bar{\alpha}_0^{\,\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\alpha_0^{\,\mu}, \qquad (13.16)$$

и поэтому

$$\bar{\alpha}_0^{\mu} = \alpha_0^{\mu}. \tag{13.17}$$

Благодаря этому равенству, в теории квантовой замкнутой струны имеется только один оператор импульса. Как мы вскоре увидим, это означает, что каноническое

334

стантование действует согласованно только с одним оператором координатной элевой моды.

Теперь мы можем собрать разложение по модам для $X^{\mu}(\tau, \sigma)$, подставляя (13.15) в (13.6):

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x_{0}^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\bar{\alpha}_{0}^{\mu}(\tau+\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\sum_{n\neq 0}\frac{\bar{\alpha}_{n}^{\mu}}{n}\,e^{-in(\tau+\sigma)} + \frac{1}{2}x_{0}^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\alpha_{0}^{\mu}(\tau-\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_{n}^{\mu}}{n}\,e^{-in(\tau-\sigma)}.$$
 (13.18)

При $\bar{\alpha}_0^{\,\mu} = \alpha_0^{\mu}$ находим

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2} \left(x_{0}^{L\mu} + x_{0}^{R\mu} \right) + \sqrt{2\alpha'} \, \alpha_{0}^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \, \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} \left(\alpha_{n}^{\mu} e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_{n}^{\mu} e^{-in\sigma} \right).$$
(13.19)

Как и ожидалось, X^{μ} есть периодическая функция σ с периодом 2π . Плотность канонически сопряженного импульса равна

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\sqrt{2\alpha'} \,\alpha_0^{\mu} + \dots \right), \qquad (13.20)$$

где точки представляют слагаемые в \dot{X}^{μ} , которые при интегрировании по интервалу $\sigma \in [0, 2\pi]$ дают нуль и поэтому не влияют на величину полного импульса:

$$p^{\mu} = \int_{0}^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau,\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \sqrt{2\alpha'} \, \alpha_0^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \, \alpha_0^{\mu}. \tag{13.21}$$

Следовательно, имеем соотношение

$$\alpha_0^{\mu} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\mu}. \qquad (13.22)$$

Это выражение отличается множителем 2 от соответствующего результата (12.46) для открытой струны, но идея та же: α_0^{μ} пропорционален пространственновременному импульсу, который несет струна.

Имеется только одна переменная импульса, и следовательно, в квантовой теории имеется только один оператор импульса. Мы должны иметь, кроме того, только одну сопряженную координатную нулевую моду. Таким образом, несмотря на лево-правое разложение решения волнового уравнения, x_0^L и x_0^R не могут оба быть независимыми переменными. Только их сумма возникает в (13.19), так что только сумма должна быть подходящей координатной нулевой модой. Без потери

общности, полагаем

$$x_0^{L\mu} = x_0^{R\mu} \equiv x_0^{\mu}, \qquad (13.23)$$

так что уравнение (13.19) принимает окончательный вид:

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + \sqrt{2\alpha'} \,\alpha_0^{\mu}\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} \left(\alpha_n^{\mu} e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^{\mu} e^{-in\sigma}\right). \quad (13.24)$$

На этой стадии удобно выписать производные от координат по τ и σ . С помощью (13.6) замечаем, что

$$\dot{X}^{\mu} = X_{L}^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_{R}^{\mu'}(\tau - \sigma),$$

$$X^{\mu'} = X_{L}^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_{R}^{\mu'}(\tau - \sigma).$$
(13.25)

Складывая и вычитая эти уравнения и используя (13.14), находим

$$\dot{X}^{\mu} + X^{\mu'} = 2X_{L}^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n}^{\mu} e^{-in(\tau + \sigma)},$$

$$\dot{X}^{\mu} - X^{\mu'} = 2X_{R}^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{\mu} e^{-in(\tau - \sigma)}.$$
(13.26)

Обратим внимание, что в этих комбинациях производных осцилляторы с чертой не смешиваются с осцилляторами без черты. Мы подогнали нормировочные постоянные в приведенных выше соотношениях. Эти соотношения полностью аналогичны разложениям открытой струны (12.33). Это позволит нам получить ряд коммутаторов для закрытой струны, не производя никаких новых вычислений.

Обратимся к квантованию теории замкнутых струн. Канонические коммутационные соотношения принимают тот же вид, что и в теории открытых струн. Для поперечных координат и импульсов полагаем

$$\left[X^{I}(\tau,\sigma),\mathcal{P}^{\tau J}(\tau,\sigma')\right]=i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{IJ},\qquad(13.27)$$

и, как обычно, мы полагаем равным нулю коммутаторы координат с координатами и импульсов с импульсами. Для нулевых мод мы имеем также $[x_0^-, p^+] = -i$. Так как коммутационные соотношения не изменились, формулы (12.30) и (12.31) остаются справедливыми. Первая из них есть

$$\left[(\dot{X}^{I}\pm X^{I'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^{J}\pm X^{J'})(\tau,\sigma')\right]=\pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{13.28}$$

На самом деле на этот раз ситуация проще. Уравнения (13.28) выполняются для $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$, так как струнные координаты определены на этом полном интервале. Кроме того, разложение по модам (13.26) также верно на полном интервале. Так как комбинации производных принимают точно ту же форму, что и в случае

открытых струн, уравнение приводит к похожим коммутационным соотношенипм. Однако осцилляторы берутся с чертой, если мы используем верхний знак (+), п без черты, если мы используем нижний знак (−) в (13.28). Поэтому в результате

$$\left[\bar{\alpha}_{m}^{I},\bar{\alpha}_{n}^{J}\right]=m\delta_{m+n,0}\,\eta^{IJ},\qquad \left[\alpha_{m}^{I},\alpha_{n}^{J}\right]=m\delta_{m+n,0}\,\eta^{IJ}.$$
 (13.29)

В силу разложений (13.26) мы называем операторы $\bar{\alpha}$ леводвижущими операторами, а операторы α — праводвижущими операторами²⁾. Каждое из этих множеств совпадает с операторным содержимым теории открытых струн. Коммутационные соотношения также принимают вид, который можно было ожидать, исходя из результатов для открытой струны. Таким образом, теория замкнутой струны имеет структуру операторов, содержащую два набора операторов теории открытых струн, за исключением нулевых мод. Импульсные нулевые моды равны ($\alpha_0^I = \bar{\alpha}_0^I$), и поэтому имеется только одно множество координатных нулевых мод x_0^I , x_0^- .

Уравнение (12.31) утверждает, что комбинации производных с противоположными знаками коммутируют. В данном случае это значит, что лево- и праводвижущие осцилляторы коммутируют

$$\left[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J\right] = 0. \tag{13.30}$$

Можно определить канонические операторы рождения и уничтожения точно так же, как это было сделано для открытых струн:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n} \quad \text{if} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \ge 1, \\
\bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n} \quad \text{if} \quad \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \ge 1.
\end{aligned}$$
(13.31)

Ненулевые коммутационные соотношения оказываются ожидаемыми:

$$\left[\bar{a}_{m}^{I}, \bar{a}_{n}^{J\dagger}\right] = \delta_{m, n} \eta^{IJ}, \quad \left[a_{m}^{I}, a_{n}^{J\dagger}\right] = \delta_{m, n} \eta^{IJ}.$$
(13.32)

Коммутаторы, содержащие x_0^I , можно найти, следуя шагам, аналогичным тем, которые были использованы для открытых струн. На этот раз (задача 13.1) мы находим, что $[x_0^I, \alpha_n^J]$ и $[x_0^I, \bar{\alpha}_n^J]$ при $n \neq 0$ обращаются в нуль и

$$\begin{bmatrix} x_0^I, \alpha_0^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^I, \bar{\alpha}_0^J \end{bmatrix} = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0^I, p^J \end{bmatrix} = i\eta^{IJ}, \quad (13.33)$$

где выражение справа возникает в силу (13.22).

Какой вид имеет гамильтониан замкнутой струны в калибровке светового конуса? Мы знаем, что p^- генерирует трансляции X^+ , и что в дополнение к этому $X^+ =$

²⁾ В русскоязычной литературе движущиеся влево моды называют левосторонними, а движущиеся вправо — правосторонними. Соответственно и операторы $\bar{\alpha}$ называют левосторонними или просто левыми, а операторы α — правосторонними или правыми. — *Прим. ред. перевода*.

 $= \alpha' p^+ \tau$. В результате $\partial_{\tau} = \alpha' p^+ \partial_{X^+}$ и гамильтониан должен задаваться формулой

$$H = \alpha' p^+ p^-. \tag{13.34}$$

Чтобы найти нормально упорядоченную версию этого гамильтониана, обратимся к поперечным операторам Вирасоро теории замкнутых струн.

13.2. Операторы Вирасоро замкнутых струн

Мы выяснили в главе 12, что поперечные операторы Вирасоро открытой струны по существу есть моды α_n^- координаты светового конуса X^- . Для координат замкнутой струны имеются два типа мод — с чертой и без черты. Это также верно для координат X^- замкнутой струны: есть моды α_n^- и $\overline{\alpha}_n^-$, и поэтому мы ожидаем появления двух множеств операторов Вирасоро. Однако, в силу (13.17), имеем $\alpha_0^- = \overline{\alpha}_0^-$, так что нас ожидает сюрприз в отношении операторов Вирасоро с волновым числом нуль.

Чтобы начать анализ, нужно выражение, связывающее X^- с поперечными координатами. Требуемая формула есть (9.65) при $\beta = 1$, что подходит для замкнутых струн:

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^{+}} (\dot{X}^{I} \pm X^{I'})^{2}.$$
 (13.35)

Определим операторы Вирасоро, следуя схеме, предложенной в (9.79):

$$(\dot{X}^{I} + X^{I'})^{2} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{p}^{I} \bar{\alpha}_{n-p}^{I}\right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_{n}^{\perp} e^{-in(\tau+\sigma)},$$

$$(\dot{X}^{I} - X^{I'})^{2} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p}^{I} \alpha_{n-p}^{I}\right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{n}^{\perp} e^{-in(\tau-\sigma)}.$$

$$(13.36)$$

В этих двух строчках первые равенства — это небольшие вычисления, проведенные с помощью формулы (13.26), вторые равенства есть определения. В более явной форме

$$\bar{L}_n^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I.$$
(13.37)

Это два множества операторов Вирасоро теории замкнутых струн. Подставляя определения (13.36) в (13.35), получаем

$$\dot{X}^{-} + X^{-\prime} = \frac{2}{p^{+}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_{n}^{\perp} e^{-in(\tau + \sigma)},$$

$$\dot{X}^{-} - X^{-\prime} = \frac{2}{p^{+}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{n}^{\perp} e^{-in(\tau - \sigma)}.$$
(13.38)

С другой стороны, производные X^- , как и все остальные координаты замкнутой струны, можно разложить по схеме (13.26) и получить

$$\dot{X}^{-} + X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^{-} e^{-in(\tau+\sigma)},$$

$$\dot{X}^{-} - X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{-} e^{-in(\tau-\sigma)}.$$
(13.39)

Сравнивая уравнения (13.38) и (13.39), мы находим выражения для минус осцилляторов:

$$\sqrt{2\alpha'}\,\bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+}\bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'}\,\alpha_n^- = \frac{2}{p^+}L_n^\perp.$$
 (13.40)

Однако, при n = 0 существует ограничение. Так как $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$, мы имеем условие согласования уровней

$$L_0^{\perp} = \bar{L}_0^{\perp}. \tag{13.41}$$

Если посмотреть на определения \bar{L}_0^{\perp} и L_0^{\perp} в (13.37), можно понять, что эти два оператора сильно отличаются друг от друга. Что означает требование их равенства? Так как операторы в конечном счете определены своим действием на состояния, смысл равенства (13.41) состоит в том, что любое состояние $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ замкнутой струны должно удовлетворять уравнению $L_0^{\perp}|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^{\perp}|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$. Поэтому это условие наложено на пространство состояний: «состояния», не удовлетворяющие этому условию, не принадлежат, на самом деле, пространству состояний.

Чтобы зафиксировать неоднозначности упорядочения операторов \overline{L}_0^{\perp} и L_0^{\perp} , мы определяем их как упорядоченные операторы без какой либо дополнительной постоянной:

$$\overline{L}_0^{\perp} = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \overline{N}^{\perp}, \quad L_0^{\perp} = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^{\perp}. \quad (13.42)$$

Здесь \overline{N}^{\perp} и N^{\perp} — операторы числа «частиц» ³⁾, связанных с операторами с чертой и без черты, соответственно:

$$\overline{N}^{\perp} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \overline{a}_n^{I\dagger} \overline{a}_n^{I}, \quad N^{\perp} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^{I}.$$
(13.43)

Мы не будем заниматься хлопотным делом доказательства утверждения о том, что критическая размерность замкнутой струны оказывается равной D = 26. Это следует из требования лоренц-инвариантности квантовой теории. Не случайно критическая размерность замкнутых струн совпадает с критической размерностью открытых струн: это означает, что оба типа струн могут сосуществовать.

³⁾ Здесь и далее в главе 14 операторы N числа частиц следует понимать как операторы чисел заполнения уровней. — Прим. ред. перевода.

Действительно, если открытые струны могут в общем случае замыкаться, образуя замкнутые струны, было бы крайне странно, если бы при этом их критические размерности не совпадали.

Неоднозначные константы, обязанные своим происхождением упорядочению операторов \bar{L}_0^{\perp} и L_0^{\perp} фиксируются условием лоренц-инвариантности, так же, как это произошло для открытых струн. Результат этой операции можно предвидеть, так как левый и правый секторы теории замкнутых струн ведут себя как открытые струны. Кроме того, простой вывод, основанный на дзета-функциях, предполагает, что константы упорядочения для L_0^{\perp} и \bar{L}_0^{\perp} одинаковы и равны значению этой же константы для оператора L_0^{\perp} открытой струны. Эти константы включены в соотношение между α_0^- и L_0^{\perp} и соответствующее соотношение для операторов с чертой. Поэтому уравнения (13.40) при n = 0 принимают вид

$$\sqrt{2\alpha'}\,\bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+}(\bar{L}_0^\perp - 1), \quad \sqrt{2\alpha'}\,\alpha_0^- = \frac{2}{p^+}(L_0^\perp - 1).$$
 (13.44)

Условие согласования уровней $L_0^{\perp} = \bar{L}_0^{\perp}$, вытекающее из $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$, остается неизменным при постоянных сдвигах. Используя (13.42), можно записать это условие в более простой форме как

$$N^{\perp} = \overline{N}^{\perp}. \tag{13.45}$$

Усредняя два выражения для α_0^- в (13.44), можно найти симметричное выражение

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) = \alpha' p^-,$$
 (13.46)

где связь с p^- следует из (13.22). При известном p^- мы можем вычислить квадрат массы

$$M^{2} = -p^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{I}p^{I} = \frac{2}{\alpha'}(L_{0}^{\perp} + \bar{L}_{0}^{\perp} - 2) - p^{I}p^{I}. \qquad (13.47)$$

Подставляя значения \vec{L}_0^{\perp} и L_0^{\perp} из (13.42), получаем

$$M^{2} = \frac{2}{\alpha'} (N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2). \qquad (13.48)$$

Это массовая формула для состояний замкнутой струны. Используя соотношение (13.46), можно записать гамильтониан замкнутой струны (13.34) через операторы Вирасоро. Результат очень прост:

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2. \qquad (13.49)$$

Этот гамильтониан есть сумма гамильтониана «открытой струны» $L_0^{\perp} - 1$ для операторов, соответствующих движению вправо, и гамильтониана «открытой струны» $\overline{L}_0^{\perp} - 1$ для операторов, соответствующих движению влево. Используя (13.42).

можно записать гамильтониан как

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2. \qquad (13.50)$$

Как операторы L_m^{\perp} , так и операторы \bar{L}_m^{\perp} удовлетворяют алгебре Вирасоро (12.133). Кроме того, коммутаторы между операторами Вирасоро с чертой и без черты обращаются в нуль. Итак, полный набор операторов Вирасоро замкнутой струны определяет две коммутирующие алгебры Вирасоро.

Завершим этот раздел изучением действия операторов Вирасоро на коорцинаты замкнутой струны. Коммутация операторов Вирасоро замкнутой струны с осцилляторами выполняется по схеме, изложенной в (12.118). Имеем:

$$\left[\bar{L}_{m}^{\perp},\bar{\alpha}_{n}^{J}\right] = -n\bar{\alpha}_{m+n}^{J}, \quad \left[L_{m}^{\perp},\alpha_{n}^{J}\right] = -n\alpha_{m+n}^{J}, \quad (13.51)$$

и кроме того

$$\left[L_m^{\perp}, \bar{\alpha}_n^{J}\right] = \left[\bar{L}_m^{\perp}, \alpha_n^{J}\right] = 0.$$
(13.52)

С другой стороны, \overline{L}_m^{\perp} и L_m^{\perp} имеют нетривиальные коммутаторы с x_0^I .

Упражнение-разминка 13.1. Убедитесь в том, что

$$[\bar{L}_{m}^{\perp}, x_{0}^{I}] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\bar{\alpha}_{m}^{I}, \quad [L_{m}^{\perp}, x_{0}^{I}] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\alpha_{m}^{I}. \tag{13.53}$$

Сосредоточим внимание только на действие операторов L_0^{\perp} и \overline{L}_0^{\perp} на координаты струны. Требуемые формулы получаются в следующем упражнении.

Упражнение-разминка 13.2. Убедитесь, что

$$\left[\bar{L}_{0}^{\perp}, X^{I}(\tau, \sigma)\right] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^{I} + X^{I'}), \quad \left[L_{0}^{\perp}, X^{I}(\tau, \sigma)\right] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^{I} - X^{I'}). \quad (13.54)$$

Складывая два уравнения в (13.54), находим

$$\left[L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp}, \boldsymbol{X}^{I}(\tau, \sigma)\right] = -i \frac{\partial \boldsymbol{X}^{I}}{\partial \tau}.$$
 (13.55)

Это уравнение согласуется с гейзенберговским уравнением движения для X^{I} , так как гамильтониан замкнутой струны равен ($L_{0}^{\perp} + \overline{L}_{0}^{\perp} - 2$). Подставляя два уравнения в (13.54), находим более удивительный результат:

$$\left[L_0^{\perp} - \overline{L}_0^{\perp}, X^I(\tau, \sigma)\right] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}.$$
 (13.56)

Это уравнение показывает, что $L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}$ порождает постоянную трансляцию вдоль струны. Действительно, для бесконечно малых ϵ

$$X^{I}(\tau,\sigma) + \left[-i\epsilon(L_{0}^{\perp}-\bar{L}_{0}^{\perp}), X^{I}(\tau,\sigma)\right] = X^{I}(\tau,\sigma+\epsilon).$$
(13.57)

В более общем случае конечная трансляция вдоль струны может быть получена действием на координаты струны степенями $L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}$. Записав

$$P \equiv L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}, \tag{13.58}$$

мы находим ответ к задаче 13.3:

$$e^{-iP\sigma_0}X^I(\tau,\sigma)\ e^{iP\sigma_0}=X^I(\tau,\sigma+\sigma_0),\qquad(13.59)$$

для любого конечного σ_0 . Для $\sigma_0 = \epsilon$, где ϵ — бесконечно малая величина, этот общий результат сводится к (13.57). Оператор *P* генерирует одну репараметризационную симметрию, которая не может быть зафиксирована даже в калибровке светового конуса. Так как *P* уничтожает все состояния замкнутой струны (см. (13.41)), мы приходим к выводу, что состояния замкнутой струны инвариантны относительно жестких трансляций σ . Под этим мы подразумеваем, что для любого состояния замкнутой струны $|\Psi\rangle$ верно exp $(-iP\sigma_0)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$.

В двумерном (τ , σ) пространстве параметров на мировом листе замкнутой струны оператор $L_0^1 + \bar{L}_0^1$ есть генератор трансляций по τ , поэтому это есть энергия мирового листа. Поскольку калибровочные условия связывают τ с временем светового конуса, эта энергия мирового листа, оказывается, дает нам пространственно-временной гамильтониан — генератор эволюции во времени светового конуса. Другая комбинация, $L_0^1 - \bar{L}_0^1 = P$, генерирует трансляции вдоль координаты мирового листа σ . Поэтому ее можно рассматривать как импульс *мирового листа*. Этот импульс не следует путать с пространственно-временным импульсом струны. Для состояний замкнутой струны импульс мирового листа должен, на самом деле, обращаться в нуль, и это ограничение нетривиально. Можно построить состояния с ненулевым импульсом вдоль σ , но они не принадлежат пространству состояний замкнутой струны.

13.3. Пространство состояний замкнутой струны

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить пространство состояний квантовой замкнутой струны. Основными состояниями являются $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ и они уничтожаются как левосторонними, так и правосторонними операторами уничтожения. Чтобы построить все базисные состояния, нам нужно подействовать на основные состояния операторами рождения $a_n^{I\dagger}$ и $\bar{a}_n^{I\dagger}$. Главный *кандидат* на базисный вектор имеет вид

$$|\lambda,\bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}}\right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}}\right] |p^+,\vec{p}_T\rangle.$$
(13.60)

Как и в случае открытых струн, числа заполнения $\lambda_{n,I}$ и $\bar{\lambda}_{n,I}$ являются неотрицательными целыми числами. Операторы числа «частиц» действуют на $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$.

причем собственные значения

$$N^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}, \quad \overline{N}^{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} m \overline{\lambda}_{m,J}. \quad (13.61)$$

За исключением меток импульса, приведенные выше состояния — это те, которые получились бы при *мультипликативной* комбинации произвольных состояний, построенных из левых и правых операторов (сравни с (12.162)). Не все состояния в (13.60) принадлежат пространству состояний замкнутой струны истинные состояния теории должны удовлетворять условию (13.45). Базисный вектор $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ принадлежит пространству состояний *если и только если* он удовлетворяет условию согласования уровней

$$N^{\perp} = \overline{N}^{\perp}. \tag{13.62}$$

Соответствующие этому условию явные «решения» не могут быть найдены. Ясно, что отбрасывание какого-нибудь осциллятора из списка операторов, которые могут действовать на основные состояния, не приносит никакой пользы. Несколько лучшей стратегией был бы выбор конкретного осциллятора и попытка использовать его так много раз, как это необходимо, чтобы зафиксировать каждое состояние, не удовлетворяющее (13.62), но даже это невозможно, так как любой осциллятор может только вносить положительный вклад в оператор числа «частиц». Ограничение (13.62) должно применяться путем рассмотрения каждого случая в отдельности. Массы состояний получаются из (13.48):

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2.$$
 (13.63)

Идентифицируем несколько первых базисных состояний, приведем их массы и объясним, какие поля они представляют. Результаты приведены в табл. 13.1.

Основные состояния в первой строке табл. 13.1 — это одночастичные состояния квантового скалярного поля. Для таких состояний $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 0$ и $M^2 = -4/\alpha' < 0$, так что они представляют собой тахионы замкнутой струны и по существу полностью аналогичны тахионам теории открытых струн. Квадрат массы тахиона замкнутой струны в четыре раза больше квадрата массы тахиона открытой струны. Тахион замкнутой струны значительно менее понятен,

Таблица 13.1

$N^{\perp}, \overline{N}^{\perp}$	$ \lambda,ar{\lambda} angle$	$\frac{1}{2} \alpha' M^2$	Число состояний	Волновая функция
0,0	$ p^+, \vec{p}_T angle$	-2	1	$\psi(au, p^+, ec{p}_T)$
1, 1	$a_1^{I\dagger}a_1^{J\dagger} p^+, \vec{p}_T angle$	0	$(D-2)^2$	$\boldsymbol{\psi}_{IJ}(\tau,\boldsymbol{p}^+\!\!,\boldsymbol{\vec{p}_T})$

Состояния с $N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} \leqslant 2$ в спектре замкнутой струны

чем тахион открытой струны. В частности, потенциал тахиона замкнутой струны до сих пор надежно не вычислен. Считается, что нестабильности, связанные с тахионами замкнутых струн, должны быть нестабильностями самого пространства-времени. Они во многом остаются загадочными.

Следующие возбужденные состояния должны быть построены с помощью *двух* осцилляторов, действующих на основные состояния. Это следует из того, что мы должны удовлетворить условию $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp}$. Один осциллятор должен быть из левого сектора, другой — из правого сектора, причем оба с наинизшим возможным волновым числом — модой номер один. Это порождает состояния, описанные во второй строке таблицы. Все эти состояния обладают массой $M^2 = 0$, и поэтому представляют большой интерес. Так как *I* и *J* являются совершенно произвольными индексами *разных* осцилляторов, число состояний равно $(D-2)^2$.

Рассмотрим произвольное состояние с фиксированным импульсом на безмассовом уровне. Запишем его в виде

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$
(13.64)

Здесь R_{IJ} — элементы произвольной квадратной матрицы размера $(D-2) \times (D-2)$. Любую квадратную матрицу можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$R_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI}) + \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI}) \equiv S_{IJ} + A_{IJ}, \qquad (13.65)$$

где S_{IJ} и A_{IJ} — симметричная и антисимметричная части R_{IJ} соответственно. На самом деле симметричную часть можно разложить далее:

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S\right) + \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S, \quad S \equiv S^{II} = \delta^{IJ}S_{IJ}.$$
 (13.66)

Первое слагаемое справа имеет нулевой след:

$$\delta^{IJ}\left(S_{IJ}-\frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S\right)=S-\frac{1}{D-2}\delta_{IJ}\delta^{IJ}S=0,$$
(13.67)

так как $\delta_{IJ}\delta^{IJ} = D - 2$. Поэтому выражение (13.66) представляет разложение S_{IJ} на бесследовую матрицу и матрицу, кратную единичной. Пусть \hat{S}_{IJ} обозначает бесследовую часть S_{IJ} , а S' = S/(D-2). В общем, наше разложение имеет вид

$$R_{IJ} = \widehat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}. \tag{13.68}$$

Это стандартное разложение матрицы на симметричную бесследовую часть, антисимметричную часть и часть со следом. Записывая произвольную матрицу R_{IJ} . можно независимо описать каждый из трех членов. Поэтому состояния (13.64) могут быть разложены на три группы линейно независимых состояний:

$$\sum_{I,J}\widehat{S}_{IJ}a_{1}^{I\dagger}\overline{a}_{1}^{J\dagger}|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle, \qquad (13.69)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \qquad (13.70)$$

$$S' \boldsymbol{a}_1^{I\dagger} \boldsymbol{\bar{a}}_1^{I\dagger} | \boldsymbol{p}^+, \, \boldsymbol{\bar{p}}_T \rangle. \tag{13.71}$$

Теперь мы можем сделать важное заявление: состояния (13.69) представляют одночастичные гравитонные состояния! Мы исследовали такие состояния в разлеле 10.6. В квантовой теории свободного гравитационного поля эти состояния определяются выражением (10.110):

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+,p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \qquad (13.72)$$

гле ξ — произвольная симметричная бесследовая матрица. Так как \widehat{S}_{IJ} также является симметричной бесследовой матрицей, становится возможным отождествление состояний, если мы отождествим базисные состояния:

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} | p^+, \vec{p}_T \rangle \leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} | \Omega \rangle.$$
 (13.73)

Это отождествление возможно, так как два множества состояний имеют одни и те же лоренцевские индексы, несут один и тот же импульс и имеют одну массу (равную нулю в обоих случаях). Это показывает, что замкнутая струна имеет гравитонные состояния. В теории струн возникла гравитация! Мы нигде не вводили динамическую метрику и ни слова не говорили об общей ковариантности, но каким-то образом возникли квантовые состояния гравитационного поля!

Множество состояний (13.70) соответствует одночастичным состояниям поля Кальба—Рамона, антисимметричного тензорного поля $B_{\mu\nu}$ с двумя индексами. Анализ на световом конусе этого поля обсуждался в задаче 10.6 (см. особенно пп. (д) и (е)). Поле $B_{\mu\nu}$ со многих точек зрения есть тензорное обобщение максвелловского калибровочного поля A_{μ} . Поле Кальба—Рамона взаимодействует со струнами аналогично тому, как максвелловское поле взаимодействует с частицами. Следовательно, как мы увидим в главе 16, струны несут заряд Кальба— Рамона.

Осталось исследовать только одно поле: осцилляторная часть (13.71) не содержит свободных индексов (по *I* проведено суммирование), так что она представляет одно состояние, соответствующее одночастичному состоянию безмассового скалярного поля. Это поле называется *дилатоном*.

Проведенное обсуждение состояний частиц дополняется анализом волновых функций и уравнений поля. Этот анализ близок к подходу раздела 12.7. Волновые функции $\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ описывают произвольные зависящие от времени состояния на безмассовом уровне замкнутой струны:

$$|\Psi\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \,\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$
(13.74)

Уравнение Шрёдингера, которому удовлетворяют эти состояния, имеет вид $i\partial_{\tau}|\Psi, \tau\rangle = H|\Psi, \tau\rangle$. Используя (13.50) и замечая, что для обсуждаемых состояний

 $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 1$, находим

$$i\frac{\partial\psi_{IJ}}{\partial\tau} = \frac{\alpha'}{2}p^{K}p^{K}\psi_{IJ}.$$
 (13.75)

Волновые функции $\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ становятся полями классических полевых теорий, а уравнения Шрёдингера интерпретируются как классические полевые уравнения. Симметричная бесследовая часть ψ_{IJ} становится полем гравитона, антисимметричная часть становится полем Кальба—Рамона, а часть со следом становится полем дилатона. Уравнения Шрёдингера для волновых функций гравитонных состояний, состояний Кальба—Рамона и дилатонного состояния включены в (13.75) и могут быть выделены отбором симметричных бесследовых компонент, антисимметричных компонент и компоненты со следом в ψ_{IJ} . С другой стороны, в координатах светового конуса уравнение безмассового скалярного поля $\partial^2 \phi = 0$ принимает вид (10.30):

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^{+}}-\frac{1}{2p^{+}}p^{K}p^{K}\right)\phi(\tau,p^{+},\vec{p}_{T})=0.$$
(13.76)

Полагая $x^+ = \alpha' p^+ \tau$, находим

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\alpha'}{2}p^{K}p^{K}\right)\phi(\tau,p^{+},\vec{p}_{T})=0.$$
(13.77)

Это уравнение имеет тот же вид, что и (13.75). На самом деле в калибровке светового конуса все поля гравитонов, поля Кальба—Рамона и поле дилатона удовлетворяют простому уравнению $\partial^2 \phi^{--} = 0$, точки в котором относятся к соответсвующим индексам. Это очевидно так для безмассового дилатона, являющегося скаляром. Для полей гравитонов мы показали это в уравнении (10.107). Для полей Кальба—Рамона в задаче 10.6 было показано, что уравнение $p^2 B^{\mu\nu} = 0$ выполняется в калибровке светового конуса.

Резюмируя, на безмассовом уровне замкнутой струны мы обнаружили поля гравитации, поля Кальба—Рамона и поля дилатона. Каждое из этих полей заслуживает серьезного исследования. Гравитационное поле изучается в общей теории относительности. В главе 16 мы сосредоточимся на поле Кальба—Рамона. Дилатон есть безмассовое скалярное поле с удивительными свойствами, изучение дилатона довольно сложно, но в следующем разделе мы обсудим ту роль, которую играет дилатон в теории струн.

13.4. Константа связи струны и дилатон

Безмассовое скалярное поле, называемое дилатоном, обладает замечательным свойством: его среднее значение регулирует константу связи струны! Эта константа является безразмерным числом, определяющим интенсивность струнных взаимодействий.

Классическим примером константы связи является электромагнитная постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c) \simeq 1/137$. Эта безразмерная константа

346

связи регулирует интенсивность электромагнитных взаимодействий. Например, в гамильтониане атома водорода α появляется в слагаемом, определяющем энергию электростатического взаимодействия между протоном и электроном. Шкала масс в атоме водорода устанавливается массой m электрона. Физические безразмерные величины, такие как энергия связи E основного состояния, зависят от размерного параметра теории m, фундаментальных констант \hbar и c u от безразмерного параметра α :

$$E = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{2a_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 mc^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 (mc^2), \qquad (13.78)$$

где $a_0 = 4\pi \hbar^2/me^2$ есть радиус Бора. В гипотетическом пределе $\alpha \to 0$ энергия связи обращается в нуль, и радиус Бора становится бесконечным. Вот что случается с атомом водорода, когда мы выключаем электромагнитное взаимодействие.

На первый взгляд, в теории струн происходит похожая история. В качестве размерного параметра можно взять α' , который определяет длину струны $l_s = \sqrt{\alpha'}$ (мы работаем в системе единиц $\hbar = c = 1$). Пусть g обозначает безразмерную константу связи для взаимодействий замкнутой струны: если g стремится к нулю, струна не взаимодействует. В теории гравитации взаимодействия определяются значением ньютоновской гравитационной постоянной. Если замкнутые струны не взаимодействуют, значение ньютоновской постоянной в теории струн будет равно нулю, т.к. в гравитации будут отсутствовать взаимодействия. Если ньютоновская постоянная стремится к нулю при $g \rightarrow 0$, естественно ожидать, что эта постоянная пропорциональна некоторой положительной степени g; оказывается, что она пропорциональна g^2 . Размерный анализ фиксирует зависимость ньютоновской постоянная $G^{(D)}$ имеет (естественную) размерность L^{D-2} . На самом деле в естественных единицах $G^{(D)}$ равна D-мерной планковской длине $\ell_p^{(D)}$ в степени (D-2). Так, $[G^{(26)}] = L^{24}$, и поскольку $[\alpha'] = L^2$, находим, что

$$G^{(26)} \sim g^2(\alpha')^{12}.$$
 (13.79)

Большинство феноменологических исследований теории струн начинается с десятимерных теорий суперструн. Эти теории содержат как бозонные, так и фермионные возбуждения, так что они включают два типа наблюдаемых в природе частиц. Десятимерная ньютоновская постоянная $G^{(10)}$ в теории суперструн дается выражением

$$G^{(10)} = \left(\ell_{\rm P}^{(10)}\right)^8 \sim g^2(\alpha')^4. \tag{13.80}$$

Тогда отсюда следует, что

$$\ell_{\rm P}^{(10)} \sim g^{1/4} \sqrt{\alpha'} = g^{1/4} \ell_{s}.$$
 (13.81)

Если константа связи струны g является малым числом, то длина струны больше, чем планковская длина. Если g порядка единицы, длина струны и планковская длина сравнимы по величине. Чтобы найти четырехмерные приложения, используем соотношение (3.116) между ньютоновскими постоянными малой и большой размерности при компактификации. Предположим, что шесть измерений в десятимерном мире свернуты в пространство объемом $V^{(6)}$. Тогда четырехмерная ньютоновская постоянная G связана с десятимерной ньютоновской постоянной соотношением

$$G = \frac{G^{(10)}}{V^{(6)}} \sim g^2 \alpha' \frac{1}{V^{(6)}/(\alpha')^3}.$$
 (13.82)

Отношение $V^{(6)}/(\alpha')^3$ является безразмерным числом, которое обычно предполагается большим. При компактификации конечного объема, при измерении в единицах длины струны, четырехмерная ньютоновская постоянная ведет себя как

$$G \sim g^2 \alpha'. \tag{13.83}$$

В теории с открытыми и замкнутыми струнами константа связи открытой струны g_0 определяется, на самом деле, через константу связи замкнутой струны g. Можно доказать, что

$$g_{\rm O}^2 \sim g. \tag{13.84}$$

Это соотношение возникает за счет некоторых топологических свойств двумерных мировых листов.

Константа связи, определяющая интенсивность взаимодействия, может иногда перестать быть константой. Рассмотрим добавление к свободному гамильтониану H_0 слагаемого с взаимодействием gH_{int} , пропорциональным безразмерной константе связи g. Если g объявляется константой, мы должны задать ее значение с тем, чтобы определить полный гамильтониан $H_0 + gH_{int}$. Но предположим, что g является не константой, а динамической переменной g(t), и что полный гамильтониан включает дополнительное слагаемое H_g , определяющее динамику g. В этом случае мы не можем произвольно задать константу g, она будет определяться, возможно, однозначно, а возможно, что и неоднозначно, уравнениями Гамильтона, получаемыми из $H_0 + gH_{int} + H_g$. Если g(t) определяется однозначно, не требуется никакого выбора. Если g(t) определяется неоднозначно, может понадобиться какой-то иной критерий для выбора физически реализуемого решения.

Ситуация в теории струн похожа; константа связи может перестать быть константой. Константа связи замкнутой струны *g* определяется значением дилатонного поля $\phi(x)$:

$$g \sim e^{\varphi}.\tag{13.85}$$

Отсюда, в принципе, следует, что константа связи *g* не является настраиваемым параметром теории струн. Наоборот, она является *динамическим* параметром. на самом деле, полем. Это идеальное свойство в единой теории всех взаимодействий, так как оно сохраняет надежду, что константу связи струны можно вычислить. С другой стороны, кажется ясным, что константа связи струны в теории струн определена неоднозначно. В зависимости от значений, которые принимают

другие поля в теории, поле дилатона может эволюционировать различным обра**ю**м. При определенных обстоятельствах среднее значение поля дилатона может быть даже настраиваемой константой. Привлекательна возможность того, что другие поля теории породят потенциал дилатона, тогда, если у этого потенциала есть стабильная критическая точка, можно считать поле дилатона равным критическому значению. Более того, поле дилатона в этом случае приобретет массу, а это необходимо для реалистической физической модели, поскольку в природе нет известных безмассовых скаляров.

Если константа связи струны мала, квантово-механические амплитуды результатов взаимодействия струн могут быть аккуратно вычислены, используя известные результаты, касающиеся римановых поверхностей. Поразительные свойства римановых поверхностей позволяют понять, почему бесконечности, являюшиеся бичом квантовых амплитуд общей теории относительности, не возникают в теории струн. Этот вопрос мы обсудим в главе 26.

13.5. Замкнутые струны на $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолде

В разделе 2.8 мы ввели орбифолды и сделали утверждение, что они являются нетривиальными пространствами, на которых можно проследить распространение струны. В этом и следующем разделах мы продемонстрируем это утверждение 1ля случая замкнутых струн на простейшем орбифолде — полупрямой $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$. Так как мы должны иметь дело с полной квантовой теорией струн, направление орбифолда есть просто одно из направлений в 26-мерном пространстве-времени. Это направление $x^{25} \equiv x$ эффективно ограничивается до $x \ge 0$ путем \mathbb{Z}_2 отождествления

$$x\simeq -x. \tag{13.86}$$

Никакие другие координаты не затрагиваются. Теория орбифолдов не требует граничных условий в точке x = 0. Теория орбифолдов определяется наложением естественного ограничения на состояния замкнутых струн, живущих в пространстве-времени до орбифолдинга, — ограничения на спектр исходной *родительской* теории.

Если записать $X^{25}(\tau, \sigma) \equiv X(\tau, \sigma)$, то набор координат струны есть X^+ , $X^$ и X^i , где i = 2, ..., 24 и X. Введем оператор U, совершающий над координатами струн \mathbb{Z}_2 отождествление, определяющее орбифолд. Следовательно, действуя на X, мы должны иметь

$$UX(\tau,\sigma)U^{-1} = -X(\tau,\sigma). \tag{13.87}$$

Так как U не должен преобразовывать никакие другие координаты струны, мы требуем, чтобы

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{i}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{X}^{i}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\sigma}). \tag{13.88}$$

Кроме того, мы требуем инвариантности p^+ и x_0^- :

$$Up^+U^{-1} = p^+ \quad \text{i} \quad Ux_0^-U^{-1} = x_0^-, \qquad (13.89)$$



Рис. 13.1. Состояние замкнутой струны, инвариантное относительно преобразования $x \to -x$, получается путем суперпозиции двух состояний, переходящих друг в друга при $x \to -x$

так как они, совместно с (13.87) и (13.88), подразумевают инвариантность X^+ и X^- :

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{\pm}(\tau,\sigma)\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{X}^{\pm}(\tau,\sigma). \tag{13.90}$$

Действительно, инвариантность $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ непосредственно следует из инвариантности p^+ . Инвариантность X^- имеет место, потому что этот оператор есть сумма инвариантной моды x_0^- , членов, квадратичных по инвариантным координатам, и членов, квадратичных по \dot{X} , X' (см. (13.35)). Отсюда следует, что p^- инвариантен относительно действия U. Так как p^+ также инвариантен, гамильтониан $H = \alpha' p^+ p^-$ (см. (13.49)) инвариантен: $UHU^{-1} = H$. Это означает, что U есть симметрия теории замкнутых струн.

Теория замкнутых струн *на орбифолде* сохраняет только U-инвариантные состояния родительской теории. Так как U есть симметрия, сужение до U-инвариантных состояний есть согласованная редукция: если бы гамильтониан не был U-инвариантным, состояния, которые являются U-инвариантными в один момент времени, не обязаны были бы оставаться U-инвариантными во все моменты времени. Интуитивно понятно, что для U-инвариантных состояний струны физика в точках -x определяется физикой в точках x, эффективно делая несущественной половину пространства. U-инвариантные пространства естественно строятся путем квантовой суперпозиции (рис. 13.1).

Чтобы далее ограничиться *U*-инвариантными состояниями, удобно определить действие *U* на осцилляторы. Координата $X(\tau, \sigma)$ имеет обычное разложение (13.24) по координатам замкнутой струны:

$$X(\tau,\sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n e^{-in\sigma}). \quad (13.91)$$

Если мы хотим, чтобы соотношение (13.87) было выполнено для всех значений τ и σ , мы должны иметь

$$Ux_0U^{-1} = -x_0, \quad U p U^{-1} = -p,$$

$$U\alpha_n U^{-1} = -\alpha_n, \quad U\overline{\alpha}_n U^{-1} = -\overline{\alpha}_n.$$

Все операторы в разложении X изменяют знак под действием U. Все моды в разложении координат X^i остаются инвариантными под действием U.

Э Упражнение-разминка 13.3. Используя разложение по осцилляторам оператора $H = L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp} - 2$, непосредственно убедитесь, что $UHU^{-1} = H$.

Обсудим теперь состояния теории, начиная с основных. Обозначим основные состояния родительской теории $|p^+, \vec{p}, p\rangle$, где \vec{p} есть вектор с компонентами p^i и p означает импульс в направлении x. Предположим также, что состояния, у которых нет импульса в направлении x, инвариантны относительно действия U:

$$U|p^{+}, \vec{p}, 0\rangle = |p^{+}, \vec{p}, 0\rangle.$$
(13.93)

Будучи инвариантным относительно *U*, состояние $|p^+, \vec{p}, 0\rangle$ есть основное состояние теории на орбифолде, но их много больше. Чтобы найти все состояния, сначала определим действие *U* на $|p^+, \vec{p}, p\rangle$. Мы предполагаем, что для каждой пары сопряженных операторов координаты и импульса (q, p) состояния импульса определены так, чтобы удовлетворить соотношению $|p + \delta p\rangle = \exp(i\delta p q)|p\rangle$, где δp есть константа. Применяя это соотношение к нашей паре (x_0, p) , находим $|p^+, \vec{p}, p\rangle = e^{ix_0 p}|p^+, \vec{p}, 0\rangle$ и поэтому

$$U|p^{+}, \vec{p}, p\rangle = U e^{ix_{0}p} U^{-1} U|p^{+}, \vec{p}, 0\rangle = e^{i(-x_{0})p}|p^{+}, \vec{p}, 0\rangle = |p^{+}, \vec{p}, -p\rangle, \quad (13.94)$$

или иначе

$$U|\boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{\vec{p}}, \boldsymbol{p}\rangle = |\boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{\vec{p}}, -\boldsymbol{p}\rangle.$$
(13.95)

Теперь легко образовать U-инвариантные состояния путем линейных комбинаций.

Основные состояния струны на орбифолде:
$$|p^+, \vec{p}, p\rangle + |p^+, \vec{p}, -p\rangle$$
. (13.96)

Более точно, основные состояния орбифолда — это произвольные зависящие от времени суперпозиции приведенных выше состояний:

$$\int \psi(\tau, p^+, \vec{p}, p) |p^+, \vec{p}, p\rangle \, dp^+ d\vec{p} \, dp, \quad \psi(\tau, p^+, \vec{p}, -p) = \psi(\tau, p^+, \vec{p}, p). \quad (13.97)$$

Фурье-образы волновых функций основного состояния $\psi(\tau, p^+, \vec{p}, x)$ являются четными функциями x. Безмассовые состояния теории орбифолдов требуют $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 1$. Действительно, орбифолдинг не изменяет разложение X по модам, и формула для M^2 не изменяется. Чтобы построить состояния, нам нужны два осциллятора, один с чертой, другой без черты, действующие на соответсвующие основные состояния. Базисные безмассовые состояния имеют вид

$$egin{aligned} &lpha_{-1}^iar{lpha}_{-1}^jig(|p^+,ec{p},p
angle+|p^+,ec{p},-p
angleig),\ &lpha_{-1}^iar{lpha}_{-1}ig(|p^+,ec{p},p
angle-|p^+,ec{p},-p
angleig),\ &lpha_{-1}ar{lpha}_{-1}ig(|p^+,ec{p},p
angle-|p^+,ec{p},-p
angleig),\ &lpha_{-1}ar{lpha}_{-1}ig(|p^+,ec{p},p
angle+|p^+,ec{p},-p
angleig). \end{aligned}$$



Рис. 13.2. «Твистованная» замкнутая струна удовлетворяет условию $X(\tau, \sigma + 2\pi) = -X(\tau, \sigma)$. Непрерывной линией обозначена струна при $\sigma \in [0, 2\pi]$,а шриховой линией при $\sigma \in [2\pi, 4\pi]$. Вертикальная координата представляет любую компоненту x^i

Все эти состояния U-инвариантны. Для тех, у которых нечетное число осцилляторов в X, мы используем комбинацию вакуумных состояний с U = -1, так что полное состояние имеет U = +1. Массовые состояния могут быть построены аналогично. Может показаться, что настал конец истории, но нас ждет сюрприз. Теория орбифолдов включает больше состояний, чем обсуждавшиеся выше. Она содержит *твистовый* сектор с замкнутыми струнами нового типа. Обсудим эти струны.

13.6. Твистовый сектор орбифолда

Дополнительные замкнутые струны, возникающие в так называемом твистовом секторе, можно представить себе как *открытые* струны в родительской теории, с концевыми точками в местах, отождествленных условием орбифолда (13.86). Точнее

$$\boldsymbol{X}(\tau, \sigma + 2\pi) = -\boldsymbol{X}(\tau, \sigma). \tag{13.98}$$

Из этого соотношения следует, что $X(\tau, 2\pi) = -X(\tau, 0)$, и это означает, что отождествление орбифолда делает эти координаты одной точкой, так что струна становится эффективно замкнутой. При произвольном σ уравнение говорит нам, что струна фактически повторяет свое положение, когда σ меняется на 2π . В родительском пространстве струна замыкается только после $\sigma \rightarrow \sigma + 4\pi$, как становится ясно после двукратного применения (13.98). Двумерное представление струны, подчиняющееся соотношению (13.98), показано на рис. 13.2. Заметим. что твистованная замкнутая струна должна проходить через точку x = 0. Это становится очевидным, так как непрерывная функция $X(\tau, \sigma)$ в (13.98) принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Чтобы построить соответствующую квантовую теорию, найдем сначала подходящее осцилляторное разложение для координаты *X*, удовлетворяющее (13.98). Как обычно, чтобы решить волновое уравнение, пишем:

$$X(\tau,\sigma) = X_L(u) + X_R(v), \quad u = \tau + \sigma, \ v = \tau - \sigma. \tag{13.99}$$

Ограничение (13.98) требует, чтобы

$$X_L(u+2\pi) + X_R(v-2\pi) = -X_L(u) - X_R(v), \qquad (13.100)$$

ати эквивалентно

$$X_L(u+2\pi) + X_L(u) = -(X_R(v) + X_R(v-2\pi)).$$
(13.101)

Возьмем производные по и и v:

$$X'_L(u+2\pi) = -X'_L(u), \quad X'_R(v+2\pi) = -X'_R(v).$$
 (13.102)

Для обычной координаты струны $X_L^{i'}$ и $X_R^{i'}$ являются периодическими функциями с периодом 2π . Для X производные меняют знак, когда аргумент изменяется на 2π . Чтобы записать удобным образом нормированное разложение по молам, возьмем за образец выражение (13.14). Чтобы получить изменение знака при $u \to u + 2\pi$ нам нужны экспоненты вида $\exp(iku)$ с полуцелым k. Поэтому пишем:

$$X'_{L}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \bar{\alpha}_{n/2} e^{-inu/2}, \quad X'_{R}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha_{n/2} e^{-inv/2}. \quad (13.103)$$

Индексы на осцилляторах, теперь уже полуцелые⁴⁾, согласуются с множителями u и v в экспонентах. Интегрируя (13.103), получаем

$$X_{L}(u) = x_{L} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \frac{2}{n} \bar{\alpha}_{n/2} e^{-inu/2},$$

$$X_{R}(v) = x_{R} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}^{u}} \frac{2}{n} \alpha_{n/2} e^{-inv/2}.$$
(13.104)

Теперь из выражения (13.101) находим $x_L = -x_R$ или $x_L + x_R = 0$. Собирая вместе части, движущиеся вправо и влево, приходим к разложению по модам для твистового сектора замкнутых струн:

$$X(\tau,\sigma) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \frac{2}{n} e^{-in\tau/2} (\bar{\alpha}_{n/2} e^{-in\sigma/2} + \alpha_{n/2} e^{in\sigma/2}).$$
(13.105)

Разложение не содержит ни координатных, ни импульсных нулевых мод. Чтобы уйти от точки x = 0, нужна энергия, так как по крайней мере одна точка струны должна остаться в x = 0. Как мы увидим далее, поля, ассоциированные с твистовыми состояниями, локализованы в фиксированной точке x = 0 и зависят только от x^+ , x^- и x^i .

Коммутационные соотношения для мод можно вывести способом, полностью аналогичном обычному случаю. Координаты подчиняются соотношению $[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$. Кроме того, при заданных разложениях по модам

⁴⁾ Обратите внимание, что суммирование в формулах (13.103) идет по нечетным целым числам $(n \in \mathbb{Z}_{odd})$. — Прим. ред. перевода.

координата X удовлетворяет (13.26) с $n \to n/2$ и суммированием по нечетным числам:

$$\dot{X} + X' = 2X'_{L}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \overline{\alpha}_{n/2} e^{-in(\tau + \sigma)/2},$$

$$\dot{X} - X' = 2X'_{R}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha_{n/2} e^{-in(\tau - \sigma)/2}.$$
(13.106)

Применяя к Х версию (13.28) с верхним знаком, получаем

$$\sum_{m',n'\in\mathbb{Z}_{odd}} e^{-im'(\tau+\sigma)/2} e^{-in'(\tau+\sigma')/2} \left[\bar{\alpha}_{m'/2},\bar{\alpha}_{n'/2}\right] = 2\pi i \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma-\sigma').$$
(13.107)

Чтобы извлечь коммутаторы, применяем следующий интеграл к левой и правой частям выражения (13.107):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \ e^{im\sigma/2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma' \ e^{in\sigma'/2}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}.$$
(13.108)

Две функции $e^{ik\sigma/2}$ и $e^{ik'\sigma/2}$ с $k, k' \in \mathbb{Z}_{odd}$ и $k + k' \neq 0$ ортогональны на интервале $[0, 2\pi]$, так как k + k' является четным целым числом. Поэтому интегрирование вида (13.108) выбирает один коммутатор в левой части, и можно показать, что

$$\left[\bar{\alpha}_{m/2}, \bar{\alpha}_{n/2}\right] = \frac{m}{2} \delta_{m+n, 0}. \tag{13.109}$$

Это и есть ожидаемая форма коммутационных соотношений.

Упражнение-разминка 13.4. Докажите (13.109).

Аналогичные коммутационные соотношения выполняются для правостронних осцилляторов, кроме того, как обычно, лево- и правостронние осцилляторы коммутируют:

$$[\alpha_{m/2}, \alpha_{n/2}] = \frac{m}{2} \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_{m/2}, \overline{\alpha}_{n/2}] = 0. \quad (13.110)$$

Кроме того, мы должны осуществить отождествление орбифолда, так что уравнение (13.87) должно иметь место для твистовых X в (13.105). Мы можем сразу же выписать результат действия U на новые осцилляторы:

$$U\alpha_{n/2}U^{-1} = -\alpha_{n/2}, \quad U\bar{\alpha}_{n/2}U^{-1} = -\bar{\alpha}_{n/2}.$$
 (13.11)

Отсутствие нулевой моды импульса в разложении X означает, что твистовые состояния не имеют сохраняющегося вдоль оси X импульса. Инвариантные относительно U основные состояния содержат p^+ и поперечный импульс \bar{p} вдоль X^i .

Основные твистовые состояния:
$$\boldsymbol{k} | \boldsymbol{p}^{\dagger}, \boldsymbol{p} \rangle$$
. (13.112)

Эти состояния не следует путать с основными состояниями (13.96) в «нетвистовом» секторе, имеющем нулевой импульс вдоль X.

254

Для обсуждения возбужденных состояний в твистовом секторе нам нужна подходящая формула для $\alpha' M^2$. На этот раз мы можем ожидать изменений, так как полуцелые волновые числа осцилляторов в X могут изменить константу упорядочения. Чтобы во всем разобраться, напомним, что в теории открытых струн мы предугадали значение константы упорядочения, осуществив простое упоряючение L_0^{\perp} и использовав обоснованное дзета-функцией правило суммирования $1 - 2 + 3 + ... \rightarrow -1/12$. Сделаем теперь то же самое для оператора \overline{L}_0^{\perp} замкнутой струны. Из верхнего уравнения в (13.36) мы видим, что \overline{L}_0^{\perp} определяется вклацами $(\dot{X}^I + X^{I'})^2$, т.е. $(\dot{X}^i + X^{i'})^2 + (\dot{X} + X')^2$. Так как разложения по модам $\dot{X}^i + X^{i'}$ и $\dot{X} + X'$ полностью аналогичны, формула для \overline{L}_0^{\perp} (13.37) несколько изменится и будет равна

$$\overline{L}_{0}^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha}_{p}^{i} \overline{\alpha}_{-p}^{i} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} \overline{\alpha}_{k/2} \overline{\alpha}_{-k/2}.$$
(13.113)

Каждое из 23 направлений *i* в первой сумме вносит вклад в константу упорядочения, равный $1/2 \cdot (-1/12) = -1/24$. Новый вклад возникает от упорядочения второго члена суммы:

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}} \overline{\alpha}_{k/2} \overline{\alpha}_{-k/2} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \overline{\alpha}_{k/2} \overline{\alpha}_{-k/2} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \overline{\alpha}_{-k/2} \overline{\alpha}_{k/2} = \\
= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \overline{\alpha}_{-k/2} \overline{\alpha}_{k/2} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \left[\overline{\alpha}_{k/2}, \overline{\alpha}_{-k/2} \right] = \\
= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \overline{\alpha}_{-k/2} \overline{\alpha}_{k/2} + \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} k.$$
(13.11)

Чтобы вычислить эту сумму, нам нужно вычислить «сумму» всех нечетных положительных чисел. Это осуществляется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} k + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{even}^+} k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^+} k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k.$$
(13.115)

Тогда получаем, что

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}^{+}} k = -\sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{1}{12}.$$
 (13.116)

Теперь можно записать точную квантовую форму (13.113):

$$\bar{L}_{0}^{\perp} = \frac{1}{4} \alpha' p^{i} p^{i} + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^{i} \bar{\alpha}_{p}^{i} - 23 \cdot \frac{1}{24} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^{+}} \bar{\alpha}_{-k/2} \bar{\alpha}_{k/2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}, \quad (13.117)$$

которую мы представим в виде

$$\overline{L}_{0}^{\perp} = \frac{1}{4} \alpha' p^{i} p^{i} + \overline{N}^{\perp} - \frac{15}{16}, \quad \overline{N}^{\perp} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{\alpha}_{-p}^{i} \overline{\alpha}_{p}^{i} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^{+}} \overline{\alpha}_{-k/2} \overline{\alpha}_{k/2}.$$
(13.118)

Совершенно аналогичная формула верна для L_0^{\perp} .

• Упражнение-разминка 13.5. Покажите, что $[\overline{N}^{\perp}, \bar{\alpha}_{-q/2}] = \frac{q}{2} \bar{\alpha}_{-q/2}$ и объясните, почему \overline{N}^{\perp} справедливо называется оператором числа «частиц».

Чтобы записать формулу для квадрата массы, напомним, что $\alpha' M^2/2$ равно сумме N^{\perp} плюс \overline{N}^{\perp} плюс константа упорядочения, как в (13.48). Таким образом,

мы имеем

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - \frac{15}{8}.$$
 (13.119)

Основные твистовые состояния $|p^+, \vec{p}\rangle$ имеют $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 0$. Это тахионные состояния с $\alpha' M^2/2 = -15/8$. Первые возбужденные состояния строятся, используя твистовые осцилляторы с наинизшими модами:

$$\alpha_{-1/2}\bar{\alpha}_{-1/2}|p^+,\bar{p}\rangle, \quad \frac{1}{2}\alpha' M^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{15}{8} = -\frac{7}{8}.$$
 (13.120)

Метки импульсов твистовых состояний указывают, что волновые функции имеют вид $\psi(\tau, p^+, \vec{p})$ или $\psi(\tau, x^-, \vec{x})$ в координатном пространстве. При заданном соответствии между волновыми функциями и полями мы заключаем, что у полей. связанных с твистовыми состояниями, отсутствует аргумент x. Эти поля должны существовать при некотором специфическом значении x.

С учетом того, что энергетика принуждает твистовые состояния локализоваться в окрестности x = 0, мы вправе заключить, что поля заданы на редуцированном 25-мерном пространстве-времени, определенном условием x = 0. Вышеприведенные основные состояния и первые возбужденные состояния ассоциируются со скалярными полями, поскольку эти состояния не несут на себе индексов, относящихся к направлениям редуцированного пространства-времени.

Орбифолды всегда имеют твистовый сектор, так что орбифолдинг производит двойной эффект — так называемый *двойной удар*. Одним следствием является то, что состояния родительской теории, неинвариантные относительно действия орбифолда, отбрасываются; другим следствием — то, что приобретается целый новый сектор состояний, удовлетворяющих «твистовым» граничным условиям.

Задачи

Задача 13.1. Коммутационные соотношения для осцилляторов

(a) Используя уравнения (13.28) с нижними знаками и подходящее разложение по модам, убедитесь явно в том, что коммутационные соотношения дтя операторов без черты имеют вид (13.29). (б) Множество функций $e^{in\sigma}$ с $n \in \mathbb{Z}$ полно на интервале $\sigma \in [0, 2\pi]$. Используя этот факт, докажите, что

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\sigma - \sigma')}.$$
 (1)

- (в) Вычислите явно коммутатор $[X^{I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')]$, используя разложения X и \mathcal{P} по модам и коммутационные соотношения (13.29), (13.30) и (13.33). Используйте соотношение (1), чтобы убедиться, что возникает ожидаемый ответ (13.27).
- (г) Докажите коммутационные соотношения для нулевых мод (13.33), начав с вывода выражения для коммутатора

$$\left[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\,\alpha_0^I\tau,\,\dot{X}^J(\tau,\,\sigma')\right]=i\alpha' i\eta^{IJ}.$$

являющегося аналогом уравнения (12.47) для замкнутой струны.

Задача 13.2. Проектор на физические состояния

Рассмотрим векторное пространство \mathcal{H} , натянутое на множество состояний $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ в уравнении (13.60). Объясните, почему для любого состояния $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle \in \mathcal{H}$ собственное значение $P = L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}$ есть целое число. Покажите, что

$$\mathcal{P}_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i(L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp)\theta}$$

есть оператор проекции \mathcal{H} на векторное подпространство, в котором P = 0. Таким образом, \mathcal{P}_0 проектирует в пространство состояний замкнутых струн.

- ▶ Задача 13.3. Действие оператора $L_0^\perp ar{L}_0^\perp$
 - (a) Докажите, что уравнение (13.59) выполняется для конечных значений σ_0 . Может оказаться полезным определить $f(\sigma_0) = e^{-iP\sigma_0} X^I(\tau, \sigma) e^{iP\sigma_0}$ и вычислить многократные производные f в точке $\sigma_0 = 0$.
 - (б) Объясните, почему

$$e^{-iP\sigma_0}(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau,\sigma)e^{iP\sigma_0} = (\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau,\sigma+\sigma_0). \tag{1}$$

- (в) Используйте (1) для вычисления действия трансляции по σ на осцилляторы: $e^{-iP\sigma_0}\alpha_n^I e^{iP\sigma_0}$ и $e^{-iP\sigma_0}\bar{\alpha}_n^I e^{iP\sigma_0}$.
- (г) Рассмотрим состояние

$$|U
angle = lpha^{I}_{-m}ar{lpha}^{J}_{-n}|p^{+},ar{p_{T}}
angle, \quad m,n>0.$$

Используя результаты (в), вычислите $e^{-iP\sigma_0}|U\rangle$. Какое условие делает состояние $|U\rangle$ инвариантным относительно σ трансляций?

- ▶ Задача 13.4. Оператор $L_0^\perp \overline{L}_0^\perp$ как импульс мирового листа
 - (а) Используя уравнения (13.36), покажите, что

$$L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \, \dot{X}^I X^{I'}. \tag{1}$$

Докажите также, что

$$L_0^{\perp}-\overline{L}_0^{\perp}=-rac{p^+}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\;rac{\partial X^-}{\partial\sigma},$$

и это объясняет, что $L_0^{\perp} - \overline{L}_0^{\perp}$ на классическом уровне обращается в нуль, поскольку X^{-} , как любая другая координата струны, должна удовлетворять условию периодичности для замкнутой струны.

(б) Динамика поперечных координат светового конуса для струны определяется лагранжианом (12.81):

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4\pi\alpha'}(\dot{X}^{I}\dot{X}^{I}-X^{I'}X^{I'}).$$

Покажите, что бесконечно малая трансляция с постоянной σ вида

$$\delta X^I = \epsilon \partial_\sigma X^I$$

есть симметрия \mathcal{L} в смысле задачи 8.10. Вычислите связанный заряд и покажите, что он пропорционален $L_0^{\perp} - \overline{L}_0^{\perp}$ выражения (1).

Задача 13.5. Неориентированные замкнутые струны

Эта задача есть распространенная на замкнутую струну версия задачи 12.12. Замкнутая струна $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ с $\sigma \in [0, 2\pi]$ и фиксированным τ есть параметризованная замкнутая кривая в пространстве-времени. Ориентация струны есть направление возрастания параметра σ на этой кривой.

(a) Рассмотрите замкнутую струну $X^{\mu}(\tau, 2\pi - \sigma)$ с тем же самым τ , что и выше. Как эта вторая струна связана с первой? Как связаны их ориентации? Сделайте набросок, показав исходную струну в виде непрерывной линии. а вторую струну — в виде пунктирной линии.

Введите обращающий ориентацию оператор твиста Ω, такой, что

$$\Omega X^{I}(\tau,\sigma)\Omega^{-1} = X^{I}(\tau,2\pi-\sigma). \tag{1}$$

Кроме того, декларируйте равенства

$$\Omega \boldsymbol{x}_0^{-} \Omega^{-1} = \boldsymbol{x}_0^{-}, \quad \Omega \boldsymbol{p}^+ \Omega^{-1} = \boldsymbol{p}^+.$$

(б) Используя разложение по осцилляторам для замкнутой струны (13.24), вычислите

 $\Omega x_0^I \Omega^{-1}$, $\Omega \alpha_0^I \Omega^{-1}$, $\Omega \alpha_n^I \Omega^{-1}$ и $\Omega \overline{\alpha}_n^I \Omega^{-1}$.

(в) Покажите, что

$$\Omega X^{-}(\tau,\sigma)\Omega^{-1}=X^{-}(\tau,2\pi-\sigma).$$

Так как

$$\Omega X^{+}(\tau,\sigma)\Omega^{-1} = X^{+}(\tau,2\pi-\sigma),$$

уравнение вида (1) на самом деле выполнено для всех координат струны. Мы говорим, что обращение ориентации есть симметрия теории замкнутой струны, так как она оставляет гамильтониан H замкнутой струны инвариантным:

$$\Omega H \Omega^{-1} = H.$$

Объясните, почему это верно.

(г) Предположите, что основные состояния инвариантны относительно твиста. Перечислите состояния замкнутой струны для $N^{\perp} \leq 2$ и приведите для них собственные значения твиста. Если бы вам понадобилось построить теорию неориентируемых замкнутых струн, от каких состояний вы бы отказались? Каковы безмассовые поля в теории неориентируемых замкнутых струн?

Задача 13.6. Ориентифолдовые Ор-плоскости

Ор-плоскость ориентифолда⁵⁾ является гиперплоскостью с p пространственными измерениями, так же как и Dp-брана с p пространственными измерениями. Op-плоскости возникают в результате усечения, когда остаются лишь те состояния замкнутой струны, которые инвариантны в отношении преобразований симметрии, одновременно обращающих ориентацию струны и при этом отражающих поперечные (нормальные) к Op-плоскости координаты.

Пусть x^1, \ldots, x^p являются направлениями в О*p*-плоскости и пусть x^{p+1}, \ldots, x^d , где d = 25, являются ортогональными к О*p*-плоскости направлениями. Положение О*p*-плоскости определяется условиями $x^a = 0$, при $a = p + 1, \ldots, d$. Координаты струны представим в виде $X^+, X^-, \{X^i\}, \{X^a\},$ где $i = 2, \ldots, p$; $a = p + 1, \ldots, d$. Обозначим Ω_p — оператор, генерирующий преобразования

$$\Omega_p X^a(\tau,\sigma) \Omega_p^{-1} = -X^a(\tau,2\pi-\sigma), \qquad (1)$$

$$\Omega_p X^i(\tau,\sigma) \Omega_p^{-1} = X^i(\tau,2\pi-\sigma).$$
(2)

Более того, предположим, что

$$\Omega_{p} x_{0}^{-} \Omega_{p}^{-1} = x_{0}^{-}, \quad \Omega_{p} p^{+} \Omega_{p}^{-1} = p^{+}.$$
(3)

⁵⁾ Ориентифолдами в теории струн называют обобщения орибифолда, когда отождествления (по группе \mathbb{Z}_2 , например) точек дополняются операцией обращения струны. Поэтому ориентифолдинг порождает неориентированные струны, т.е. струны, у которых обе противоположные ориентации являются эквивалентными. Аналогом в геометрии служат известные неориентированные (односторонние) поверхности типа листа Мёбиуса, которые получаются в результате твиста (поворота на угол π) и склеивания концов) двусторонней полоски. Геометрическое место, в котором ориентифолдинг сводится к смене ориентации струны, называется плоскостью ориентифолда, именно она остается неизменной при ориентифолдинге (аналог фиксированной очки орбифолда). — Прим. ред. перевода.

- (a) В случае О23-плоскости два ортогональных к ней направления x^{24} , x^{25} можно представить в виде плоскости. Замкнутая струна при фиксированном τ на этой плоскости выглядит как параметризованная замкнутая кривая $X^{a}(\tau, \sigma)$. Нарисуйте такую ориентированную замкнутую струну, плоскостью лежащую в первом квадранте (x^{24}, x^{25}) -плоскости. Нарисуйте также струну $\tilde{X}^{a}(\tau, \sigma) = -X^{a}(\tau, 2\pi \sigma)$.
- (б) Для произвольного оператора \mathcal{O} действие Ω_p задается по правилу $\mathcal{O} \to \Omega_p \mathcal{O} \Omega_p^{-1}$. Используйте разложение 13.24 для вычисления результата действия Ω_p на следующие операторы:

$$x_0^a, \quad p^a, \quad lpha_n^a, \quad ar lpha_n^a, \quad x_0^i, \quad p^i, \quad lpha_n^i$$
 и $ar lpha_n^i.$

Покажите, что $\Omega_p X^{\pm}(\tau, \sigma) \Omega_p^{-1} = X^{\pm}(\tau, 2\pi - \sigma)$. Объясните, почему ориентифолдинговые преобразования являются симметриями замкнутых струн.

(в) Обозначим основные состояния через $|p^+, p^i, p^a\rangle$. Предположим, что состояния $|p^+, p^i, \vec{0}\rangle$ инвариантны относительно Ω_p : $\Omega_p |p^+, p^i, \vec{0}\rangle = |p^+, p^i, \vec{0}\rangle$. Докажите, что

$$\Omega_p | p^+, p^i, p^a \rangle = | p^+, p^i, -p^a \rangle.$$

Предположим, что для каждой пары сопряженных операторов координат и импульсов (q, p) импульсные состояния определены так, что выполняется соотношение $|p + \delta p\rangle = \exp(i\delta p q)|p\rangle$, где δp — константа.

Безмассовые состояния в теории ориентированных замкнутых струн задаются в виде

$$|\Phi\rangle = \int dp^+ d\vec{p}^i d\vec{p}^a \Phi^{\pm}_{IJ}(\tau, p^+, p^i, p^a) \left(\alpha^I_{-1} \vec{\alpha}^J_{-1} \pm \alpha^J_{-1} \vec{\alpha}^I_{-1}\right) |p^+, p^i, p^a\rangle,$$

где Φ_{IJ}^{\pm} — волновые функции, а поперечные индексы в координатах светового конуса I, J принимают все те же значения, что и индексы a и i.

Далее рассмотрим усечение до Ω_p инвариантных состояний: $\Omega_p |\Phi\rangle = |\Phi\rangle$. Получившаяся теория струн является теорией при наличии Op-плоскости ориентифолда. Интуитивно понятно, что для инвариантного состояния амплитуды (вероятности) того, что струна расположится вдоль каждой из двух, связанных между собой кривых из п. (а), должны быть равны.

(г) Найдите условия, которым должны удовлетворять Φ_{ab}^{\pm} , Φ_{ia}^{\pm} , Φ_{ij}^{\pm} , чтобы гарантировать Ω_p -инвариантность. Все эти условия имеют вид

$$\Phi_{IJ}^{\pm}(\tau,p^+,p^i,p^a)=\cdots\Phi_{IJ}^{\pm}(\tau,p^+,p^i,-p^a),$$

где точки стоят вместо тех знаковых множителей, которые вы должны найти для каждого случая.

Замечания. В координатном пространстве, полагая $x^m = \{x^0, \ldots, x^p\}$, вышеуказанные условия инвариантности требуют, чтобы

$$\Phi_{IJ}^{\pm}(x^m,x^a)=\cdots\Phi_{IJ}^{\pm}(x^m,-x^a).$$
При наличии плоскости ориентифолда, значения полей переменных в точках $(x^m, -x^6)$. Полевые функции являются либо четными, либо нечетными относительно отражения $x^6 \rightarrow -x^6$. Плоскость ориентифолда является своеобразным зеркалом, связывающим физику в отраженных точках, эффективно разрезающим пространство пополам. В одной половине пространства вдали от ориентифолда нет никаких связей (ограничений) и таким образом имеется полный набор полей ориентированных замкнутых струн. О25-плоскость заполняет собой все пространство. Поскольку для нее отсутствуют перпендикулярные направления, то ориентифолдовая симметрия включает лишь обращение ориентации струны. Данный случай изучается в задаче (13.5)

Глава 14

Взгляд на релятивистские суперструны

Реалистичные теории струн должны содержать фермионные состояния, подобные состояниям электронов или кварков. В дополнение к коммутирующим координатам X^{μ} , описывающим положение струн, суперструны включают антикоммутирующие динамические переменные. Для открытых суперструн квантование приводит к пространству состояний с сектором Невье—Шварца (NS), содержащим бозонные состояния, и сектором Рамона (R), содержащим фермионные состояния. Теория обладает суперсимметрией, т.е. симметрией, обеспечивающей совпадение числа бозонных и фермионных степеней свободы при любом уровне масс. Мы изучим теории замкнутых струн типа II, возникающих путем образования тензоров в пространстве состояний открытых суперструн.

14.1. Введение

До сих пор мы изучали теории бозонных струн, как открытых, так и закрытых. Эти теории струн существуют в 26-мерном пространстве-времени, и все их квантовые состояния представляют состояния бозонных частиц. Среди них мы встречаем важные бозонные частицы, такие как фотон и гравитон. Как мы увидим в главе 15, неабелевы калибровочные бозоны, необходимые для переноса сильных и слабых взаимодействий, также возникают в теории бозонных струн.

Однако реалистичные теории струн должны также содержать состояния фермионных частиц. Можно вспомнить, что квантовое состояние тождественных бозонных частиц симметрично относительно перестановки любых двух частиц. С другой стороны, квантовое состояние тождественных фермионных частиц антисимметрично относительно перестановки любых двух частиц. Кварки и лептоны — это фермионные частицы. Чтобы получить их, нам нужны теории *суперструн*. В этой книге мы не будем детально изучать суперструны. Необходимые объяснения потребовали бы детального обсуждения спиноров и уравнения Дирака в пространствах различного числа измерений, а также других технических подробностей; это заняло бы у нас много времени. Здесь мы дадим лишь краткий рассказ, посвященный основам суперструн, но достаточный для того, чтобы признать, что суперструны являются естественными обобщениями бозонной струны с рядом интересных новых составных частей. Некоторые приложения, обсуждаемые в этой книге, включают суперструны, эта глава обеспечивает необходимый предварительный материал.

В спектре суперструны отсутствует тахион, поэтому теория открытых суперструн может описывать стабильные D-браны. Так как D-браны теории бозонных струн всегда нестабильны, это открывает новые интересные возможности. В дотолнение к этому, суперструны обладают суперсимметрией. Суперсимметрия это симметрия, связывающая бозонные и фермионные квантовые состояния теории: в теории суперструн мы находим равное число фермионных и бозонных состояний на каждом уровне масс. Если суперсимметрия существует в природе, она должна быть спонтанно нарушена: мы не наблюдаем вырожденности между фермионами и бозонами. Многие физики полагают, что суперсимметрия является привлекательным кандидатом для той физики, которая лежит за пределами установленной в наши дни Стандартной модели физики частиц.

14.2. Антикоммутирующие переменные и операторы

Положение классических бозонных струн мы описываем, используя координаты струн $X^{\mu}(\tau, \sigma)$. Величины $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ являются классическими коммутирующими переменными: их произведения не зависят от порядка множителей. В квантовой теории X^{μ} становятся операторами, которые в общем случае не коммутируют. Неспособность двух операторов коммутировать заложена в коммутаторе $[A, B] \equiv AB - BA$.

Чтобы ввести в теорию струн фермионы, мы вводим новые динамические переменные на мировом листе $\psi_1^{\mu}(\tau, \sigma)$ и $\psi_2^{\mu}(\tau, \sigma)$. Классические переменные $\psi_{\alpha}^{\mu}(\alpha = 1, 2)$ не становятся обычными коммутирующими переменными, наоборот, они становятся антикоммутирующими переменными. Так как это важное понятие, отвлечемся ненадолго.

Говорят, что две переменные b_1 и b_2 антикоммутируют друг с другом, если

$$b_1 b_2 = -b_2 b_1. \tag{14.1}$$

Если b_1 и b_2 — антикоммутирующие переменные, верно большее: переменные должны антикоммутировать сами с собой. Иначе говоря, $b_1b_1 = -b_1b_1$, что означает

$$b_1b_1 = 0, \quad b_2b_2 = 0.$$
 (14.2)

Для классических антикоммутирующих переменных важен порядок множителей. Если у нас есть множество антикоммутирующих переменных b_i , помеченных индексом i, тогда

$$b_i b_j = -b_j b_i, \quad \forall i, j. \tag{14.3}$$

Упражнение-разминка 14.1. Проверьте, что матрицы γ^1 и γ^2 , определенные равенствами

$$\gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(14.4)

антикоммутируют, но не являются антикоммутирующими переменными.

Глава 14. Взгляд на релятивистские суперструны

В квантовой теории классические антикоммутирующие переменные становятся квантовыми операторами, которые иногда не способны антикоммутировать. Если даны два таких квантовых оператора f_1 и f_2 , неспособность антикоммутировать для этих операторов измеряется антикоммутатором $\{f_1, f_2\}$, который определен как

$$\{f_1, f_2\} \equiv f_1 f_2 + f_2 f_1. \tag{14.5}$$

Если два квантовых оператора антикоммутируют, их антикоммутатор равен нулю.

Мы можем объяснить, какое отношение имеют антикоммутирующие операторы к фермионам. Вспомним, например, что квантование скалярного поля привело к появлению операторов рождения и уничтожения, которые порождали частицы. Все операторы рождения a_p^{\dagger} коммутируют друг с другом и позволяют нам строить многочастичные состояния

$$(a_{p_1}^{\dagger})^{n_1} (a_{p_2}^{\dagger})^{n_2} \dots (a_{p_k}^{\dagger})^{n_k} |\Omega\rangle, \qquad (14.6)$$

содержащие n_1 частиц с импульсом \vec{p}_1 , n_2 частиц с импульсом \vec{p}_2 и т. д. Величины n_i — произвольные положительные целые числа.

Для описания релятивистского электрона и его античастицы — позитрона — используется классическое поле Дирака, являющееся классической антикоммутирующей полевой переменной. Квантование поля Дирака порождает операторы рождения и уничтожения для электронов, и другие операторы рождения и уничтожения для удобства, сосредоточимся на электронах. Операторы рождения $f_{p,s}^{\dagger}$ помечены импульсом \vec{p} и спином *s*. Электроны — частицы со спином 1/2, так что спиновая метка может принимать всего два значения. Все операторы рождения электронов являются антикоммутирующими переменными и все они антикоммутируют. В частности, это означает, что $f_{p,s}^{\dagger}f_{p,s}^{\dagger} = 0$ для любых \vec{p} и *s*. Многочастичное состояние электронов принимает вид

$$f_{p_1,s_1}^{\dagger} f_{p_2,s_2}^{\dagger} \dots f_{p_k,s_k}^{\dagger} |\Omega\rangle \qquad (14.7)$$

и описывает состояние, в котором есть электрон с импульсом \vec{p}_1 и спином s_1 , электрон с импульсом \vec{p}_2 и спином s_2 и т. д. Обратите внимание, что мы *не мо*жем получить состояния с двумя электронами, имеющими одинаковый импульс и одинаковый спин, так как $f_{p,s}^{\dagger}f_{p,s}^{\dagger}|\Omega\rangle = 0$. Антикоммутирующие операторы рождения автоматически подчиняются принципу запрета Паули. На самом деле если мы используем волновую функцию для создания суперпозиции состояний

$$\sum_{s_1, s_2} \int d\vec{p} \, \psi(p_1, s_1; p_2, s_2) f^{\dagger}_{p_1, s_1} f^{\dagger}_{p_2, s_2} |\Omega\rangle, \qquad (14.8)$$

мы быстро придем к выводу, что только та часть волновой функции ψ , которая антисимметрична относительно одновременной перестановки $p_1 \leftrightarrow p_2$ и $s_1 \leftrightarrow s_2$, дает вклад в приведенное выше состояние.

Упражнение-разминка 14.2. Докажите это утверждение.

364

14.3. Фермионы на мировом листе

Как отмечалось выше, классические суперструны требуют антикоммутирую **жих** динамических переменных $\psi_{\sigma}^{\mu}(\tau, \sigma)$ с $\alpha = 1, 2$. Напомним, что для каждого **ж**ачения μ динамическая переменная $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ есть бозон на мировом листе. Оказывается, что для каждого μ две компоненты ψ_{1}^{μ} и ψ_{2}^{μ} образуют переменные, жобходимые для описания фермиона в мире (τ, σ) , т. е. фермиона *на мировом исте*. Примечательно, что квантование таких объектов приводит к состояниям застиц, ведущих себя как фермионы *в пространстве-времени*, т. е. к тому, что мы котим.

При квантовании в калибровке светового конуса X^+ было положено пропорциональным τ , а решение для X^- было вырпжено через другие величины. В теории суперструн это сохраняется, но дополнительное условие калибровки светового конуса полагает $\psi_{\alpha}^+ = 0$ и позволяет решить уравнение для ψ_{α}^- . Обе величины, X^- и ψ_{α}^- , зависят от поперечных X^I и ψ_{α}^I . Так как X^{μ} и ψ_{α}^{μ} являются лоренцевскими векторами в пространстве-времени, они оба входят в определение лоренцевского генератора M^{-I} на световом конусе. Отсюда следует, что коммутатор $[M^{-I}, M^{-J}]$ зависит как от X^{μ} , так и от ψ_{α}^{μ} . Требование обращения этого коммутатора в нуль определяет условия, отличные от тех, которые были получены для бозонных струн. Число пространственно-временных измерений равно уже не 26, а 10, а сдвиг вниз квадрата массы равен минус одной второй вместо минус единицы.

В калибровке светового конуса нам нужно только разобраться с поперечными полями $\psi_{\alpha}^{I}(\tau, \sigma)$. Для изучения их квантования удобно записать действие, обозначенное S_{ψ} , которое описывает их динамику. Это действие есть фермионный аналог действия (12.81), которое описывает динамику поперечных координат X^{I} . Итак, если собрать все вместе, действие S, описывающее полный набор степеней свободы, принимает вид

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}^{I} \dot{X}^{I} - X^{I'} X^{I'} \right) + S_{\psi}, \qquad (14.9)$$

где

$$S_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma \left[\psi_{1}^{I} (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_{1}^{I} + \psi_{2}^{I} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \psi_{2}^{I} \right].$$
(14.10)

Действие S_{ψ} есть действие Дирака для фермиона, живущего в двумерном мире (τ, σ) . Обратим внимание, что каждое слагаемое в S_{ψ} содержит только одну производную. Для бозонов, таких как X^{I} , слагаемые в действии содержат две производные. Слагаемое в лагранжиане, связывающее поле с самим собой и имеющее только одну производную, рискует оказаться несущественной полной производной. Действительно, рассмотрим произвольное поле h и взаимодействие $h(\partial_{\tau}h)$. Имеем

$$h(\partial_{\tau}h) = \partial_{\tau}(hh) - (\partial_{\tau}h)h, \qquad (14.11)$$

или, эквивалентно,

$$h(\partial_{\tau}h) + (\partial_{\tau}h)h = \partial_{\tau}(hh). \tag{14.12}$$

Если поле h коммутирующее, два слагаемых в левой стороне равенства тождественны и $h(\partial_{\tau}h)$ действительно есть полная производная. Если поле h антикоммутирующее, то $(\partial_{\tau}h)h = -h(\partial_{\tau}h)$, тогда и левая, и правая стороны равенства обращаются в нуль. Отсюда мы делаем вывод, что $h(\partial_{\tau}h)$ в случае антикоммутирующего h не является полной производной. Это означает, что действие S_{ψ} нетривиально только из-за того, что поля ψ_{α}^{I} антикоммутируют.

Проварьируем поля ψ^{I}_{α} в S_{ψ} , чтобы получить уравнения движения и граничные условия. Имеем

$$\delta S_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma \left[\delta \psi_{1}^{I} (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_{1}^{I} + \psi_{1}^{I} (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \delta \psi_{1}^{I} + \delta \psi_{2}^{I} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \psi_{2}^{I} + \psi_{2}^{I} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \delta \psi_{2}^{I} \right].$$
(14.13)

Рассмотрим второе слагаемое в первой строке в правой части:

$$\psi_{1}^{I}(\partial_{\tau}+\partial_{\sigma})\delta\psi_{1}^{I} = \partial_{\tau}(\psi_{1}^{I}\delta\psi_{1}^{I}) + \partial_{\sigma}(\psi_{1}^{I}\delta\psi_{1}^{I}) - [(\partial_{\tau}+\partial_{\sigma})\psi_{1}^{I}]\delta\psi_{1}^{I} = \\ = \partial_{\tau}(\psi_{1}^{I}\delta\psi_{1}^{I}) + \partial_{\sigma}(\psi_{1}^{I}\delta\psi_{1}^{I}) + \delta\psi_{1}^{I}(\partial_{\tau}+\partial_{\sigma})\psi_{1}^{I}.$$
(14.14)

Аналогичное вычисление можно сделать для второго слагаемого во второй строке (14.13). Возвращаясь к уравнению и, как обычно, пренебрегая полными производными по времени, получаем

$$\delta S_{\psi} = \frac{1}{\pi} \int d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma \left[\delta \psi_{1}^{I} (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_{1}^{I} + \delta \psi_{2}^{I} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \delta \psi_{2}^{I} \right] + \frac{1}{2\pi} \int d\tau \left[\psi_{1}^{I} \delta \psi_{1}^{I} - \psi_{2}^{I} \delta \psi_{2}^{I} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$
(14.15)

Теперь можно немедленно получить уравнения движения

$$(\partial_{\tau} + \partial_{\sigma})\psi_1^I = 0, \quad (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma})\psi_2^I = 0.$$
 (14.16)

а также граничные условия

$$\psi_1^I(\tau,\sigma_*)\delta\psi_1^I(\tau,\sigma_*) - \psi_2^I(\tau,\sigma_*)\delta\psi_2^I(\tau,\sigma_*) = 0, \qquad (14.17)$$

которые должны выполняться во все моменты времени в точках $\sigma_* = 0$ и $\sigma_* = \pi$.

Используем полученные уравнения движения и граничные условия для обсуждения квантования и пространства состояний теории. Наш анализ будет неполным. В частности, мы не будем обсуждать соотношения антикоммутации. которым удовлетворяют поля ψ_a^I и, как результат, мы не вычислим соотношения антикоммутации соответствующих осцилляторов. Тем не менее, дискуссия осветит основные свойства квантования и все результаты будут выглядеть приемлемо. 14.3. Фермионы на мировом листе

Начнем с замечания, что уравнения движения (14.16) подразумевают, что ψ_1^I ізижется вправо, а ψ_2^I движется влево:

$$\begin{split} \psi_1^I(\tau,\sigma) &= \Psi_1^I(\tau-\sigma), \\ \psi_2^I(\tau,\sigma) &= \Psi_2^I(\tau+\sigma). \end{split} \tag{14.18}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (14.17). Что можем мы сделать, чтобы удовлетворить этим условиям? Небольшое размышление показывает, что попытки обратить в нуль все слагаемые в (14.17) не пройдут. Например, попробуем положить $\psi_1^I(\tau, 0) = 0$. Наше решение в (14.18) требует $\Psi_1^I(\tau) = 0$ для всех τ , откуда получается, что $\psi_1^I(\tau, \sigma) \equiv 0$.

Ситуация улучшается, если мы наложим граничные условия, связывающие \mathbf{v}_1^I и ψ_2^I в концевых точках. Для каждого σ_* примем, что

$$\psi_1^I(\tau,\sigma_*) = \pm \psi_2^I(\tau,\sigma_*), \qquad (14.19)$$

где выбор знака все еще требует определения. Если поля подчинены такому условию в консчной точке, их вариации также должны подчиняться этому условию:

$$\delta \psi_1^I(\tau,\sigma_*) = \pm \delta \psi_2^I(\tau,\sigma_*). \tag{14.20}$$

Отсюда следует, после умножения последних двух уравнений, что (14.17) выполняется при любом выборе знака.

Обсудим теперь знаки. Так как и ψ_1^I , и ψ_2^I входят в действие квадратично, их знаки могут изменяться без физических последствий. Этот произвол, по соглашению, используется для того, чтобы потребовать в конечной точке $\sigma_* = 0$

$$\psi_1^I(\tau,0) = \psi_2^I(\tau,0). \tag{14.21}$$

Так как мы не можем изменить знак ψ_1^I или ψ_2^I без изменения этого условия, выбор знака в другой конечной точке физически существен:

$$\psi_1^I(\tau,\pi) = \pm \psi_2^I(\tau,\pi). \tag{14.22}$$

Пространство состояний полной теории суперструн разбивается на два подпространства или, как их обычно называют, два *сектора*: сектор Рамона (R), содержащий состояния, возникающие при использовании выбора верхнего знака, и сектор Невье—Шварца (NS), содержащий состояния, возникающие при использовании выбора нижнего знака. Граничные условия становятся более понятными, если построить фермионное поле Ψ^I , определенное на всем интервале $\sigma \in [-\pi, \pi]$:

$$\Psi^{I}(\tau,\sigma) \equiv \begin{cases} \psi_{1}^{I}(\tau,\sigma), & \sigma \in [0,\pi], \\ \psi_{1}^{I}(\tau,-\sigma), & \sigma \in [-\pi,0]. \end{cases}$$
(14.23)

Эта конструкция напоминает формулу (12.36), которая определяет поле на интервале $\sigma \in [-\pi, \pi]$ для открытых бозонных струн. Граничное условие (14.21)

1

367

гарантирует, что Ψ^{I} непрерывна в точке $\sigma = 0$. Кроме того, с учетом (14.18) $\Psi^{I}(\tau, \sigma)$ есть функция $\tau - \sigma$:

$$\Psi^{I}(\tau,\sigma) = \chi^{I}(\tau-\sigma). \qquad (14.24)$$

Наконец, граничное условие (14.22) дает

$$\Psi^{I}(\tau,\pi) = \psi_{1}^{I}(\tau,\pi) = \pm \psi_{2}^{I}(\tau,\pi) = \pm \Psi^{I}(\tau,-\pi).$$
(14.25)

Таким образом, мы установили, что периодический фермион Ψ^{I} соответствует граничным условиям Рамона, а антипериодический фермион Ψ^{I} соответствует граничным условиям Невье—Шварца:

$$\Psi^{I}(\tau,\pi) = +\Psi^{I}(\tau,-\pi)$$
 граничные условия Рамона,
 $\Psi^{I}(\tau,\pi) = -\Psi^{I}(\tau,-\pi)$ граничные условия Невье—Шварца. (14.26)

Рассмотрим детальнее оба случая.

14.4. Сектор Невье—Шварца

Так как фермион Невье—Шварца Ψ^{I} есть функция $\tau - \sigma$ и изменяет знак при $\sigma \to \sigma + 2\pi$, он должен быть разложен по степеням с дробными модами:

$$\Psi^{I}(\tau,\sigma) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_{r}^{I} e^{-ir(\tau-\sigma)}, \qquad (14.27)$$

с точностью до нормировочного множителя, который мы не будем обсуждать. Действительно, для любого r = n + 1/2 с целым n имеем

$$e^{ir(\sigma+2\pi)} = e^{ir\sigma} e^{i(n+1/2)2\pi} = e^{ir\sigma} e^{i\pi} = -e^{ir\sigma}, \qquad (14.28)$$

что гарантирует антипериодичность Ψ^{I} . Так как Ψ^{I} антикоммутирует, коэффициенты разложения b_{r}^{I} являются антикоммутирующими операторами. Следуя нашим обычным обозначениям, коэффициенты с отрицательными модами $b_{-1/2}^{I}, b_{-3/2}^{I}, b_{-5/2}^{I}, \ldots$ являются операторами рождения, а коэффициенты с положительными модами $b_{1/2}^{I}, b_{3/2}^{I}, b_{5/2}^{I}, \ldots$ — операторами уничтожения. Эти операторы действуют на вакуум, называемый поэтому вакуумом Невье—Шварца (NS). Операторы удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}.$$
 (14.29)

Если учесть, что все операторы рождения антикоммутируют друг с другом, а квалрат каждого равен нулю, каждый оператор b_{-r}^{I} может входить в любое состояние не более одного раза. Так как $X^{I}(\tau, \sigma)$ квантованы как обычно, у нас еще имеются операторы рождения α_{-n}^{I} . Таким образом, состояния в секторе NS имеют следующий вид.

Certop NS:
$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^{9} \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^{I})^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^{9} \prod_{r=1/2,3/2,...} (b_{-r}^{J})^{\rho_{r,J}} |NS\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle.$$
 (14.30)

Здесь $\rho_{r,J}$ равны либо нулю, либо единице. Мы записали полное основное состояние как «произведение» \otimes основного состояния $|NS\rangle$ для операторов b_{-r}^{J} и основного состояния $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ для операторов α_{-n}^{I} . Порядок, в котором операторы *b* возникают в состоянии, не имеет значения, если мы рассматриваем отдельное состояние. Так как все *b* антикоммутируют, различные упорядочения могут только изменить общий знак, но при этом не возникнет новых состояний.

Оператор квадрата массы в секторе NS перед нормальным упорядочением дается выражением

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha^{I}_{-p} \alpha^{J}_{p} + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} r b^{I}_{-r} b^{J}_{r} \right).$$
(14.31)

Чтобы найти константу упорядочения $a \ge M^2$, т.е. ту константу, которая должна быть добавлена в скобки предыдущего выражения, когда суммы заменяются на нормально упорядоченные выражения, мы можем использовать эвристический метод, основанный на ζ -функциях. Для бозонных осцилляторов α^I мы знаем, что каждая координата вносит вклад в a, равный -1/24. Мы запишем эту часть как

$$a_B = -\frac{1}{24}.$$
 (14.32)

Для NS-фермионов слагаемые в M^2 , требующие упорядочения равны

$$\frac{1}{2} \sum_{r=-1/2, -1/2, \dots} r b_{-r}^{I} b_{r}^{I} = \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 1/2, \dots} (-r) b_{r}^{I} b_{-r}^{I} = \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^{I} b_{r}^{I} - \frac{1}{2} (D-2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots \right).$$
(14.33)

На первом шаге мы заменяем $r \rightarrow -r$, а на втором шаге используем антикоммутатор (14.29). Сумма по нечетным положительным целым числам была вычислена в (13.116) и оказалась равна +1/12. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{r=-1/2, -3/2, \dots} r b_{-r}^{I} b_{r}^{I} = \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^{I} b_{r}^{I} - \frac{1}{48} (D-2).$$
(14.34)

Мы нашли, таким образом, что каждый фермион NS (антипериодический фермион) вносит в *а* вклад *a*_{NS}, равный

$$a_{\rm NS} = -\frac{1}{48}.$$
 (14.35)

Таким образом, полная константа упорядочения для M^2 равна

$$a = (D-2)(a_B + a_{NS}) = (D-2)\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{48}\right) = -(D-2)\frac{1}{16}.$$
 (14.36)

При D = 10 находим a = -1/2, и поэтому из (14.31) получаем

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^{\perp} \right), \quad \text{где} \quad N^{\perp} = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{p}^{I} + \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^{I} b_{r}^{I}. \quad (14.37)$$

Оператор N^{\perp} есть оператор числа «частиц», подсчитывающий вклады от α^{I} и b^{I} .

() Упражнение-разминка 14.3. Для проверки того, что N^{\perp} включает вклад фермионов в число «частиц», покажите, что собственное значение N^{\perp} при действии на состояние $b_{-r_1}^{I}b_{-r_2}^{J}|\text{NS}\rangle$ при $r_1, r_2 > 0$ равно $r_1 + r_2$.

Теперь мы можем перечислить первые несколько уровней состояний в секторе NS. Упорядоченный по собственному значению числа «частиц» или, эквивалентно, по квадрату массы список имеет вид

$$\alpha' M^{2} = -\frac{1}{2}, \ N^{\perp} = 0 : |NS\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle,$$

$$\alpha' M^{2} = 0, \ N^{\perp} = \frac{1}{2} : b_{-1/2}^{I} |NS\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle,$$

$$\alpha' M^{2} = \frac{1}{2}, \ N^{\perp} = 1 : \{\alpha_{-1}^{I}, b_{-1/2}^{I} b_{-1/2}^{J}\} |NS\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle,$$

$$\alpha' M^{2} = 1, \ N^{\perp} = \frac{3}{2} : \{\alpha_{-1}^{I} b_{-1/2}^{J} b_{-3/2}^{I}, b_{-1/2}^{I} b_{-1/2}^{J}\} |NS\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle.$$
(14.38)

Состояния с $N^{\perp} = 0$ имеют $\alpha' M^2 = -1/2$. Состояния с $N^{\perp} = 1/2$ безмассовые. Их всего восемь, и они помечены векторным индексом *I*.

• Упражнение-разминка 14.4. Сколько имеется состояний при $N^{\perp} = 3/2$?

Полезно иметь оператор, значение которого равно +1, если состояние бозонное, и -1, если состояние фермионное. Обычно этот оператор обозначают (-1)^{*F*}, где *F* — число фермионов. Это разумно: состояния с четным фермионным числом бозонные, а состояния с нечетным фермионным числом — фермионные. Чтобы вычислить (-1)^{*F*} для любого состояния, мы должны сначала определить собственные значения (-1)^{*F*} для основных NS-состояний: $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$. Объявим, что это число есть -1, таким образом определив основные состояния как фермионные:

$$(-1)^{F}|\mathrm{NS}\rangle\otimes|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle=-|\mathrm{NS}\rangle\otimes|p^{+},\vec{p}_{T}\rangle.$$
(14.39)

Собственное значение $(-1)^{F}$, действующего на состояние, равно -1, умноженной на последовательность множителей (-1), по одному на каждый фермионных

370

осциллятор, имеющийся в этом состоянии. Таким образом, действуя на произвольное состояние (14.30), получаем

$$(-1)^{F}|\lambda\rangle = (-1)^{\sum_{r,J}\rho_{r,J}}|\lambda\rangle.$$
(14.40)

Технически этот результат получается, если мы вычислим антикоммутатор $(-1)^{F}$ со всеми фермионными операторами

$$\left\{ (-1)^F, b_r^I \right\} = 0. \tag{14.41}$$

Рассмотрим снова наш список состояний (14.38). Так как фермионные осцилляторы вносят в N^{\perp} полуцелые числа, состояния с целым N^{\perp} должны содержать четное количество фермионных осцилляторов. Таким образом, все состояния с целым N^{\perp} имеют $(-1)^{F} = -1$; это фермионные состояния. Все состояния с полуцелыми N^{\perp} имеют нечетное число фермионных осцилляторов и поэтому $(-1)^{F} = +1$. Это бозонные состояния, и они включают восемь безмассовых состояний второй строки в таблице.

Фермионный или бозонный характер состояний, которые мы обсуждали ло сих пор, ограничен мировым листом (τ , σ), на котором поля Ψ — фермионы. Позднее мы обсудим, являются ли приведенные выше состояния фермионами или бозонами в пространстве-времени.

14.5. Сектор Рамона

В случае граничных условий Рамона (14.26) поле Ψ^{I} периодично и может быть разложено по осцилляторам с целыми модами:

$$\Psi^{I}(\tau,\sigma) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^{I} e^{-in(\tau-\sigma)}.$$
(14.42)

Так как Ψ^{I} антикоммутируют, осцилляторы d_{n}^{I} являются антикоммутирующими операторами. Снова определим осцилляторы с отрицательными модами $d_{-1}^{I}, d_{-2}^{I}, d_{-3}^{I}, \ldots$ как операторы рождения, а с положительными модами $d_{1}^{I}, d_{2}^{I}, d_{3}^{I}, \ldots$ как операторы уничтожения. Осцилляторы Рамона удовлетворяют антикоммутационному соотношению

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}.$$
 (14.43)

Как и в секторе NS, все операторы рождения Рамона антикоммутируют и в результате могут возникать самое большее один раз в любом заданном состоянии.

Фермионы Рамона сложнее фермионов NS, так как восемь фермионных нулевых мод d_0^I следует рассматривать с осторожностью. Оказывается, что эти восемь операторов можно организовать с помощью простых линейных комбинаций в четыре оператора рождения и четыре оператора уничтожения. Обозначим четыре оператора рождения

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4.$$
 (14.44)

Так как эти операторы рождения являются нулевыми модами, они не дают вклада в квадрат массы состояний. Если постулировать единственный вакуум $|0\rangle$, операторы рождения позволяют построить $16 = 2^4$ вырожденных основных состояний Рамона. На самом деле восемь из этих состояний содержат четное число ξ , действующих на $|0\rangle$, а другие восемь имеют нечетное число ξ , действующих на $|0\rangle$. В явном виде восемь состояний $|R_a\rangle$, a = 1, 2, ..., 8 с четным числом операторов рождения имеют следующий вид.

Состояния
$$|R_a\rangle$$
:
$$\begin{cases} |0\rangle, \\ \xi_1\xi_2|0\rangle, \xi_1\xi_3|0\rangle, \xi_1\xi_4|0\rangle, \xi_2\xi_3|0\rangle, \xi_2\xi_4|0\rangle, \xi_3\xi_4|0\rangle, \\ \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4|0\rangle. \end{cases}$$
 (14.45)

Восемь состояний $|R_{\bar{a}}\rangle$, $\bar{a} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}$ с нечетным числом операторов рождения имеют следующий вид.

Состояния
$$|R_{\bar{a}}\rangle$$
:
$$\begin{cases} \xi_1|0\rangle, \xi_2|0\rangle, \xi_3|0\rangle, \xi_4|0\rangle, \\ \xi_1\xi_2\xi_3|0\rangle, \xi_1\xi_2\xi_4|0\rangle, \xi_1\xi_3\xi_4|0\rangle, \xi_2\xi_3\xi_4|0\rangle. \end{cases}$$
 (14.46)

Состояния $|R_a\rangle$ и $|R_{\bar{a}}\rangle$ образуют полный набор вырожденных основных состояний Рамона, обозначающихся как $|R_A\rangle$, A = 1, ..., 16. Сектор Рамона пространства состояний содержит состояния

Certop R
$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^{9} \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^{I})^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^{9} \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^{J})^{\rho_{m,J}} |\mathbf{R}_{A}\rangle \otimes |p^{+}, \vec{p}_{T}\rangle.$$
 (14.47)

Здесь $\rho_{m,J}$ равны нулю или единице.

Как и в случае сектора NS, сектор Рамона содержит оператор $(-1)^{F}$. Этот оператор антикоммутирует со всеми фермионными осцилляторами, включая нулевые моды:

$$\left\{(-1)^F, d_n^I\right\} = 0, \qquad (14.48)$$

и, дополнительно, мы по соглашению объявляем |0> фермионным состоянием:

$$(-1)^F|0\rangle = -|0\rangle. \tag{14.49}$$

Отсюда следует, что все восемь состояний $|R_a\rangle$ являются фермионными, а все восемь состояний $|R_{\bar{a}}\rangle$ — бозонными.

Оператор квадрата массы в секторе R перед нормальным упорядочением определяется выражением

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{p}^{I} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n d_{-n}^{I} d_{n}^{I} \right).$$
(14.50)

Для фермионов R требующие упорядочения слагаемые имеют вид

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-1,-2,\ldots}nd_{-n}^{I}d_{n}^{I}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1,2,\ldots}nd_{n}^{I}d_{-n}^{I}=$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} n d_{-n}^{I} d_{n}^{I} - \frac{1}{2} (D-2)(1+2+3+\dots) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} n d_{-n}^{I} d_{n}^{I} + \frac{1}{24} (D-2).$$
(14.51)

Таким образом, получаем, что вклад упорядочения от (периодического) фермиона Рамона равен

$$a_{\rm R} = \frac{1}{24}.$$
 (14.52)

Это число в точности противоположно числу a_B . Так как имеется равное число бозонных координат X^I и фермионов Рамона, их соответствующие вклады в нормальное упорядочение в квадрате массы сокращаются, и из (14.50) получаем

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \ge 1} (\alpha_{-n}^{I} \alpha_{n}^{I} + n d_{-n}^{I} d_{n}^{I}). \qquad (14.53)$$

Из этой формулы следует, что все основные состояния Рамона не имеют массы. Приведем список состояний для различных масс.

$$\begin{aligned}
\alpha' M^{2} &= 0; & |R_{a}\rangle \parallel |R_{\bar{a}}\rangle, \\
\alpha' M^{2} &= 1; & \alpha_{-1}^{I} |R_{a}\rangle, d_{-1}^{I} |R_{\bar{a}}\rangle \parallel \alpha_{-1}^{I} |R_{\bar{a}}\rangle, d_{-1}^{I} |R_{a}\rangle, \\
\alpha' M^{2} &= 2; & \left\{\alpha_{-2}^{I}, \alpha_{-1}^{J} \alpha_{-1}^{J}, d_{-1}^{I} d_{-1}^{J}\right\} |R_{a}\rangle \parallel \left\{\alpha_{-2}^{I}, \alpha_{-1}^{I} \alpha_{-1}^{J}, d_{-1}^{I} d_{-1}^{J}\right\} |R_{\bar{a}}\rangle, \\
& \left\{\alpha_{-1}^{I} d_{-1}^{J}, d_{-2}^{I}\right\} |R_{\bar{a}}\rangle \parallel \left\{\alpha_{-1}^{I} d_{-1}^{J}, d_{-2}^{I}\right\} |R_{a}\rangle.
\end{aligned}$$
(14.54)

Мы разделили состояния на две группы с одинаковым числом состояний: слева от разделительных черточек мы поместили состояния с $(-1)^F = -1$ (фермионные состояния), а справа от черточек поместили состояния с $(-1)^F = +1$ (бозонные состояния). Заметим, что каждому состоянию слева соответствует состояние справа, построенное на основном состоянии с противоположным фермионным числом. Появление равного числа бозонных и фермионных состояний на любом уровне массы есть сигнал о наличии суперсимметрии. Однако, это суперсимметрия мирового листа. Как мы вскоре увидим, пространственно-временная суперсимметрия возникает только после того, как мы скомбинируем состояния секторов Невье—Шварца и Рамона.

14.6. Подсчет состояний

Прежде чем строить теорию суперсимметрии, отвлечемся и попробуем понять, как подсчитывать число состояний в теории струн при любой заданной массе. Наша цель — получить производящие функции, с помощью которых могут быть получены эти числа для секторов NS и R. Производящие функции используются для определения числа состояний через их степенной ряд. В типичном случае мы определем такую функцию f(x), чтобы

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n, \qquad (14.55)$$

где a(n) — число состояний, скажем, при $N^{\perp} = n$. Допустим, что у нас есть только один осциллятор a_1^{\dagger} . Тогда имеется ровно одно состояние $|0\rangle c N^{\perp} = 0$, одно состояние $a_1^{\dagger}|0\rangle c N^{\perp} = 1$ и, на самом деле, одно состояние $(a_1^{\dagger})^k|0\rangle c N^{\perp} = k$. Отсюда следует, что функция $f_1(x)$, соответствующая этой системе, имеет вид

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$
 (14.56)

Предположим, мы имеем ровно один осциллятор a_2^{\dagger} с волновым числом два. Тогда мы получаем один вакуум и одно состояние для каждого четного значения N^{\perp} , так что в этом случае функция $f_2(x)$ принимает вид

$$f_2(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}.$$
 (14.57)

Возникает вопрос: какова функция $f_{12}(x)$, сооветствующая состояниям, построенным с использованием как a_1^{\dagger} , так и a_2^{\dagger} ? Чтобы получить эти состояния, мы образуем все произведения, в которых первый множитель есть состояние, построенное с помощью a_1^{\dagger} , а второй множитель — состояние, построенное с помощью a_2^{\dagger} . При образовании этих произведений приходится передвигать основные состояния, перемножать осцилляторы и восстанавливать основные состояния. Отсюда следует, что f_{12} определяется произведением f_1 и f_2 :

$$(1 + x + x^{2} + x^{3} + ...)(1 + x^{2} + x^{4} + x^{6} + ...).$$
 (14.58)

Чтобы помочь воображению, можно поместить осцилляторный состав состояния в производящие функции:

$$\left(1+a_{1}^{\dagger}x+(a_{1}^{\dagger})^{2}x^{2}+(a_{1}^{\dagger})^{3}x^{3}+\ldots\right)\left(1+a_{2}^{\dagger}x^{2}+(a_{2}^{\dagger})^{2}x^{4}+(a_{2}^{\dagger})^{3}x^{6}+\ldots\right).$$

Ясно, что произведение образует все возможные состояния, и состояния с $N^{\perp} = k$ возникают вместе с x^{k} . Отсюда становится ясным, что (14.58) дает правильные ответ:

$$f_{12}(x) = f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}$$
 (14.59)

Если мы используем осцилляторы $a_1^{\dagger}, a_2^{\dagger}, a_3^{\dagger}, \dots$ со всеми волновыми числами производящая функция равна

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \dots \qquad (14.64)$$

374

Показанное использование производящей функции общепринято. Рассмотрим пространство состояний с осцилляторами типа A и производящей функцией $f_A(x)$, а также пространство состояний с осцилляторами типа B и производящей функцией $f_B(x)$. Тогда производящей функцией для пространства состояний, построенных с помощью осцилляторов типа A и B будет $f_{AB}(x) = f_A(x)f_B(x)$.

В качестве приложения вычислим производящую функцию для теории бозонных открытых струн. В этой теории имеются осцилляторы всех волновых чисел, но они возникают в 24 видах, по одному на каждое поперечное направление на световом конусе. Так как каждому виду соответствует производящая функция (14.60), полная производящая функция для теории бозонных открытых струн получается возведением правой части (14.60) в 24-ю степень:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}.$$
 (14.61)

Так как квадрат массы более физическая величина, чем N^{\perp} , полезно при определении производящей функции использовать $\alpha' M^2$ вместо N^{\perp} . В основанной на $\alpha' M^2$ производящей функции коэффициент при x^k подсчитывает число состояний с $\alpha' M^2 = k$. Для открытых бозонных струн $\alpha' M^2 = N^{\perp} - 1$, так что $\alpha' M^2$ -производящая функция получается путем деления N^{\perp} -производящей функции на одну степень x. В результате, производящая функция $f_{os}(x)$ в теории бозонной открытой струны есть

$$f_{os}(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}.$$
 (14.62)

С помощью калькулятора легко находим, что

$$f_{os}(x) = \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + 25650x^3 + 176256x^4 + \dots \qquad (14.63)$$

Это выражение напоминает нам, что имеется тахион с $\alpha' M^2 = -1$, 24 безмассовых состояния максвелловского поля и 324 состояния с $\alpha' M^2 = +1$.

- () Упражнение-разминка 14.5. Используя биномиальную формулу, самостоятельно вычислите слагаемые в $f_{os}(x)$ вплоть до членов порядка $\mathcal{O}(x^2)$ включительно.
- Упражнение-разминка 14.6. Постройте в явном виде все состояния с α' M² = 2 и подсчитайте их число, проверив, что оно действительно равно 3200. Вам может оказаться полезной формула подсчета из задачи 12.11.

Чтобы получить производящие функции для секторов NS и R, нужно понять, как считать состояния, построенные с фермионными осцилляторами. К счастью, это делается легко. Опять начнем с использования N^{\perp} и предположим, что у нас есть один фермионный оператор рождения f_{-r} , дающий вклад r в N^{\perp} . Для такого осциллятора можно построить только два состояния $|0\rangle$ и $f_{-r}|0\rangle$. Тогда производящая функция есть

$$f_r(x) = 1 + x^r. (14.64)$$

Так как сектор NS содержит осцилляторы $b_{-1/2}^I$, $b_{-3/2}^I$, ... восьми видов, связанная с ними производящая функция равна

$$\left[(1+x^{1/2})(1+x^{3/2})(1+x^{5/2})\dots\right]^8 = \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{n-\frac{1}{2}})^8.$$
(14.65)

Вспоминая, что $\alpha' M^2 = N^{\perp} - 1/2$ и что у нас имеется восемь бозонных координат, основанная на $\alpha' M^2$ производящая функция $f_{NS}(x)$ для сектора NS равна

$$f_{\rm NS}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n-\frac{1}{2}}}{1 - x^n} \right)^8.$$
(14.66)

Разлагая до нескольких первых порядков, получаем

$$f_{\rm NS}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8 + 36\sqrt{x} + 128x + 402x\sqrt{x} + 1152x^2 + \dots \qquad (14.67)$$

Это разложение учитывает наличие тахиона при $\alpha' M^2 = -1/2$, восьми безмассовых состояний и 36 состояний с $\alpha' M^2 = 1/2$. Соответствующие состояния перечислены в (14.38).

Для сектора Рамона имеем $\alpha' M^2 = N^{\perp}$, без всякой добавки. Так как фермионные осцилляторы $d_{-1}^{I}, d_{-2}^{I}, \ldots$ нумеруются целыми числами, получаем

$$f_{\rm R}(x) = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8.$$
(14.68)

Общий множитель возникает из-за того, что каждая комбинация осцилляторов порождает 16 состояний, действуя на каждое из доступных основных состояний. Степенное разложение (14.68) есть

$$f_{\rm R}(x) = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 + \dots$$
 (14.69)

Производящая функция NS содержит как целые, так и полуцелые степени \mathbf{r} . в то время как производящая функция R содержит в разложении только целые степени \mathbf{x} . Обратим внимание, что коэффициенты в разложении R на самом деле в два раза больше соответствующих коэффициентов NS. Как мы увилим в следующем разделе, это не случайно.

14.7. Открытые суперструны

Мы видели, что сектор Рамона обладает суперсимметрией мирового листи на каждом массовом уровне имеется равное число фермионных и бозонных состояний. Рассмотрим, например, основные состояния. Их всего шестналить полученных действием на $|0\rangle$ четырех линейные комбинаций, построенных из нолученных мод d_0^I . Состояния разбиваются на две группы $|R_a\rangle$ и $|R_{\bar{a}}\rangle$, каждая содержив восемь состояний с противоположными значениями $(-1)^F$.

Так как d_0^I несут лоренцевский индекс, они образуют лоренцевский вектор преобразуются как вектор при лоренцевских преобразованиях. Однако основные состояния построены сложным образом с использованием нулевых мод (см. (14.45) и (14.46)), так что они *не* преобразуются как векторы. На самом деле при лоренцевских преобразованиях $|R_a\rangle$ преобразуются сами в себя, и это же происколит с $|R_{\bar{a}}\rangle$. Оба преобразуются как спиноры, тип преобразования, подходящий 11я состояний, являющихся фермионами в *пространстве-времени*. Оба индекса *а* н \bar{a} являются спинорными, но они отмечают несколько различные спиноры. Это отражает тот факт, что в десятимерном пространстве-времени существуют два разных типа фермионов. Забавно, что если у вас есть только один фермион, нет никакого смысла спрашивать, какого он типа, но как только у вас стало два фермиона, вы можете спросить, принадлежат ли они одному типу или двум разным типам.

Итак, получим ли мы два пространственно-временных фермиона из основных состояний сектора R? Есть две причины полагать, что ответ должен быть отрицательным. Во-первых, есть нечто странное в том, чтобы получать пространственно-временные фермионы как из $|R_a\rangle$, так и из $|R_{\bar{a}}\rangle$, потому что у этих состояний противоположные значения $(-1)^F$ и, следовательно, довольно разный характер коммутации. Во-вторых, при двух пространственно-временных фермионах мы не получим пространственно-временной суперсимметрии. Отождествление $|R_a\rangle$ с пространственно-временными фермионами и $|R_{\bar{a}}\rangle$ — с пространственвенные но-временными бозонами тоже не подходит, так как пространственно-временные бозоны не могут нести спинорный индекс.

Таким образом возникает стратегия: так как все состояния в секторе R имеют спинорный индекс, мы только попытаемся вытащить пространственно-временные фермионы из этого сектора. Заметим также, что все фермионы должны возникать из состояний с одним и тем же значением $(-1)^F$. Следуя Льоцци, Шерку и Олайву (GSO), попробуем обрезать сектор Рамона до множества состояний с $(-1)^F = -1$. Эти состояния размещены слева от черточек в (14.54). С учетом наших соглашений, это фермионные состояния на мировом листе, которые теперь понимаются как состояния пространственно-временных фермионов. Получившийся усеченный сектор называется сектором R-. Сектор R+ определяется как множество состояний R с $(-1)^F = +1$. На каждом массовом уровне он содержит то же число состояний, что и сектор R-.

После этого усечения производящая функция (14.68) для сектора Рамона сводится к выражению

$$f_{\rm R-}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8, \qquad (14.70)$$

так как каждая комбинация осцилляторов действует теперь только на восемь основных состояний, относящихся к типу, позволяющему получить $(-1)^F = -1$. Разлагая в степенной ряд, имеем

$$f_{R-}(x) = 8 + 128x + 1152x^2 + 7680x^3 + 42112x^4 + \dots$$
 (14.71)

Здесь содержится восемь безмассовых фермионных состояний.

Пересмотрим теперь состояния сектора NS. В нем нет состояний, несущих спинорные индексы, так что попытаемся получить пространственно-временные бозоны из этого сектора. Основные состояния $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ содержат тахионы и имеют $(-1)^F = -1$. Безмассовые состояния $b_{-1/2}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ несут лоренцевский векторный индекс, так что они естественно отождествляются с восемью фотонными состояниями, возникающими из десятимерного максвелловского калибровочного поля. Мы хотим попробовать совместить эти восемь состояний с восемью безмассовыми фермионными состояниями из сектора R. Так как все бозоны должны возникать из состояний с одним и тем же значением $(-1)^F$, мы усекаем сектор NS до множества состояний с $(-1)^F = +1$. Результирующие состояния образуют так называемый сектор NS+. Этот сектор содержит безмассовые состояния, и в нем отброшены тахионные состояния. Кроме того, как объяснялось выше, все состояния с $(-1)^F = +1$ имеют нечетное число фермионных осцилляторов и целое значение $\alpha' M^2$. Множество уровней квадратов массы в секторе NS+ совпадает с множеством уровней квадратов массы в секторе R. Сектор NS-, по определению, содержит все состояния сектора NS с $(-1)^F = -1$. В секторе NS- содержится тахион.

Наши результаты серьезно указывают на то, что полная теория открытой струны, определенная аддитивной комбинацией множества состояний из секторов R- и NS+, имеет суперсимметричный спектр. Действительно, уровни целых квадратов массы в производящей функции NS (14.67) имеют вырожденные состояния, которые согласуются с вырожденными состояниями (14.71) сектора R-.

Чтобы увидеть, согласуются ли числа фермионных и бозонных состояний для всех уровней, нам нужно построить производящую функцию $f_{NS+}(x)$ для сектора NS+. Если взять $f_{NS}(x)$ в (14.66) и изменить знак внутри каждого множителя в числителе

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{n-\frac{1}{2}}}{1 - x^n} \right)^8, \qquad (14.72)$$

единственным эффектом будет изменение знака каждого члена производящей функции, описывающей состояния с нечетным числом фермионов. Так как это как раз те состояния, к которым мы стремились, мы можем получить желаемую производящую функцию вычитанием (14.72) из (14.66) и делением на два:

$$f_{\rm NS+}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right].$$
(14.73)

Для пространственно-временной суперсимметрии нам нужно, чтобы выполнялось равенство $f_{NS+}(x) = f_{R-}(x)$, или в явном виде

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8.$$
(14.74)

Это хитроумное тождество было доказано Карлом Густавом Якобом Якоби в исследовании по эллиптическим функциям, опубликованном в 1829 г. Якоби назвал формулу (14.72) малопонятным тождеством: *aequatio identica satis abstrusa*. В наши дни мы узнаем в нем ключевое уравнение, лежащее в основе суперсимметричной теории струн. Критическая размерность 10 также видна в степенях восемь с обоих сторон тождества.

Конструктивная теория открытых суперструн есть теория единственной заполняющей пространство стабильной D9-браны. D-брана стабильна, так как в теории нет тахиона.

14.8. Теории замкнутых струн

Мы видели в главе 13, что простейшие замкнутые струны можно получить путем мультипликативной комбинации копий открытой струны, движущихся вправо и влево. Это же верно и для теории замкнутых суперструн, но, так как открытая суперструна имеет два сектора (NS и R), секторы замкнутой струны можно построить четырьмя способами, комбинируя левый сектор (NS или R) с правым (NS или R). В результате появляются четыре сектора замкнутой струны.

Секторы замкнутой струны: (NS, NS), (NS, R), (R, NS) (R, R). (14.75)

По соглашению, левый (L) сектор в (\cdot, \cdot) должен соответствовать движению влево, а правый (R) — вижению вправо. У нас также есть операторы $(-1)^{F_L}$ и $(-1)^{F_R}$, подсчитывающие фермионы в L и R секторах, соответственно. В открытых суперструнах пространственно-временные бозоны возникают из сектора NS, а пространственно-временные фермионы возникают из сектора R. В теориях замкнутых суперструн пространственно-временные бозоны возникают из сектора (NS, NS), а также из сектора (R, R), так как он «дважды» фермионный. Пространственно-временные фермионы возникают из секторов (NS, R) и (R, NS).

Чтобы получить теорию замкнутой струны с суперсимметрией, мы должны отсечь четыре сектора. Согласованное усечение возникает тогда, когда мы для начала используем усеченные левые и правые секторы. Например, пусть мы взяли

левый сектор:
$${NS+ \ R-}$$
, правый сектор: ${NS+ \ R+}$. (14.76)

Мультипликативно комбинируя эти секторы, находим четыре сектора суперструны типа IIA.

Тип IIA:
$$(NS+, NS+)$$
, $(NS+, R+)$, $(R-, NS+)$ $(R-, R+)$. (14.77)

В теории замкнутых струн значение квадрата массы определяется выражением

:

ş

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = \alpha' M_L^2 + \alpha' M_R^2, \qquad (14.78)$$

где M_L^2 и M_R^2 обозначают операторы квадрата массы в теориях открытых струн, которые используются для построения левых и правых секторов, соответственно. Как полагается замкнутым струнам, имеется также условие согласованности

уровней $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$. Это условие гарантируст то, что левый и правый секторы дадут одинаковые вклады в квадрат массы: $\alpha' M_L^2 = \alpha' M_R^2$. Невозможно построить левый и правый секторы, если левый и правый квадраты массы не совпадают.

Суперструна типа IIA не имеет тахионов, а ее безмассовые состояния получены путем комбинации безмассовых состояний из различных секторов:

(NS+, NS+) :	$\bar{b}_{-1/2}^{I} \mathrm{NS}\rangle_{L}$	$\otimes b^J_{-1/2} { m NS} angle_R$	$\otimes p^+, ec{p}_T angle,$	(14.79)
(NS+, R+) :	$ar{b}^{I}_{-1/2} \mathrm{NS} angle_{L}$	$\otimes \mathbf{R}_{\bar{b}}\rangle_{R}$	$\otimes p^+, \vec{p}_T \rangle,$	(14.80)
(R-, NS+) :	$ { m R}_a angle_L$	$\otimes b^{I}_{-1/2} \mathrm{NS}\rangle_{R}$	$\otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$,	(14.81)
(R-, R+) :	$ \mathbf{R}_{a}\rangle_{L}$	$\otimes \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{h}}}\rangle_{\mathbf{R}}$	$\otimes p^+, \vec{p}_T\rangle.$	(14.82)

Состояния в (14.79) несут два независимых векторных индекса *I*, *J*, пробегающих восемь значений. Поэтому всего имеется 64 бозонных состояния. Точно так же, как безмассовые состояния в теории бозонной замкнутой струны, они несут два векторных индекса. Поэтому мы получаем гравитон, поле Кальба—Рамона и дилатон.

(NS+, NS+) безмассовое поле:
$$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$$
. (14.83)

Упражнение-разминка 14.7. Посчитайте числа состояний гравитона, поля Калба—Рамона и дилатона в 10 измерениях. Сложите эти числа и убедитесь, что получится 64.

Состояния в (14.80) и (14.81) включают только один вакуум Рамона, и поэтому являются пространственно-временными фермионами. При a = 1, ..., 8и $\bar{b} = \bar{1}, ..., \bar{8}$ получается всего $2 \times 8 \times 8 = 128$ фермионных состояний. Наконец. состояния в (14.82) включают произведение двух основных состояний R, они «дважды» фермионные и следовательно являются пространственно-временным бозонами. Имеется $8 \times 8 = 64$ безмассовых бозонных состояний (R-, R+). Вместе с состояниями NS-NS в (14.79) они образуют всего 128 безмассовых бозонных состояния замкнутой суперструны. Как и требуется суперсимметрией, эти состояния согласуются с 128 безмассовыми фермионными состояниями секторов R-NS и NS-R.

Следует сказать, что похожая теория струн типа IIA возникает, если в (14.76) поменять местами секторы R и R –. Очевидно, что суперструна типа IIA возникает тогда, когда левые и правые усеченные секторы R принадлежат разным типам.

Другая теория — суперструна типа IIВ — возникает в случае, если выбранные секторы Рамона принадлежат одному типу,

левый:
$${NS+ \ R-}$$
, правый: ${NS+ \ R-}$ (14.84)

Тогда получаем

Безмассовые состояния этой теории:

(NS+, NS+) :	$ar{b}^{I}_{-1/2} { m NS} angle_{L}$	$\otimes b^J_{-1/2} \mathrm{NS} angle_R$	$\otimes p^+, \vec{p}_T \rangle,$	(14.86)
(NS+, R–) :	$ar{b}^{I}_{-1/2} \mathrm{NS}\rangle_{L}$	$\otimes \mathbf{R}_b\rangle_R$	$\otimes p^+, \vec{p}_T angle,$	(14.87)
(R-, NS+) :	$ \mathbf{R}_a\rangle_L$	$\otimes b^{I}_{-1/2} \mathrm{NS}\rangle_{R}$	$\otimes p^+, \vec{p}_T\rangle,$	(14.88)
(R-, R-):	$ \mathbf{R}_a\rangle_L$	$\otimes \mathbf{R}_b\rangle_R$	$\otimes p^+, \vec{p}_T\rangle.$	(14.89)

Похожая теория типа IIB возникает, если заменить оба сектора R- в (14.84) на секторы P+.

В то время как (NS+, NS+) бозоны теорий типа IIA и типа IIB одинаковы, бозоны R-R заметно отличаются. В теории типа IIA безмассовые R-R бозоны включают максвелловское поле A_{μ} и трехиндексное антисимметричное калибровочное поле $A_{\mu\nu\rho}$. В теории типа IIB безмассовые R-R бозоны включают скалярное поле A, поле Кальба—Рамона $A_{\mu\nu}$ и полностью антисимметричное калибровочное поле $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ с четырьмя индексами. Суммируя, получаем:

безмассовые поля R-R типа IIA: $A_{\mu}, A_{\mu\nu\rho},$ (14.90)

безмассовые поля R-R типа IIB:
$$A, A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma}$$
. (14.91)

Приведенные выше поля R-R связаны с существованием *стабильных* D-бран в теориях суперструн типа II. Мы обсудим это в разделе 16.4, где объясним, что стабильные D-браны на самом деле заряжены. В теории бозонных струн все Dp-браны нестабильны и ни одна из них не заряжена.

Два усечения (14.75), обсуждавшихся выше, привели к теориям суперсимметричных замкнутых струн. Другие усечения (14.75) также совместимы, но результирующие теории не являются суперсимметричными. Эти усечения используют сектор NS-, приводя к спектру с тахионами.

Упражнение-разминка 14.8. Какой сектор (секторы) можно скомбинировать с левым сектором NS-, чтобы получить согласованный сектор замкнутой струны?

В дополнение к теориям типа II, имеются также две теории гетеротических¹⁾ суперструн. Это очень интересные теории замкнутых струн. В то время как замкнутая суперструна типа II возникает в результате комбинирования левой и правой копий открытых суперструн, в гетеротической струне мы комбинируем левую открытую бозонную струну с правой открытой суперструной! Из 26 левых бозонных координат бозонного множителя только десять согласуются с правыми бозонными координатами суперструнного множителя. В результате, эта теория эффективно существует в десятимерном пространстве-времени. Гетеротические струны существуют в двух вариантах: тип $E_8 \times E_8$ и тип SO(32). Эти цифры характеризуют группы симметрии, существующие в теориях. Группа E_8 является, на самом деле, самой большой исключительной группой (обозначение E от слова

¹⁾ Термин гетеротическая (еще ранее — гетерозисная) струна заимствован из биологии, где гетерозис («гибридная сила») означает усиление желательных свойств у гибрида по сравнению с исходными образцами животных или растений. — Прим. ред. перевода.

exceptional, исключительная). Группа SO(32) есть группа, порождаемая 32×32 матрицами, которые ортогональны и имеют единичный детерминант. Обсуждение гетеротической SO(32)-теории можно найти в задаче 14.5.

Наконец, в дополнение к обоим теориям типа II и гетеротическим теориям, существует теория типа I. Это суперсимметричная теория открытых и замкнутых *неориентированных* струн. Теория струн неориентирована (см. задачи 12.12 и 13.5), если состояния теории инвариантны относительно операции, обращающей ориентацию струн. Теории типа II и гетеротические теории являются теориями ориентированных замкнутых струн.

Полный список десятимерных суперсимметричных теорий струн выглядит следующим образом:

- тип IIA,
- тип IIB,
- $E_8 \times E_8$ гетеротическая,
- SO(32) гетеротическая,
- тип I.

Все эти пять теорий известны с середины 1980-х гг. Вскоре после их открытия были найдены некоторые связи между ними, но более ясная картина возникла только в конце 1990-х гг. Было показано, что в пределе, когда константа взаимодействия струны устремляется к бесконечности, теория типа IIA переходит в теорию в одиннадцати измерениях. Эта теория называется М-теорией, причем смысл М будет уточнен, когда природа теории станет ясной. Однако известно, что М-теория *не является* теорией струн. Эта теория содержит мембраны (2браны) и 5-браны, но эти браны не являются D-бранами. Может случиться, что М-теория в конце концов сыграет выдающуюся роль в понимании теории струн. Открытие многих других соотношений между пятью теориями струн и М-теорией сделало ясным, что на самом деле мы имеем *только одну* теорию. Этот результат фундаментален: существует единственная теория, а пять теорий суперструн и М-теория являются различными пределами этой единственной теории.

Неясно, являются ли бозонные струны частью этого взаимосвязанного множества теорий. Они определенно кажутся существенно отличающимися от суперструн. Однако, было бы очень интересно, если бы *все* теории струн оказались одной теорией. Были предложения, что теории бозонных струн и суперструн связаны через космологические решения. Определенно, мы еще не услышали последнего слова по этому поводу.

Задачи

Задача 14.1. Подсчет бозонных состояний

(a) Рассмотрим k обычных коммутирующих осцилляторов a^i с i = 1, ..., k. Сколько произведений вида $a^{i_1}a^{i_2}$ можно построить? Сколько вида $a^{i_1}a^{i_2}a^{i_3}$? Сколько вида $a^{i_1}a^{i_2}a^{i_3}a^{i_4}$? [Указание: используйте результат задачи 12.11.] (6) Перечислите и сосчитайте состояния на уровне $\alpha' M^2 = 3$ открытой бозонной струны. Убедитесь, что вы получили то же число состояний, которое предсказывается производящей функцией $f_{os}(x)$ в (14.63).

Задача 14.2. Производящая функция для теории неориентированных бозонных открытых струн

Запишите производящую функцию для теории неориентированных бозонных открытых струн, начав с производящей функции $f_{os}(x)$ для полностью ориентированной теории и добавив слагаемое, осуществляющее проекцию на неориентированные состояния.

Задача 14.3. Массовый уровень открытой суперструны

- (a) Рассмотрите восемь антикоммутирующих переменных b^i , где i = 1, ..., 8. Сколько неэквивалентных произведений вида $b^{i_1}b^{i_2}$ можно построить, пренебрегая знаками? Сколько вида $b^{i_1}b^{i_2}b^{i_3}$? Сколько вида $b^{i_1}b^{i_2}b^{i_3}b^{i_4}$?
- (б) Рассмотрите первый и второй возбужденные уровни открытой суперструны $(\alpha' M^2 = 1 \ \text{и} \ \alpha' M^2 = 2)$. Перечислите состояния в секторе NS и состояния в секторе R.

Задача 14.4. Вырождения замкнутой струны

Для состояний замкнутой струны левосторонние и правосторонние возбуждения описываются как состояния открытых струн с одинаковыми значениями $\alpha' M^2$. Значение $\alpha' M^2$ для состояния замкнутой струны в четыре раза больше этого значения.

- (a) Установите значения $\alpha' M^2$ и приведите список вырожденных состояний для первых пяти уровней массы в теории замкнутой бозонной струны.
- (б) Установите значения α'M² и приведите отдельно список вырожденных состояний бозонов и фермионов для пяти уровней массы замкнутых суперструн типа IIA. Будет ли отличаться результат для типа IIB?

► Задача 14.5. Подсчет состояний в теории гетеротических SO(32) струн

В гетеротической (замкнутой) теории струн правосторонняя часть теории совпадает с открытой суперструной. Имеется сектор NS, состояния которого строятся с осцилляторами α_{-n}^{I} и b_{-n}^{I} , действующими на вакуум NS. Имеется также сектор R, состояния которого строятся из осцилляторов, α_{-n}^{I} и d_{-n}^{I} , действующих на основные состояния R. Индекс I принимает 8 значений. Применимо стандартное GSO-проектирование на NS+ и R-.

Левосторонней частью теории является теория бозонной открытой струны. 24 поперечные координаты разбиваются на 8 бозонных координат X^{I} с осцилляторами $\bar{\alpha}_{-n}^{I}$ и на 16 особых бозонных кординат. Неожиданные реалии двумерной физики позволяют нам заменить эти 16 координат 32 двумерными левосторонним фермионными полями λ^{A} , где A = 1, 2, ..., 32. Антикоммутативность фермионных полей λ^{A} подразумевает то, что левосторонняя часть теории также обладает секторами NS' и R', которые заштрихованы, для того чтобы отличать их от стандартных секторов NS и R открытой суперструны. Левый сектор NS' строится посредством осцилляторов $\bar{\alpha}_{-n}^{I}$ и λ_{-n}^{A} , действующих на вакуум | NS' \rangle_{L} , полагая, что $(-1)^{F_{L}} = +1$:

$$(-1)^{F_L} | \operatorname{NS}' \rangle_L = + | \operatorname{NS}' \rangle_L.$$

Простейшая формула для массы в этом состоянии имеет вид

$$\alpha' M_L^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \overline{\alpha}_{-n}^I \overline{\alpha}_n^I + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} r \lambda_{-r}^A \lambda_r^A.$$

Левый сектор R' строится посредством осцилляторов $\bar{\alpha}_{-n}^{I}$ и λ_{-n}^{A} , действующих на множестве основных состояний в R'. Простейшая формула для массы состояний в этом секторе имеет вид

$$lpha' M_L^2 = rac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \left(\overline{lpha}_{-n}^I \overline{lpha}_n^I + n \lambda_{-n}^A \lambda_n^A
ight).$$

Импульсные метки не нужны в данной задаче, и по этой причине они повсюду опущены.

- (a) Рассмотрите левый сектор NS'. Запишите точную формулу для квадрата массы с нормально упорядоченными осцилляторами и подходящую константу нормального упорядочения. GSO-проекция в данном случае удерживает состояния с $(-1)^{F_L} = +1$, это и определяет левый сектор NS'+. Запишите в явном виде и перечислите состояния, соответствующие трем нижним массовым уровням, указывая соответствующие значения $\alpha' M_L^2$. (Это достаточно длинный список.)
- (б) Рассмотрите левый сектор R'. Запишите точную формулу для квадрата массы с нормально упорядоченными осцилляторами и подходящую константу нормального упорядочения. У нас имеется 32 нулевые моды λ_0^A и 16 линейных комбинаций ведут себя как операторы рождения. Как обычно, для половины основных состояний имеет место $(-1)^{F_L} = +1$, а для другой половины $(-1)^{F_L} = -1$. Пусть $|R_\alpha\rangle_L$ обозначает основные состояния с $(-1)^{F_L} = +1$. Сколько насчитывается основных состояний $|R_\alpha\rangle_L$? Оставляем лишь состояния с $(-1)^{F_L} = +1$; это и определяет левый сектор R'+. Запишите в явном виде и перечислите состояния, соответствующие двум нижним массовым уровням, указывая соответствующие значения $\alpha' M_L^2$. (Это более короткий список.)

На любом массовом уровне $\alpha' M_L^2 = 4k$ гетеротической струны пространственно-временные бозоны получаются тензорным умножением («тензорированием») всех левых состояний (NS'+ и R'+) с $\alpha' M_L^2 = k$ на правосторонние NS+ состояния, для которых $\alpha' M_R^2 = k$. Подобным образом пространственно-временные фермионы получаются тензорированием всех левых состояний (NS'+ и R'+) с $\alpha' M_L^2 = k$ с пространственными состояниями сектора R-, для которых $\alpha' M_R^2 = k$. На любом массовом уровне, на котором отсутствуют либо левые, либо правые состояния, нельзя сформировать состояния гетеротической струны.

- (в) Имеются ли тахионные состояния в теории гетеротической струны? Выпишите безмассовые состояния теории (бозонные и фермионные) и опишите поля, ассоциируемые с бозонами. Подсчитайте полное число состояний в теории гетеротической струны (бозоны плюс фермионы) при $\alpha' M^2 = 4$. *Ответ:* 18 883 584 состояния.
- (г) Запишите производящую функцию $f_L(x) = \sum_r a(r)x^r$ для всего множества GSO-усеченных состояний в левостороннем секторе (включающем как NS'+, так и R'+ состояния). Используйте соглашение, что a(r) считает число состояний, для которых выполняется $\alpha' M_L^2 = r$. Используйте $f_L(x)$ и алгебраический манипулятор для нахождения полного числа состояний в теории гетеротической струны при $\alpha' M^2 = 8$. Ответ: 6 209 372 160.

Часть II

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

Глава 15

D-браны и калибровочные поля

Изучавшиеся до сих пор открытые струны описывались координатами, каждая из которых подчинена граничным условиям Неймана. Такие открытые струны распространяются вдоль мирового объема D25-браны, заполняющей собой все пространство. В этой главе изучается квантование открытых струн, прикрепленных к более общим D-бранам. Мы начнем наш анализ со случая одной Dp-браны с $1 \le p < 25$. Затем обратимся к случаю нескольких параллельных Dp-бран и рассмотрим возникновение взаимодействующих безмассовых векторных полей, а также возможность возникновения массивных векторных полей. Далее мы рассмотрим случай параллельных D-бран различных размерностей.

15.1. D*p*-браны и граничные условия

Dp-брана — это протяженный объект с p пространственными измерениями. В бозонной теории струн, где число пространственных измерений равно 25, D25-брана заполняет собой все пространство. Буква «D» в обозначении Dp-браны означает граничные условия Дирихле. В присутствии D-браны концы открытых струн должны лежать на бране; в дальнейшем мы убедимся, что это требование накладывает на движение концов открытых струн ряд граничных условий Дирихле.

Не все протяженные объекты в теории струн являются D-бранами. Например, струны являются l-бранами, потому что это протяженные объекты с одним пространственным измерением, однако они не являются D1-бранами. Браны с p пространственными измерениями принято называть p-бранами, 0-брана это что-то вроде частицы. Мировая линия частицы одномерна, а мировой объем p-браны является (p + 1)-мерным. Среди p + 1 измерений одно является временным измерением, а остальные p являются пространственными измерениями. Мы уже обсуждали концепцию D-бран в разделе 6.5. Дополнительно в задаче 6.11 было рассмотрено классическое движение открытых струн, заканчивающихся на D-бранах различных размерностей. Основной темой этой главы является квантование открытых струн в присутствии различного рода D-бран. Это интересный предмет, имеющий большое значение для задачи построения реалистичных физических моделей на основе теории струн. Более того, изучение D-бран и гравитационных полей, которые они порождают, уже привело к новым удивительным открытиям в изучении сильновзаимодействующих калибровочных теорий.

В этом разделе мы введем обозначения, необходимые для описания D-бран, после чего сформулируем подходящие граничные условия. Пусть *d* обозначает

общее число пространственных измерений теории: в рассматриваемом случае d=25. Общее число пространственно-временных измерений равно¹⁾ D = d + 1 = 26. Dp-брана с p < 25 расположена вдоль p-мерного подпространства 25-мерного пространства. Мы сосредоточим наше внимание на простых Dp-бранах, являющихся p-мерными гиперплоскостями в D-мерном пространстве. Каким образом можно задать такие гиперплоскости? Для этого необходимо иметь (d - p) линейных условий. В трех пространственных измерениях (d = 3), 2-брана (p = 2)является плоскостью и задается одним линейным условием (d - p = 3 - 2 = 1). Например, z = 0 задает плоскость (x, y). Таким же образом, струна вдоль оси z(p = 1) задается двумя линейными условиями (d - p = 3 - 1 = 2): x = 0 и y = 0. Необходимо иметь столько же условий, сколько существует пространственных координат, нормальных к бране.

Теперь рассмотрим Dp-брану. Введем пространственно-временные координаты x^{μ} , где индексы $\mu = 0, 1, 2, ..., 25$ разбиты на две группы. Первая группа состоит из координат, касательных к мировому объему браны. Это одна временная координата и p пространственных координат. Вторая группа состоит из (d-p)координат нормальных к мировому объему браны. Тогда можно записать

$$\underbrace{x^{0}, x^{1}, \dots, x^{p}}_{\text{касательные Dp-координаты}}, \underbrace{x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^{d}}_{\text{нормальные Dp-координаты}}.$$
(15.1)

Положение **D***p*-браны определяется фиксацией значений координат, нормальных к поверхности браны. С учетом этого разбиения запишем

$$x^{a} = \bar{x}^{a}, \quad a = p + 1, \dots, d.$$
 (15.2)

Здесь \vec{x}^{a} — это набор (d - p) постоянных. Струнные координаты $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ разбиваются совершенно аналогичным образом

$$\underbrace{X^{0}, X^{1}, \dots, X^{p}}_{\text{касательные Dp-координаты}}, \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^{d}}_{\text{нормальные Dp-координаты}}$$
(15.3)

Так как концы открытой струны должны лежать на Dp-бране, то струнные координаты, нормальные к поверхности браны, должны удовлетворять граничным условиям Дирихле

$$X^{a}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0} = X^{a}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=\pi} = \overline{x}^{a}, \quad a=p+1,\ldots,d.$$
(15.4)

Струнные координаты X^a называются DD-координатами, потому что оба конца удовлетворяют граничному условию Дирихле. Концы открытых струн могут свободно двигаться вдоль направлений, касательных к D-бране. В результате. струнные координаты, касательные к D-бране, удовлетворяют граничным условиям Неймана:

$$X^{m'}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0} = X^{m'}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=\pi} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p.$$
 (15.5)

190

¹⁾ Внимательный читатель должен заметить, что буквы D, обозначающее число измерений. г. Г. используемое для D-бран, отличаются наклоном. — Прим. ред. перевода.

Эти струнные координаты называются NN-координатами, потому что оба конца узовлетворяют граничному условию Неймана. Мы видим, что разбиение (15.3) на касательные и нормальные координаты одновременно является разбиением на координаты, удовлетворяющие, соответственно, граничным условиям Неймана и Дирихле:

$$\underbrace{X^{0}, X^{1}, \dots, X^{p}}_{\text{NN-координаты}}, \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^{d}}_{\text{DD-координаты}}.$$
(15.6)

Для того чтобы использовать калибровку светового конуса, необходима по крайней мере одна NN-координата, которая, вместе с X^0 , может быть использована для определения координат X^{\pm} . Таким образом, следует положить $p \ge 1$, вследствие чего наш анализ становится неприменим к струнам, прикрепленным к D0-бранам. D0-браны являются полностью самосогласованными объектами, однако для их изучения нам понадобятся методы лоренц-ковариантного квантования (см. главу 24 и задачу 24.4). Координаты светового конуса будут обозначаться следующим образом

$$\underbrace{X^+, X^-, \{X^i\}}_{NN}, \quad \underbrace{\{X^a\}}_{DD}, \quad i = 2, \dots, p \quad \mu \quad a = p+1, \dots, d. \quad (15.7)$$

15.2. Квантование открытых струн на Dp-бранах

Задав граничные условия для различных струнных координат, мы можем перейти к квантованию открытых струн на Dp-бране. Цель последующего анализа состоит в том, чтобы определить спектр состояний открытых струн и с помощью этого результата глубже понять происходящее в мировом объеме Dp-браны.

Работа, проделанная нами в главе 12, оказывается весьма полезной и для текущих целей. NN-координаты $X^i(\tau, \sigma)$ удовлетворяют в точности таким же условиям, которым удовлетворяют конусные координаты $X^I(\tau, \sigma)$ открытых струн, прикрепленных к D25-бране. Все разложения и коммутационные соотношения для координат X^i могут быть получены из выражений для X^I путем замены $I \rightarrow i$ в соответствующих уравнениях.

Напомним, что координата X^- была определена в терминах поперечных конусных координат уравнением (9.65):

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^{+}} (\dot{X}^{I} \pm X^{I'})^{2}.$$
 (15.8)

Кроме того, разложение по модам $\dot{X}^{I} \pm X^{I'}$ задавалось выражением (9.74):

$$\dot{X}^{I} \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{I} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(15.9)

Совершенно аналогичное разложение по модам имело место для координаты X^- ; оно не изменнится, так как X^- по-прежнему является NN-координатой. Предыдущие уравнения и разложение X^- привели к уравнениям (12.105) и (12.106), которые единым образом можно представить в виде

$$2p^+p^- \equiv \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^I \alpha_n^I + a \right).$$
(15.10)

При квантовании струн на D25-бранах константа упорядочения a определялась равной минус единице. Для Dp-браны индекс координат светового конуса I = 2, ..., 25 разбивается на отмеченные индексом i DD-координаты и отмеченные индексом a NN-координаты. Таким образом, (15.8) принимает вид

$$\dot{X}^{-} \pm X^{-\prime} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^{+}} \Big\{ (\dot{X}^{i} \pm X^{i'})^{2} + (\dot{X}^{a} \pm X^{a'})^{2} \Big\}.$$
 (15.11)

Как объяснялось ранее, разложение для координат Xⁱ выглядит следующим образом

$$\dot{X}^{i} \pm X^{i'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{i} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(15.12)

Необходимо исследовать именно координаты X^a . Если для X^a справедливо разложение, аналогичное (15.12), то мы сможем найти p^- , производя в (15.10) разбиение $I \rightarrow (i, a)$, ровно таким же образом, каким было получено выражение (15.11).

Теперь мы готовы рассмотреть новый аспект квантования открытых струн, прикрепленных к Dp-бране. Координаты X^a , нормальные к поверхности браны, удовлетворяют волновому уравнению, и поэтому общее решение является супер-позицией двух волн:

$$X^{a}(\tau,\sigma)=\frac{1}{2}\big(f^{a}(\tau+\sigma)+g^{a}(\tau-\sigma)\big). \tag{15.13}$$

Рассмотрим граничные условия (15.4). При $\sigma = 0$ получаем

$$X^{a}(\tau,0) = \frac{1}{2} \left(f^{a}(\tau) + g^{a}(\tau) \right) = \bar{x}^{a}, \qquad (15.14)$$

так что $g^{a}(au) = -f^{a}(au) + 2\bar{x}^{a}$, и в итоге,

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \bar{x}^{a} + \frac{1}{2} (f^{a}(\tau+\sigma) - f^{a}(\tau-\sigma)). \qquad (15.15)$$

Граничное условие при $\sigma = \pi$ приводит к соотношению

$$f^{a}(\tau + \pi) = f^{a}(\tau - \pi).$$
 (15.16)

Оно означает, что $f^a(u)$ является периодической функцией с периодом 2π . Это приводит к следующему разложению:

$$f^{a}(u) = \tilde{f}_{0}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{f}_{n}^{a} \cos nu + \tilde{g}_{n}^{a} \sin nu). \qquad (15.17)$$

Интересно заметить, что линейный по u член отсутствует. Такой член присутство вал, когда координаты удовлетворяли граничным условиям Неймана, потому что в этом случае периодической была производная f'(u). Подставляя (15.17) в (15.15) и делая некоторые тригонометрические упрощения, находим

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \bar{x}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tilde{f}_{n}^{a} \sin n\tau \sin n\sigma + \tilde{g}_{n}^{a} \cos n\tau \sin n\sigma \right).$$
(15.18)

Переопределяя коэффициенты разложения, которые в любом случае произвольны, можно записать

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \bar{x}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{n}^{a} \cos n\tau + \tilde{f}_{n}^{a} \sin n\tau \right) \sin n\sigma.$$
(15.19)

Так как линейный по τ член отсутствует, усредненный по времени полный импульс струны в направлении x^a равен нулю. Это вполне естественно, так как струны должны оставаться прикрепленными к бране. Если бы член $p^a \tau$ присутствовал, концы струны $\sigma = 0, \pi$ не оставались бы в точке $x^a = \bar{x}^a$ при $\tau \neq 0$.

Для построения квантовой теории, ассоциированной с сектором переменных X^a , сначала рассмотрим классические величины, которые описывают движение открытой струны согласно уравнению (15.19). Так как мы хотим проквантовать открытые струны, прикрепленные к фиксированной D-бране, величины \bar{x}^a не подходят для описания различных струнных конфигураций. С другой стороны, движения открытой струны параметризуют величины (f^a, \tilde{f}^a) . Поэтому, при квантовании открытой струны величины \bar{x}^a остаются числовыми переменными и не квантуются, а величины (f^a, \tilde{f}^a) становятся операторами.

Для упрощения дальнейшего анализа, перепишем (15.19) в терминах осцилляторов:

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \overline{x}^{a} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \sin n\sigma. \qquad (15.20)$$

Если выполнено обычное условие эрмитовости осцилляторов $(\alpha_n^a)^{\dagger} = \alpha_{-n}^a$, то струнная координата X^a является эрмитовой. Отметим, что нулевая мода α_0^a отсутствует. Учитывая

$$\dot{X}^{a} = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \sin n\sigma,$$

$$X^{a'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$
(15.21)

получаем

$$X^{a'} \pm \dot{X}^{a} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{a} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
 (15.22)

Это выражение похоже на (15.12), однако имеются два различия. Во-первых, при выборе отрицательного знака возникающие комбинации производных отличаются общим знаком. Во-вторых, в (15.22) нет нулевой моды.

Теперь процедура квантования проводится напрямую. Обозначая $\mathcal{P}^{ra}(\tau, \sigma) = \dot{X}^{a}/2\pi \alpha'$, ненулевые коммутационные соотношения постулируются в виде

$$[X^{a}(\tau,\sigma), \dot{X}^{b}(\tau,\sigma')] = 2\pi \alpha' i \delta^{ab} \delta(\sigma-\sigma'). \qquad (15.23)$$

Следуя рассуждениям из раздела 12.2, этот коммутатор может быть переписан в виде (12.30), где (I, J) заменено на (a, b). Так как осцилляторное разложение (15.22) имеет стандартный вид, предыдущие рассуждения полностью переносятся на этот случай. Упомянутое выше различие в общем знаке несущественно, так как ($X^{a'} - \dot{X}^{a}$) возникает дважды в соответствующих коммутаторах. Таким образом, получаем

$$\left[\alpha_{m}^{a},\alpha_{n}^{b}\right]=m\delta^{ab}\delta_{m+n,0},\quad m,n\neq0.$$
(15.24)

Отсутствие нулевых мод не нарушает совместности процедуры: величины \bar{x}^a являются константами и не имеют сопряженных импульсов в силу $\alpha_0^a \equiv 0$. Различие в знаке тоже несущественно для вычисления (15.11), так как ($X^{a'} - \dot{X}^a$) возникает дважды. Таким образом, уравнение (15.10) может быть представлено в виде

$$2p^{+}p^{-} \equiv \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^{i} p^{i} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a} \alpha_{n}^{a} \right] - 1 \right).$$
(15.25)

Эту формулу следует прокомментировать. Так как $p^a \sim \alpha_0^a \equiv 0$, то слагаемое $\alpha_0^I \alpha_0^I / 2$ просто сводится к виду $\alpha' p^i p^i$ (напомним, что $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$). Как и в случае D25-браны, константа упорядочения выбрана равной минус единице. Критическая размерность также не изменилась. Это вполне естественно, так X^a и X^i различаются только структурой нулевых мод. В частности, наивные вклады, необходимые для нормального упорядочения L_0^{\perp} , одинаковы для X^a и для X^i . Из (15.25) следует, что

$$M^{2} = -p^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{i}p^{i} = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a} \alpha_{n}^{a} \right] - 1 \right).$$
(15.26)

Подстановка операторов рождения и уничтожения дает

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{p} n \alpha_{n}^{i\dagger} \alpha_{n}^{i} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^{d} m a_{m}^{a\dagger} a_{m}^{a} \right).$$
(15.27)

Теперь рассмотрим пространство состояний квантовой струны. Основным состоянием струны на фоне D25-браны являлось $|p^+, \vec{p}_T\rangle$, где $\vec{p}_T = (p^2, \ldots, p^{25})$ вектор с компонентами p^I . Теперь индекс I пробегает значения как *i*, так и *a*. но нет операторов p^a , поэтому основное состояние в данной теории параметризуется только p^+ и p^i :

$$|p^+, \vec{p}\rangle$$
 c $\vec{p} = (p^2, \dots, p^p).$ (15.28)

Остальные состояния строятся действием осцилляторов на основное состояние. Рассмотрим осцилляторы, расположенные вдоль поверхности браны:

$$a_n^{i\dagger}, n \ge 1, \quad i = 2, \dots, p;$$
 (15.29)

а осцилляторы, нормальные к поверхности браны:

$$a_n^{a\dagger}, n \ge 1, \quad a = p+1, \ldots, d.$$
 (15.30)

Таким образом, векторы пространства состояний имеют вид

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=2}^{p}(a_{n}^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}}\right]\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{a=p+1}^{d}(a_{m}^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}}\right]|p^{+},\vec{p}\rangle.$$
(15.31)

Волновые функции Шрёдингера можно записать в виде

$$\psi_{i_2...i_pa_1...a_d}(\tau, p^+, \vec{p}).$$
 (15.32)

Индексы волновых функций, как и индексы осцилляторов, бывают двух типов: индексы направлений, касательных к бране (индексы i), и индексы направлений, нормальных к бране (индексы a).

В теории поля, описывающей состояния струны, поля имеют тот же вид что и струнные волновые функции Шрёдингера. Таким образом, возникает вопрос: где определены поля, соответствующие (15.32): на всем пространстве-времени или только на некотором подпространстве?

Так как поля являются функциями импульсов p^i , после преобразования Фурье их можно рассматривать как поля, зависящие от координат x^i . Зависимость от τ является, на самом деле, зависимостью от x^+ , а зависимость от p^+ преобразованием Фурье может быть переведена в зависимость от x^- . В совокупности возникают поля, зависящие от x^+ , x^- и x^i , где i = 2, ..., p. Это в точности (p + 1)-координата в мировом объеме Dp-браны. Вполне естественно сделать вывод, что эти поля фактически расположены на Dp-бране. Действительно, мировой объем — это единственный подходящий претендент на роль (p+1)-мерного подпространства пространства-времени.

Наши рассуждения предполагают, но не доказывают, что поля находятся на Dp-бране; векторы состояний и волновые функции струны не зависят от положения \bar{x}^a Dp-браны. Как можно было бы *доказать*, что поля действительно расположены на Dp-бране? Для этого требуется рассмотреть взаимодействие струн. Так как у замкнутых струн нет концов, они не могут быть зафиксированы на D-бранах и распространяются по всему пространству-времени. Рассматривая рассеяние замкнутых струн на Dp-бране, можно узнать, происходит ли взаимодействие между полями сектора замкнутых струн и полями сектора открытых струн в мировом объеме D-браны. Ответ оказывается положительным. Однако, утверждения о том, где определены поля открытых струн, являются неоднозначными и даже калибровочно-неинвариантными, причем различные ответы по отдельности могут быть совершенно непротиворечивыми.

В заключение нашего анализа Dp-браны, приведем список и подробное описание полей, удовлетворяющих условию $M^2 \leq 0$. Все эти поля расположены на Dp-бране, поэтому следует установить их трансформационные свойства относительно лоренцевских преобразований, сохраняющих Dp-брану. Преобразования являются лоренцевскими преобразованиями в p+1 измерениях, а поля,

например, могут быть скалярами или векторами. Начнем с простого — с основного состояния:

$$|\boldsymbol{p}^+, \boldsymbol{\vec{p}}\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha}.$$
 (15.33)

Такое состояние является тахионом на бране и имеет такую же массу, как у тахиона, возникающего на D25-бране. Разумеется, соответствующее тахионное поле на самом деле является лоренцевскием скаляром на бране.

Следующие состояния получаются действием одного осциллятора на основное состояние. Сначала рассмотрим случай осциллятора, расположенного вдоль координаты, касательной к бране:

$$a_n^{i\dagger}|p^+, \vec{p}\rangle, \quad i = 2, ..., p, \quad M^2 = 0.$$
 (15.34)

При произвольных импульсах это набор из (p + 1) - 2 безмассовых состояний. Более того, индекс, нумерующий состояния, соответствует координатам на бране, поэтому совокупность состояний преобразуется как лоренцевский вектор на бране. Так как число состояний равно пространственно-временной размерности браны минус два, то очевидно, что состояния являются поляризациями фотона. Соответствующее поле является калибровочным полем Максвелла, расположенным на бране. Таким образом получаем фундаментальный результат:

И наконец, рассмотрим случай, когда на основное состояние действует осциллятор, расположенный вдоль координаты, нормальной к бране:

$$a_1^{a\dagger}|p^+,\vec{p}\rangle, \quad a=p+1,\ldots,d, \quad M^2=0.$$
 (15.36)

При произвольных импульсах это (d - p) состояний, расположенных на бране. Индекс *a* не является лоренцевскием, он просто считает число состояний. Состояния преобразуются как лоренцевские *скаляры* на бране, поэтому возникает по одному безмассовому скалярному полю для каждого направления, нормального к D*p*-бране:

Данные безмассовые скаляры имеют физическую интерпретацию. В разделе 12.8 указывалось, что состояния открытых струн описывают возбуждения D-браны. Dp-брана и немного сдвинутая относительно нее параллельная Dp-брана на самом деле являются состояниями с одинаковой энергией. Сдвинутую Dp-брану можно рассматривать как возбуждение исходной браны с нулевой энергией. Данное возбуждение также имеет нулевой импульс, так как оно соответствует смещению, постоянному для всей Dp-браны. Возбуждение с нулевыми импульсом и энергией обладает нулевой массой, потому что оно удовлетворяет
соотношению E = p для энергии и импульса безмассовой частицы. Безмассовые скаляры (15.36) соответствуют этим возбуждениям. Такая интерпретация опирается на тот факт, что имеется столько же безмассовых полей, сколько независимых направлений, нормальных к поверхности Dp-браны, вдоль которых Dp-брана может смещаться. Отметим, что в мировом объеме заполняющей все пространство D25-браны нет безмассовых скаляров, что согласуется с отсутствием у такой браны смещений.

В итоге, безмассовыми состояниями на Dp-бране являются (p-1) поляризаций фотона и (d-p) скалярных полей. Отвлекаясь от импульсных знаков у состояний, которые отличны, у нас имеется такое же число безмассовых состояний, как и на D25-бране: (d-1) состояние на D25-бране для Dp-браны распадаются на (p-1) фотонов и (d-p) скаляров.

15.3. Открытые струны между параллельными Dp-бранами

Теперь рассмотрим квантование открытых струн, натянутых между двумя параллельными Dp-бранами. При описании таких бран будут использоваться обозначения предыдущих разделов. Две параллельные браны одинаковой размерности обладают одинаковыми наборами продольных и нормальных координат. Напомним, что значения нормальных координат \bar{x}^a задают положение Dp-браны. На этот раз, первая Dp-брана находится в положении $x^a = \bar{x}_1^a$, а вторая в положении $x^a = \bar{x}_2^a$. Если $\bar{x}_1^a = \bar{x}_2^a$ для всех *a*, то пространственные положения двух Dp-бран совпадают — одна Dp-брана расположена поверх другой; в прогивоположном случае они разделены. На рис. 15.1 показаны две параллельные разделенные D2-браны.

Какие типы открытых струн поддерживает данная конфигурация параллельных Dp-бран? Существует четыре различных класса струн, каждый из которых надо анализировать отдельно. Первые два класса включают в себя струны, которые начинаются и заканчиваются на одной и той же D-бране, либо на первой, либо на второй. Квантование струн такого типа уже изучалось в предыдущей главе. Два других класса включают в себя струны, начинающиеся на одной и заканчивающиеся на другой бране. Такие струны мы будем называть натянутыми. Струны, начинающиеся на первой бране и заканчивающиеся на второй, отличаются от струн, начинающихся на второй бране и заканчивающиеся на первой. Такие струны противоположно ориентированы и имеет значение выбор ориентации (т. е. направления увеличения σ). В главе 16 будет показано, что заряд струны изменяет знак при смене ориентации. Классы открытых струн, поддерживаемые какой-нибудь конфигурацией D-бран, называются *секторами*. Квантовая теория открытых струн в присутствии двух параллельных Dp-бран подразделяется на четыре сектора; на рис. 15.1 показаны струны каждого из четырех секторов.

Теперь рассмотрим сектор, состоящий из открытых струн, начинающихся на первой бране и заканчивающихся на второй. Квантование струнных NN-координат X^+ , X^- и X^i не меняется, так как соответствующие граничные условия



Рис. 15.1. Две параллельные D2-браны. Координаты x^1 и x^2 продольные, координата x^3 нормальная. Положения первой и второй бран задаются, соответственно, координатами \overline{x}_1^3 и \overline{x}_2^3 . Показаны четыре типа струн, поддерживаемые данной конфигурацией

по-прежнему задаются (15.5). С другой стороны, граничные условия для струнных DD-координат, ранее задаваемые (15.4), теперь принимают вид

$$X^{a}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0} = \bar{x}_{1}^{a}, \quad X^{a}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_{2}^{a}, \quad a = p+1,\ldots,d.$$
 (15.38)

Решения волнового уравнения с такими граничными условиями может быть получено с помощью разложения (15.15), в котором граничное условие $\alpha = 0$ уже учтено. В рассматриваемом случае достаточно заменить \bar{x}^{a} на \bar{x}_{1}^{a} :

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \overline{x}_{1}^{a} + \frac{1}{2} (f^{a}(\tau+\sigma) - f^{a}(\tau-\sigma)). \qquad (15.39)$$

Из граничного условия $\sigma = \pi$ следует:

$$f^{a}(\tau+\pi)-f^{a}(\tau-\pi)=2(\bar{x}_{2}^{a}-\bar{x}_{1}^{a}), \qquad (15.40)$$

или, в эквивалентном виде,

$$f^{a}(u+2\pi)-f^{a}(u)=2(\bar{x}_{2}^{a}-\bar{x}_{1}^{a}). \qquad (15.41)$$

Это означает, что производная $f^{\prime a}(u)$ является периодической функцией с периодом 2π и имеет разложение вида (15.17). После интегрирования функция $f^{a}(u)$ приобретает вид

$$f^{a}(u) = f_{0}^{a}u + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{n}^{a}\cos nu + \widetilde{f}_{n}^{a}\sin nu\right). \qquad (15.42)$$

398

Константа интегрирования не учитывается, потому что она все равно выпадает из X^a , задаваемого (15.39). Константа f_0^a определяется из граничного условия +15.41):

$$f_0^a = \frac{1}{\pi} (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a). \tag{15.43}$$

Теперь $f^{a}(u)$ можно подставить в (15.39). Помимо рассмотрения нулевых мод, это вычисление совершенно аналогично тому, которое привело к (15.19). На это раз получаем:

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \overline{x}_{1}^{a} + (\overline{x}_{2}^{a} - \overline{x}_{1}^{a}) \frac{\sigma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n}^{a} \cos n\tau + \widetilde{f}_{n}^{a} \sin n\tau) \sin n\sigma. \quad (15.44)$$

Отметим, что граничные условия удовлетворяются явным образом. Для описания струн, натянутых между двумя бранами, достаточно всего лишь в предыдущем уравнении заменить \bar{x}_1^a на \bar{x}_2^a . По аналогии с (15.20), уравнение (15.44) может быть переписано в осцилляторном виде

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \bar{x}_{1}^{a} + (\bar{x}_{2}^{a} - \bar{x}_{1}^{a}) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \sin n\sigma.$$
(15.45)

Константы \bar{x}_1^a и \bar{x}_2^a не квантуются, потому что, как и прежде, для фиксированных D-бран они не являются параметрами флуктуаций открытых струн. Отметим отсутствие вкладов, линейных по τ ; усредненный по времени импульс открытой струны в направлении x^a равен нулю. Несмотря на то, что мы не вводим новые обозначения для рассмотренных выше осцилляторов, это не те операторы, которые рассматривались при квантовании струн, начинающихся и заканчивающихся на одной и той же Dp-бране. Не следует путать осцилляторы в разных секторах. В рассматриваемом случае производные приобретают вид

$$\dot{X}^{a} = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \sin n\sigma,$$

$$X^{a'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n}^{a} e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$
(15.46)

где

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a = \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a). \tag{15.47}$$

Значение x^a не равно нулю, несмотря на равный нулю импульс струны в направлении α_0^a . В этом нет никакого противоречия, потому что интерпретация α_0 как импульса требует присутствия α_0 в \dot{X} . Как можно видеть, α_0^a присутствует в $X^{a'}$, но не в \dot{X}^a ; ненулевое значение α_0^a подразумевает наличие натянутых струн: α_0^a обращается в ноль, если D-браны совпадают. Похожие операторы возникают в разложении замкнутых струн, намотанных на компактное измерение (см. главу 17). Из двух производных (15.46) можно составить комбинацию вида

$$X^{a\prime} \pm \dot{X}^{a} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
 (15.48)

С учетом комментариев из предыдущего раздела, этот результат приводит к тому, что осцилляторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям. Для вычисления оператора квадрата массы, рассмотрим заново уравнение (15.10). Как и прежде, полагая $I \rightarrow (i, a)$ и принимая константу *a* равной минус единице, получим

$$2p^{+}p^{-} \equiv \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \alpha_{0}^{a} \alpha_{0}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a} \alpha_{n}^{a} \right] - 1 \right).$$
(15.49)

Таким образом возникает

$$M^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{i}p^{i} = \frac{1}{2\alpha'}\alpha_{0}^{a}\alpha_{0}^{a} + \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i}\alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a}\alpha_{n}^{a}\right] - 1\right).$$
 (15.50)

Подставляя значение α_0^a из (15.47), получаем ответ

$$M^{2} = \left(\frac{\bar{x}_{2}^{a} - \bar{x}_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2} + \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1), \qquad (15.51)$$

где

$$N^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{p} n a_{n}^{i\dagger} a_{n}^{i} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^{d} m a_{m}^{a\dagger} a_{m}^{a}.$$
 (15.52)

Первое слагаемое в правой части уравнения (15.51) определяет новый вклад в квадрат массы состояний. Так как натяжение струны равно $T_0 = 1/(2\pi\alpha')$, это слагаемое на самом деле является квадратом энергии статичной классической струны, натянутой между двумя D-бранами. Вполне естественно, что оператор квадрата массы «поправляется» добавлением этой константы. При совпадающих бранах возникающая поправка обращается в ноль.

Теперь рассмотрим основное состояние. Фактичсски, мы будем изучать основные состояния в каждом из четырех секторов открытых струн, допустимых в данной конфигурации D-бран. Импульс основных состояний обозначается одинаково для каждого сектора, p^+ и \vec{p} . Чтобы различать различные секторы, припишем основному состоянию два индекса [ij], каждый из которых может принимать значение 1 либо 2. Первый индекс нумерует брану, на которой находится конец открытой струны, соответствующий $\sigma = 0$, второй индекс нумерует брану, на которой находится конец открытой струны в секторе [ij] натянуты между браной i и браной j. Основное состояние, записываемое в виде $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$, может принадлежать одному из следующих четырех типов:

$$|p^+, \vec{p}; [11]\rangle, |p^+, \vec{p}; [22]\rangle, |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, |p^+, \vec{p}; [21]\rangle.$$
 (15.53)

400

Состояния открытых струн в секторе [ij] порождаются действием осцилляторов на основное состояние $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$ и принимают вид, аналогичный (15.31), в котором основное состояние заменено на $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$. Число и тип осцилляторов в каждом из четырех секторов одинаковы, однако это принципиально разные осцилляторы. Можно было бы нумеровать их в соответствии с [ij], но в этом нет особой необходимости, потому что основное состояние уже несет нумерацию секторов.

Где расположены поля, соответствующие струнным состояниям [12]? На этот вопрос трудно ответить. Очевидно, что поля являются (p + 1)-мерными, так как возможные импульсы состояний совпадают с импульсам состояний струны, полностью прикрепленной к бране. Если рассматривать натянутые струны, то две противоположные D-браны неразличимы и невозможно сказать что поля расположены только на какой-то одной из двух. В некотором смысле, поля обязаны находиться на *обеих* D-бранах. Считается, что поля живут на некоторой фиксированной (p + 1)-мерной поверхности (не обязательно совпадающей с какойлибо из двух D-бран) и взаимодействуют нелокальным образом, что отражает факт несовпадения D-бран. Пространственно-временная интерпретация полей, возникающих из натянутых струн требует, по-видимому, привлечения концептуально нового математического аппарата, основу которого может составить раздел математики, называемый некоммутативной геометрисй.

Продолжая рассмотрение пространства состояний натянутой открытой струны, предъявим список и подробное описание полей, возникающих на двух нижних уровнях. По аналогии с одной браной, определим, является ли состояние скаляром или вектором по отношению к (p + 1)-мерной лоренцевской симметрии. Простейшим является основное состояние

$$|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2.$$
 (15.54)

Если расстояние между бранами обращается в ноль, то квадрат массы принимает прежнее значение и основное состояние описывает тахион. Если браны разделены, в квадрате массы возникает положительное слагаемое. В случае критического расстояния между бранами

$$\left|\bar{x}_{2}^{a} - \bar{x}_{1}^{a}\right| = 2\pi\sqrt{\alpha'},\tag{15.55}$$

основное состояние описывает безмассовое скалярное поле. Если браны отстоят друг от друга дальше, чем критическое расстояние, основное состояние описывает массивное скалярное поле.

Состояния следующего уровня порождаются действием одного осциллятора на основное состояние. Предположим, если не подразумевается обратного, что расстояние между бранами не равно нулю. Если осциллятор, действующий на основное состояние, соответствует координате, нормальной к поверхности браны, то

$$a_1^{a\dagger}|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad a=p+1,\ldots,d, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2.$$
 (15.56)

При произвольных импульсах, это (d - p) массивных состояний. Так как индекс *a* не является лоренцевскием для (p + 1)-мерного пространства-времени, эти состояния являются лоренцевскими скалярами. Таким образом, мы получаем (d - p) массивных скалярных полей. Если осциллятор соответствует координате, касательной к поверхности браны, то

$$a_1^{i\dagger}|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad i=2,\ldots,p, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2.$$
 (15.57)

При любых импульсах это (p + 1) - 2 = p - 1 массивное состояние, более того, состояния несут индекс, соответствующий (p + 1)-мерному пространству-времени. Можно считать, что эти состояния образуют одно массивное векторное поле Максвелла, хотя это и не совсем верно.

Массивное векторное поле обладает большим числом степеней свободы, чем безмассовое. Из решения задачи 10.7 следует, что для каждого допустимого значения импульса, у массивного векторного поля *на одну степень* свободы больше чем у безмассового. В *D*-мерном пространстве-времени безмассовое векторное поле имеет D - 2 степени свободы для каждого p_{μ} , подчиненного уравнению $p^2 = 0$, а массивное векторное поле имеет D - 1 степени свободы для каждого p_{μ} , подчиненного уравнению $p^2 + m^2 = 0$. Поэтому, в рассматриваемом случае, одно из скалярных состояний (15.56) объединяется с (p - 1) состояниями (15.57) и образует массивное векторное поле. В итоге, возникает один массивный вектор и (d - p - 1) массивных скаляров.

Можно ли угадать, какое из скалярных состояний (15.56) становится частью массивного векторного поля? Если p = d - 1, то ответ прост. В этом случае, D-браны разделены вдоль одного направления и в (15.56) существует только один скаляр. Он возникает при действии осциллятора, несущего индекс направления, вдоль которого браны разделены. При p < d-1 в (15.56) возникает большее количество состояний. Скалярное состояние, которое является компонентой вектора, представляется в виде линейной комбинации

$$\sum_{a} (\bar{x}_{2}^{a} - \bar{x}_{1}^{a}) a_{1}^{a\dagger} | p^{+}, \vec{p}; [ij] \rangle.$$
(15.58)

Из множества направлений, нормальных к поверхности D-браны, существует единственное направление, определяемое вектором с компонентами $\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a$, вдоль него происходит переход с одной браны на другую. Чтобы представить это, рассмотрим две параллельные D1-браны в трехмерном пространстве. Очевидно, существует много нормальных направлений, по которым можно покинуть поверхность браны, но только одно из них приводит на другую брану. Можно показать, что выбор (15.58) действительно приводит к правильному ответу.

В пределе нулевого расстояния между бранами возникает интересная ситуация. Несмотря на то что теперь D-браны совпадают друг с другом, они попрежнему остаются разными и поэтому по-прежнему присутствуют четыре сектора открытых струн. Безмассовые струнные состояния, описывающие струны, натянутые между двумя бранами, содержат безмассовое векторное поле и (d - p)безмассовых скаляров. Это такой же состав полей, как и в секторе струн, начинающихся и заканчающихся на одной и той же D-бране. Поэтому при совпадении двух D-бран возникает четыре безмассовых векторных поля. Эти калибровочные поля взаимодействуют друг с другом, что на языке струн соответствует процессу соединения концов открытых струн. Теория взаимодействующих калибровочных полей называется теорией Янга—Миллса. Она была открыта в 1950-х годах и потом успешно применена для построения теории электрослабых и сильных взаимодействий. В мировом объеме двух совпадающих D-бран действительно возникает U(2)-теория Янга—Миллса. Более точно, возникает U(2)-теория Янга—Миллса с некоторым дополнительным взаимодействием, которым при низких энергиях можно пренебречь. Число два в U(2) возникает по причине двух совпадающих D-бран. Смысл возникновения группы U(2) будет обсуждаться далее.

Предположим, что имеется N Dp-бран. Тогда секторы будут обозначаться парами [ij], где *i* и j — это целые числа, изменяющиеся от 1 до N. Сектор [ij]состоит из открытых струн, начинающихся на і-й бране, и заканчивающихся на j-й бране. Очевидно, что всего существует N^2 секторов. При таком подходе процесс взаимодействия струн может быть представлен совершенно отчетливо. Типичный процесс таков: первая открытая струна соединяется со второй открытой струной и образует новую открытую струну. При этом второй конец первой струны ($\sigma = \pi$) соединяется *с первым концом* второй струны ($\sigma = 0$). Новая струна начинается на первом конце первой струны и заканчивается на втором конце второй струны. Если открытая струна натянута между D-бранами, то первая струна из сектора [ij] может соединиться со второй струной из сектора [jk], что приводит к их «произведению» — открытой струне из сектора [ik]. Такое взаимодействие возможно потому, что как конец первой струны, так и начало второй струны лежат на одной и той же D-бране. Этот физический процесс можно представлять так, как показано на рис. 15.2. Возникающая в результате открытая струна больше не прикреплена к *j*-й D-бране, так как точка соедине-



Рис. 15.2. (a) Три D-браны с индексами *i*, *j* и *k*, и струны в секторах [*ij*] и [*jk*]; (б) процесс взаимодействия струн: конец струны сектора [*ij*] соединяется с началом струны сектора [*jk*]; (в) в результате получается струна сектора [*ik*]

ния теперь не является концом. Возникающая новая струна принадлежит сектору [*ik*]. Подобное взаимодействие можно записать в виде

$$[ij] * [jk] = [ik], j$$
 не суммируется. (15.59)

При совпадающих N D*p*-бранах, N^2 секторов приводят к N^2 взаимодействующим безмассовым калибровочным полям. Это дает U(N)-теорию Янга—Миллса в мировом объеме N совпадающих D-бран:

N совпадающих D-бран содержат U(N) безмассовые калибровочные поля. (15.60)

Фактически, полный спектр теории открытых струн состоит из N^2 копий спектров одной Dp-браны.

В случае одной браны, из (15.60) следует, что возникает U(1)-теория Янга— Миллса. На самом деле U(1)-теория Янга—Миллса является теорией Максвелла, так что при N = 1 утвеждение (15.60) не противоречит утвеждению (15.35). U(1)означает группу, элементами которой являются комплексные числа единичной длины, а групповым умножением²⁾ является обычное умножение. Группа U(1)возникает по той причине, что в любой точке пространства-времени калибровочные преобразования теории Максвелла на самом деле являются элементами U(1). До сих пор изучение калибровочных преобразований Максвелла не вовлекало групповую структуру U(1), однако она необходима для понимания калибровочной симметрии в присутствии компактных пространственных измерений (глава 18). В U(N)-теории Янга—Миллса U(N) также является группой симметрий: элементы данной группы — это унитарные матрицы $N \times N$, а групповым умножением является умножение матриц. В любой точке пространства-времени калибровочные параметры U(N)-теории Янга—Миллса являются элементами группы U(N).

Упражнение-разминка 15.1. Напомним, что группа — это множество, замкнутое относительно ассоциативного умножения, оно содержит единичный элемент и каждый элемент имеет обратный. Проверить, что U(1) и U(N), описанные выше, являются группами.

Дискретные индексы i, j, используемые для нумерации бран и различных секторов открытых струн, иногда называются индексами Чана—Патона. Они были введены на ранних этапах развития теории струн, задолго до того, как стали известны D-браны и алгебраический способ получения теории Янга-Миллса из открытых струн. С открытием D-бран стало ясно, что индексы Чана—Патона на самом деле нумеруют различные D-браны в конфигурации из нескольких D-бран.

Появление теории Янга—Миллса в мировом объеме конфигурации D-бран имеет огромное значение, потому что такие теории используются для описания Стандартной модели в физике частиц. Электрослабая теория описывается U(2)-теорией Янга—Миллса. Четыре калибровочных бозона этой теории состоят

²⁾ Точнее — законом композиции группы. — Прим. ред. перевода.

из фотона γ и бозонов W^+ , W^- и Z^0 . Последние три являются массивными векторными полями. Механизм, согласно которому безмассовые калибровочные поля становятся массивными, известен в теории поля как механизм Хигтса. Возможная D-бранная реализация механизма Хигтса получается разделением D-бран, которые при совпадении приводят к соответствующим безмассовым калибровочным частицам. Если имеется две совпадающие D3-браны, то возникает U(2)-теория Янга-Миллса, описывающая четыре безмассовых калибровочных поля, расположенных в четырехмерном мировом объеме бран. Является ли такая модель пригодной для электрослабой калибровочной теории? Не совсем. Если раздвинуть D3-браны для того, чтобы придать массу некоторым из калибровочных бозонов, то два из них, возникающие из натянутых струн, приобретут массу, а другие два останутся безмассовыми. В электрослабой теории только одно калибровочное поле остается безмассовым. Для построения более реалистичной модели электрослабой теории необходима более сложная конфигурация D-бран. В разделе 21.1 будет рассмотрен пример про пересекающиеся D-браны, который может быть использован для построения реалистичных моделей в физике частиц. Построение квазиреалистичных моделей обсуждается в разделе 21.4.

15.4. Струны между параллельными Dp- и Dq-бранами

В этом разделе мы изучаем конфигурацию двух параллельных D-бран различных размерностей. Пусть p и q — два целых числа, удовлетворяющих $l \leq q <$; рассмотрим конфигурацию, состоящую из D<math>p-браны и Dq-браны. Так как случай p = q уже рассматривался, положим p > q. Браны совместимы, если мировой объем Dq-браны является подмножеством мирового объема Dp-браны. Считаем, что браны параллельны друг другу. Это означает то же самое, что мы подразумеваем, когда говорим «прямая параллельна плоскости»: существует плоскость, параллельная заданной плоскости и содержащая заданную прямую. Таким образом, если Dp-брана и Dq-брана разделены, то существует p-мерная гиперплоскость, параллельная Dp-бране, которая содержит Dq-брану.

В случае D2-браны и D1-браны соответствующую конфигурацию легко представить, она показана на рис. 15.3. На рисунке D2-брана совпадает с плоскостью (x, y) и расположена в точке z = 0, D1-брана совпадает с осью x и расположена в точках y = 0 и $z = z_0$, D1-брана параллельна D2-бране и они совпадают только при $z_0 = 0$. В табл. 15.1 приведена соответствующая информация о пространственных измерениях D-бран. Черточка (-) обозначает направление вдоль Dp-браны, жирная точка • обозначает направление, нормальное к Dp-бране. Ось x является общим касательным направлением. Ось y является смешанным направлением: одна брана расположена вдоль этого направления, а другая нет. Ось z является общим нормальным направлением. В общем случае для Dpи Dq-бран имеем

 $\underbrace{\boldsymbol{x}^{0}, \boldsymbol{x}^{1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{q}}_{,}$

$$\underbrace{x^{q+1}, x^{q+2}, \ldots, x^p}_{}$$

 $\underbrace{x^{p+1}, x^{p+2}, \ldots, x^d}_{}$

общие касательные координаты

общие нормальные координаты

(15.61)



Рис. 15.3. D2-брана, расположенная вдоль плоскости (x, y) и параллельная ей D1-брана, расположенная вдоль оси x и проходящая через точки y = 0, $z = z_0$. Также показана открытая струна, натянутая между D2-браной и D1-браной; струнная координата Y такой струны имеет тип ND

Есть (q + 1) общих касательных направлений (все координаты в мировом объеме Dq-браны, включая время), (p - q) направлений касательных, к Dp-бране и нормальных к Dq-бране, и (d - p) общих нормальных направлений.

Мы уже изучали струны, начинающиеся и заканчивающиеся на одной и той же D-бране, и поэтому в этом разделе мы сосредоточимся на струнах, натянутых от одной D-браны к другой. Для определенности, рассмотрим струны, натянутые между Dp-браной и Dq-браной. Кое-что уже известно о таких струнах: общие касательные координаты имеют тип NN и общие нормальные координаты имеют тип DD; эти два типа координат уже изучались. Смешанные координаты, касательные к одной бране и нормальные к другой, принадлежат новому типу. В примере D2- и D1-бран ось y задает смешанное направление. Для струны, протянутой от D2-бране к D1-бране, струнная координата Y, соответствующая y. при $\sigma = 0$ имеет тип N, так как y касательна к D2-бране, и тип D при $\sigma = \pi$, так как y нормальна к D1-бране; сокращенно Y обозначается как ND-координата. Для струны, протянутой от D1-браны к D2-бране, координата Y является DN-координатой.

Смешанные пространственные координаты в Dp- и Dq-бранной конфигурации были перечислены в (15.61). Для открытых струн, протянутых от Dp-браны к Dq-бране, соответствующие струнные координаты удовлетворяют граничным условиям Неймана на исходной Dp-бране и граничным условиям Дирихле на конечной Dq-бране; они являются ND-координатами. Полный набор струнных координат разбивается на

$$\underbrace{X^{0}, X^{1}, \dots, X^{q}}_{\text{NN-KOODZMHATM}}, \underbrace{X^{q+1}, X^{q+2}, \dots, X^{p}}_{\text{ND-KOODZMHATM}}, \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^{d}}_{\text{DD-KOODZMHATM}}.$$
(15.62)

Таблица 15.1

D-бранная конфигурация и граничные условия

Координата	£	y	2
D2	1 -	-	•
Di	-	•	•
[D2 , D 1]	NN	ND	DD

Замечание. Черточка во второй и третьей строке обозначает направления, вдоль которых расположена D-брана, жирная точка • — направления, нормальные к бране. В последней строке указаны типы граничных условий для открытых [D2, D1]-струн, протянутых от D2-браны к D1-бране

Для нумерации струнных координат в обозначениях светового конуса мы используем три типа индексов:

$$\underbrace{X^+, X^-, \{X^i\}}_{NN}, \quad \underbrace{\{X^r\}}_{ND}, \quad \underbrace{\{X^a\}}_{DD}, \quad (15.63)$$

где

 $i = 2, \ldots, q, \quad r = q + 1, \ldots, p \quad \varkappa \quad a = p + 1, \ldots, d.$ (15.64)

Считаем, что D*p*-брана является первой, а D*q*-брана — второй. Положение D*p*-браны задается координатами \bar{x}_1^a , а положение D*q*-браны задается координатами \bar{x}_2^r на \bar{x}_2^a . В примере D2-, D1-бран на рис. 15.3 роль \bar{x}_2^r играет *y*-координата D1-браны, подходящим выбором координатных осей *y* может быть положена равной 0.

Начнем рассмотрение с ND-координат X^r . Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0} = 0, \quad X^r(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r.$$
 (15.65)

Подходящим выбором координатных осей координата \vec{x}_2^r может быть положена равной нулю, однако мы не будем этого делать. В отличие от разности координат $\vec{x}_1^a - \vec{x}_2^a$, определяющей расстояние между D-бранами, \vec{x}_2^r не играет какой-либо существенной роли. Теперь рассмотрим стандартное разложение

$$X^{r}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2} \left(f^{r}(\tau+\sigma) + g^{r}(\tau-\sigma) \right).$$
(15.66)

Граничное условие при $\sigma = 0$ дает

$$f'^{r}(u) = g'^{r}(u) \to g^{r}(u) = f^{r}(u) + c_{0}^{r}.$$
 (15.67)

Имея ввиду, что второе граничное условие приравнивает X^r к \bar{x}_2^r в точке $\sigma = \pi$, выберем $c_0^r = 2\bar{x}_2^r$, вследствие чего

$$X^{r}(\tau,\sigma) = \overline{x}_{2}^{r} + \frac{1}{2} \left(f^{r}(\tau+\sigma) + f^{r}(\tau-\sigma) \right).$$
(15.68)

407

Тогда из граничного условия при $\sigma = \pi$ следует

$$f^{r}(u+2\pi) = -f^{r}(u).$$
 (15.69)

При увеличении аргумента на 2π функция $f^r(u)$ меняет знак. Похожая ситуация возникала для твистового сектора $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолда (раздел 13.6) и для фермионов Невье—Шварца (раздел 14.4). В этом случае использовалось разложение по полуцелым модам, содержащее тригонометрические функции,

$$\boldsymbol{f}^{r}(\boldsymbol{u}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}^{+}} \left[\boldsymbol{f}_{n}^{r} \cos\left(\frac{n\boldsymbol{u}}{2}\right) + \boldsymbol{h}_{n}^{r} \sin\left(\frac{n\boldsymbol{u}}{2}\right) \right].$$
(15.70)

Подставляя это выражение обратно в (15.68) и переопределяя коэффициенты разложения, получаем

$$X^{r}(\tau,\sigma) = \bar{x}_{2}^{r} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}^{+}} \left[A_{n}^{r} \cos\left(\frac{n\tau}{2}\right) + B_{n}^{r} \sin\left(\frac{n\tau}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right).$$
(15.71)

Тем самым получено разложение в ND-координатах; для квантования необходимо определить осцилляторы, соответствующие полуцелым модам. Для этого также можно воспользоваться простотой выражения $\dot{X}^r \pm X^{r'}$. В итоге получаем

$$X^{r}(\tau,\sigma) = \bar{x}_{2}^{r} + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{odd}}\frac{2}{n}\alpha_{n/2}^{r}e^{-i\frac{n}{2}\tau}\cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right), \quad (15.72)$$

где суммы берутся по отношению как к положительным, так и к отрицательным нечетным числам. Множитель i перед всей суммой необходим, для того чтобы эрмитовость X^r приводила к стандартным условиям эрмитовости для осцилляторов:

$$(\alpha_{n/2}^{r})^{\dagger} = \alpha_{-n/2}^{r}.$$
 (15.73)

Величины \bar{x}_2^r остаются константами и не квантуются. В разложении для X^r отсутствуют нулевые моды и поэтому средние импульсы, соответствующие ND-координатам, равны нулю. Комбинации производных

$$\dot{X}^{r} \pm X^{r'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} \alpha_{n/2}^{r} e^{-i\frac{n}{2}(\tau \pm \sigma)}$$
(15.74)

записываются, как и ожидалось, в стандартном виде. Это разложение напоминает похожие разложения (13.106) для координаты X твистового сектора на орбифолде.

Ненулевые коммутационные соотношения для струнных координат принимают вид

$$[X^{r}(\tau,\sigma), \dot{X}^{s}(\tau,\sigma')] = i(2\pi\alpha')\delta(\sigma-\sigma')\delta^{rs}.$$
(15.75)

Это уравнение означает, что можно использовать подходящий вариант выражения (12.30):

$$\left[(\dot{X}^{r}\pm X^{r'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^{s}\pm X^{s'})(\tau,\sigma')\right]=\pm 4\pi\alpha' i\eta^{rs}\frac{d}{d\sigma}\,\delta(\sigma-\sigma').\tag{15.76}$$

408

Так как разложение (15.74) имеет стандартный вид, то, с учетом небольших изменений, уравнение (12.40) остается в силе при $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$:

$$\sum_{m',\,n'\in\mathbb{Z}_{\rm odd}} e^{-i\frac{m'}{2}(r+\sigma)} e^{-i\frac{n'}{2}(r+\sigma')} \left[\alpha_{m'/2}^r,\,\alpha_{n'/2}^s\right] = 2\pi i \eta^{rs} \frac{d}{d\sigma} \,\delta(\sigma-\sigma'). \tag{15.77}$$

Коммутационные соотношения находятся так же, как и прежде, см. обсуждение формулы (13.107),

$$[\alpha_{m/2}^{r}, \alpha_{n/2}^{s}] = \frac{m}{2} \,\delta^{rs} \delta_{m+n,0}, \qquad (15.78)$$

т. е. имеют стандартный вид.

Теперь вычислим оператор квадрата массы. Этот оператор зависит от всех типов координат заданного сектора: NN, ND и DD. Это очевидно из (15.8), так как исходный индекс координат светового конуса I теперь разбит на три группы: *i*, *r* и *a*. Из того, что линейная комбинация производных (15.74) имеет стандартный вид, следует, что вклад ND-координаты не изменится. Выражение для $2p^+p^-$ может быть получено небольшим изменением уравнения (15.49):

$$2p^{+}p^{-} = \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \alpha_{0}^{a} \alpha_{0}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a} \alpha_{n}^{a} \right] + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha_{-m/2}^{r} \alpha_{m/2}^{r} + a \right).$$
(15.79)

Выписывая это уравнение, мы восстановили константу упорядочения a, которая, напомним, возникает эвристическим способом при упорядочении осцилляторов в L_0^{\perp} (см. (12.102), (12.107) и (12.110)). Так как все осцилляторы типа NN и DD нумеруются целыми числами, то соответствующие константы при нормальном упорядочении одинаковы и равны 1/2(-1/12) = -1/24. Так как общее число поперечных координат светового конуса равно 24, то, учитывая только NN и DD координаты, получаем a = -1. Вклад ND-координаты в значение a можно определить, записав следующую сумму:

$$\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha^{r}_{-m/2} \alpha^{r}_{m/2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^{+}} \alpha^{r}_{-m/2} \alpha^{r}_{m/2} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^{+}} [\alpha^{r}_{m/2}, \alpha^{r}_{-m/2}].$$
(15.80)

Первый член в правой части уравнения дает слагаемое, возникающее в (15.79), а второй член возникает в результате упорядочения. Так как имеется (p - q) ND-координат, константа упорядочения принимает значение

$$\frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{odd}^+}^+ \left[\alpha_{m/2}^r, \alpha_{-m/2}^r\right] = \frac{1}{4}(p-q)\sum_{m\in\mathbb{Z}_{odd}^+} m = \frac{1}{48}(p-q).$$
(15.81)

Здесь мы использовали (15.78) и тот факт, что сумма по всем полуцелым положительным числам равна 1/12. Данное вычисление показывает, что каждая ND-координата дает в константу упорядочения вклад +1/48, струнная DN-координата даст точно такой же вклад. В итоге, для различных типов струнных координат имеем следующие вклады от нормального упорядочения осцилляторов в $\alpha' M^2$

$$a_{\rm NN} = a_{\rm DD} = -\frac{1}{24}, \qquad a_{\rm ND} = a_{\rm DN} = \frac{1}{48}.$$
 (15.82)

Возвращаясь к рассматриваемому вопросу, полная константа упорядочения равна величине a (15.81) плюс вклады (24–(p-q)) координат типа NN либо DD:

$$a = -\frac{1}{24} (24 - (p - q)) + \frac{1}{48} (p - q) = -1 + \frac{1}{16} (p - q). \quad (15.83)$$

Вооружившись новым знанием, можно найти M^2 . Проделывая те же самые шаги, как и в случае (15.50), получаем

$$M^{2} = \left(\frac{\bar{x}_{2}^{a} - \bar{x}_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2} + \frac{1}{\alpha'}\left(N^{\perp} - 1 + \frac{1}{16}(p-q)\right), \quad (15.84)$$

где

$$N^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{q} n a_{n}^{i\dagger} a_{n}^{i} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{odd}^{+}} \sum_{r=q+1}^{p} \frac{k}{2} a_{k/2}^{r\dagger} a_{k/2}^{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^{d} m a_{m}^{a\dagger} a_{m}^{a}.$$
 (15.85)

Эта формула для M^2 учитывает все эффекты, обсуждавшиеся выше: сдвиг константы упорядочения, вклад от натянутых струн, оператор уровня, содержащий вклады NN-, DD- и ND-координат.

Рассмотрим пространство состояний и поля, ассоциированные с двумя нижними массивными уровнями. Основное состояние имеет вид

$$|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad \vec{p} = (p^2, \dots, p^q).$$
 (15.86)

Выражение для состояний импульса показывает, что поля находятся в (q+1)-мерном пространстве-времени. Можно сказать, что они живут в мировом объеме Dq-браны, т. е. браны меньшей размерности. Общее правило очевидно: размерность пространства-времени, содержащего поля, возникающие в любом заданном секторе, равна числу соответствующих струнных NN-координат. Пространство состояний возникает при действии на основное состояние осцилляторами трех типов: $-a_p^{i\dagger}$, $a_{k/2}^{r\dagger}$ и $-a_m^{a\dagger}$.

Основное состояние имеет $N^{\perp} = 0$ и соответствует одному скалярному полю на Dq-бране. Вообще говоря, этот скаляр массивный, но может стать либо тахионом либо безмассовым, в зависимости от расстояния между бранами и значения p - q. Для простоты предположим, что браны совпадают. Если, к тому же, p - q = 16, то скаляр является безмассовым. Следующие состояния имеют вид

$$\alpha_{1/2}^{\dagger} | p^+, \vec{p}; [12] \rangle, \quad N^\perp = \frac{1}{2}.$$
 (15.87)

410

Они приводят к (p-q) скалярным полям, так как индекс r не является индексом координат в мировом объеме Dq-браны. Все остальные состояния с необходимостью являются массивными, потому как для них $N^{\perp} \ge 1$, что в совокупности с p > q означает $M^2 > 0$. В частности, безмассовые калибровочные поля не возникают.

Задачи

Задача 15.1. Dp-браны и ориентифолды

В этой задаче (являющейся продолжением задачи 13.6), изучается влияние ориентифолдов на открытые струны.

Заполняющая все пространство O25-плоскость урезает спектр до набора состояний, инвариантных относительно операции Ω , изменяющей ориентацию струн. Если имеется D*p*-брана, Ω действует на координаты открытых струн следующим образом:

$$\Omega X^{a}(\tau,\sigma)\Omega^{-1} = X^{a}(\tau,\pi-\sigma), \qquad (1)$$

$$\Omega X^{i}(\tau,\sigma)\Omega^{-1} = X^{i}(\tau,\pi-\sigma).$$
⁽²⁾

Как обычно, требуем $\Omega x_0^- \Omega^{-1} = x_0^-$ и $\Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+$.

- (a) Задайте действие Ω на осцилляторах α_n^a и α_n^i . Каким должно быть действие Ω на α_n^- ? Получается ли его определить?
- (б) Предположим, что основное состояние $|p^+, \vec{p}\rangle$ является Ω -инвариантным. Найдите состояния при $N^{\perp} \leq 2$. Вы обнаружите, что некоторые безмассовые состояния сохраняются. Проинтерпретируйте эти состояния, повторяя рассуждения раздела, следующие за (15.37).

Замените О25-плоскость на О*p*-плоскость, совпадающую с D*p*-браной в $\bar{x}^a = 0$. Пусть Ω_p обозначает такой оператор, что в теории присутствуют только состояния с $\Omega_p = +1$.

- (в) Как должны измениться уравнения (1) и (2), если Ω заменить на Ω_p ? Задайте действие Ω_p на α_n^a и α_n^i .
- (г) Опишите полный спектр состояний в виде простого усечения спектра Dp-браны. В этом случае вы не обнаружите безмассовых скаляров. Что это значит для возможного движения Dp-браны?

Задача 15.2. Произведение струн и обращающие ориентацию симметрии

Уравнение (15.59) описывает комбинирование *секторов* открытых струн при взаимодействии. Символ произведения секторов может быть использован и для струн. Выражение

$$|A\rangle * |B\rangle \tag{1}$$

означает, что струнное состояние получено при взаимодействии струны в состоянии $|A\rangle$ со струной в состоянии $|B\rangle$. Струнное произведение должно удовлетворять правилу секторов: состояние (1) должно принадлежать сектору [A] * [B], где [A] и [B] обозначают секторы, которым принадлежат, соответственно, струнные состояния $|A\rangle$ и $|B\rangle$.

Изучая конфигурацию струн А и В, обоснуйте следующие уравнения

$$\Omega(|A\rangle * |B\rangle) = (\Omega|B\rangle) * (\Omega|A\rangle), \qquad (2)$$

$$\Omega_{p}(|A\rangle * |B\rangle) = (\Omega_{p}|B\rangle) * (\Omega_{p}|A\rangle).$$
(3)

Здесь Ω — это оператор изменения ориентации струны, а Ω_p — оператор ориентифолда (смена ориентации и отражения относительно набора координат).

▶ Задача 15.3. N совпадающих Dp-бран и ориентифолды

Пусть N совпадающих Dp-бран совпадают с Op-плоскостью, и все они расположены в $\bar{x}^a = 0$. Как обычно, симметрия ориентифолда Ω_p заключается в смене ориентации струны при отражении координат, нормальных к поверхности ориентифолда. Предположим, что каждая из Dp-бран инвариантна относительно отражения координат (в отличие от отображения друг в друга). Состояния определяются условием $\Omega_p = +1$.

(а) Объясните, почему разумно постулировать

$$\Omega_p | p^+, \vec{p}; [ij] \rangle = | p^+, \vec{p}; [ji] \rangle.$$

Каковы основные состояния? Сколько их?

(б) Опишите полный спектр открытых струн в терминах спектра одной Dp-браны. Убедитесь, что при N = 1 воспроизводится результат п. (г) задачи 15.1.

Задача 15.4. Разделенные Dp-браны и Op-плоскость

Мы выяснили, что ориентифолд ведет себя как зеркало. Если есть D-браны, несовпадающие с ориентифолдом, то обязаны быть зеркальные к ним D-браны, расположенные в отраженных точках. Поэтому, для анализа теории D-бран, не совпадающих с Op-плоскостью, начнем с N Dp-бран и N зеркальных к ним Dp-бран в отраженных точках. После этого необходимо определить действие ориентифолда на все состояния 2N Dp-бран. Наконец, мы используем это действие для того, чтобы отрезать неинвариантные относительно него состояния, и получим тем самым спектр состояний на ориентифолде.

Рассмотрим ситуацию, проиллюстрированную рис. 15.4, где показана конфигурация бран, спроектированных на плоскость, две координаты которой нормальны и к поверхности браны, и к поверхности ориентифолда. Состояния Dp-бран обозначены 1, 2, ..., N, а их зеркальные изображения обозначены $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{N}$. Показаны две струны: одна в секторе [24], другая в секторе [11].

(a) Покажите две струны, получающиеся в результате преобразования симметрии ориентифолда. Так как основное состояние всегда зависит от аргументов p^+ , \vec{p} , то для краткости их можно опустить. Основное состояние бывает четырех типов:

$$|[ij]\rangle, |[ij]\rangle, |[ij]\rangle, |[ij]\rangle.$$
 (1)

412



Рис. 15.4. Задача 15.4. Набор *N* D*p*-бран и набор *N* зеркальных D*p*-бран. О*p*-плоскость находится в начале координат

Каждый класс содержит N^2 основных состояния, так как *i* и *j* пробегают от 1 до N, а \overline{i} и \overline{j} от $\overline{1}$ до \overline{N} . Определите действие Ω_p на основные состояния (1). Покажите, что на основных состояниях заданное действие удовлетворяет $\Omega_p^2 = 1$.

- (б) Каковы возможные взаимодействия струн из секторов, соответствующих каждому из четырех основных состояний (1)? Выпишите ответ, используя обозначения из (15.59).
- (в) Известно, что при струнном взаимодействии струнное произведение основных состояний приводит к состояниям, имеющим компоненту вдоль основного состояния. Таким образом, например,

$$|[i\bar{j}]\rangle * |[\bar{j}k]\rangle = |[ik]\rangle + \dots$$
 (2)

Напишите другие возможные произведения основных состояний. Проверьте совместность вашего определения Ω_p , действуя Ω_p на обе стороны уравнений, задающих произведение основных состояний. При действии на произведение используйте уравнение (3) задачи 15.2.

(г) С помощью $\Omega_p X^i(\tau, \sigma) \Omega_p^{-1} = X^i(\tau, \pi - \sigma)$ найдите действие Ω_p на осцилляторы α_n^i . Так как струны натянуты вдоль координат x^a , либо имеют соответствующие ненулевые значения, условие вида $\Omega_p X^a(\tau, \sigma) \Omega_p^{-1} = -X^a(\tau, \pi - \sigma)$ может быть наложено не во всех случаях. Например, используя (15.20) для X^a , нам понадобилось бы условие $\Omega_p \bar{x}^a \Omega_p^{-1} = -\bar{x}^a$, которое, однако, не может выполняться, потому что \bar{x}^a не являются переменными. Правомерный

вывод действия Ω_p на осцилляторы α_n^a может быть получен наложением $\Omega_p \dot{X}^a(\tau, \sigma) \Omega_p^{-1} = -\dot{X}^a(\tau, \pi - \sigma)$. Убедитесь, что для произвольного произведения осцилляторов обоих типов R, справедливо

$$\Omega_p R \Omega_p^{-1} = (-1)^{N^\perp} R,$$

где N^{\perp} — полное число осцилляторов в R.

(д) Опишите спектр состояний на ориентифолде в терминах спектра одной Dp-браны. Для этого рассмотрите произвольное произведение осцилляторов R и постройте состояния общего вида

$$\sum_{ij} \left(r_{ij} R | [ij] \rangle + r_{i\bar{j}} R | [i\bar{j}] \rangle + r_{\bar{i}j} R | [\bar{i}j] \rangle + r_{\bar{i}\bar{j}} R | [\bar{i}\bar{j}] \rangle \right), \tag{4}$$

где r_{ij} , r_{ij} , r_{ij} и r_{ij} являются $N \times N$ матрицами. Найдите условия накладываемые на эти матрицы инвариантностью относительно Ω_p . Возможны два случая, в зависимости от числа N^{\perp} для R. Вы должны обнаружить, что для нечетного N^{\perp} в (4) существуют N(2N-1) линейно независимых состояний. Так как калибровочные поля соответствуют состояниям с N^{\perp} , то их количество равно N(2N+1).

Поскольку калибровочное поле соответствует условию $N^{\perp} = 1$, существует N(2N - 1) состояний. Это число элементов в $2N \times 2N$ антисимметричной матрице. Теорией взаимодействия таких калибровочных полей является SO(2N) калибровочная теория Янга—Миллса (SO означает специальная ортогональная). Например, SO(10) калибровочная теория может быть использована для построения теории Великого объединения сильных и слабых взаимодействий.

Задача 15.5. Несовпадающие Dp-браны и другая Op-плоскость

Конфигурация бран в этой задаче такая же, как в задаче 15.4. В п. (а) вы определили простое действие Ω_p на основные состояния $|[ij]\rangle$, $|[ij]\rangle$, $|[ij]\rangle$ и $|[ij]\rangle$. Найдите альтернативное действие Ω_p , при котором часть соотношений определена со знаком минус: $\Omega_p |[...]\rangle = \pm |[...]\rangle$. Проверьте непротиворечивость определения, убедившись в том, что $\Omega_p^2 = 1$ на основных состояниях и в том, что произведение основных состояний не противоречит действию Ω_p , по аналогии с п. (в) задачи 15.4. Найдите спектр такой теории на ориентифолде.

Калибровочные поля соответствуют состояниям с $N^{\perp} = 1$, и вы обнаружите, что их количество равно N(2N + 1). Взаимодействующей теорией таких калибровочных полей является U Sp(2N)-теория Янга—Миллса (U Sp означает унитарная симплектическая).

▶ Задача 15.6. Струнные DN-координаты

В разделе 15.4 мы рассматривали струны, натянутые от Dp- к Dq-бране, и уделили особое внимание координатам X^r , которые удовлетворяют граничным условиям типа ND. Теперь рассмотрим струны, натянутые от Dq- к Dp-бране. Для таких струн координаты X^r имеют тип DN.

- (a) Выпишите граничные условия для координат X^r и используйте их для вывода разложения по модам, по аналогии с выводом разложения (15.72) для ND-координаты.
- (б) Также найдите уравнения, заменяющие (15.74). Кратко объясните, почему формула для квадрата массы (15.84) не требует модификации.
- (в) Если в (15.72) положить σ → π σ, то автоматически получается функция, удовлетворяющая граничным условиям типа DN. Сравните ответ с разложением по модам, полученным в п. (а), и объясните, почему свойства эрмитовости не нарушились.

Задача 15.7. D1-браны, расположенные под углом

Рассмотрите две бесконечно длинные D1-браны на плоскости (x^2, x^3) . Первая брана определена как $x^3 = 0$, а вторая брана расположена под углом γ , отложенным против часовой стрелки от оси x^2 . Пусть $X^2(\tau, \sigma)$ и $X^3(\tau, \sigma)$ — координаты открытой струны. Рассмотрите только открытые струны, начинающиеся на первой бране и заканчивающиеся на второй бране. Определите граничные условия для X^2 и X^3 в точках $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$.

▶ Задача 15.8. Струны в конфигурации Dp-браны и D25-браны

Рассмотрите полное пространство состояний теории открытых струн в конфигурации Dp-браны и D25-браны. Положите $1 \le p \le 24$. Для каждого сектора теории найдите оператор M^2 и подробно проанализируйте состояния, возникающие на двух нижних уровнях, указав типы соответствующих полей и пространство, в котором эти поля расположены.

Задача 15.9. Пара пересекающихся D22-бран

В этой задаче изучается конфигурация двух D22-бран. Одна из них, далее называемая браной 1, определяется как $x^{25} = x^{23} = x^{22} = 0$. Вторая, брана 2, определяется как $x^{24} = x^{23} = x^{22} = 0$.

Нарисуйте, как выглядит такая конфигурация бран в плоскости (x^{24}, x^{25}) . По аналогии с табл. 15.1, составьте таблицу для данной конфигурации, добавив столбцы для всех координат и строки для всех секторов. Для каждого сектора теории найдите оператор M^2 и подробно рассмотрите состояния на двух нижних уровнях, указав типы соответствующих полей и пространство, в котором эти поля расположены.

Основной смысл задачи: если в конфигурации двух пересекающихся D-бран x^a является общим направлением типа Дирихле, то координаты x^a двух D-бран должны совпадать. Объясните почему.

Глава 16

Струнный и электрический заряды

Если точечная частица взаимодействует с полем Максвелла, то она обладает электрическим зарядом. Струны взаимодействуют с полем Кальба—Рамона, поэтому струны обладают зарядом нового типа — струнным зарядом. Струнный заряд натянутой струны можно представлять как ток, текущий вдоль струны. Струны могут заканчиваться на D-бранах, не нарушая при этом закон сохранения струнного заряда по той причине, что и концы открытых струн, и силовые линии возникающего электрического поля на D-бране обладают струнным зарядом. Некоторые D-браны в теории суперструн могут обладать электрическим зарядом, соответствующим полям Рамон–Рамона. Если заряженная брана полностью наматывается на компактное измерение, то для наблюдателя в пространстве меньшей размерности она выглядит как точечная частица, обладающая электрическим зарядом поля Максвелла, возникающего при размерной редукции.

16.1. Фундаментальный струнный заряд

Как мы видели ранее, точечная частица может обладать электрическим зарядом по той причине, что существует некоторая сила, позволяющая ей взаимодействовать с полем Максвелла. Мировая линия точечной частицы одномерна, а поле Максвелла A_{μ} имеет один индекс. Это важное соответствие. Касательный вектор к траектории частицы имеет вид $dx^{\mu}(\tau)/d\tau$, где τ параметризует мировую линию. По причине того, что касательный вектор имеет один лоренцевский индекс, он может быть умножен на калибровочное поле A_{μ} , а соответствующие индексы сворачиваются друг с другом так, что получающаяся комбинация есть лоренцевский скаляр. Используя естественную систему единиц ($\hbar = c = 1$), взаимодействие точечной частицы заряда q можно представить в виде слагаемого в действии

$$q \int A_{\mu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} d\tau. \qquad (16.1)$$

В данной системе единиц удобно сделать q безразмерной величиной. Так как действие также является безразмерной величиной, то калибровочное поле A_{μ} должно иметь размерность обратной длины или массы: $[A_{\mu}] = M$. Напряженность поля имеет размерность $[F_{\mu\nu}] = M^2$, потому что она получается дифференцированием калибровочного поля по пространственно-временным координатам. Полная взаимодействующая система заряженной частицы и поля Максвелла определяется действием, рассмотренным в задаче 5.6:

$$S' = -m \int_{\mathcal{P}} ds + q \int_{\mathcal{P}} A_{\mu}(x) dx^{\mu} - \frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$
 (16.2)

Первое слагаемое в правой части есть действие частицы, последнее слагаемое — действие Максвелла. Для того чтобы сделать последнее слагаемое безразмерным, мы ввели размерную константу κ_0 размерности $[\kappa_0^2] = M^{4-D}$. При любых $D \neq 4$ появление этой константы неизбежно.

Может ли релятивистская струна быть заряженной? Предыдущие рассуждения указывают на то, что максвелловским зарядом могут обладать выделенные точки. Замкнутые струны не имеют выделенных точек, однако у открытых струн есть концы. Тем самым, вполне возможно, что концы открытых струн обладают электрическим максвелловским зарядом. Далее мы покажем, что это действительно так. Однако сейчас мы ищем нечто принципиально другое. Так как максвелловский электрический заряд естественным образом ассоциируется с точками, то можно задуматься, существует ли некий новый заряд, естественным образом ассоциированный со струнами. Для заряда нового типа необходим новый тип калибровочного поля. Таким образом, можно задаться вопросом: существует ли в теории струн поле, связанное со струной так же, как поле Максвелла связано с частицей? Ответ положительный. Таким полем является антисимметричный 2-тензор Кальба—Рамона $B_{\mu\nu}(= -B_{\nu\mu})$. Это безмассовое поле, возникающее в теории замкнутых струн (см. раздел 13.3 и задачу 10.6).

Давайте теперь повторим логику рассуждений, которые привели нас к (16.1). В любой точке траектории струны существует два линейно независимых касательных вектора. Действительно, имея на мировом листе координаты τ и σ , такие касательные векторы можно выбрать в виде $\partial X^{\mu}/\partial \tau$ и $\partial X^{\mu}/\partial \sigma$. Из них и поля с двумя индексам $B_{\mu\nu}$ можно построить лоренцевский скаляр:

$$-\int d\tau \, d\sigma \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} \, B_{\mu\nu} \big(X(\tau, \sigma) \big). \tag{16.3}$$

Посредством этого слагаемого струна взаимодействует с антисимметричным полем Кальба—Рамона. Такое взаимодействие называется электрическим, потому что оно является естественным обобщением электрического взаимодействия точечной частицы с полем Максвелла. Таким образом, мы говорим, что струна обладает электрическим зарядом Кальба—Рамона. В естественной системе единиц слагаемое со взаимодействием (16.3) должно быть безразмерным, поэтому $B_{\mu\nu}$ имеет размерность обратного квадрата длинны или квадрата массы: $[B_{\mu\nu}] = M^2$. Так же как и действие Намбу–Гото, введенное взаимодействие должно быть инвариантным относительно репараметризаций (τ , σ). Как будет видно в задаче 16.1, антисимметричность $B_{\mu\nu}$ необходима для возникновения репараметризационной инвариантности выражения (16.3). Важный вопрос о том, в какой мере выполняется репараметризационная инвариантность, будет обсуждаться в этом разделе позднее.

По аналогии с (16.2), которое описывает полную динамику частицы и полей Максвелла, струнное взаимодействие (16.3) должно быть дополнено струнным действием S_{str} и слагаемым, задающим динамику поля $B_{\mu\nu}$:

$$S = S_{\rm str} - \frac{1}{2} \int d\tau \, d\sigma B_{\mu\nu} \left(X(\tau\sigma) \right) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}.$$
 (16.4)

Антисимметризация определена следующим образом

$$a^{[\mu}b^{\nu]} = a^{\mu}b^{\nu} - a^{\nu}b^{\mu}.$$
(16.5)

Напряженность поля $H_{\mu\nu\rho}$, ассоциированная с $B_{\mu\nu}$, определена так же как в задаче 10.6:

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_{\mu}B_{\nu\rho} + \partial_{\nu}B_{\rho\mu} + \partial_{\rho}B_{\mu\nu}. \tag{16.6}$$

В последнем слагаемом в правой части (16.4) введена размерная константа κ необходимая для того, чтобы сделать его безразмерным ([κ^2] = M^{6-D}). В теории замкнутых струн константа κ является вычисляемой функцией струнной константы связи и α' . Множитель 1/2 во втором слагаемом в правой части уравнения (16.4) возникает за счет антисимметризации. Выражение, свернутое с $B_{\mu\nu}$, естественным образом антисимметризовано: так как $B_{\mu\nu}$ антисимметрично, то симметричная часть этого выражения не дает вклада в свертку. Отметим составной характер действия (16.4): одна часть действия является интегралом по всему пространству-времени.

Чтобы выяснить происхождение струнного заряда, рассмотрим заново уравнения Максвелла (3.34), в которых электрический заряд появляется как источник электромагнитного поля:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \boldsymbol{j}^{\mu}. \tag{16.7}$$

Здесь j^0 — это плотность электрического заряда. Неподвижная частица обладает электрическим зарядом, однако электрический ток равен нулю. Так же, как частица является источником поля Максвелла, струна является источником поля $B_{\mu\nu}$. Для поля $B_{\mu\nu}$ существует уравнение движения, аналогичное (16.7). Это уравнение получается вычислением вариации действия (16.4) относительно вариации $\delta B_{\mu\nu}(x)$. Вариация последнего слагаемого в действии была вычислена в задаче 10.6:

$$\delta\left[-\frac{1}{6\kappa^2}\int d^D x H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right] = \frac{1}{\kappa^2}\int d^D x \delta B_{\mu\nu}(x) \frac{\partial H^{\mu\nu\rho}}{\partial x^{\rho}}.$$
 (16.8)

Для нахождения вариации второго слагаемого в S необходимо варьировать $B_{\mu\nu}(x)$, но в этом слагаемом поле задается на мировой поверхности струны. Поле $B_{\mu\nu}(X)$

может быть переписано в виде интеграла по всему пространству-времени $B_{\mu\nu}(x)$ с добавлением дельта-функции, которая локализует данное поле на мировой лист:

$$B_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma)) = \int d^D x \, \delta^D(x - X(\tau,\sigma)) B_{\mu\nu}(x). \qquad (16.9)$$

С учетом данного тождества, второе слагаемое в S переписывается в виде

$$-\int d^{D}x B_{\mu\nu}(x) \frac{1}{2} \int d\tau \, d\sigma \, \delta^{D} \left(x - X(\tau,\sigma) \right) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma} \equiv -\int d^{D}x B_{\mu\nu}(x) j^{\mu\nu}(x).$$
(16.10)

где мы ввели обозначение $j^{\mu\nu}$ для выражения

$$j^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d\tau \, d\sigma \, \delta^D \left(x - X(\tau, \sigma) \right) \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} \right). \tag{16.11}$$

Стоит отметить, что $j^{\mu\nu}$ отличен от нуля только на мировой поверхности струны. Действительно, если x не лежит на мировом листе, то аргумент дельта-функции не может быть нулем, в силу чего интеграл равен нулю. Объект $j^{\mu\nu}$ будет играть роль тока. По построению, он антисимметричен относительно перестановки индексов:

$$j^{\mu\nu} = -j^{\nu\mu}.$$
 (16.12)

Теперь у нас есть все необходимое для нахождения уравнения движения для $B_{\mu\nu}$. Складывая уравнения (16.8) и (16.10), получаем, что полная вариация действия S равна

$$\delta S = \int d^D x \, \delta B_{\mu\nu}(x) \left(\frac{1}{\kappa^2} \, \frac{\partial H^{\mu\nu\rho}}{\partial x^{\rho}} - j^{\mu\nu} \right). \tag{16.13}$$

Если данная вариация должна обращаться в ноль для произвольных антисимметричных $\delta B_{\mu\nu}$, то антисимметричная часть выражения, свернутого с $\delta B_{\mu\nu}$, также должна обращаться в ноль (см. задачу 16.2). Так как выражение в скобках антисимметрично, то оно должно быть равно нулю:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial H^{\mu\nu\rho}}{\partial x^{\rho}} = j^{\mu\nu}.$$
(16.14)

() Упражнение-разминка 16.1. Для проверки понимания антисимметричных вариаций рассмотрите индексы i, j = 1, 2, пробегающие два значения, и произвольные антисимметричные вариации δB_{ij} , такие что $\delta B_{ij}G^{ij} = 0$. Явно покажите, что единственным получающимся условием является $G^{ij} - G^{ji} = 0$.

Сходство между (16.14) и (16.7) весьма примечательно. Оно указывает на то, что $j^{\mu\nu}$ является чем-то вроде сохраняющегося тока. Вектор j^{μ} в правой части (16.7) сохраняется, потому что справедливо соотношение

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0, \qquad (16.15)$$

которое выполняется в силу антисимметричности $F_{\mu\nu}$ и возможности перестановки частных производных. Таким же образом, из уравнения (16.14) следует

$$\frac{\partial j^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 H^{\mu\nu\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} = 0.$$
(16.16)

По индексу μ у $j^{\mu\nu}$ в условии сохранения происходит свертка, однако индекс ν остается свободным. Таким образом, тензор $j^{\mu\nu}$ можно рассматривать как набор токов, занумерованных индексом ν . Для каждого фиксированного ν компоненты токов соответствуют различным значениям μ . Так как нулевая компонента тока является зарядовой плотностью, то имеется несколько зарядовых плотностей $j^{0\nu}$. Более точно, так как $j^{00} = 0$ (16.12), ненулевыми зарядовыми плотностями являются j^{0k} , где k пробегает пространственные значения. Тем самым, зарядовые плотности струны определяют пространственный вектор:

зарядовая плотность Кальба—Рамона — вектор
$$\vec{j}^0$$
 с компонентами j^{0k} .
(16.17)

Позже мы покажем, что зарядовая плотность является вектором, касательным к струне. Рассмотрим соотношение (16.16) для $\nu = 0$:

$$\frac{\partial j^{\mu 0}}{\partial x^{\mu}} = -\frac{\partial j^{0k}}{\partial x^{k}} = 0.$$
(16.18)

Это утверждение выражает тот факт, что зарядовая плотность струны является вектором, дивергенция которого равна нулю:

$$\nabla \cdot \vec{j}^0 = 0. \tag{16.19}$$

Вектор струнного заряда \vec{Q} естественным образом определяется как интеграл по пространству от зарядовой плотности струны:

$$\vec{Q} = \int d^d x \, \vec{j}^{\,0}. \tag{16.20}$$

Для достижения более глубокого понимания струнного заряда давайте вычислим $j^{\mu\nu}$ в статичной калибровке $X^0 = \tau$. С учетом этого условия, дельта-функция в уравнении (16.11) принимает вид

$$\delta(x^0 - X(\tau, \sigma))\delta(\vec{x} - \vec{X}(\tau, \sigma)) = \delta(t - \tau)\delta(\vec{x} - \vec{X}(\tau, \sigma)), \quad (16.21)$$

и можно взять интеграл по au

$$j^{\mu\nu}(\vec{x},t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \,\delta\big(\vec{x} - \vec{X}(t,\sigma)\big) \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial t} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^{\nu}}{\partial t} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}\right)(t,\sigma). \quad (16.22)$$

420

Очевидно, что в любой фиксированный момент времени t_0 ток $j^{\mu\nu}$ на струне, т.е. на множестве точек $\vec{X}(t_0, \sigma)$, не равен нулю. Для j^{0k} вклад от второго слагаемого в (16.22) равен нулю в силу $X^0 = t$, и мы находим

$$\vec{j}^{0}(\vec{x},t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \,\delta\bigl(\vec{x} - \vec{X}(t,\sigma)\bigr) \,\vec{X}'(t,\sigma). \tag{16.23}$$

Подынтегральный множитель \vec{X}' в правой части этого уравнения означает, что в каждой точке струны вектор зарядовой плотности струны \vec{j}^0 касателен к ней. Он направлен, на самом деле, вдоль касательного вектора, задаваемого возрастающим σ . Так как ориентация струны отождествляется с направлением возрастания σ , то вектор зарядовой плотности лежит вдоль направления ориентации струны.

Такая ситуация может показаться странной. Ранее указывалось, что репараметризационная инвариантность струнного действия означает, что изменение параметризации не изменяет физического содержания. Изменение направления σ является репараметризацией, как это изменит зарядовую плотность струны? Несмотря на то, что действие Намбу–Гото инвариантно относительно произвольных репараметризаций, взаимодействие (16.3) струны с полем Кальба—Рамона таковым не является. Если сделать замену $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$ при фиксированном τ , то мера $d\tau d\sigma$ не изменит знак, а X'' изменит. В результате общий знак (16.3) изменится. На самом деле любая репараметризация, обращающая ориентацию мировой поверхности, изменяет знак этого слагаемого (задача 16.1).

Таким образом, открытые струны являются ориентированными кривыми. В любой фиксированный момент времени они полностью задаются некой кривой в пространстве, причем указывается, какая из концевых точек кривой соответствует $\sigma = 0$ (либо, эквивалентно, $\sigma = \pi$). Несмотря на то что замкнутые струны не имеют концов, тем не менее они все же обладают ориентацией, которая также определяется направлением возрастания σ . Теории открытых и замкнутых струн, рассматривавшиеся в предыдущих разделах, являлись, соответственно, теориями ориентированных открытых струн и ориентированных замкнутых струн. Теории неориентированных струн тоже существуют. Это непротиворечивые теории, возникающие при ограничении пространства состояний теорий (ориентированных) струн подпространством состояний, инвариантных относительно операции обращения ориентации. Такие теории изучались в ряде задач, начиная с задач 12.12 и 13.5. Спектр теории неориентируемых замкнутых струн не содержит поля Кальба-Рамона. Это полностью согласуется с нашими рассуждениями, так как состояния неориентируемых струн не обладают струнным зарядом (в ином случае куда бы он мог быть направлен?).

Для бесконечно длинной струны, натянутой вдоль оси x^1 (похожая конфигурация изучалась в разделе 6.7) интеграл в выражении (16.23) легко вычисляется. Такая струна описывается уравнением

$$X^{1}(t,\sigma) = f(\sigma), \quad X^{2} = X^{3} = \ldots = X^{d} = 0,$$
 (16.24)

где $f(\sigma)$ есть функция от переменной σ , изменяющейся от $-\infty$ до $+\infty$. Функция f должна быть либо строго возрастающей либо строго убывающей функцией σ .

Ожидается, что это различие является важным, так как эти две возможности соответствуют струнам с противоположной ориентацией. От σ зависит только X^1 , поэтому уравнение (16.23) означает, что единственной ненулевой компонентой $j^{\mu\nu}$ является j^{01} (= $-j^{10}$):

$$j^{01}(\vec{x},t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \,\delta\big(x^1 - X^1(\tau,\sigma)\big) \,\delta(x^2)\delta(x^3) \dots \delta(x^d) f'(\sigma) =$$
$$= \frac{1}{2} \,\delta(x^2)\delta(x^3) \dots \delta(x^d) \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \,\delta\big(x^1 - f(\sigma)\big) f'(\sigma). \tag{16.25}$$

Обозначая единственное решение уравнения $\sigma(x^1)$ как $x^1 - f'(\sigma) = 0$, запишем известное свойство дельта-функций в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \,\delta\big(x^{1} - f(\sigma)\big) \,f'(\sigma) = \frac{f'(\sigma(x^{1}))}{|f'(\sigma(x^{1}))|} = \operatorname{sgn}\big(f'(\sigma(x^{1}))\big), \qquad (16.26)$$

где sgn (a) обозначает знак a. Так как функция f либо строго возрастает либо строго убывает, то этот знак либо положительный либо отрицательный для всех x^1 . Таким образом, возвращаясь к $j^{01}(\vec{x}, t)$,

$$j^{01}(x^1, \ldots, x^d; t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(f') \,\delta(x^2) \ldots \delta(x^d) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(f') \,\delta(\vec{x}_{\perp}), \qquad (16.27)$$

где \vec{x}_{\perp} — вектор, компоненты которого ортогональны к струне. Зарядовая струнная плотность сосредоточена на струне, и мы явным образом наблюдаем соответствие знака f' выбору ориентации. Для произвольной неподвижной струны пространственные струнные координаты X^k не зависят от времени. В результате, уравнение (16.22) означает что

для неподвижной струны
$$j^{ik} = 0.$$
 (16.28)

Для неподвижной струны отличны от нуля только компоненты струнной зарядовой плотности j^{0k} .

В заключение этого раздела, давайте кратко обсудим вопрос фоновых полей. Ранее утверждалось, что струнное действие должно быть дополнено слагаемым со взаимодействием (16.3). Можно задаться вопросом: справедливо ли прежнее квантование струны, в котором дополнительное слагаемое в струнном действии не рассматривалось? Да, справедливо, так как квантование выполнялось для нулевого фонового поля Кальба—Рамона. Поле $B_{\mu\nu}$ в (16.3) называется фоновым¹⁾ полем Кальба—Рамона. Фоновое поле Кальба—Рамона — это поле $B_{\mu\nu}$, удовлетворяющее своим классическим уравнениям движения. Цепочка рассуждений, приведшая нас к рассмотрению фоновых полей такова. Мы проквантовали замкнутые струны и обнаружили состояния Кальба—Рамона. Из этих квантовых

¹⁾ В русскоязычной литературе такие поля принято называть свободными. — Прим. ред. перевода.

состояний мы вывели существование полей $B_{\mu\nu}$ и вывели для них (линеаризованные) уравнения движения. Постулируя существование фоновых полей, мы имеем ввиду, что существуют нетривиальные поля $B_{\mu\nu}$, которые являются решениями полных уравнений движения. Когда говорят о фоновых электромагнитных полях, имеют ввиду поля \vec{E} и \vec{B} , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла. Сходным образом, гравитационное фоновое поле — это пространство-время, метрика которого $g_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна общей теории относительности.

Предположим, что имеется некоторая конфигурация полей $B_{\mu\nu}$. Каким образом можно было бы решить, является это фоновым полем или нет? Если бы были доступны полные нелинейные уравнения движения, то можно было бы напрямую проверить, является ли данная полевая конфигурация решением или нет. Так как такие уравнения недоступны, требуется менее прямая процедура. Необходимо заново проквантовать струну с учетом взаимодействия (16.3), что позволит учесть возможные эффекты от появления фонового поля $B_{\mu\nu}$. В случае успешного квантования можно сделать вывод, что данная полевая конфигурация определяет некоторый фон. Подобная процедура осуществима, и физики обнаружили несколько фоновых конфигураций $B_{\mu\nu}$.

16.2. Визуализация струнного заряда

В классической теории электромагнитного поля Максвелла существует множество зарядовых конфигураций: точечные заряды и заряды, непрерывно распределенные вдоль линии, по поверхности, по объему. Так как мы убедились в том, что струнный заряд сосредоточен на струне, может показаться, что плотность струнного заряда представима в виде линейной плотности заряда на струне. Это не совсем так. Струнную плотность заряда можно представлять как максвелловский ток на струне. Действительно, было установлено, что плотность струнного заряда является направленным вдоль струны пространственным вектором, а именно таким образом на струне выглядит максвелловский ток.

Интеграл по пространству от плотности заряда струны определяет полный струнный заряд \vec{Q} (16.20). Этот заряд имеет следующие недостатки: он бесконечен для бесконечно натянутой струны (см. (16.27)) и равен нулю для стягиваемых замкнутых струн (задача 16.3). Тем не менее этот струнный заряд возможно использовать для подсчета струн. Струнное число \mathcal{N} , которое далее будет определено, подсчитывает количество струн, находящихся внутри заданной поверхности.

В силу (16.19), плотность заряда струны \vec{j}^0 ведет себя как электрический максвелловский ток. Закон сохранения электрического заряда имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \tag{16.29}$$

В магнитостатике плотность электрического заряда ρ не зависит от времени, в результате чего дивергенция плотности электрического тока равна нулю. Это означает, что заряд не накапливается где-либо в произвольный момент времени. Токи, дивергенция которых равна нулю, постоянно текут. Если такой ток течет по контуру, то он должен быть либо замкнутым (в нашем случае это замкнутые струны), либо бесконечно протяженным (бесконечно длинные струны). Было выяснено, что даже в случае струнной конфигурации, зависящей от времени, дивергенция обращается в ноль, $\nabla \cdot \vec{j} = 0$. Таким образом, струнный электрический заряд полностью аналогичен электрическому заряду в магнитостатике. Сохранение струнного заряда приводит к тому, что струны либо образуют замкнутые петли, либо являются бесконечно длинными.

Для развития аналогии с магнитостатикой рассмотрим поля Кальба—Рамона, порождаемые неподвижными струнами. Мы увидим, что напряженность поля Кальба—Рамона может быть представлена в виде эффективного магнитного поля. Для упрощения анализа рассмотрим четырехмерное пространство-время. В уравнении (16.14) существует следующие две возможности: либо оба свободных индекса являются пространственными, либо один из них временной, а другой пространственный. В первом случае имеем

$$\frac{\partial H^{ik\rho}}{\partial x^{\rho}} = 0, \qquad (16.30)$$

так как *j^{ik}* равен нулю для неподвижных струн. На основе этого уравнения сделаем следующее предположение: пусть все компоненты *H* не зависят от времени и

$$H^{ijk} = 0. (16.31)$$

Другим уравнением, которое следует рассмотреть, является

$$\frac{\partial H^{0kl}}{\partial x^l} = k^2 j^{ik}. \tag{16.32}$$

Это уравнение можно записать в виде уравнений Максвелла с помощью вектора \vec{B}_H с компонентами B_{Hm} , которые определяются следующим соотношением:

$$H^{0kl} = \epsilon^{klm} B_{Hm}. \tag{16.33}$$

Здесь ϵ^{ijk} полностью антисимметричен и удовлетворяет условию $\epsilon^{123} = 1$. Вектор \vec{B}_H называется напряженностью поля, дуальной к *H*. Подставляя обратно в (16.32). находим

$$\epsilon^{klm} \frac{\partial B_{Hm}}{\partial x^l} = k^2 j^{0k} \implies (\nabla \times \vec{B}_H)_k = k^2 j^{0k}.$$
(16.34)

На этом этапе соответствующие компоненты H были собраны в дуальное «магнитное поле», а уравнение (16.32) было приведено к виду

$$\nabla \times \vec{B}_H = k^2 \vec{j}^0. \tag{16.35}$$

Это закон Ампера для магнитного поля с током $k^2 \vec{j}^0$. Отметим, что для выбранного предположения уравнение (16.35) эквивалентно исходным уравнениям для H: если оно не имеет решений, то нет также решений и для H. Условие совместности для (16.35) хорошо известно. Так как дивергенция ротора равна нулю, су-

ществование решения (в очередной раз) накладывает требование равенства нулю дивергенции \vec{j}^0 . Альтернативно, для заданной одномерной кривой Γ , являющейся границей двумерной поверхности S, интегральная форма уравнения имеет вид

$$\frac{1}{k^2} \oint_{\Gamma} \vec{B}_H \cdot d\vec{l} = \int_{S} \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}.$$
(16.36)

Говорят, что кривая Γ охватывает струну, если струна проходит сквозь каждую поверхность, для которой Γ является границей. Если струна обрывается в некоторой точке, то ток также прекращает течь в этой точке, что приводит к отличной от нуля дивергенции $\nabla \cdot \vec{j}^0$, и, следовательно, к противоречию в (16.35). Если струна обрывается в некоторой точке, то для любого фиксированного Γ левая часть уравнения (16.36) хорошо определена, в то время как правая часть зависит от выбора поверхности *S*, что также приводит к противоречию.

Уравнение (16.36) естественным образом приводит к определению струнного числа \mathcal{N} анонсированного в начале этого раздела. Струнное число \mathcal{N} , ассоциированное с кривой Γ , определяется как

$$\frac{1}{2} \mathcal{N} \equiv \frac{1}{k^2} \oint_{\Gamma} \vec{B}_H \cdot \vec{dl} = \int_{S} \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}.$$
(16.37)

Ожидается, что \mathcal{N} задает число струн, которые охватывает кривая Γ . В качестве иллюстрации давайте вычислим значение \mathcal{N} для струны, натянутой вдоль оси x^{1} , рассмотренной в предыдущем разделе. Предположим, однако, что есть только три пространственных измерения, так что справедливы результаты, полученные в предыдущем разделе. Выбирая ориентацию таким образом что $f'(\sigma) > 0$, уравнение (16.27) преобразуется в

$$j^{01} = \frac{1}{2} \,\delta(y)\delta(z).$$
 (16.38)

Теперь рассмотрим замкнутую кривую Γ , охватывающую данную струну, и лежащую в плоскости постоянных x. Предположим, что эта кривая ограничивает на плоскости некоторую область S, у которой ориентированная нормаль направлена вдоль положительных x. Так как и вектор площади и \vec{j}^0 направлены вдоль оси x, находим

$$\frac{1}{2} \mathcal{N} = \int_{S} \vec{j}^{\,0} \cdot d\vec{a} = \int_{S} \vec{j}^{\,01} \, dy \, dz = \frac{1}{2} \int_{S} \delta(y) \delta(z) \, dy \, dz = \frac{1}{2}.$$
(16.39)

Как и ожидалось, мы получили $\mathcal{N} = 1$. В общей ситуации, $\mathcal{N} = N$, где N — это число струн, проходящих внутри выбранной кривой. Выбор ориентации имеет значение: если кривая охватывает две струны противоположных ориентаций, то вклады каждой из них в \mathcal{N} взаимно сократятся. Поле \vec{B}_H из предыдущего примера можно легко вычислить. Также возможно выписать явное выражение для антисимметричного тензорного поля $B_{\mu\nu}$ (задача 16.4).

Давайте сравним с теорией электромагнетного поля. Для локализованного максвелловского распределения зарядов заряд вычисляется интегрированием его



Рис. 16.1. Сравнение вычислений максвелловского заряда и струнного числа в мире с тремя пространственными измерениями: 2-сфера, окружающая максвелловский заряд, аналогична окружности, охватывающей струны

плотности по трехмерному шару B^3 , ограниченному соответствующей двумерной сферой S^2 , внутри которой находятся заряды (см. рис. 16.1). Набор параллельных бесконечных струн окружается соответствующей окружностью S^1 , не пересекаясь с ней. Возникает естественная аналогия: так же, как электрические заряды не касаются окружающей их поверхности S^2 , струны не касаются окружающей их «поверхности» S^1 . Так же, как нельзя удалить максвелловский заряд, не проколов двумерную сферу, так же нельзя удалить струну, не разорвав при этом окружность. Вычисление, аналогичное вычислению объемного интеграла от плотности максвелловского заряда, — интеграл от плотности струнного заряда по двумерному шару B^2 (диск), для которого S^1 является границей, определяет число струн, окруженных S^1 . Наконец, заряд в теории Максвелла заря также можно вычислить как интеграл от потока электрического поля через окружающую заряды поверхность S^2 . Струнное число вычисляется аналогичным образом — как интеграл дуальной напряженности Кальба—Рамона \vec{B}_H вдоль кривой, окружающей струны.

• Упражнение-разминка 16.2. Струна расположена вдоль оси x^1 в пространстве с четырьмя пространственными измерениями: x^1 , x^2 , x^3 и x^4 . Напишите пару уравнений, которые определяют сферу, охватывающую данную струну.

16.3. Струны, заканчивающиеся на D-бранах

В разделе 15.2 мы выяснили, что в мировом объеме любой D-браны «живет» поле Максвелла. Действительно, при квантовании открытых струн, концы которых находятся на D-бране, возникают фотонные состояния. Квантование замкнутых струн в разделе 13.3 привело к состояниям, возникающим из полей Кальба—Рамона $B_{\mu\nu}$, которые живут во всем пространстве-времени. Мы убедились в том, что струна испытывает электрическое взаимодействие с полем $B_{\mu\nu}$. Таким образом возникает естественный вопрос: если на D-бране живут поля Максвелла, существует ли какой-нибудь объект, обладающий электрическим зарядом, которые порождают эти поля? Этот вопрос связан с другим: что происходит со струнной зарядовой плотностью, которую, как мы видели, можно считать током, если струна заканчивается на D-бране? Выполняется ли закон сохранения струнного заряда?

Затруднения с законом сохранения заряда в прошлом привели к интересным открытиям. Например, был открыт ток смещения в зависящих от времени электромагнитных процессах. В теории струн решение этой проблемы приводит к представлению о том, что концы открытой струны ведут себя как электрические точечные заряды. Они заряжены относительно поля Максвелла, живущего на D-бране, на которой оканчиваются струны. Более того, силовые линии электрического поля этих точечных зарядов обладают струнным зарядом. Эта взаимосвязь между струнным зарядом и электрическим зарядом, и между соответствующими полями Кальба—Рамона и Максвелла, приводит к струнному закону сохранения.

Закон сохранения тока неразрывно связан с калибровочной инвариантностью. В теории электромагнитного поля взаимодействие тока с калибровочным полем задается слагаемым действия вида

$$S_{\rm coup} = \int d^D x \, A_{\mu}(x) j^{\mu}(x). \qquad (16.40)$$

Например, в уравнении (16.2) среднее слагаемое в правой части является слагаемым со взаимодействием. Калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta A_{\mu}(x) = \partial_{\mu} \epsilon \tag{16.41}$$

и напряженность $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ калибровочно-инвариантна: $\delta F_{\mu\nu} = 0$. Первое и последнее слагаемые в правой части (16.2) явно калибровочно-инвариантны. Это общее свойство, слагаемые в действии, отличные от (16.40), калибровочно-инвариантны сами по себе. Отсюда следует, что калибровочная инвариантность действия требует калибровочной инвариантности $\delta S_{coup} = 0$ члена со взаимодействием (16.40). Предполагая, что ток j^{μ} инвариантен сам по себе, получаем

$$\delta S_{\rm coup} = \int d^D x \, (\partial_\mu \epsilon) j^\mu(x) = - \int d^D x \, \epsilon \partial_\mu j^\mu(x), \qquad (16.42)$$

где мы проинтегрировали по частям и положили граничные слагаемые равными нулю, предполагая, что параметр ϵ достаточно быстро убывает на бесконечности. Теперь становится очевидным, что сохранение тока ($\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$) влечет за собой калибровочную инвариантность ($\delta S_{coup} = 0$).

Схожие идеи справедливы для взаимодействия с полем Кальба—Рамона $B_{\mu\nu}$. Калибровочные преобразования для $B_{\mu\nu}$ определялись в задаче 10.6:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu} \Lambda_{\mu}. \tag{16.43}$$

Полностью антисимметричная напряженность $H_{\mu\nu\rho}$ (16.6) инвариантна относительно этих калибровочных преобразований. Согласно правой части (16.10), взаимодействие поля $B_{\mu\nu}$ с током $j^{\mu\nu}$ (= $-j_{\mu\nu}$) имеет общий вид

$$-\int d^D x \ B_{\mu\nu}(x) j^{\mu\nu}(x). \tag{16.44}$$

Упражнение-разминка 16.3. Докажите, что слагаемое со взаимодействием (16.44) инвариантно относительно калибровочных преобразований (16.43) при условии, что ток j^{µν} сохраняется.

Предыдущие результаты указывают на то, что можно изучать возможные нарушения закона сохранения тока, контролируя свойства калибровочной инвариантности действия. Поэтому давайте рассмотрим заново слагаемое в действии (16.4), которое определяет взаимодействие струны с полем $B_{\mu\nu}$:

$$S_{B} = -\frac{1}{2} \int d\tau \, d\sigma \, \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} B_{\mu\nu} \big(X(\tau, \sigma) \big). \tag{16.45}$$

Здесь введены двумерные индексы $\alpha, \beta = 0, 1$, а также $\partial_0 = \partial/\partial \tau$ и $\partial_1 = \partial/\partial \sigma$, кроме этого, $\epsilon^{\alpha\beta}$ полностью антисимметричен и $\epsilon^{01} = 1$. Так как калибровочная инвариантность S_B не совсем очевидна, сначала рассмотрим более простой случай. Проверим калибровочную инвариантность слагаемого со взаимодействием точечной частицы и поля Максвелла:

$$q\int A_{\mu}(x)\,dx^{\mu}.\tag{16.46}$$

Почему это выражение инвариантно относительно (16.41)? Используя параметр τ , изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$, мы видим, что вариация пропорциональна

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \delta A_{\mu}(x(\tau)) \, \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \frac{\partial \epsilon(x(\tau))}{\partial x^{\mu}} \, \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \frac{d\epsilon(x(\tau))}{d\tau} = \\ = \epsilon \big(x(\tau = \infty) \big) - \epsilon \big(x(\tau = -\infty) \big). \tag{16.47}$$

Так как τ параметризует время, то $t(\tau \to \pm \infty) = \pm \infty$. Калибровочная инвариантность будет иметь место, если предположить, что калибровочный параметр равен нулю в бесконечном прошлом и бесконечном будущем: $\epsilon(t = \pm \infty, \vec{x}) = 0$.

Давайте теперь вернемся к вопросу о калибровочной инвариантности действия (16.45). Так как аргументами $B_{\mu\nu}$ являются струнные координаты, то калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta B_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial \Lambda_{\nu}}{\partial X^{\mu}} - \frac{\partial \Lambda_{\mu}}{\partial X^{\nu}}, \qquad (16.48)$$

где аргументами Λ также являются струнные координаты $X(\tau, \sigma)$. Множитель при $B_{\mu\nu}$ в выражении (16.45) антисимметричен по μ и ν (проверьте!). В результате, каждый член в (16.48) дает одинаковый вклад в вариацию:

$$\delta S_B = -\int d\tau \, d\sigma \, \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \Lambda_{\nu}}{\partial X^{\mu}} \, \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} = -\int d\tau \, d\sigma \, \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Lambda_{\nu} \partial_{\beta} X^{\nu}. \tag{16.49}$$

Расписывая часть сумм предыдущего выражения в явном виде, получаем

$$\delta S_{B} = -\int d\tau \, d\sigma \left(\partial_{\tau}\Lambda_{\nu}\partial_{\sigma}X^{\nu} - \partial_{\sigma}\Lambda_{\nu}\partial_{\tau}X^{\nu}\right) =$$

$$= -\int d\tau \, d\sigma \, \left(\partial_\tau (\Lambda_\nu \partial_\sigma X^\nu) - \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu)\right). \tag{16.50}$$

Отметим, что это выражение содержит две полные производные. Член ∂_{τ} не дает вклада, так как можно считать, что Λ равен нулю в начальный и конечный момент времени. Если рассматриваемая струна замкнута, то у σ нет граничных точек, и член ∂_{σ} также не дает вклада. Это доказывает калибровочную инвариантность S_B для замкнутых струн.

Однако для открытых струн член ∂_{σ} в (16.3) приводит к ненулевым граничным вкладам. Мировая поверхность струны имеет границы, являющиеся линиями в мировом объеме D-браны (рис. 16.2). Теперь вычислим δS_B для открытых струн. Нам понадобятся струнные координаты вдоль браны X^m и струнные координаты, нормальные к поверхности браны X^a :

$$X^{\mu} = (X^{m}, X^{a}), \quad \mu = (m, a).$$
 (16.51)

Если D-брана является Dp-браной, то m = 0, 1, ..., p. Так же, как и ранее, не учитывая член ∂_{τ} в (16.3), рассмотрим

$$\delta S_B = \int d\tau \, d\sigma \, \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) = \int d\tau \left[\Lambda_m \partial_\tau X^m + \Lambda_a \partial_\tau X^a \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$
 (16.52)



Рис. 16.2. D-брана и мировая поверхность открытой струны. Границы мировой поверхности лежат на D-бране: они являются мировыми линиями концов открытой струны, $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$; X^m и $X^a -$ это струнные координаты, соответственно, в касательном и нормальном направлениях к поверхности браны

Так как X^a — это DD-координаты, то $\partial_{\tau} X^a = 0$ выполняется на обоих концах, и второе слагаемое в предыдущем выражении не дает вклада. В итоге,

$$\delta S_B = \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \bigg|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \bigg|_{\sigma=0}.$$
 (16.53)

Присутствие двух данных граничных членов нарушает калибровочную инвариантность, что наглядно показывает нарушение закона сохранения струнного заряда на концах открытой струны. Калибровочную инвариантность необходимо восстановить. Как уже говорилось, для этого требуется ввести взаимодействие существующих на бране полей Максвелла с концами струны.

Поэтому давайте добавим в струнное действие пару слагаемых, которые наделяют концы струны электрическим зарядом

$$S = S_B + \int d\tau A_m(X) \left. \frac{dX^m}{d\tau} \right|_{\sigma = \pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \right|_{\sigma = 0}.$$
 (16.54)

Так как дополнительные слагаемые имеют противоположные знаки, концы струны противоположно заряжены. Мы условились, что струна начинается с отрицательно заряженного конца и заканчивается на положительно заряженном конце. Мы также положили $q = \pm 1$ для концевых зарядов, и будем придерживаться этого соглашения в дальнейшем. Физические значения величины зарядов могут быть определены, только если известна нормировка слагаемых F^2 на D-бране. Эта нормировка фиксируется константой k_0^2 в (16.2). Слагаемые F^2 и члены со взаимодействием в (16.54) определяют способ, каким концы струны порождают электромагнитные поля. Нормировка слагаемых F^2 на D-бране содержит струнную константу связи и α' . Они будут найдены в разделе 20.3.

С помощью обозначения из (16.53) выражение (16.54) можно записать в более кратком виде:

$$S = S_B + \int d\tau A_m \partial_\tau X^m \bigg|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m \partial_\tau X^m \bigg|_{\sigma=0}.$$
 (16.55)

Каким образом дополнительные слагаемые можно использовать для восстановления калибровочной инвариантности? Заставив поле Максвелла изменяться при калибровочных преобразованиях поля $B_{\mu\nu}$! Это может быть несколько странно и удивительно, но без перемешивания двух типов полей мы не смогли бы решить проблему нарушения калибровочной инвариантности.

Таким образом, постулируем, что одновременно с вариацией $B_{\mu\nu}$, определяемой калибровочным параметром $\Lambda_{\mu} = (\Lambda_m, \Lambda_a)$, также необходимо варьировать поле Максвелла A_m на D-бране:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu} \Lambda_{\mu}, \qquad \delta A_m = -\Lambda_{\mu}. \tag{16.56}$$

При таком определении преобразования поля A_m вариация последних двух слагаемых в (16.55) сокращает вариации, найденные в (16.53), восстанавливая, таким образом, калибровочную инвариантность.

Приписывание A закона преобразования (16.56) решает рассматриваемую проблему, однако приводит к некоторым интересным вопросам. Помимо полного струнного действия мы также хотим, чтобы калибровочно-инвариантным было действие Максвелла. Так как оно пропорционально F^2 , можно спросить: является ли F_{mn} калибровочно-инвариантным? Нет, не является! Действительно,

$$\delta F_{mn} = \partial_m \delta A_n - \partial_n \delta A_m = -\partial_m \Lambda_n + \partial_n \Lambda_m = -\delta B_{mn}, \quad (16.57)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что полученная вариация совпадает с калибровочным преобразованием B_{mn} . Это очень важно, потому что отсюда следует, что полностью калибровочно-инвариантная комбинация имеет вид

$$\delta(F_{mn}+B_{mn})=0. \tag{16.58}$$

Обозначим эту новую инвариантную величину \mathcal{F}_{mn} :

$$\mathcal{F}_{mn} = F_{mn} + B_{mn}, \qquad \delta \mathcal{F}_{mn} = 0. \tag{16.59}$$

На D-бране \mathcal{F}_{mn} является физически значимой напряженностью. Ранее использовавшаяся напряженность F_{mn} не совсем физически осмысленна, потому как не является калибровочно-инвариантной. Уравнения Максвелла видоизменяются заменой F на \mathcal{F} . Во многих случаях это несущественно и для нулевых B напряженность \mathcal{F} равна F. Подобное перемешивание полей помогает интуитивно понять поведение струнного заряда, в том случае, когда струна заканчивается на D-бране. Давайте теперь обратимся к этому вопросу.

Мы видели, что плотность струнного заряда можно представлять как ток, текущий вдоль струны. Предположим, что имеется струна, заканчивающаяся на D-бране, как показано на рис. 16.3. Ток не может перестать течь на концах струны. Поэтому он должен вытекать *на* D-брану. Каким образом это происходит? Известно, что конец струны заряжен, поэтому он является источником силовых линий электрического поля, расходящихся по поверхности D-браны. Линии поля не могут выйти в объемлющее пространство, потому что поле Максвелла существует только на D-бране. Мы увидим, что на самом деле силовые линии электрического поля обладают струнным зарядом!

Согласно уравнению (16.10), плотность струнного заряда j^{0k} , является, по определению, величиной, свернутой с B_{0k} . Все, что сворачивается с B_{0k} , возникает в правой части (16.14) в виде вклада в j^{0k} . На D-бране плотность лагранжиана, пропорциональная $-\mathcal{F}^{mn}\mathcal{F}_{mn}/4$, является калибровочно-инвариантным обобщением плотности лагранжиана Максвелла. Разложим на части

$$-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{mn} \mathcal{F}_{mn} = -\frac{1}{4} B^{mn} B_{mn} - \frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} - \frac{1}{2} F^{mn} B_{mn}. \qquad (16.60)$$



Рис. 16.3. Струна, заканчивающаяся на D-бране. Плотность струнного заряда можно представлять как ток, текущий вдоль струны. Этот ток переносится на D-брану посредством силовых линий электрического поля

Последнее слагаемое особенно интересно. Его можно разложить далее следующим образом

$$-\frac{1}{2} F^{mn} B_{mn} = -F^{0k} B_{0k} + \dots$$
 (16.61)

Полное действие для D-браны и струны будет содержать это слагаемое $F^{0k}B_{0k}$. Все, что сворачивается с B_{0k} , обладает струнным зарядом, поэтому F^{0k} играет роль струнного заряда на бране. Но $F^{0k} = E_k$ является электрическим полем. Следовательно, силовые линии электрического поля на D-бране обладают струнным зарядом.

16.4. D-бранные заряды

Мы выяснили, что струна обладает электрическим зарядом полей Кальба— Рамона теории замкнутых струн. Естественно поинтересоваться, есть ли другие протяженные объекты в теории струн, также обладающие зарядом. Помимо струн, единственными протяженными объектами, с которыми мы сталкивались до сих пор, являются Dp-браны с различными значениями p. Могут ли они обладать зарядом?

У точечных частиц мировые линии одномерны, и они переносят электрический заряд при взаимодействии с одноиндексным безмассовым калибровочным
полем. Мировые поверхности струн двумерны, и они переносят электрический заряд при взаимодействии с калибровочным полем Кальба—Рамона, безмассовым, антисимметричным тензорным полем с двумя индексами. Dp-брана имеет (p + 1)-мерный мировой объем и говорят, что она электрически заряжена, если она взаимодействует с безмассовым антисимметричным тензорным полем с (p + 1) индексами. Мировой объем Dp-браны параметризован τ и набором координат $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^p$. Пространственно-временными координатами, описывающими положение браны, являются $X^{\mu}(\tau, \sigma^1, \ldots, \sigma^p)$, где $\mu = 0, 1, \ldots, d$, а антисимметричное тензорное поле обозначается $A_{\mu\mu_1...\mu_p}(x)$. Искомое взаимодействие является обобщением (16.3):

$$S_{p} = -\int d\tau \, d\sigma_{1} \dots d\sigma_{p} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\mu_{1}}}{\partial \sigma_{1}} \dots \frac{\partial X^{\mu_{p}}}{\partial \sigma_{p}} A_{\mu\mu_{1}\dots\mu_{p}} (X^{\mu}(\tau, \sigma^{1}, \dots, \sigma^{p})).$$
(16.62)

В естественных единицах S_p безразмерно, так что антисимметричное тензорное поле имеет размерность $[A_{\mu\mu_1...\mu_p}] = M^{p+1} = L^{-(p+1)}$.

В теории замкнутых бозонных струн поле Кальба—Рамона является единственным безмассовым антисимметричным тензорным полем. Как мы видели, источниками этого поля служат струны. В отсутствие дополнительных безмассовых антисимметричных тензоров, Dp-браны в теории бозонных струн не могут быть заряженными. С другой стороны, в IIA- и IIB-теориях замкнутых суперструн есть дополнительные антисимметричные тензоры в секторе Рамон—Рамона. Они были перечислены в уравнениях (14.90) и (14.91):

IIA:
$$A_{\mu}, A_{\mu\nu\rho};$$

IIB: $A, A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma}.$ (16.63)

Оказывается, R-R калибровочные поля электрически взаимодействуют с соответствующими D-бранами. В IIA-теории суперструн A_{μ} взаимодействует с D0браной, а $A_{\mu\nu\rho}$ взаимодействует с D2-браной. В IIB-теории суперструн $A_{\mu\nu}$ взаимодействует с D1-браной, а $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ взаимодействует с D3-браной. Поле A в IIBтеории не имеет индексов, поэтому не может электрически взаимодействовать с обычной D-браной (это поле электрически взаимодействует с объектом, называемым D-инстантоном). Резюмируя, электрически заряженными D-бранами являются

Сохранение как заряда, так и энергии означает, что заряженный объект не может распасться, если отсутствуют возможные продукты распада с меньшей массой, которые могут обладать зарядом. На самом деле D-браны в (16.64) являются стабильными D-бранами и не могут распасться на открытые или замкнутые струнные состояния. Бозонные D-браны не обладают зарядом и нестабильны, о чем свидетельствует наличие тахиона в их мировом объеме. Известно, что Dp-браны с четными p являются стабильными в IIA-теории, но нестабильными в IIB-теории. Например, D6-браны в IIA-теории стабильны. Кроме того, **D***p*-браны с нечетными *p* стабильны в IIB-теории, но нестабильны в IIA-теории. Стабильные D3-браны в IIB-теории особенно интересны, потому что их мировой объем это четырехмерное пространство-время. Все стабильные D-браны в теории струн типа II являются заряженными. Тем не менее, отсутствующие в списке (16.64) D-браны — D4, D6 и D8 в теории IIA, и D5, D7 и D9 в теории IIB как оказывается, обладают *магнитным* зарядом либо для R-R калибровочных полей в (16.63), либо для других, более изощренных R-R состояний, которые мы не обсуждали. В этой книге мы не будем изучать магнитные заряды.

Заряды (электрические) Dp-браны имеют простое описание, когда p пространственных измерений сворачиваются в окружности и Dp-брана намотана на возникающее компактное пространство. В этом случае p компактных пространственных измерений направлены вдоль D-браны (имеют тип «-» в обозначениях табл. 15.1). Остальные пространственные измерения, определяющие эффективное пространство с меньшим числом измерений, нормальны к поверхности браны (имеют тип «•»). Наблюдатель в пространстве меньшей размерности, которому доступны только некомпактные измерения, видит брану как точечную частицу. Утверждается, что эта частица электрически заряжена относительно поля Максвелла, возникающего из антисимметричного тензорного поля $A_{\mu\mu_1...\mu_p}$.

Пусть x^1, \ldots, x^p обозначают p компактных измерений, и пусть X^1, \ldots, X^p обозначают соответствующие координаты браны. Если компактные измерения являются окружностями радиусов R^1, \ldots, R^p , и используются параметры $\sigma^k \in [0, 2\pi]$, то выражение

$$X^{k}(\tau, \sigma^{1}, \dots, \sigma^{p}) = R^{k}\sigma^{k}, \quad k = 1, \dots, p$$
 (не суммируется) (16.65)

описывает свернутую D*p*-брану. Действительно, когда σ^k изменяется от 0 до 2π , координата X^k изменяется от 0 до $2\pi R^k$, проходя, таким образом, один раз по *k*-й окружности. Пусть X^m , где m — это индекс некомпактного измерения, имеет вид

$$X^{m}(\tau, \sigma^{1}, \ldots, \sigma^{p}) = x^{m}\tau.$$
(16.66)

Из этого уравнения следует, что для наблюдателя, находящегося в пространстве меньшей размерности, Dp-брана представляется точечной частицей: для любого τ вся Dp-брана отображается в единственную точку в пространстве-времени меньшей размерности.

Так как только X^k зависит от σ^k , ненулевые вклады в (16.62) возникают при $\mu_k = k$, для k = 1, ..., p:

$$S_p = -\int d\tau \, d\sigma_1 \dots d\sigma_p \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} R^1 R^2 \dots R^p A_{\mu 12 \dots p} \big(X(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p) \big). \quad (16.67)$$

Так как тензорное поле $A_{...}$ полностью антисимметрично и все компактные индексы были задействованы, то индекс μ может принимать значения только по некомпактным направлениям: $\mu = m$. В итоге,

$$S_p = -\int d\tau \, d\sigma_1 \dots d\sigma_p \, \frac{\partial X^m}{\partial \tau} R^1 R^2 \dots R^p A_{m12\dots p} \big(X^m(\tau), X^k(\sigma^k) \big). \tag{16.68}$$

Наконец, сосредоточим внимание на той части поля $A_{...}$, которая не зависит от компактных координат: $A_{m12...p}(x^m(\tau))$. Тогда уравнение (16.68) принимает вид

$$S_p = -R^1 R^2 \dots R^p \int d\tau \, d\sigma_1 \dots d\sigma_p \, \frac{dx^m}{d\tau} \, A_{m12\dots p} \big(x(\tau) \big). \tag{16.69}$$

Вычисление интегралов по σ приводит к фактору $(2\pi)^p$, который, совместно с произведением радиусов, дает объем компактного пространства $V_p = (2\pi R^1) \dots (2\pi R^p)$. Замечая, что $A_{m12\dots p}$ фактически является одноиндексным калибровочным полем, введем калибровочное поле \overline{A}_m , определенное как

$$\frac{1}{(\alpha')^{p/2}} \overline{A}_m(x(\tau)) \equiv A_{m12\dots p}(x(\tau)).$$
(16.70)

Множитель α' был введен для того, чтобы приписать калибровочному полю \overline{A}_m ожидаемую размерность массы, или обратной длины. Говорят, что \overline{A}_m является полем Максвелла, возникающим из тензорного поля $A_{...}$ при размерной редукции. В процессе размерной редукции мы сделали две вещи: (1) все индексы, за исключением одного, приписали компактным направлениям, и (2) исключили зависимость поля от компактных измерений. Размерная редукция будет изучаться далее в разделе 17.6. С учетом (16.70), величина S_p в (16.69) принимает вид

$$S_p = -\frac{V_p}{(\alpha')^{p/2}} \int d\tau \, \frac{dx^m}{d\tau} \overline{A}_m(x(\tau)) = \frac{V_p}{(l_s)^p} \int \overline{A}_m \, dx^m, \qquad (16.71)$$

что соответствует взаимодействию точечной частицы с полем Максвелла \overline{A}_m . D*p*-брана возникает как заряженная точечная частица. Электрический заряд *Q* D-браны равен

$$Q = \frac{V_p}{(l_s)^p}.\tag{16.72}$$

Заряд Q определяется объемом браны, измеряемым в единицах длины струны в p-й степени, Q безразмерен, как и должно быть.

Задачи

Задача 16.1. Репараметризационная инвариантность взаимодействия струны с полем Кальба—Рамона

Рассмотрите мировую поверхность струны с координатами (τ , σ) и репараметризацию, приводящую к координатам ($\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)$). Покажите, что взаимодействие (16.3) преобразуется следующим образом:

$$\int d\tau' \, d\sigma' \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau'} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma'} \, B_{\mu\nu}(X) = \operatorname{sgn}\left(\gamma\right) \int d\tau \, d\sigma \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} \, B_{\mu\nu}(X).$$

где sgn (γ) обозначает знак величины γ и

$$\gamma = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma'} - \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau'}.$$

Заметьте, что для доказательства требуется использовать антисимметричность $B_{\mu\nu}$. Если sgn (γ) = +1, то репараметризация сохраняет ориентацию. Если sgn (γ) = -1, то репараметризация обращает ориентацию. Приведите два примера нетривиальных репараметризаций, сохраняющих ориентацию, и два примера нетривиальных репараметризаций, обращающих ориентацию.

Задача 16.2. Антисимметричные вариации и уравнения движения

Пусть $\delta B_{\mu\nu} = -\delta B_{\nu\mu}$ является произвольной антисимметричной вариацией (μ , $\nu = 0, 1, ..., d$). Покажите, что

$$\delta B_{\mu
u}G^{\mu
u} = \sum_{\mu>
u}^{d} \sum_{
u=0}^{d} \delta B_{\mu
u}(G^{\mu
u} - G^{
u\mu}).$$

Теперь покажите, что если $\delta B_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = 0$ для всех антисимметричных вариаций $\delta B_{\mu\nu}$, то $G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu} = 0$.

▶ Задача 16.3. Свойства струнного заряда Q̄

(a) В некоторый фиксированный момент времени t_0 рассмотрите струну и область пространства \mathcal{R} , содержащую часть данной струны: струна входит в область \mathcal{R} в точке $\vec{x_i}$ и покидает область \mathcal{R} в точке $\vec{x_f}$ (предположим, что пространство некомпактифицированно). Используйте (16.23) для вычисления струнного заряда

$$\vec{Q} = \int\limits_{\mathcal{R}} d^d x \, \vec{j}^{\,0},$$

находящегося в \mathcal{R} в момент времени t_0 . Используйте полученный результат для демонстрации того, что полный струнный заряд, соответствующий замкнутой струне, равен 0.

(б) Более абстрактное доказательство того, что \vec{Q} равен нулю для произвольной локализованной конфигурации замкнутых струн требует доказательства того, что что из $\nabla \cdot \vec{j}^0 = 0$ следует

$$\int d^d x \, \vec{j}^{\,0} = 0.$$

Если при доказательстве возникли трудности, то можно заглянуть в ваш любимый учебник по электромагнетизму: то же самое доказательство возникает в магнитостатике при демонстрации того, что мультипольное разложение магнитного поля локализованного тока не имеет монопольного слагаемого.

(в) Теперь предположим, что одна пространственная координата x сворачивается в окружность радиуса \mathcal{R} , и рассмотрим замкнутую струну, намотанную на эту окружность. Вычислите струнный заряд \vec{Q} . Объясните, почему возникает ненулевой ответ, и сравните с результатом, полученным в (16.72).

Задача 16.4. Поле Кальба—Рамона струны

Следуя рассуждениям из раздела 16.2, вычислите поле $H^{\mu\nu\rho}$, порожденное струной, натянутой вдоль оси x. Найдите простое $B^{\mu\nu}$, которое приводит к напряженности H. Объясните полученный ответ, проведя аналогию с магнитостатикой.

Задача 16.5. Явная проверка закона сохранения тока

В задаче 5.3 был построен вектор тока заряженной точечной частицы:

$$j^{\mu}(\vec{x},t) = qc \int d au \, \delta^D ig(x-x(au)ig) \, rac{dx^{\mu(au)}}{d au}.$$

Убедитесь прямым вычислением, что это сохраняющийся ток ($\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$). Теперь распространите этот результат на случай замкнутой струны. Убедитесь прямым вычислением, что ток в (16.11) сохраняется.

Задача 16.6. Уравнение движения струны в фоновом поле Кальба—Рамона

Рассмотрите струнное действие (6.39), дополненное взаимодействием (16.3) с полем Кальба—Рамона. Рассмотрите вариацию относительно δX^{μ} и докажите, что уравнения движения для данной струны имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} = -H_{\mu\nu\rho} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial \sigma}.$$
 (1)

Задача 16.7. Поле Н и кольцевая замкнутая струна

Предположим, что имеется постоянное однородное поле H со значением $H_{012} = h$, а все остальные компоненты равны нулю. Также предположим, что имеется замкнутая струна в виде кольца, лежащая в плоскости (x^1, x^2) . Цель этой задачи показать, что натяжение струны и сила, действующая на струну, благодаря полю H, могут привести к равновесному радиусу. Мы также увидим, что равновесие неустойчиво.

Будем решать задачу с двух сторон. Во-первых, воспользуемся уравнением (1), полученным в задаче 16.6 и подставим $X^0 = \tau$ (c = 1):

- (a) Найдите упрощенный вид для \mathcal{P}^{τ}_{μ} и $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}$ в случае неподвижной струны.
- (6) Проверьте, что $\mu = 0$ компонента уравнения движения выполняется тождественно. Покажите, что компоненты $\mu = 1$ и $\mu = 2$ приводят к одинаковому результату: для замкнутой струны с подходящей ориентацией радиус R фиксируется значением $R = T_0/|h|$.

Во-вторых, найдем действие, используя упрощенную геометрию задачи. Для этого, предположим, что радиус R(t) зависит от времени.

- (в) Найдите поля $B_{\mu\nu}$, приводящие к полю *H*. На самом деле вы можете найти решение, у которого B_{01} или B_{02} по отдельности либо одновременно равны нулю.
- (г) Покажите, что для рассматриваемой струны член со взаимодействием (16.3) равен

$$\int dt \, \pi h r^2(t)$$

при условии, что струна ориентирована против часовой стрелки на плоскости (x_1, x_2) . Объясните, почему это слагаемое задает (минус) потенциальную энергию.

- (д) Для данной кольцевой струны рассмотрите полное действие и с его помощью вычислите функционал энергии $E(R(t), \dot{R}(t))$ (вам может пригодиться ваш анализ кольцевой струны в задаче 6.7).
- (e) Положите $\dot{R}(t) = 0$ и нарисуйте график функционала энергии E(R(t)) для h > 0 и h < 0. Покажите, что равновесное значение радиуса совпадает с полученным ранее, и объясните, почему данное равновесие неустойчиво.

Глава 17

Т-дуальность в теории замкнутых струн

Если одно из пространственных измерений свернуто в окружность, то это влияет на поведение замкнутых струн: во-первых, импульс вдоль окружности квантуется и, во-вторых, возникают новые состояния, намотанные на окружность. Совместно характер поведения импульса и намотанных состояний, выраженных в виде функции от радиуса окружности, приводит к неожиданной симметрии: физика замкнутых струн с радиусом окружности Rнеотличима от струн с радиусом окружности α'/R . Эта эквивалентность доказывается операторным отображением, сохраняющим все коммутационные соотношения.

17.1. Симметрии дуальности и гамильтонианы

Симметрии дуальности являются одними из самых интересных симметрий в физике. Термин «дуальность», как правило, используется физиками для обозначения взаимосвязи между двумя системами, имеющими очень разное описание, но одинаковое физическое содержание. Основной темой этой главы является одна из таких ситуаций, которая возникает в теории замкнутых струн. Можно подумать, что мир, в котором одно измерение закручено в окружность радиуса R, легко отличим от мира, для которого эта окружность имеет радиус α'/R (напомним, что α' имеет размерность квадрата длины), однако в теории замкнутых струн эти два мира неразличимы при любом значении R. Существует некоторая симметрия дуальности, связывающая их друг с другом. Такая симметрия называется Т-дуальностью (тороидальной дуальностью). Компактификация называется тороидальной, если компактное пространство является тором. В рамках этой терминологии одномерный тор определяется как окружность.

Соответствие АдС/КТП, которое будет рассматриваться в главе 23, является примером дуальности: некоторое фоновое решение IIB-теории суперструн и суперсимметричная теория Янга—Миллса на самом деле являются физически эквивалентными системами. В этом разделе мы будем обсуждать симметрии дуальности, которые встречаются в двух хорошо знакомых ситуациях. Первый пример возникает в теории электромагнетизма, а второй — в механике.

Рассмотрим уравнения Максвелла без источников:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$
(17.1)

Можно сразу заметить, что уравнения остаются инвариантными относительно следующего преобразования дуальности:

$$(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (-\vec{B}, \vec{E}).$$
 (17.2)

Такая инвариантность уравнений движения называется симметрией дуальности электромагнетизма. При беглом взгляде на привычный лагранжиан электромагнетизма эту симметрию можно было бы не заметить. Действительно, раскладывая плотность лагранжиана (см., например, задачу 5.6) по электрическим и магнитным полям, получаем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left(2F_{0k} F^{0k} + F_{ij} F^{ij} \right) =$$
$$= -\frac{1}{2} \left(-F_{0k} F_{0k} + \frac{1}{2} F_{ij} F_{ij} \right) = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \quad (17.3)$$

где $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ и $B^2 = \vec{B} \cdot \vec{B}$. Плотность лагранжиана \mathcal{L} не инвариантна относительно преобразования дуальности (17.2) — она меняет знак. Конечно же, \mathcal{L} $u - \mathcal{L}$, записанные через потенциалы, приводят к одинаковым уравнениям движения. Кинетическая и потенциальная энергии входят в лагранжиан по-разному: кинетическая энергия входит с положительным знаком, а потенциальная энергия - с отрицательным. Любая симметрия, меняющая местами подобные два типа энергии, не может оставлять лагранжиан инвариантным. В гамильтониан как потенциальная, так и кинетическая энергия входят с одинаковым знаком, поэтому симметрии дуальности часто реализуются явно при использовании гамильтониана. В теории электромагнитного поля квадрат электрического поля определяет кинетическую энергию, так как электрическое поле содержит производную по времени от вектор-потенциала (см. уравнение (3.8)). Квадрат магнитного поля определяет потенциальную энергию, так как магнитное поле содержит пространственные производные от вектор-потенциала. Гамильтониан, или функционал энергии, пропорционален интегралу по пространству от $(E^2 + B^2)$. Преобразование дуальности (17.2) не изменяет этот гамильтониан.

Так как динамическими переменными в теории электромагнитного поля являются калибровочные потенциалы, можно задаться вопросом: каковы преобразования потенциалов, приводящие к (17.2)? Нас устроит ответ на качественном уровне. Теорию электромагнитного поля (без источников) можно сформулировать с помощью динамических переменных \vec{E} и \vec{B} , дивергенция которых равна нулю. Тогда преобразования дуальности записываются как пространственнонелокальные преобразования \vec{E} и \vec{B} . (Типичное пространственно-нелокальное преобразования в точке \vec{x} через значения во всех точках \vec{x}' .)

Теперь рассмотрим второй пример. Это обычный гармонический осциллятор, состоящий из массы m, закрепленной на пружине с жесткостью k. Гамильтониан задается в виде

$$H(m,k) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \qquad (17.4)$$

где параметры *m* и *k* выступают в качестве аргументов гамильтониана. Данный гамильтониан приводит к колебательному движению с угловой частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Вид ω наводит на мысль о симметрии относительно следующего преобразования дуальности:

$$(m,k) \rightarrow \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right).$$
 (17.5)

Лагранжиан исходного осциллятора

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \qquad (17.6)$$

так же как в случае электромагнитного поля, изменяется при преобразовании дуальности. С другой стороны, уравнение движения

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad (17.7)$$

при преобразовании дуальности остаются неизменными. Гамильтониан, ассоциированный с дуальными параметрами, имеет вид

$$H\left(\frac{1}{k},\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}kp^2 + \frac{1}{2m}x^2.$$
 (17.8)

Теперь, в отличие от предыдущего случая, гамильтониан не инвариантен. Для установления связи с исходным гамильтонианом H(m, k) необходимо использовать канонические преобразования. Это означает такое изменение канонических переменных, при котором все коммутационные соотношения сохраняются и поэтому физическое содержание остается прежним. Рассмотрим каноническое преобразование K, действующее на x и p следующим образом:

$$K: x \to p, \quad p \to -x. \tag{17.9}$$

Это преобразование каноническое, потому что все соответствующие коммутационные соотношения, сводящиеся в данном случае к [x, p] = i, сохраняются:

$$K: [x, p] \to [p, -x] = -(-i) = i.$$
(17.10)

После такого канонического преобразования гамильтониан в (17.8) принимает вид

$$K: H\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) \to \frac{1}{2} k(-x)^2 + \frac{1}{2m} p^2 = H(m, k).$$
(17.11)

Гамильтониан системы с дуальными параметрами канонически эквивалентен исходному гамильтониану, поэтому физическое содержание при преобразовании (17.5) действительно не изменяется.

17.2. Намотанные замкнутые струны

Для изучения Т-дуальности в теории замкнутых струн в первую очередь необходимо понять, каковы могут быть последствия для струн, если одно из пространственных измерений стало окружностью. Замкнутые струны, рассмотренные



Рис. 17.1. Слева: набор замкнутых струн, расположенных на двумерной поверхности цилиндра. Справа: тот же набор струн, изображенных в накрывающем пространстве цилиндра. Струны с нетривиальными числами намотки появляются в накрывающем пространстве в виде открытых струн

в главе 13, двигались в пространстве Минковского и могли быть непрерывно стянуты в точку. В случае, когда имеется одно компактное измерение, не все замкнутые струны могут быть непрерывно редуцированы до точки.

Простейший способ представить это явление — это рассмотреть мир, в котором есть только два пространственных измерения, одно из которых компактно. О таком мире можно думать как о поверхности бесконечно длинного цилиндра. Пусть x — координата, которую сделали компактной посредством отождествления

$$x \simeq x + 2\pi R, \tag{17.12}$$

а y обозначает координату вдоль длины цилиндра; такой цилиндр показан в левой части рис. 17.1. В правой части рисунка находится (x, y) плоскость, из которой данный цилиндр был получен путем отождествления (17.12), эта плоскость известна как накрывающее пространство цилиндра. Как обычно, координата струны x будет обозначаться X.

Давайте рассмотрим различные типы замкнутых струн, которые могут располагаться на двумерной поверхности цилиндра. В правой части рисунка будет также показан вид, в котором данные струны появляются в накрывающем пространстве. Несмотря на то что каждая струна на цилиндре на самом деле имеет бесконечно много копий в накрывающем пространстве (вспомните раздел 2.7), во избежание путаницы, мы будем показывать только одну копию.

Простейшими струнами являются те, которые не наматываются на цилиндр. Струна (а) на рис. 17.1 является такого рода струной. На рисунке внизу справа показана одна копия этой струны в накрывающем пространстве, в котором она появляется как действительно замкнутая струна. Струна (а) может быть стянута в точку непрерывно. Это очевидно как на цилиндре, так и в накрывающем пространстве. Говорят, что струна (а) имеет нулевое число намотки, потому что она не наматывается на компактное измерение. Струнная координата в накрывающем пространстве удовлетворяет следующему соотношению.

Струна (a):
$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 0.$$
 (17.13)

Это условие периодичности уже встречалось в главе 13, где оно записывалось в более общем виде $X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma)$.

Теперь рассмотрим на рисунке струну (b). Эта струна ориентирована в направлении возрастающего x и наматывается вокруг цилиндра один раз. Струну (b) нельзя стянуть точку, предварительно ее не разрезав. Говорят, что струна (b) имеет число намотки +1, так как она один раз наматывается на окружность в направлении положительных x. Интересно изображение этой струны в накрывающем пространстве. Если обозначить точку B на цилиндре в качестве начальной точки отсчета струны, то в накрывающем пространстве струна выглядит как незамкнутая кривая, начинающаяся в точке B и заканчивающаяся в точке B'. Мы видим, что струна действительно замкнута, потому что B и B' отождествляются согласно (17.12). Замкнутая струна параметризуется $\sigma \in [0, 2\pi]$, причем B соответствует $\sigma = 0$, а B' соответствует $\sigma = 2\pi$. Тогда струнная координата в накрывающем пространстве удовлетворяет следующему соотношению.

Струна (b):
$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 2\pi R.$$
 (17.14)

Аналогичные замечания справедливы и для струны (с). Эта струна наматывается на цилиндр один раз в противоположном направлении, поэтому говорят, что она имеет число намотки -1. В накрывающем пространстве имеем следующее.

Струна (c):
$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = -2\pi R.$$
 (17.15)

Примеры струн (b) и (c) иллюстрируют следующий общий факт. Струны, которые наматываются на цилиндр, появляются в накрывающем пространстве как открытые струны. Но не каждая открытая струна в накрывающем пространстве изображает намотанную замкнутую струну; некоторые изображают настоящие открытые струны на цилиндре. Открытая струна в накрывающем пространстве изображает замкнутую струну, намотанную на цилиндр, в точности тогда, когда ее концы отождествляются согласно (17.12). Так как струна (a) имеет нулевую намотку, то она является замкнутой струной в накрывающем пространстве.

Теперь рассмотрим струну вида (d), которая дважды наматывается на цилиндр. Начальной точкой отсчета выберем D, в которой и x = 0, и $\sigma = 0$. После того, как струна обходит цилиндр один раз, она приходит в точку E, затем она наматывается еще раз и, наконец, приходит в точку D', где $\sigma = 2\pi$. На цилиндре точки D и D' совпадают. В накрывающем пространстве они разделены, однако при этом отождествляются согласно (17.12). Говорят, что такая струна имеет число намотки +2 и удовлетворяет соотношению.

Струна (d):
$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 2(2\pi R).$$
 (17.16)

Струна (e) является струной с числом намотки +2, также как и струна (d). Но координата y струны (e) является постоянной функцией от σ . Так как она имеет то же самое число намотки, что и струна (d), она также удовлетворяет условию (17.16). На цилиндре намотки пересекаются. В накрывающем пространстве эта струна изображается в виде прямой горизонтальной линии длины $4\pi R$.

Здесь возможна некоторая путаница. Рассмотрим *на* струне (е) две различные точки p и p', которые вдоль струны отстоят друг от друга на расстояние $2\pi R$. Так получается, что эти две точки лежат поверх одной и той же точки на цилиндре, однако на намотанной струне это разные точки. В накрывающем пространстве точки струны p и p' отстоят друг от друга по горизонтали на расстояние $2\pi R$. Они лежат поверх отождествляемых точек, но между собой точки p и p' не отождествляются. Можно представлять первую половину струны окрашенной в желтый цвет, а вторую в зеленый. Точка p будет принадлежать желтой части струны, а точка p' будет принадлежать зеленой части струны. Фрагмент струны, не является копией того фрагмента струны, который расположен в накрывающем пространстве вдоль интервала $[2\pi R, 4\pi R]$,

На рис. 17.1 в накрывающем пространстве показаны не все повторяющиеся струны: каждый нарисованный фрагмент струны соответствует отдельному фрагменту струны на цилиндре. Это было сделано ровно для того, чтобы избежать вышеупомянутой путаницы. Если бы мы, например, добавили в накрывающем пространстве копии струны (b), то стало бы невозможным различить струны (b) и (e), не раскрашивая их в накрывающем пространстве в разные цвета.

Однако все замкнутые струны, какими бы длинными они ни были, и сколько бы раз они не наматывались, параметризуются σ с периодом 2π . Говорят, что струна имеет число намотки m, где m — целое число, если она наматывается на цилиндр m раз в направлении положительных x. В этом случае струнная координата в накрывающем пространстве удовлетворяет уравнению:

число намотки $m: X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R).$ (17.17)

Струны с разными числами намотки не могут быть непрерывно деформированы друг в друга, поэтому число намотки замкнутой струны является топологической характеристикой. С математической точки зрения, числа намотки возникают в силу наличия двух окружностей: одна с координатой σ , а другая с координатой x. Замкнутые струны являются отображениями из σ -окружностей в x-окружности. Отображение одной окружности в другую характеризуется целым числом, известным как степень отображения. Для замкнутых струн это целое число является числом намотки m.

Для целей, которые станут очевидными в дальнейшем, определим *намотку w* через число намотки *m* и радиус пространства:

$$w \equiv \frac{mR}{\alpha'}.$$
 (17.18)

Намотка имеет размерность обратной длины или импульса. На самом деле намотка окажется новым типом импульса. С помощью этого определения уравнение (17.17) приобретает вид

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha' w. \tag{17.19}$$

Теперь мы готовы обсудить разложение по модам и квантование замкнутых струн в присутствии компактного измерения.

17.3. Левые моды и правые моды

Теперь давайте рассмотрим струны, распространяющиеся в 26-мерном пространстве-времени с координатами x^0, x^1, \ldots, x^{25} . Предположим, что координата x^{25} свернута в окружность радиуса R. Так как мы собираемся использовать калибровку светового конуса (это возможно, потому что струнные координаты X^0 и X^1 не соответствуют компактным измерениям), удобно сгруппировать струнные координаты следующим образом

$$X^+, X^-, \underbrace{X^2, X^3, \dots, X^{24}}_{X^i}, X^{25}.$$
 (17.20)

Здесь X^i обозначает поперечные конусные координаты, однако при этом не допускается, чтобы индекс *i* принимал значение 25. Индекс координат всегда будем писать явно, поэтому верхний индекс у X^{25} можно убрать, не создавая при этом путаницы. Имея это ввиду, вышеприведенный набор координат будет представляться в виде

$$X^+, X^-, \{X^i\}$$
 и X , где $i = 2, 3, ..., 24.$ (17.21)

Условия периодичности X задаются уравнением (17.19). Так как X удовлетворяет волновому уравнению, общее решение есть

$$X(\tau,\sigma) = X_L(\tau+\sigma) + X_R(\tau-\sigma) = X_L(u) + X_R(v), \qquad (17.22)$$

где $u = \tau + \sigma$ и $v = \tau - \sigma$. Применяя условие (17.19), получаем выражение

$$X_L(u+2\pi) + X_R(v-2\pi) = X_L(u) + X_R(v) + 2\pi\alpha' w, \qquad (17.23)$$

которое может быть переписано в виде

$$X_L(u+2\pi) - X_L(u) = X_R(v) - X_R(v-2\pi) + 2\pi\alpha' w, \qquad (17.24)$$

При изучении замкнутых струн в главе 13 (см. (13.13)) последнее слагаемое в правой части отсутствовало. Тем не менее, часть предыдущего анализа по-прежнему остается справедливой. Также как и прежде, производные $X'_L(u)$ и $X'_R(u)$ являются периодическими функциями своих аргументов. Поэтому разложения (13.14) остаются справедливыми и в настоящем случае, также как и уравнения (13.15):

$$X_L(u) = \frac{1}{2} x_0^L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\overline{\alpha}_0 u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\overline{\alpha}_n}{n} \, e^{-inu},$$

$$X_R(v) = \frac{1}{2} x_0^R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \,\alpha_0 v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} \, e^{-inv}.$$
(17.25)

Особенность нового разложения состоит в том, что $\bar{\alpha}_0$ не обязательно равно α_0 . Вместо этого уравнение (17.24) приводит к

$$2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\bar{\alpha}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 + 2\pi\alpha' w,\qquad(17.26)$$

так что, после сокращения констант,

$$\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = \sqrt{2\alpha'}w. \tag{17.27}$$

Мы видим, что $\bar{\alpha}_0$ теперь равно α_0 лишь в том случае, когда намотка отсутствует. Также можно вычислить импульс струны *p* вдоль компактного измерения:

$$p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{0}^{2\pi} (\dot{X}_L + \dot{X}_R) \, d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\alpha'}} (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0), \qquad (17.28)$$

где мы воспользовались уравнением (17.3) и было замечено, что вклад в интеграл дают только линейные по u и v слагаемые. Импульс пропорционален среднему от α_0 и $\overline{\alpha}_0$. В результате, можно записать

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\alpha'}}(\overline{\alpha}_0 + \alpha_0), \quad w = \frac{1}{2\sqrt{\alpha'}}(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0). \quad (17.29)$$

Эти уравнения наводят на мысль о том, что намотка w и импульс p равноправны: как w, так и p можно считать импульсными операторами. Для сравнения, запишем значения нулевых мод:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p-w), \qquad \overline{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p+w). \qquad (17.30)$$

В случае без компактификации мы имели $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$, и это означало, что есть только один импульс. По этой причине мы пришли к выводу, что только одна координатная нулевая мода имеет смысл. Однако теперь $\alpha_0 \neq \bar{\alpha}_0$ и есть два различных типа импульсов. И поэтому имеется место для двух различных координатных нулевых мод. Обозначив $x_0^L = x_0 + q_0$ и $x_0^R = x_0 - q_0$, мы таким образом вводим среднюю координату x_0 и координатное отклонение q_0 . Это позволяет

переписать (17.3) в виде

$$X_{L}(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}(x_{0} + q_{0}) + \frac{\alpha'}{2}(p + w)(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0}\frac{\overline{\alpha}_{n}}{n}e^{-in(\tau + \sigma)},$$

$$X_{R}(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}(x_{0} - q_{0}) + \frac{\alpha'}{2}(p - w)(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0}\frac{\overline{\alpha}_{n}}{n}e^{-in(\tau - \sigma)}.$$
(17.31)

Полная координата $X(\tau, \sigma)$ получается сложением вышеприведенных выражений для X_L и X_R :

$$X(\tau,\sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' w \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma}). \quad (17.32)$$

Единственным указанием на компактное измерение в этом разложении является слагаемое намотки $\alpha' w \sigma$. Нулевой моды q_0 здесь нет. Для полноты изложения, составим стандартные линейные комбинации производных от X:

$$\dot{X} + X' = 2X'_{L}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha}_{n} e^{-in(\tau + \sigma)},$$

$$\dot{X} - X' = 2X'_{R}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n} e^{-in(\tau - \sigma)}.$$
(17.33)

17.4. Квантование и коммутационные соотношения

В этом разделе мы выведем коммутационные соотношения для мод струнной координаты X. Затем обсудим спектр операторов p и w.

Отправной точкой является известный набор канонических коммутаторов. Коммутатор между струнной координатой X и струнным импульсом \mathcal{P}^{τ} принимается равным

$$[X(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{\tau}(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma'). \tag{17.34}$$

Кроме того, коммутаторы между двумя координатами или двумя импульсами считаются равными нулю. Так как квантование всех некомпактных координат полностью идентично квантованию, проведенному в главе 13, необходимо рассмотреть только компактное измерение. Но даже для этой координаты X ситуация меняется не так сильно.

Сначала рассмотрим коммутаторы, не содержащие x_0 . Ключом к вычислению этих коммутаторов в главе 13 являлось соотношение (13.28). Это уравнение легко использовать по той причине, что содержащаяся в нем линейная комбинация производных от X' имеет компактный вид, записанный в (13.26). Такие комбинации производных от X, представленные в (17.33), теперь имеют такой же вид, за исключением двух небольших отличий: отсутствует верхний индекс, а α_0 и $\overline{\alpha}_0$ не совпадают. Отсюда следует, что уравнение (13.29) также справедливо для мод струнной координаты Х, и поэтому

$$[\overline{\alpha}_m, \overline{\alpha}_n] = [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \overline{\alpha}_n] = 0$$
(17.35)

аля всех целых *m* и *n*. Особенно интересны коммутаторы, содержащие α_0 и $\bar{\alpha}_0$. Имеем $[\alpha_0, \bar{\alpha}_0] = 0$, поэтому на основании (17.33) находим

$$[p, w] = 0. (17.36)$$

Так как α_0 и $\overline{\alpha}_0$ коммутируют со всеми осцилляторами α_n и $\overline{\alpha}_n$, то же самое справедливо для p и w:

$$[p,\overline{\alpha}_n] = [p,\alpha_n] = [w,\overline{\alpha}_n] = [w,\alpha_n] = 0.$$
(17.37)

Все что остается сделать, это определить коммутационные соотношения x_0 с другими операторами. Стратегия состоит в использовании коммутатора

$$[X(\tau,\sigma),(\dot{X}\pm X')(\tau,\sigma')]=2\pi\alpha' i\delta(\sigma-\sigma'), \qquad (17.38)$$

который получается путем комбинации (17.34) и производной по σ' от $[X(\tau, \sigma), X(\tau, \sigma')] = 0$. Бегло взглянув на (17.32), мы видим, что слагаемые, содержащие p и w, не дают вклада, потому как p и w коммутируют со всеми операторами α_0 и $\overline{\alpha}_0$. Интегрируя по $\sigma \in [0, 2\pi]$, находим

$$[x_0, (\dot{X} \pm X')(\tau, \sigma')] = \alpha' i.$$
 (17.39)

Из этого уравнения и выражений (17.33) следует, что x_0 коммутирует со всеми α_0 и $\overline{\alpha}_0$, имеющими ненулевые индексы, а также

$$[x_0, \alpha_0] = [x_0, \bar{\alpha}_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}.$$
 (17.40)

Сравнивая с (17.33), получаем

$$[x_0, p] = i, \quad [x_0, w] = 0.$$
(17.41)

На этом анализ коммутационных соотношений завершается. Есть один неожиданный момент, который следует отметить: любой оператор, появляющийся в X, коммутирует с намоткой w. Наиболее скромная интерпретация этого результата заключается в том, что w есть постоянное число. Это значит, что рассмотренное выше квантование способно описывать набор замкнутых струн с некоторыми частными фиксированными намотками; различные намотки соответствуют различным секторам полной теории замкнутых струн. При такой интерпретация pи w имеют совершенно различную природу. Более любопытная интерпретация wсоответствуют различным допустимым намоткам. Такая интерпретация кажстся более естественной, и, как мы увидим в разделе 17.8, возможно рассматривать координатную нулевую моду q_0 как координату, сопряженную импульсу w.

В силу того, что измерение x компактифицировано, нулевая мода x_0 является координатой на окружности. Оператор импульса p вдоль направления x является импульсом, сопряженным к x_0 , и поэтому, согласно известному результату из квантовой механики, в импульсном представлении допустимые значения импульса квантуются. Для вывода этого условия квантования рассмотрим оператор e^{-iap} , сдвигающий состояния вдоль x на величину a. Так как x_0 определен на окружности радиуса R, то оператор трансляций, сдвигающий на $2\pi R$, не влияет на состояние. Таким образом, $e^{-i2\pi Rp}$ ведет себя как единичный оператор. Из этого мы делаем вывод, что состояния обладают импульсом, квантованным вдоль x, со значениями

$$p=\frac{n}{R}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$
 (17.42)

Следует отметить, что x_0 не является хорошо определенным оператором: его собственные значения неоднозначны в силу отождествления $x_0 \simeq x_0 + 2\pi R$. В итоге, коммутационное соотношение $[x_0, p] = i$ является на самом деле формальным и не имеет точного смысла. Простейшая форма принципа неопределенности, утверждающего, что для собственных состояний в импульсном представлении неопределенность положения бесконечна, не применима: на окружности максимальная неопределенность положения есть $2\pi R$. Можно использовать x_0 для построения хорошо определенных операторов

$$e^{i\ell x_0/R}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \tag{17.43}$$

инвариантных относительно сдвига x_0 на любую величину, кратную $2\pi R$. Тогда имеем

$$e^{-i\ell x_0/R} p e^{i\ell x_0/R} = p + \frac{\ell}{R}.$$
 (17.44)

Это операторное уравнение является точным, его можно легко проверить с помощью $[x_0, p] = i$. Именно в этом смысле элементарное соотношение $[x_0, p] = i$ может быть использовано для получения однозначных результатов. Похожие замечания справедливы для (17.34), потому что X также не является хорошо определенным оператором. Операторы в (17.43) действуют хорошо определенным образом на пространстве состояний, выраженным в терминах собственных векторов импульса $|p\rangle$.

() Упражнение-разминка 17.1. Покажите, что $e^{i\ell x_0/R}|p\rangle$ является состоянием с импульсом $p+\ell/R$. Заметьте, что этот импульс квантуется должным образом.

В рассмотрении также присутствует другое условие квантования. Вспоминая условие периодичности (17.17), потребуем выполнения

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R)$$
(17.45)

при действии на допустимые состояния. В силу (17.32), это приводит к существованию у оператора w собственных значений, удовлетворяющих соотношению

$$\alpha' w(2\pi) = m(2\pi R) \Rightarrow w = \frac{mR}{\alpha'}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$
 (17.46)

Таким образом, как p, так и w обладают дискретными спектрами.

Здесь возникает интересный двойной эффект. Отождествление $x_0 \simeq x_0 + 2\pi R$ приводит к двум последствиям. Во-первых, некоторые состояния исчезают. Если окружности нет, то оператор импульса имеет непрерывный спектр. После появления окружности импульс квантуется и те состояния, которые не удовлетворяют условию квантования, исчезают. Во-вторых, возникают некоторые новые состояния. Это моды намотки, которые наматываются вокруг появившейся окружности. Таким образом, одни состояния исчезли, а другие состояния появились! Интересно отметить, что для частицы, в отличие от струны, состояния исчезают только тогда, когда линия сворачивается в окружность. Частица не может намотаться вокруг окружности и произвести новые состояния. Другим примером подобного двойного эффекта является квантование замкнутых струн на орбифолде, которое изучалось на орбифолде $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ в главе 13. Там исчезали состояния, неинвариантные относительно $X \to -X$, и возникал сектор твистовых состояний.

17.5. Связи и массовая формула

В предыдущем рассмотрении замкнутых струн в калибровке светового конуса, связь $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ приводила к тому, что оператор $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ аннигилировал состояния. В текущей ситуации это по-прежнему справедливо, потому как $x^$ не компактифицировано и, в результате, импульсы соответствующих правых и левых мод остаются равными друг другу. Однако есть одно отличие: на этот раз равенство нулю $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ не означает равенства нулю $N^\perp - \bar{N}^\perp$. Чтобы убедиться в этом, нам необходимы явные выражения для L_0^\perp и \bar{L}_0^\perp . Они легко получаются после рассмотрения уравнений (13.37) и (13.42). Возникающие изменения малы: сумма по I разбивается на сумму по *i* и слагаемое, соответствующее компактному измерению. Находим

$$\overline{L}_{0}^{\perp} = \frac{1}{2} \,\overline{\alpha}_{0}^{I} \overline{\alpha}_{0}^{I} + \overline{N}^{\perp} = \frac{\alpha'}{4} \, p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \,\overline{\alpha}_{0} \overline{\alpha}_{0} + \overline{N}^{\perp},
L_{0}^{\perp} = \frac{1}{2} \,\alpha_{0}^{I} \alpha_{0}^{I} + N^{\perp} = \frac{\alpha'}{4} \, p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \,\alpha_{0} \alpha_{0} + N^{\perp}.$$
(17.47)

Операторы N^{\perp} и \overline{N}^{\perp} содержат вклады всех осцилляторов: несущих индекс *i* и соответствующих струнной координате *X*. Теперь можно вычислить

$$L_0^{\perp} - \overline{L}_0^{\perp} = \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_0 - \overline{\alpha}_0 \overline{\alpha}_0) + N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = -\alpha' p w + N^{\perp} - \overline{N}^{\perp}, \qquad (17.48)$$

где было использовано (17.33). Отсюда следует, что действие оператора на физические состояния принимает вид

$$N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = \alpha' p w. \tag{17.49}$$

Число левых мод и число правых мод для состояний с нулевым импульсом или с нулевой намоткой должны совпадать. Но на состояниях как с ненулевым импульсом, так и с ненулевой намоткой $N^{\perp} - \overline{N}^{\perp}$ не может быть равным нулю 4--

оно должно быть равным $\alpha' pw$. Так как N^{\perp} и \overline{N}^{\perp} являются операторами с целочисленными собственными значениями, левая часть (17.49) всегда принимает целые значения. В силу условий квантования (17.42) и (17.46),

$$\alpha' p w = \alpha' \cdot \frac{n}{R} \cdot \frac{mR}{\alpha'} = nm, \qquad (17.50)$$

поэтому правая часть (17.49) также принимает целые значения. С использованием указанных целых чисел, (17.49) приобретает простой вид

$$N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = nm. \tag{17.51}$$

Важным инструментом, с помощью которого изучается спектр струны, является формула квадрата массы состояний. Для получения такой формулы мы придерживаемся точки зрения наблюдателя, живущего в 25-мерном пространстве-времени Минковского, не содержащем компактного измерения. Для этого наблюдателя $M^2 = -p^2$, где p есть 25-мерный импульс состояний. Данный вектор импульса имеет компоненты p^+ , p^- и p^i ; компонента импульса вдоль компактного измерения отсутствует. Таким образом, имеем

$$M^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{i}p^{i} = \frac{2}{\alpha'}(L_{0}^{\perp} + \vec{L}_{0}^{\perp} - 2) - p^{i}p^{i}, \qquad (17.52)$$

где для запси p^- в терминах операторов Вирасоро было использовано уравнение (13.46). Подставляя из (17.5) значения L_0^{\perp} и \overline{L}_0^{\perp} , находим

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'}(\alpha_{0}\alpha_{0} + \bar{\alpha}_{0}\bar{\alpha}_{0}) + \frac{2}{\alpha'}(N_{0}^{\perp} + \bar{N}_{0}^{\perp} - 2). \qquad (17.53)$$

На последнем шаге воспользуемся (17.30) и получим

$$M^{2} = p^{2} + w^{2} + \frac{2}{\alpha'}(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2). \qquad (17.54)$$

Так выглядит оператор квадрата массы. Здесь p и w — это квантованный импульс и намотка, соответствующие компактному измерению. Последнее слагаемое такое же, как и в случае замкнутых струн на пространстве Минковского.

Рассмотрим вклад импульса $p \in M^2$, временно полагая все остальные слагаемые равными нулю. Тогда рассматриваемый импульс задает массу покоя, либо энергию покоя, M = |p|. Таким образом, внутренний импульс определяет энергию покоя струны таким же способом, каким импульс безмассовой частицы определяет ее энергию. Теперь рассмотрим вклад намотки $w \in M^2$, опять полагая все остальные слагаемые равными нулю. В этом случае M = |w|, и возможна простая интерпретация. Рассмотрим струнное состояние, которое |m| раз намотано вокруг компактного измерения. Длина такой струны $|m|2\pi R$, а, так как натяжение струны есть $1/2\pi \alpha'$, то энергия покоя струны равна

$$M = \frac{1}{2\pi\alpha'} |m| 2\pi R = \frac{|m|R}{\alpha'} = |w|.$$
(17.55)

Поэтому вклад намотки в массу естественным образом понимается как энергия, соответствующая натяжению, необходимому для наматывания струны вокруг компактифицированного измерения.

Когда струна имеет ненулевой импульс p и ненулевую намотку w, соответствующие вклады в энергию покоя состояния складываются квадратичным образом. Вклады операторов числа состояний в квадрат энергии покоя линейны. В некотором смысле, состояние определяемое импульсом, намоткой, осцилляторными возбуждениями, можно рассматривать как связанное состояние, состоящее из различных компонент, взаимодействие которых определяют полную энергию покоя, меньшую, чем сумма энергий отдельных составляющих.

Упражнение-разминка 17.2. Покажите, что гамильтониан в рассматриваемой теории замкнутых струн имеет вид

$$H = \frac{\alpha'}{2}(p^i p^i + p^2 + w^2) + N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2. \qquad (17.56)$$

17.6. Пространство состояний замкнутой компактифицированной струны

Теперь явно построим пространство состояний квантовой замкнутой струны, которую мы изучали. Начнем с состояний, не имеющих осцилляторных возбуждений. Такие состояния стандартным образом зависят от импульсов, соответствующих 25-мерному пространству Минковского, однако также имеют дополнительную зависимость, определяющую импульс и намотку вдоль компактного измерения. Так как импульс квантуется как p = n/R, целое число n можно использовать в качестве альтернативного способа обозначения импульса состояния. Аналогично для $w = mR/\alpha'$, целое число m можно использовать как обозначение намотки состояния. Обозначая через \vec{p}_T вектор с компонентами p^i при $i = 2, \ldots, 24$, имеем

основные состояния:
$$|p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle, n, m \in \mathbb{Z}.$$
 (17.57)

Несмотря на то что мы называем эти состояния «основными», это вообще говоря, не означает, что все они являются допустимыми состояниями в теории. Действительно, так как $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 0$ для всех таких состояний, из связи (17.51) следует, что у допустимых основных состояний либо n, либо m, либо оба вместе должны быть равны нулю. Мы называем такие состояния «основными», только затем, чтобы подчеркнуть тот факт, что каждое из них аннулируется всеми операторами уничтожения. Отметим также, что сами по себе состояния (17.57) с неравными нулю n и m являются недопустимыми, однако на них можно действовать подходящей комбинацией операторов рождения с целью получения допустимых состояний.

Базис в пространстве состояний строится действием операторов рождения на состояния, рассмотренные выше. Возможное базисное состояние теории имеет общий вид

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty}\prod_{i=2}^{24} (a_r^{i\dagger})^{\lambda_{i,r}}\right] \left[\prod_{s=1}^{\infty}\prod_{j=2}^{24} (\bar{a}_s^{j\dagger})^{\bar{\lambda}_{j,s}}\right] \left[\prod_{k=1}^{\infty} (a_k^{\dagger})^{\lambda_k}\right] \left[\prod_{l=1}^{\infty} (\bar{a}_l^{\dagger})^{\bar{\lambda}_l}\right] |p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle.$$
(17.58)

Мы отделили осцилляторы, соответствующие компактному измерению, потому что 25-мерный лоренцевский индекс у них отсутствует. Действуя на вышеуказанные состояния, операторы числа частиц N^{\perp} и \overline{N}^{\perp} приводят к выражениям

$$N^{\perp} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{24} r \lambda_{i,r} + \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k, \quad \overline{N}^{\perp} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{24} s \overline{\lambda}_{j,s} + \sum_{l=1}^{\infty} l \overline{\lambda}_l.$$
(17.59)

Возможное состояние из (17.58) является элементом пространства состояний лишь в том случае, если оно удовлетворяет связи (17.51):

$$N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = nm. \tag{17.60}$$

Квадрат массы состояния задается (17.54):

$$M^{2} = \left(\frac{n}{R}\right)^{2} + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^{2} + \frac{2}{\alpha'}\left(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2\right).$$
(17.61)

Чтобы ознакомиться со спектром, рассмотрим некоторые состояния замкнутых струн более подробно.

Состояния с m = n = 0. У этих состояний нет ни импульса, ни намотки в компактном измерении. Одной из таких струн могла бы быть струна (а) на рис. 17.1, конечно при условии, что ее полный импульс вдоль оси x равен нулю. Из уравнения (17.60) следует, что $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp}$, поэтому мы должны быть уверены, что число левых и правых осцилляторов, действующих на состояние, совпадает

Вакуумное состояние имеет простой вид

$$|p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle, \quad M^2 = -\frac{4}{\alpha'}.$$
 (17.62)

Это тахионное состояние замкнутых струн. Следующими идут безмассовые состояния, возникающие при $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp} = 1$. Так как и в левом и правом секторах имеется два типа осцилляторов (соответствующие компактному измерению и не соответствующие), с целью получения безмассовых состояний существует четыре способа комбинации осцилляторов:

$$a_{1}^{\dagger} \bar{a}_{1}^{\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle, \quad a_{1}^{\dagger} \bar{a}_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle, a_{1}^{i\dagger} \bar{a}_{1}^{\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle, \quad a_{1}^{i\dagger} \bar{a}_{1}^{j\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle,$$
(17.63)

В первой строчке содержится только одно состояние. Так как оно не имеет 25мерного индекса, то это состояние безмассового скалярного поля. Каждое состояние во второй и третьей строке имеет индекс *i*, являющийся полным индексом в 25-мерном пространстве-времени на световом конусе. В результате имеем фотонные состояния, и каждый набор состояний соответствует полю Максвелла. Таким образом, в целом получаем два поля Максвелла. Это любопытно, потому как обычные замкнутые струны в пространстве Минковского не приводят даже к одному полю Максвелла, не говоря уж о двух! Наконец, состояния в четвертой строке имеют в точности такую же структуру, как безмассовые состояния замкнутых струн в пространстве Минковского, за тем исключением, что теперь размерность понижена до 25. Следовательно, данные состояния соответствуют полю гравитации, полю Кальба—Рамона, и дилатону, и все они расположены в 25 пространственно-временных измерениях.

Если взглянуть на приведенные выше состояния, можно понять, что все произошедшее на самом деле сводится к тому, что компактификация перераспределила различные безмассовые состояния исходной 26-мерной теории. Данные состояния теперь собираются в 25-мерные лоренцевские тензоры. Число осцилляторов осталось таким же, однако типы полей изменились, потому что теперь, при 25-мерных лоренцевских преобразованиях, один индекс не используется.

Перераспределение состояний при компактификации было известно в физике частиц с первой работы Калуцы и Клейна, которые в начале 1920-х годов пытались построить четырехмерную объединенную теорию гравитации и электромагнетизма посредством компактификации чисто гравитационной теории в пяти измерениях. То, что происходит в этом случае, можно понять на качественном уровне. Пусть $g_{\mu\nu}$ (где μ и ν — пятимерные индексы) соответствует полю гравитации в пяти измерениях. Предположим, что измерение, которое мы собираемся компактифицировать, является пятым, и пусть *m* и *n* — это четырехмерные индексы, соответствующие пространству-времени. Как матрица, $g_{\mu\nu}$ может быть разбита на матрицу gmn, соответствующую четырехмерному полю гравитации, вектор g_{m5} , соответствующий четырехмерному полю Максвелла (g_{5m} не является новым полем, потому как исходная метрика симметрична), и на одну компоненту g_{55} , соответствующую четырехмерному скаляру. В этом состоит основной результат Калуцы и Клейна: пятимерная теория гравитации после компактификации к четырем измерениям порождает теорию гравитации, поле Максвелла и безмассовый скаляр.

Почему процедура Калуцы и Клейна приводит к одному полю Максвелла в компактифицированной теории гравитации, в то время как список (17.63) приводит к двум? В этом нет ничего удивительного, потому что теория струн — это нечто большее, чем одна теория гравитации. Второе поле Максвелла возникает из многомерного поля Кальба—Рамона, так что даже в теории струн из гравитационного поля возникает только одно поле. Таким образом, теперь компактификация затрагивает и другие поля, помимо гравитации. Если $B_{\mu\nu}$ обозначает пятимерное поле Кальба—Рамона, то после компактификации, B_{m5} соответствует четырехмерному полю Максвелла. Действительно, составим линейные комбинации состояний второй и третьей строки в (17.6), получим

$$\frac{\left(a_{1}^{\dagger}\bar{a}_{1}^{i\dagger}+a_{1}^{i\dagger}\bar{a}_{1}^{\dagger}\right)|p^{+},\vec{p}_{T};0,0\rangle,}{\left(a_{1}^{\dagger}\bar{a}_{1}^{i\dagger}-a_{1}^{i\dagger}\bar{a}_{1}^{\dagger}\right)|p^{+},\vec{p}_{T};0,0\rangle.}$$
(17.64)

Состояния в первой строке соответствуют фотонным состояниям, возникающим из 26-мерных гравитонных состояний. Состояния во второй строке соответствуют фотонным состояниям, возникающим из 26-мерных состояний Кальба—Рамона.

Состояния с n = 0 или m = 0. Так как у таких состояний либо импульс, либо намотка не равны нулю, но не оба вместе, они по-прежнему должны удовлетворять $N^{\perp} = \overline{N}^{\perp}$. Основные состояния имеют вид

$$|p^{+}, \vec{p}_{T}; n, 0\rangle, \quad M^{2} = \frac{n^{2}}{R^{2}} - \frac{4}{\alpha'},$$

$$|p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, m\rangle, \quad M^{2} = \frac{m^{2}R^{2}}{{\alpha'}^{2}} - \frac{4}{\alpha'}.$$
(17.65)

В силу того, что они не имеют 25-мерных лоренцевских индексов, оба набора состояний соответствуют скалярным полям. Для любого фиксированного n или m, состояния могут быть тахионными, безмассовыми или массовыми, в зависимости от значения радиуса R. Действие на данные вакуумы осцилляторами приводит к более массивным состояниям. Для таких состояний $N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} \ge 2$ и в результате, они массивные для всех значений радиуса R. Таким образом, оказывается невозможным обнаружить в данном секторе пространства состояний безмассовые векторы.

Состояния с $n = m = \pm 1$ или $n = -m = \pm 1$. У таких состояний есть и импульс и намотка, поэтому N^{\perp} и \overline{N}^{\perp} должны отличаться. Есть две ситуации, которые мы рассматриваем,

$$n = m = \pm 1 \implies N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = 1,$$

$$n = -m = \pm 1 \implies N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = -1.$$
(17.66)

Решения $N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = 1$ с наименьшей массой возникают при $N^{\perp} = 1$ и $\overline{N}^{\perp} = 0$. Существует два типа состояний, которые удовлетворяют этому условию:

$$\begin{aligned}
 a_{1}^{\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \pm 1 \rangle, \\
 a_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \pm 1 \rangle.
 \end{aligned}$$
(17.67)

Аналогично, решения с наименьшей массой $N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = -1$ возникают при $N^{\perp} = 0$ и $\overline{N}^{\perp} = 1$, и имеют вид

$$\bar{a}_{1}^{\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \pm 1 \rangle,$$

$$\bar{a}_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \pm 1 \rangle.$$
(17.68)

Обе рассмотренные группы состояний имеют массу

$$M^{2}(R) = \frac{1}{R^{2}} + \frac{R^{2}}{{\alpha'}^{2}} - \frac{2}{\alpha'} = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\alpha'}\right)^{2}.$$
 (17.69)

Интересно отметить, что существует некоторый радиус R^* , при котором $M^2(R^*)=0$, так что все состояния становятся безмассовыми:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{R^*}{\alpha'} \Rightarrow R^* = \sqrt{\alpha'}.$$
(17.70)

Радиус R^* в точности является длиной струны. При этом радиусе, который называется самодуальным радиусом (по причинам, которые станут ясны в дальнейшем), у рассмотренных выше состояний имеется простая интерпретация. Состояния в первых строках (17.67) и (17.68) в совокупности образуют четыре безмассовых скаляра. Состояния во второй строке (17.67) и (17.68) в совокупности образуют четыре безмассовых калибровочных поля. Так как все данные состояния имеют ненулевую намотку, это по-настоящему «струнные» состояния, которые не могут возникнуть в теории частиц.

Упражнение-разминка 17.3. Докажите, что в секторе состояний с $n \neq 0$ и $m \neq 0$ отсутствуют состояния, которые в принципе могут стать безмассовыми.

Ранее мы обнаружили два поля Максвелла в секторе, в котором импульс и намотка оба равны нулю (см. (17.6)). Эти два U(1)-поля (на языке, введенном в разделе 15.3) возникают из гравитации и полей Кальба—Рамона в 26-мерной теории с помощью механизма, применимого как в теории частиц, так и в теории струн. Теперь мы получили четыре дополнительных калибровочных поля, которые все безмассовы при самодуальном радиусе и по-настоящему являются «струнными». Возникло нечто любопытное, описываемое двумя физически эквивалентными U(1)-полями, соответствующими сумме и разности состояний (17.6). Каждое из этих двух U(1)-полей комбинируется с двумя струнными калибровочных бозонов, взаимодействующих согласно SU(2)-теории Янга-Миллса. Более точно, этими комбинациями являются

$$\begin{array}{ll} a_{1}^{\dagger} \bar{a}_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle & c & \bar{a}_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \mp 1 \rangle, \\ a_{1}^{i\dagger} \bar{a}_{1}^{\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; 0, 0 \rangle & c & a_{1}^{i\dagger} | p^{+}, \vec{p}_{T}; \pm 1, \pm 1 \rangle. \end{array}$$

$$(17.71)$$

При компактификации в стандартной теории гравитации и теории полей Кальба— Рамона, возникающая теория имела бы калибровочную группу $U(1) \times U(1)$. В теории струн при самодуальном радиусе $U(1) \times U(1)$ калибровочная группа расширяется до $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии. Мы уже видели, как теории Янга— Миллса возникают в мировом объеме совпадающих D-бран. Теперь мы видим некоторый способ возможного возникновения теорий Янга—Миллса в теории замкнутых струн.

17.7. Поразительное совпадение спектров

Мы уже убедились в том, что спектр масс компактифицированной струны сильно зависит от радиуса компактификации. Например, при самодуальном радиусе R^* возникают некоторые дополнительные безмассовые калибровочные поля. Сейчас мы обнаружим удивительное свойство спектра. Чтобы проявить это свойство, необходимо взглянуть на уравнения (17.61) и (17.60), имеющие вид

$$M^{2} = \frac{n^{2}}{R^{2}} + \frac{m^{2}R^{2}}{{\alpha'}^{2}} + \frac{2}{\alpha'} (N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2), \quad N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = nm.$$
(17.72)

Теперь возникает замечательное свойство: при компактификации с радиусом R спектр замкнутой струны тождественен спектру замкнутой струны при компактификации с радиусом $\tilde{R} = \alpha'/R$. Вскоре мы убедимся в этом, однако оказывается, что справедливо даже большее: две данные компактификации физически неразличимы. Это и есть Т-дуальность в теории замкнутых струн. Отметим, что это означает, что в теории замкнутых струн компактификация с очень большим радиусом эквивалентна компактификации с очень маленьким радиусом! Радиусы R и α'/R называются дуальными радиусами:

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \equiv \widetilde{R}.$$
 (17.73)

Чтобы проверить совпадение спектров, выпишем выражение для квадрата массы в случае каждого из радиусов:

$$M^{2}(R; n, m) = \frac{n^{2}}{R^{2}} + \frac{m^{2}R^{2}}{{\alpha'}^{2}} + \frac{2}{\alpha'} (N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2),$$

$$M^{2}(\tilde{R}; n, m) = \frac{n^{2}R^{2}}{{\alpha'}^{2}} + \frac{m^{2}}{R^{2}} + \frac{2}{\alpha'} (N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2).$$
(17.74)

Они не выглядят одинаковыми, но это различие мнимое. Для n и m, принимающих все целые значения, спектры возникающих масс совпадают. Более точно, для всех $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$M^{2}(R; n, m) = M^{2}(\tilde{R}; n, m).$$
 (17.75)

В этом равенстве мы сравниваем состояния с одинаковой осцилляторной структурой, иначе вклады от операторов числа частиц не будут согласованы. Отметим также, что перестановка n и m не изменяет связи в (17.72). Это доказывает, что массовые спектры состояний с дуальными радиусами тождественны. Ключ к этому равенству — в противоположных зависимостях от радиуса тех частей квадрата массы, которые связаны с импульсом и намоткой. Перестановка n и m в (17.75) является всего лишь перестановкой квантовых чисел намотки и импульса.

В следующем разделе мы приведем доказательство того, что дуальные радиусы действительно физически неотличимы. Это свойство теории струн было достоверно доказано. Специальный радиус R^* в (17.70) является единственным радиусом, который отображается сам в себя при преобразовании (17.73). Тогда дуальность означает, что каждый радиус, меньший чем R^* , эквивалентен некоторому радиусу, большему чем R^* . В этом смысле, радиус R^* является минимальным радиусом, возможным при тороидальной компактификации.

В настоящем анализе значение радиуса окружности является подгоночным. Теория не выбирает какой-то частный радиус так, как она выбирает частную размерность пространства-времени. Радиус окружности должен рассматриваться как параметр частного класса компактифицированных пространств, допускающих непротиворечивое определение теории струн. Радиус компактификации не является параметром самой теории струн, а скорее параметром пространства-времени, допустимого в теории струн. Он является подгоночным параметром. Иногда подобные параметры называются *модулями*, и множество значений, которые эти параметры могут принимать, называется *пространством модулей*. Мы выяснили, что при T-дуальности пространство модулей компактификаций на окружность может быть взято в виде значений радиусов, больших либо равных R^* .

Чтобы разобраться в том, как очень маленькая окружность может стать очень большой, рассмотрим следующее наводящее соображение. На окружности радиуса R импульс квантуется в единицах 1/R. Если значение R очень велико, то интервал между собственными значениями импульса очень маленький и спектр почти непрерывный. Когда радиус очень маленький, собственные значения импульса отстоят друг от друга достаточно далеко. В стандартной теории частиц это указывает на маленький радиус, в теории струн ситуация другая. Собственные значения намотки квантуются в единицах R/α' , и по мере того как радиус Rстановится очень маленьким, спектр намотки становится почти непрерывным. Наблюдатель, видящий этот континуум, мог бы заключить, что компактное измерение очень большое.

17.8. Дуальность как полная квантовая симметрия

Мы убедились в том, что Т-дуальность является симметрией массового спектра компактифицированной теории замкнутых струн. Сам по себе этот результат не означает, что физическое содержание при дуальных радиусах одинаково. В этом разделе мы докажем, что полная теория *свободных* замкнутых струн инвариантна относительно Т-дуальности. Можно доказать, что Т-дуальность остается даже при включении взаимодействия между струнами, однако мы не будем пытаться заниматься этим в данной книге.

Каким образом показать эквивалентность дуальных теорий? Прежде всего, выявим некоторую дополнительную структуру, существующую в компактифицированной теории струн. После чего объясним эквивалентность дуальных теорий двумя взаимосвязанными способами. Первое объяснение будет связано с тем, что Т-дуальность возникает как произвол в толковании одной теории: один возможный выбор струнных координат приводит к тому, что радиус окружности равен R, а второй, физически эквивалентный выбор, приводит к тому, что радиус окружности равен α'/R . Второе оюъяснение будет основано на том, что Т-дуальность проявляется как эквивалентность двух различных теорий. Рассматрим теорию с радиусом R и теорию с радиусом α'/R , после чего найдем взаимнооднозначное соответствие между операторами данных теорий, которое сохраняет все коммутационные соотношения и переводит один гамильтониан в другой. Это та же самая стратегия, с помощью которой была продемонстрирована симметрия дуальности гармонического осциллятора в разделе 17.1.

Дополнительная структура компактифицированной теории струн связана с координатной нулевой модой q_0 , появляющейся в X_L и X_R и отсутствующей в полной координате $X = X_L + X_R$ (см. (17.31)). Напомним, что оператор намотки коммутирует со всеми операторами, которые входят в X. Естественно объявить (q_0 , w) парой сопряженных переменных. С этой целью введем дуальный оператор «координаты», определяемый выражением

$$\overline{X}(\tau,\sigma) \equiv X_L(\tau+\sigma) - X_R(\tau-\sigma).$$
 (17.76)

С помощью (17.31) находим, что эта координата принимает вид

$$\widetilde{X}(\tau,\sigma) = q_0 + \alpha' w \tau + \alpha' p \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma}). \quad (17.77)$$

Данная координата интересна тем, что в ней p умножается на σ , а w умножается на τ , что перемешивает обычное разбиение на пары в X. Более того, q_0 появляется на месте x_0 . Отсюда следует, что импульс, соответствующий q_0 , — это w (так как он появляется с τ), а намотка, соответствующая q_0 , — это p (так как она появляется с σ). Координата \tilde{X} «вводит в игру» q_0 . Точный смысл q_0 будет пояснен ниже.

Теперь можно определить импульс $\widetilde{\mathcal{P}}^{\tau}$, сопряженный координате \widetilde{X} :

$$\widetilde{\mathcal{P}}^{\tau} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \,\partial_{\tau} \widetilde{X} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \,(\dot{X}_L - \dot{X}_R). \tag{17.78}$$

Постулируем коммутатор

$$\left[\widetilde{X}(\tau,\sigma),\,\widetilde{\mathcal{P}}^{\tau}(\tau,\sigma')\right] = i\delta(\sigma-\sigma') \tag{17.79}$$

и потребуем, чтобы коммутатор двух координат или двух импульсов был равен нулю. С этим можно не согласиться, потому как данные коммутаторы содержат те же самые осцилляторы, с которыми мы уже встречались, так что их коммутационные соотношения уже определены. Это действительно так, однако такие же коммутационные соотношения возникают потому, что единственное отличие между парами (X, \mathcal{P}^{τ}) и $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}}^{\tau})$ состоит в *другом знаке в* X_R . Как можно видеть из (17.31), такое изменение знака возникает благодаря изменению знака всех осцилляторов α_n , перестановке x_0 и q_0 , и перестановке p и w. Данные замены не влияют на коммутаторы (17.35), которые, таким образом, не изменяются. Пара (q_0, w) возникает в \tilde{X} , так же, как пара (x_0, p) возникает в X, поэтому находим

$$[q_0, w] = i, (17.80)$$

И

$$[q_0, p] = [q_0, \alpha_n] = [q_0, \bar{\alpha}_n] = 0, \quad n \neq 0.$$
(17.81)

Известно, что x_0 является координатой, определенной на окружности радиуса R, потому как соответствующий канонический импульс p квантуется и имеет собственные значения n/R. Аналогично, из квантования $w = mR/\alpha'$ для импульса намотки следует, что соответствующая координата определена на окружности радиуса $\tilde{R} = \alpha'/R$. Таким образом, струнная координата \tilde{X} сама является координатой на окружности радиуса α'/R . Соотношение $[q_0, w] = i$ является формальным в том же смысле, что и $[x_0, p] = i$. Хорошо определенные операторы, аналогичные (17.43), задаются в виде

$$e^{i\ell q_0/\tilde{R}}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$
 (17.82)

Также имеем

$$e^{-ilq_0/\tilde{R}}we^{i\ell q_0/\tilde{R}} = w + \frac{\ell}{\tilde{R}}.$$
 (17.83)

Действие операторов (17.82) на спектре хорошо определено.

• Упражнение-разминка 17.4. Убедитесь в том, что оператор $e^{i\ell q_0/\tilde{R}}$, действуя на состояние с числом намотки m, приводит к состоянию с числом намотки $m + \ell$.

Единственным неопределенным коммутатором является коммутатор x_0 и q_0 . Для хорошо определенных операторов потребуем

$$\left[e^{-ilx_0/R}, e^{-imq_0/\tilde{R}}\right] = 0, \quad l, m \in \mathbb{Z}.$$
(17.84)

Это согласуется с нашим представлением о том, что присутствующие здесь два типа операторов действуют на индексы импульса или намотки независимо друг от друга, поэтому запишем $[x_0, q_0] = 0$.

Гамильтониан, полученный из $(\tilde{X}, \mathcal{P}^{\tau})$, совпадает с полученным из (X, \mathcal{P}^{τ}) . Это очевидно из уравнения (17.56): перестановка *p* и *w* ничего не изменяет, а знак «минус» в осцилляторах α_n не влияет на *операторы числа частиц*; Т-дуальность появляется как произвол в толковании. Мы начали с теории, в которой координата *X* использовалась для описания компактификации с радиусом *R*, при анализе состава операторов мы нашли другую координату, \tilde{X} , которая приводит к равнозначной интерпретации теории как теории с радиусом компактификации α'/R . Обе интерпретации приводят к одинаковому гамильтониану. В итоге, дуальность возникает, потому что можно заменить *X* на \tilde{X} .

T-дуальность:
$$X = X_L + X_R \Rightarrow \widetilde{X} = X_L - X_R.$$
 (17.85)

Это выражение для дуальной к \tilde{X} координаты X будет полезным при обсуждении открытых струн в главе 18.

Для описания дуальности в виде отображения между двумя теориями, попробуем сформулировать переход от операторов (X, \mathcal{P}^{τ}) к операторам $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}}^{\tau})$ в виде отображения:

$$(X, \mathcal{P}^{\tau}) \to (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{P}}^{\tau}).$$
 (17.86)

Из (17.34) и (17.79) очевидно, что коммутационные соотношения не изменяются. Из наших предыдущих замечаний следует, что (17.86) эквивалентно отображению

$$(X_L, X_R) \to (X_L, -X_R). \tag{17.87}$$

Наконец, рассматривая (17.31), мы видим, что это отображение осуществляется посредством следующего отображения осцилляторов и нулевых мод:

$$\begin{cases} x_0 \to q_0 \\ q_0 \to x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \to w \\ w \to p \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_n \to -\alpha_n \\ \overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha}_n \end{cases}.$$
 (17.88)

Данное отображение не является отображением между двумя теориями, но оно поможет нам построить его.

Для того чтобы найти такое отображение, рассмотрим две различные теории: одну со стандартной интерпретацией (радиус компактификации равен R) и другую, тоже со стандартной интерпретацией (радиус компактификации равен α'/R). Наша задача построить отображение между операторами двух теорий, согласованное с коммутационными соотношениями и переводящее один гамильтониан в другой. Важным моментом, о котором следует позаботиться, является обязательная согласованность данного отображения с операторными условиями квантования.

В табл. 17.1 представлены операторы, условия квантования и коммутационные соотношения для теории с радиусом *R*. Аналогичным образом, в табл. 17.2 представлены операторы, условия квантования и коммутационные соотношения

Таблица 17.1

Теория, в которой координата X определена на окружности радиуса R; приведены гамильтониан, нулевые моды и список коммутационных соотношений

	Теория с радиусом компактификации <i>R</i>
	$H(R) = \frac{1}{2} \alpha' p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \alpha' (p^{2} + w^{2}) + N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2$
6 - :	\boldsymbol{x}_0 определена на окружности радиуса \boldsymbol{R}
	собственные значения p равны n/R
	q_0 определена на окружности радиуса $lpha'/R$
	собственные значения w равны mR/α'
	$[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}]=[\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{w}]=\boldsymbol{i}$
	$[\bar{\alpha}_m,\bar{\alpha}_n]=[\alpha_m,\alpha_n]=m\delta_{m+n,0}$
	$[\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0$

Таблица 17.2

Теория, в которой координата X определена на окружности радиуса lpha'/R; приведены гамильтониан, нулевые моды и список коммутационных соотношений

Теория с радиусом компактификации $\widetilde{R}=lpha'/R$
$\widetilde{H}(\widetilde{R}) = \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha' (\widetilde{p}^2 + \widetilde{w}^2) + \widetilde{N}^{\perp} + \widetilde{N}^{\perp} - 2$
\widetilde{x}_0 определена на окружности радиуса $lpha'/R$
собственные значения \widetilde{p} равны $mR/lpha'$
\widetilde{q}_0 определена на окружности радиуса R
собственные значения \widetilde{w} равны n/R
$[\widetilde{oldsymbol{x}}_0,\widetilde{oldsymbol{p}}]=[\widetilde{oldsymbol{q}}_0,\widetilde{oldsymbol{w}}]=oldsymbol{i}$
$[\widetilde{\overline{\alpha}}_m, \widetilde{\overline{\alpha}}_n] = [\widetilde{\alpha}_m, \widetilde{\alpha}_n] = m\delta_{m+n, 0}$
$[\widetilde{\alpha}_m, \widetilde{\overline{\alpha}}_n] = 0$

для теории с радиусом α'/R . В этой таблице все операторы содержат тильду для того, чтобы отличать их от операторов другой теории. Требуемое операторное отображение представлено в (17.88), однако теперь оно принимает вид

$$\begin{cases} x_0 \to \widetilde{q}_0 \\ q_0 \to \widetilde{x}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \to \widetilde{w} \\ w \to \widetilde{p} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_n \to -\widetilde{\alpha}_n \\ \overline{\alpha}_n \to \widetilde{\overline{\alpha}}_n \end{cases}.$$
 (17.89)

Для всех операторов, ассоциированных с 25-мерным пространством-временем, данное отображение является тождественным. Преобразования (17.89) согласуются с коммутационными соотношениями и переводят один гамильтониан в другой. Более того, мы явным образом видим, что они отображают одни операторы в другие, заданные на подобных пространствах и обладающие тождественными спектрами. Например, x_0 и q_0 живут на тождественных окружностях; p и \tilde{w} обладают одинаковым спектром. Отображение осцилляторов содержит знаковый фактор, не влияющий на N^{\perp} . Это отображение устанавливает физическую эквивалентность рассматриваемых теорий и доказывает, что Т-дуальность является точной симметрией теории свободных замкнутых струн, компактифицированной на окружность.

Задачи

Задача 17.1. Гамильтониан нулевой моды

Для изучения динамики компактной координаты X можно использовать действие, подобное (12.81):

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\int_{0}^{2\pi}d\sigma(\dot{X}\dot{X}-X'X').$$

Рассмотрим разложение струнной координаты на нулевые моды в секторе с числом намотки m:

$$X(\tau,\sigma)=x(\tau)+mR\sigma.$$

Найдите действие для $x(\tau)$. Вычислите гамильтониан и покажите, что результат идентичен выражению (17.56), соответствующему компактному измерению.

Задача 17.2. Подсчет безмассовых калибровочных полей

Рассмотрите струнную компактификацию, в которой k координат выбраны окружностями критических радиусов. Опишите возможные основные состояния этой теории и выпишите гамильтониан. Найдите число безмассовых векторных полей, возникающих в пространстве-времени меньшей размерности. Приведите полный список состояний, соответствующих этим полям.

Задача 17.3. Заряд намотанных струн

Описание нулевой моды струны с числом намотки ℓ задается соотношениями

$$X^{m}(\tau,\sigma) = x^{m}(\tau), \quad X(\tau,\sigma) = \ell R \sigma,$$
 (1)

где индекс *m* используется для нумерации струнных координат за исключением $X^{25} \equiv X$. Рассмотрим слагаемое (16.3) со взаимодействие струны с полем Кальба—Рамона:

$$S = -\int d\tau \, d\sigma \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} \, B_{\mu\nu}(X).$$

Вычислите слагаемые в S, в которых $B_{m,25} = -B_{m,25}$ сворачивается со струнной траекторией $x^{\alpha}(\tau)$. Как объяснялось в разделе 17.6, поле $B_{m,25}$ играет роль поля Максвелла в 25-мерном пространстве. Придите к выводу, что струнное состояние с намоткой, описываемой (1), обладает электрическим зарядом, пропорциональным ℓ .

► Задача 17.4. Компактификация на T^2 с постоянным полем Кальба—Рамона

Предположим, что каждая из координат x^2 и x^3 компактифицирована в окружность радиуса R. Соответствующие струнные координаты обозначаются X^r , при r = 2, 3. Более того, существует отличное от нуля поле Кальба—Рамона с вакуумным средним

$$\boldsymbol{B}_{23} \equiv \frac{1}{2\pi \alpha'} \, \boldsymbol{b},\tag{1}$$

где b — это безразмерная константа. Все остальные компоненты $B_{\mu\nu}$ равны нулю.

- (а) Постройте действие для $X^r(\tau, \sigma)$, добавив действие, аналогичное использованному в задаче 17.1, к действию из задачи 17.3.
- (б) Рассмотрите следующее разложение для нулевой моды координат

$$X^{r} = x^{r}(\tau) + m_{r}R\sigma, \quad r = 2, 3.$$

Покажите, что лагранжиан для $x^r(\tau)$ имеет вид

$$L^{*} = \frac{1}{2\alpha'} \left((\dot{x}^{2})^{2} + (\dot{x}^{3})^{2} \right) - \frac{\alpha'}{2} \left((w_{2})^{2} + (w_{3})^{2} \right) - b \left(\dot{x}^{2} w_{3} - \dot{x}^{3} w_{2} \right).$$
(3)

Как обычно, $w_r = m_r R/\alpha'$. Последнее слагаемое в (3) является полной производной, однако, как вы увидите в дальнейшем, оно оказывается важным в квантовой теории.

(в) Определите импульс, канонически сопряженный с x^r , вычислите гамильтониан и покажите, что он принимает вид

$$H = \frac{\alpha'}{2} ((p_2 + bw_3)^2 + (p_3 - bw_2)^2 + w_2^2 + w_3^2).$$

Проверьте, что гамильтониан приводит к правильным уравнениям движения. Заметьте, что условия квантования для импульсов имеют вид $p_r = n_r/R$.

(г) Несмотря на то что подробно рассматривались только нулевые моды, осцилляторное разложение для координат, как и ранее, остается справедливым. По аналогии с уравнением (17.32), выпишите подходящие выражения для координат $X^2(\tau, \sigma)$ и $X^3(\tau, \sigma)$. Объясните, почему оператор квадрата массы принимает вид

$$M^{2} = \left(\frac{n_{2}}{R} + b \frac{m_{3}R}{\alpha'}\right)^{2} + \left(\frac{n_{3}}{R} - b \frac{m_{2}R}{\alpha'}\right)^{2} + \left(\frac{m_{2}R}{\alpha'}\right)^{2} + \left(\frac{m_{3}R}{\alpha'}\right)^{2} + \frac{2}{\alpha'} \left(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2\right).$$
(5)

(д) Покажите, что связь $L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp} = 0$ приводит к соотношению

$$N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = n_2 m_2 + n_3 m_3. \tag{6}$$

- Задача 17.5. Дуальности при компактификации на T² с полем Кальба—Рамона В задаче 17.4 вы получили уравнения (5) и (6), определяющие спектр компактификации на «квадратный» тор T² радиуса R с полем Кальба—Рамона B₂₃ = <u>b</u> (покажите, что спектр не изменяется при следующих преобразованиях дуальности фоновых параметров R и b.
 - (а) Значение b изменяется как

$$b \rightarrow b' = b + \ell \frac{\alpha'}{R^2}, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$
 (1)

а R не изменяется. Из уравнения (1) следует, что b является *периодической* переменной. Пусть A обозначает площадь тора. Используйте (1) для демонстрации того, что параметр «потока» $f_B = B_{23}A$ является *угловой* переменной (т. е. $f_B \simeq f_B + 2\pi$). Для того чтобы доказать, что спектр не изменяется, вам следует найти, например, также как в (17.75), подходящую компенсирующую замену квантовых чисел. [Подсказка: $n_2 \rightarrow n_2 - lm_3$ является одной из искомых замен.]

(б) Значения R и b изменяются как

$$R \rightarrow R' = \frac{\alpha'}{R} \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad b \rightarrow b' = -b.$$
 (2)

При b = 0 это известное преобразование Т-дуальности для радиуса. Компенсирующая замена в этом случае сводится к ожидаемой $n_r \leftrightarrow m_r$. [Подсказка: вычисления упрощаются, если сначала разложить (5).]

(в) $b \to -b$, при неизменном *R*. В качестве компенсирующей замены квантовых чисел используйте $m_r \leftrightarrow -m_r$. Какую дополнительную замену по отношению к осцилляторам необходимо сделать, чтобы соотношение (6) оставалось выполненным?

В задаче 26.3 отождествлениям из (1) и (2) дана геометрическая интерпретация.

Глава 18

Т-дуальность открытых струн

Т-дуальность связывает мир, в котором одно из пространственных измерений на Dp-бране является окружностью, с выглядящим иначе, но эквивалентным миром, в котором D(p-1)-брана имеет фиксированное положение на окружности дуального радиуса. В первом мире открытые струны могут иметь импульс вдоль окружности, однако нет состояний намотки, в то время как во втором мире импульс вдоль дуальной окружности отсутствует, но, как мы увидим, возникают состояния намотки. С помощью калибровочных преобразований Максвелла будет показано, что контурный интеграл от калибровочного поля на окружности имеет периодические значения. Голономия этого калибровочного поля вдоль компактного направления Dp-браны связана через T-дуальность с угловым положением D(p-1)-браны на дуальной окружности.

18.1. Т-дуальность и D-браны

Давайте рассмотрим распространение открытых струн в пространстве-времени, у которого одно пространственное измерение свернуто в окружность. Предположим, что имеется D25-брана, заполняющая все пространство, так что концы открытых струн могут свободно двигаться по всему пространству. Как и ранее, мы выбираем измерение x^{25} компактифицированным:

$$x^{25} \simeq x^{25} + 2\pi R. \tag{18.1}$$

Все координаты открытых струн, включая X^{25} , удовлетворяют граничным условиям Неймана на обоих концах, так что все они имеют тип NN. В присутствии компактного измерения замкнутые струны обладают фундаментально новыми состояниями: они могут наматываться на компактное измерение и поэтому не могут быть стянуты в точку. Концы открытых струн на заполняющей все пространство D-бране могут двигаться повсеместно и поэтому открытые струны всегда могут быть стянуты в точку. У открытых струн нет фундаментально новых состояний в присутствии компактного измерения. Импульс открытой струны в направлении x^{25} квантуется: $p^{25} = n/R$, что добавляет в квадрат массы струны слагаемое n^2/R^2 . Число намотки w^{25} отсутствует.

Теперь рассмотрим открытую струну в другом пространстве, в котором также имеется заполняющая все пространство D25-брана и компактифицированное направление x^{25} , однако радиус компактификации равен $\tilde{R} = \alpha'/R$. Из Т-дуальности следует, что в случае замкнутых струн физика этих двух пространств



Рис. 18.1. Схематично представлена D24-брана, x^{25} — координата в ортогональном направлении, свернутая в окружность. Открытая струна слева намотана на компактное измерение и не является стягиваемой, так как ее концы должны оставаться фиксированы на D24-бране. Открытая струна справа может быть стянута

неразличима. Однако в этом новом пространстве импульс открытых струн квантуется как $p^{25} = nR/\alpha'$, и тем самым возникает слагаемое в квадрате массы, равное $n^2 R^2/{\alpha'}^2$. Очевидно, что спектр такой теории открытых струн не совпадает со спектром исходной теории открытых струн на окружности радиуса R. Это означает, что открытые струны на D25-бране чувствуют разницу между компактификацией с радиусом R и компактификацией с радиусом $\tilde{R} = \alpha'/R$. Повидимому, появление открытых струн противоречит идее T-дуальности.

Тем не менее существует решение этой проблемы, которое сохраняет Т-дуальность даже в присутствии открытых струн. Мы увидим, что Т-дуальность связывает пространство-время с радиусом компактификации R и D25-брану, с одной стороны, и пространство-время с радиусом компактификации $\tilde{R} = \alpha'/R$ и D24-брану, с другой стороны! Если D25-брану в исходном мире заменить D24-браной в дуальном мире, то физика остается одной и той же, как для открытых, так и для замкнутых струн. В дуальном мире x^{25} — это направление с условиями Дирихле для D24-браны, и соответствующая координата открытой струны имеет тип DD. Примем, что значение $x^{25} = 0$ соответствует положению браны вдоль компактного направления.

В дуальном мире все концы открытых струн должны оставаться прикрепленными к точкам с $x^{25} = 0$. В итоге возникают новые конфигурации открытых струн, которые не могут быть стянуты в точку. Например, открытая струна, натянутая от $x^{25} = 0$ до $x^{25} = 2\pi \tilde{R}$, наматывается на компактное измерение один раз. Такая струна не может быть стянута в точку, потому что ее концы не могут свободно двигаться вдоль компактного измерения (см. рис. 18.1). Так же, как и замкнутые, открытые струны могут наматываться любое количество раз. Намотанные открытые струны напоминают замкнутые струны, однако они таковыми не являются: концы открытых струн не обязаны совпадать. Как правило, они лежат в различных точках на D24-бране.

В случае D25-браны, направление x^{25} которой являлось окружностью радиуса R, открытая струна приводила к квантованному импульсу p^{25} , но не наматывалась. После преобразования дуальности возникает D24-брана, а направление x^{25} является окружностью радиуса \tilde{R} . Граничное условие Дирихле приводит к условию нулевого импульса, но открытая струна теперь имеет намотку. Спектры открытых струн двух теорий совпадают при $\tilde{R} = \alpha'/R$, потому что состояния с ненулевым импульсом дают вклад в M^2 в первой теории, точно так же, как состояния с ненулевой намоткой открытых струн дают вклад в M^2 во второй теории. Допуская, что калибровочное преобразование модифицирует D-брану, мы можем сохранить T-дуальность в присутствии открытых струн.

T-дуальность вдоль
$$x^{25}$$
: (D25: R) $\rightarrow \left(D24: \widetilde{R} = \frac{\alpha'}{R} \right)$. (18.2)

Так как D-браны не влияют на спектр теории замкнутых струн, то имеется полная физическая эквивалентность.

Для того чтобы показать, как это явно работает, вспомним разложение (13.32) координаты открытой струны NN-типа. Для $X^{25}(\tau, \sigma) \equiv X(\tau, \sigma)$ запишем

$$X(\tau,\sigma) = x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n\cos n\sigma \ e^{-in\tau}.$$
 (18.3)

Также имеем

$$\alpha_0 = \sqrt{2\alpha'} p = \sqrt{2\alpha'} \frac{n}{R}, \qquad (18.4)$$

в силу того что импульс на окружности квантуется. Гамильтониан данной открытой струны равен

$$H = L_0^{\perp} - 1 = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + N^{\perp} - 1 = \alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + N^{\perp} - 1, \qquad (18.5)$$

где i = 2, ..., 24 и N^{\perp} содержит вклады осцилляторов α_n^i и α_n . Теперь разложим струнную координату X на левую и правую моды:

$$X(\tau,\sigma) = X_L(\tau+\sigma) + X_R(\tau-\sigma), \qquad (18.6)$$

где

$$X_{L} = \frac{1}{2}(x_{0} + q_{0}) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_{0}(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n} e^{-in\tau} e^{-in\sigma},$$

$$X_{R} = \frac{1}{2}(x_{0} - q_{0}) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_{0}(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n} e^{-in\tau} e^{+in\sigma}.$$
(18.7)

Константа q_0 произвольна. По аналогии с Т-дуальностью замкнутых струн, где мы изменяли знак правых мод в (17.85), определим

$$\overline{X}(\tau,\sigma) \equiv X_L - X_R, \qquad (18.8)$$

и затем найдем

$$\widetilde{X}(\tau,\sigma) = q_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}\sin n\sigma.$$
(18.9)
На самом деле это выражение является разложением для струны, натянутой от одной D-браны к другой. Вспоминая уравнения (15.45) и (15.47), получим

$$X^{a}(\tau,\sigma) = \bar{x}_{1}^{a} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{a}\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}^{n}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{a}e^{-in\tau}\sin n\sigma, \qquad (18.10)$$

И

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a = \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a). \tag{18.11}$$

Разница координат $\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a$ определяет расстояние между D-бранами в направлении с индексом *a*. Уравнения (18.9) и (18.10) полностью соответствуют друг другу. Если в (18.10) убрать верхний индекс *a* и отождествить константы \bar{x}_1 и q_0 , то снова получится разложение (18.9).

Прежде чем обсуждать физическую интерпретацию новой координаты \widetilde{X} , поясним, почему дуальность $X \to \widetilde{X}$ является симметрией теории открытых струн. Из нашего анализа X^a и \mathcal{P}^a в разделе 15.2 следует что \widetilde{X}^a и $\widetilde{\mathcal{P}}^a = \partial_\tau \widetilde{X}/(2\pi \alpha')$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям. Таким образом, преобразование дуальности не изменяет коммутационные соотношения, к тому же не изменяется и гамильтониан. Гамильтониан для сектора, содержащего X^a , получается из (15.49)

$$H = 2\alpha' p^{+} p^{-} = \alpha' p^{i} p^{i} + \frac{1}{2} \alpha_{0}^{a} \alpha_{0}^{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \alpha_{-n}^{a} \alpha_{n}^{a} \right] - 1.$$
(18.12)

Если убрать верхний индекс a, то соответствие означает, что полученное выражение является гамильтонианом, возникающим при взаимодействии \widetilde{X} и $\widetilde{\mathcal{P}}$ с другими струнными координатами. Тогда становится очевидным, что данный гамильтониан совпадает полученным ранее в (18.5).

Теперь можно перейти к обсуждению физической интерпретации. Так как концы струны зафиксированы, то струнная координата имеет тип DD: $\partial_{\tau} \tilde{X} = 0$ для $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$. При изменении σ от 0 до π открытая струна натягивается вдоль интервала:

$$\widetilde{X}(\tau,\pi) - \widetilde{X}(\tau,0) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0(\pi-0) = 2\pi\alpha' p = 2\pi \frac{\alpha'}{R} n = 2\pi \widetilde{R} n.$$
(18.13)

Так как *n* может принимать всевозможные целые значения, возникающая картина состоит из бесконечного набора D24-бран, отстоящих друг от друга на одинаковое расстояние $2\pi \tilde{R}$ вдоль направления x^{25} . Подобная конфигурация, на самом деле, физически эквивалентна одной D24-бране, расположенной в некоторой фиксированной точке окружности радиуса \tilde{R} .

Интересно отметить, что дуальность меняет местами граничные условия. Имеем

$$\partial_{\sigma} X = X'_L(\tau + \sigma) - X'_R(\tau - \sigma) = \partial_{\tau} \widetilde{X},$$
 (18.14)

и, аналогично

$$\partial_{\tau} X = X'_L(\tau + \sigma) + X'_R(\tau - \sigma) = \partial_{\sigma} \widetilde{X}.$$
 (18.15)

Из этих выражений со всей очевидностью следует, что при Т-дуальности граничные условия типов N и D меняются местами. Действительно, X имеет тип NN, a \tilde{X} тип DD. Суммируем полученные факты о Т-дуальности открытых струн следующим набором уравнений:

$$X = X_L + X_R, \quad \widetilde{X} = X_L - X_R, \quad \partial_\sigma X = \partial_\tau \widetilde{X}, \quad \partial_\tau X = \partial_\sigma \widetilde{X}.$$
 (18.16)

Дифференциальные соотношения (18.1) могут быть использованы для доказательства, на сей раз более концептуального, что в дуальном пространствевремени открытая струна наматывается на компактифицированное измерение:

$$\widetilde{X}(\tau,\pi)-\widetilde{X}(\tau,0)=\int_{0}^{\pi}d\sigma\,\partial_{\sigma}\widetilde{X}=\int_{0}^{\pi}d\sigma\,\partial_{\tau}X=2\pi\alpha'\int_{0}^{\pi}d\sigma\,\mathcal{P}^{\tau}=2\pi\alpha'p,$$

в соответствии с (18.13).

Настоящее рассмотрение тривиальным образом распространяется на тот случай, когда компактифицировано более чем одно измерение. Рассмотрим D25брану в мире, k пространственных измерений которого свернуты в окружности. Одновременное преобразование T-дуальности для каждой окружности приводит к физически эквивалентному миру, в котором есть D(25-k)-брана и каждая окружность заменяется на окружность дуального радиуса. Также нет необходимости начинать с D25-браны. Если мы свернем в окружность только одно измерение и обернем вокруг нее одно измерение D3-браны, то T-дуальность вдоль окружности приведет к D2-бране на пространстве-времени с окружностью дуального радиуса. В общем случае, если Dp-брана расположена вдоль компактного измерения, T-дуальность вдоль этого измерения приведет к D(p-1)-бране в некоторой фиксированной точке окружности дуального радиуса. Все полученные результаты справедливы по той простой причине, что T-дуальность вдоль заданного направления не влияет на координаты открытой струны, соответствующие другим направлениям.

Так как везде в нашем анализе используются координаты светового конуса, то T-дуальность, переводящая Dp-брану в D(p-1)-брану, установлена только при $p \ge 2$. Действительно, две или более пространственных координат должны быть типа N: X^1 , чтобы вместе с X^0 образовать координаты светового конуса X^{\pm} , и X вдоль компактного измерения. Тем не менее, верно, что T-дуальность имеет место и для p = 1. Если имеется D1-брана, намотанная на окружность, эквивалентная T-дуальная конфигурация приводит к D0-бране в некоторой точке окружности дуального радиуса. Этот результат может быть доказан с использованием метода ковариантного квантования открытых струн.

18.2. U(1)-калибровочные преобразования

В этом разделе мы подробно изучим калибровочные преобразования Максвелла. Конфигурации калибровочных полей, связанные калибровочными преобразованиями, физически эквивалентны. Таким образом, для нахождения воз-

470

можных неэквивалентных конфигураций калибровочных полей необходимо разобраться с калибровочными преобразованиями. Это представляется интересным, потому что по аналогии с изменением типов D-бран при T-дуальности, конфигурации калибровочных полей на D-бране также существенно изменяются. Наших предыдущих знаний о калибровочных преобразованиях оказывается недостаточно по причине двух осложняющих обстоятельств. Во-первых, мы будем рассматривать компактные измерения, для которых станут важны топологические эффекты. Во-вторых, будем учитывать эффект зарядов. Действительно, в разделе 16.3 мы выяснили, что конец открытой струны, лежащий на D-бране, выглядит как частица, заряженная относительно поля Максвелла, определенного на этой D-бране.

Калибровочные преобразования в присутствии зарядов анализируются элементарным образом: путем рассмотрения уравнения Шрёдингера для нерелятивистской заряженной частицы. В естественных единицах (h = c = 1) гамильтониан частицы массы m и с зарядом q (задача 5.4) равен

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi.$$
 (18.17)

Напомним, что в естественных единицах потенциалы имеют размерность массы либо обратной длины, а заряд q безразмерен. Тогда уравнение Шрёдингера принимает вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\nabla}{i} - q\vec{A}\right)^2\psi + q\Phi\psi. \qquad (18.18)$$

Для проверки калибровочной инвариантности классического движения точечной заряженной частицы (раздел 16.3) требовалось варьировать только электромагнитные потенциалы A_{μ} . Однако уравнение Шрёдингера не является инвариантным относительно изменения одного только вектор-потенциала. Калибровочное преобразование в квантовой механике вовлекает изменение как потенциалов, так *и* волновой функции. Вид уравнения Шрёдингера не изменяется при следующих одновременных преобразованиях:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi,$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp{(iq\chi)}\psi.$$
(18.19)

Здесь $\chi(x)$ является функцией пространства-времени. Можно легко показать (задача 18.1), что уравнение Шрёдингера для штрихованных переменных

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\nabla}{i} - q\vec{A}'\right)^2\psi' + q\Phi'\psi' \qquad (18.20)$$

эквивалентно исходному уравнению Шрёдингера (18.18). Для дальнейших целей пусть U(x) будет обозначать фазовый множитель новой волновой функции:

$$U(x) \equiv \exp(iq\chi(x)), \quad \psi' = U\psi.$$
 (18.21)

Теперь возникает ключевое изменение точки зрения. Прежде (а также в первых двух строках (18.19)), мы всегда записывали калибровочное преобразование вектор-потенциала в виде

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi, \qquad (18.22)$$

рассматривая $\chi(x)$ как калибровочный параметр. На самом деле мы увидим, что

калибровочный параметр — это
$$U(x)$$
. (18.23)

Несмотря на то что такая замена порой несущественна, она имеет последствия при наличии компактных измерений. Если U — это калибровочный параметр, то нам необходимо уметь записывать калибровочное преобразование для A_{μ} в терминах U. Для это цели удобным является объект $(\partial_{\mu}U)U^{-1}$, потому что

$$(\partial_{\mu}U)U^{-1} = (\partial_{\mu}\exp(iq\chi))\exp(-iq\chi) = iq\partial_{\mu}\chi.$$
(18.24)

Тогда следует, что (18.22) воспроизводится с помощью

$$A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{i}{q} (\partial_{\mu} U) U^{-1}.$$
 (18.25)

Теория Максвелла называется U(1)-калибровочной теорией, потому что калибровочный параметр U(x) можно рассматривать как элемент группы U(1) для любого x. Чтобы понять это, необходимо объяснить, что такое группа U(1) и почему она имеет отношение к калибровочным преобразованиям.

Группа U(1) изначально определяется как группа унитарных матриц размера 1×1 . Матрица 1×1 состоит из единственного элемента u, а условие унитарности, выражающее равенство эрмитово сопряженной и обратной матриц, приводит к $u^*u = 1$. Заключаем, что u — это комплексное число единичного модуля, так называемый фазовый множитель $u = \exp(i\theta)$. Множество комплексных чисел единичного модуля образует группу относительно умножения: произведение двух комплексных чисел единичного модуля дает комплексное число единичного модуля; умножение ассоциативно; в группе существует единичный элемент u = 1 и любое число ехр $(i\theta)$ в группе имеет обратное ехр $(-i\theta)$.

Для любой фиксированной точки x пространства-времени, калибровочный параметр U(x) является фазовым множителем; возможные значения U(x) находятся, таким образом, во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы U(1). Так как U зависит от точки пространства-времени, то на самом деле существует множество всех возможных U(1)-значных калибровочных параметров в каждой точке пространства-времени. О калибровочном параметре U лучше всего думать как о функции на пространстве-времени со значениями в группе U(1); каждой точке пространства-времени соответствует некоторый U(1)-групповой элемент.

Понятие группы имеет прямое отношение к калибровочной теории, потому как последовательно выполненные калибровочные преобразования сочетаются согласно правилу группового умножения. Мы потребуем, чтобы

комбинация калибровочного преобразования с параметром U_2 и последующего калибровочного преобразования с параметром U_1 являлась калибровочным преобразованием с параметром U_1U_2 .

Этот закон композиции легко проверяется для волновой функции ψ . Уравнение (18.21) означает, что данная последовательность калибровочных преобразований приводит к

$$\psi(x) \rightarrow U_2(x)\psi(x) \rightarrow U_1(x)(U_2(x)\psi(x)) = (U_1U_2)(x)\psi(x).$$
 (18.26)

Калибровочное поле A_{μ} нетривиально преобразуется относительно калибровочного преобразования, только если U не является константой. Закон композиции также справедлив для калибровочного поля:

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \frac{i}{q} (\partial_{\mu} U_2) U_2^{-1} \rightarrow A_{\mu} - \frac{i}{q} (\partial_{\mu} U_2) U_2^{-1} - \frac{i}{q} (\partial_{\mu} U_1) U_1^{-1}$$
 (18.27)

в силу того, что последние два слагаемых в правой части равны величине

$$-\frac{i}{q}(\partial_{\mu}(U_{1}U_{2}))(U_{1}U_{2})^{-1}.$$
 (18.28)

18.3. Петли Вильсона на окружностях

В этом разделе мы применим наши рассуждения о калибровочных преобразованиях к пространству с компактифицированным измерением. Мы обнаружим конфигурации калибровочных полей и явления, напоминающие классический эффект Бома-Ааронова. В эффекте Бома-Ааронова имеется соленоид, порождающий магнитное поле, ограниченное его внутренностью. Несмотря на то что заряженная частица, движущаяся снаружи соленоида, находится в области с $\vec{B} = 0$, вектор-потенциал \vec{A} снаружи соленоида влияет на волновую функцию частицы. Так как соленоид порождает ненулевое магнитное поле, векторпотенциал снаружи соленоида не может быть равным нулю. Например, в простой калибровке вектор-потенциал обходит вокруг соленоида. Вывод, следующий из эффекта Бома-Ааронова, состоит в том, что в квантовой механике существуют магнитные явления даже в тех областях пространства, где магнитные поля равны нулю. Это происходит потому, что вектор-потенциал отличен от нуля. В эффекте Бома—Ааронова физическим источником эффекта является, прежде всего, магнитное поле, потому как в его отсутствие интерференционные эффекты исчезли бы. Как мы вскоре увидим, при наличии компактного измерения, вектор-потенциал приводит к появлению физических явлений, даже если магнитное поле всюду равно нулю.

Упражнение-разминка 18.1. Покажите, что если магнитный поток внутри соленоида равен Ф = ∫ B · da, то ∮ A · dl = Ф для замкнутой кривой, окружающей соленоид. Какова ориентация этой кривой? Предположим, что пространственное измерение x компактифицировано в окружность. К тому же будем считать, что вектор-потенциал \vec{A} равен нулю за исключением компоненты вдоль окружности A_x . В этом случае магнитное поле везде равно нулю! На первый взгляд это может показаться странным, так как похожий вектор-потенциал накручивается вокруг магнитного поля соленоида. Однако, потому как «внутри» закольцованного измерения нет пространства, магнитное поле отсутствует. Как мы увидим, этот вектор-потенциал \vec{A} не является калибровочным артефактом; он оказывает влияние на физику частиц, как если бы соответствовал некоторому магнитному полю. В теории струн анализ подобной ситуации необходим для понимания того, как Т-дуальность действует на конфигурациях несовпадающих D-бран.

Рассмотрим ненулевую A_x , являющуюся константой, которая не зависит ни от каких координат, включая компактное измерение x. Может ли подобное поле существовать? Полевая конфигурация может существовать, если она является решением полевых уравнений теории. Константа A_x , со всеми остальными компонентами А_µ равными нулю, приводит к нулевому F_{µv}, который удовлетворяет уравнениям Максвелла без источников. Это решение можно интуитивно понять в трех пространственных измерениях. Рассмотрим соленоид радиуса r_0 , расположенный вдоль оси z. Если поток внутри соленоида $\Phi > 0$, то направление вектор-потенциала можно выбрать азимутальным, а его значение положить равным $\Phi/(2\pi\rho)$, где ρ — расстояние до оси соленоида. Данная конфигурация удовлетворяет всем уравнениям движения снаружи соленоида. Теперь представьте, что выбирается тонкий цилиндр $R < \rho < R + \epsilon$, где $R > r_0$ и ϵ бесконечно мало. На данном тонком цилиндре уравнения движения выполняются. Решение, соответствующее постоянному \vec{A} , намотанному на компактное измерение, получается выкидыванием всего пространства внутри и снаружи цилиндра и взятием предела $\epsilon \to 0$.

Аналогичные рассуждения объясняют, почему постоянное электрическое поле может наматываться на компактное измерение. Соотношение

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0 \tag{18.29}$$

возможно при условии, что Γ наматывается на компактное измерение. Такое электростатическое поле недопустимо в обычном пространстве. Для любой замкнутой кривой Γ в обычном пространстве существует поверхность S, границей которой является Γ . Тогда с помощью теоремы Стокса и уравнения Максвелла $\nabla \times \vec{E} = 0$, имеем

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = 0.$$
(18.30)

Однако, если Г накручивается на компактное измерение, то не существует поверхности, для которой Г является границей, и (18.30) более не выполняется. И снова существование калибровочных потенциалов, которые удовлетворяют всем необходимым уравнениям, является надежной опорой для дальнейшего анализа. Так как $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t$, то постоянное E_x в направлении x может быть получено из $A_x = -E_x t$. Данное калибровочное поле удовлетворяет всем необходимым полевым уравнениям.

Рассмотрим вектор-потенциал $A_x(x)$ вдоль компактного измерения x. Попытаемся классифицировать все физически неэквивалентные конфигурации. При калибровочном преобразовании A_x изменяется аналогично (18.19)

$$A_x \rightarrow A_x + \frac{\partial \chi}{\partial x}$$
 (18.31)

Можно подумать, что так как x и $x + 2\pi R$ соответствуют одной и той же точке, то параметр χ должен удовлетворять

$$\chi(x+2\pi R) \stackrel{?}{=} \chi(x). \tag{18.32}$$

Чтобы понять последствия данного возможного условия, рассмотрим контурный интеграл от вектор-потенциала вдоль окружности:

$$w \equiv q \oint dx A_x. \tag{18.33}$$

Этим выражением определяется безразмерная константа w, сопоставляемая калибровочному полю вдоль окружности. Также определим голономию W калибровочного поля:

$$W \equiv \exp(iw) = \exp\left(iq \oint dx A_x\right), \qquad (18.34)$$

Здесь W называется *петлей Вильсона*. В настоящем контексте соответствующая замкнутой кривой петля Вильсона на самом деле является вычисляемым фазовым множителем, который зависит от значений калибровочного поля вдоль кривой. После калибровочного преобразования (18.31) w переходит в w':

$$w' = q \oint dx \left(A_x + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = w + q \left(\chi(x_0 + 2\pi R) - \chi(x_0) \right), \quad (18.35)$$

где при интегрировании была выбрана некоторая произвольная точка отсчета на окружности x_0 . Если допустить условие периодичности (18.32), то w' = w. Как мы скоро увидим, данный подход не является правильным.

Наш анализ оказывается несостоятельным по причине нехватки воображения, а не из-за ошибки в вычислениях. Уравнение 18.32 имеет смысл, если $\chi(x)$ является фундаментальным калибровочным параметром. Однако в разделе 18.2 утверждалось, что калибровочным параметром является U(x). Если U — это калибровочный параметр, то на окружности он должен быть периодичным:

$$U(x+2\pi R) = U(x).$$
 (18.36)

Так как $U = \exp(iq\chi)$, то из предыдущего уравнения следует, что

$$q\chi(x+2\pi R)=q\chi(x)+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z},$$
(18.37)

либо, эквивалентным образом,

$$q(\chi(x+2\pi R)-\chi(x))=2\pi m.$$
 (18.38)

Отметим коренное отличие этого выражения от (18.32). Если U — это калибровочный параметр, то $\chi(x)$ достаточно быть почти-периодической функцией! Более того, возвращаясь назад к уравнению (18.35), мы видим, что

$$w' = w + 2\pi m.$$
 (18.39)

Таким образом, физическое содержание теории не меняется при замене w на $w + 2\pi m$. Мы пишем $w \simeq w + 2\pi m$, или

$$q \oint dx A_x \simeq q \oint dx A_x + 2\pi m.$$
 (18.40)

Как и раньше, данное уравнение может означать, что *w* определена на окружности единичного радиуса, либо что все физически неэквивалентные значения *w* принадлежат фундаментальной области

$$w = q \oint dx A_x \in [0, 2\pi). \tag{18.41}$$

Наиболее естественно считать, что *w* является углом. Таким образом, будем писать

$$\theta \equiv w = q \oint dx A_x. \tag{18.42}$$

Это важный результат. В присутствии компактных измерений контурные интегралы от вектор-потенциала становятся угловыми переменными. Калибровочные преобразования действуют как $\theta \to \theta + 2\pi m$. Мы видим, что в теории струн абстрактный угол θ имеет конкретную физическую интерпретацию. Стоит заметить, что петля Вильсона $W = \exp(i\theta)$ калибровочно-инвариантна. Калибровочно эквивалентный угол θ приводит к такой же голономии W.

Оказывается возможным явно выписать χ , которая не является однозначной величиной, но тем не менее приводит к однозначному U, потому что удовлетворяет (18.38). Существует много физически эквивалентных выборов, однако в простейшем случае χ является линейной функцией по отношению к компактной координате x:

$$q\chi = (2\pi m) \frac{x}{2\pi R} = \frac{mx}{R}.$$
 (18.43)

Согласно (18.38), при изменении x от 0 до $2\pi R$ величина $q\chi$ изменяется на $2\pi m$. Для такого выбора χ калибровочное преобразование сдвигает значение калиб-

476

ровочного поля на константу:

$$qA_x(x) \rightarrow qA_x(x) + \frac{m}{R}.$$
 (18.44)

Данное калибровочное преобразование означает, что можно провести отождествление

$$qA_x \simeq qA_x + \frac{m}{R}.\tag{18.45}$$

Для постоянного A_x возникает естественная реализация петли Вильсона. В этом случае (18.42) приводит к

$$qA_x = \frac{\theta}{2\pi R}.$$
 (18.46)

Присутствие петли Вильсона на окружности существенно изменяет поведение заряженной частицы. Для того чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-qA_x\right)^2\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$
(18.47)

При A_x , заданном (18.46), собственные значения энергии $\psi(x, t) = e^{-iEt}\psi(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\theta}{2\pi R}\right)^2\psi(x)=E\psi(x). \tag{18.48}$$

Волновая функция $\psi(x)$ должна быть периодической: $\psi(x + 2\pi R) = \psi(x)$. Таким образом, решения принимают вид $\psi_l(x) \sim \exp(i\ell x/R)$, где $\ell \in \mathbb{Z}$. Соответствующие уровни энергии равны

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{\ell}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2.$$
(18.49)

Отметим, что при $\theta \neq 0$ уровни энергии сдвигаются. В частности, при $\theta = 0$ вырождение между уровнями энергии $\pm \ell$ пропадает. Так как θ является угловой переменной, то при $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ уровни энергии должны оставаться неизмененными. Так как ℓ пробегает по всем \mathbb{Z} , легко можно видеть, что *набор* уровней энергии не меняется относительно такого преобразования. Сдвиг $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ компенсируется сдвигом $\ell \rightarrow \ell + 1$. Данное подтверждение того, что θ является естественной угловой переменной, укрепляет нашу веру, что U(x) — это фундаментальный калибровочный параметр. Если бы калибровочным параметром являлся χ , то все значения χ были бы калибровочно неэквивалентными.

(•) Упражнение-разминка 18.2. Рассмотрите калибровочное преобразование с χ , линейным по x, при котором $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Как оно преобразует ψ_l ?

18.4. Открытые струны и петли Вильсона

Теперь мы имеем все необходимое для изучении физики открытых струн на D-бранах, на которых живут калибровочные поля, характеризуемые голономиями. Т-дуальность обеспечит физическую интерпретацию угловой переменной, которая соответствует голономии калибровочного поля.

Рассмотрим Dp-брану, намотанную вокрут компактного измерения x. Это фактически означает, что x является одним из пространственных измерений вдоль Dp-браны. В мировом объеме данной Dp-браны находится некоторое калибровочное поле. Теперь давайте предположим, что это калибровочное поле таково, что $q \oint dx A_x$ принимает значение θ . Каково T-дуальное описание такой бранной конфигурации? Ранее мы выяснили, что в дуальном мире имеется D(p-1)-брана, расположенная в некоторой точке окружности дуального радиуса. Однако чему соответствует параметр θ ? Наиболее очевидная догадка оказывается верной: θ параметризует положение D(p-1)-браны на дуальной окружности! Это придает конкретный смысл некогда формальной угловой переменной; данная ситуация показана на рис. 18.2.

Каковы подтверждения подобной интерпретации θ ? Во-первых, периодичность имеет физический смысл, потому что D(p-1)-брана в точке θ — это то же самое, что D(p-1)-брана в точке $\theta + 2\pi$. Во-вторых, так же, как положение D(p-1)-браны на окружности не влияет на спектр заканчивающихся на ней открытых струн, и петли Вильсона не влияют на спектр открытых струн с концами, расположенными на Dp-бране. Это не совсем очевидно, учитывая, что на самом деле петли Вильсона влияют на заряженные частицы. Однако, в случае струн их концы обладают противоположными зарядами, так что в целом струна остается нейтральной и действие петли Вильсона не дает результата. Когда D-брана наматывается на компактное измерение, квадрат массы состояний открытых струн имеет вид

$$M^2 = p^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1), \quad p = \frac{\ell}{R},$$
 (18.50)

где p — импульс, квантующийся в компактифицированном направлении, и N^{\perp} — соответствующий оператор числа состояний. Для частицы добавление петли Вильсона приводило к замене в гамильтониане p на p - qA. Как мы видели в (18.49), это означало, что

$$\frac{\ell}{R} \to \frac{\ell}{R} - \frac{\theta}{2\pi R}.$$
(18.51)

Что же происходит со струнами? Два конца струны имеют противоположные заряды, и если оба конца лежат на одной Dp-бране, эффект пропадает: $p \rightarrow p-qA+qA = p$. Чтобы дать прямое доказательство интерпретации θ , необходимо иметь более чем одну D(p-1)-брану на окружности. В этом случае начинает играть роль взаимное расположение бран.

Рассмотрим поэтому струну, натянутую между двумя Dp-бранами. Эта ситуация отображена на рис. 18.3. Каждая D-брана имеет свое собственное поле Максвелла. Предположим, что отрицательно заряженный конец лежит на первой



Рис. 18.2. Намотанная на окружность Dp-брана с вектор-потенциалом вдоль окружности. В T-дуальном описании контурный интеграл этого калибровочного поля становится углом, параметризующим положение D(p-1)-браны на дуальной окружности



Рис. 18.3. Две намотанные на окружность D*p*-браны, одна с параметром θ_1 , другая с параметром θ_2 . В Т-дуальной картине имеется две D(p-1)-браны, отстоящие друг от друга на угол $\theta_2 - \theta_1$

D*p*-бране, с соответствующей петлей Вильсона θ_1 , а положительно заряженный конец лежит на второй **D***p*-бране, с соответствующей петлей Вильсона θ_2 . Тогда импульс сдвигается с *p* до $p + qA_1 - qA_2$, и поэтому

$$\frac{\ell}{R} \to \frac{\ell}{R} - \frac{\theta_2}{2\pi R} + \frac{\theta_1}{2\pi R}.$$
(18.52)

В итоге, формула для квадрата массы принимает вид

$$M^{2} = \left(\frac{2\pi\ell - (\theta_{2} - \theta_{1})}{2\pi R}\right)^{2} + \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1), \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$
(18.53)

При $\theta_1 = \theta_2$ эффекты от голономий сокращаются. Как указывалось выше, то же самое происходило бы и в случае, если оба конца струны были бы расположены на одной бране. Т-дуальная конфигурация для двух Dp-бран с различными параметрами θ состоит из двух D(p - 1)-бран с различными положениями, соответ-

ствующими двум заданным значениям θ . Можно легко проверить, что массовые формулы не противоречат друг другу. Например, рассмотрим состояния струны $\ell = 0$, натянутой между двумя D*p*-бранами:

$$M^{2} = \left(\frac{\theta_{2} - \theta_{1}}{2\pi R}\right)^{2} + \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1).$$
 (18.54)

Если, как мы утверждаем, θ_1 и θ_2 являются физическими утлами, то в дуальном мире должны существовать две D(p-1)-браны, такие, что утловая разность между ними составляет $\theta_2 - \theta_1$. Квадрат массы струны, натянутой между двумя такими бранами получает вклад, равный длине струны, умноженной на ее натяжение, все в квадрате:

$$M^{2} = \left((\theta_{2} - \theta_{1}) \widetilde{R} T_{0} \right)^{2} + \frac{1}{\alpha'} (N^{\perp} - 1) =$$

$$= \left((\theta_{2} - \theta_{1}) \frac{\alpha'}{R} \frac{1}{2\pi \alpha'} \right)^{2} + \frac{1}{\alpha'} (N^{\perp} - 1) =$$

$$= \left(\frac{\theta_{2} - \theta_{1}}{2\pi R} \right)^{2} + \frac{1}{\alpha'} (N^{\perp} - 1), \qquad (18.55)$$

что в точности соответствует (18.54). Это является строгим доказательством физической интерпретации параметра θ (18.42) как углового положения D-бран в T-дуальной конфигурации.

В задачах этого разделу рассматриваются два важных момента, относящихся к Т-дуальности. Первый касается того факта, что струнная константа взаимодействия обязана изменяться при преобразовании Т-дуальности вдоль окружности. В разделе 3.9. мы выяснили, что постоянная Ньютона в эффективном пространстве меньшей размерности связана с многомерной постоянной Ньютона и объемом дополнительных измерений. Этот объем изменяется при Т-дуальности, так как окружность изменяет свой радиус. Более того, многомерная постоянная Ньютона фиксируется значением струнной константы связи и α' (см. раздел 13.4). Если Т-дуальность является симметрией теории, то маломерная постоянная Ньютона должна оставаться неизменной. Помимо всего прочего, эта постоянная наблюдаема. Если константа струнного взаимодействия — это g, а радиус дуализуемой окружности — R, то после преобразования Т-дуальности значение \tilde{g} константы струнного взаимодействия равно (задача 18.5)

$$\widetilde{g} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g. \tag{18.56}$$

Второй момент связан с натяжением D-бран (задача 18.6). Для неподвижной струны произведение натяжения и длины равно массе. D-браны также обладают натяжением и массой. Для неподвижной Dp-браны ее масса равна произведению натяжения T_p и объема V_p . При нашем рассмотрении D-бран предполагалось. что они являются фиксированными гиперплоскостями, или очень тяжелыми

объектами и влияние открытых струн, прикрепленных к ним, исчезающее мало. На самом деле натяжение T_p Dp-браны стремится к бесконечности по мере того, как константа струнного взаимодействия $g \to 0$. То, что масса намотанной D-браны не должна изменяться при T-дуальности позволит доказать, что

$$T_p(g) = \frac{\tau_p}{g} \quad \text{is} \quad T_{p-t}(g) = T_p(g) \cdot 2\pi \sqrt{\alpha'}. \tag{18.57}$$

Здесь τ_p является *p*-зависимой, но *g*-независимой константой, содержащей подходящую степень α' для того, чтобы у натяжения была правильная размерность. Второе соотношение означает, что натяжения всех D-бран связаны друг с другом. Точное определение константы струнного взаимодействия (13.85) обычно выбирается таким образом, чтобы натяжение D1-браны имело вид

$$T_1(g) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{g}.$$
 (18.58)

Эта формула напоминает струнное натяжение $1/(2\pi\alpha')$, в котором нет множителя 1/g. С помощью (18.57) теперь определяются натяжения всех D-бран. Эта формула также дает правильное значение для D0-браны, чье натяжение просто совпадает с ее массой.

Упражнение-разминка 18.3. Получите явное р-зависимое выражение для T_p(g). Убедитесь, что оно имеет правильную размерность.

Задачи

Задача 18.1. Калибровочная инвариантность уравнения Шрёдингера

Для доказательства калибровочной инвариантности уравнения Шрёдингера полезно заметить, что для любой функции M и для U, определенной как в (18.21), имеем

$$\left(rac{
abla}{i}-qec{A}-q
abla\chi
ight)UM=U\left(rac{
abla}{i}-qec{A}
ight)M.$$

Докажите этот результат и используйте его для демонстрации того, что (18.20) эквивалентно (18.18).

Задача 18.2. Явная Т-дуальность струнных DN-координат

Рассмотрим разложение (15.72) для струнной ND-координаты. Найдите по отдельности правые и левые моды, постройте дуальную координату, и проверьте, что она имеет тип DN.

Задача 18.3. Т-дуальная инвариантность гамильтониана

Найдите соотношения между $\dot{X} \pm X'$ и $\tilde{X} \pm \tilde{X}'$. С помощью полученных соотношений и (15.8), объясните, почему струнный гамильтониан не изменяется относительно T-дуальности.

Задача 18.4. Т-дуальность Dp-браны с электрическим полем

Предположим, что в мировом объеме Dp-браны, намотанной на окружность радиуса R в направлении x, имеется постоянное электрическое поле. Найдите зависящую от времени компоненту A_x , которая соответствует данному электрическому полю. Используя голономию на T-дуальном к Dp-бране объекте, по-кажите, что T-дуальным объектом к Dp-бране с электрическим полем является D(p-1)-брана на окружности дуального радиуса, движущаяся вдоль окружности со скоростью $v_x = 2\pi \alpha' E_x$. В качестве дополнительной проверки правильности вашего анализа рассмотрите исходную Dp-брану с электрическим полем и вычислите, за какое время D(p-1)-брана обходит всю дуальную окружность.

Задача 18.5. Т-дуальность и струнное взаимодействие

Рассмотрим *D*-мерное пространство-время с *p* закрученными пространственными измерениями. Одним из них является окружность радиуса *R*, а остальные образуют пространство объема V_{p-1} . Пусть \hat{G} обозначает постоянную Ньютона в эффективном (D - p)-мерном пространстве-времени. Выпишете выражение для \hat{G} через константу струнного взаимодействия *g*, а также α' , *R* и V_{p-1} . Теперь представьте, что выполняется T-дуальность вдоль окружности радиуса *R*. Покажите, что для инвариантности \hat{G} необходимо изменение струнной константы взаимодействия *g* в \tilde{g} , согласно (18.56).

Задача 18.6. Натяжение D-браны и соотношения спуска

Натяжение T_p D*p*-браны можно записать в виде $T_p = \tau_p h(g)$, где g — это струнная константа связи, h — функция, которая будет определена далее, и τ_p *p*-зависимая константа, содержащая подходящую степень α' . Рассмотрим условия задачи 18.5 и представим, что D*p*-брана наматывается вокруг компактных измерений. Масса этого объекта, который воспринимается наблюдателем из пространства меньшей размерности как точечная частица, не должна меняться относительно T-дуальности. С помощью этого условия покажите, что

$$au_p h(g) 2\pi R = au_{p-1} h\left(\frac{g\sqrt{\alpha'}}{R}\right).$$

Используйте полученное уравнение для доказательства (18.57). Первое соотношение в (18.57) приводит к втягиванию p-независимой константы в определение τ_p .

482

Глава 19

Электромагнитные поля на D-бранах

В этой главе мы начинаем изучение D-бран, в мировом объеме которых содержатся электрические либо магнитные поля, концы открытых струн взаимодействуют с этими электромагнитными полями. С помощью методов T-дуальности мы покажем, что D-брана с электрическим полем эквивалентна движущейся D-бране без электрического поля. Условие того, что D-брана не может двигаться быстрее, чем свет, приводит к тому, что напряженность электрического поля не может превышать определенного максимального значения. Мы также покажем, что Dp-брана с магнитным полем посредством T-дуальности эквивалентна наклоненной D(p - 1)-бране без магнитного поля. Альтернативно, магнитное поле на Dp-бране можно рассматривать как поле, порожденное некоторым распределением разреженных D(p - 2)-бран.

19.1. Взаимодействие полей Максвелла и открытых струн

Среди квантовых состояний открытых струн, прикрепленных к D-бране, мы обнаружили состояния фотона с поляризациями и импульсом вдоль D-бранных направлений. Поэтому мы заключили, что в мировом объеме D-браны находится поле Максвелла. Существование поля Максвелла на самом деле являлось необходимым условием для сохранения калибровочной инвариантности взаимодействия поля Кальба—Рамона со струной в присутствии D-браны. Мы также выяснили, что концы открытых струн обладают электрическим зарядом.

Так как любая D-брана обладает полем Максвелла, с физической точки зрения разумно ожидать, что могут существовать фоновые электромагнитные поля: вполне возможны электрические или магнитные поля, которые пронизывают D-брану. Если бы Вселенная была мировым объемом D-браны, то взаимодействующее магнитное поле являлось бы примером фонового поля. О фоновых полях принято думать как о решениях классических полевых уравнений. С исторической точки зрения, теория электромагнитного поля первоначально изучалась в присутствии известных фоновых полей, таких как магнитное поле Земли либо статическое электрическое поле заряда. Изучение этих и других фоновых полей привело к набору классических уравнений — уравнений Максвелла, которые воспроизвели их в виде классических решений. Со временем физики разработали квантовую теорию электромагнитного поля, и эта теория предсказывает фотонные состояния. Отметим, что открытие теории электромагнитного поля в рамках теории струн происходит в обратном порядке. Мы обнаружили квантовые состояния струны, которые могли бы быть отождествлены с фотонными состояниями, и посредством анализа уравнения Шрёдингера, которому удовлетворяют данные квантовые состояния, мы воспроизвели классические уравнения электромагнитного поля. А теперь мы хотим изучить фоновые электромагнитные поля!

Возможные фоновые поля могут быть проверены на предмет того, совместимы ли они с теорией струн. Как мы предварительно обсуждали в конце раздела 16.1, для этого необходимо заново проквантовать струну, учитывая эффекты от возможного присутствия фоновых полей. Если квантование проходит успешно, то можно сделать вывод, что возможные фоновые поля допустимы в теории струн. Помимо всего, успешное квантование приводит к самосогласованному распространению квантовых состояний струны на данном фоне. Несмотря на то что все выполненные до сих пор квантования применимы к струнам только в отсутствии нетривиальных фоновых полей, мы уже изучили следствия по-крайней мере одного фонового поля. Квантование замкнутых струн привело к появлению состояний Кальба-Рамона, и, поскольку замкнутые струны не привязаны к D-бранам, мы пришли к выводу, что поля Кальба—Рамона определены во всем пространстве. Наши предыдущие рассуждения являлись, таким образом, анализом нетривиальных фоновых полей Кальба—Рамона. При этом мы ввели в струнное действие новое слагаемое, описывающее взаимодействие струны с фоновыми полями Кальба—Рамона (см. (16.3)). Кроме простого случая, рассмотренного в задаче 17.4, квантование теории замкнутых струн, дополненной новым слагаемым не проводилось. Вместо этого было рассмотрено, к каким последствиям для движения струны и калибровочной инвариантности приводит новое взаимодействие.

В этой главе мы изучаем влияние электромагнитных фоновых полей на открытые струны. Мы не будем погружаться в подробности квантования; вместо этого будем считать, что квантование происходит самосогласованным образом (для рассматриваемых фоновых полей это действительно так). В данном разделе мы выводим уравнения движения открытых струн в присутствии фоновых электромагнитных полей, после чего воспользуемся методами Т-дуальности для получения новых физических результатов. Обсуждение электромагнитных полей на D-бране будет продолжено в главе 20, в которой будет показано, что их поведение описывается нелинейной электродинамикой Борна— Инфельда.

В главе 16 мы выяснили, как описывать взаимодействие полей Максвелла со струнами. Концы струны взаимодействуют с потенциалом Максвелла A_m тем же способом, что и заряженные частицы. Слагаемые со взаимодействием были представлены в уравнении (16.54); добавляя их в действие струны, получаем

$$S = \int d\tau \, d\sigma \, \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \int d\tau A_m(X) \left. \frac{dX^m}{d\tau} \right|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \left. \frac{dX^m}{d\tau} \right|_{\sigma=0}.$$
 (19.1)

Здесь \mathcal{L} обозначает плотность лагранжиана Намбу—Гото. В принятых обозначениях, μ, ν, \ldots — это пространственно-временные индексы, изменяющиеся от 0 до d, а m, n, \ldots — это мировые индексы на бране, изменяющиеся от 0 до p. Например, индекс калибровочного потенциала A_m является мировым индексом

на бране. Индексы i, j, \ldots — это пространственные индексы на бране, изменяющиеся от 1 до p, и a, b, \ldots — это индексы направлений, нормальных к бране, изменяющиеся от p + 1 до d. Мы будем рассматривать только те фоновые поля, для которых напряженность электромагнитного поля F_{mn} постоянна. Если единственные ненулевые компоненты — это $F_{0i}(= -F_{i0})$, то фоновое поле является чисто электрическим. Если единственные ненулевые компоненты — F_{ij} , то фоновое поле является чисто магнитным. Калибровочные потенциалы для постоянного F_{mn} могут быть выбраны в виде

$$A_n(x) = \frac{1}{2} F_{mn} x^m.$$
 (19.2)

🕑 Упражнение-разминка 19.1. Убедитесь, что $\partial_m A_n - \partial_n A_m$ равно F_{mn} .

С учетом (19.2) действие S принимает вид

$$S = \int d\tau \, d\sigma \, \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} \left(X^m \partial_\tau X^n \bigg|_{\sigma=\pi} - X^m \partial_\tau X^n \bigg|_{\sigma=0} \right). \quad (19.3)$$

Для того чтобы найти уравнения движения, воспользуемся предыдущими обозначениями $\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^{\mu}$ и $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = \partial \mathcal{L} / \partial X^{\mu'}$. Отметим, что \mathcal{P}^{τ}_{μ} не является полным импульсом, сопряженным X^{μ} , потому что данная \mathcal{L} не содержит вкладов от концов струны и поэтому не является полной плотностью лагранжиана. Так как оба конца струны входят в струнное действие почти симметрично, вычислим вариацию действия, рассматривая только один конец струны $\sigma = \pi$:

$$\delta S = \int d\tau \, d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \partial_{\tau} \delta X^{\mu} + \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \partial_{\sigma} \delta X^{\mu} \right) + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} \left(\delta X^{m} \partial_{\tau} X^{n} + \delta X^{m} \partial_{\tau} X^{n} \right) \bigg|_{\sigma = \pi} + \dots, \qquad (19.4)$$

где многоточие указывает на вклады от другого конца струны $\sigma = 0$. Волновое уравнение $\partial_{\tau} \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} + \partial_{\sigma} \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = 0$ по-прежнему справедливо, но в концевых точках возникает новое условие связи. Единственное проявление электромагнитного поля состоит в изменении граничных условий. Можно определить граничные условие, сосредоточив внимание на слагаемых, содержащих вариации на концах струны. Так как полные производные по τ не влияют на уравнения движения, граничные вклады, требующие рассмотрения, имеют вид

$$\delta S = \int d\tau \, d\sigma \, \partial_{\sigma} \left(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \delta X^{\mu} \right) + \int d\tau \, \delta X^{m} F_{mn} \partial_{\tau} X^{n} \bigg|_{\sigma=\pi} + \dots \,. \tag{19.5}$$

На координаты, нормальные к бране, накладывается обычное граничное условие Дирихле $\delta X^a = 0$. Теперь, рассматривая вариации вдоль браны δX^m , находим

$$\delta S = \int d\tau \, \delta X^m \left(\mathcal{P}_m^{\sigma} + F_{mn} \partial_{\tau} X^n \right) \bigg|_{\sigma = \pi} + \dots \,. \tag{19.6}$$

Так как X^m — это координаты на бране, то соответствующие граничные условия отсутствуют: на вариации δX^m нельзя наложить никаких связей. В итоге,

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} + F_{mn} \partial_{\tau} X^n = 0$$
 при $\sigma = 0, \pi.$ (19.7)

Упражнение-разминка 19.2. Убедитесь, что (19.7) выполняется для $\sigma = 0$.

Для упрощения вида граничных условий необходимо выбрать частную калибровку. Наложим условия ортонормированности

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0,$$
 (19.8)

которые справедливы как для статичной калибровки, так и для калибровки светового конуса. Тогда имеем

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \,\partial_{\sigma} X_{\mu},\tag{19.9}$$

а граничное условие принимает вид

$$\partial_{\sigma} X_m - 2\pi \alpha' F_{mn} \partial_{\tau} X^n = 0, \quad \sigma = 0, \pi.$$
 (19.10)

Давайте кратко рассмотрим физику, определяемую данным граничным условием, в случае чисто магнитного поля. Так как $F_{0i} = 0$, для X^0 — граничное условие не меняется — это по-прежнему условие Неймана. С другой стороны, для пространственных измерений, вдоль которых направлено магнитное поле,

$$\partial_{\sigma} X_i - 2\pi \alpha' F_{ij} \partial_{\tau} X^j = 0, \quad \sigma = 0, \pi.$$
 (19.11)

Это граничное условие смешанного типа; оно не является ни условием Дирихле, ни условием Неймана. Предположим, что единственной ненулевой компонентой магнитного поля является $F_{23} = -F_{32} \equiv B$. Тогда координаты X_1 и X_i при i > 3удовлетворяют граничным условиям Неймана, а X_2 и X_3 удовлетворяют

$$\partial_{\sigma} X_2 - 2\pi \alpha' B \partial_{\tau} X^3 = 0,$$

$$\partial_{\sigma} X_3 + 2\pi \alpha' B \partial_{\tau} X^2 = 0.$$
(19.12)

Если *В* очень большое, то в каждом уравнении первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь. В этом случае приближенные граничные условия имеют вид

$$\partial_{\tau} X^2 = \partial_{\tau} X^3 = 0, \quad \sigma = 0, \pi.$$
 (19.13)

Когда $F_{23} = B$ становится бесконечно большим, движение концов струны вдоль направлений браны x^2 и x^3 прекращается! Струнные координаты X^2 и X^3 начинают удовлетворять граничным условиям Дирихле. Это похоже на то, как будто исходная Dp-брана теперь заполняется бесконечным множеством D(p-2)-бран. по одной для каждого возможного значения (x^2, x^3) . Концы струны лежат на D(p-2)-бранах и не могут изменять свое положение на (x^2, x^3) -плоскости. Если рассмотрение начинается с D2-браны, то движение концов струны вдоль браны полностью прекращается. Несмотря на то что данная интерпретация граничного условия выглядит несколько странной, в дальнейшем мы увидим, что на качественном уровне она верна.

19.2. D-браны с электрическими полями

В данном разделе мы рассмотрим D-брану с электрическим полем, которое находится в ее мировом объеме. Мы не будем изучать классические решения, описывающие движение открытой струны в этом случае (тем не менее, см. задачу 19.2); вместо этого, поведение электрических полей будет изучаться с помощью T-дуальности. Будем предполагать, что электрическое поле постоянно и направлено вдоль компактного измерения в мировом объеме Dp-браны, с помощью T-дуальности свяжем эту конфигурацию с другой конфигурацией, в которой D(p-1)-брана движется вдоль дуальной окружности. Похожий результат уже был нами получен в задаче 18.4, однако в этом разделе мы рассмотрим более общий случай. Ограничение скорости D(p-1)-браны скоростью света будет означать, что значение электрического поля на Dp-бране не может превышать критического значения — электрические поля на Dp-бране ограничены.

Рассмотрение будет происходить в три этапа. На первом этапе будет найден удобный способ написания граничных условий на концах струны. Затем этот же язык будет использован в уравнениях, связывающих Т-дуальные координаты. И наконец, выполнив преобразования буста и Т-дуальности, мы докажем эквивалентность рассмотренных выше конфигураций.

Рассмотрим **D**p-брану, намотанную на компактное измерение x^{25} радиуса R, и предположим, что вдоль этого направления брана обладает электрическим полем:

$$F_{25,0} = E_{25} \equiv E. \tag{19.14}$$

Давайте рассмотрим граничные условия струны. Единственно интересными направлениями являются X^0 и X^{25} , и из (19.10) следует, что

$$\frac{\partial_{\sigma} X_0 - 2\pi \alpha' F_{0,25} \partial_{\tau} X^{25} = 0,}{\partial_{\sigma} X_{25} - 2\pi \alpha' F_{25,0} \partial_{\tau} X^0 = 0.}$$
(19.15)

Используя (19.14), $X_0 = -X^0$ и записывая $X^{25} \equiv X$, находим

$$\partial_{\sigma} X^{0} - \mathcal{E} \partial_{\tau} X = 0,$$

$$\partial_{\sigma} X - \mathcal{E} \partial_{\tau} X^{0} = 0,$$
(19.16)

где безразмерное электрическое поле Е определено как

$$\mathcal{E} \equiv 2\pi \alpha' E. \tag{19.17}$$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы переписать граничные условия в более удобном виде. Объединим две переменные, X^0 и X, в вектор-столбец и будем

487

искать граничные условия в виде обратимых линейных соотношений между производными вектор-столбца. Производные ∂_{τ} и ∂_{σ} не подходят для этой цели. Например, граничное условие Неймана буквально требует равенства нулю производной вектор-столбца по σ и не является обратимым линейным соотношением между производными вектор-столбца по σ и по τ . Для получения соотношений желаемого вида, определим новые частные производные:

$$\partial_{+} \equiv \frac{1}{2}(\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}), \quad \partial_{-} \equiv \frac{1}{2}(\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}).$$
 (19.18)

Разрешая их относительно ∂_{τ} и ∂_{σ} , находим

$$\partial_{\tau} = \partial_{+} + \partial_{-}, \quad \partial_{\sigma} = \partial_{+} - \partial_{-}.$$
 (19.19)

Перепишем граничные условия (19.16) в терминах ∂_{\pm} и перенесем производные ∂_{+} и ∂_{-} в левую и правую части, соответственно:

$$\partial_{+}X^{0} - \mathcal{E}\partial_{+}X = \partial_{-}X^{0} + \mathcal{E}\partial_{-}X,$$

$$-\mathcal{E}\partial_{+}X^{0} + \partial_{+}X = \mathcal{E}\partial_{-}X^{0} + \partial_{-}X.$$
 (19.20)

Решение относительно $\partial_+ X^0$ и $\partial_+ X$ имсет вид

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{0}\\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathcal{E}^{2}}{1-\mathcal{E}^{2}} & \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^{2}}\\ \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^{2}} & \frac{1+\mathcal{E}^{2}}{1-\mathcal{E}^{2}} \end{pmatrix} \partial_{-}\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{0}\\ \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$
 (19.21)

Данное выражение является искомой формой граничных условий. Эти уравнения выполняются в граничных точках $\sigma = 0, \pi$. Отметим, что приведенная выше матрица имеет единичный детерминант. Более того, матричные элементы становятся сингулярными при $\mathcal{E} = \pm 1$.

Упражнение-разминка 19.3. Докажите соотношение (19.21).

На этом новом языке требуется выразить граничные условия Дирихле и Неймана, а также Т-дуальные соотношения. Если пара координат X^0 и X удовлетворяет граничным условиям Неймана $\partial_{\sigma} X^0 = \partial_{\sigma} X = 0$, то в терминах ∂_{\pm} эти условия имеют вид

$$\partial_+ X^0 = \partial_- X^0, \quad \partial_+ X = \partial_- X.$$
 (19.22)

либо, в матричном виде,

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \{X^0, X\} = \{N, N\}.$$
(19.23)

Таким образом, в терминах линейных соотношений, граничные условия Неймана приводят к единичной матрице. Если X^0 удовлетворяет условию Неймана, а \tilde{X} — условию Дирихле, то $\partial_{\sigma} X^0 = \partial_{\tau} \tilde{X} = 0$. Тогда, в терминах ∂_+ и ∂_-

$$\partial_+ X^0 = \partial_- X^0, \quad \partial_+ \widetilde{X} = \partial_- \widetilde{X}.$$
 (19.24)

либо, в матричном виде,

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ \widetilde{X} \end{pmatrix}$$
 при $\{X^0, \widetilde{X}\} = \{N, D\}.$ (19.25)

Ранее утверждалось (см. (18.1)), что Т-дуальная координата \tilde{X} получается изменением знака у правых мод в X:

$$X = X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma),$$

$$\widetilde{X} = X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma).$$
(19.26)

Тогда для производных ∂_{\pm} возникают простые соотношения.

Дуальные соотношения: $\partial_+ X = \partial_+ \widetilde{X}$, $\partial_- X = -\partial_- \widetilde{X}$. (19.27)

Так как T-дуальность меняет местами граничные условия Неймана и Дирихле, то (19.27) может быть использовано для получения друг из друга уравнений (19.23) и (19.25). Уравнения 19.27 выполняются при всех значениях σ , включая $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$.

Теперь можно вернуться к рассматриваемому вопросу. В разделе 18.1 было показано, что Dp-брана с одним измерением, намотанным на окружность радиуса R, является T-дуальной D(p-1)-бране, расположенной в некоторой точке окружности радиуса $\tilde{R} = \alpha'/R$. Наша задача — найти дуальное описание Dp-браны, которая, в дополнение к тому что она намотана на компактное измерение, обладает электрическим полем, направленным вдоль этого измерения. Граничные условия для такой Dp-браны задаются (19.21). Утверждается, что дуальным описанием данной конфигурации является D(p-1)-брана, движущаяся с постоянной скоростью вокруг дуального компактного измерения. Стратегия доказательства сводится к тому, чтобы показать, что T-дуальный объект для данной движущейся бранной конфигурации, описывается граничными условиями, совпадающими с (19.21).

Пусть S — покоящийся репер на окружности, вдоль которой движется D(p-1)-брана, и пусть S' — система покоя D(p-1)-браны (см. рис. 19.1). Репер S' движется относительно репера S с параметром буста $\beta = v/c$, где v — скорость браны. В репере S' D(p-1)-брана покоится, поэтому граничные условия для струн, оканчивающихся на Dp-бране, можно выразить через S' струнные координаты. Пусть X'^0 и \tilde{X}' обозначают струнные координаты в системе отсчета S' (штрих не является производной по σ !). Так как X'^0 удовлетворяет условию Неймана, а \tilde{X}' — условию Дирихле, то можно воспользоваться уравнением (19.25) и записать

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} X^{\prime 0}\\ \widetilde{X}^{\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_{-} \begin{pmatrix} X^{\prime 0}\\ \widetilde{X}^{\prime} \end{pmatrix}.$$
(19.28)

Нам требуются граничные условия в системе отсчета S, потому что именно в этой системе мы знаем как выполнить преобразование T-дуальности. Для нахождения



Рис. 19.1. Слева показана Dp-брана, намотанная на окружность радиуса R. Справа показана D(p-1)-брана, расположенная на дуальной окружности радиуса \tilde{R} . В системе отсчета S', которая движется относительно системы отсчета S, D(p-1)-брана покоится

граничных условий, воспользуемся лоренцевскими бустами

$$X^{\prime 0} = \gamma (X^0 - \beta \widetilde{X}),$$

$$\widetilde{X}^{\prime} = \gamma (-\beta X^0 + \widetilde{X}),$$
(19.29)

где X^0 и \tilde{X} — это струнные координаты в системе отсчета S, а $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. На матричном языке:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{\prime 0} \\ \boldsymbol{\tilde{X}}^{\prime} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{0} \\ \boldsymbol{\tilde{X}} \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{0} \\ \boldsymbol{\tilde{X}} \end{pmatrix}, \quad (19.30)$$

где введена постоянная матрица M. Подставим (19.30) в (19.28), заметим, что M коммутирует с частными производными и умножим обе стороны уравнения на M^{-1}

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} X^{0}\\ \widetilde{X} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \partial_{-} \begin{pmatrix} X^{0}\\ \widetilde{X} \end{pmatrix}.$$
 (19.31)

Это уравнение описывает граничные условия струны в системе отсчета S.

Теперь можно выполнить преобразование Т-дуальности для координат \tilde{X} . Используя дуальные соотношения (19.27), можно добавить еще одну матрицу и тогда \tilde{X} в левой части может быть выражено через X, а \tilde{X} в правой части может быть выражено через (-X):

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}.$$
(19.32)

490

Теперь небольшое вычисление приводит к

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{0}\\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta^{2}}{1-\beta^{2}} & \frac{2\beta}{1-\beta^{2}}\\ \frac{2\beta}{1-\beta^{2}} & \frac{1+\beta^{2}}{1-\beta^{2}} \end{pmatrix} \partial_{-}\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{0}\\ \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$
 (19.33)

Мы получили граничные условия открытых струн в теории, дуальной к движущейся D(p-1)-бране. Как и было обещано, они совпадают с условиями (19.21), которые были записаны для Dp-браны с электрическим полем, при условии, что

$$\mathcal{E} = 2\pi \alpha' E = \beta. \tag{19.34}$$

Таким образом, можно резюмировать основной результат:

D(p-1)-брана, движущаяся по окружности с параметром скорости β , является T-дуальной Dp-бране, которая намотана на дуальную окружность и обладает электрическим полем $\mathcal{E} = \beta$ вдоль направления окружности.

Далее, так как никакой объект с нетривиальной массой не может достичь скорости света, т.е. $\beta < 1$, находим, что электрическое поле имеет предел:

$$|E| = \frac{|\beta|}{2\pi\alpha'} < \frac{1}{2\pi\alpha'} = E_{\text{crit}}.$$
(19.35)

 E_{crit} обозначает критическое электрическое поле — максимальное значение электрического поля на D-бране (в отсутствие магнитных полей). Любопытно, что критическое электрическое поле совпадает с натяжением струны:

$$E_{\rm crit} = T_0. \tag{19.36}$$

Можно дать интуитивное объяснение этому равенству, рассматривая движение открытой струны в электрическом поле. Как мы видели, открытая струна обладает зарядами на концах со значениями ± 1 . На каждый конец струны (масса которого равна нулю) действуют две силы, которые должны друг друга компенсировать: электрическая сила величины E и эффективное натяжение $T_0(1 - v_{\perp}^2)^{1/2}$ (см. 7.15). При $E < T_0$ и некоторой скорости концевой точки v_{\perp}^2 силы могут вза-имно уравновеситься. При $E = T_0$ концы струны должны прекратить движение. Наконец, для $E > T_0$ силы на концах струны не смогут скомпенсироваться. Это рассуждение прекрасно проиллюстрировано в подробном анализе задачи 19.2.

19.3. D-браны с магнитными полями

Теперь исследуем свойства D-бран, в мировом объеме которых находятся магнитные поля. Как и прежде, основным инструментом изучения будет T-дуальность, и мы достигнем существенного понимания с помощью построения T-дуальной версии D-браны, которая обладает фоновым магнитным полем. Движение открытых струн в фоновом магнитном поле также представляется интерес-



Рис. 19.2. Dp-брана, расположенная на цилиндре с периметром $2\pi \overline{R}_3$. Выполняя для \overline{X}_3 преобразование Т-дуальности, получаем D(p-1)-брану, расположенную вдоль оси дуального цилиндра

ным, но по этому вопросу мы отсылаем читателя к задаче 19.5, где показано, что открытая струна порождает электрический дипольный момент в направлении, ортогональном ее движению; величина дипольного момента пропорциональна магнитному полю и импульсу струны.

Рассмотрим Dp-брану, у которой два измерения се мирового объема совпадают с плоскостью (x^2, \tilde{x}^3) . Предположим, что измерение \tilde{x}^3 компактифицировано в окружность радиуса \tilde{R}_3 , так что x^2 и \tilde{x}^3 вместе определяют цилиндр с длиной окружности $2\pi \tilde{R}_3$ (см. рис. 19.2). Координаты открытой струны будут обозначаться X^2 и \tilde{X}^3 , и они обе удовлетворяют граничному условию Неймана. Если выполнить преобразование Т-дуальности для струнной координаты \tilde{X}^3 , то дуальная координата X^3 будет определена на окружности радиуса $R_3 = \alpha'/\tilde{R}_3$. Координата X^3 удовлетворяет граничному условию Дирихле, поэтому возникает D(p-1)-брана, расположенная в фиксированной точке $x^3 = 0$ вдоль x^2 . Данная дуальная картина показана в правой части рис. 19.2. На дуальном цилиндре, D(p-1)-брана изображается в виде линии, параллельной оси цилиндра.

Теперь предположим, что на Dp-бране имеется отличное от нуля магнитное поле $F_{23} = B$. Что тогда происходит в дуальном мире? Оказывается, что D(p-1)-брана поворачивается на некоторый угол. В дуальном мире электрические поля проявляются как бусты, а магнитные поля как вращения! Чтобы продемонстрировать это, сначала выпишем граничные условия для открытых струн, заканчивающихся на Dp-бране с магнитным полем. Из (19.12) следует

$$\partial_{\sigma} X^2 - \mathcal{B} \partial_{\tau} \tilde{X}^3 = 0, \quad \partial_{\sigma} \tilde{X}^3 + \mathcal{B} \partial_{\tau} X^2 = 0,$$
 (19.37)

где безразмерное магнитное поле В определено как

$$\mathcal{B} \equiv 2\pi \alpha' B. \tag{19.38}$$

В терминах ∂_+ и ∂_- граничные условия принимают вид

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{2}\\ \boldsymbol{\tilde{X}}^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mathcal{B}^{2}}{1+\mathcal{B}^{2}} & \frac{2\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}^{2}} \\ -\frac{2\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}^{2}} & \frac{1-\mathcal{B}^{2}}{1+\mathcal{B}^{2}} \end{pmatrix} \partial_{-}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{2}\\ \boldsymbol{\tilde{X}}^{3} \end{pmatrix}.$$
 (19.39)



Рис. 19.3. В-брана расположена вдоль оси x'^2 , образующей с осью x^2 угол α ; Δx^2 является расстоянием вдоль ребра цилиндра, при прохождении которого В-брана один раз наматывается на компактное вертикальное измерение. Угол наклона α связан с магнитным полем на Т-дуальной D-бране

Данные граничные условия содержат все возможные варианты проявления магнитного поля. Уравнения движения для струнных координат являются обычными волновыми уравнениями, не изменяющимися в присутствии магнитного поля.

Упражнение-разминка 19.4. Покажите, что (19.39) следует из (19.37).

Теперь рассмотрим D(p-1)-брану, расположенную на цилиндре так, как показано на рис. 19.3. Данная брана наматывается на цилиндр по мере продвижения вдоль его ребра. Если бы x^3 не была компактифицирована, то наклоненная брана была бы физически эквивалентна горизонтальной бране. Однако, при компактификации x^3 наклон D-браны имеет последствия. Предположим, что магнитное поле *B* соответствует углу наклона α . Наша цель — найти зависимость α от *B*. Граничные условия для наклонной D-браны легко выражаются в системе координат x'^2 и x'^3 , развернутой относительно начальной на угол α . В этой системе отсчета D-брана совпадает с осью x'^2 . Так как X'^2 и X'^3 удовлетворяют, соответственно, граничным условиям Неймана и Дирихле, то применимо уравнение (19.25):

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^{\prime 2} \\ X^{\prime 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^{\prime 2} \\ X^{\prime 3} \end{pmatrix}.$$
(19.40)

Теперь для перехода к системе нештихованных координат, выполним поворот. Исходя из геометрии задачи, легко догадаться, какой будет подходящая матрица поворота:

$$\begin{pmatrix} X^{\prime 2} \\ X^{\prime 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \equiv R \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}, \quad (19.41)$$

где определена матрица поворота R. Тогда, возвращаясь к (19.40), находим

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}.$$
(19.42)

Теперь выполним преобразование дуальности, переводящее X^3 в \tilde{X}^3 . Это достигается добавлением еще одной матрицы в правую часть вышеприведенного уравнения:

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} X^{2}\\ \widetilde{X}^{3} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_{-} \begin{pmatrix} X^{2}\\ \widetilde{X}^{3} \end{pmatrix}.$$
 (19.43)

Перемножая матрицы, окончательно получаем

$$\partial_{+}\begin{pmatrix} X^{2}\\ \widetilde{X}^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \partial_{-}\begin{pmatrix} X^{2}\\ \widetilde{X}^{3} \end{pmatrix}.$$
 (19.44)

Теперь можно сравнить полученный результат с (19.39). Имеется очевидное сходство между двумя матрицами: в обоих случаях на диагонали стоят одинаковые элементы, а недиагональные элементы отличаются только знаком. Давайте найдем \mathcal{B} , используя диагональные элементы, после чего убедимся в правильности решения для недиагональных элементов. Имеем

$$\frac{1-\mathcal{B}^2}{1+\mathcal{B}^2}=\cos 2\alpha,\qquad(19.45)$$

что приводит к

$$\mathcal{B}^{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - (1 - 2\sin^{2}\alpha)}{1 + (2\cos^{2}\alpha - 1)} = tg^{2}\alpha,$$
(19.46)

и, таким образом, $\mathcal{B} = \pm \operatorname{tg} \alpha$. Позже мы проверим, что правильный выбор соответствует знаку минус, поэтому

$$\mathcal{B} = 2\pi \alpha' B = -\operatorname{tg} \alpha. \tag{19.47}$$

Нулевое магнитное поле не приводит к вращению, а для поворота D-браны на угол девяносто градусов требуется бесконечное магнитное поле. Наконец, можно воспользоваться найденным в (19.47) значением *В* для подтверждения того, что, как и ожидалось, недиагональные элементы в матрице граничных условий согласуются друг с другом:

$$\frac{2\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}^2} = -\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha} = -\sin 2\alpha, \qquad (19.48)$$

и знак в (19.47) выбран правильно. В силу того, что граничные условия полностью соответствуют друг другу, мы доказали, что наклоненная D-брана является дуальной версией D-браны с магнитным полем. Более того, обнаружено точное соответствие между углом α и магнитным полем **B**.

Чтобы лучше разобраться с этим вопросом, рассмотрим вектор-потенциалы в случае Dp-бран. Необходимо найти потенциалы A_2 и A_3 , приводящие к уравнению $F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = B$. Выберем

$$A_2 = 0, \quad A_3 = Bx^2. \tag{19.49}$$

Если взять $A_2 = -B\tilde{x}^3$ и $A_3 = 0$, то получится то же значение B, однако возникнут некоторые трудности, потому что \tilde{X}^3 не является хорошо определенной координатой.

Потенциал A_3 расположен вдоль компактного измерения и поэтому является периодической величиной (см. раздел 18.3). Из (18.45) при q = 1 следует, что

$$A_3 \simeq A_3 + \frac{n}{\tilde{R}_3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
(19.50)

Такое отождествление означает, что изменение A_3 не приводит ни к каким физическим эффектам, если данное изменение квантуется в единицах обратного радиуса \tilde{R}_3 . Отсюда следует, что линейный рост A_3 вдоль x^2 кодирует некоторую периодичность вдоль направления x^2 . Данная конфигурация должна быть инвариантной относительно смещения Δx^2 , удовлетворяющего

$$\Delta A_3 = B \Delta x^2 = \frac{n}{\widetilde{R}_3}.$$
 (19.51)

В дуальном мире у этой периодичности есть совершенно замечательная интерпретация. Используя дуальные переменные, вспоминая (19.47) и переобозначая $n \rightarrow -n$ для удобства, мы видим, что

$$\Delta x^2 = -\frac{nR_3}{\alpha'B} = -\frac{2\pi nR_3}{2\pi\alpha'B} = \frac{2\pi nR_3}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$
 (19.52)

Это уравнение удобно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n R_3}{\Delta x^2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{19.53}$$

Наименьшее смещение Δx^2 , которое приводит к повторению, соответствует n = 1:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi R_3}{\Delta x^2}.$$
 (19.54)

На рис. 19.3 можно видеть, что D-брана завершает намотку вокруг направления x^3 как раз после прохождения расстояния Δx^2 , т. к. расположена под утлом α . В этой дуальной картине все в точности повторяется каждый раз, как только D-брана завершает намотку на компактное измерение. Данный механизм приводит к периодичности калибровочного потенциала в исходной картине.

Так как все физические свойства повторяются вдоль оси x^2 , можно компактифицировать это направление в окружность радиуса R_2 , где $2\pi R_2$ является длиной наименьшего шага:

$$2\pi R_2 = \Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\operatorname{tg} \alpha}.$$
 (19.55)

Это приводит к тому, что цилиндр, вокруг которого наматывается D-брана, становится тором с радиусами R_2 и R_3 . D-брана, бывшая прежде бесконечно длинной, теперь имеет конечную длину. Она наматывается наискосок на фундаментальную область тора, которая на рис. 19.3 закрашена темным. Эквивалентным образом,



Рис. 19.4. D-брана, намотанная на тор с радиусами R_2 и R_3 ; фундаментальная область тора затемнена; D-брана наклонена на угол α такой, что при одном прохождении окружности x^2 , она три раза проходит окружность x^3

наматываясь один раз вокруг x^2 , она также наматывается один раз вокруг x^3 . В мире D*p*-браны также имеется тор с радиусами R_2 (так как в этом направлении не происходит преобразования T-дуальности) и \tilde{R}_3 .

Теперь предположим, что на торе, на который D-брана наматывается диагонально, угол α изменен таким образом, что

tg
$$\alpha = n \, \frac{2\pi R_3}{2\pi R_2} = n \, \frac{R_3}{R_2}$$
 при $n > 1.$ (19.56)

На рис. 19.4 показан случай n = 3. Уравнение 19.56 описывает ситуацию, в которой D-брана n раз наматывается вокруг направления x^3 , в то время как вокруг x^2 она наматывается один раз. В чем смысл целого числа n для дуального мира с магнитным полем? Чтобы выяснить это, вычислим полный магнитный поток Φ на торе. Данный поток это буквально произведение магнитного поля на площадь фундаментальной области:

$$\Phi = B(2\pi \widetilde{R}_3)(2\pi R_2). \tag{19.57}$$

Используя значение магнитного поля (19.47), записывая \tilde{R}_3 через R_3 , и используя (19.56), выражение для потока можно упростить:

$$\Phi = -\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2\pi\alpha'}\,\frac{2\pi\alpha'}{R_3}\,2\pi R_2 = -2\pi\,\frac{R_2}{R_3}\,\mathrm{tg}\,\alpha = -2\pi n. \tag{19.58}$$

Данное выражение означает, что магнитный поток квантуется! Так как *В* однородно, оно также должно квантоваться. С геометрической точки зрения, это кван-



Рис. 19.5. D-брана, наматывающаяся три раза вокруг малой окружности тора по мере того, как она движется вдоль большой окружности. В пределе, когда $a \to a', b \to b'$ и $c \to c'$, возникают три D-браны, намотанные на малую окружность, и одна D-брана, намотанная на большую окружность

тование возникает по той причине, что на заданном торе D-брана может наклоняться только на выделенные утлы, если соблюдается условие того, что D-брана должна замыкаться после одной намотки в направлении x^2 . Действительно, можно напрямую вывести квантование магнитного потока на торе (см. задачу 19.3), и нет необходимости предполагать, что магнитное поле является постоянным на торе. Что происходит, если магнитное поле в рассматриваемом контексте не является постоянным? Неоднородное, но статичное магнитное поле не является решением соответствующих уравнений электромагнитного поля и поэтому вопрос о T-дуальной конфигурации становится несколько неопределенным. Ожидается, что T-дуальная D-брана на дуальном торе будет некоторой кривой, а не прямой линией. Также, в силу натяжения браны, данная конфигурация не может быть статичной.

В некотором смысле, наклонная D(p-1)-брана, которая наматывается n раз вокруг x^3 по мере того как она один раз наматывается вокруг x^2 , принадлежит тому же классу, что и конфигурация из одной D(p-1)-браны, намотанной только в направлении x^2 и n D(p-1)-бран, намотанных только в направлении x^3 :

$$D(p-1)$$
-брана (вдоль x^2) и $n D(p-1)$ -бран (вдоль x^3). (19.59)

Рассмотрим рис. 19.5, на котором показан тор при n = 3. D-брана деформирована таким образом, что она более не является прямой линией. Большая часть траектории D-браны проходит горизонтально, за исключением намоток вокруг x^3 , которые теперь происходят чаще. Так как данной конфигурации можно достичь непрерывной деформацией исходной прямой D-браны, она обязана сохранять квантованный поток на дуальной бране, несмотря на то, что поле В вряд ли останется постоянным. В пределе, когда $a \to a', b \to b'$ и $c \to c'$, исходная D-брана превращается в одну горизонтальную D-брану и три вертикальные D-браны. В целом, возникает набор бран, указанный в (19.59). Конфигурация в (19.59) может быть статичной, так как эти браны на торе снова представляются прямыми линиями. Исходная конфигурация с наклонной D-браной и конечная конфигурация связаны процедурой деформации. Они не являются физически эквивалентными конфигурациями; вместо этого, они деформационно эквивалентны, что означает то, что они могут быть деформированы друг в друга. Точным математическим утверждением здесь является то, что кривые, определяющие две бранные конфигурации, гомотопически эквивалентны.

Теперь рассмотрим еще раз, преобразование Т-дуальности в направлении x^3 . Ранее Т-дуальность переводила наклонную D(p-1)-брану в Dp-брану с магнитным полем. На этот раз результат применения Т-дуальности к (19.59) другой. D(p-1)-брана вдоль x^2 становится Dp-браной в дуальном мире. Однако, nD(p-1)-бран в направлении x^3 становятся n D(p-2)-бранами, расположенными на торе в определенных фиксированных точках. Поэтому в дуальном мире имеется одна Dp-брана и n D(p-2)-бран:

$$Dp$$
-брана и $n D(p-2)$ -бран. (19.60)

Исходная Dp-брана с постоянным магнитным полем является деформационно эквивалентной Dp-бране, в мировом объеме которой находятся n D(p-2)-бран. Например, D2-брана с постоянным магнитным полем, характеризующимся потоком $2\pi n$, является деформационно эквивалентной D2-бране, в мировом объеме которой находятся n D0-бран. Деформация, переводящая вторую конфигурацию в первую, является процессом, в котором D0-браны растворяются на торе. Физическая картина очевидна: D0-браны на D2-бране представляют магнитное поле, равное нулю везде, кроме положений D0-бран, в которых оно имеет бесконечную величину, но конечный поток. Возможно, постоянное магнитное поле с таким же потоком и равномерно распределенное магнитное поле представляют растворенные D0-браны. Техническое следствие «растворенного» мира состоит в том, что итоговая конфигурация является некоторым связанным состоянием: ее энергия меньше, чем полная энергия составляющих D2- и D0-бран, взятых по отдельности. Как будет показано в задача 19.4, фактически складываются квадраты энергий. Сверхсильное магнитное поле можно рассматривать как D2-брану с бесконечным числом растворенных D0-бран. Именно эта картина возникала при непосредственном анализе граничных условий в конце раздела 19.1.

Задачи

Задача 19.1. Постоянные электромагнитные поля на D-бранах из постоянного на пространстве-времени поля B_{av}

Нам хотелось бы показать, что Dp-брана с постоянным фоновым электромагнитным полем \overline{F}_{mn} эквивалентна Dp-бране с $\overline{F}_{mn} = 0$, но находящейся в пространстве-времени с постоянным полем Кальба—Рамона $B_{mn} = \overline{F}_{mn}$. Индексы m, n являются индексами на бране.

- (a) Вернитесь в разделе 16.3 и рассмотрите ситуацию, когда $B_{mn} = \overline{F}_{mn}$ является не равным нулю постоянным полем, а $F_{mn} = 0$. Явно найдите калибровочный параметр, при котором преобразованные поля это $B_{mn} = 0$ и $F_{mn} = \overline{F}_{mn}$. Отметим, что, как и ожидалось, калибровочно-инвариантная напряженность поля \mathcal{F}_{mn} не изменилась.
- (б) Пусть В_{тп} это постоянное поле Кальба—Рамона. Рассмотрите действие (16.45) и покажите, что подынтегральное выражение является полной производной. Избавьтесь от всех полных производных по т и покажите, что для

открытых струн вклад дают полные производные по σ

$$S_B = \frac{1}{2} \int d\tau B_{mn} (X^m \partial_\tau X^n \big|_{\sigma=\pi} - X^m \partial_\tau X^n \big|_{\sigma=0}).$$

Сравните с (19.3) и прокомментируйте.

Задача 19.2. Движение открытой струны в постоянном электрическом поле

Рассмотрите движение открытой струны на фоне электрического поля величины $E = \mathcal{E}/(2\pi\alpha')$, направленного вдоль оси x^1 . При $\mathcal{E} \to 0$ движение сводится к жесткому вращению в плоскости (x^2, x^3) . Используйте струнные координаты $X^{\mu} = (X^0, X^1, \vec{X})$, где $\vec{X} = (X^2, X^3)$, все остальные координаты положены равными нулю. Классическое решение должно удовлетворять граничным условиям

 $\partial_{\sigma} X^{0} - \mathcal{E} \partial_{\tau} X^{1} = 0, \quad \partial_{\sigma} X^{1} - \mathcal{E} \partial_{\tau} X^{0} = 0, \quad \partial_{\sigma} \vec{X} = 0,$ (1)

а также волновым уравнениям и связям:

$$(\partial_{\tau}^2 - \partial_{\sigma}^2) X^{\mu} = 0, \quad \dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0.$$
 (2)

Мы ищем такое решение, при котором струна, вращаясь вокруг оси x^1 с угловой частотой ω , не ограничена плоскостью (x^2, x^3) . Постройте решение, проходящее через точку

$$(X^{0}, X^{1}, X^{2}, X^{3}) = \left(\alpha\tau, \beta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right), \gamma \cos \sigma \cos \tau, \gamma \cos \sigma \sin \tau\right).$$
(3)

- (a) Изучите уравнения (1) и (2) и выразите константы α , β и γ через ω и \mathcal{E} .
- (6) Найдите $\vec{X}(\tau, \sigma)$ и покажите, что скорость концов струны есть $v = \sqrt{1 \mathcal{E}^2}$. Также покажите, что струна протянута вдоль оси x^1 на расстояние $\Delta X^1 = \pi \mathcal{E}/\omega$.
- (в) Нарисуйте струну на плоскости (x^1, x^2) в момент времени t = 0. Покажите, что в своих концевых точках струна указывает в направлении электрического поля. Объясните это результат посредством проверки, что на концах струны эффективное струнное натяжение уравновешивает электрическую силу. Покажите, что в начале координат

$$\left.\frac{dX^2}{dX^1}\right|_{X^1=0} = -\sqrt{\frac{1}{\mathcal{E}^2}-1}.$$

Имеет ли это выражение смысл для $0 \le \mathcal{E} \le 1$? Опишите решение в пределе $\mathcal{E} \to 1$ при конечном ω .

(г) Докажите, что энергия струны

$$U = \int T_0 \, ds \, (1 - v_\perp^2)^{-1/2}$$

равна $\pi T_0/\omega$ для всех значений электрического поля.

499



Рис. 19.7. К задаче 19.2

На рис. 19.6 показаны три поверхности, заметаемые при движении открытых струн. Данные поверхности получены при $\mathcal{E} = 0,3, 0,6$ и 0,95. Постройте соответствующий график трех струн на плоскости (x^1, x^2) в момент времени t = 0, полагая $\omega = 1$. На рис. 19.7 показаны струны на плоскости (x^1, x^2) в момент времени t = 0 и спустя половину периода.

Задача 19.3. Квантование магнитного потока на 2-торе

В этой задаче вы покажете, что поток Φ магнитного поля на 2-торе квантуется: $\Phi = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Данное условие квантования возникает при попытке построить непротиворечивый вектор-потенциал. Конечно же, при этом предполагается, что калибровочной группой Максвелла является U(1) и, как объяснялось в задаче 18.2, калибровочный параметр $U = \exp(i\chi)$ (при $q = c = \hbar = 1$).

Рассмотрим 2-тор длины L_x вдоль оси x и длины L_y вдоль оси y. Пусть

$$F_{12}=\partial_x A_y-\partial_y A_x=B,$$

где В — это значение магнитного поля.

- (a) Предположим, что магнитное поле $B = B_0$ постоянно. Выберем $A_y(x, y) = B_0 x$ и $A_x = 0$. Заметим, что $A_y(x + L_x, y) \neq A_y(x, y)$. Допустим, что $A_y(x + L_x, y)$ является калибровочно эквивалентным $A_y(x, y)$. Покажите, что требование хорошей определенности на калибровочный параметр приводит к желаемому условию квантования.
- (б) Рассмотрим интеграл потока магнитного поля (необязательно постоянного), и воспользуемся теоремой Стокса для того, чтобы свести его к контурному интегралу от вектор-потенциала вокруг четырех сторон прямоугольника $0 \le x \le L_x$, $0 \le y \le L_y$. Для доказательства того, что данный магнитный поток должным образом квантуется, воспользуйтесь свойствами калибровочных преобразований контурных интегралов от калибровочных полей

► Задача 19.4. Растворенные D(p-2)-браны

Рассмотрим Dp-брану, намотанную на тор с радиусами R_2 и \tilde{R}_3 , обладающую магнитным полем с потоком $|\Phi| = 2\pi n$ (как в разделе 19.3). Другие p-2 измерений на бране намотаны на компактное пространство объема V_{p-2} . Положим, что константа струнного взаимодействия принимает значение g. Энергия такой конфигурации равна энергии T-дуальной конфигурации (дуализованной вдоль \tilde{R}_3), где D(p-1)-брана наматывается на дуальный тор. Покажите, что

$$E = T_{p-1}(\tilde{g})V_{p-2}\sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3 n)^2}, \qquad (1)$$

где \tilde{g} — это константа струнного взаимодействия в дуальной конфигурации. Теперь перепишите E в терминах переменных исходной картины с Dp-браной и магнитным полем, и покажите, что

$$E = \sqrt{M_p^2 + (nM_{p-2})^2},$$
 (2)

где M_p — это масса D*p*-браны, а M_{p-2} — это масса D(*p*-2)-браны. Объясните, почему данный результат показывает, что энергия *E* меньше, чем сумма энергий D*p*-браны и n D(*p*-2)-бран. Он подтверждает описание данной конфигурации в виде n D(*p*-2)-бран, *растворенных* внутри D*p*-браны.

Задача 19.5. Движение открытой струны в постоянном электрическом поле

Рассмотрим следующее разложение для пространственных координат открытой струны на мировом объеме D-браны с постоянным магнитным полем:

$$X_i(\tau,\sigma) = x_i + 2\alpha' (p_i \tau + 2\pi \alpha' F_{ij} p^j \sigma).$$
(1)

Очевидно, что координаты X_i являются решением волновых уравнений. Более того, положим

$$X^0 = 2\alpha' p^0 \tau. \tag{2}$$

- (a) При некотором вычислимом значении p^0 , которое вам следует определить, докажите, что уравнения (1) и (2) удовлетворяют: граничным условиям. (19.11), связи $\dot{X} \cdot X' = 0$ и связи $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$.
- (б) Пусть

$$\Delta X_i = X_i(\tau,\pi) - X_i(\tau,0)$$

означает «размах» струны. Убедитесь, что

$$\Delta X_i = (2\pi \alpha')^2 F_{ij} p^j$$
 и $p^i \Delta X_i = 0.$

Так как электрический диполь открытой струны — вектор, параллельный ее размаху (почему?), заключаем, что данный диполь перпендикулярен импульсу.

(в) Для движения в трех пространственных измерениях имеем $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$. Покажите, что

$$\Delta \vec{X} = (2\pi\alpha')^2 \vec{p} \times \vec{B}.$$

Дипольный момент ортогонален **B** и **p**.

(г) Пусть $\mathcal{B}_k = 2\pi \alpha' B_k$. Покажите, что скорость струны задается выражением

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{1 + \vec{B} \cdot \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{n})^2}},$$

где \vec{n} — это единичный вектор, направленный вдоль импульса. Заметим, что при $B_k \to 0$ имеем $|\vec{v}| \to 1$, так что скорость струны приближается к световой.

(д) В плоском пространстве скалярное произведение двух векторов *a* и *b* определяется как

$$ec{a}\cdotec{b}=a^ib^j\eta_{ij}=a^ib^i.$$

Теперь введем новое произведение *, определенное как

$$\vec{a} * \vec{b} = a^i b^j \vec{\eta}_{ij},$$
 где $\vec{\eta}_{ij} \equiv \eta_{ij} (1 + \vec{B} \cdot \vec{B}) - B_i B_j.$

Покажите, что уравнение массовой поверхности струны может быть записано в виде

$$-(p^0)^2 + \vec{p} * \vec{p} = 0.$$

Более того, покажите, что скорость струны удовлетворяет условию

$$\vec{v} * \vec{v} = 1.$$

Метрика $\bar{\eta}_{ij}$ называется метрикой открытой струны. Она является естественной в физике струн в присутствии магнитного поля. Для метрики открытой струны движение, изученное в этом разделе, имеет общие свойства с движением свободной открытой струны.

Глава 20

Нелинейная электродинамика и теория Борна—Инфельда

Вводятся нелинейные электродинамические теории, обобщающие линейную теорию Максвелла. Электродинамика Борна—Инфельда есть некоторая специальная теория нелинейной электродинамики с особенно хорошими свойствами. Она содержит максимальные электрические поля, а точечные заряды в ней имеют конечную электростатическую энергию. Мы воспользуемся Т-дуальностью для объяснения того, почему электромагнитные поля в мировых объемах D-бран описываются теорией Борна—Инфельда.

20.1. Структура нелинейной электродинамики

Уравнения Максвелла являются как основой классической теории электромагнитного поля, так и отправной точкой в формулировке квантовой электродинамики — теории, которая была проверена с высокой степенью точности. Уравнения Максвелла записываются в терминах электрических и магнитных полей, которые, в свою очередь, возникают из калибровочных потенциалов. Заряды и токи служат источниками в уравнениях Максвелла.

Несколько иной вариант уравнений Максвелла используется при изучении электромагнитных явлений в присутствии вещества. В этом случае вещество приводит к вкладу поляризационных зарядов в зарядовую плотность и токов намагничивания в плотность тока. Исходные уравнения Максвелла остаются справедливыми, однако необходимо учесть данные вклады в заряды и токи. Это эффективно осуществляется посредством введения, дополнительно к \vec{E} и \vec{B} , полей \vec{D} и \vec{H} . Тогда уравнения электромагнетизма в присутствии вещества принимают вид

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
 (20.1)

для уравнений без источников и

Ξ

$$\nabla \times \vec{D} = \rho, \quad \nabla \times \vec{H} = -\frac{\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
 (20.2)

для уравнений с источниками. Здесь ρ и \vec{j} называются свободными источниками. Это означает, что они не учитывают поляризационные заряды или токи намагничивания. Свободные источники является зарядами и токами, не связанными с веществом. Вклады от поляризации и намагничивания учитываются в полях \vec{D} и \vec{H} . На самом деле для данного вещества существуют феноменологические соотношения, выражающие \vec{D} и \vec{H} через \vec{E} и \vec{B} :

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}).$$
 (20.3)

Без этих соотношений два набора уравнений в (20.1) и (20.2) были бы несвязанными. Например, линейные диэлектрики удовлетворяют $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (и $\vec{H} = \vec{B}$), где константа ϵ — это диэлектрическая проницаемость. Линейные магнетики удовлетворяют $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (и $\vec{D} = \vec{E}$), константа μ — это магнитная проницаемость. Для более сложных сред подобные соотношения не обязательно должны быть линейными. В таких случаях, уравнения (20.1), (20.2), и (20.3) определяют нелинейную теорию электромагнитного поля.

В вводных курсах по электромагнетизму часто указывается, что «фундаментальные» уравнения Максвелла — это те, которые записываются через \vec{E} и \vec{B} , вместе с полными зарядовой плотностью и плотностью тока. Считается, что предыдущие уравнения не являются справедливыми в общем случае, так как они соответствуют средам, большинство из которых в целом непригодны для точного анализа. Теория Борна—Инфельда и другие сопутствующие теории электродинамики на самом деле предлагают, что данные уравнения являются такими же фундаментальными, как и уравнения Максвелла, если не более того. Такие теории скорее предназначены для описания электромагнетизма в вакууме, нежели в присутствии вещества. Смысл в том, что в нелинейной электродинамике вакуум сам ведет себя как некая среда. Как мы покажем, общие лагранжианы напрямую приводят к уравнениям (20.2), совместно с нетривиальными соотношениями между (\vec{D} , \vec{H}) и (\vec{E} , \vec{B}).

В нелинейной электродинамике электромагнитные поля \vec{E} и \vec{B} по-прежнему включены в выражение для полевой напряженности: $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, так как показано в (3.20). Используя пространственные индексы *i*, *j* запишем

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k. \tag{20.4}$$

Тогда уравнения 20.1 выполняются автоматически, потому что \vec{E} и \vec{B} выражены через потенциалы. Как мы можем записать уравнения (20.2)? Напомним, что похожие уравнения теории Максвелла были нами выписаны в уравнении (3.34): $\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = j^{\mu}/c$. Отсюда следует, что (20.2) принимают вид

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c} j^{\mu}, \qquad (20.5)$$

где $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$ получена из $F^{\mu\nu}$ заменой \vec{E} на \vec{D} и \vec{B} на \vec{H} :

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_z & 0 \end{pmatrix}.$$
 (20.6)

504
Несмотря на то что выписанная здесь матрица $G^{\mu\nu}$ справедлива только в четырехмерном пространстве-времени, уравнения (20.5) имеют смысл в любой размерности. Совместно с выражением $F_{\mu\nu}$ через потенциалы, они приводят к уравнениям нелинейной электродинамики в произвольном числе измерений. Конечно же, должна быть также указана связь между $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$.

Теперь покажем, что уравнение (20.5) следует из вариации некоторого действия. Более того, также возникает определение $G^{\mu\nu}$ через полевые напряженности $F^{\mu\nu}$. Рассмотрим действие *S*, записанное для произвольной размерности пространства-времени:

$$S = \int d^{D}x \, \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^{D}x \, A_{\mu} j^{\mu}. \qquad (20.7)$$

Для простоты предполагается, что плотность лагранжиана $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ зависит только от напряженности поля но, например, не от его производных. Так как напряженность поля калибровочно-инвариантна, то \mathcal{L} также является калибровочноинвариантной. Иначе, плотность лагранжиана \mathcal{L} произвольна; она не обязана совпадать с плотностью лагранжиана Максвелла. Для того чтобы найти вариации действия, нужно *определить* частные производные произвольной функции по напряженностям электрмагнитного поля.

С этой целью сперва заметим, что вариации $\delta F_{\mu\nu}$ ограничены антисимметрией: $\delta F_{\mu\nu} = -\delta F_{\nu\mu}$. Тогда для произвольной функции *M*, зависящей от полевых напряженностей, запишем

$$\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \, \delta F_{\mu\nu}. \tag{20.8}$$

Как обычно, по повторяющимся индексам происходит суммирование. Так как вариации $\delta F_{\mu\nu}$ антисимметричны, можно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} = -\frac{\partial M}{\partial F_{\nu\mu}}.$$
(20.9)

Уравнения (20.8) и (20.9) совместно определяют частные производные $\partial M / \partial F_{\mu\nu}$.

(•) Упражнение-разминка 20.1. Воспользуйтесь $M = F_{12}$ и предыдущими уравнениями для доказательства тождеств $\partial F_{12}/\partial F_{12} = 1$ и $\partial F_{12}/\partial F_{\mu\nu} = 0$ при $(\mu, \nu) \neq (1, 2)$ и $(\mu, \nu) \neq (2, 1)$.

Также полезно выяснить, как пользоваться правилом дифференцирования сложной функции. Для вычисления производных функции *M* по некоторой переменной *U*, запишем

$$\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial U} \, \delta U \equiv \frac{\partial M}{\partial U} \, \delta U, \qquad (20.10)$$

выяснив таким образом, что

$$\frac{\partial M}{\partial U} = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial U}.$$
 (20.11)

Теперь мы готовы к тому, чтобы варьировать действие S. Используя (20.8), заменив M на \mathcal{L} , получаем вариацию первого слагаемого в S:

$$\delta \int d^D x \, \mathcal{L} = \int d^D x \frac{1}{2} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \, \delta F_{\mu\nu} = \int d^D x \frac{1}{2} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu). \quad (20.12)$$

Интегрируя по частям, переобозначая индексы и используя (20.9), находим

$$\delta \int d^D x \, \mathcal{L} = \int d^D x \, \delta A_{\mu} \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right). \tag{20.13}$$

Тогда вариация полного действия (20.7) принимает вид

$$\delta S = \int d^D x \, \delta A_{\mu} \left[\partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{c} \, j^{\mu} \right]. \tag{20.14}$$

Приравнивая это уравнение нулю, получим (20.5), если отождествим

$$G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}.$$
 (20.15)

Тензор $G^{\mu\nu}$ является антисимметричным по построению. Если нелинейный лагранжиан известен, то (20.15) выражает $G^{\mu\nu}$ как функцию напряженности поля $F_{\mu\nu}$. Для иллюстрации давайте найдем \vec{D} . Из уравнения (20.6) следует, что $G^{0i} = D_i$, и это считается определением вектора \vec{D} при произвольной размерности пространства-времени. Начнем с вычисления производной $\partial \mathcal{L}/\partial E_i$. Используя правило дифференцирования сложной функции (20.11) и вспоминая, что $E_i = F_{i0} = -F_{0i}$, находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} \frac{\partial F_{0i}}{\partial E_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} \frac{\partial F_{i0}}{\partial E_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} = G^{0i} = D_i.$$
(20.16)

Таким образом, мы показали, что

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}}.$$
 (20.17)

В четырехмерном пространстве-времени \vec{H} также можно записать через производные \mathcal{L} . Например, так как $B_1 = F_{23} = -F_{32}$, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{32}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{23}} = G^{32} = -H_1.$$
(20.18)

Рассматривая аналогичным образом остальные две компоненты, находим окончательный результат

$$\vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}}.$$
 (20.19)

506

Если известна $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{B})$, то уравнения (20.17) и (20.19) определяют \vec{D} и \vec{H} . Например, в электродинамике Максвелла, плотность лагранжиана это

$$\mathcal{L}_{M} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^{2} - B^{2}).$$
 (20.20)

Здесь мы определили $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ и $E = |\vec{E}|$, и аналогично, для \vec{B} , \vec{H} и \vec{D} . Из (20.20) следует, что $\vec{D} = \vec{E}$ и $\vec{H} = \vec{B}$.

Напряженность \vec{E} связана с производной по времени от \vec{A} , поэтому ее можно рассматривать как скорость. Тогда уравнение (20.17) означает, что \vec{D} является каноническим импульсом, ассоциированным со скоростью \vec{E} . Это приводит к тому, что гамильтониан, или функционал энергии, имеет вид

$$\mathcal{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}. \tag{20.21}$$

Эта формула очевидно верна для теории Максвелла: так как при $\vec{D} = \vec{E}$, находим $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$, что является известным выражением для плотности энергии электромагнитного поля. В задаче 20.1 вы докажете, что \mathcal{H} действительно является сохраняющейся энергией для произвольного \mathcal{L} . Несмотря на то что некоторые наши результаты записаны на языке четырех измерений, важные идеи справедливы для всех размерностей. На самом деле все уравнения в серых рамках справедливы для любой размерности пространства-времени.

Завершим этот раздел рассмотрением некоторых возможных плотностей лагранжиана в четырехмерном пространстве-времени. Плотность \mathcal{L} в (20.7) должна быть как калибровочно-инвариантна, так и лоренц-инвариантна. Очевидно, что она калибровочно-инвариантна, потому что составлена из напряженностей поля. Для лоренц-инвариантности необходимо, чтобы напряженности полей образовывали комбинации без свободных индексов. Существует две независимые нетривиальные лоренц-инвариантные комбинации, которые можно построить из $F_{\mu\nu}$, не используя производные от напряженности:

$$s \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2),$$

$$p \equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}.$$
(20.22)

На самом деле можно доказать, что *s* и p — это *единственные* независимые инварианты, которые можно построить из $F_{\mu\nu}$. В инварианте *p* используется *дуальная* полевая напряженность $\tilde{F}^{\mu\nu}$, определяемая как

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \tag{20.23}$$

Здесь $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — это полностью антисимметричный лоренцевский тензор (более точно, это псевдотензор). Это приводит к тому, что $\tilde{F}^{\mu\nu}$ является антисиммет-

507

ричным. Также как $\eta^{\mu\nu}$, тензор $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ принимает одинаковые значения во всех лоренцевских системах отсчета. В любой системе отсчета $\epsilon^{0123} = 1$ и $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ равен нулю при любых двух одинаковых индексах. Например,

$$\widetilde{F}^{01} = \frac{1}{2} \, \epsilon^{01\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (F_{23} - F_{32}) = F_{23} = B_x. \tag{20.24}$$

Вычисляя все остальные элементы, находим

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$
(20.25)

- Упражнение-разминка 20.2. Вычислите по аналогии с (20.24) остальные элементы матрицы F^{µν}.
- Упражнение-разминка 20.3. Покажите, что р принимает значение, указанное в (20.22).

В четырех измерениях, наиболее общее лоренц-инвариантная плотность лагранжиана построенная из $F^{\mu\nu}$ является произвольной функцией *s* и *p*. Плотность лагранжиана Максвелла это просто *s*.

20.2. Электродинамика Борна—Инфельда

В этом разделе мы попытаемся написать лагранжиан, который, как оказывается, описывает электромагнитные поля, расположенные в мировом объеме D-браны: это электромагнитный лагранжиан Борна—Инфельда. Как мы увидим, в теории Борна—Инфельда электростатическая собственная энергия точечного заряда конечна. Это серьезное улучшение теории Максвелла, в которой собственная энергия точечного заряда бесконечна. Концы открытых струн являются точечными зарядами, поэтому то, что в теории струн они не имеют бесконечной энергии, обнадеживает. В следующем разделе будет объяснено, как с помощью Т-дуальности доказывается то, что динамика электромагнитных полей на D-бранах описывается лагранжианом Борна—Инфельда.

Начнем с четырехмерного пространства-времени: в дополнение к сстественным требованиям калибровочной и лоренц-инвариантности, мы накложим на нелинейный лагранжиан две связи. Во-первых, для малых \vec{E} и \vec{B} он должен сводиться к лагранжиану Максвелла. Во-вторых, при $\vec{B} = 0$ электрическое поле должно быть максимальным. В разделе 19.2 было показано, что в теории струн имеется критическое электрическое поле $E_{crit} = 1/(2\pi\alpha') \equiv b$. Создателям нелинейной электродинамики максимальное электрическое поле понадобилось для получения точечных зарядов с конечной собственной энергией.

Каким образом можно учесть в лагранжиане существование максимального электрического поля? В специальной теории относительности наличие максимальной скорости в лагранжиане точечной частицы (5.8) совершенно очевидно: выражение под квадратным корнем должно быть положительным и это гарантирует, что скорость частицы не может превышать скорость света. Для того чтобы наложить требование $E \leq b$, мы тоже воспользуемся квадратным корнем. Существует простое выражение, содержащее только лоренцевский инвариант *s*:

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2}} + b^2.$$
 (20.26)

Как и требовалось, $E \leq b$ при B = 0. Более того, для малых полей имеем $s \ll b^2$, поэтому

$$\mathcal{L} = -b^2 \left(1 - \frac{s}{b^2} \right) + b^2 + \mathcal{O}(s^2) = s + \mathcal{O}(s^2).$$
 (20.27)

Для малых полей воспроизводится лагранжиан Максвелла. Хотя (20.26) удовлетворяет наложенным двум связям, существует несколько более сложный лагранжиан, обладающий еще лучшими свойствами. Рассмотрим плотность лагранжиана Борна—Инфельда

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2.$$
(20.28)

Так как данная плотность построена из s и p, она является лоренц-инвариантной. Для малых полей, когда s и p сравнимы и оба много меньше чем b^2 , приближение слабого поля не изменяется: $L \sim s$. В общей теории нелинейной электродинамики, волны с разными поляризациями и с разными скоростями распространяются на фоне электромагнитных полей. В теории Борна—Инфельда скорость не зависит от поляризации. Во всех теориях нелинейной электродинамики, включая теорию Борна—Инфельда, существуют нетривиальные дисперсионные соотношения; т. е. волны с разными частотами движутся с разными скоростями.

Теория Борна—Инфельда является особенной еще по одной причине. Плотность лагранжиана может быть элегантно записана через квадратный корень детерминанта:

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)} + b^2.$$
 (20.29)

В противоположность (20.28), данная формула допускает очевидное обобщение на произвольное число измерений. Однако необходимо приложить усилия для доказательства того, что две плотности в четырех измерениях совпадают. Данное вычисление хоть и прямое, но несколько длинное: требуется просто выписать матрицу 4 на 4 и найти ее детерминант. Более показательно, однако, понять, почему данное равенство оправдано. Для упрощения уравнений в (20.29) временно положим b = 1:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) + 1}.$$
 (20.30)

Исходная плотность лагранжиана воспроизводится при $F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}/b$ и $\mathcal{L} \to b^2 \mathcal{L}$. Лагранжиан (20.28) явно лоренц-инвариантен. Как убедиться в лоренц-инвариантности (20.30)? Чтобы показать лоренц-инвариантность det $(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})$, в первую очередь заметим, что детерминант произвольной матрицы M с компонентами $M_{\mu\nu}$ равен детерминанту матрицы \overline{M} с компонентами $M^{\mu\nu}$. Для доказательства, сперва запишем

$$M_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}M^{\rho\sigma} = \eta_{\mu\rho}M^{\rho\sigma}\eta_{\sigma\nu} \Rightarrow M = \eta\overline{M}\eta, \qquad (20.31)$$

где η — это матрица с компонентами $\eta_{\mu\nu}$. Вычисляя детерминанты обеих частей данного уравнения, убеждаемся, что

$$\det M = \det (\eta \overline{M} \eta) = (\det \overline{M})(\det \eta)^2 = \det \overline{M}.$$
 (20.32)

Пусть $\bar{\eta}$, F и \bar{F} обозначают матрицы, соответственно, с элементами $\eta^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$. Используя только что полученный результат, имеем

$$\det (\eta + F) = \det (\overline{\eta} + \overline{F}). \tag{20.33}$$

Тем самым достаточно доказать лоренц-инвариантность $(\bar{\eta} + \bar{F})$.

Рассмотрим преобразование Лоренца $x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ в виде, представленном в (2.38). Матрица L с элементами L^{μ}_{ν} (μ — это индекс строки и ν — это индекс столбца), удовлетворяет (det L)² = 1. Так как и $\eta^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$ являются лоренцевскими тензорами одинакового типа, они одинаково преобразуются при преобразованиях Лоренца. Данные тензоры имеют два индекса, поэтому матрица L должна действовать на них дважды:

$$\eta^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\ \rho} L^{\nu}_{\ \sigma} (\eta^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}) = L^{\mu}_{\ \rho} (\eta^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}) L^{\nu}_{\ \sigma}.$$
(20.34)

В матричных обозначениях

$$\vec{\eta}' + \vec{F}' = L(\vec{\eta} + \vec{F})L^{\mathrm{T}}.$$
(20.35)

Так как det $L = \det L^{\mathsf{T}}$ и $(\det L)^2 = 1$, вычислив детерминанты, можно сразу же заключить, что

$$\det\left(\bar{\eta}' + \bar{F}'\right) = \det\left(\bar{\eta} + \bar{F}\right). \tag{20.36}$$

Это доказывает лоренц-инвариантность плотности лагранжиана Борна-Инфельда.

Легко показать еще один факт. Так как детерминант матрицы остается неизменным при транспонировании, имеем

$$\det (\eta + F) = \det (\eta^{T} + F^{T}) = \det (\eta - F).$$
 (20.37)

Следовательно, заключаем, что лагранжиан Борна—Инфельда является четной функцией *F*. Используя $\eta = \eta^{-1}$ и det $\eta = -1$, выражение под корнем квадратным в (20.30) можно упростить:

$$-\det(\eta + F) = -\det(\eta(1 + \eta F)) = \det(1 + \eta F).$$
(20.38)

510

Явным образом матрица $1 + \eta F$ задается в виде

$$1 + \eta F = \begin{pmatrix} 1 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 1 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 1 & B_z \\ E_z & B_y & -B_z & 1 \end{pmatrix}.$$
 (20.39)

Каждое слагаемое в разложении детерминанта является произведением сомножителей, причем каждый из сомножителей содержит в точности один элемент из каждой строки и один элемент из каждого столбца. Поэтому вклады, квадратичные по полям, содержат два диагональных элемента. Существует шесть способов выбора таких двух элементов и соответствующий вклад дает $-E^2 + B^2$, что и есть ожидаемый ответ. Для того чтобы выписать полностью четвертичные вклады, требуются больше усилий. В этом случае, нельзя выбирать элементы на диагонали.

В заключение этого раздела вычислим собственную энергию точечного заряда в теории Борна—Инфельда. Для этого в (20.28) можно положить $\vec{B} = 0$ и воспользоваться упрощенной плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2} + b^2}.$$
 (20.40)

В качестве первого шага найдем \vec{D} :

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}.$$
(20.41)

Мы видим, что \vec{E} и \vec{D} направлены одинаково. Чтобы разрешить \vec{E} через \vec{D} , сначала возведем в квадрат предыдущее уравнение и найдем E^2 :

$$D^{2} = \frac{E^{2}}{1 - \frac{E^{2}}{b^{2}}} \Rightarrow E^{2} = \frac{D^{2}}{1 + \frac{D^{2}}{b^{2}}}.$$
 (20.42)

На данном этапе, записывая

$$E^{2} = b^{2} \left(\frac{D^{2}}{D^{2} + b^{2}} \right) = D^{2} \left(\frac{b^{2}}{b^{2} + D^{2}} \right), \qquad (20.43)$$

мы немедленно убеждаемся в том, что

$$E \leqslant b, \quad E \leqslant D.$$
 (20.44)

Как и ожидалось, электрическое поле ограничено b. Более того, модуль E электрического поля везде ограничен модулем D поля \vec{D} . Отметим, однако, что D может быть произвольно большим. На самом деле для достижения D требуется бесконечно большой E = b.

Чтобы получить \vec{E} , извлечем из (20.42) «квадратный корень»

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}}} \cdot \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}}}.$$
(20.45)

Так как \vec{E} сонаправлена \vec{D} , есть единственное решение

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}}}.$$
 (20.46)

Имея $\vec{E}(\vec{D})$ мы близки к тому, чтобы вычислить плотность энергии $\mathcal{H}(\vec{D})$. В качестве последнего ингредиента требуется \mathcal{L} , записанный через \vec{D} :

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{D^2}{b^2 \left(1 + \frac{D^2}{b^2}\right)}} + b^2 \frac{-b^2}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}}} + b^2.$$
(20.47)

Тогда гамильтониан приобретает вид

$$\mathcal{H} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} = \frac{D^2}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}}} - b^2, \qquad (20.48)$$

и получаем окончательный результат

$$\mathcal{H} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2} - b^2},$$
 (20.49)

При $\vec{B} = \vec{H} = 0$ — это плотность энергии в теории Борна—Инфельда. В задаче 20.4 вы убедитесь, что данный результат справедлив в теории Борна—Инфельда в произвольном числе измерений.

Вычислим собственную энергию точечного заряда в четырехмерном пространстве-времени. В теории Максвелла собственная энергия бесконечна, потому что плотность энергии пропорциональна $ED = E^2$ и $E \sim r^{-2}$, где r — это расстояние до заряда. В итоге, $d^3x E^2 \sim dr/r^2$ и интеграл энергии расходится при малых r. В теории Борна—Инфельда также находим $D \sim r^{-2}$, однако для больших D плотность энергии (20.49) ограничена

$$\mathcal{H} \simeq bD = E_{\text{crit}}D$$
 при $D \to \infty$. (20.50)

Для больших полей плотность энергии Максвелла u = ED/2 заменяется в теории Борна—Инфельда на $u = E_{crit}D$, энергия в теории Борна—Инфельда растет линейно с D. В итоге, $d^3x E_{crit}D \sim d^3x r^{-2} \sim dr$, и интеграл энергии будет сходиться. Давайте теперь подробнее рассмотрим детали.

Предположим, что имеется точечный заряд Q. В силу сферической симметрии поле \vec{D} — радиальное, уравнение $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ можно проинтегрировать по объему, заключенному внутри сферы радиуса r

$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q \implies \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^{2}} \vec{e}_{r}, \qquad (20.51)$$

где $\vec{e_r}$ — это единичный вектор в радиальном направлении. Необходимо проверить, что полученное решение удовлетворяет $\nabla \times \vec{E} = 0$. Из уравнения (20.46) мы знаем, что \vec{E} имеет вид $\vec{E} = f(r)\vec{r}$, ротор такого электрического поля равен нулю.

Упражнение-разминка 20.4. Покажите, что $\nabla \times (f(r)\vec{r}) = 0.$

Энергия точечного заряда теперь может быть вычислена. Используя (20.49) и (20.51), запишем:

$$U_{Q} = \int d^{3}x \mathcal{H} = b^{2} \int_{0}^{\infty} 4\pi r^{2} dr \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{4\pi b r^{2}}\right)^{2}} - 1 \right) =$$

= $4\pi b^{2} \int_{0}^{\infty} dr \left(\sqrt{r^{4} + \left(\frac{Q}{4\pi b}\right)^{2}} - r^{2} \right).$ (20.52)

Обозначая $r = x \sqrt{Q/(4\pi b)}$, получим

$$U_Q = \sqrt{\frac{b}{4\pi}} Q \sqrt{Q} \int_0^\infty dx (\sqrt{1+x^4} - x^2). \qquad (20.53)$$

Данный интеграл сходится. Проблема сингулярности исчезла: подынтегральное выражение регулярно в окрестноти x = 0. Также не ожидается трудностей и при больших x: поля малы и энергия Борна—Инфельда приблизительно равна энергии Максвелла, для которой на больших расстояниях не возникает никаких проблем. Действительно,

$$\sqrt{1+x^4}-x^2 \approx \frac{1}{\sqrt{1+x^4}+x^2} < \frac{1}{2x^2},$$
 (20.54)

и это выражение интегрируемо при $x = \infty$. Вычисляя интеграл явным образом, находим

$$\int_{0}^{\infty} dx \left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right) = \frac{\left(\Gamma(1/4)\right)^2}{6\sqrt{\pi}} \approx \frac{(3,6256)^2}{6(1,7725)} \approx 1,236.$$
(20.55)

Здесь $\Gamma(x)$ — это гамма-функция (см. 3.50). Возвращаясь назад к (20.53), получаем окончательное выражение для энергии точечного заряда в теории Борна— Инфельда:

$$U_Q = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right)^2 b^{1/2} Q^{3/2} \simeq \frac{1}{4\pi} \cdot 4,382 b^{1/2} Q^{3/2}.$$
 (20.56)

Если *b* соответствует критическому электрическому полю в теории струн, то $b = 1/(2\pi \alpha')$. Более того, $\sqrt{\alpha'} = \ell_s$, где $\ell_s -$ это длина струны. Собственная энергия точечного заряда принимает вид

$$U_{Q} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{3} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right)^{2} \frac{Q^{2}}{\ell_{s}\sqrt{Q}} \approx \frac{1}{4\pi} \cdot 1,748 \frac{Q^{2}}{\ell_{s}\sqrt{Q}}.$$
 (20.57)

Чтобы лучше понять этот результат, сравним его с электростатической энергией зарядового распределения в теории Максвелла. Если предположить, что заряд распределен равномерно в объеме шара радиуса a, то можно показать, что энергия U(Q) — это

$$U(Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}.$$
 (20.58)

При $a \to 0$ заряд становится почти точечным, и возникает ожидаемая бесконечная собственная энергия. О радиусе *a* можно думать как о малом параметре обрезания, введенным для того, чтобы сделать собственную энергию конечной. Например, классический радиус электрона — это примерно то значение *a*, при котором U(e) равна энергии покоя электрона. Если сравнить энергию Борна— Инфельда (20.57) с энергией Максвелла, видно, что $\ell_s \sqrt{Q}$ играет роль параметра обрезания. Эта величина имеет правильную размерность, потому что *Q* безразмерна. Интересно, что параметр обрезания растет с ростом значения *Q*. Зависимость энергии Борна—Инфельда $U_Q \simeq Q^{3/2}$ указывает на нелинейность теории.

Приведенное выше вычисление собственной энергии неподвижного точечного заряда вряд ли прямо применимо в теории струн. Концы открытых струн на заполняющей все пространство D-бране заряжены, но они еще и движутся. Однако, в случае, когда полубесконечная открытая струна заканчивается на Dp-бране, возникает легко анализируемая ситуация, рассматриваемая в задачах 20.6 и 20.7. Данная струна может быть статичной и энергия Борна—Инфельда такого решения соответствует энергии полубесконечной струны!

20.3. Теория Борна—Инфельда и Т-дуальность

В этой главе мы довольно подробно изучили электродинамику Борна—Инфельда. К этому нас побудило существование в теории струн критического электрического поля. В данном разделе будет показано, что анализ свойств Т-дуальности электрических и магнитных полей на D-бранах непосредственно доказывает то, что динамика электромагнитных полей на D-бранах описывается теорией Борна—Инфельда.

Для статичной D*p*-браны произведение ее натяжения $T_p(g)$ на объем определяет массу данной браны. Рассмотрим мир с одним закрученным в окружность измерением радиуса R и (p-1) измерениями, описывающими некоторое компактное пространство объема V_{p-1} . Теперь представим D*p*-брану, намотанную на полный набор p компактных измерений. Масса данной Dp-браны равна

$$T_p(g)(2\pi R)V_{p-1}.$$
 (20.59)

После преобразования Т-дуальности вдоль окружности радиуса R, мы получаем D(p-1)-брану, расположенную в некоторой точке дуальной окружности, а остальные (p-1) направлений вдоль мирового объема браны по-прежнему намотаны на компактное пространство объема V_{p-1} . Масса данной D-браны равна

$$T_{p-1}(\tilde{g})V_{p-1},$$
 (20.60)

где \tilde{g} — это константа струнного взаимодействия в дуальном описании (см. 18.56). Так как Т-дуальность является физической эквивалентностью, две массы, полученные выше, должны совпадать. Действительно, каждая D-брана, с точки зрения наблюдателя в пространстве с меньшим числом измерений, представляется как точечная масса, и если массы не совпадают, то наблюдатель может утверждать, что физика изменилась. Приравнивая значения двух масс, находим

$$T_{p-1}(\tilde{g}) = 2\pi R T_p(g).$$
 (20.61)

Данное соотношение связывает натяжения D-бран в *дуальных* описаниях: $T_p(g)$ является натяжением браны в мире с константой взаимодействия g (мир с окружностью радиуса R), а $T_{p-1}(\tilde{g})$ является натяжением браны в мире с константой взаимодействия \tilde{g} (мир с окружностью \tilde{R}). Это соотношение между натяжениями всегда справедливо, независимо от того, вокруг каких направлений рассматриваемая брана наматывается. Соотношение между натяжениями D-бран (18.57) выглядит иначе, потому что сравнивает натяжения в одном и том же описании, т. е. с одной и той же константой струнного взаимодействия.

Давайте теперь заново рассмотрим конфигурацию, обсуждавшуюся в разделе 19.3. Имелось два компактных измерения радиусами R_2 и R_3 , образующие 2-тор. Одно направление в мировом объеме D(p-1)-браны располагалось вдоль диагонали тора. Для простоты предположим, что другие (p-2) направления наматываются на компактное пространство объема V_{p-2} . Пусть в данном описании \tilde{g} обозначает константу струнного взаимодействия. Преобразование Т-дуальности вдоль окружности радиуса R_3 привело к Dp-бране с магнитным полем и двумя направлениями, намотанными на тор с радиусами R_2 , \tilde{R}_3 . Другие (p-2) направления на бране также наматываются на пространство объема V_{p-2} . Пусть в данном описании g обозначает константу струнного взаимодействия. Так как окружность, дуализованная в мире Dp-браны, имеет радиус \tilde{R}_3 , то уравнение (20.61) дает

$$T_{p-1}(\tilde{g}) = 2\pi R_3 T_p(g). \tag{20.62}$$

Для статичной D(p-1)-браны, расположенной вдоль диагонали тора, лагранжиан представляется как энергия покоя браны со знаком минус. Эта энергия на самом деле является произведением натяжения браны $T_{p-1}(\tilde{g})$ и ее объема. В свою очередь, объем это произведение V_{p-2} на длину L_{diag} вдоль диагонали, поэтому

$$L = -V_{p-2}L_{\text{diag}}T_{p-1}(\tilde{g}) = -V_{p-2}\sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3)^2} T_{p-1}(\tilde{g}).$$
(20.63)

В (19.47) показано, что $2\pi \alpha' B = - \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между диагональю тора и горизонтальным направлением. Фактически, $\alpha = \operatorname{tg} R_3/R_2$, согласно (19.55). Таким образом, магнитное поле пропорционально отношению радиусов:

$$2\pi \alpha' B = -\frac{R_3}{R_2}.$$
 (20.64)

Уравнения 20.62 и (20.64) позволяют переписать (20.63) в следующем виде:

$$L = -V_{p-2}(2\pi R_2)\sqrt{1 + (2\pi \alpha' B)^2} (2\pi \tilde{R}_3)T_p(g). \qquad (20.65)$$

Так как $(2\pi R_2)(2\pi \widetilde{R}_3)$ — это объем тора, на который намотана D*p*-брана, окончательно получаем

$$L = -V_p T_p(g) \sqrt{1 + (2\pi \alpha' B)^2}.$$
 (20.66)

Если B = 0, то воспроизводится лагранжиан статичной Dp-браны.

Для сравнения с лагранжианом Борна—Инфельда рассмотрим уравнение (20.28), которое при $\vec{E} = 0$ сводится к

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}} + b^2.$$
 (20.67)

Как b^2 , являющийся множителем перед квадратным корнем, так и b^2 , добавленный к \mathcal{L} , были введены по причинам, более не существенным. Например, аддитивный вклад изначально был введен для сокращения постоянного слагаемого в \mathcal{L} . Теперь постоянное слагаемое необходимо, так как оно выражает энергию покоя D-браны в отсутствие электромагнитных полей. Множитель квадратного корня b^2 был изначально введен для достижения стандартной нормировки действия Максвелла. Теперь общая нормировка действия фиксирована (20.66). У нас нет возможности даже перемасштабировать калибровочные потенциалы. Нормировка калибровочного поля была зафиксирована при введении взаимодействия (16.54) с концами открытых струн.

В итоге, значение $b = 1/(2\pi\alpha')$, полученное сравнением квадратных корней (20.66) и (20.67), должно использоваться только под корнем квадратным. Таким образом, в силу (20.29), лагранжиан D-браны (20.66) согласуется с плотностью лагранжиана Борна—Инфельда

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{-\det\left(\eta_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn}\right)}.$$
 (20.68)

Здесь m, n - 3то индексы мирового объема Dp-браны, объемный множитель V_p был устранен, потому что мы перешли от лагранжиана к его плотности \mathcal{L} . Данная плотность лагранжиана описывает поведение электромагнитных полей на D-бранах. Упражнение-разминка 20.5. Предположим, что F₂₃ = В является единственной ненулевой компонентой магнитного поля. Вычислите плотность лагранжиана (20.68) для произвольной Dp-браны (p ≥ 3), и проверьте, что результат согласуется с (20.66).

Плотность лагранжиана (20.68) позволяет найти электромагнитные поля, порождаемые концами открытых струн, которые, по соглашению, обладают зарядами единичной величины. Например, для статичной ориентированной открытой струны, заканчивающейся в \vec{x}_0 , зарядовая плотность задается $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$, где \vec{x} представляет пространственную координату на D-бране. Тогда уравнение для \vec{D} имеет вид

$$abla \cdot \vec{D} = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}}.$$
(20.69)

Решение данного уравнения в частном случае содержится в задаче 20.7. Это решение описывает струну, заканчивающуюся на D-бране.

Анализ Т-дуальности для электрических полей в разделе 19.2 подтверждает то, что (20.68) является плотностью лагранжиана. Там мы рассматривали окружность радиуса \tilde{R} и D(p-1)-брану, движущуюся вдоль нее со скоростью v. Как написать лагранжиан для подобной D-браны? Для точечной частицы массы m лагранжианом, согласно (5.8), является произведение (-m) и релятивистского фактора $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Плотностью лагранжиана струны является (минус) произведение энергии покоя части струны ($-T_0 ds$) на аналогичный релятивистский фактор (см. (6.89)). Для движущейся D(p-1)-браны

$$L = -V_{p-1}T_{p-1}(\tilde{g})\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$
 (20.70)

Перепишем данный лагранжиан в переменных Т-дуального описания, в котором имеется Dp-брана с электрическим полем, направленным вдоль окружности радиуса R, а струнная константа взаимодействия равна g. Значение электрического поля связано со скоростью браны как $v/c = \beta = 2\pi \alpha' E$ (см. (19.34)). Таким образом, находим

$$L = -V_{p-1}(2\pi R)T_p(g)\sqrt{1-(2\pi \alpha' E)^2}, \qquad (20.71)$$

где также было использовано соотношение (20.61). Окончательно, произведение $2\pi R$ и V_{p-1} дает полный объем V_p Dp-браны:

$$L = -V_p T_p(g) \sqrt{1 - (2\pi \alpha' E)^2}.$$
 (20.72)

В случае постоянного электрического поля и нулевого магнитного поля, этот лагранжиан правильно воспроизводится из (20.68). Это можно легко проверить, положив электрическое поле $F_{01} = -E_x$ единственной не равной нулю компонентой. Таким образом, мы получили дополнительное доказательство правильности (20.68).

Задачи

Задача 20.1. Функционал энергии в нелинейной электродинамике

(а) Согласно уравнению (20.21), полная энергия электромагнитного поля U в фиксированном объеме V это

$$U = \int_{V} (\vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}) d^{3}x. \qquad (1)$$

Докажите, что в четырехмерном пространстве-времени

$$\frac{dU}{dt} = \int_{V} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d^{3}x.$$
 (2)

(б) С помощью уравнений (20.1) и (20.21) покажите, что в отсутствие источников

$$\frac{dU}{dt} = -\int_{S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a}, \qquad (3)$$

где S — это поверхность, ограничивающая объем V. Это уравнение показывает, что U является постоянной, если электромагнитные поля равны нулю на границе и, таким образом, не выносят энергию за пределы V. U — это сохраняющаяся энергия. Действительно, в выражении $\vec{E} \times \vec{H}$ можно узнать вектор Пойнтинга, выражающий локальный поток энергии через единицу площади в единицу времени.

Задача 20.2. Емкость в теории Борна—Инфельда

Емкость C конфигурации из двух проводников определяется как Q = CV, где проводники имеют заряды Q и -Q, соответственно, а V — это разность потенциалов между ними.

- (а) Пусть C_M обозначает емкость в теории Максвелла. Объясните, почему C_M является константой, не зависящей от Q и V.
- (6) Рассмотрите конфигурацию их двух проводников с зарядами Q и -Q, и пусть $\vec{E}_M(\vec{x})$ это напряженность электрического поля между проводниками в теории Максвелла. Докажите, что всякий раз, когда ∇E_M^2 направлена одинаково с \vec{E}_M , поле $\vec{D}(\vec{x})$ в теории Борна—Инфельда для той же зарядовой конфигурации, задается $\vec{D}(\vec{x}) = \vec{E}_M(\vec{x})$. Докажите, что в подобных случаях емкость Борна—Инфельда всегда больше емкости Максвелла.
- (в) Рассмотрите плоский конденсатор площади A и с расстоянием между пластинами d. Покажите, что емкость Борна—Инфельда C(V) равна

$$C(V)=\frac{C_M}{\sqrt{1-(V/V_C)^2}},$$

где $C_M = A/d$ — это емкость Максвелла и $V_C = bd$. Как можно интерпретировать V_C ?

Задача 20.3. Дуальная полевая напряженность и инвариант Лоренца р

- (a) Покажите, что замена $\tilde{F}^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu}$ соответствует $\vec{E} \to -\vec{B}$ и $\vec{B} \to \vec{E}$. Проверьте, что данные замены являются преобразованиями дуальности для электромагнитного поля (раздел 17.1).
- (б) Покажите, что инвариант Лоренца $p = -\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4$ может быть представлен как полная производная: $p = -\partial_{\mu}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho}A_{\sigma})/4$.

Задача 20.4. Электрические поля и точечные заряды в высших размерностях

- (a) Изучите плотность лагранжиана (20.29) в случае, если есть только электрическое поле $F_{0i} = -E_i$ в мире с D = d + 1 пространственно-временными измерениями. Явно вычислите детерминант и покажите, что он принимает вид (20.40) при $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$.
- (б) Вычисление детерминанта в п. (а) можно упростить. Мы доказали лоренцинвариантность плотности лагранжиана Борна—Инфельда и, тем самым, ее инвариантность относительно вращений. Рассмотрите плотность лагранжиана в начале отсчета, используя систему координат, в которой *E* направлен вдоль первой пространственной координаты. Покажите, как почти тривиальное вычисление в такой системе координат может быть использовано для угадывания ответа, полученного в п. (а).
- (в) Энергия U_Q точечного заряда Q в *D*-мерном пространстве-времени пропорциональна Q^{δ} , где δ — константа. Вычислите δ .

Задача 20.5. Вычисление гамильтониана Борна—Инфельда

Рассмотрите полную плотность лагранжиана Борна—Инфельда \mathcal{L} , при b = 1:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{1 - E^2 + B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2} + 1.$$
 (1)

(а) Покажите, что

$$\vec{D} = \frac{\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}}{\sqrt{1 + B^2 - E^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2}}.$$
 (2)

(б) Задача, требующая усилий, — это выразить \vec{E} через \vec{D} . Она требует тонкого владения элементами векторной алгебры. Для начала заметим, что уравнение (2) имеет вид $f(\vec{E}, \vec{B})\vec{D} = \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}$, где f — это скалярная функция. Покажите, что

$$\vec{E} = \frac{f(\vec{E}, \vec{B})}{1 + B^2} \left(\vec{D} - (\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right).$$
(3)

Функция **f** содержит комбинацию $\vec{E}^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$. Для того чтобы выразить данную комбинацию через \vec{D} и \vec{B} , рассмотрите значения D^2 и $(\vec{D} \times \vec{B})^2$. Теперь докажите, что

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - (\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{\sqrt{1 + B^2 + D^2 + (\vec{D} \times \vec{B})^2}}.$$
 (4)

(в) Так как теперь имеется значение \vec{E} , вычисление гамильтониана становится относительно простым. Используя (20.21), покажите, что

$$\mathcal{H} = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + (\vec{D} \times \vec{B})^2} - 1.$$
(4)

Задача 20.6. Струна, заканчивающаяся на D-бране в теории Борна—Инфельда: часть 1

Динамика электромагнитных полей на Dp-бране описывается (20.68). Однако мы знаем, что также существуют (d - p) безмассовых скалярных поля, находщихся в мировом объеме Dp-браны, возбуждения которой — это ее поперечные смещения (вспомните обсуждение после формулы (15.37)). Рассмотрите скалярное поле X, соответствующее смещениям вдоль оси x, нормальной к бране. Действие Борна—Инфельда может быть обобщено таким образом, что оно будет описывать как электромагнитные поля, так и поля X:

$$\mathcal{L} = -T_p \sqrt{-\det\left(\eta_{mn} + 2\pi \alpha' F_{mn} + \partial_m X \partial_n X\right)}.$$
 (1)

Здесь поле X — это функция координат x^m на бране (X — это *не* струнная координата). Значение $X(x^m)$ — это координата x точки на бране с координатой x^m .

(a) Предположим, что на D*p*-бране нет электромагнитных полей, тем не менее, положим X = vt и попробуем описать движение D-браны вдоль нормального направления x со скоростью v. Покажите, что

$$\mathcal{L} = -T_p \sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}}$$

является ожидаемой плотностью лагранжиана движущейся D-браны. Этот результат подтверждает данную выше интерпретацию X.

Мы хотим вычислить плотность лагранжиана (1) в случае, когда есть только электрическое поле \vec{E} . Для удобства определим $\vec{\mathcal{E}} = 2\pi \alpha' \vec{E}$.

(б) Для упрощения вычисления детерминанта воспользуемся симметрийными аргументами, так же как в п. (б) задачи 20.4. Выберите координатные оси так, чтобы электрическое поле было направлено вдоль первой оси: только \mathcal{E}_1 не равна нулю. В этой задаче присутствует другой вектор: градиент ∇X поля X. Оси выбраны так, что этот вектор лежит в плоскости, образованной первой и второй осями, так что отличны от нуля только $(\nabla X)_1 \equiv X_1$ и $(\nabla X)_2 \equiv X_2$. Покажите, что при данных условиях детерминант в (1) равен

$$\det (\eta_{mn} + \ldots) = -1 + \dot{X}^2 - X_1^2 - \dot{X}_2^2 + \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_1^2 X_2^2.$$
(2)

(в) Вращательная инвариантность детерминанта означает, что он может быть записан через скалярные произведения векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и ∇X и через скаляр \dot{X} . Воспользуйтесь этим свойством, чтобы найти

$$\mathcal{L} = -T_p \sqrt{(1-\mathcal{E}^2)(1+(\nabla X)^2) + (\vec{\mathcal{E}} \cdot \nabla X)^2 - \dot{X}^2}.$$
 (3)

520



Рис. 20.1. Задача 20.7: струна, заканчивающаяся на D-бране, представляется в теории Борна—Инфельда решением, в котором деформируется сама брана

Задача 20.7. Струна, заканчивающаяся на D-бране в теории Борна—Инфельда: часть 2

Описание струны, заканчивающейся на Dp-бране, в теории Борна—Инфельда содержит электрическое поле на бране, созданное заряженным концом струны, и возбуждение скалярного поля X, соответствующее смещению браны в направлении струны (см. рис. 20.1). Данное направление считается нормальным к бране. Таким образом, можно использовать плотность лагранжиана (3), полученную в задаче 20.6:

$$\mathcal{L} = -T_p \sqrt{(1-\mathcal{E}^2)(1+(\nabla X)^2) + (\vec{\mathcal{E}} \cdot \nabla X)^2 - \dot{X}^2}.$$
 (1)

Здесь электрическое поле это:

$$ec{\mathcal{E}}=2\pilpha'ec{E}=
abla \mathcal{A}_0-\partial_ auec{\mathcal{A}},$$

где $\mathcal{A}_{\mu} \equiv 2\pi \alpha' \mathcal{A}_{\mu}$.

(a) Объясните, почему уравнения движения, возникающие из вариации \vec{A} , выполняются при условии, что все поля не зависят от времени.

Таким образом, будем предполагать, что все поля действительно не зависят от времени, и, более того, положим $\vec{\mathcal{A}} = 0$, что согласуется с допущением об отсутствии магнитных полей F_{ij} . В этом случае плотность лагранжиана принимает вид

$$\mathcal{L} = -T_p \sqrt{\left(1 - \left(\nabla \mathcal{A}_0\right)^2\right) \left(1 + (\nabla X)^2\right) + \left(\nabla \mathcal{A}_0 \cdot \nabla X\right)^2}.$$
 (2)

(б) Выведите уравнения движения, возникающие из вариаций δX и δA_0 действия, соответствующего плотности лагранжиана (2). Представьте их в виде $\nabla \cdot [...] = 0$. Покажите, что оба уравнения выполнены, если

$$\vec{\mathcal{E}} = \nabla \mathcal{A}_0 = \pm \nabla X, \quad \nabla^2 \mathcal{A}_0 = \nabla^2 X = 0,$$
 (3)

для любого выбора знака.

(в) Покажите, что когда выполняется $\vec{\mathcal{E}} = \nabla \mathcal{A}_0 = \pm \nabla X$ (уравнение (3)), имеем

$$\vec{D} = 2\pi \alpha' T_p \vec{\mathcal{E}},\tag{4}$$

а энергия

$$U = \int d^p x (\vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L})$$

задается выражением

$$U = T_p \int d^p x (1 + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}).$$
 (5)

Первый член в U соответствует энергии покоя Dp-браны. Как будет обсуждаться далее, второй член дает энергию, соответствующую струне, заканчивающейся на D-бране.

Пусть *r* обозначает радиальное расстояние на D-бране. Решение для струны, заканчивающейся в r = 0, получается из решения уравнения $\nabla \cdot \vec{D} = +\delta(r)$ (см. (20.69)). Решение для \vec{D} (и для $\vec{\mathcal{E}}$) сферически симметрично; также и решение для X, имеющее вид X(r). В дополнение предположим, что $p \ge 3$ и в этом случае можно потребовать, что $X(\infty) = 0$ (объясните почему!). Знак в $\vec{\mathcal{E}} = \pm \nabla X$ определяет, расположена струна вдоль положительной оси x (как на рисунке) или вдоль отрицательной оси x. Какой знак следует выбрать для конфигурации, показанной на рисунке?

- (г) Покажите, что энергия $U_s = T_p \int d^p x \, \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ бесконечна.
- (д) Для интерпретации бесконечного значения U_s рассмотрите область на D-бране с $r > \delta$, а $U_s(\delta)$ пусть обозначает энергию, сосредоточенную в этой области. Покажите, что

$$U_{s}(\delta) = T_{p} \int_{r > \delta} d^{p} x \, \nabla X \cdot \nabla X = T_{p} |X(\delta)| \times \text{Поток } \vec{\mathcal{E}} \text{ через } S^{p-1}(\delta), \quad (6)$$

где $S^{p-1}(\delta)$ обозначает (p-1)-мерную сферу радиуса δ . Наконец, сделайте вывод, что

$$U_s(\delta) = \frac{1}{2\pi\alpha'} |X(\delta)|.$$
 (6)

Так как $1/(2\pi\alpha')$ — натяжение струны, данный результат подтверждает то, что $U_s(\delta)$ — это энергия части струны, натянутой от x = 0 до $x = |X(\delta)|$. При $\delta \to 0$ энергия расходится, потому что это энергия бесконечно длинной струны.

Глава 21

Теория струн и физика частиц

Конфигурации пересекающихся D6-бран в IIA-теории суперструн определяют струнные модели физики частиц. Состояния открытых струн, допустимые при пересечении бран, приводят естественным образом к киральным фермионам — ключевым частицам Стандартной модели. Модули компактификации, являющиеся подгоночными параметрами, приводят к нежелательным безмассовым скалярам и должны быть стабилизированы. Компактификации потоков дают стабилизацию модулей и приводят к крайне большому ландшафту струнных вакуумов. Существование вакуумов, вакуумная энергия которых соответствует наблюдаемому в настоящее время значению, становится статистически правдоподобным.

21.1. Пересекающиеся D6-браны

В этом разделе рассматривается конфигурация D-бран с набором свойств, которые делают ее хорошей отправной точкой для построения струнной модели физики частиц. Так как необходимы фермионы, будем пользоваться десятимерной теорией суперструн. В этой теории шесть измерений из десяти, x^4, \ldots, x^9 , выбираются в качестве малого компактного пространства конечного объема. Это необходимо для того, чтобы иметь эффективно четырехмерное пространство-время (с координатами x^0, x^1, x^2 и x^3). Компактное пространство просто настолько, насколько это возможно: каждое измерение закручено в окружность, так что получается шестимерный тор T^6 . Будем предполагать, что все окружности имеют одинаковый радиус $R: x^i \simeq x^i + 2\pi R$ для $i = 4, \ldots, 9$.

Для получения эффективной четырехмерной теории Янга—Миллса требуются D-браны, имеющие по-крайней мере три пространственных измерения, расположенных вдоль пространственных координат x^1 , x^2 и x^3 эффективного пространства-времени. Таким образом, будем использовать Dp-браны с $p \ge 3$. Фактически, в данном разделе мы будем работать с D6-бранами в IIA-теории суперструн. Конечно же, это только один из многих возможных выборов, которые могут быть использованы для построения модели. Также будем допускать пересечение D6-бран. Когда две D-браны пересекаются, обнаруживается сектор открытых струн, натянутых от одной браны к другой и локализованных вблизи пересечения. При определенных обстоятельствах подобные струны приводят к полям материи со свойствами фермионов Стандартной модели. Мы подробно рассмотрим этот вопрос в разделах 21.3 и 21.4. Наша основная цель в данном разделе — это разобраться в геометрии пересекающихся D-бран.

Давайте опишем две D6-браны, пересекающиеся на торе T^6 , введенном ранее. Три из девяти пространственных направлений десятимерного пространствавремени D6-браны имеют тип Дирихле и шесть — тип Неймана. Как упоминалось выше, три направления типа Неймана должны быть x^1 , x^2 и x^3 , а остальные три лежат на T^6 . Три направления типа Дирихле также находятся на T^6 . Положение D6-браны может быть определено заданием значений координат вдоль трех направлений типа Дирихле. Таки образом, пусть первая D6-брана определена соотношениями

D6-брана #1:
$$x^5 = x^7 = x^9 = 0,$$
 (21.1)

а вторая D6-брана определена соотношениями

D6-брана #2:
$$x^4 = x^6 = x^8 = 0.$$
 (21.2)

Точка принадлежит пересечению, если она принадлежит обеим D6-бранам. Условия (21.1) должны выполняться для любой точки, принадлежащей первой D6бране, а условия (21.2) должны выполняться для любой точки, принадлежащей второй D6-бране. В итоге, точки принадлежат пересечению, если

условия пересечения:
$$x^4 = x^5 = x^6 = x^7 = x^8 = x^9 = 0.$$
 (21.3)

Так как рассмотренные выше координаты являются координатами на торе T^6 , то D6-браны пересекаются в *точке* тора — точке (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). Однако, в пространстве-времени пересечение D6-бран это набор точек

набор точек пересечения:
$$(x^0, x^1, x^2, x^3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$
 при $x^0, x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}$.
(21.4)

Пересечение D6-бран заполняет эффективное четырехмерное пространство-время.

Простой способ представить пересечение D6-бран состоит в описании шестимерного тора T^6 в терминах трех двумерных 2-торов T^2 . Пишем $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$, в том же смысле что и $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Действительно, 6-тор эквивалентен 2-тору в направлениях x^4 и x^5 , 2-тору в направлениях x^6 и x^7 и 2-тору в направлениях x^8 и x^9 . Эти три 2-тора показаны на рис. 21.1. На каждом T^2 каждая



Рис. 21.1. Две D6-браны на T^6 , представленные как произведение трех 2-торов T^2 . Брана #1 расположена вдоль x^4 , x^6 и x^8 и появляется как жирная горизонтальная линия. Брана #2 расположена вдоль x^5 , x^7 и x^9 и появляется как жирная вертикальная линия. Также показана струна, натянутая между первой и второй бранами

Координата	x ^{1,2,3}	x ⁴	x ⁵	x ⁶	x ⁷	<i>x</i> ⁸	x ⁹	
D6#1	-	-	•		•	_	•	
D6#2	-	•		•		•	-	
Сектор [11]	NN	NN	DD	NN	DD	NN	DD	
Сектор [22]	NN	DD	NN	DD	NN	DD	NN	
Сектор [12]	NN	ND	DN	ND	DN	ND	DN	
Сектор [21]	NN	DN	ND	DN	ND	DN	ND	
Замечание. Ко а координаты	ординаты , нормалы	, вдоль кот ные к бране	орых расп	оложены D	-браны, от педних четн	мечены зн прех строка	аком «», х указаны	

граничные условия для струнных координат в четырех возможных секторах открытых

струн

Конфигурация двух пересекающихся D6-бран

брана возникает как линия; на самом деле, вследствие (21.1), брана #1 появляется как горизонтальная линия, а брана #2 появляется как вертикальная линия, вследствие (21.2). На каждом T^2 данные прямые линии на самом деле являются окружностями, потому что их концы отождествляются. Две рассматриваемые D6-браны пересекаются в точке на T^6 , потому что данные линии пересекаются в точке на каждом T^2 . Отметим, что полное пересечение характеризуется тремя углами пересечения, по одному на каждый T^2 . В рассматриваемом случае эти углы равны $\pi/2$. На рисунке также показана струна в секторе [12]. На каждом из T^2 мы видим проекцию струны, натянутой от первой браны ко второй.

По аналогии с другими конфигурациями D-бран, мы можем составить таблицу для описания двух D-бран и граничных условий в различных секторах открытых струн. Результат записан в табл. 21.1. Примечательно, что в секторах [12] и [21] струнные координаты вдоль тора имеют тип DN или ND. Это происходит потому, что на каждом T^2 браны пересекаются ортогонально. Оси выбраны таким образом, что любая координата на T^6 лежит вдоль одной браны и ортогональна другой. Граничные условия для струнных координат при произвольных углах пересечения являются несколько более сложными.

Нам интересны конфигурации D6-бран, полученные при более общих углах пересечения между линиями, соответствующими D-бранам на каждом T^2 . Для этой цели сперва необходимо понять, как на 2-торе пересекаются две линии. Линии, которые будут рассматриваться, являются на самом деле замкнутыми прямыми линиями: проекции бран на торы образуют либо окружности, либо отрезки с отождествленными концами. Это физически обосновано: натяжение браны заставляет их быть прямыми. Более того, если они не замкнуты, то их длина будет бесконечной, что потребует бесконечной энергии покоя.

Можно работать с тором, определенным на плоскости (x, y) путем отождествлений $x \simeq x + 1$ и $y \simeq y + 1$, где, по соглашению, расстояние между отождество

525

Таблица 21.1



Рис. 21.2. Отрезок, соединяющий точки (0, 0) и (3, 1), и соответствующая замкнутая линия l = (3, 1) на (затемненном) торе. Отрезок проходит сквозь три копии фундаментальной области, так что он представлен на фундаментальной области в виде трех отрезков, обозначенных a, b и c

ленными точками выбрано равным единице. Данный тор можно рассматривать как единичный квадрат $0 \leq x, y \leq 1$ с граничными отождествлениями. Можно использовать два взаимно простых целых числа (m, n) для описания *ориентированной* замкнутой линии на этом торе: данная линия строится на плоскости (x, y)как ориентированный прямой отрезок, проведенный из начала координат (0,0) в точку (m, n). Тогда отождествления могут быть использованы для распространения отрезка на весь квадрат $0 \le x, y \le 1$. Отметим, что при отождествлении $(m, n) \simeq (0, 0)$, поэтому данный отрезок является замкнутой кривой на торе. Так как т и п взаимно просты, отрезок на плоскости не приходит в точку с целыми координатами нигде, кроме своих концов. Это означает, что линия на торе не замыкается, прежде чем заканчивается отрезок. Если m и n не взаимно просты, то их наибольший общий делитель является числом витков данной линии на торе. Мы будем рассматривать линии, для которых *m* и *n* взаимно просты. Если одно из двух целых чисел — это ноль, то оставшееся должно быть либо плюс либо минус один, иначе кривая будет многократно намотана. Пример линии (3, 1) показан на рис. 21.2.

Теперь рассмотрим линию $\ell_1 = (m_1, n_1)$ и другую линию $\ell_2 = (m_2, n_2)$. Вопрос: сколько раз на торе эти линии пересекаются? Ответ в простом утверждении (мы обсудим его происхождение чуть позже): число пересечений $\#(\ell_1, \ell_2)$ — это

$$\#(\ell_1, \ell_2) = m_1 n_2 - m_2 n_1 = \det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$
 (21.5)

Данное число пересечений можно интерпретировать как *z*-компоненту векторного произведения $(m_1, n_1, 0)$ и $(m_2, n_2, 0)$. Это означает, что число пересечений совпадает с площадью параллелограмма, ограниченного векторами ℓ_1 и ℓ_2 . Число пересечений, в том виде в каком мы его определили, является антисимметричным относительно перестановки двух линий: $\#(\ell_1, \ell_2) = -\#(\ell_2, \ell_1)$. Знак, ассоциированный с пересечением, имеет смысл, потому что мы оперируем с ориентированными линиями. При $\#(\ell_1, \ell_2) > 0$, ориентированная линия ℓ_1

располагается в одном направлении с ℓ_2 после поворота *против часовой стрелки* на угол, меньший π . При $\#(\ell_1, \ell_2) < 0$ выравнивание происходит после поворота *по часовой стрелке* на угол, меньший π . Например, число пересечений $\ell_1 = (1, 0)$ с $\ell_2 = (0, 1)$ равно

$$\#(l_1, l_2) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = +1.$$
(21.6)

Согласованное со знаком плюс, вращение $\ell_1 = (1, 0)$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$ приводит к $\ell_2 = (0, 1)$. Так как мы оперируем с прямыми линиями, угол пересечения в каждой точке пересечения одинаковый и вращение, требуемое для выравнивания ориентированных линий, имеет одинаковой тип.

• Упражнение-разминка 21.1. Рассмотрите $\ell_1 = (-1, 1)$ и $\ell_2 = (1, 1)$. Вычислите $\#(\ell_1, \ell_2)$, отождествите точки пересечений на торе и убедитесь, что знак числа пересечений соответствует ожидаемому.

На рис. 21.3 показано пересечение линий $\ell_1 = (3, 2)$ и $\ell_2 = (1, 2)$. Линия $0 \le x$, $y \le 1$ на квадрате ℓ_1 появляется в виде четырех отрезков, а линия ℓ_2 появляется в виде двух отрезков. Во внутренности квадрата имеются две точки пересечений.



Рис. 21.3. Линии $l_1(3, 2)$ и $l_2(1, 2)$ на (затемненном) торе пересекаются четыре раза. Клетка C, натянутая на l_1 и l_2 , является параллелограммом с площадью, равной четырем

На горизонтальных сторонах есть одна точка пересечения (на двух сторонах она отождествлена). Также есть одна точка пересечения в углах, которые все отождествляются. В целом, это приводит к четырем точкам пересечений. Число пересечений может быть вычислено напрямую посредством (21.5), и получается ожидаемый ответ: $\#(\ell_1, \ell_2) = 3 \times 2 - 1 \times 2 = 4$.

Формула (21.5) для числа пересечений дает ноль в случае пресечения линии с самой собой. Такая линия полностью совпадает сама с собой и в чем тогда смысл нуля? Его значение топологическое: одну из двух данных совпадающих на торе линий можно немножко сместить и получить ситуацию, в которой линии более не пересекаются. Например, рассмотрим линию (1,0); немного смещенная версия этой замкнутой линии: $0 \le x \le 1$, $y = \epsilon$, где ϵ — малос положительное число. Новая замкнутая линия не имеет общих точек с замкнутой линией (1,0). Число пересечений — это топологическая величина; приблизительно, число пересечений двух линий не изменяется при малых деформациях этих линий. Вот почему число пересечений совпадающих линий равно нулю.

Упражнение-разминка 21.2. Покажите на торе линию l = (1, 1) и вторую линию, параллельную l, которая получена малым смещением l.

Теперь кратко поясним происхождение (21.5). Рассмотрим плоскость (x, y)с предыдущими единичными отождествлениями $x \simeq x + 1$ и $y \simeq y + 1$, и подумаем о решетке точек с целочисленными координатами. Базис такой единичной клетки на решетке состоит из векторов (1,0) и (0,1). Отождествления на единичной клетке дают единичный тор. Клетка C с базисными векторами ℓ_1 и ℓ_2 является параллелограммом с некоторой целочисленной площадью І. С можно использовать для построения большого тора $\widehat{\mathcal{C}}$ путем склеивания параллельных сторон $\widehat{\mathcal{C}}$. Если произвольную точку на плоскости обозначить как $\vec{x} = (x, y)$, то большой тор возникает при отождествлении $\vec{x} \simeq \vec{x} + \ell_1$ и $\vec{x} \simeq \vec{x} + \ell_2$. Мы хотим показать, что площадь *I* тора $\widehat{\mathcal{C}}$ — это число пересечений замкнутых линий ℓ_1 и ℓ_2 на единичном торе. Про решетки хорошо известно, что тор $\widehat{\mathcal{C}}$ содержит Iкопий каждой точки на единичном торе. Давайте теперь вычислим полное число копий, возникающих из набора точек пересечений на единичном торе. Для этого необходимо найти все пересечения между всеми копиями ℓ_1 и всеми копиями ℓ_2 . Тор $\widehat{\mathcal{C}}$ содержит I копий линии ℓ_1 : одна копия задается как край ℓ_1 клетки C (и другой параллельный край), и оставшиеся (I - 1) копий — это отрезки, параллельные ℓ_1 , проходящие через внутренность $\mathcal C$. Аналогичным образом, $\widehat{\mathcal C}$ содержит I копий линии ℓ_2 . На $\widehat{\mathcal{C}}$ каждая копия ℓ_1 пересекает один раз каждую копию ℓ_2 , поэтому всего имеется $I \times I$ различных точек пересечений на \widehat{C} . Отсюда следует, что на единичном торе существует $I^2/I = I$ различных точек пересечений. Это то, что мы хотели доказать.

- Упражнение-разминка 21.3. Объясните, почему внутренность С содержит (I-1) точек с целочисленными координатами. Также объясните, почему копии l₁ и l₂ на внутренности С проходят через точки с целочисленными координатами.
- () Упражнение-разминка 21.4. Найдите координаты точек пересечений между линиями $l_1(3, 2)$ и $l_2(1, 2)$ (рис. 21.3). Выразите ваши ответы, используя точки на единичной клетке $0 \le x, y \le 1$.

Теперь можно вернуться к D6-бранам с тремя направлениями, намотанными на T^6 . Каждая намотка задается тремя линиями (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) . Линия ℓ_i представляет направление D-браны на i-ом торе T^2 . Первая D6-брана из предыдущего примера описывается теперь $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = (1, 0)$. Вторая брана описывается $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = (0, 1)$. Когда D6-брана задается тремя ориентированными линиями, то, на самом деле, трехмерному подпространству D6-браны, лежащему на T^6 , приписывается некоторая ориентация. Ориентация пространства размерности k определяется выбором ориентированного набора k линейно независимых касательных векторов. Например, двумерная плоскость (x, y) может быть ориентирована с использованием упорядоченной пары касательных векторов ((1, 0), (0, 1)). Интуитивно это определяет на данной плоскости циркуляцию; циркуляция это направление, в котором необходимо вращать первый вектор (на угол меньший π), чтобы расположить его вдоль второго вектора. Более простым способом, ориентация поверхности внутри \mathbb{R}^3 определяется ориентированным направлением, нормальным к поверхности. Для трехмерного подпространства D6-браны лежащего на T^{6} , набором упорядоченных векторов является (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) .

Рассмотрим теперь общую ситуацию, в которой имеется две D6-браны, a и b, каждая из которых имеет три направления, намотанных вокруг T^6 . Подобная конфигурация задается

D6-брана a:
$$(\ell_1^{(a)}, \ell_2^{(a)}, \ell_3^{(a)}),$$

D6-брана b: $(\ell_1^{(b)}, \ell_2^{(b)}, \ell_3^{(b)}).$ (21.7)

Сколько раз D6-браны пересекаются на T^6 ? Они пересекаются такое число раз I_{ab} , которое равно произведению чисел пересечений соответствующих линий на каждом из трех 2-торов. Действительно, общая точка пересечения на T^6 получается выбором одной точки пересечения на каждом из трех 2-торов. Таким образом, имеем

$$I_{ab} = \#(\ell_1^{(a)}, \ell_1^{(b)}) \cdot \#(\ell_2^{(a)}, \ell_2^{(b)}) \cdot \#(\ell_3^{(a)}, \ell_3^{(b)}) = \prod_{i=1}^3 \#(\ell_i^{(a)}, \ell_i^{(b)}).$$
(21.8)

Если положить $\boldsymbol{\ell}_i^{(a)} = \left(m_i^a, n_i^a
ight)$ и $\boldsymbol{\ell}_i^{(b)} = \left(m_i^b, n_i^b
ight)$, то

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^{3} (m_i^a n_i^b - m_i^b n_i^a).$$
 (21.9)

Число I_{ab} имеет знак, у которого есть непосредственная интерпретация. Так как имеется три пересечения, то существуют три вращения, необходимые для выравнивания браны a с браной b. Знак I_{ab} отрицателен, если число вращений по часовой стрелке нечетно, и положительно, если число вращений по часовой стрелке четно. I_{ab} — это число пересечений двух ориентированных D6-бран. В моделях физики частиц, построенных с пересекающимися D6-бранами, из открытых струн, локализованных около каждого пересечения, возникают четырехмерные киральные фермионы. Более того, знак числа пересечений определяет ориентацию открытых струн, соответствующих киральным фермионам. Эти вопросы будут рассмотрены более детально в разделе 21.3 и 21.4.

Если $I_{ab} = 0$, то по-крайней мере одно из трех чисел пересечений $\#(\ell_i^{(a)}, \ell_i^{(b)})$, i = 1, 2, 3, должно быть равно нулю. Предположим, что число пересечений равно нулю только для i = 1. Тогда $\ell_1^{(a)}$ и $\ell_1^{(b)}$ должны быть либо параллельными, либо антипараллельными. Так как эти линии определяются взаимно простыми целыми числами, необходимо положить $\ell_1^{(a)} = \pm \ell_2^{(b)}$. Тогда две D-браны на наборе nокружностей совпадают: окружность — это общая замкнутая кривая на первом торе, а n — это абсолютное значение произведения чисел пересечений на втором и третьем торах. Если $\ell_1^{(a)}$ немножко смещена так, что она не совпадает с $\ell_1^{(b)}$, то тогда у двух D-бран также не будет общих точек. Имея это в виду, мы говорим, что две браны с нулевым числом пересечений не пересекаются.

21.2. D-браны и калибровочная группа Стандартной модели

Мы видели, что в мировом объеме N совпадающих D-бран существует U(N)-калибровочные поля, или калибровочные бозоны, чья низкоэнергетическая динамика описывается теорией Янга—Миллса с калибровочной группой U(N). Калибровочной бозоны Стандартной модели — глюоны, W^{\pm} и Z, и фотон — все описываются теориями Янга—Миллса. В этом разделе мы будем изучать калибровочную группу Стандартной модели, обращая особое внимание на подобие конфигураций D-бран, из которых они могли бы возникать.

Начнем с глюонов — калибровочных бозонов, являющихся переносчиками цветового сильного взаимодействия. Глюоны описываются четырехмерной SU(3)-теорией Янга—Миллса. Эта теория близко связана с U(3) теорией Янга— Миллса, возникающей при низких энергиях на мировом объеме трех совпадающих D3-бран (см. раздел 15.3). Мы воспользуемся бранным описанием для понимания того, что такое SU(3). Конфигурация D-бран для U(3) показана на рис. 21.4, где D-браны были разделены в целях демонстрации различных струн. Существуют девять открытых струнных секторов; они нумеруются [ij], при i, j = 1, 2, 3. На рисунке показано по одной струне из каждого сектора. Каждый сектор содержит струнное состояние, соответствующее некоторому калибровочному полю.

Каждая из трех D-бран обладает своим собственным полем Максвелла. Эти три поля Максвелла $A_{(i)\mu}$ (i = 1, 2, 3) ассоциированы с состояниями $\alpha_{-1}|[ii]\rangle$, соответствующими открытым струнам, начинающимся и заканчивающимся на одной и той же D-бране. Записывая $\alpha_{-1}|[ii]\rangle$, мы не стали указывать у состояний импульсные индексы и осцилляторные пространственно-временные индексы. С помощью этих калибровочных полей можно построить общий класс состояний:

$$\sum_{i=1}^{3} A_{(i)} \alpha_{-1} |[ii]\rangle, \qquad (21.10)$$

где пространственно-временные индексы калибровочных полей также опущены.



Рис. 21.4. Три D-браны, приводящие к U(3)-калибровочным бозонам. Для удобства браны показаны разделенными, однако подразумевается, что они совпадают. Показаны девять струн, каждая принадлежит одному из девяти струнных секторов

Теперь рассмотрим взаимодействия, однако ограничимся низкими энергиями, при которых струнные взаимодействия сводятся к теории Янга—Миллса. Поля Максвелла $A_{(i)}$ не взаимодействуют друг с другом, потому что правило комбинации секторов (15.59) не позволяет этого: концы различных струн никогда не лежат на одной бране. Так как поля Максвелла являются свободными, то «самодействие» также отсутствует. Однако, поля Максвелла $A_{(i)}$ взаимодействуют с любым состоянием, обладающим электрическим зарядом. Из девяти калибровочных полей в рассматриваемой конфигурации D-бран, три поля Максвелла $A_{(i)}$ являются выделенными. Все вместе они составляют максимально возможный набор калибровочных полей, не взаимодействующих друг с другом.

Любое струнное состояние характеризуется значениями зарядов q_1 , q_2 и q_3 , которыми оно обладает по отношению полям Максвелла $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ и $A_{(3)}$, соответственно. Данные заряды состояния суммарно обозначаются как (q_1, q_2, q_3) . По соглашению, ориентированная открытая струна обладает единичным отрицательным зарядом на конце $\sigma = 0$ и единичным положительным зарядом на конце $\sigma = \pi$. Например, струна в секторе [12] обладает зарядами (-1, 1, 0). Здесь $q_1 = -1$, так как струна начинается на первой бране, $q_2 = +1$, так как струна заканчивается на второй бране, и $q_3 = 0$, потому что ни один из концов не лежит на третьей бране. Для любой струны, натянутой от одной браны к другой, отличной от нее, бране, один заряд имеет значение плюс один, другой — минус один, а третий равен нулю; сумма трех зарядов равна нулю. На самом деле для струны, начинающейся и заканчивающейся на одной бране, все заряды равны нулю.

Если думать о струне в пределе, в котором она становится точкой с пространственно-временными координатами x^{μ} , то существование трех зарядов подразумевает следующее взаимодействие траектории с полями Максвелла:

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \int A_{(i)} dx = \int \left(\sum_{i=1}^{3} A_{(i)} q_i \right) dx.$$
 (21.11)

В силу (21.10), замена базиса в пространстве состояний, натянутом на $\alpha_{-1}|[ii]\rangle$, приводит к линейному переопределению полей Максвелла. С другой стороны, (21.11) означает, что линейное переопределение полей Максвелла приводит к линейному переопределению зарядов.

Так как идея переопределения полей и зарядов может быть незнакомой, приведем пример. Рассмотрим два поля Максвелла A_1 и A_2 , и пусть (q_1, q_2) обозначает заряды заданной частицы по отношению к вышеуказанным полям Максвелла. Утверждение состоит в том, что физическая система может быть описана с использованием другого набора полей Максвелла с другими зарядами. Чтобы продемонстрировать это, введем новые поля $A_{\pm} = (A_1 \pm A_2)/\sqrt{2}$, построенные из исходных полей A_1 и A_2 . При таком подходе, сумма в правой части (21.11) содержит только два слагаемых и может быть переписана в виде

$$A_1q_1 + A_2q_2 = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}} \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} + \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}} \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} = A_+q_+ + A_-q_-, \quad (21.12)$$

где мы определили $q_{\pm} = (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$. Мы требуем, чтобы физика могла быть описана с использованием полей Максвелла A_+ и A_- и частиц с зарядами $[q_+, q_-]$. Например, представим две заряженные частицы. В первом описании (с использованием A_1 и A_2), первая частица обладает зарядами (1, 0) и вторая частица обладает зарядами (0, 1). Очевидно, что эти частицы не испытывают электростатического взаимодействия: вторая частица не обладает зарядом относительно A_1 , а первая частица не обладает зарядом относительно A_2 . Теперь опишем те же две частицы с помощью полей A_+ и A_- . Новые заряды равны $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ для первой частицы, и $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ для второй частицы. Взаимодействие между частицами теперь приводит к двум взаимосокращающимся вкладам: две частицы обладают одинаковым зарядом относительно A_+ , однако они обладают также зарядами относительно A_- одинаковой величины, но противоположных знаков. Суммарное взаимодействие по-прежнему равно нулю. В общем, можно убедиться, что электростатическое взаимодействие между произвольными заряженными частицами не изменяется.

() Упражнение-разминка 21.5. Рассмотрите две частицы с зарядами (q_1, q_2) и (q'_1, q'_2) , соответственно. Электростатическое взаимодействие между ними пропорционально $q_1q'_1 + q_2q'_2$. Пусть переопределенные заряды двух данных частиц — это q_+, q_- и q'_+, q'_- , соответственно. Покажите, что $q_+q'_+ + q_-q'_- = q_1q'_1 + q_2q'_2$.

Возвращаясь к рассматриваемой бранной конфигурации, теперь потребуем, чтобы девять калибровочных полей могли быть разбиты на два набора, такие, что калибровочные поля из одного набора не взаимодействуют с калибровочными полями из второго набора. В одном наборе находится восемь калибровочных полей, а в другом наборе — одно калибровочное поле. Это особое калибровочное поле является полем Максвелла $\overline{A}_{(3)}$, соответствующим состоянию

$$|s_{3}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_{-1} | [11] \rangle + \alpha_{-1} | [22] \rangle + \alpha_{-1} | [33] \rangle).$$
 (21.13)

Так как поля Максвелла взаимодействуют только с заряженными объектами, достаточно показать, что никакое из калибровочных полей не обладает связанным с ним зарядом. На самом деле утверждается, что заряд $\bar{q}_{(3)}$, ассоциированный

с $\overline{A}_{(3)}$, задается

$$\bar{q}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1 + q_2 + q_3).$$
 (21.14)

Если это выражение выполняется, то утверждение справедливо; мы видели, что сумма трех зарядов равна нулю для любой струны, полностью принадлежащей рассматриваемой конфигурации D-бран.

Для доказательства данных утверждений, рассмотрим замену базисных состояний, соответствующую общему обратимому линейному преобразованию:

$$|s_i\rangle = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} \alpha_{-1} |[jj]\rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$
 (21.15)

Это матричное уравнение можно переписать в матричных обозначениях

$$\mathbf{s} = M\mathbf{v}.\tag{21.16}$$

Здесь s обозначает вектор-столбец с элементами $|s_i\rangle$, v обозначает вектор-столбец с элементами $\alpha_{-1}|[ii]\rangle$, и M — это обратимая матрица с компонентами M_{ij} . Обозначая вектор-строку с элементами A как $A_{(i)}$, мы видим, что общее состояние в (21.10) может быть переписано в виде точечного умножения:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{M} \mathbf{v} = \mathbf{A} \boldsymbol{M}^{-1} \cdot \mathbf{s} \equiv \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}, \qquad (21.17)$$

где $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}M^{-1}$ обозначает поля Максвелла, соответствующие новым базисным состояниям. Теперь уравнение (21.11) можно использовать для нахождения новых зарядов для новых полей, которые являются линейными комбинациями старых зарядов. Рассматривая пары соответствующих полей и зарядов, и обозначая вектор-столбец зарядов **q** как q_i , имеем

$$\sum_{i=1}^{3} A_{(i)}q_{i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}M^{-1} \cdot M\mathbf{q} = \mathbf{\bar{A}} \cdot M\mathbf{q} \equiv \mathbf{\bar{A}} \cdot \mathbf{\bar{q}}.$$
 (21.18)

Здесь новые заряды q выражаются через старые заряды q

$$\bar{\mathbf{q}} = M\mathbf{q}.\tag{21.19}$$

Мы видим, что матрица M, определяющая новые состояния (21.16), также определяет новые заряды. Это вполне разумно, так как уравнения (21.10) и (21.11) демонстрируют, что состояния и заряды взаимодействуют с полями одинаковым способом. Полученный результат показывает, что (21.13) приводит к (21.14). Это именно то, что необходимо было обосновать, чтобы заключить, что $\overline{A}_{(3)}$ отщепляется от остальных восьми калибровочных полей в конфигурации D-бран. Можно доказать, что остальные восемь калибровочных полей не могут быть далее разбиты на наборы полей, попарно не взаимодействующих друг с другом.

Есть один небольшой вопрос, который следует задать. Для того чтобы корректно задать заряды, необходимо сохранить нормировку F^2 в действии для

полей Максвелла. Пусть **F** и **F** обозначают вектор-строки полевых напряженностей, полученных из вектор-строк калибровочных полей **A** и **Ā**, соответственно. Тогда соотношение **A** = $\overline{A}M$ означает, что **F** = $\overline{F}M$. Сумма слагаемых F^2 — это просто **F** · **F**, где правый множитель необходимо понимать как вектор-столбец, полученный транспонированием вектор-строки, обозначаемой тем же символом. **B** итоге, имеем

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}} M \cdot M^T \overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}} \cdot M M^T \overline{\mathbf{F}}.$$
 (21.20)

Чтобы получить слагаемые \overline{F}^2 с такой же нормировкой что и у слагаемых F^2 , необходимо иметь $MM^T = 1$, т. е. матрица M должна быть ортогональной. Это не является жестким ограничением; ортогональная M получается, если (21.13) дополнить состояниями

$$|s_{1}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\alpha_{-1} | [11] \rangle + \alpha_{-1} | [22] \rangle + \alpha_{-1} | [33] \rangle \right),$$

$$|s_{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\alpha_{-1} | [11] \rangle + \alpha_{-1} | [22] \rangle \right).$$
(21.21)

Упражнение-разминка 21.6. Явно выпишите матрицу М и проверьте, что она ортогональна.

Интересно заметить, что отщепленное калибровочное поле получается добавлением похожих состояний от каждой из трех D-бран. Можно также рассмотреть состояние

$$\alpha_{-1}^{a}|[11]\rangle + \alpha_{-1}^{a}|[22]\rangle + \alpha_{-1}^{a}|[33]\rangle, \qquad (21.22)$$

где индекс *a* соответствует направлению, нормальному к D-бранам. Данное состояние связано со смещением *полного* набора D-бран в направлении x^a (см. обсуждение после (15.37)). Также как калибровочные поля на D-бране порождали безмассовые скалярные возбуждения, описывающие ее движение, состояния, рассмотренные выше, порождены отщепленными калибровочными полями.

Ранее упоминалось, что теория калибровочных полей Максвелла это U(1)теория Янга—Миллса. Было также показано, что U(3) теория Янга—Миллса девяти взаимодействующих калибровочных полей на трех совпадающих D-бранах содержит отщепленную U(1)-теорию, которая была явно предъявлена. Оставшиеся восемь взаимодействующих калибровочных полей определяют так называемую SU(3) калибровочную теорию. Эта теория, описывающая динамику восьми безмассовых глюонов квантовой хромодинамики (КХД). С точки зрения теории групп, U(3) — это группа 3 на 3 унитарных матриц и SU(3) — это подгруппа U(3), полученная рассмотрением унитарных матриц с единичным детерминантом. Связь между группой U(3) и группами SU(3) и U(1) записывается в виде

$$U(3) = SU(3) \times U(1), \tag{21.23}$$

где понятие произведения используется для групп, действующих независимо. Уравнение (21.23) описывает локальную связь между группами, являющимися также многообразиями; оно не учитывает вопросы топологического характера.

Наш физический анализ частично подтверждает это понятие, однако не показывает, что два фактора соответствуют калибровочным теориям, чьи поля не взаимодействуют друг с другом. Цветовое взаимодействие описывается группой SU(3), поэтому для получения этой теории из конфигурации с тремя совпадающими D-бранами необходимо осознать роль дополнительного поля Максвелла. Обсуждение этого вопроса будет продолжено в следующем разделе. В общем случае,

$$U(N) = SU(N) \times U(1),$$
 (21.24)

где U(N) — это теория с N^2 калибровочными полями и SU(N) — это теория с $N^2 - 1$ калибровочными полями. Как указывалось ранее, U(N)-калибровочные поля возникают в мировом объеме N совпадающих D-бран.

Полный набор калибровочных бозонов Стандартной модели описывается теорией Янга—Миллса с калибровочной группой

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y. \tag{21.25}$$

Нижние индексы обозначают: цветовой (c), слабый (w), и гиперзаряд (Y). Множитель $SU(2)_w \times U(1)_Y$ определяет теорию Янга—Миллса. Для $SU(2)_w$ существуют $2^2 - 1 = 3$ калибровочных бозонов. Чтобы реализовать $SU(2)_w$ через D-браны, необходимо иметь две дополнительные совпадающие D-браны. Такая пара D-бран не должна совпадать с тремя цветовыми D-бранами, необходимыми для получения $SU(3)_c$, иначе возникла бы U(5)-теория Янга—Миллса. Если два данных набора бран разделены, возникает калибровочная группа

$$U(3) \times U(2) = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1), \qquad (21.26)$$

где было дважды использовано соотношение (21.24), причем порядок групповых сомножителей не важен. Естественно задаться вопросом, может ли один из множителей U(1), или, может быть, комбинация двух, отождествлена с гиперзарядовым множителем (21.25). Если бы мы заботились только о калибровочных бозонах, то ответ был бы положительным. Однако, в Стандартной модели необходимо также приписать правильные гиперзаряды фермионам. Этого нельзя достичь с множителем U(1) в (21.26). По-крайней мере две дополнительные D-браны оказываются необходимыми, этот вопрос будет дальше обсуждаться в следующем разделе.

Для того чтобы редуцировать калибровочную группу (21.25) к той, которая наблюдается при низких энергиях, необходим процесс нарушения симметрии. Для (21.25) получается двенадцать безмассовых калибровочных полей. Однако известно, что при низких энергиях некоторые из калибровочных полей Стандартной модели являются массивными. Действительно, три из четырех калибровочных полей в $SU(2)_w \times U(1)_Y$ при нарушении симметрии приобретают массу и дают W^+ , W^- и Z^0 . Четвертое калибровочное поле остается безмассовым; это фотон, возникающий как линейная комбинация гиперзарядового поля и одного калибровочного поля в $SU(2)_w$ -множителе. После нарушения симметрии калибровочной группой становится¹⁾

$$SU(3)_c \times U(1)_{\rm em}$$
. (21.27)

Нарушение симметрии запускается, когда определенные заряженные скалярные поля, — поля *Хиггса*, — приобретают вакуумные значения. В этом процессе не только калибровочные поля, но и фермионы приобретают массу. Это приводит нас к рассмотрению фермионов, которые обсуждаются далее.

21.3. Открытые струны и фермионы в Стандартной модели

В предыдущем разделе мы обсуждали калибровочные бозоны Стандартной модели и изучили конфигурации D-бран, необходимые для их получения. Чтобы использовать теорию струн для описания полной Стандартной модели, необходимо рассмотреть частицы вещества и заряды, которыми они обладают. Это основная тема данного раздела. Также будут сделаны предварительные наблюдения, касающиеся представления фермионов в виде струн, заканчивающихся на конфигурациях D-бран, содержащими калибровочные бозоны. Вложения полной Стандартной модели в некоторую конфигурацию D-бран подробно обсуждается в следующем разделе.

Давайте начнем с изучения некоторых основных свойств фермионов в четырехмерном пространстве-времени. Для этой цели рассмотрим прототип фермионного поля спина -1/2; подобное поле описывает массивную частицу вместе с (отличной от нее) античастицей. Классическим примером является поле дираковского электрона, описывающее электрон e^- и его античастицу, позитрон e^+ . Представим теперь мир, в котором масса электрона и масса позитроны равны нулю. Тогда состояния частицы будут характеризоваться спиральностью — спиновым угловым моментом вдоль направления движения. Если спиральность принимает значение +1/2, то говорят, что фермионное состояние обладает правой киральностью. Если спиральность принимает значение -1/2, то говорят, что фермионное состояние обладает левой киральностью. Это не так уж сильно отличается от того, как мы характеризуем фотонные состояния с помощью базиса состояний с правой и левой поляризацией; это действительно фотоны определенной спиральности. Массивные фермионные состояния также могут характеризоваться спиральностью, однако в этом случае, описание не является лоренц-инвариантным. Представим массивный фермион, движущийся со скоростью $0 < v_x < c$ вдоль оси x лоренцевской системы отсчета S, и имеющий спиновый угловой момент, направленный вдоль положительной оси x. Это фермион с положительной спиральностью. В лоренцевской системе отсчета S', движущейся вдоль оси x

536

¹⁾ Индекс ет в (21.27) показывает, что U(1) — группа симметрии электромагнитного поля. — Прим. ред. перевода.

со скоростью $v > v_x$, частица движется в направлении отрицательных x', однако ее угловой момент не меняет направления. В системе отсчета S' частица имеет отрицательную спиральность. Если эта частица безмассовая; то она движется со скоростью света, и невозможно изменить ее угловой момент на противоположный, меняя лоренцевскую систему отсчета. В дальнейшем будут рассматриваться только безмассовые фермионы.

Пусть f обозначает фермионную частицу, а \overline{f} обозначает ее античастицу. В этих обозначениях e^- и e^+ соответствуют f и \overline{f} , соответственно. Тогда квантовая теория поля, описывающая эти частицы, будет содержать не только операторы рождения и уничтожения частицы с левой и правой киральностью, но u операторы рождения и уничтожения античастицы с левой и правой киральностью. Например, операторы рождения будут записываться в виде:

$$(f_L^{\dagger}, f_R^{\dagger}), \quad (\overline{f}_L^{\dagger}, \overline{f}_R^{\dagger}), \qquad (21.28)$$

где L и R обозначают левую и правую киральность, соответственно. Например, при действии на вакуум, оператор f_L^{\dagger} порождает состояния частицы с левой киральностью, а \overline{f}_R^{\dagger} порождает состояние античастицы с правой киральностью. Операторы рождения имеют и другие индексы (например, импульсные) которые, для простоты, игнорируются.

В квантовой теории поля автоматически учитывается важное свойство фермионов: если задать заряды частиц с левой киральностью, то определены заряды античастиц с правой киральностью; фактически, это противоположные заряды. Если заряды определяются как электрические для набора невзаимодействующих полей Максвелла, то противоположные заряды — это буквально заряды противоположных знаков. Аналогично, заряды частиц с правой киральностью и античастиц с левой киральностью также противоположны. Для демонстрации этих соотношений, запишем

$$egin{array}{lll} f_L^\dagger \leftarrow & \mbox{противоположный заряд} & o & \overline{f}_R^\dagger, \ f_R^\dagger \leftarrow & \mbox{противоположный заряд} & o & \overline{f}_L^\dagger, \end{array}$$
 (21.29)

где вакуумные состояния для краткости опущены. Все заряды определяются при задании зарядов двух состояний из разных строк. Эти заряды могут быть заданы независимым образом. Например, для определения зарядов античастиц \overline{f}_L^{\dagger} и \overline{f}_R^{\dagger} , достаточно зафиксировать заряды частиц f_L^{\dagger} и f_R^{\dagger} , и наоборот. Альтернативно, можно зафиксировать заряды состояний с левой киральностью f_L^{\dagger} и \overline{f}_L^{\dagger} , либо заряды состояний с правой киральностью f_R^{\dagger} и \overline{f}_R^{\dagger} . Как правило, фермионные заряды будут задаваться на состояниях с левой киральностью.

Центральным свойством Стандартной модели является киральность спектра фермионов. Для понимания этого свойства для начала рассмотрим простой случай. Предположим, что есть теория, весь фермионный спектр которой состоит из состояний (21.29). Говорят, что фермион является киральным, если состояния с левой и правой киральностью f_L^{\dagger} и f_R^{\dagger} обладают разными зарядами: если f_L^{\dagger} и f_R^{\dagger} обладают разными зарядами, то фермион является киральным.

(21.30)

На самом деле, в квантовой теории поля не требуется существования обеих строк в (21.29). Теория может быть согласована только с состояниями из первой строки, либо с состояниями из второй строки. В таких случаях, фермион автоматически является киральным, если только его состояния не нейтральны.

Заряды описывают реакцию частицы на калибровочные бозоны, поэтому состояния кирального фермиона с левой и правой киральностью по-разному реагируют на один и тот же набор калибровочных бозонов. Так как заряды частицы и античастицы связаны друг с другом (см. (21.29)), то состояния античастицы с левой и правой киральностью также по-разному реагируют на один и тот же набор калибровочных бозонов. Электрон является киральным: электроны с правой и левой киральностью по-разному реагируют на слабое взаимодействие, и так же ведут себя позитроны с левой и правой киральностью. Фактически, все фермионы Стандартной модели являются киральными. Киральность — это очень сильное свойство: в калибровочной теории с киральными фермионами, последние не могут приобрести массу до тех пор, пока калибровочная симметрия, сохраняющая киральность, не нарушена. Таким образом, термин «киральные фермионы» это синоним безмассовых фермионов. В Стандартной модели, электрослабые взаимодействия $SU(2)_w \times U(1)_Y$ сохраняют киральность. Если нарушение симметрии нарушает калибровочную группу (21.25) до $SU(3)_c \times U(1)_{em}$, то фермионы в Стандартной модели остаются безмассовыми. Так как ни цветовое, ни электрослабое взаимодействие не сохраняют киральность, то фермионы приобретают массу. Массовый масштаб задается массовым параметром, возникающим в секторе теории с нарушенной симметрией. Этот сектор называется сектором Хиггса. Ранее упоминалось, что бозоны Хиггса являются заряженными скалярными полями, запускающими механизм нарушения симметрии, когда они приобретают вакуумные значения.

Упражнение-разминка 21.7. Убедитесь, что фермион киральный, если заряды частиц и античастиц с левыми киральностями не являются противоположными.

Теперь опишем содержание полей материи в Стандартной модели. Фермионы Стандартной модели разбиваются на три поколения, или набора, которые все содержат одинаковое число частиц с полностью одинаковыми зарядами. Как только фермионы приобретают массу, три поколения перестают быть тождественными. Существует иерархия масс: первое поколение состоит из наиболее легких, а третье поколение — из наиболее тяжелых фермионов. В каждом поколении есть кварки и лептоны. Кварки участвуют как в сильных, так и электрослабых взаимодействиях, а лептоны участвуют только в электрослабых. Заряды будут рассматриваться особо внимательно, поэтому достаточно рассмотреть только одно поколение. Будут заданы заряды всех состояний с левой киральностью в одном поколении кварков и лептонов. Другими словами, будут перечислены заряды всех частиц и античастиц с левой киральностью. Сначала рассмотрим кварки. Кварки участвуют в SU(3)-цветовом взаимодействии, потому что они обладают цветом. У кварков есть три цвета, которые будут обозначаться: (г) красный, (b) синий, (g) зеленый. Таким образом, состояния кварка с левой киральностью q_L могут быть трех типов:

$$q_{Lr}, q_{Lb}$$
 и q_{Lg} . (21.31)

Говорят, что набор из данных трех состояний образует представление 3 группы SU(3). При этом пишут $q_L \sim 3$. При SU(3)-калибровочных преобразованиях эти три состояния вращаются посредством некоторой SU(3)-матрицы. Так как цветовое взаимодействие не сохраняет киральность, левокиральные антикварки \bar{q}_L обладают противоположными цветовыми зарядами. Они называются (a-r) антикрасными, (a-b) анти-синими, (a-g) анти-зелеными:

$$\bar{q}_{La-r}, \; \bar{q}_{La-b}$$
 и \bar{q}_{La-g} . (21.32)

При этом пишут $\bar{q}_L \sim \bar{3}$, а черта означает «противоположный». В теории групп представления 3 и $\bar{3}$ называют сопряженными. Если на состояния (21.31) действует SU(3)-матрица M, то на состояния (21.32) действует комплексно-сопряженная матрица M^* .

Обсуждение кварков и представлений SU(3) можно сделать более наглядным, если воспользоваться D-бранами и открытыми струнами, которые могут представлять кварки. Мы видели, что SU(3)_c требует наличия трех совпадающих D-бран. Ключевое наблюдение состоит в том, что кварки - это просто открытые струны, у которых один конец расположен на одной из трех бран (напомним, что у глюонов оба конца расположены на бранах). Можно использовать индексы «красный», «синий» и «зеленый» для обозначения первой, второй и третьей браны, соответственно. Открытая струна, заканчивающаяся на красной бране, — это левокиральный красный кварк; струна, заканчивающаяся на синей бране, — это левокиральный синий кварк; а струна, заканчивающаяся на зеленой бране, — это левокиральный зеленый кварк. Ориентация этих струн указывает внутрь бран, или, эквивалентно, концы на бране соответствуют точке $\sigma = \pi$. Как возникают левокиральные антикварки? На самом деле это противоположно ориентированные открытые струны. Например, открытая струна, начинающаяся на красной бране, являлась бы левокиральным анти-красным антикварком. Все эти струны показаны на рис. 21.5. Три рассматриваемые браны будем называть SU(3)-цветовыми бранами, или барионными бранами. Название «барионный» происходит от бариона — частицы, составленной из трех кварков.

Также можно описать SU(3)-заряды кварков следующим образом. Напомним, что струнные состояния по отношению к полям Максвелла, расположенным на бранах, характеризуются своими зарядами (q_1, q_2, q_3) . Эти три заряда фактически определяют U(3)-заряд состояния. Заряд по отношению к отщепленной группе U(1) пропорционален $(q_1 + q_2 + q_3)$. Заряды SU(3) можно выразить в виде любых двух линейных комбинаций исходных зарядов, которые, вместе с $(q_1 + q_2 + q_3)$, определяют линейно независимый набор. Удобно воспользоваться



Рис. 21.5. Левокиральные красные, синий и зеленый кварки — это открытые струны, которые заканчиваются на цветовых D-бранах. Левокиральные анти-красный, анти-синий и анти-зеленый антикварки — это открытые струны, которые *начинаются* на цветовых D-бранах

парой (a1, a2), определенной как

$$(a_1, a_2) \equiv (q_1 - q_2, q_2 - q_3).$$
 (21.33)

Таким образом, три левокиральных кварка (21.31), образующих 3-представление SU(3), характеризуются следующим образом

3:
$$(1,0)$$
, $(-1,1)$, $(0,-1)$. (21.34)

Для трех левокиральных антикварков (21.32) имеем

$$\bar{\mathbf{3}}$$
: (-1,0), (1,-1), (0,1). (21.35)

На языке теории представлений, пара (a_1, a_2) называется весовым вектором, а элементы a_1 и a_2 — это метки Дынкина данного весового вектора. Представления **3** и **3** обладают тремя весовыми векторами.

Упражнение-разминка 21.8. Выпишите восемь весовых векторов, соответствующих состояниям SU(3)-калибровочных полей. Данные состояния определяют представление 8 и веса — это заряды глюонов. Каждый из трех глюонов, начинающийся и заканчивающийся на одной и той же бране, обладает весом (0,0) (почему?). Только два из них принадлежат 8, так как один из них соответствует отщепленной группе U(1).

У произвольной струны только один из концов, соответствующий кварку, находится на цветовой D-бране, поэтому естественно спросить: где находится другой конец? Для левокиральных кварков можно получить ответ рассмотрением их $SU(2)_w$ -зарядов. Кварковые состояния собираются в представления SU(2). Представления SU(2) известны своей ролью в квантовой механике спинового углового момента. Группа $SU(2)_w$ для слабых взаимодействий не связана с угловым моментом, поэтому вместо спина говорят об изоспине. Например, представление изоспина I = 1/2 имеет два состояния, одно с $I_3 = 1/2$ и другое с $I_3 = -1/2$, где I_3 обозначает третью компоненту изоспина.
Левокиральные состояния кварков собираются в I = 1/2 представления группы слабых взаимодействий. Новые индексы, называемые индексами аромата, необходимы для описания различных типов кварков. Для любого фиксированного цвета, левокиральный *u*-кварк является состоянием с $I_3 = 1/2$, а (того же цвета) левокиральный *d*-кварк является состоянием с $I_3 = -1/2$. Здесь *u* и *d* обозначают верхний и нижний кварки, соответственно. Таким образом, u_L и d_L входят в $SU(2)_w$ -дуплет, обозначаемый 2. Так как у кварков три цвета, то существует три SU(2)-дуплета. Теперь давайте будем рассуждать в терминах D-бран. Можно построить $U(2)_w = SU(2)_w \times U(1)$ -теорию с двумя совпадающими D-бранами. Левокиральные и-кварки являются струнами, которые начинаются на одной из этих D-бран, назовем ее первой браной, и заканчивается на одной из цветовых бран. Левокиральные *d*-кварки являются струнами, которые начинаются на другой D-бране, назовем ее второй браной, и заканчиваются на одной из цветовых бран. Две введенные D-браны называются левыми бранами. Левокиральные кварки являются открытыми струнами, которые начинаются на левой бране и заканчиваются на цветовой бране.

Состояния SU(2)-представлений, которые возникают из струн с одним из концов на левых бранах, также могут быть описаны зарядами. На этот раз имеется два заряда \bar{q}_1 и \bar{q}_2 , соответствующие полям Максвелла браны один и браны два, соответственно. Как обычно, по соглашению, $\bar{q}_i = +1$ для струны, заканчивающейся на бране *i*, и $\bar{q}_i = -1$ для струны, начинающейся на бране *i*. Заряды \bar{q}_1 и \bar{q}_2 определяют U(2)-заряд состояния. Заряд отщепленной группы U(1) пропорционален ($\bar{q}_1 + \bar{q}_2$). Заряд SU(2) можно выразить любой комбинацией, не зависящей от ($\bar{q}_1 + \bar{q}_2$). Удобно использовать метку Дынкина

$$a_1 \equiv \bar{q}_1 - \bar{q}_2. \tag{21.36}$$

Струна, начинающаяся на бране один, обладает зарядами (-1, 0), так что $a_1 = -1$. Так как она является *u*-кварком с $I_3 = 1/2$, получаем линейное соотношение между третьей компонентой изоспина и меткой Дынкина a_1 :

$$I_3 = -a_1/2. \tag{21.37}$$

Данное соотношение также справедливо для d-кварка: струна, начинающаяся на бране два, обладает зарядами (0, -1), что приводит к $a_1 = 1$ и $I_3 = -1/2$. Уравнение (21.37) иллюстрирует связь квантовых чисел состояний с зарядами состояний.

Теперь попытаемся представить полную конфигурацию трех совпадающих цветовых бран и двух совпадающих левых бран. Не важно, совпадают эти два набора D-бран или нет, но, пока они параллельны друг другу, кварковые состояния, натянутые от одной группы бран к другой не могут соответствовать Стандартной модели по весьма существенной причине: они не являются киральными. Можно показать, что спектр содержит левокиральные кварки и правокиральные кварки, у которых совершенно одинаковые заряды. В конфигурации с параллельными D-бранами, на самом деле, возникают все состояния из (21.29), а левокиральные и правокиральные частицы обладают одинаковыми зарядами. Отсутствие киральности становится явным, когда два набора D-бран параллельны и разделены: натянутые струны обладают массой, а это недопустимо для киральных фермионов.

Физически интересная ситуация возникает, когда совпадающие цветовые D-браны пересекаются с совпадающими левыми D-бранами. Такая конфигурация пересекающихся D-бран подобна рассмотренной в разделе 21.1. Если два набора D-бран пересекаются, то фермионные поля, соответствующие струнам, натянутым от одного набора к другому, будуг локализованы вблизи пересечения. Представим себе совпадающие параллельные браны, тогда открытые струны могут двигаться во всех пространственных направлениях вдоль бран. По мере того, как угол пересечения отклоняется от нуля, некоторые направления движения исчезают, как будто бы произошла компактификация. Некоторые состояния, являющиеся безмассовыми при нулевом угле, становятся массивными. На самом деле при подходящих условиях, состояния только одной из строк в (21.29) остаются безмассовыми. Киральный фермион возникает, потому что при пересечении порождается только одна из пар: либо левокиральная частица и ее партнер, либо левокиральная античастица и ее партнер. Если порождается одна из пар, то другая пара может быть порождена где-нибудь в конфигурации D-бран, а может и нет. Если она порождена, то не будет никакой причины для того, чтобы их заряды были скоррелированы. Именно по это причине в моделях бран с пересечением естественным образом возникает спектр киральных фермионов. Для того чтобы решить, действительно ли фермионный спектр является киральным, необходимо найти все фермионные состояния, возникающие в полной конфигурации бран.

Теперь, для того чтобы частично описать ситуацию, можно воспользоваться рис. 21.6. Цветовые браны расположены на рисунке горизонтально, а левые браны — вертикально. Три левокиральных u-кварка и три левокиральных d-кварка показаны как натянутые струны. Противоположно ориентированные струны (не показаны) соответствуют противоположно заряженным левокиральным антикваркам. Индекс I_3 у левых бран показывает значения I_3 для струны, которая заканчивается на бранах.

Определение зарядов левокиральных кварков завершается выяснением значений гиперзаряда Y. Все три u_L кварка и все три кварка d_L являются состояниями с Y = 1/6. Информация о представлениях и зарядах фермионов в Стандартной модели обычно записывается так:

Здесь цвет и изоспин отвечают представлениям SU(3) и SU(2), соответственно, Y — значение гиперзаряда. Это обозначение описывает представления полной калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Стандартной модели, потому как оно указывает представления каждого группового фактора. Для иллюстрации данного обозначения, рассмотрим состояния

$$\begin{pmatrix} u_{Lr} & u_{Lb} & u_{Lg} \\ d_{Lr} & d_{Lb} & d_{Lg} \end{pmatrix},$$
(21.39)

которые охватывают верхний и нижний левокиральные кварки всех возможных цветов. Эти состояния можно рассматривать как триплет SU(2)-дуплетов (три



Рис. 21.6. Левокиральные кварки — это струны, натянутые от левых бран к барионным бранам. Три левокиральных *u*-кварка — это открытые струны, которые начинаются на первой левой бране и заканчиваются на барионной бране. Три левокиральных *d*-кварка — это открытые струны, которые начинаются на второй левой бране и заканчиваются на барионной бране

столбца данной матрицы), либо, эквивалентно, как дуплет SU(3)-триплетов (две строки данной матрицы). В обозначения (21.38), шесть состояний обозначаются как

$$(3, 2)_{1/6}$$
. (21.40)

Так как индексы цветового и изоспинового представлений на самом деле равны числу состояний в этих представлениях, произведение $3 \times 2 = 6$ является числом в общем представлении. У всех шести состояний одинаков гиперзаряд.

Как вычисляется гиперзаряд состояний в конфигурации D-бран? Оказывается, что гиперзаряд получает вклады как от отщепленной U(1) у барионных бран, так и от отщепленной U(1) у левых бран. Определим удобно нормированные U(1)-заряды Q_1 и Q_2 , ассоциированные, соответственно, с цветовой и левой бранами:

$$Q_1 = q_1 + q_2 + q_3, \quad Q_2 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2.$$
 (21.41)

Любая струна, начинающаяся и заканчивающаяся на барионных бранах, либо начинающаяся и заканчивающаяся на левых бранах, обладает нулевыми Q_1 и Q_2 . С другой стороны, левокиральный кварк — это струна, начинающаяся на левой бране и заканчивающаяся на цветовой бране. Любая такая струна имеет $Q_1 = 1$ и $Q_2 = -1$. Гиперзаряд левокиральных кварков получается при выборе

$$Y = -\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{2} Q_2 - \dots, \qquad (21.42)$$

где точки соответствуют вкладам от дополнительных D-бран, которые будут учтены позже. Так как у левокиральных кварков нет концов на этих дополнительных бранах, то $Y = -(1/3) \times 1 - (1/2) \times (-1) = 1/6$.

Теперь необходимо рассмотреть левые антикварки, \bar{u}_L и \bar{d}_L . Здесь мы встречаемся с киральностью электрослабых взаимодействий. Если бы электрослабые взаимодействия были некиральными, то данные антикварки образовывали бы дуплет с зарядами, противоположными зарядам левых u и d кварков; они выглядели бы как струны, заканчивающиеся на левых бранах. Однако, оказывается, что левые антикварки \bar{u}_L и \bar{d}_L , каждый сам по себе, являются SU(2)-синглетами (соответствующее представление обозначается 1). Концы соответствующих струн не могут располагаться на левых бранах. Более того, \bar{u}_L обладает зарядом Y = -2/3, а для \bar{d}_L Y = 1/3. Некиральное взаимодействие приводило бы к Y = -1/6 для каждого из них. Отсюда, и из нашего предыдущего анализа цветов следует, что левые антикварки принадлежат представлениям

$$\bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}$$
 и $\bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$. (21.43)

Здесь опущены цветовые индексы; таким образом, \bar{u}_L , например, означает три антикварка различных цветов. Тогда совокупность представлений левых кварков и антикварков выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} \quad \mathbf{H} \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}.$$
 (21.44)

Они образуют набор состояний левых кварков и антикварков в первом поколении Стандартной модели. Данное поколение также включает в себя соответствующие правые состояния.

Антикварки \bar{u}_L являются струнами, которые начинаются на цветовой бране. Так как они не могут заканчиваться на левой бране (они являются $SU(2)_w$ синглетами), то обязаны заканчиваться на новой D-бране. Если обозначить как Q_3 электрический заряд, взаимодействующий с полем Максвелла на этой бране, то мы обнаружим, что (21.42) должно быть заменено на

$$Y = -\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{2} Q_2 - Q_3 - \dots \qquad (21.45)$$

Гиперзаряд Y = -2/3 состояний \bar{u}_L возникает в силу $Q_1 = -1$, $Q_2 = 0$ и $Q_3 = 1$. Антикварки \bar{d}_L также являются струнами, которые начинаются на цветовой бране и не могут заканчиваться на левой бране. Их гиперзаряд Y = 1/3 правильно воспроизводится из (21.45) при $Q_1 = -1$ и $Q_2 = 0$ в том случае, если струны заканчиваются на D-бране, не дающей вклада в Y. Такие дополнительные D-браны будут обсуждаться в следующем разделе.

Теперь опишем левые лептоны первого поколения. Это левое электронное нейтрино и левый электрон, вместе с левым антинейтрино и левым позитроном. Никакой из вышеперечисленных лептонов не обладает цветом, они все являются цветовыми синглетами и соответствующее SU(3)-представление обозначается 1.

Левые нейтрино и левые электроны образуют SU(2)-дуплет с зарядом Y = -1/2. В данном случае возникает киральность. Как левый позитрон, так и левое антинейтрино являются SU(2)-синглетами и их гиперзаряды — это один и ноль, соответственно. Заряды лептонов суммируются в виде

$$\begin{pmatrix}
u_{eL} \\ e_{\bar{L}} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_{L}^{+} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{1}$$
 и $\bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{0}.$ (21.46)

Отметим, что левые антинейтрино являются синглетами относительно групп сильного, слабого и гиперзарядового взаимодействий. Данные состояния не были обнаружены напрямую, но, по-видимому, они существуют, потому что нейтрино, похоже, имеют массу. Совместно с соответствующими правыми состояниями, состояния (21.44) и (21.46) образуют состояния вещества в первом поколении Стандартной модели. Возможно, читатель уже понял, что открытые струны, соответствующие лептонам, не могут заканчиваться на цветовых бранах. Левые нейтрино и левый электрон возникают из струн, у которых один из концов находится на левой бране, а другой конец — на некоторой другой бране. Ни левый позитрон, ни левое антинейтрино не имеют концов на цветовой или левой бранах.

Полный набор левых состояний в поколении получается перечислением состояний из (21.44) и (21.46). Опуская названия состояний и используя символ + для того, чтобы собрать представления вместе, получаем

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$
 (21.47)

Как мы выяснили ранее, перестановка зарядов меняет местами 3- и $\bar{3}$ -представления SU(3) и обращает знак гиперзаряда. При обращении знака все синглеты 1 остаются неизменными, потому как они соответствуют состояниям с нулевым зарядом. Для представления SU(2) перестановка зарядов меняет местами 2 и $\bar{2}$, однако оказывается, что $\bar{2}$ является представлением, эквивалентным 2. Поэтому перестановка зарядов не меняет 2-представление SU(2).

На основании комментариев, следующих за (21.29), можно перечислить состояния в поколении иным способом.

- Упражнение-разминка 21.9. Перечислите правые состояния в поколении, с соответствующими зарядами.
- Упражнение-разминка 21.10. Опшите состояния вещества с соответствующими зарядами в поколении, перечисляя состояния левых и правых частиц.

В Стандартной модели электрический заряд Q_{em} возникает как линейная комбинация гиперзаряда Y и третьей компоненты изоспина I_3 :

$$Q_{\rm em} = Y + I_3.$$
 (21.48)

Если применить эту формулу к u_L и d_L состояниям, то найдем

$$Q_{\rm em}(u_L) = Y(u_L) + I_3(u_L) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = +\frac{2}{3},$$

$$Q_{\rm em}(d_L) = Y(d_L) + I_3(d_L) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$
(21.49)

Это действительно правильные значения. Протон состоит из двух верхних кварков и одного нижнего, его электрический заряд равен $2 \cdot 2/3 - 1/3 = 1$.

Упражнение-разминка 21.11. Найдите электрические заряды левых антикварков и проверьте, что они противоположны зарядам левых кварков. Покажите, что из формулы (21.48) следует, что состояния левых нейтрино и антиней прино обладают нулевым зарядом, состояния левых электронов обладают зарядом минус один, а состояния левых позитронов обладают зарядом плюс один. Сделайте вывод: электромагнитное взаимодействие не сохраняет киральность.

По отношению к состояниям и зарядам оставшиеся два поколения Стандартной модели являются копиями первого поколения. Кварковые ароматы во втором поколении называются очарованием и странностью и обозначаются c и s, соответственно. Лептоны второго поколения — это мюонное нейтрино ν_{μ} и мюон μ^{-} . В третьем поколении имеется всрхний кварк t и нижний кварк b, а также тау-нейтрино ν^{τ} и тау τ^{-} . Полный набор левых состояний в Стандартной модели состоит из трех копий состояний в (21.47):

$$3 \times \left[(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \right].$$
(21.50)

Теперь мы можем точно сформулировать свойство киральности фермионного спектра Стандартной модели. Спектр называется некиральным, если набор левых состояний может быть разбит на пары левых состояний с противоположными зарядами (см. Быстрое вычисление 21.7). Таким образом, для данного списка заряженных левых состояний, определяющих некиральный спектр, операция перестановки зарядов всех состояний не должна изменять список состояний. Фермионный спектр Стандартной модели является киральным, потому что операция перестановки всех зарядов в списке (21.50) изменяет его.

Возможно, что калибровочная группа и вещество Стандартной модели могут показаться достаточно запутанными, или даже громоздкими. Однако этот набор частиц и взаимодействий фактически является достаточно экономичным описанием крайне большого числа экспериментальных данных, полученных за последние несколько десятилетий. Стандартная модель физики частиц — это действительно блистательное достижение. Она не является ни окончательной, ни завершенной теорией физики частиц, однако представляется несомненным, что Стандартная модель должна возникать в низкоэнергетическом пределе любой правильной объединенной теории всех взаимодействий. Именно в этом смысле Стандартная модель стала неотъемлемой частью наших знаний о физическом мире.

21.4. Стандартная модель пересекающихся D6-бран

В двух предыдущих разделах мы познакомились с некоторыми представлениями, необходимыми для построения струнной модели элементарных частии. В данном разделе мы строим полную струнную модель со многими свойствами Стандартной модели. Эта модель содержит пересекающиеся D6-браны IIA-теории суперструн, намотанные на T^6 . До нарушения симметрии в ней содержатся все безмассовые частицы Стандартной модели, однако есть еще несколько дополнительных частиц. На самом деле возможно построить модель с ориентифолдом Об-плоскостью и D6-бранами, состав частиц в которой *в точности совпадает* со Стандартной моделью. Ориентифолд О*p*-плоскость — это протяженный объект с *p* пространственными измерениями. Основные свойства ориентифолдов ранее изучались в ряде задач (13.6, 15.1, 15.3, 15.4 и 15.5). Мы определим некоторые из свойств этой второй модели, оставляя большую часть анализа для задач в конце этой главы.

Одним из ключевых свойств вещества в Стандартной модели является ее репликация: есть три поколения, содержащие состояния фермионной материи с тождественными зарядами. Как объяснить подобную репликацию в терминах D-бран? Объясняется это с помощью многократных пересечений. На пересечении совпадающих барионных бран и совпадающих левых бран были обнаружены u и d кварки. Если данные наборы бран наматываются на T^6 так, что они пересекаются трижды, то второе пересечение приведет к появлению левых t и b кварков. В разделе 21.1 мы выяснили, что общие классы D6-бран, намотанных на $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$, характеризуются тремя линиями ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 , каждая из которых, в свою очередь, характеризуются двумя целыми числами. Более того, была получена формула (21.9), определяющая, сколько раз пересекаются две D6-браны.

Пусть $N_1 = 3$ обозначает число барионных бран, и пусть $N_2 = 2$ обозначает число левых бран. Кроме того, пусть они намотаны на T^6 следующим образом:

$$N_1 = 3: \quad \ell_1^{(1)} = (1, 2), \quad \ell_2^{(1)} = (1, -1), \quad \ell_3^{(1)} = (1, -2), N_2 = 2: \quad \ell_1^{(2)} = (1, 1), \quad \ell_2^{(2)} = (1, -2), \quad \ell_3^{(2)} = (-1, 5).$$
(21.51)

Тогда число пересечений I_{12} между одной барионной браной и одной левой браной есть

$$I_{12} = (1 \times 1 - 1 \times 2) \cdot (1 \times (-2) - 1 \times (-1)) \cdot (1 \times 5 - (-1) \times (-2)) = 3, \quad (21.52)$$

что является желаемым результатом. Конечно же, связь $I_{12} = 3$ не определяет намотку в (21.51). Данные числа намотки являются только одним из возможных выборов.

Мы обнаружили, что левые кварки получаются как струны, натянутые от N_2 -бран к N_1 -бранам. Ориентация таких струн связана со знаком I_{ab} . Пусть I_{ab} обозначает число пересечений для D6-браны a и D6-браны b. Ниже приводится точное правило, согласно которому определяется число фермионов и то, как они представлены струнами.

Существует $|I_{ab}|$ левых фермионов на множестве пересечений браны a и браны b, по одному левому фермиону на каждую точку пересечения. Если $I_{ab} > 0$, то левые состояния являются струнами, натянутыми от браны b к бране a. Если $I_{ab} < 0$, левые состояния являются струнами, натянутыми от браны a к бране b.

Ориентация струны определяет заряды левых состояний. Состояния, порождаемые при пересечении, являются киральными в смысле, обсуждаемом после (21.30):

547



Рис. 21.7. Конфигурация бран, состоящая из $N_1 = 3$ барионных бран, $N_2 = 2$ левых бран, $N_3 = N_6 = 1$ правых бран и $N_4 = N_5 = 1$ лептонных бран. Значение Y указывает на вклад в гиперзаряд для струны, заканчивающейся на бране. Точкам пересечения соответствуют числа пересечений I_{ab} с a < b. Используется название «правые браны», потому что к ним присоединены правые частицы (на самом деле показаны левые античастицы)

порождается только минимальный набор состояний. Противоположно ориентированным струнам при пересечении соответствуют противоположно заряженные правые *античастицы*, которые с необходимостью возникают вместе с левыми состояниями частиц.

Для трех поколений левых кварков, полученных ранее, значение гиперзаряда Y = 1/6 корректно определяется формулой (21.42). Расположение бран показано на рис. 21.6, но нужно учесть, что указанное пересечение на самом деле происходит еще два дополнительных раза. С этой целью в точке пересечения вставлено +3 так, как показано на рис. 21.7. Теперь попробуем получить три поколения левых антикварков. Сначала рассмотрим левый *u*-антикварк и две его копии (левые *c*- и *t*-антикварки). Открытая струна, представляющая данный кварк, начинается на барионной бране, но не может заканчиваться на левой бране, потому что соответствующее состояние является SU(2)-синглетом. Таким образом, необходима новая D-брана, пусть для нее $N_3 = 1$. В соответствии с приведенным выше правилом, требуется $I_{13} = -3$, так как открытые струны обязаны начинаться на барионных бранах. К тому же, вклад в гиперзаряд от заряда Q_3 на этой бране должен быть таким, что $Y(\bar{u}_L) = -2/3$. Это приводит к требованию, чтобы (21.42) было заменено на

$$Y = -\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{2} Q_2 - Q_3 - \dots \qquad (21.53)$$

Тогда $Y(\bar{u}_L) = -(1/3) \cdot (-1) - (1/2) \cdot (0) - 1 = -2/3$, как и требовалось. Намотка браны на T^6 фиксируется выбором

$$N_3 = 1$$
: $\ell_1^{(3)} = (1, 1), \quad \ell_2^{(3)} = (1, 0), \quad \ell_3^{(3)} = (-1, 5).$ (21.54)

Подставляя этот результат в (21.52), находим

$$I_{12} = 3, \quad I_{13} = -3, \quad I_{23} = 0.$$
 (21.55)

Мы видим, что N_3 брана не пересекается с левыми бранами. N_3 -брана показана на рис. 21.7 как вертикальная брана, расположенная справа от левых бран. Уравнение Y = -1 добавлено к индексу браны для демонстрации того, что струна, заканчивающаяся на этой бране, получает вклад в гиперзаряд равный минус один (это число равно коэффициенту перед Q_3 в (21.53)). Аналогичные индексы приписываются барионным и левым бранам. Брана N_3 называется правой браной, потому что к ней прикрепляются состояния правых кварков. Действительно, вместо \bar{u}_L антикварка, представленного на рисунке, можно было бы показать противоположно ориентированную струну, соответствующую состоянию правого кварка u_R .

В данную модель по-прежнему следует включить три дополнительные D-браны: другую правую брану для получения левых \overline{d}_L антикварков (и их копий), и две отдельные *лептонные* браны для получения лептонов. Так как у нас нет возможности вывести намотки D-бран, давайте их просто постулируем. Вместе с

$$N_{4} = 1: \quad \ell_{1}^{(4)} = (1, 2), \quad \ell_{2}^{(4)} = (-1, 1), \quad \ell_{3}^{(4)} = (1, 1),$$

$$N_{5} = 1: \quad \ell_{1}^{(5)} = (1, 2), \quad \ell_{2}^{(5)} = (-1, 1), \quad \ell_{3}^{(5)} = (2, -7),$$

$$N_{6} = 1: \quad \ell_{1}^{(6)} = (1, 1), \quad \ell_{2}^{(6)} = (3, -4), \quad \ell_{3}^{(6)} = (1, -5).$$
(21.56)

Объявляется, что обе N_4 - и N_6 -браны не дают вклада в гиперзаряд, а N_5 -брана дает вклад, равный минус единице. Таким образом, возникает окончательная формула для гиперзаряда

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - Q_5. \qquad (21.57)$$

Оставшиеся числа пересечений легко вычисляются и полный список имеет вид

$$I_{12} = 3, \quad I_{13} = -3, \quad I_{23} = 0,$$

$$I_{14} = 0, \quad I_{15} = 0, \quad I_{16} = -3,$$

$$I_{24} = 6, \quad I_{25} = 3, \quad I_{26} = 0,$$

$$I_{34} = -6, \quad I_{35} = -3, \quad I_{36} = 0,$$

$$I_{45} = 0, \quad I_{46} = 6, \quad I_{56} = 3.$$

(21.58)

Так как $I_{ab} = -I_{ba}$, то приведены только числа пересечений I_{ab} при a < b. Это значения, указанные в точках пересечений на рис. 21.7.

Упражнение-разминка 21.12. Получите значения всех чисел пересечений в (21.4) и проверьте, что они правильно представлены на рисунке. Также проверьте, что ориентация показанных на рисунке струн согласуется с правилом для левых состояний. Используя рисунок, можно представить список пересечений с помощью горизонтальных бран, которые пересекаются с двумя совпадающими левыми бранами и двумя правыми бранами. Пересечения на барионных бранах дают

$$\underbrace{3(3,2)_{1/6}}_{[12]} + \underbrace{3(\bar{3},1)_{-2/3}}_{[13]} + \underbrace{3(\bar{3},1)_{1/3}}_{[16]},$$
(21.59)

где символ [ab], расположенный под представлениями, указывает на то, что соответствующие фермионы возникают из I_{ab} пересечений. Как можно видеть из сравнения с (21.44), приведенные выше представления являются в точности тремя копиями одного поколения кварков. Пересечения на лептонной бране N_4 дают

$$\underbrace{6(1,2)_{-1/2}}_{[24]} + \underbrace{6(1,1)_1}_{[34]} + \underbrace{6(1,1)_0}_{[46]}.$$
(21.60)

Этот результат оправдывает название «лептонный». Как можно видеть из сравнения с (21.46), приведенные выше представления являются шестью копиями одного поколения лептонов. Это больше, чем нужные нам три копии, но есть даже больше. Пересечения на лептонное бране N_5 дают

$$\underbrace{3(1,2)_{1/2}}_{[25]} + \underbrace{3(1,1)_0}_{[35]} + \underbrace{3(1,1)_{-1}}_{[56]}.$$
(21.61)

Упражнение-разминка 21.13. Используйте (21.57) и расположение струн на рис. 21.7 чтобы подтвердить, что индексы гиперзаряда в (21.60) и (21.61) выбраны правильно.

Мы обнаружили больше лептонов, чем хотели, однако это неизбежно в непротиворечивых моделях, содержащих только D6-браны. Существует простое правило, которое обязано выполняться.

Правило: набор левых состояний, заканчивающихся на любой совокупности D-бран, должен содержать равное количество входящих и исходящих струн. (21.62)

Мы не будем выводить это правило, но можем проверить, что оно выполняется для конфигурации, изображенной на рис. 21.7. Напрмер, рассмотрим левые браны. Есть девять исходящих кварковых дуплетов (три цвета и три семейства). Однако существует также шесть дуплетов, входящих в N_4 , и три дуплета, входящих в N_5 . Это показывает, что нельзя получить только три лептонных дуплета.

Упражнение-разминка 21.14. Проверьте, что числа входящих и исходящих левых состояний равны на каждой из двух правых бран и на каждой из двух левых бран.

Можно также сформулировать общее условие совместности, обязанное выполняться в данной модели. Это условие имеет топологическую природу. Рассмотрим точечный заряд q, расположенный в начале координат на плоскости (x, y). В таком двумерном мире силовые линии электрического поля направлены радиально от заряда к бесконечности. С другой стороны, если плоскость сворачивается в двумерную сферу конечного размера, то с зарядом возникает проблема: силовые линии поля не могут быть куда-либо направлены. Если заряд находится на северном полюсе сферы, то силовые линии поля будут направлены к южному полюсу. Решение очевидно: совместность требует присутствия заряда (-q) на южном полюсе. Общий вывод состоит в том, что полный заряд на компактном пространстве без границ должен быть равен нулю, к такому заключению легко прийти.

() Упражнение-разминка 21.15. Рассмотрите уравнение Максвелла $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ и проинтегрируйте обе стороны уравнения по компактному пространству без границы. Воспользуйтесь теоремой Гаусса для доказательства того, что полный заряд должен быть равен нулю.

В рассматриваемой конфигурации имеются D6-браны, которые являются объектами, обладающие зарядами Рамон—Рамона (R–R). К тому же, они наматываются на компактное пространство T^6 , поэтому возникает условие нулевого полного заряда. Данное условие формулируется следующим образом. Введем три пары формальных переменных: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Для произвольной D6-браны a, заданной

$$\ell_1^{(a)} = (m_1^a, n_1^a), \quad \ell_2^{(a)} = (m_2^a, n_2^a), \quad \ell_3^{(a)} = (m_3^a, n_3^a),$$
 (21.63)

строится следующий полином шести формальных переменных:

$$\Pi_a(x_i, y_i) \equiv (m_1^a x_1 + n_1^a y_1)(m_2^a x_2 + n_2^a y_2)(m_3^a x_3 + n_3^a y_3).$$
(21.64)

Данный полином Π_a содержит информацию о R-R зарядах D6-браны *a*. Если раскрыть скобки, полином сведется к восьми независимым мономам. Условие совместности утверждает, что результат сложения таких полиномов, соответствующих каждой из D6-бран в рассматриваемой конфигурации, должен быть равен нулю. Если N_a обозначает число D6-бран типа *a*, то условие совместности принимает вид

$$\sum_{a} N_{a} \Pi_{a}(x_{i}, y_{i}) = 0.$$
 (21.65)

Это уравнение приводит к восьми условиям на числа N_a и намотки различных D6-бран. Например, равенство нулю коэффициента перед $x_1x_2x_3$ приводит к

$$\sum_{a} N_a m_1^a m_2^a m_3^a = 0.$$
 (21.66)

Данное уравнение легко проверяется с помощью соотношений (21.51), (21.54) и (21.4). Из этого уравнения мы получаем требование равенства нулю выражения $N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - 2N_5 + 3N_6$. Действительно, данная величина равна нулю: 3 - 2 - 1 - 1 - 2 + 3 = 0. На самом деле в задаче 21.2 вы покажите, что правило (21.4) является следствием (21.65).

Для того чтобы построить струнную модель со спектром частиц Стандартной модели, необходимо ввести плоскости ориентифолда, которые по сути вводят зеркальные D6-браны. Замечательно, что это возможно — построить такую кон-



Рис. 21.8. Конфигурация бран, приводящая к калибровочной группе и спектру вещества Стандартной модели. Есть $N_1 = 3$ барионные браны, $N_2 = 2$ левые браны и $N_3 = 1$ правые $N_4 = 1$ лептонные браны. Зеркальные D-браны, порождаемые ориентифолдами показаны пунктирными линиями. Пересечения, заключенные в квадраты являются зеркалами уже рассмотренных пересечений и не приводят к новым частицам

фигурацию бран и ориентифолдов, что: (1) калибровочной группой является калибровочная группа Стандартной модели (21.25) и все дополнительные U(1)факторы исчезают; и (2) набор киральных фермионов в точности соответствует Стандартной модели (21.50). Модели с пересекающимися D-бранами являются первыми струнными моделями, в точности воспроизводящими спектр частиц Стандартной модели. Здесь необходима оговорка: сектор замкнутых струн теории может содержать дополнительные необнаруженные частицы и взаимодействия.

Мы не будем детально обсуждать эти модели, однако, чтобы удовлетворить любопытство читателя, мы покажем соответствующую конфигурацию бран и сделаем несколько комментариев (несколько проверок на совместность представлены в задаче 21.3). Такой набор пересекающихся бран показан на рис. 21.8. Сравнение с моделью рис. 21.7 показывает, что по-прежнему есть $N_1 = 3$ барионные браны и $N_2 = 2$ левые браны, но правая брана $N_3 = 1$ только одна и лептонная брана $N_4 = 1$ только одна. Ориентифолды определяют зеркальные D-браны, обозначаемые приписыванием звездочки к бранным индексам и изображаемые пунктиром. Рассматриваемая конфигурация выбрана таким образом, чтобы ни одна брана не пересекалась со своим зеркальным образом.

Основная цель данной конструкции состоит в избежании лишних лептонных дуплетов, полученных ранее. В этой модели левые кварковые дуплеты возникают новым способом. Дуплет в первом поколении появляется при пересечении $I_{12} = 1$ барионных и левых бран. Остальные два дуплета появляются при пересечении $I_{12*} = 2$ барионных бран и образа левых бран (вверху справа на рисунке). Эквива-

лентным образом, правила построения ориентифолдов позволяют рассматривать два данных дуплета как появляющиеся при пересечении $I_{1*2} = -2$ левых бран с образами барионных бран (внизу слева на рисунке). Правило (21.4) для левых бран по-прежнему выполняется: три кварковых дуплета и три лептонных дуплета являются исходящими, а шесть кварковых дуплетов являются входящими.

До сих пор мы неявно работали с суперсимметричной IIA-теорией суперструн: мы использовали стабильные D6-браны в десятимерном пространствевремени. Браны и их пересечения полностью нарушают суперсимметрию. Так и должно быть, потому что был получен спектр Стандартной модели, который не является суперсимметричным (бозоны и фермионы не образуют пары одинаковой массы). В моделях без суперсимметрии, как правило, считается, что струнный масштаб мал, возможно, порядка нескольких ТэВ. Это требует присутствия некоторых дополнительных больших измерений, иначе невозможно будет воспроизвести четырехмерную постоянную Планка. В моделях с малым струнным масштабом время жизни протона может оказаться слишком коротким. До сих пор не наблюдался ни один распад протона, а время жизни протона определенно превышает 4×10^{33} лет. В моделях с пересекающимися бранами протон не может распасться носредством обычных процессов объединения и расщепления струн (см. задачу 25.8), поэтому распад протона по-видимому существенно подавлен.

Возникает вопрос: можно ли праздновать победу и утверждать, что Стандартная модель возникает в теории струн? Не совсем. Многое необходимо для того, чтобы считать эту модель реалистичной. В частности, должно корректно происходить нарушение электрослабой симметрии. Напомним, что нарушение симметрии — это процесс, при котором калибровочная группа Стандартной модели сводится к (21.27), а фермионы преобретают массу. Более того, требование возникновения спектра Стандартной модели не определяет однозначно конфигурацию бран; при отборе чисел намоток бран возможен выбор дискретных значений. К тому же, есть и другие параметры, которые необходимо выбирать. Например, положения некоторых D-бран на T^6 могут быть изменены без изменения безмассового спектра, размеры торов также не фиксируются автоматически. Если бы возможности выбора отсутствовали, в рамках данного класса бранных конфигураций у нас имелся бы единственный кандидат на Стандартную модель.

В моделях пересекающихся D-бран нарушение электрослабой симметрии происходит через процесс рекомбинации бран. Для определенных значений углов пересечений между двумя бранами, в спектре струн, натянутых между ними, появляются тахионные состояния. Эти тахионы указывают на нестабильность, которая может заставить пересекающиеся браны объединиться в точках пересечений, и образовать одну брану. При меньшем количестве бран калибровочная группа уменьшается. Более того, полное число пересечений редуцируется и, следовательно, также уменьшится число безмассовых фермионов (задача 21.4). Остается невыясненным: может ли какая-нибудь из таких моделей привести к ожидаемому спектру после нарушения симметрии? Это оказывается не так легко: должно быть согласовано большое количество массовых параметров и других констант связи. Если бы это было возможно, то мы получили бы захватывающий результат. Еще многое можно сказать о моделях пересекающихся бран и современных исследованиях моделей, включающих суперсимметрию, однако, пора обсудить другие возможности возникновения Стандартной модели в теории струн.

21.5. Модели струн в физике частиц

Модели с пересекающимися бранами привлекательны, но они ни в коей мере не являются единственно возможным способом построения струнных моделей в физике частиц. Модели с пересекающимися бранами подробно рассматривались по той причине, что они достаточно просты и могут быть очень подробно разобраны. Предыдущие и текущие попытки получить Стандартную модель происходят по нескольким сценариям, которые можно различить по отправным точкам построения. Отправными точками служат пять суперсимметричных теорий струн и М-теория (см. раздел 14.1). Каждая из этих теорий может быть использована для изучения того, каким образом могла бы возникнуть Стандартная модель. Например, обсуждавшиеся модели пересекающихся бран используют в качестве отправной точки IIA-суперструны. Так как различные суперсимметричные струны и М-теория являются разными пределами одной теории, то, несомненно, различные используемые подходы связаны на некотором уровне. Тем не менее, каждая отправная точка приводит к несколько иному пониманию различных феноменологических вопросов, возникающих в процессе построения модели.

Первые попытки заняться струнной феноменологией основывались на гетеротической $E_8 \times E_8$ -теории суперструн. В такой теории шесть из девяти пространственных измерений закручены в маленькое шестимерное компактное пространство, — пространство Калаби-Яу, — имеющее особенные свойства. У пространств Калаби-Яу имеются как дискретные, так и непрерывные параметры, которые определяют особенности четырехмерной теории, возникающей при компактификации. Для всех пространств Калаби-Яу после компактификации остается минимальное количество суперсимметрий; говорят, что получающаяся четырехмерная теория является N = 1 суперсимметричной. Если присутствует суперсимметрия, то для существования киральных фермионов она должна быть минимальной. Компактификация также позволяет понизить исходную калибровочную симметрию с $E_8 \times E_8$ до $E_6 \times E_8$. Тогда множитель E_8 рассматривается как часть скрытого сектора, воздействующего на видимый сектор только неявным образом. Калибровочная группа E₆ возникает в видимом секторе как калибровочная группа теории Великого объединения. Число поколений киральных фермионов зависит от топологии пространства Калаби-Яу, и могут быть получены модели с тремя поколениями. Группа E_6 содержит $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в качестве подгруппы, так что калибровочная группа Стандартной модели может возникнуть при последующем нарушении симметрии. Компактификация Калаби-Яу в теории гетеротических струн привела к первым струнным моделям с квазиреалистичной физикой частиц. Так как пространства Калаби-Яу очень сложны, то достичь прогресса в вопросах нарушения симметрии и суперсимметрии оказалось трудно.

Технические сложности, с которыми приходится сталкиваться в пространствах Калаби—Яу, вынудили физиков искать альтернативные шестимерные пространства для компактификации гетеротической теории струн. Если просто воспользоваться 6-тором T^6 , то остается больше чем минимальное количество суперсимметрий и построить реалистичные модели оказывается невозможно. Орбифолды являются прекрасным компромиссным решением между пространствами Калаби—Яу и торами. Напрмер, анализировать орбифолды, построенные из торов, значительно проще, нежели общие пространства Калаби—Яу, однако они по-прежнему приводят к N = 1 суперсимметричным теориям в четырех измерениях. Возможно получить квазиреалистичные модели после компактификации орбифолдов в гетеротической теории струн. Орбифолды также играют важную роль в компактификациях других струнных теорий.

Совсем недавно физики интенсивно изучали феноменологические возможности теорий суперструн типа II и типа I. Как рассматривалось в предыдущем разделе, важный класс моделей основан на использовании D-бран и орбифолдов. Существуют вариации: можно использовать браны разных размерностей, либо можно попытаться сохранить определенную часть суперсимметрии. Популярен подход, разбивающий вопрос построения полностью непротиворечивой модели на подвопросы, которые можно анализировать раздельно.

Например, рассматривается теория струн типа II, в которой шесть измерений образуют пространство с бесконечным объемом, плоское везде, кроме сингулярности в начале координат. Как можно представить, плоские дополнительные измерения с бесконечным объемом, видимо, не могут привести к реалистичной модели: дополнительные измерения будут наблюдаемы. Однако, данное затруднение игнорируется в первой части анализа. Примером такого пространства является орбифолд $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$. Здесь \mathbb{C}^3 — это шестимерное плоское пространство, которое можно считать произведением трех копий комплексной плоскости, а \mathbb{Z}_3 описывает характер отождествления, приводящего к сингулярности в начале координат. К тому же, в сингулярности расположены D3-браны. Все пространства. Оказывается, что D-браны в сингулярностях орбифолда могут приводить к калибровочным полям и киральным фермионам. Модели со спектрами, похожими на спектр Стандартной модели действительно существуют.

Вторая часть анализа состоит в изучении того, как модифицировать некомпактное шестимерное пространство вдали от сингулярности, для того чтобы превратить его в компактное пространство конечного объема. Если это происходит так, что область вблизи сингулярности не изменяется, то применимы полученные ранее результаты. Замыкание некомпактного пространства, как правило, требует добавления других D-бран и/или ориентифолдов. Теория типа II с D-бранами и ориентифолдами может быть рассмотрена альтернативным образом как теория суперструн типа I с D-бранами. Теория суперструн типа I это теория неориентированных открытых и замкнутых струн. Ее можно считать результатом введения в IIB-теорию суперструн заполняющего все пространство ориентифолда, которые приводит к обрезанию спектра до подпространства состояний, инвариантных относительно изменения струнной ориентации. Хотя такое урезание не приводит к непротиворечивой теории струн, несовместности могут быть устранены добавлением степеней свободы открытых струн. В результате возникает теория суперструн типа I. Перспективы теории типа I при построении моделей могут быть весьма значительными.

Наконец, существуют модели, основанные на М-теории. Зачастую они тесно связаны с моделями, построенными с помошью ПА-суперструн, потому что Мтеория, компактифицированная на окружность — это ША-теория суперструн при некоторой конечной константе струпного взаимодействия. На самом деле модели с пересекающимися D6-бранами тесно связаны с моделями, основанными на Мтеории. С точки зрения М-теории, которая работает в одиннадцати измерениях, реалистичная физика требует компактификации на семимерное многообразие. Для того чтобы получить четырехмерные теории с N = 1 суперсимметрией, семимерное пространство должно обладать G2-голономией — геометрическим свойством, являющимся эффективным ограничением на кривизну этого пространства. Если в семимерном пространстве имеются сингулярности, то могут появиться киральные фермионы и подходяшая калибровочная группа. Подход, основанный на М-теории, может привести к значительному пониманию эффектов взаимодействия струн с конечной константой связи. В другом популярном подходе, приводящем к квазиреалистичным моделям, используется пространство Калаби-Яу в целях редукции размерности пространства-времени до пяти. После чего пятое измерение превращается в конечный отрезок - пространство, которое можно рассматривать как орбифолд (задача 2.5). Такой подход называется гетеротическим, т. е. основанным на М-теории, потому что было показано, что данная компактификация М-теории на отрезок приводит к гетеротической $E_8 \times E_8$ -теории суперструн.

Таким образом, несмотря на то, что полностью реалистичная модель физики частиц в теории струн до сих пор не построена, в этом направлении получены надежные результаты. Мы видели, что существуют струнные модели на D-бранах, чьи открытые струны приводят к спектру частиц Стандартной модели. Значимость этого достижения будет зависеть от окончательного успеха или неудачи данных моделей и от того, что мы поймем с их помощью. Интересные модели пересекающихся бран не являются полностью реалистичными. Например, остается разработать механизм нарушение симметрии. Основным свершением здесь явилось достижение правильного нарушения электрослабой симметрии в любой струнной модели.

Если бы для некоторых совместных струнных моделей был бы детально разработать механизм спонтанного нарушения симметрии, тогда было бы показано, что Стандартная модель во всей своей полноте может возникать как некоторое решение в теории струн. Подобная струнная модель (или модели?) могла бы давать интересные предсказания, которые можно проверять в новых экспериментах. Однако, это не конец истории: теория струн — это теория всех взаимодействий, включающая гравитацию. Поэтому должен быть получен целый ряд других свойств. Одной такой хорошо известной проблемой является стабилизация модулей в теории замкнутых струн; другой — космологическая постоянная. Наконец, необходимо убедиться, что Стандартная модель вложена в непротиворечивую космологию, которая, предположительно, содержит инфляцию. Теперь мы переходим к тем вопросам, в которых был достигнут некоторый значительный прогресс.

21.6. Стабилизация модулей и ландшафт

При изучении Т-дуальности замкнутых струн мы столкнулись с простейшим примером пространства модулей компактификации. Одна пространственная координата была закручена в окружность с произвольным радиусом. В этом случае пространством модулей было просто пространство всех возможных выборов модуля R. Тот факт, что R является модулем, означает, что потенциал V(R) равен нулю и, следовательно, какое-то особое значение R не выделено. Конечно же, можно выбрать любое значение R и работать с ним, однако есть некоторое затруднение. Теория на редуцированном пространстве-времени содержит безмассовый скаляр, соответствующий флуктуациям значения R. Если обозначить координаты редуцированного пространства как x, то радиус R(x) окружности в точке x является безмассовым полем, потому как потенциал V(R(x)), равный нулю при постоянном R(x), не может содержать член $\frac{1}{2}m^2R^2(x)$. Если взаимодействия не являются неестественно малыми, существование безмассового скалярного поля противоречит наблюдениям. Отсюда следует, что в реалистичных компактификациях теории струн модули должны отсутствовать.

Выбирая конкретные физические условия, в которых для предполагаемых модулей возникают нетривиальные потенциалы, можно заставить их принимать специфические значения. Флуктуации возле этих значений требуют затрат энергии и таким образом соответствуют массивным скалярам. В типичной ситуации, предполагаемые модули обусловливают параметры компактного пространства, положения D-бран и значение дилатона в теории замкнутых струн. Цель стабилизации модулей состоит в появлении потенциалов, фиксирующих значения всех модулей таким образом, что возникает допустимый струнный бэкграунд, или, как обычно говорят, струнный вакуум. Несмотря на то что это казалось трудным в течение долгого времени, достижения в период 2001-2005 годов привели к построению потоковых компактификаций, в которых все модули стабилизированы. Потоки, которые будут описаны ниже, допускают стабилизацию модулей, однако приводят к очень большому числу вакуумов. Этот ландшафт вакуумов настолько обширен, что становится правдоподобным предположение о том, что в некоторых из них космологическая постоянная принимает наблюдаемое в природе значение — чрезвычайно малое в планковских единицах. Потоковая компактификация также привела к некоторым исследованиям в космологии, в частности, определению механизма, в результате которого мог бы возникнуть инфляционный период.

Для большего понимания вопроса о стабилизации модулей, давайте обсудим шестимерную теорию гравитации Эйнштейна и электромагнитного поля. В этой теории два пространственных измерения закручиваются в некоторое компактное пространство, так что получается редуцированное четырехмерное пространство M_4 . Можно рассмотреть метрику вида

$$-ds^{2} = g_{\mu\nu}(x) \, dx^{\mu} \, dx^{\nu} + R^{2}(x) \bar{g}_{ab}(y) \, dy^{a} \, dy^{b}. \qquad (21.67)$$

Первое слагаемое в правой части — это метрика на M_4 с $\mu, \nu = 0, ..., 3$. Второе слагаемое является метрикой на компактном двумерном пространстве с коор-

динатами y^1 и y^2 (индексы a, b могут принимать значения 1, 2). В данной метрике мы разделили масштабный фактор R(x), зависящий только от M_4 , и фиксированную метрику $\bar{g}_{ab}(y)$, которая зависит только от координат двумерного пространства. Объем двумерного пространства равен $R^2(x)V_2$, где V_2 — это объем, вычисленный по метрике $\bar{g}_{ab}(y)$. Таким образом, мы видим, что соотношение (21.67) корректно описывает компактное пространство, объем которого в редуцированном пространстве может флуктуировать. Вывод потенциала V(R), соответствующего R — это прямое, хотя и техническое вычисление в общей теории относительности Эйнштейна. Мы приведем только основные идеи для получения данного результата. Потенциал пропорционален топологическому инварианту двумерного многообразия: характеристике Эйлера $\chi = 2 - 2g$, где g это неотрицательное целое число, называемое родом. Например, для S²-сферы род равен нулю, а характеристика Эйлера равна двум. Род двумерного тора равен единице, а характеристика Эйлера равна нулю. Род компактной поверхности равен g, если она является сферой с g дырками. Потенциал V(R) не является просто константой, а обладает некоторой зависимостью от R, эта зависимость возникает в процессе динамической эволюции гравитации от значения R. Как мы уже видели, размерно редуцированная гравитационная постоянная G равна многомерной гравитационной постоянной $G^{(6)}$, деленной на объем компактного пространства. Так как этот объем может флуктуировать, то, по-видимому, возникает парадоксальная ситуация, когда G не является постоянной. Восстановление постоянной G приводит к переопределению четырехмерной метрики, которая вводит в искомый потенциал фактор $1/R^4$. В итоге получается

$$V(R) = -a_g \frac{\chi}{R^4}, \quad \chi = 2 - 2g,$$
 (21.68)

где $a_g > 0$ — константа. Для 2-сферы g = 0 и потенциал отрицательно определен $V \sim -1/R^4$, это означает, что оставленная на произвол судьбы сфера схлопнется в точку. Для 2-тора g = 1, потенциал равен нулю и R — это модуль. Это согласуется с нашим опытом общения с T-дуальностью в теории струн, где возможно закрутить координаты в окружности произвольных радиусов; пространство образованное двумя окружностями есть тор. Для пространства с g > 1, имеем $V(R) \sim 1/R^4$ и оставленное на произвол судьбы пространство будет бесконечно расширяться. Компактное пространство нулевого рода обладает положительной кривизной, компактное пространство рода один обладает отрицательной кривизной (см. далее разд. 23.8). Таким образом, видно, что положительная кривизна приводит к коллапсу, отрицательная кривизна приводит к расширению, а нулевая кривизной, поэтому необходимо рассматривать вспомогательные элементы, которые могут помочь стабилизировать радиус R.

При взаимодействии гравитации и электромагнитного поля в целях стабилизации радиуса можно воспользоваться магнитным потоком. На самом деле как было выяснено в разделе 19.3 и задаче 19.3, магнитный поток на торе квантуется. Полагая, что поток $\Phi = 2\pi n$, при целом *n* можно легко оценить вклад магнитного поля в потенциал. Если характерная площадь двумерного пространства с потоком равна R^2 , то величина магнитного поля изменяется как $B \sim n/R^2$. Так как плотность магнитной энергии пропорциональна B^2 , мы получаем полную потенциальную энергию, изменяющуюся как $R^2B^2 \sim n^2/R^2$. При фиксированном потоке увеличение размеров пространства приводит к уменьшению энергии, таким образом, возникает тенденция расширения пространства. В силу особенности поведения гравитации, обсуждавшейся перед (21.68), фактор $1/R^4$ также влияет на данный вклад и потенциальная энергия потока дает в V(R) вклад в виде слагаемого, ведущего себя как n^2/R^6 . Таким образом, имеем

$$V(R) = -a_g \frac{\chi}{R^4} + a_f \frac{n^2}{R^6},$$
 (21.69)

где a_f константа. Теперь очевидно, что магнитный поток может стабилизировать сферу: при $\chi = 2$ приведенный выше потенциал имеет стабильный минимум при некотором R > 0. Для разных значений n магнитного потока получаются разные значения критического радиуса. Таким образом, получено бесконечное семейство стабильных решений.

Упражнение-разминка 21.16. Нарисуйте потенциал (21.69) при $\chi = 2$, определите критическое значение R и подтвердите, что оно приводит к минимуму потенциала.

Если нужно зафиксировать радиус R в том случае, когда он является модулем $(\chi = 0)$, а первое слагаемое в потенциале (21.69) равно нулю, то в дополнение к магнитному потоку необходим отрицательный вклад в V(R). В теории струн такие отрицательные вклады могут возникать из ориентифолдов. В более полной компактификации в теории суперструн дополнительные измерения образуют шестимерное пространство и из ориентифолдов, D-бран, и потоков могут возникнуть вклады в потенциал. Если рассмотреть, например, ПВ-теорию струн, то трехиндексные полевые напряженности NS-NS поля В_и и R-R поля А_и могут привести к потокам. Так же, как магнитные потоки являются интегралами от полевых напряженностей с двумя индексами F_{ii} по двумерным многообразиям, NS-NS и R-R потоки являются интегралами полевых напряженностей с тремя индексами по трехмерным многообразиям. Типичное шестимерное пространство Калаби-Яу, использованное для компактификации, может с легкостью иметь сотни независимых нестягиваемых трехмерных подмногообразий. Для каждого из них может быть определен поток, характеризуемый некоторым целым числом. В результате, потоки на пространстве Калаби-Яу порождают потенциал, зависящий от сотен целых чисел. Компактификация шести измерений на пространство Калаби-Яу с потоками является примером потоковой компактификации.

В ситуации с потенциалами, возникающими из многих потоков, для понимания пространства возможных вакуумов полезны статистические методы. В качестве очень упрощенного, но по-прежнему показательного примера, рассмотрим потенциал одного скалярного поля ϕ , характеризуемого двумя целыми числами m и n:

$$V_{m,n}(\phi) = n\phi + \frac{1}{2}m\phi^2, \quad m,n\in\mathbb{Z}.$$
 (21.70)

Глава 21. Теория струн и физика частиц

Поскольку *m* и *n* изменяются, получаем набор потенциалов. Для того чтобы точно проанализировать данный набор, ограничим возможные значения целых чисел следующими условиями

$$n^2 + m^2 \leq L, \quad m > 0.$$
 (21.71)

Первая связь, при большом целом L, приводит к конечному набору потенциалов. Вторая связь, m > 0, ограничивает потенциалы снизу и гарантирует у них наличие стабильного минимума. Действительно, критическая точка ϕ_* (21.70) возникает при

$$0 = \frac{dV_{m,n}}{d\phi} = n + m\phi_* \implies \phi_* = -\frac{n}{m}.$$
 (21.72)

Значение ϕ_* соответствует вакуумному состоянию потенциала $V_{m,n}$. Можно также проверить, что в данном вакуумном состоянии вакуумная энергия $\Lambda_{m,n}$ равна

$$\Lambda_{m,n} = V_{m,n}(\phi_*) = -\frac{1}{2} \frac{n^2}{m}.$$
 (21.73)

• Если рассмотреть набор всех целых чисел m, n допустимых (21.71), то можно спросить: каково приблизительное распределение вакуумов ϕ_* в этом наборе? Запишем

$$d\mathcal{N} = \rho(\phi_*) \, d\phi_*,\tag{21.74}$$

где $d\mathcal{N}$ — это число критических точек в интервале ($\phi_*, \phi_* + d\phi_*$) и $\rho(\phi_*)$ это искомая функция распределения. Набор потенциалов можно представить в виде набора точек с целочисленными координатами на плоскости (x, y); каждая точка (m, n) соответствует потенциалу $V_{m,n}(\phi)$ и ассоциированному вакуумному состоянию ϕ_* (рис. 21.9). В силу (21.71) допустимые точки находятся справа от вертикальной оси и внутри окружности радиуса \sqrt{L} , расположенной в начале координат. Для больших L полное число точек, или полное число вакуумов \mathcal{N} , приблизительно равно площади допустимой области: $\mathcal{N} \approx 1/2 \pi L$. Также отметим, что $|\phi_*| = |n|/m < \sqrt{L}$, так как $m \ge 1$ и $n < \sqrt{L}$.

Для нахождения распределения вакуумов, заметим, что $\phi_* = -n/m$ означает, что точки на каждой радиальной прямой соответствуют одному вакуумному значению. На самом деле

$$\phi_* = \operatorname{tg} \theta$$
, или $\theta = -\operatorname{tg}^{-1} \phi_*$, (21.75)

где θ — это угол, образованный радиальной прямой и положительной осью x. Число вакуумов $d\mathcal{N}$ в малом секторе (θ , $\theta + d\theta$) равно площади

$$d\mathcal{N} = \frac{L}{2} |d\theta| = \frac{L}{2} \frac{1}{1+\phi_*^2} |d\phi_*| \quad \Rightarrow \quad \rho(\phi_*) = \frac{L}{2} \frac{1}{1+\phi_*^2}, \quad (21.76)$$

где для связи $d\theta$ и $d\phi_*$ было использовано (21.75), а значение $\rho(\phi_*)$ было выделено из (21.74). Полученное распределение имеет ожидаемое свойство $\rho(-\phi_*) = \rho(\phi_*)$, возникающее потому, что при $\phi_* = -n/m$ для каждой критической точки при заданном $n = n_0$ существует другая точка с $n = -n_0$. На заданном наборе



Рис. 21.9. Набор потенциалов $V_{m,n}(\phi)$, определяемых двумя целыми числами m, n при m > 0

точек, распределение $\rho(\phi_*)$ выполняется при $|\phi_*| < \sqrt{L}$. Форма ρ указывает, что плотность вакуумов имеет пик при $\phi_* = 0$. В пределе очень больших L убеждаемся, что число вакуумов \mathcal{N} равно

$$\mathcal{N} = \frac{L}{2} \int_{-\sqrt{L}}^{\sqrt{L}} \frac{d\phi_*}{1 + \phi_*^2} \simeq \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_*}{1 + \phi_*^2} = \frac{1}{2} \pi L.$$
(21.77)

Другим интересным распределением является распределение вакуумных энергий (21.73). Обозначая число вакуумов с энергией в интервале $d\mathcal{N}$ как (Λ , Λ + $d\Lambda$), запишем

$$\mathcal{N} = \rho(\Lambda) |d\Lambda|, \tag{21.78}$$

где $\rho(\Lambda)$ — это ассоциированная функция распределения. Вычисление показывает (задача 21.5)

$$\rho(\Lambda) = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2|\Lambda|}} \left[\sqrt{\Lambda^2 + L} - |\Lambda| \right]^{3/2}. \tag{21.79}$$

Так как в данном примере все вакуумные энергии отрицательны (см. (21.73)), приведенное выше распределение должно быть дополнено $\rho(\Lambda) = 0$ для $\Lambda > 0$. Отметим, что $\rho(\Lambda)$ растет при $\Lambda \to 0$. Дальнейшее обсуждение содержится в задаче 21.5.

Статистические рассуждения являются уместными при обсуждении того, каким образом компактификации в теории струн могли бы воспроизвести наблюдаемое значение так называемой темной энергии Вселенной. Значение темной энергии равно текущему значению вакуумной энергии и, наиболее вероятно, может быть отождествлено с космологической постоянной. Несмотря на то что в настоящее время вакуумная энергия доминирует над плотностью энергии во Вселенной, в планковских единицах она исчезающее мала. Чтобы явно убедиться в этом, сперва заметим, что в предположении равенства параметра расширения Хаббла значению $H_0 = 73,5$ км/с, текущая критическая плотность энергии ρ_c Вселенной равна

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,015 \times 10^{-29} \text{ г/см}^3.$$
(21.80)

Данная плотность эквивалентна плотности шести протонов в кубическом метре.

() Упражнение-разминка 21.17. Рассмотрите естественную планковскую плотность масс $\rho_{\rm P} = m_{\rm P}/\ell_{\rm P}^3$. Покажите, что $\rho_{\rm P} = 5,20 \times 10^{93}$ г/см³.

Текущие экспериментальные данные указывают на то, что плотность энергии Вселенной очень близка к критической плотности и, по-видимому, вклад вакуумной энергии составляет приблизительно 76%. Таким образом, находим, что плотность вакуумной энергии равна

$$\rho_{\rm vac} \approx 0.76 \rho_c = 0.771 \times 10^{-29} \,\,{\rm r/cm}^3 = 1.48 \times 10^{-123} \rho_{\rm P}.$$
 (21.81)

Текущее значение вакуумной энергии примерно на 123 порядка величины меньше естественного значения в планковских единицах! Следуя традиционным струнным обозначениям, для плотности вакуумной энергии будем использовать символ Λ . Мы не будем пользоваться обозначением, принятым в общей теории относительности, где Λ это «космологическая постоянная», величина, являющаяся произведением вакуумной энергии на $8\pi G/c^4$. Таким образом, (21.81) принимает вид

$$\Lambda_{\rm obs} \approx 1.48 \times 10^{-123} \Lambda_{\rm P}. \tag{21.82}$$

Так как обычно считается, что струнные единицы измерения должны всего лишь на пару порядков отличаться от планковских, то возникновение исчезающее малой энергии является парадоксом. Даже в сценариях с большими дополнительными измерениями, Λ_{obs} будет на много порядков меньше, чем естественное струнное значение. Ожидается, что для компактификаций в теории струн вакуумные энергии находятся в интервале $(-\Lambda_p, \Lambda_p)$. Если бы существовало лишь небольшое число струнных вакуумов, то было бы весьма неправдоподобно, что любой из них может иметь энергию равную $\sim 10^{-123} \Lambda_p$. Сейчас мы покажем, что в потоковой компактификации со многими потоками число вакуумов настолько велико, что становится возможным найти значительное число вакуумов с энергией из экспериментально допустимого интервала значений. С этой целью рассмотрим потенциал для набора модулей, соответствующих векторам $\vec{\phi}$ в некоторой теории с J потоками, характеризуемой целыми числами $n_1, n_2 \dots, n_J$:

$$V(\vec{\phi}) = V_0(\vec{\phi}) + \sum_{i=1}^J m_i(\vec{\phi}) n_i^2.$$
(21.83)

Здесь $V_0(\vec{\phi})$ — это часть потенциала, ответственного за эффекты, отличные от порождаемых потоками. Это аналог первого слагаемого в правой части (21.69). Второе слагаемое в (21.83) — это вклад от потоков, он содержит вычисляемые функции $m_i(\vec{\phi})$. Это слагаемое является аналогом второго слагаемого в правой части (21.69). Когда числа модулей и потоков J велики, становится затруднительно искать критические точки потенциала. Придерживаясь стратегии, оправданной подробным анализом, мы фиксируем модули $\vec{\phi}$ в некотором типичном значении $\vec{\phi}_0$ и запускаем процедуру минимизации. Как V_0 , так и функции m_i (21.83) становятся всего лишь константами. Тогда, записывая $\Lambda = V$ и $\Lambda_0 = V_0$, находим

$$\Lambda = \Lambda_0 + \sum_{i=1}^{J} q_i^2 n_i^2.$$
 (21.84)

Мы записали $m_i = q_i^2$, чтобы сделать явным то, что потоки дают положительный вклад в плотность энергии. Более того, так же, как в типичных компактификациях, Λ_0 будет выбрано отрицательной плотностью энергии планковского масштаба:

$$\Lambda_0 \sim -\Lambda_P. \tag{21.85}$$

Мы хотим понять, существует ли разумное число вакуумов, для которых полная вакуумная энергия находится в экспериментально допустимом интервале значений, скажем, между нулем и ΔΛ, где

$$\Delta \approx \Lambda_{\rm obs} \approx 10^{-123} \Lambda_{\rm P}.$$
 (21.86)

Для вакуума в данном интервале имеем

$$0 \leq \Lambda_0 + \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \leq \Delta \Lambda.$$
(21.87)

Так как Л₀ отрицательно, предыдущее неравенство можно представить в виде

$$|\Lambda_0| \leqslant \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \leqslant |\Lambda_0| + \Delta \Lambda.$$
(21.88)

Мы хотим знать, как много вакуумов удовлетворяют данному неравенству. Это число было бы большим, если бы q_i^2 было малым по сравнению с $\Delta\Lambda$. Проблема заключается в том, что q_i^2 на *много* порядков больше, чем $\Delta\Lambda$. Это на самом деле планковские числа, так что в лучшем случае на несколько порядков меньше, чем $|\Lambda_0|$.

Если вакуум, характеризуемый ненулевыми целыми числами (n_1, n_2, \ldots, n_J) , удовлетворяет (21.88), то имеем по крайней мере 2^J вырожденных вакуумов $(\pm n_1, \pm n_2, \ldots, \pm n_J)$, которые также удовлетворяют этому неравенству. Если q_i удовлетворяют специальным соотношениям, то может происходить дальнейшее вырождение: если, например, $q_i = q_j$, то перестановка n_i с n_j приводит к дополнительным вырожденным вакуумам. Будем называть $d(J) \approx 2^J$ вырожденностью вакуума.

Чтобы эффективно проанализировать связь (21.88), введем декартовы координаты

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{n}_i, \tag{21.89}$$

так что вакуумы становятся узлами решетки в x-пространстве. Так как узлы на решетке разделены вдоль x_i расстоянием q_i , то клетки, содержащие один узел решетки, имеют объем

$$\operatorname{vol}_{\kappa\pi} = \prod_{i=1}^{J} q_i. \tag{21.90}$$

В х-пространстве связь (21.88) принимает вид

$$|\Lambda_0| \leq \sum_{i=1}^J x_i^2 \leq |\Lambda_0| + \Delta \Lambda.$$
(21.91)

Это сферическая оболочка в *x*-пространстве. Чтобы найти толщину оболочки dR, запишем $|\Lambda_0| = R_0^2$ и $|\Lambda_0| + \Delta \Lambda = (R_0 + dR)^2$, откуда находим

$$dR = \frac{\Delta\Lambda}{2\sqrt{\Lambda_0}};$$
 (21.92)

x-объем оболочки равен произведению объема сферы S^{J-1} радиуса $R_0 = \sqrt{|\Lambda_0|}$ на толщину dR:

$$\operatorname{vol}_{060,\Pi} = \operatorname{vol}(S^{J-1})\sqrt{|\Lambda_0|}^{J-1} \frac{\Delta\Lambda}{2\sqrt{\Lambda_0}}, \quad \operatorname{vol}(S^{j-1}) = \frac{2\pi^{J/2}}{\Gamma(J/2)},$$
 (21.93)

где было использовано (3.52). Так как вакуумы являются d(J)-кратно вырожденными, то вакуум находится в оболочке, если число узлов решетки в оболочке, деленное на d(J), больше либо равно единице:

$$\frac{1}{d(J)} \frac{\operatorname{vol}_{o6o\pi}}{\operatorname{vol}_{\kappa\pi}} = \frac{\operatorname{vol}(S^{J-1})}{2d(J)} \sqrt{|\Lambda_0|}^{J-1} \frac{\Delta\Lambda}{\sqrt{\Lambda_0}} \frac{1}{\prod_{i=1}^J q_i} \ge 1.$$
(21.94)

Переупорядочение приводит к

$$\frac{\Delta\Lambda}{2|\Lambda_0|} \ge \frac{d(J)}{\operatorname{vol}(S^{J-1})} \prod_{i=1}^J \frac{q_i}{\sqrt{|\Lambda_0|}}.$$
(21.95)

Мы хотим, чтобы отношение слева от знака неравенства было приблизительно равно 10^{-124} . Для J = 1 игнорирование префактора порядка один приводит к неестественно малому $q \sim 10^{-124} \sqrt{|\Lambda_0|}$. Для больших J префактор необходимо учитывать, потому как он становится большим. Действительно, $d(J) \approx 2^J$ растет с J, а vol (S^{J-1}) уменьшается с J.

• Упражнение-разминка 21.18. Убедитесь, что объем vol (S^k) достигает максимума при k = 6 и монотонно убывает при больших k. Для того чтобы проанализировать (21.95) при больших *J*, воспользуемся асимптотическим разложением

$$\operatorname{vol}(S^{J-1}) \simeq \left(\frac{2\pi e}{J}\right)^{J/2}, \quad J \to \infty.$$
 (21.96)

Кроме того, приравняем к 10^{-124} левую часть (21.95), введем $\prod_{i=1}^{J} q_i = q^J$, запишем

эффективную q и положим $d(J) = 2^J$. Это дает

$$10^{-124} \ge \left(\frac{2\pi e}{J}\right)^{-J/2} = \left(\frac{2q}{\sqrt{|\Lambda_0|}}\right)^J$$
(21.97)

и приводит к

$$\frac{2q}{\sqrt{|\Lambda_0|}} \simeq 10^{-124/J} \sqrt{\frac{2\pi e}{J}} \equiv f(J).$$
 (21.98)

Например, для J = 124 получаем f(J) = 0,037, — число, показывающее, что q не сильно меньшее, чем естественное планковское значение, и достаточное для получения струнного вакуума в экспериментально допустимом интервале значений.

- Упражнение-разминка 21.19. Используйте $\Gamma(x) \sim x^{x-1} \sqrt{2\pi x} e^{-x} (1 + \mathcal{O}(1/x)),$ чтобы доказать (21.96).
- Упражнение-разминка 21.20. Функция f(J) достигает максимума при J равном примерно шестистам. Определите критическое J и соответствующее значение f(J).

С помощью потоковой компактификации, мы построили значительное количество вакуумов с энергиями в наблюдаемом интервале значений. Конечно же, существует гораздо больше вакуумов с недопустимо большими энергиями. Используемая нами аргументация не объясняет, почему вакуумная энергия так мала, она говорит только то, что она может быть мала. В том случае, если теория струн содержит инфляцию, может быть предложено нестандартное объяснение. Инфляция, в том виде, в котором она понимается в настоящее время, не прекращается в будущем. При непрекращающейся инфляции пузыри вселенных образуются постоянно, и, наиболее вероятно, все вакуумы ландшафта в конце концов реализуются как физические пузыри вселенных. Среди них содержатся вселенные похожие на нашу, в которой вакуумная энергия мала. Считается, что мы находимся в такой вселенной, потому что будь вакуумная энергия значительно больше, то галактики и звезды не смогли бы образоваться и жизни бы не существовало. Однако, каким бы эпатажным не казался этот аргумент, он имел некоторый успех. До экспериментального обнаружения вакуумной энергии в 1999 году, большинство теоретиков считали, что она в точности равна нулю. Однако ни одна попытка теоретически доказать, что вакуумная энергия должна быть равна нулю, не имела успеха. Вайнберг показал, что образование структур во Вселенной приводит к верхней границе для вакуумной энергии. Он также привел доводы, что если принцип, гарантирующий равенство нулю вакуумной энергии, отсутствует, то возможно окажется, что ее значение меньше, чем верхний предел, но не кардинально меньше. Оказалось, что это правильно.

Так как в последние несколько лет экспериментальное доказательство существования периода инфляции значительно усилилось, можно задаться вопросом, имеет ли место инфляция в теории струн. Большая часть исследований проводилась с использованием потоковых компактификаций по той причине, что модули должны стабилизироваться. В типичной ситуации, имеется пространство Калаби—Яу с элонгацией, на кончике которой расположена анти-D-брана. Медленное движение D-браны вдоль элонгации по направлению анти-D-браны может приводить к инфляции. Слишком рано утверждать, приведут ли эти попытки к полным моделям.

По размышлении над текущими попытками показать, что теория струн описывает реальный мир, нельзя не испытать смешанные чувства. С одной стороны, струнные модели и потоковые компактификации свидетельствуют о том, что все же основные свойства реального мира могут возникать из теории струн. С другой стороны, предлагаемые конструкции кажутся надуманными, по-крайней мере в том смысле, что они сконструированы для того, чтобы приводить к наблюдаемой физике, а не получены естественным образом как простейшие решения теории струн. Стандартная модель физики частиц и Стандартная космологическая модель — это изощренные построения и текущие попытки описать их в рамках теории струн не приводят к упрощению. Несмотря на сложность, не следует реагировать подобно Альфонсо X (Альфонсо Мудрый, 1221–1284), только что познакомившемуся с астрономией Птолемея²⁾:

Случись мне присутствовать при сотворении мира, я бы дал пару полезных советов, как лучше обустроить Вселенную.

Можно представить, что идея ландшафта верна и наша Вселенная — это только одна из гигантского числа возможностей, причем не так чтобы очень естественная. Это объясняло бы, почему струнные построения не выглядят естественными. Однако, на данном этапе, было бы более конструктивно исследовать факты и модели, надеясь на то, что естественность появится по мере углубления нашего понимания. Наши надежды основаны на вере в то, что, как утверждал Маймонид (1135–1204) в Путеводителе растерянных (1190),

В царстве Природы нет ничего бессмысленного, тривиального или ненужного.

Задачи

Задача 21.1. Косой тор и действие ориентифолда

Рассмотрите плоскость (x, y) с линией ориентифолда вдоль оси x. Операция симметрии ориентифолда меняет струнную ориентацию (здесь это не будет иг-

²⁾ Я признателен Дж. Голдстоуну за предоставление этой ссылки из Bartlett's Familiar Quotations (1919). Альфонсо X был испанским королем Кастилии и Леона. Моше Маймонид родился в Кордове. Испания. Рассмотренные в разделе 21.4 модели с пересекающимися D6-бранами, были развиты «испанской группой».

рать роли) и действует на плоскости путем отображения точки (x, y) в се образ (x, -y). Данное действие хорошо определено, потому что оно переводит точки плоскости в точки плоскости. Линия ориентифолда — это линия, которая остается неподвижной при действии ориентифолда.

2-тор получается наложением двух отождествлений на плоскости (x, y). Если эти отождествления такие, как в (2.101) и (2.102) то результатом будет квадратный тор. Чтобы получить прямоугольный тор используем

$$(x, y) \simeq (x + a, y), \quad (x, y) \simeq (x, y + b), \quad a, b > 0.$$
 (1)

Фундаментальной областью этих отождествлений вместе с границей может быть выбрана область с точками (x, y), удовлетворяющими $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le b$. Это прямоугольник со сторонами a и b. Проиллюстрируйте данную ситуацию на рисунке.

(a) Убедитесь, что действие ориентифолда $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ хорошо определено на торе (1). На этом торе линия $0 \le x \le a$, y = 0 является неподвижной. На торе существует другая неподвижная линия. Найдите ее. Покажите, что действие ориентифолда на торе можно представлять как отражение относительно одной из двух неподвижных линий. Поэтому, на самом деле существуют две линии ориентифолда на торе!

Теперь рассмотрите класс косых 2-торов, поучающихся наложением отождествлений

$$(x, y) \simeq (x + a_1, y + a_2), \quad (x, y) \simeq (x, y + b), \quad a_1, a_2, b > 0.$$
 (2)

Фундаментальной областью этих отождествлений вместе с границей может быть выбран параллелограмм с вершиной \mathcal{P} в начале координат и сторонами, определяемыми векторами $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (0, b)$. Пусть $\vec{x} = (x, y)$, так что отождествления можно переписать в виде $\vec{x} \simeq \vec{x} + \vec{a}$ и $\vec{x} \simeq \vec{x} + \vec{b}$. Нарисуйте данный параллелограмм \mathcal{P} .

(б) Теперь рассмотрите тор (2) при

$$a_2=\frac{b}{2}.$$
 (3)

Воспользуйтесь подходящей фигурой, чтобы убедиться в том, что действие ориентифолда $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ хорошо определено на торе. Найдите две неподвижные линии на \mathcal{P} . Отметим, что эти линии представляют единственную замкнутую линию ориентифолда на торе.

(в) Пусть $\vec{a}^* \equiv (a_1, -a_2)$. Покажите, что (3) означает, что $\vec{a}^* = \vec{a} - \vec{b}$. Отметим значимость этого соотношения на вашем чертеже. Пусть точки обозначаются векторами $t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ с постоянными t_1 и t_2 . Покажите, что действие ориентифолда имеет вид

$$t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b} \to t_1 \vec{a} - (t_1 + t_2) \vec{b}.$$
 (4)

(г) Замкнутая линия ℓ на торе может быть обозначена парой взаимно простых целых чисел $\ell = (m, n)$ с учетом того, что эта линия возникает из прямого отрезка из начала координат в точку $m\vec{a}+n\vec{b}$. Изучите аргументацию, приведшую к выражению числа пересечений на квадратном торе (21.5). Убедитесь, что эта формула также справедлива для линий на косом торе. Из (4) следует, что после действия ориентифолда

$$\boldsymbol{\ell} = (m, n) \to \boldsymbol{\ell}^* = (m, -m - n). \tag{5}$$

Для описания линий удобно выбрать другую пару чисел, одно из которых может быть полуцелым:

$$\ell = (m, n)$$
 представимо как $\ell = \left[m, n + \frac{m}{2}\right].$ (6)

(д) Покажите, что действие ориентифолда отображает

$$\boldsymbol{\ell} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}] \rightarrow \boldsymbol{l}^* = [\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{s}]. \tag{7}$$

(e) Покажите, что число пересечений для двух линий $\ell_1 = [r_1, s_1]$ и $\ell_2 = [r_2, s_2]$ — это

$$#(\ell_1, \ell_2) = r_1 s_2 - r_2 s_1. \tag{8}$$

Покажите, что

$$\#(\ell_1^*, \ell_2^*) = -\#(\ell_1, \ell_2).$$
(9)

(ж) Припишите замкнутым линиям ориентифолда ориентацию слева направо. Покажите, что она может быть описана как вектор вида $t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$, представленный как [2, 0].

Задача 21.2. Числа пересечений и формальные переменные

Для описания полинома П, сопоставленного заряду D6-браны, намотанной на T^6 , в разделе 21.4 были введены формальные переменные x_i , y_i , i = 1, 2, 3. Теперь рассмотрите следующие правила для умножения формальных переменных:

$$x_i y_j = y_j x_i, \quad x_i x_j = x_j x_i$$
 и $y_i y_j = y_j y_i$ при $i \neq j$
 $x_i x_i = y_i y_i = 0$ и $x_i y_i = -y_i x_i = 1$, нет суммирования по i . (1)

К тому же, предположим, что умножение удовлетворяет закону дистрибутивности. Отметим, что данное умножение некоммутативно (имеет значение порядок сомножителей) и что вышеуказанные правила не могут быть использованы для упрощения полинома II, сопоставленного бране.

- (a) Покажите, что умножение полиномов, сопоставленных двум намотанным D6-бранам, дает их число пересечений: $\Pi_a \Pi_b = I_{ab}$.
- (б) Воспользуйтесь (21.65) для вывода условия совместности $\sum N_a I_{ab} = 0$ при

любом фиксированном b. Детально разъясните, почему это условие приводит к правилу, сформулированному в (21.62).

Задача 21.3. Модель пересекающихся бран со спектром частиц Стандартной модели

- Для решения это задачи необходимо сперва решить задачу 21.1, в которой рассматриваются ориентифолды на косых торах. T^6 в рассматриваемой бранной модели составлен из двух прямоугольных торов (первый и второй торы) и одного косого тора (третий тор). Линии на косом торе обозначаются как [*p*, *q*].

На каждом прямоугольном торе, намотка двух неподвижных линий ориентифолда задается как (2,0). На косом торе, единственная линия ориентифолда задается как [2,0] (задача 21.1, п. (ж)). В результате, T^6 обладает тремя пространственными направлениями вдоль Об-плоскостей. Другие три направления вдоль Об-плоскостей совпадают с пространственными направлениями эффективного четырехмерного пространства-времени.

Четыре набора D6-бран в этой модели описываются следующими линиями:

$$N_{1} = 3: \quad \ell_{1}^{(1)} = (1, 0), \quad l_{2}^{(1)} = (5, 1), \quad l_{3}^{(1)} = [1, 1/2],$$

$$N_{2} = 2: \quad \ell_{1}^{(2)} = (0, -1), \quad l_{2}^{(2)} = (1, 0), \quad l_{3}^{(2)} = [1, 3/2],$$

$$N_{3} = 1: \quad \ell_{1}^{(3)} = (4, 3), \quad l_{2}^{(3)} = (1, 0), \quad l_{3}^{(3)} = [0, 1],$$

$$N_{4} = 1: \quad \ell_{1}^{(4)} = (1, 0), \quad l_{2}^{(4)} = (1, 1), \quad l_{3}^{(4)} = [1, -3/2].$$
(1)

Зеркальный образ *i** D6-браны *i* получается изменением знака второго элемента в каждой из трех линий, определяющих брану.

- (a) Приведите значения (*m*, *n*), соответствующие стандартному описанию каждой из четырех линий на третьем торе.
- (6) Убедитесь, что $I_{ii} = 0$ для i = 1, 2, 3, и 4. Отсюда следует, что никакая D6-брана не пересекается со своим собственным зеркальным образом.
- (в) Вычислите все остальные числа пересечений I_{ij} и I_{ij^*} , при i < j. Убедитесь, что

$$I_{12} = 1, \quad I_{12^{\bullet}} = 2, \quad I_{13} = -3, \quad I_{13^{\bullet}} = -3, \quad I_{14} = I_{14^{\bullet}} = 0,$$

$$I_{23} = I_{23^{\bullet}} = 0, \quad I_{24} = -3, \quad I_{24^{\bullet}} = 0, \quad I_{34} = 3, \quad I_{34^{\bullet}} = -3.$$
(2)

Проверьте, что информация, содержащаяся в вышеприведенных числах пересечений, корректно отображена на рис. 21.8.

(г) Так как намотки ориентифолда описываются как (2,0), (2,0), [2,0], полином (21.64) принимает вид $\Pi_{06} = 8x_1x_2x_3$. Так как заряд Рамон—Рамона Об-плоскости ориентифолда противоположен заряду D6-браны и в четыре раза превышает его, то условие равенства нулю полного R-R заряда на T^6 имеет вид

$$\sum_{i=1}^{4} N_i (\Pi_i + \Pi_{i^*}) - 4 \Pi_{06} = 0.$$
 (3)

Убедитесь, что числа намотки в (1) удовлетворяют данной связи. Замечание: последний множитель в полиноме Π строится из чисел в [p, q] представлении.

(д) В этой модели, один из четырех множителей U(1) остается безмассовым. Его заряд пропорционален $Q_1 - 3(Q_3 + Q_4)$. Здесь $Q_i = +1$ для струны, заканчивающейся на *i*-й бране либо начинающейся на *i**-бране. Рассмотрите состояния на рис. 21.8. Убедитесь, что при подходящей нормировке данный заряд — это в точности гиперзаряд.

Задача 21.4. Нарушение симметрии при рекомбинации бран

Чтобы упростить себе работу, рассмотрим пару пересекающихся D4-бран. У каждой браны есть одно пространственное измерение, закрученное как замкнутая кривая на квадратном торе T^2 с координатами x^4 и x^5 . Остальные три пространственные направления в мировом объеме бран расположены вдоль пространственных направлений четырехмерного пространства-времени. Подробности компактификации x^6, \ldots, x^9 не имеют значения.

Так как имеется один T^2 , намотка каждой D4-браны может быть задана единственной линией $\ell = (m, n)$, где m и n относительно просты. Для двух заданных D4-бран с линиями $\ell^{(1)} = (m_1, n_1)$ и $\ell^{(2)} = (m_2, n_2)$, число пересечений I_{12} , определяющее число левых фермионов на множестве пересечений, задается как

$$I_{12} = #(\ell^{(1)}, \ell^{(2)}) = m_1 n_2 - m_2 n_1.$$

Процесс рекомбинации может быть описан с использованием соответствующих линий на торе. Возьмите одну из бран, скажем первую, и отрежьте бесконечно малую часть вблизи концевой точки данной линии. Результатом будет открытая линия на торе, начинающаяся в (0, 0) и заканчивающаяся вблизи (0, 0). Возьмите вторую брану и отрежьте бесконечно малую часть вблизи ее начала. Результатом будет открытая линия, начинающаяся вблизи (0, 0) и заканчивающаяся в (0, 0). Теперь склейте конец первой линии с началом второй. Результатом будет одна замкнутая линия, сопоставленная рекомбинированной D-бране.

- (а) Воспользуйтесь представлением определяющих линий на плоскости (на которой тор возникает как единичный) для доказательства того, что рекомбинация двух D-бран $\ell^{(1)} = (m_1, n_1)$ и $\ell^{(2)} = (m_2, n_2)$ приводит к D-бране, соответствующей линии, начинающейся в (0, 0), заканчивается в $(m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, и имеющей один угол (где?). Эта линия может быть непрерывно деформирована в прямую линию, соединяющую ее концы. Данная линия, соответствующая рекомбинированной D-бране Σ , задается $\ell_{\Sigma}(m_1+m_2, n_1+n_2)$. Объясните, почему окончательный результат рекомбинации не зависит от порядка, в котором склеиваются D-браны.
- (б) Проведите в явном виде процедуру рекомбинации на торе для бран (1,0) и (0, 1). Покажите в последовательности фигур то, как рекомбинированные браны могут быть непрерывно деформированы в брану (1, 1).
- (в) Когда две браны рекомбинируют, полное число бран уменьшается на одну брану и, в итоге, число полей Максвелла уменьшается на одно поле. Рассмотрите D-брану *i*, пересекающуюся с каждой из двух бран: браной 1 и браной 2, рекомбинирующихся в Σ. Докажите, что

$$|I_{i\Sigma}| \leq |I_{i1}| + |I_{i2}|.$$

Данный результат показывает, что число (безмассовых) киральных фермионов, полученных после рекомбинации бран меньше либо равно полному числу киральных фермионов, которые присутствовали до рекомбинации. Таким образом, присутствуют ожидаемые признаки нарушения симметрии: некоторое число полей Максвелла и некоторое число киральных фермионов приобретают массу.

Задача 21.5. Распределение вакуумной энергии в игрушечной модели

Выведите распределение $\rho(\Lambda)$, задаваемое (21.79). Один возможный подход состоит в том, чтобы рассмотреть непрерывную аппроксимацию, при которой (n, m) = (x, y) и поэтому $\Lambda = -y^2/2x$ на допустимом пространстве. После этого вычислите площадь, ограниченную кривыми, соответствующими Λ и $\Lambda + d\Lambda$.

Каков верхний предел для $|\Lambda|$ на множестве допустимых вакуумов? Проверьте непротиворечивость формулы (21.79), используя ее для вычисления полного числа вакуумов. Возьмите L = 100 и оцените долю вакуумов с $|\Lambda| < 1$.

► Задача 21.6. Распределение вакуумной энергии при большом количестве потоков

Рассмотрите уравнение (21.84) при

$$\prod_{i=1}^{J} q_i = q^J$$

и J, большим настолько, что применимо (21.96).

- (a) Определите число вакуумов $\mathcal{N}(\Lambda)$ с вакуумной энергией меньшей либо равной Λ . Ответ зависит от Λ и параметров $|\Lambda_0|$, q и J.
- (б) Используйте дифференцирование для написания уравнения вида

$$d\mathcal{N} =
ho(\Lambda) \frac{d\Lambda}{|\Lambda_0|}$$

и найдите распределение $\rho(\Lambda)$. Это распределение параметрическим образом зависит от $|\Lambda_0|$, q и J.

(в) Возьмите J = 100 и $q = 0,01\sqrt{|\Lambda_0|}$. Определите значение $\rho(\Lambda = 0)$. Найдите значение Λ_* (через $|\Lambda_0|$), для которого $\rho(\Lambda_*)$ отличается от $\rho(0)$ на 1%. Вычислите отношение Λ_*/Λ_{obs} . Ваш результат должен демонстрировать, что распределение $\rho(\Lambda)$ является в точности константой в пределах допустимой погрешности эксперимента. Сколько существует струнных вакуумов со значениями Λ в пределах 1% от Λ_{obs} ?

Глава 22

Струнная термодинамика и черные дыры

Термодинамика струн определяется главным образом экспоненциальным ростом числа достижимых струной квантовых состояний, как функции ее энергии. Темпы роста оцениваются подсчетом числа разбиений больших целых чисел. Поведение энтропии указывает на то, что при высоких энергиях температура стремится к конечному постоянному значению — температуре Хагедорна. В теории открытых бозонных струн вычислена однострунная статистическая сумма при конечной температуре. Объясняется, как подсчет числа струнных состояний может быть использован для статистического вывода энтропии черных дыр. Эти вычисления приводят к результатам, качественно согласующимся с энтропией черных дыр Шварцшильда и энтропией определенных заряженных черных дыр.

22.1. Обзор статистической механики

При изучении термодинамики струн мы будем пользоваться микроканоническим и каноническим ансамблями. Напомним, что *микроканонический ансамбль* состоит из набора копий некоторой системы A, по одной копии на каждое достижимое состояние системы A при фиксированной энергии E. В каноническом ансамбле рассматривается система A, находящаяся в термостате с температурой T. Этот ансамбль состоит из копий системы A и термостата, по одной копии на каждое допустимое состояние данной комбинированной системы. В каноническом ансамбле энергия системы A различается для различных элементов ансамбля.

Давайте начнем с микроканонического ансамбля. Представим, что система A изолирована и обладает фиксированной энергией. Пусть $\Omega(E)$ обозначает число возможных состояний системы A с энергией E. Энтропия системы S определяется через число состояний

$$S(E) = k \ln \Omega(E), \qquad (22.1)$$

где k — это постоянная Больцмана. Температура системы T определяется как производная энтропии по энергии:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$
(22.2)

Иногда проще работать с каноническим ансамблем. Представим систему A с конечным объемом, находящуюся в термостате с температурой T. Такой системой

мог бы быть заполненный струнами ящик, либо ящик только с одной струной. Нет необходимости определять, чем является термостат. Предположим, что мы знаем квантовые состояния системы $\{\alpha\}$ и их энергии $\{E_{\alpha}\}$. Тогда статистическая сумма Z системы A определяется как

$$Z \equiv \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$
 (22.3)

Статистическая сумма полезна, потому что может быть использована для вычисления интересных величин. Например, если известно, что система A имеет температуру T, то с помощью Z можно вычислить вероятность того, что A находится в некотором квантовом состоянии. По определению, статистическая сумма зависит от температуры T и от внешних параметров системы. Данные параметры определяют уровни энергии системы. Те системы, которые мы будем рассматривать, имеют только один внешний параметр: объем V, занимаемый системой. Таким образом, будем считать что Z — это Z(T, V), или

$$Z = Z(\beta, V). \tag{22.4}$$

Вероятность P_{α} того, что система A в термостате с температурой T находится в состоянии α , равна

$$P_{\alpha} = \frac{e^{-\beta E_{\alpha}}}{Z}.$$
(22.5)

Очевидно, $\sum_{\alpha} P_{\alpha} = 1$, что и требуется, если интерпретировать P_{α} как вероятность. Можно вычислить среднюю по ансамблю энергию *E* системы *A* путем дифференцирования статистической суммы:

$$E = \sum_{\alpha} P_{\alpha} E_{\alpha} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$
 (22.6)

Также с помощью статистической суммы можно вычислить давление *p* в системе (задача 22.1). Оно задается выражением

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}.$$
 (22.7)

Другой полезной величиной является свободная энергия Гельмгольца F. Ее основные свойства могут быть получены за несколько шагов, начиная с первого начала термодинамики. Это начало утверждает, что изменение энергии dE системы, единственным внешним параметром которой является объем V, может быть записано в виде

$$dE = T \, dS - p \, dV. \tag{22.8}$$

Здесь T — это температура системы, а p — давление. Также, T dS — это тепло, переданное системе, а (-p dV) — это механическая работа совершенная над

системой. Уравнение (22.8) означает, что E следует рассматривать как функцию E(S, V) от S и V, и

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V}, \quad p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S}.$$
 (22.9)

Изменение энергии в (22.8) можно также представить в виде

$$dE = d(TS) - S dT - p dV,$$
 (22.10)

откуда следует, что

$$d(E - TS) = -S \, dT - p \, dV, \qquad (22.11)$$

Свободная энергия F определяется как

$$F \equiv E - TS, \tag{22.12}$$

и поэтому имеем

$$dF = -S \, dT - p \, dV. \tag{22.13}$$

Видно, что для процессов с постоянной температурой свободная энергия соответствует количеству энергии, которая может перейти в механическую работу. Например, для химической реакции, в которой высвобождается энергия, энтропия системы обычно убывает. Не вся высвобождаемая энергия может быть использована для работы, а только свободная энергия. Так как полная энтропия не может убывать, остаток энергии переходит в тепло, увеличивающее энтропию мира. Из (22.13) следует, что F нужно рассматривать как функцию F(T, V) от T и V, и

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V}, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T}.$$
 (22.14)

Свободную энергию можно вычислить с помощью статистической суммы (задача 22.1). Она задается выражением

$$F = -kT \ln Z. \tag{22.15}$$

Наша цель — воспользоваться основными термодинамическими соотношениями, полученными выше, для вычисления интересных свойств струны. Одним из центральных вычислений является вывод статистической суммы струны. Данная проблема несколько сложна, поэтому сначала рассмотрим более простые вопросы, которые помогут нам создать необходимый инструментарий.

Первый необходимый результат — это формула числа разбиений больших целых чисел. Этот математический результат будет получен физическим методом, а именно, с помощью анализа высокотемпературного поведения квантовой *нерелятивистской* струны, назовем это «квантовой скрипичной струной». На основе этого результата вычислим отношение энтропия/энергия для идеальной квантовой *релятивистской* струны, у которой игнорируется квантование импульсных состояний. В этом контексте уже появится температура Хагедорна. После обсуждения статистической суммы точечной релятивистской частицы, все полученные ранее результаты применяются для вычисления статистической суммы релятивистской струны.

574

В последней части этой главы обсуждается значительный успех теории струн: статистический вывод энтропии черных дыр. Эта энтропия, полученная впервые термодинамическими рассуждениями, возникает из вырожденности струнных состояний, обладающих микроскопическими свойствами черных дыр. В случае черных дыр Шварцшильда, совпадение струнных вычислений и термодинамического ответа имеется только на качественном уровне, однако для определенных типов экстремальных черных дыр имеется количественное соответствие.

22.2. Разбиения и квантовая скрипичная струна

Рассмотрим квантово-механическую нерелятивистскую струну с закрепленными концами: квантовую скрипичную струну. Эта струна, изученная на классическом уровне в главе 4, обладает бесконечным набором частот колебаний, которые все кратны основной частоте ω_0 . Ее идеализация в виде квантовой струны является набором простых гармонических осцилляторов с частотами ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$ и так далее. Каждый простой гармонический осциллятор (ПГО) обладает своими собственными операторами рождения и уничтожения, а также гамильтонианом.

$$\Pi \Gamma O_{\omega_{0}}: (a_{1}, a_{1}^{\dagger}), \quad H_{\omega_{0}} = \hbar \omega_{0} a_{1}^{\dagger} a_{1},$$

$$\Pi \Gamma O_{2\omega_{0}}: (a_{2}, a_{2}^{\dagger}), \quad H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{2}^{\dagger} a_{2},$$

$$\Pi \Gamma O_{3\omega_{0}}: (a_{3}, a_{3}^{\dagger}), \quad H_{3\omega_{0}} = 3\hbar \omega_{0} a_{3}^{\dagger} a_{3},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{2}^{\dagger} a_{2},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{2}^{\dagger} a_{3},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 3\hbar \omega_{0} a_{3}^{\dagger} a_{3},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{2}^{\dagger} a_{3},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{2}^{\dagger} a_{3},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{3}^{\dagger} a_{3},$$

$$H_{2\omega_{0}} = 2\hbar \omega_{0} a_{3}^{\dagger$$

Здесь мы не включили энергии нулевых колебаний, а все осцилляторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[a_m, a_n^{\dagger}] = \delta_{mn}. \tag{22.17}$$

Так как квантовая струна является объединением всех этих осцилляторов, то гамильтониан \widehat{H} равен

$$\widehat{H} = \sum_{\ell=1}^{\infty} H_{\ell\omega_0} = \hbar\omega_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}. \qquad (22.18)$$

Это выражение можно переписать с помощью оператора числа частиц \widehat{N} :

$$\widehat{H} = \hbar \omega_0 \widehat{N}, \quad \widehat{N} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}.$$
 (22.19)

Вакуумное состояние струны — это состояние $|\Omega\rangle$, такое что

$$a_{\ell}|\Omega\rangle = 0, \$$
для всех $\ell.$ (22.20)

Произвольное квантовое состояние струны $|\Psi\rangle$ получается действием операторов рождения на вакуум:

$$|\Psi\rangle = (a_1^{\dagger})^{n_1} (a_2^{\dagger})^{n_2} \dots (a_l^{\dagger})^{n_l} \dots |\Omega\rangle.$$
(22.21)

Таблица 22.1

Подсчет состояний с заданным собственным зна	ачением $N;$
$oldsymbol{p}(oldsymbol{N})$ обозначает число разбиений целого ч	іисла N

N	Список состояний	p (N)
1	a [†]	1
2	$\boldsymbol{a}_{2}^{\dagger}, (\boldsymbol{a}_{1}^{\dagger})^{2}$	2
3	$a_{3}^{\dagger}, a_{2}^{\dagger}a_{1}^{\dagger}, (a_{1}^{\dagger})^{3}$	3
4	$a_4^{\dagger}, a_3^{\dagger}a_1^{\dagger}, (a_2^{\dagger})^2, a_2^{\dagger}(a_1^{\dagger})^2, (a_1^{\dagger})^4$	5

Таким образом, данное состояние задается набором $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ чисел заполнения. При действии на состояние $|\Psi\rangle$ оператор числа частиц принимает значение

$$\widehat{N}|\Psi\rangle = N|\Psi\rangle, \qquad (22.22)$$

где

$$N = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell n_{\ell}.$$
 (22.23)

Тогда из (22.19) следует, что энергия E состояния $|\Psi\rangle$ задается

$$E = \hbar \omega_0 N. \tag{22.24}$$

Здесь естественным образом возникает вопрос подсчета числа состояний. Сколько существует состояний, на которых собственное значение \hat{N} равно N, где Nэто заданное положительное целое число? Это число, обозначаемое p(N), настолько важно, что оно получило название: число *разбиений* числа N. Прежде чом пояснить происхождение данной терминологии, определим p(N) для N = 1, 2, 3и 4. В табл. 22.1 приведены состояния при этих значениях N. Для краткости, приведены только осцилляторы, а вакуумное состояние $|\Omega\rangle$, на которое они действуют, опущено. Например, из четвертой строки видно, что существует пять состояний с собственным значением N, равным четырем. Поэтому p(4) = 5.

Уместно назвать величину p(N) числом разбиений числа N. Разбиение N — это набор положительных целых чисел, сумма которых равна N. Порядок элементов в наборе не важен. Таким образом, например, $\{3, 2\}$, равно как и $\{2, 1, 1, 1\}$, — это разбиения 5. Так записываются разбиения 4:

$$\{4\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}.$$
 (22.25)

Число состояний с собственным значением \hat{N} , равным N, совпадает с числом разбиений N. Действительно, для заданного разбиения N можно построить состояние путем приписывания каждого элемента разбиения в виде нижнего индекса осциллятора a^{\dagger} и действия возникающего набора осцилляторов на вакуум. Отметим, что именно этим способом построены состояния в нижней строке табл. 22.1
как разбиения числа 4 (22.25). С другой стороны, для состояния с заданным значением N набор индексов всех осцилляторов в состоянии задает разбиение N.

Мы стремились найти формулу для p(N), однако наш анализ не позволит достичь большего. Мы получим выражение, точно описывающее p(N) при больших N. Более аккуратное вычисление приводит к знаменитому приближенному выражению для p(N), найденному Харди и Рамануджаном.

План наших дальнейших действий таков. Известно, что энтропия S задается формулой (22.1) как функция энергии E. Для заданного $E, N = E/(\hbar\omega_0)$, а $\Omega(E)$ — это просто p(N). Поэтому

$$S(E) = k \ln p(N) = k \ln p\left(\frac{E}{\hbar\omega_0}\right).$$
 (22.26)

Если мы найдем S(E), то найдем и функцию p(N). Для нахождения S(E) вычислим статистическую сумму Z квантовой скрипичной струны. Зная Z, мы найдем свободную энергию F. Свободную энергию можно вычислить только при высокой температуре. В этом случае будет легко найти поведение энтропии S(E)при высоких энергиях. Полученный результат будет использован для нахождения приближенной формулы для p(N) при больших N.

Начнем с вычисления статистической суммы. Имеем

$$Z = \sum_{\alpha} \exp\left(-\frac{E_{\alpha}}{kT}\right) \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \left(n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots\right)\right). \quad (22.27)$$

При написании этого уравнения было учтено, что набор всех состояний нумеруется набором чисел заполнения. Суммирование по всем состояниям означает суммирование по всем числам заполнения, каждое из которых изменяется от нуля до бесконечности. Так как экспонента суммы может быть записана как сумма экспонент, то суммирование по разным числам заполнения можно произвести независимо,

$$Z = \sum_{n_1} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} n_1\right) \sum_{n_2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} 2n_2\right) \dots \qquad (22.28)$$

Таким образом, имеем

$$Z = \prod_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n_{\ell}=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 \ell n_{\ell}}{kT}\right).$$
(22.29)

Сумма по каждому n_l является геометрической прогрессией, поэтому находим

$$Z = \prod_{\ell=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 \ell}{kT}\right) \right]^{-1}.$$
 (22.30)

Окончательно, используя (22.15), находим свободную энергию F:

$$F = -kT \ln Z = kT \sum_{\ell=1}^{\infty} \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0\ell}{kT}\right)\right].$$
 (22.31)

Для того чтобы продвигаться вперед, необходимо сделать некоторые приближения. Если температура T достаточно велика, так что

$$\frac{\hbar\omega_0}{kT} \ll 1, \tag{22.32}$$

то каждый член в сумме (22.31) очень слабо отличается от предыдущего. Это позволяет аппроксимировать данную сумму следующим интегралом:

$$F \simeq -kT \int_{1}^{\infty} d\ell \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0\ell}{kT}\right)\right].$$
 (22.33)

Выбор $\ell = 1$ для нижнего предела интегрирования, *в противоположность* любому другому, малому конечному числу, не играет роли. Действительно, заменяя переменные интегрирования

$$x = \frac{\hbar\omega_0}{kT}\ell.$$
 (22.34)

находим, что в пределе большой температуры, нижний предел интегрирования превращается в x = 0. В результате, получаем

$$F \simeq \frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^\infty dx \ln\left(1 - e^x\right). \tag{22.35}$$

Используя разложение

$$\ln(1-y) = -\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \dots\right), \qquad (22.36)$$

выполняющееся для любых $0 \leq y < 1$, получаем

$$F \simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^\infty dx \left(e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{-4x} + \dots \right) \simeq$$
$$\simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right]. \tag{22.37}$$

Сумма в скобках хорошо известна. На самом деле это дзета-функция (12.109) с аргументом, равным двум

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$
 (22.38)

Таким образом, окончательно получаем высокотемпературное приближение для свободной энергии:

$$F \simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{\hbar\omega_0} \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\beta^2}.$$
 (22.39)

Очевидно, что для данной струны свободная энергия не зависит от объема.

Теперь можно вычислить энтропию как функцию температуры. Используя (22.14) находим

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\hbar \omega_0} \right).$$
 (22.40)

Так как мы интересуемся энтропией как функцией энергии, то также вычислим энергию. С помощью (22.6) находим выражение

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta F\right) = -\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\hbar \omega_0} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta}\right), \qquad (22.41)$$

которое приводит

$$E = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\beta^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2 \hbar\omega_0.$$
(22.42)

(*) Упражнение-разминка 22.1. Убедитесь, что энергия E также может быть получена из F = E - TS.

Комбинация (22.40) и (22.42) дает

$$S(E) = k\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E}{\hbar\omega_0}} = k2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}.$$
 (22.43)

Сравнивая с уравнением (22.26), окончательно находим

$$\ln p(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}.$$
 (22.44)

Это выражение дает оценку p(N) при больших N, что и являлось нашей целью. Действительно, необходимо говорить о больших N, так как

$$N = \frac{E}{\hbar\omega_0} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2 \gg 1,$$
 (22.45)

в силу предположения высоких температур (22.32).

Результат (22.44) это только ведущий член в знаменитом асимптотическом разложении p(N) Харди—Рамануджана:

$$p(N) \simeq \frac{1}{4N\sqrt{3}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}\right). \tag{22.46}$$

Эта формула также не является точной, хотя, в противоположность оценке логарифма p(N), она является точной оценкой p(N). Мы не будем заниматься выводом формула Харди—Рамануджана. Однако, забавно проверить точность формулы Харди—Рамануджана. В табл. 22.2 сравниваются вычисленные точно значения p(N) с оценкой $p_{est}(N)$, вычисленной согласно (22.46). Данная оценка приводит к ошибке примерно в половину процента для $N = 10\,000$.

Таблица 22.2

по формуле харди—Рамануджана			
N	p(N)	$p(N)_{cst}$	$\frac{p(N)}{p_{\rm est}(N)}$
5	7	8,94	0,7829
10	42	48,10	0,8731
100	190 569 292	199 281 893,25	0,9563
1000	$2,406 \times 10^{31}$	$2,440 \times 10^{31}$	0,9860
10 000	3,617 × 10 ¹⁰⁶	3,633 × 10 ¹⁰⁶	0,9956

Сравнение точных значений p(N) с оценкой $p(N)_{
m est}$ по формуле Харди—Рамануджана

Теперь нам требуется небольшое обобщение формулы (22.46). Предположим, что струна может вибрировать в b поперечных направлениях. Тогда для каждой частоты $\ell\omega_0$ имеем b гармонических осцилляторов, соответствующих возможным поляризациям движения. Чтобы различать b-поляризации, соответствующие числам заполнения, следует приписать им индекс:

Для того чтобы вычислить новую статистическую сумму Z_b , нужно просуммировать по всем возможным состояниям — все возможные значения чисел заполнения $n_k^{(q)}$, где $k = 1, 2, ..., \infty$ и q = 1, 2, ..., b. Это приводит к выражению

$$Z_{b} = \sum_{n_{k}^{(1)}, \dots, n_{k}^{(b)}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{0}}{kT} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{b} \ell n_{\ell}^{(q)}\right).$$
(22.48)

Суммы по различным $n^{(q)}$ факторизуются

$$Z_b = \sum_{\boldsymbol{n}_k^{(1)}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \boldsymbol{n}_\ell^{(1)}\right) \dots \sum_{\boldsymbol{n}_k^{(b)}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \boldsymbol{n}_\ell^{(b)}\right). \quad (22.49)$$

Каждый фактор в этом выражении равен вычисленной ранее статистической сумме Z, поэтому

$$Z_b = (Z)^b. (22.50)$$

Также легко вычислить новую свободную энергию F_b :

$$F_b = -kT \ln Z_b = -kTb \ln Z = bF. \qquad (22.51)$$

У энтропии, полученной дифференцированием свободной энергии, также возникает множитель b:

$$S_b = bS. \tag{22.52}$$

Тот же множитель возникает у энергии E_b :

$$E_b = bE. \tag{22.53}$$

Приведенные выше четыре уравнения являются зависимостями от температуры. Например, (22.52) — это $S_b(T) = bS(T)$, где S(T) является ранее вычисленной энтропией (22.40). Так как E — это вычисленная ранее энергия (как функция температуры), то S и E связаны друг с другом посредством (22.43). Отметим, что E_b равно $\hbar\omega_0 N$, где N теперь является полным числом заполнения

$$E_b = bE = \hbar\omega_0 N, \quad N = \sum_{\ell,q} \ell n_\ell^{(q)}. \quad (22.54)$$

Используя (22.52), предыдущие результаты для S(E) (22.43), и (22.54), находим

$$S_{b} = b(k2\pi)\sqrt{\frac{1}{6}\frac{E}{\hbar\omega_{0}}} = k2\pi\sqrt{\frac{b}{6}\frac{Eb}{\hbar\omega_{0}}} = k2\pi\sqrt{\frac{Nb}{6}}.$$
 (22.55)

Будем называть $p_b(N)$ числом разбиений числа N на целые числа со значением индекса от одного до b. Это означает, например, что теперь разбиение $\{3, 2, 1\}$ числа 6 приводит ко многим разбиениям, записываемым как $\{3_{p_1}, 2_{p_2}, 1_{p_3}\}$, где индексы p_1 , p_2 и p_3 могут принимать любое значение от одного до b. Разбиения с разными значениями индекса считаются разными. Теперь видно, что для bвырожденных осцилляторов число состояний при полном числе N равно $p_b(N)$. Поэтому $S_b = k \ln p_b(N)$, и сравнивая с (22.55) приходим к выводу, что при больших N

$$\ln p_b(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{Nb}{6}}.$$
 (22.56)

Можно показать, что более точная версия данного результата имеет вид

$$p_b(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{b}{24}\right)^{(b+1)/4} N^{-(b+3)/4} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{Nb}{6}}\right).$$
 (22.57)

Можно видеть, что при b = 1 эта формула сводится к выражению для p(N), приведенному в (22.46). При b = 24, являющимся числом поперечных направлений светового конуса у бозонной струны, выражение несколько упрощается:

$$p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp\left(4\pi\sqrt{N}\right).$$
 (22.58)

• Упражнение-разминка 22.2. Покажите, что при больших N

$$\frac{p_{24}(N+1)}{p_{24}(N)} \simeq \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right).$$
 (22.59)

Это выражение означает, что дробная замена для числа разбиений, при увеличении аргумента на единицу, стремится к нулю при $N \to \infty$.

() Упражнение-разминка 22.3. Прямым подсчетом убедитесь, что $p_{24}(1) = 24$, $p_{24}(2) = 324$, $p_{24}(3) = 3200$ и $p_{24}(4) = 25650$.

Также интересно вычислить разбиения других типов. Например, рассмотрим разбиения целых чисел на неравные части. Возможными разбиениями числа 6 на неравные части являются

$$\{6\}, \{5, 1\}, \{4, 2\}, \{3, 2, 1\}.$$
 (22.60)

Обозначим q(N) число разбиений числа N на неравные части, так что q(6), например, равно четырем. Для определения поведения q(N) при больших Nможно воспользоваться фермионной версией скрипичной струны. Частоты осцилляторов при этом не меняются, однако требуется, чтобы каждое число заполнения могло быть равно либо нулю, либо единице. Так как операторы рождения не могут быть применены больше одного раза, полное число N для любого состояния эффективно разбивается на вклады, все части которых не равны между собой. Те операторы рождения, которые не могут быть применены более одного раза, порождают фермионные возбуждения. Будем называть такие осцилляторы фермионными. С некоторой неоднозначностью в терминологии, те числа, которые входят в разбиение в неравных частях, будем называть фермионными. В задаче 22.2 читателю будет предложено показать, что при больших N

$$\ln q(N) \sim 2\pi \sqrt{\frac{N}{12}}.$$
 (22.61)

Теперь расширим предыдущее вычисление p(N) на случай, когда элементы разбиения имеют индекс, пробегающий от одного до b. Если элементы неравных разбиений могут иметь индекс, пробегающий от одного до f, то число разбиений $q_f(N)$ получается из (22.61) заменой $N \to Nf$. Фермионное число в таких разбиениях может возникать более одного раза, если индекс принимает разные значения. Такой подсчет соответствует системе с f копиями фермионных осцилляторов.

Также полезно окончательное обобщение. Рассматриваются разбиения N на обычные и фермионные числа, с b значениями индекса для обычных чисел, и f значениями индекса для фермионных чисел. В этом случае (задача 22.4) находим, что для таких разбиений ведущий член числа P(N; b, f) при больших N равен

ln
$$P(N; b, f) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{6} \left(b + \frac{f}{2}\right)}$$
. (22.62)

В качестве примера вычислим P(2; 1, 2), т.е. число разбиений 2 на обычные и фермионные числа, причем индекс последних может принимать два значения. Список разбиений получается нумерацией чисел в обычных разбиениях ({2} и {1, 1}) всеми возможными способами. Находим

$$\{2\}, \{2_1\}, \{2_2\}, \{1, 1\}, \{1_1, 1\}, \{1_2, 1\}, \{1_1, 1_2\}.$$
 (22.63)

Значения индекса фермионных чисел указаны снизу. Находим, что P(2; 1, 2) = 7.

Уравнение (22.62) является полезным при вычислениях в теориях суперструн, состояния в которых строятся с помощью как бозонных, так и фермионных операторов рождения. В разделе 22.7 будет рассмотрено применение этой формулы в случае суперсимметричных черных дыр.

22.3. Температура Хагедорна

Теперь вернемся к рассмотрению релятивистских струн. Будем рассматривать открытые струны, не имеющие пространственного импульса. Такое произойдет, например, если концы открытой струны расположены на D0-бране. При нулевом пространственном импульсе уровни энергии струны равны массам соответствующих квантовых состояний. Квадрат массы заданного состояния может быть выражен через оператор числа N^{\perp} (12.164):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1) \simeq \frac{N^{\perp}}{\alpha'}, \qquad (22.64)$$

в приближении больших N^{\perp} . Отсюда следует, что энергия E = M связана с оператором числа простым соотношением

$$\sqrt{N^{\perp}} = \sqrt{\alpha'}E. \tag{22.65}$$

В микроканоническом ансамбле число состояний $\Omega(E)$ равно $p_{24}(N^{\perp})$, потому что есть 24 поперечных направления светового конуса и, следовательно, индекс у чисел заполнения соответствующих осцилляторов пробегает значения от одного до 24. В результате, $S(E) = k \ln p_{24}(N^{\perp})$. При большой энергии N^{\perp} также велико, и, используя уравнение (22.56), находим

$$S(E) = k2\pi \sqrt{\frac{N^{\perp} \cdot 24}{6}} = k4\pi \sqrt{N^{\perp}}.$$
 (22.66)

С помощью соотношения число-энергия (22.65) находим

$$S = k4\pi \sqrt{\alpha' E}.$$
 (22.67)

Данное соотношение связывает энтропию с энергией при высоких энергиях. То, что энтропия пропорциональна энергии, не совсем обычно, потому как это приводит к постоянной температуре:

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial E} = 4\pi \sqrt{\alpha'}.$$
(22.68)

Эта температура называется температурой Хагедорна Т_н:

$$\frac{1}{\beta_{\rm H}} = kT_{\rm H} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}.$$
(22.69)

Здесь $kT_{\rm H}$ — это тепловая энергия, соответствующая температуре Хагедорна. В рассматриваемом приближении высоких энергий можно произвольно увеличивать значение энергии струн, а их температура будет оставаться постоянной и равной температуре Хагедорна. Интересно сравнить энергию $kT_{\rm H}$ с массой частиц, находящихся на первом массовом уровне открытой струны. В (22.64) это соответствует $N^{\perp} = 2$ и приводит к $E = M = 1/\sqrt{\alpha'}$. Отношение тепловой энергии Хагедорна к данной энергии покоя равно

$$\frac{kT_{\rm H}}{(1/\sqrt{\alpha'})} = \frac{1}{4\pi} \simeq \frac{1}{12,6}.$$
(22.70)

Это соотношение демонстрирует, что тепловая энергия Хагедорна мала по сравнению с энергией покоя почти любой частицы в спектре струны. Это важный результат, который будет играть роль в последующем обсуждении в этой главе.

Соотношение между энтропией и энергией (22.67) выполняется также для замкнутых струн с равным нулю пространственным импульсом. Вспоминая (13.48), находим

$$M^{2} = \frac{2}{\alpha'}(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2) \simeq \frac{4}{\alpha'} N^{\perp}, \qquad (22.71)$$

так как состояния замкнутой струны удовлетворяют $N^{\perp} = \widetilde{N}^{\perp}$. Отсюда следует, что энергия E = M связана с оператором числа как

$$2\sqrt{N^{\perp}} = \sqrt{\alpha'}E. \tag{22.72}$$

На этот раз число состояний $\Omega(E)$ равно произведению допустимых состояний в левом и правом секторах:

$$\Omega(E) = p_{24}(N^{\perp})p_{24}(\overline{N}^{\perp}) = (p_{24}(N^{\perp}))^{2}.$$
(22.73)

В итоге, энтропия S ровно в два раза больше энтропии (22.66):

$$S(E) = k4\pi \left(2\sqrt{N^{\perp}}\right) = k4\pi \sqrt{\alpha'}E. \qquad (22.74)$$

Это то же соотношение между энтропией и энергией, которое мы имели и для открытых струн. Тем самым мы заключаем, что температура $T_{\rm H}$ также является приблизительной температурой замкнутых струн при высоких энергиях.

22.4. Статистическая сумма релятивистской частицы

В качестве разминки для вычисления статистической суммы струны в этом разделе мы вычислим статистическую сумму частицы. Будем рассматривать релятивистскую частицу массы m, живущую в D-мерном пространстве-времени, либо, что эквивалентно, в d = D - 1 пространственных измерениях. К тому же, предположим, что данная частица заключена в ящике объема V:

$$V = L_1 L_2 \dots L_d. \tag{22.75}$$

Этот ящик находится в термостате с температурой T. Как обычно, энергия и импульс частицы связаны соотношением

$$E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$
 (22.76)

Квантовые состояния частицы в ящике зависят от квантующихся импульсов \vec{p} . Статистическая сумма $Z(m^2)$ имеет вид

$$Z(m^2) = \sum_{\vec{p}} \exp\left(-\beta E(\vec{p})\right). \qquad (22.77)$$

Данная статистическая сумма зависит от объема ящика, потому что квантование значений импульсов зависит от его размеров. Зависимость квантовых волновых функций с импульсом $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ от пространственных координат имеет вид $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$. Периодичность данных волновых функций в ящике приводит к тому, что для каждого пространственного направления i

$$k_i L_i = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2, ..., d, \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$
 (22.78)

Эквивалентным образом, в терминах импульсов,

$$n_i = p_i \, \frac{L_i}{2\pi\hbar}.\tag{22.79}$$

Отсюда следует, что суммирование по различным импульсам эквивалентно суммированию по различным n_i . Таким образом, для произвольной гладкой функции, от энергии f[E] можно записать

$$\sum_{\vec{p}} f[E(\vec{p})] = \sum_{\vec{n}} f[E(\vec{p}(\vec{n}))] \simeq \int dn_1 dn_2 \dots dn_d f[E(\vec{p}(\vec{n}))], \quad (22.80)$$

где допустима аппроксимация суммы интегралом, потому что для больших ящиков при изменении индекса суммирования n_i на единицу величина импульса изменяется слабо. С помощью (22.79) и (22.75) получаем

$$\sum_{\vec{p}} f[E(\vec{p})] \simeq V \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi\hbar)^d} f[E(\vec{p})]. \qquad (22.81)$$

Это — общее правило суммирования по импульсам, применив его к нашему случаю (22.77), придем к выражению

$$Z(m^{2}) = V \int \frac{d^{d}\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{d}} \exp\left(-\beta\sqrt{\vec{p}^{2}+m^{2}}\right).$$
(22.82)

Выражение является интегральным представлением статистической суммы релятивистской частицы с массой m. Зависимость Z от температуры и объема неявная. Полагая $\hbar = 1$ и делая замену переменных интегрирования $\vec{p} = m\vec{u}$, находим

$$Z(m^{2}) = V m^{d} \int \frac{d^{d} \vec{u}}{(2\pi)^{d}} \exp\left(-\beta m \sqrt{1 + \vec{u}^{2}}\right).$$
(22.83)

Этот интеграл не выражается через элементарные функции, но может быть записан через производные модифицированных функций Бесселя с аргументом βm (задача 22.6). Вместо этого, однако, мы изучим поведение данного интеграла в интересующей нас области. В приложениях теории струн тепловая энергия значительно меньше, чем энергия покоя частицы. Действительно, как мы видели ранее, почти все струнные состояния удовлетворяют этому условию при температурах, меньших температуры Хагедорна. Таким образом, рассмотрим ситуацию:

$$\beta m \gg 1$$
, низкая температура. (22.84)

Хорошее приближение данного интеграла может быть получено разложением квадратного корня в (22.83) при малых \vec{u}^2 . Это объясняется следующим образом: используя сферические координаты и обозначая $\vec{u}^2 = u^2$, замечаем, что $d^d \vec{u} \approx u^{d-1} du$ (вспомните аналогичные выражения для d = 2, 3). Подынтегральное выражение (22.83), представленного в виде простого одномерного интеграла имеет, таким образом, вид

подынтегральное выражение
$$= u^{d-1} e^{-\beta m \sqrt{1+u^2}}$$
. (22.85)

Подынтегральное выражение равно нулю при u = 0 и $u = \infty$, и где-то между этими значениями оно имеет пик, который и определяет значение интеграла. Максимум подынтегрального выражения может быть найден путем приравнивания к нулю производной по u от выражения (22.85). Это приводит к условию

$$\frac{d-1}{\beta m} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}.$$
 (22.86)

Так как βm велико, левая часть выражения мала и u^2 также должен быть мал. Поэтому в квадратном корне мы можем пренебречь u^2 и выяснить, что подынтегральное выражение принимает наибольшее значение при

$$u^2 \approx \frac{d-1}{\beta m} \ll 1. \tag{22.87}$$

Таким образом, можно разложить квадратный корень (22.83) и написать

$$Z(m^2) \approx V m^d e^{-\beta m} \int \frac{d^d \vec{u}}{(2\pi)^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m \vec{u}^2\right).$$
(22.88)

Получился интеграл Гаусса и его можно легко вычислить:

$$Z(m^2) \approx V e^{-\beta m} \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2}.$$
 (22.89)

Мы получили окончательный вид статистической суммы релятивистской частицы в низкотемпературном пределе. Можно убедиться, что данная статистическая сумма безразмерна, как и должно быть. За исключением множителя $e^{-\beta m}$, данная статистическая сумма совпадает с точной статистической суммой нерелятивистской частицы. Экспоненциальный фактор отвечает за вклад энергии покоя в энергию релятивистской частицы.

22.5. Статистическая сумма одной струны

Теперь мы готовы вычислить статистическую сумму одной открытой струны, находящейся в ящике объема V. С этой целью необходимо пронумеровать квантовые состояния данной струны. Состояния получаются действием на собственные состояния оператора импульса операторами рождения в калибровке светового конуса. Набор базисных состояний записывается по аналогии с (12.162):

$$|\lambda, p\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \qquad (22.90)$$

где обозначение $|\lambda, p\rangle$ указывает на то, что компоненты импульса, также как и числа заполнения $\lambda_{n,I}$, являются индексами струнных состояний. Указанные d компоненты для собственных состояний оператора импульса (p^+, \vec{p}_T) определяют энергию светового конуса p^- посредством условия массовой поверхности:

$$M^{2}(\{\lambda_{n,I}\}) = -p^{2} = 2p^{+}p^{-} - p^{I}p^{I}, \qquad (22.91)$$

где

$$M^{2}(\{\lambda_{n,I}\}) = \frac{1}{\alpha'}(N^{\perp} - 1), \quad N^{\perp} = \sum_{n,I} n\lambda_{n,I}. \quad (22.92)$$

Так как пространственный импульс и энергия определены для рассмотренных выше состояний, струнные состояния можно нумеровать набором $\lambda_{n,I}$ чисел заполнения и пространственного импульса \vec{p} . Тогда записываем

$$E(\{\lambda_{n,I}\}\vec{p}) = \sqrt{M^2(\{\lambda_{n,I}\}) + \vec{p}^2}.$$
 (22.93)

Для нахождения статистической суммы $Z_{\rm str}$ одной струны необходимо просуммировать выражение по всем состояниям $|\lambda, p\rangle$, либо, что эквивалентно, по всем пространственным импульсам \vec{p} и всем значениям чисел заполнения $\lambda_{n,I}$:

$$Z_{\rm str} = \sum_{\alpha} \exp\left(-\beta E_{\alpha}\right) = \sum_{\lambda_{n,I}} \sum_{\vec{p}} \exp\left(-\beta \sqrt{M^2\left(\{\lambda_{n,I}\}\right) + \vec{p}^2}\right). \tag{22.94}$$

Суммирование по импульсам даст статистическую сумму Z релятивистской частицы, зависящую от квадрата массы $M^2(\{\lambda_{n,I}\})$. Таким образом, записываем

$$Z_{\text{str}} = \sum_{\lambda_{n,I}} Z(M^2(\{\lambda_{n,I}\})). \qquad (22.95)$$

ы.

Так как масса M^2 зависит только от N^{\perp} , то сумму по числам заполнения $\{\lambda_{n,l}\}$ можно заменить на сумму по $N^{\perp} \equiv N$, при этом необходимо учесть, что имеется $p_{24}(N)$ состояний с собственным значением оператора числа частиц N:

$$Z_{\rm str} = \sum_{N=0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N)). \qquad (22.96)$$

До сих не предполагалось никаких приближений, поэтому данный результат является точным.

Пусть N_0 обозначает целое число, для которого $p_{24}(N)$ при $N \ge N_0$ хорошо аппроксимируется выражением (22.58). К тому же, пусть Z_0 обозначает следующую сумму

$$Z_0 \equiv \sum_{N=0}^{N_0-1} p_{24}(N) Z(M^2(N)). \qquad (22.97)$$

Данное определение позволяет записать Z_{str} в (22.96) в виде

$$Z_{\rm str} = Z_0 + \sum_{N=N_0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N)). \qquad (22.98)$$

Вычислить точно Z_0 очень трудно, но это может получиться, если Z_0 исчезающее мало по сравнению со вторым слагаемым в правой части (22.98); в дальнейшем станет ясно, что это происходит при температуре T, стремящейся к температуре Хагедорна. Следует отметить следующие свойства Z_0 . Вклад от тахионных состояний приводит к трудностям: уравнение (22.82) утверждает, что при $m^2 < 0$ величина Z является комплексным числом. Устремляя Z_0 к нулю, мы пренебрегаем тахионной нестабильностью. Так или иначе, Z_0 является конечным числом при любом значении температуры и его вклад в Z_{str} пренебрежимо мал в том случае, когда второе слагаемое в правой части (22.98) становится очень большим.

Чтобы двигаться дальше, аппроксимируем интегралом сумму (22.98). При $N \ge N_0$ величину $p_{24}(N)$ можно рассматривать как непрерывную функцию от N,

определяемую приближенным выражением (22.58). Тогда можно записать:

$$Z_{\rm str} \approx Z_0 + \int_{N_0}^{\infty} dN p_{24}(N) Z(M^2(N)).$$
 (22.99)

Плотность состояний $\rho(M)$ традиционно определяется как функция массы M, а сама масса используется как переменная интегрирования. Перейти к массе как аргументу можно с помощью соотношения

$$p_{24}(N) dN = \rho(M) d(M). \qquad (22.100)$$

Посредством $\alpha' M^2 \approx N$ левая часть соотношения выражается через массу:

$$dN = 2\alpha' M \, dM = 2\left(\sqrt{\alpha'} M\right) d\left(\sqrt{\alpha'} M\right). \tag{22.101}$$

Более того, с помощью (22.58) и (22.69) находим

$$p_{24}(N) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\alpha'}M)^{-27/2} \exp{(\beta_{\rm H}M)}.$$
 (22.102)

Подстановка двух последних соотношений в (22.100) приводит к выражению

$$\rho(M) dM = \sqrt{2} \left(\sqrt{\alpha'} M \right)^{-25/2} \exp\left(\beta_{\rm H} M\right) d\left(\sqrt{\alpha'} M \right). \tag{22.103}$$

В этой связи отметим соотношение

$$\rho(M) \sim M^{-25/2} \exp{(\beta_{\rm H}M)},$$
(22.104)

показывающее, что экспоненциальный рост плотности состояний контролируется температурой Хагедорна. Как мы вскоре увидим, статистическая сумма расходится при температурах, больших температуры Хагедорна.

С учетом (22.103) и (22.100) статистическая сумма в (22.99) принимает вид

$$Z_{\rm str} \approx Z_0 + \sqrt{2} \int_{M_0}^{\infty} \left(\sqrt{\alpha'}M\right)^{-25/2} \exp\left(\beta_{\rm H}M\right) Z(M^2) d\left(\sqrt{\alpha'}M\right), \qquad (22.105)$$

где $\alpha' M_0^2 = N_0$. Остается только записать через M и $kT_{\rm H}$ статистическую сумму частицы (22.89). С помощью выражений

$$\frac{M}{2\pi\beta} = 2(\sqrt{\alpha'}M)kT kT_{\rm H}, \quad \beta M = 4\pi (\sqrt{\alpha'}M) \frac{T_{\rm H}}{T}, \quad (22.106)$$

находим

$$Z(M^2) \approx 2^{25/2} V(kT \, kT_{\rm H})^{25/2} \left(\sqrt{\alpha'} M\right)^{25/2} \exp\left(-4\pi \sqrt{\alpha'} M \, \frac{T_{\rm H}}{T}\right).$$
(22.107)

При подстановке данного результата в (22.105) статистическая сумма струны принимает вид

$$Z_{\rm str} \approx Z_0 + 2^{13} V (kT \ kT_{\rm H})^{25/2} \int_{M_0}^{\infty} d(\sqrt{\alpha'}M) \exp\left(-4\pi \sqrt{\alpha'}M\left[\frac{T_{\rm H}}{T} - 1\right]\right).$$
 (22.108)

Заметим, что степени M в подынтегральном выражении сокращаются. Вводя обозначение $x = \sqrt{\alpha'}M$, предыдущее выражение приводится к виду

$$Z_{\rm str} \approx Z_0 + 2^{13} V (kT \, kT_{\rm H})^{25/2} \int_{\sqrt{N_0}}^{\infty} dx \exp\left(-4\pi x \left[\frac{T_{\rm H}}{T} - 1\right]\right).$$
(22.109)

Данный интеграл сходится только при $T < T_{\rm H}$, в этом случае имеем

$$Z_{\rm str} \approx Z_0 + \frac{2^{11}}{\pi} V (kT \, kT_{\rm H})^{25/2} \left(\frac{T}{T_{\rm H} - T} \right) \exp\left(-4\pi \sqrt{N_0} \left[\frac{T_{\rm H}}{T} - 1 \right] \right). \quad (22.110)$$

В пределе $T \to T_{\rm H}$, когда температура стремится к температуре Хагедорна снизу, аргумент экспоненты стремится к нулю, в результате чего сама экспонента стремится к единице. Кроме того, предэкспоненциальный множитель неограниченно растет и становится значительно больше Z_0 . Отсюда следует, что при T, достаточно близких к $T_{\rm H}$, статистическая сумма $Z_{\rm str}$ хорошо аппроксимируется выражением

$$Z_{\rm str} \approx \frac{2^{11}}{\pi} V (kT_{\rm H})^{25} \left(\frac{T_{\rm H}}{T_{\rm H} - T} \right), \quad T \to T_{\rm H}.$$
 (22.111)

В этой формуле везде, где было возможно, мы заменили T на $T_{\rm H}$. Данная формула является окончательным выражением для приближенной статистической суммы одной открытой струны, помещенной в ящик объема V и находящейся в тепловом равновесии с термостатом температуры T, почти совпадающей с $T_{\rm H}$.

Данный результат можно использовать для вычисления средней энергии струны вблизи температуры Хагедорна. В силу (22.6), нам требуется только зависимость β от $Z_{\rm str}$. Используя $\beta \approx \beta_{\rm H}$, получаем результат

$$\ln Z_{\rm str} \approx -\ln \left(\beta - \beta_{\rm H}\right) + \dots, \qquad (22.112)$$

где точки обозначают слагаемые, не зависящие от β . Тогда следует, что средняя энергия струны $E_{\rm str}$ равна

$$E_{\rm str} = \frac{\partial \ln Z_{\rm str}}{\partial \beta} \approx \frac{1}{\beta - \beta_{\rm H}} \approx k T_{\rm H} \left(\frac{T_{\rm H}}{T_{\rm H} - T} \right). \tag{22.113}$$

При приближении температур к температуре Хагедорна энергия E_{str} неограниченно растет.

Струнная термодинамика пока еще не является хорошо изученным предметом. Некоторые из затруднений возникают по причине того, что в теории струн соотношение между каноническим и микроканоническим ансамблями не известно. В целом, если через $\Omega(E) dE$ обозначить число состояний в интервале энергий dE, то каноническая статистическая сумма Z определяется как

$$Z(\beta) = \int_{0}^{\infty} dE \, e^{-\beta E} \Omega(E). \qquad (22.114)$$

Вспоминая формулу (22.2), получаем, что микроканоническое распределение $\Omega(E)$ определяет соотношение между температурой и энергией E(T)

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}, \qquad (22.115)$$

В каноническом ансамбле данное соотношение между энергией и температурой приблизительно воспроизводится во всех случаях, когда значение интеграла (22.114) определяется точкой перевала. Точка перевала возникает при максимуме подынтегрального выражения и определяется следующим условием

$$\frac{d}{dE}\left(e^{-\beta E}\Omega(E)\right) = \left(-\beta\Omega(E) + \frac{\partial\Omega}{\partial E}\right)e^{-\beta E} = 0.$$
(22.116)

Как можно видеть, условие равенства нулю воспроизводит (22.115). Если значение интеграла определяется данной точкой перевала, то вычисленная на основе Z средняя энергия $\overline{E}(T)$ оказывается приближенно равна E(T). Во многих известных системах $\Omega(E) \sim E^{\gamma}$, при $\gamma > 0$, в этом случае точка перевала существует и два рассматриваемых ансамбля приводят к приблизительно равным результатам. С другой стороны, в теории струн $\Omega(E) \sim \exp(\beta_H E)$ и подынтегральное выражение пропорционально $\exp([-\beta + \beta_H]E)$, которое является функцией энергии, не имеющей критической точки. Как следствие, нет никакой гарантии, что два рассматриваемых ансамбля приведут к одинаковым результатам. Важно решить, исходя из физических соображений, какой из ансамблей подходит для каждой рассматриваемой задачи. В задаче 22.7 рассматриваются более тонкие вычисления для микроканонического ансамбля. Результаты оказываются удивительными.

22.6. Энтропия и черные дыры

Черная дыра — это объект, сколлапсировавший под действием гравитации, черные дыры возникают, если увеличивается масса объекта, в то время как его размер остается фиксированным; либо при уменьшении размера объекта, в то время как его масса остается постоянной. Черные дыры были предсказаны теоретиками до того, как появились наблюдательные данные, подтверждающие их существование, но теперь то, что черные дыры существуют в нашей Галактике, стало достоверным фактом. Наличие сверхмассивной черной дыры в центре нашей Галактики было достоверно установлено. Наиболее вероятно, что в каждой галактике существуют миллионы черных дыр. Они являются останками обычных звезд, которые были в несколько раз массивней Солнца.

Черные дыры бросают очень существенные теоретические вызовы. В общей теории относительности Эйнштейна черные дыры появляются как классические решения, описывающие материю, которая сколлапсировала в точку с бесконечной плотностью — сингулярность. Несмотря на то что возникновение классических сингулярностей — это уже теоретический вызов, по-настоящему трудная проблема с черными дырами возникает на квантовом уровне. Черные дыры, с точки зрения квантовой механики, излучают энергию. Также у них есть термодинамическая температура и энтропия, но эти свойства малопонятны на фундаментальном уровне статистической механики, где они должны определяться путем подсчета степеней свободы. Теория струн привела к некоторому впечатляющему успеху в понимании энтропии черных дыр. В этом разделе дается обзор основных свойств черных дыр и, с помощью теории струн, обсуждается энтропия четырехмерных черных дыр Шварцшильда. В следующем разделе будут изучаться частная пятимерная черная дыра, энтропия которой может быть точно вычислена в рамках теории струн.

Простейшими черными дырами являются черные дыры Шварцшильда — сферически-симметричные статические решения уравнений Эйнштейна, соответствующие гравитационному полю точечной массы M. Для подобной черной дыры сингулярность в точке отделена от внешнего мира так называемым *горизонтом событий*. Математически это 2-сфера с центром в точке сингулярности, радиус R которой называется радиусом Шварцшильда, или просто радиусом черной дыры. Если какой-нибудь объект отважится попасть за горизонт событий, он безвозвратно свалится в сингулярность. С точки зрения классической теории, ничто не может покинуть область, находящуюся за горизонтом событий. Значение R радиуса Шварцшильда можно оценить, предполагая полную энергию любой частицы на горизонте равной нулю. Для частицы массы m энергия состоит из энергии покоя mc^2 и потенциальной гравитационной энергии -GMm/R. Приравнивая их сумму к нулю, находим

$$mc^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies R \approx \frac{GM}{c^2}.$$
 (22.117)

Точный радиус вычисляется в общей теории относительности и равен

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$
 (22.118)

Физики часто говорят о радиусе Шварцшильда, соответствующем некоторой массе, подразумевая радиус черной дыры, обладающей данной массой. Для Солнца радиус Шварцшильда равен примерно трем километрам. Для Земли радиус Шварцшильда равен примерно одному сантиметру. Для астероида с массой в миллиард тонн радиус Шварцшильда — порядка 10⁻¹⁵ м. С помощью закона всемирного тяготения Ньютона возможно оценить гравитационное поле на горизонте:

$$|\vec{g}| = \frac{GM}{R^2} = \frac{c^4}{4GM}.$$
 (22.119)

Это гравитационное поле мало для очень массивных черных дыр. Массивный объект является черной дырой в том случае, если он может быть окружен сферой с радиусом, равным его радиусу Шварцшильда.

(•) Упражнение-разминка 22.4. Покажите, что сферический объект с однородной плотностью массы р является черной дырой, если его радиус больше, чем

 $\sqrt{8\pi G\rho/3}$

Если считать справедливым второй закон термодинамики, то существование черных дыр приводит к удивительным выводам. Предположим, что определенное количество нагретого газа падает в черную дыру, так что теперь черная дыра имеет несколько бо́льшую массу. Так как полная энтропия системы, состоящей из газа и черной дыры, не может уменьшаться, то черная дыра должна получить, по меньшей мере, такое же количество энтропии, какое было у газа. Таким образом, мы приходим к вере в то, что у черной дыры должна быть энтропия. Читателю известно, что система обладает энтропией в том случае, если у системы существует много микроскопических состояний, совместных с ее макроскопическими свойствами. С другой стороны, если черная дыра — это просто сингулярность массы в точке, то очень трудно разобраться, что является микроскопическими состояниями, приводящими к энтропии.

Черные дыры излучают тепловую энергию с хорошо определенной температурой: температурой Хокинга $\overline{T}_{\rm H}$, которая пропорциональна гравитационному полю на горизонте и, следовательно, обратно пропорциональна массе черной лыры (не следует путать $\overline{T}_{\rm H}$ с температурой Хагедорна $T_{\rm H}$). Такая пропорциональность разумна, потому что излучение черной дыры возникает из области вблизи горизонта и контролируется интенсивностью гравитации. В естественных единицах температура Хокинга черной дыры с массой M оказывается равной $k\overline{T}_{\rm H} = 1/(8\pi M)$, поэтому, восстанавливая общий множитель из \hbar , c и G(задача 3.7), находим

$$k\overline{T}_{\rm H} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}.$$
(22.120)

Данное уравнение позволяет вычислить энтропию Бекенштейна $S_{\rm B}$ черной дыры. С помощью $E = Mc^2$ для энергии черной дыры и первого начала термодинамики $dE = \overline{T}_{\rm H} dS_{\rm B}$, записываем

$$dE = c^2 dM = \overline{T}_{\rm H} \, dS_{\rm B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \, \frac{1}{k} \, dS_{\rm B}. \tag{22.121}$$

Упрощение этого выражения приводит к

$$\frac{1}{k} dS_{\rm B} = \frac{4\pi G}{\hbar c} \, dM^2. \tag{22.122}$$

Интегрируя данное уравнение и предполагая, что энтропия черной дыры с нулевой массой равна нулю, находим

$$\frac{S_{\rm B}}{k} = \frac{4\pi G}{\hbar c} M^2. \tag{22.123}$$

Энтропия черной дыры пропорциональна *квадрату* ее массы. Полезное альтернативное выражение для энтропии содержит величину площади A горизонта событий. С учетом $A = 4\pi R^2$ и R, заданного (22.118), легко получаем выражение

$$\frac{S_{\rm B}}{k} = \frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar G} A = \frac{A}{4\ell_{\rm P}^2}, \qquad (22.124)$$

где $\ell_{\rm P}$ — планковская длина. Правая часть этого уравнения имеет простую интерпретацию: энтропия Бекенштейна $S_{\rm B}$ — это одна четверть площади горизонта, выраженной в единицах квадрата планковской длины. Учитывая то, что $\ell_{\rm P}^2$ — это очень маленькая площадь, энтропия любой черной дыры астрофизических размеров крайне велика. Приближенно энтропию черной дыры можно представить, если допустить некоторую степень свободы с конечным числом состояний для каждого элемента площади $\ell_{\rm P}^2$ горизонта событий. Теория струн приводит к возможным степеням свободы для черных дыр, однако они не связаны напрямую с площадью горизонта.

Упражнение-разминка 22.5. Покажите, что фотон с энергией kT_H обладает длиной волны, которая приблизительно в 80 раз больше радиуса соответствующей черной дыры.

В теории струн мы пытаемся связать стационарную черную дыру Шваришильда с сильно возбужденной струной, обладающей нулевым импульсом. В микроканоническом ансамбле струнное состояние с энергией E обладает энтропией (22.67), это справедливо как для открытых, так и для замкнутых струн (см. (22.74)). Отождествляя E = M и работая тем самым в единицах $\hbar = c = 1$, имеем

$$\frac{S_{\rm str}}{k} = 4\pi \sqrt{\alpha'} M, \qquad (22.125)$$

где для обозначения энтропии струны был добавлен значок «str». Данный результат следует сравнить с энтропией черной дыры (22.123):

$$\frac{S_{\rm B}}{k} = 4\pi G M^2. \tag{22.126}$$

Различие очевидно: энтропия черной дыры пропорциональна квадрату массы, в то время как энтропия струны пропорциональна массе. Мы вскоре покажем, однако, что этого очевидного различия следовало бы ожидать. При должном понимании, эти уравнения демонстрируют удивительную степень согласованности. Линейная зависимость струнной энтропии от массы M не удивительна: энтропия — экстенсивная величина и энтропия струны с массой M примерно пропорциональна ее длине L. Энтропия черной дыры, с другой стороны, обладает удивительным свойством: она пропорциональна не объему области под горизонтом событий, а площади горизонта. Данное нарушение экстенсивности является признаком гравитационной физики.

Прежде чем рассматривать соотношение между уравнениями (22.125) и (22.126), давайте приведем эвристический вывод струнной энтропии. Для это цели рас-

смотрим струну массы М и оценим се длину L как

$$M \sim T_0 L \sim \frac{1}{\alpha'} L, \qquad (22.127)$$

где $T_0 \approx 1/\alpha'$ — натяжение струны. Теперь представим струну, построенную соединением струнных битов, каждый из которых имеет длину $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$. Каждый струнный бит может быть направлен в любом из *n* возможных направлений. Число *n* может быть равно числу пространственных измерений, но, так как наши рассуждения носят приблизительный характер, мы не будем уточнять конкретное значение. Число струнных битов равно $L/\sqrt{\alpha'}$, значит, число способов Ω , которыми можно построить данную струну, приблизительно равно

$$\Omega \approx n^{L/\sqrt{\alpha'}} \approx n^{M/\sqrt{\alpha'}} \approx e^{M\sqrt{\alpha'} \ln n}.$$
 (22.128)

Энтропия струны пропорциональна логарифму от Ω :

$$\frac{S_{\rm str}}{k} \approx M \sqrt{\alpha'} \approx M \ell_s, \qquad (22.129)$$

где множитель $\ln n$ отброшен без потери точности оценки. Данный результат согласуется с выражением (22.125).

Уравнения (22.125) и (22.126) не согласуются между собой, потому что энтропия черной дыры S_B была вычислена в режиме, когда взаимодействия необходимы, в то время как струнная энтропия S_{str} была вычислена для свободных струн. Не следует ожидать согласованности уравнений до тех пор, пока по какой-нибудь причине наличие взаимодействия не перестанет влиять на вычисление энтропии струн.

Учесть взаимодействия при вычислении энтропии черных дыр необходимо, потому что гравитационная постоянная G равна нулю в том случае, если константа струнного взаимодействия g равна нулю. Действительно, вспомним уравнение (13.83), из которого следует, что

$$G \approx g^2 \alpha' = g^2 \ell_s^2. \tag{22.130}$$

Тогда энтропия черной дыры и радиус черной дыры имеют вид

$$\frac{S_{\rm B}}{k} \approx GM^2 \approx g^2 \ell_s^2 M^2, \quad R \approx GM \approx g^2 \ell_s^2 M. \tag{22.131}$$

Эти величины зависят от константы струнного взаимодействия через гравитационную постоянную, обсуждавшиеся ранее результаты используют классическую общую теорию относительности, в которой, например, понятие горизонта имеет точный смысл. Допускается пренебрегать струнными поправками в общей теории относительности до тех пор, пока размер черной дыры сильно больше длины струны.

Рассмотрим теперь большую черную дыру с энтропией Бекенштейна S_0 , массой M_0 и радиусом $R_0 \gg \ell_s$. Зафиксируем также константу струнного взаимодействия некоторым конечным значением g_0 . Тогда уравнения (22.131) приводят к следующим соотношениям

$$\frac{S_0}{k} \approx g_0^2 \ell_s^2 M_0^2, \quad R_0 \approx g_0^2 \ell_s^2 M_0. \tag{22.132}$$

Так как вычисление струнной энтропии справедливо для нулевой, и возможно, малой константы струнного взаимодействия, представим теперь процесс, при котором струнное взаимодействие постепенно уменьшается. Как объясняется в разделе 13.4, это происходит с помощью изменения среднего значения дилатона. Разумно предположить, что данный процесс может быть проведен в обратную сторону, поэтому можно ожидать, что энтропия черной дыры останется неизменной. С другой стороны, по мере уменьшения константы струнного взаимодействия g, масса черной дыры должна расти как 1/g, чтобы энтропия (22.131) оставалась постоянной. Однако, в силу $G \approx 1/m_P^2$, масса, измеряемая в единицах планковской массы, не растет. Как следует из второго соотношения в (22.131) с учетом R, радиус черной дыры $M \approx 1/g$ уменьшается.

Пусть g_{*}, R_{*} и M_{*} обозначают конечные значения константы струнного взаимодействия, радиуса черной дыры и массы черной дыры, соответственно. Постоянство энтропии и формула для радиуса приводят к следующим соотношениям

$$\frac{S_0}{k} \approx g_0^2 \ell_s^2 M_0^2 = g_*^2 \ell_s^2 M_*^2, \quad R_* \approx g_*^2 \ell_s^2 M_*.$$
(22.133)

Мы не ожидаем, что эти результаты останутся справедливыми, когда размер черной дыры станет меньше длины струны, поэтому давайте зафиксируем $R_* = l_s$ как минимальный радиус, при котором уравнениям (22.133) еще можно доверять. Из условия $R_* = l_s$ следует, что

$$g_*^2 l_s^2 M_* \approx \ell_s \to M_* \sim \frac{1}{g_*^2 \ell_s}.$$
 (22.134)

Возвращаясь к выражению для энтропии S₀ находим

$$\frac{S_0}{k} \approx \frac{1}{g_*^2}.$$
 (22.135)

Константа связи g_* очевидно очень мала, так как предполагалось, что величина S_0 очень велика. При таком слабом взаимодействии разумно доверять выражению для энтропии (22.129) полученному в теории свободных струн. Так как черная дыра, с которой мы сравниваем струну, имеет массу M_* , рассмотрим струну массы M_* . Тогда энтропия задается выражением

$$\frac{S_{\rm str}}{k} \approx M_* \ell_s \sim \left(\frac{1}{g_*^2 \ell_s}\right) \ell_s \approx \frac{1}{g_*^2}, \qquad (22.136)$$

где мы воспользовались (22.134). Сравнивая с (22.135), видим, что $S_{\rm str} \approx S_0$. Такое соответствие свидетельствует в пользу гипотезы о том, что черная дыра Шварцшильда — сильновзаимодействующая версия сильно возбужденной струны. Однако, эта гипотеза далека от доказательства. Как было видно, мы только выписывали приближенные соотношения и выдвинули ряд предположений

об области применения определенных результатов; доказательство по-прежнему должно быть приведено. Тем не менее, существует дополнительное указание на то, что данное описание, по крайней мере, приближенно является верным: с помощью представления о струнных битах и предположения, что струна — это случайное блуждание, оказывается возможным оценить размер струны. Тогда можно показать, что для любой фиксированной константы связи g существует масса, при превышении которой любое возбужденное струнное состояние меньше, чем ее радиус Шварцшильда (задача 22.9). Отсюда вытекает предположение, что очень тяжелые струнные состояния будут образовывать черные дыры.

22.7. Подсчет состояний черной дыры

Возможно вычислить энтропию струн в пределе пренебрежимо малого взаимодействия. Но черная дыра может существовать только при ненулевом взаимодействии, поэтому точное вычисление энтропии черной дыры в теории струн требует того, чтобы подсчет состояний, проведенный для струнного взаимодействия g = 0, остался верным при $g \neq 0$.

Для черных дыр Шварцшильда, рассмотренных в предыдущем разделе, этого не происходит. В результате, мы могли бы подтвердить качественное согласие в узком интервале констант связи, для которых может быть справедливо как вычисление на основе гравитации, так и вычисление в теории свободных струн. В данном разделе мы хотим рассмотреть частную пятимерную черную дыру, которая появляется в теории суперструн. Как будет объяснено в дальнейшем, для этой черной дыры подсчет состояний при нулевом струнном взаимодействии останется верным, когда струнное взаимодействие становится отличным от нуля. Это простейшая известная черная дыра с таким свойством. Четырехмерные черные дыры с таким же свойством известны, но они несколько более сложны, именно по этой причине мы рассматриваем пятимерную черную дыру.

Обсуждавшееся выше замечательное свойство возникает благодаря суперсимметрии. Пока суперсимметрия не нарушена, определенные значения величин при нулевой константе связи и полученные рчезультаты остаются справедливыми для всех значений константы связи. Суперструны, живущие на десятимерном пространстве-времени Минковского, обладают суперсимметрией. Можно было бы попробовать компактифицировать пространство-время и сохранить суперсимметрию, однако, это же происходит, если компактифицировать некоторые измерения в окружности. Если теперь поместить в пространство-время черную дыру, суперсимметрия будет нарушена. Та черная дыра, которой мы интересуемся, является особенной: даже если поместить ее в пространство-время, часть суперсимметрии останется ненарушенной.

Рассмотрение начинается с десятимерной IIB-теории замкнутых суперструн. Можно поискать решения типа черных дыр в режиме, когда теория струн хорошо аппроксимируется полевой теорией гравитации, полями Кальба—Рамона и другими полями, включая фермионы. Такая теория называется IIB-супергравитацией. Компактифицируем в окружности пять пространственных измерений. Обозначим эти измерения x^5 , x^6 , x^7 , x^8 и x^9 . Тогда черная дыра — сферическисимметричный объект в некомпактифицированном пространстве-времени M^5 , описываемая координатами x^0 , x^1 , x^2 , x^3 и x^4 . У нас нет возможности обсуждать здесь полную конструкцию черной дыры, поэтому мы просто суммируем полученные результаты.

1. Черная дыра обладает тремя различными электрическими зарядами по отношению к трем калибровочным полям, расположенным в M^5 и похожим на поля Максвелла. Эти заряды обозначаются целыми числами

- 2. Черная дыра является экстремальной: она обладает минимальной массой, согласующейяся с ее зарядами. Черная дыра не излучает, потому что излучение уменьшало бы массу без необходимого уменьшения заряда. Температура черной дыры равна нулю. В дополнение, она сохраняет большую часть исходных суперсимметрий IIB-теории в десятимерном пространстве-времени Минковского.
- Горизонт черной дыры это 3-сфера с конечным объемом A_H. Термодинамическая энтропия черной дыры S_{bh} вычисляется с помощью пятимерного аналога (22.124):

$$\frac{S_{\rm bh}}{k} = \frac{A_{\rm H}}{4G^{(5)}} = 2\pi\sqrt{NQ_1Q_5}.$$
 (22.138)

Здесь $G^{(5)}$ — это пятимерная гравитационная постоянная и было положено $\hbar = c = 1$. Интересно, что данная энтропия зависит только от зарядов черной дыры и ни от каких других параметров, таких, как константа струнного взаимодействия или размер окружностей, используемых при компактификации.

Цель состоит в том, чтобы с помощью теории струн воспроизвести энтропию (22.138) путем подсчета состояний. Теория струн должна объяснять, как данная черная дыра может быть построена многими возможными способами. Мы знаем, как подсчитать состояния в теории струн при отсутствии взаимодействий. Однако на это раз черная дыра не нарушает суперсимметрию и это гарантирует, что подсчет состояний при нулевой константе связи остается верным при ненулевой константе.

При нулевой константе связи черная дыра строится с помощью IIB-теории суперструн, у которой пять координат x^5, \ldots, x^9 свернуты в окружности. Заряды Q_1 и Q_5 порождаются при наматывании Q_1 D1-бран вокруг окружности и Q_5 D5-бран вокруг пяти окружностей. Данные заряды возникают посредством механизма, обсуждавшегося в разделе 16.4. Так как у D5-браны пять пространственных измерений, то D5-брана полностью наматывается вокруг дополнительных компактных измерений. Как это выглядит для пятимерного наблюдателя в M^5 ? Так как все пространственные измерения для D5-бран вдоль M^5 типа Дирихле, то D5-браны имеют фиксированные пространственные координаты на M^5 . В любой фиксированный момент времени они представлены набором неподвижных точек. То же самое справедливо и для D1-бран. В той конфигурации, которую

мы пытаемся построить, требуется, чтобы все эти точки совпадали. Таким образом, все D-браны совпадают и наблюдатель в пространстве видит их как одну точку. Это точка является центром черной дыры, образующейся при включении взаимодействия. До сих пор данную конфигурацию D-бран не удается построить разными способами, сохраняющими суперсимметрию. Возможны несколько различных выборов; например, можно выбрать другую координату для намотки всех D1-бран. Однако любое количество выборов, которые не зависят от зарядов, не могут привести к правильной энтропии. Поэтому откуда возникает эта энтропия?

Напомним, что макроскопическая черная дыра обладала дополнительным зарядом N. Чему это соответствовало в конструкции бран? Это квантовое число импульса. Импульс вдоль окружности x^5 должен быть равен

$$p^5 = \frac{N}{R},\tag{22.139}$$

где R — это радиус окружности. D-браны не могут обладать данным импульсом, потому что они трансляционно-инвариантны вдоль направления x^5 . Импульс переносится струнами, прикрепленными к D-бранам! Теперь можно видеть, как возникают многие состояния: существует много типов струн, натянутых между Q_1 D1-бранами и Q_5 D5-бранами. Есть (1, 1) струны, натянутые от D1-бран к D1-бранам. Есть (5, 5) струны, натянутые от D5-бран к D5-бранам. Наконец, есть (1, 5) и (5, 1) струны, натянутые от D1-бран к D5-бранам и, соответственно, наоборот. К тому же, квантовое число полного импульса может быть распределено между многими открытыми струнами. Однако суперсимметрия приводит к одному дополнительному требованию: все открытые струны должны иметь импульс в одном направлении — вдоль x^5 .

Для дальнейшего изложения необходимо привести некоторые известные факты о комбинированных системах совпадающих D1- и D5-бран.

- 1. Система D1/D5-бран является связанным состоянием. В интересующей нас конфигурации открытые струны типа (1, 1) и (5, 5) становятся массивными и не имеют возбуждений. Такие струны можно исключить из подсчета.
- Полное число основных состояний (1, 5)-струны и противоположно ориентированной (5, 1)-струны равно восьми: четыре бозонных основных состояния и четыре фермионных основных состояния.
- 3. Q_1 D1-бран могут объединяться и образовывать одну D1-брану, Q_1 раз намотанную на окружность. Аналогичным образом, Q_5 D5-бран могут объединиться и образовать одну D5-брану, Q_5 раз намотанную на все компактное пространство. Если такое происходит, заряды не изменяются.

Принимая во внимание полученную информацию, видим, что квантовое число импульса N должно быть распределено между открытыми струнами, натянутыми между D1-бранами и D5-бранами. Нам требуется разбиение N, но какого типа? Давайте предположим на некоторое время, что $N \gg Q_1Q_5$ и сделаем предварительный подсчет, который будет работать, однако в общем случае будет неверен.

Надо произвести разбиение N и для каждого элемента разбиения следует указать, состояние какого типа обладает квантовым числом импульса. Существует Q_1Q_5 способов выбора D1-браны и D5-браны. Более того, есть четыре

дополнительных способа выбрать бозонное возбуждение либо, альтернативно, четыре способа выбрать фермионное возбуждение (см. выше п. (2)). В итоге, имеем $b = 4Q_1Q_5$ значений бозонного индекса и $f = 4Q_1Q_5$ значений фермионного индекса. Тогда с помощью (22.62) энтропия имеет вид

$$\frac{S_{\rm str}}{k} = \ln P(N; 4Q_1Q_5, 4Q_1Q_5) \approx 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} (4Q_1Q_5) \frac{3}{2} = 2\pi \sqrt{NQ_1Q_5}, \quad (22.140)$$

в полном соответствии с (22.138). Это очень хороший, однако недостаточно общий результат. Ограничение $N \gg Q_1Q_5$ необходимо, потому как в (22.62) N с необходимостью должно быть больше, чем b и f. Можно показать, что если N, Q_1 и Q_5 одновременно увеличиваются до больших значений, то $\ln P$ не соответствует ожидаемой энтропии. Это означает, что общая схема подсчета состояний, приводящая к энтропии, до сих пор не выявлена.

Ключ к разгадке содержится в п. (3) приведенного выше списка. Представим D1-брану, намотанную Q_1 раз на окружность x^5 . Теперь рассмотрим (1, 1)-струну, движущуюся вдоль D1-браны. Как квантуется импульс этой струны? Для подобной струны окружность эффективно становится в Q_1 раз длиннее: $(2\pi R)Q_1 -$ это расстояние, которое должна преодолеть струна, прежде чем возвратится в свое исходное положение на D1-бране. Соответственно, струнный импульс квантуется в единицах $1/(Q_1 R)$. Это верно с одним условием. Импульсы отдельных открытых струн могут квантоваться в более мелкомасштабных единицах, однако полный импульс всех открытых струн по-прежнему должен квантоваться в единицах 1/R. Это происходит по той причине, что система, состоящая из D1-браны и прикрепленных открытых струн, должна быть инвариантна относительно трансляций вдоль окружности на $2\pi R$. В итоге полный импульса, то отсюда следует наше утверждение.

Однако, необходимо сосредоточить наше внимание на струнах, натянутых между D1-бранами и D5-бранами. Предположим для простоты, что Q1 и Q5 взаимно просты (вскоре это допущение будет ослаблено). Теперь рассмотрим (1, 5)-струну. Сколько раз она должна пройти вдоль окружности x^5 так, чтобы оба ее конца вернулись в свои исходные положения? Первый конец вернется в исходное положение после Q₁ оборотов, а второй — нет. Второй конец вернется в исходное положение после Q_5 оборотов, а первый — нет. После Q_1Q_5 оборотов оба конца возвращаются в свои исходные положения на соответствующих бранах. В результате, импульс (1, 5)- и (5, 1)-струн квантуется в даже более мелкомасштабных единицах: $1/(Q_1Q_5R)!$ Это можно считать приблизительно верным, даже если Q_1 и Q_5 не взаимно просты. Возьмем, например, $Q_1 = Q_5 = 100$. Можно взять D1-брану и разбить один оборот, получив тем самым систему с $Q'_1 = 99$ плюс одна дополнительная D1-брана. Так как Q'_1 и Q_5 взаимно просты, импульс большинства открытых струн квантуется в единицах $1/(Q'_1Q_5R)$, что приблизительно равно $1/(Q_1Q_5R)$. В общем случае, для больших Q_1 и Q_5 можно найти относительно простые числа $Q'_1 < Q_1$ и $Q'_5 < Q_5$ такие что $Q'_1 \approx Q_1$ и $Q'_5 \approx Q_5$.

В таких мелкомасштабных единицах квантования полный импульс (22.139), предположительно, записывается в виде

$$p^5 = \frac{NQ_1Q_5}{Q_1Q_5R}.$$
 (22.141)

На этот раз необходимо произвести разбиение числа NQ_1Q_5 . Так как имеется только одна вытянутая D1-брана и одна D5-брана, существует только один тип струны, натянутой между этими бранами. Поэтому индексы элементов разбиения — либо четыре бозонных, либо четыре фермионных: b = f = 4. В итоге, энтропия задается выражением

$$\frac{S_{\text{str}}}{k} = \ln P(NQ_1Q_5; 4, 4) \approx 2\pi \sqrt{\frac{NQ_1Q_5}{6}(4)\frac{3}{2}} = 2\pi \sqrt{NQ_1Q_5}.$$
 (22.142)

Теперь имеется полное соответствие с энтропией черных дыр, справедливое в общем случае.

Статистический вывод энтропии черных дыр является значительным достижением теории струн. К тому же, был достигнут приличный прогресс в расширснии набора черных дыр, для которых можно вычислить энтропию. Тем не менее, в теории струн остается еще сделать много работы, чтобы достичь полного понимания черных дыр. Нельзя сказать, что черные дыры Шварцшильда понимаются сколько-нибудь точно, кроме этого, существуют вопросы, связанные с судьбой информации, падающей на черную дыру.

При нулевом взаимодействии теория струн приводит к прозрачному описанию степеней свободы некоторой конфигурации, которая становится черной дырой при ненулевом взаимодействии. Более того, известно, что подсчет состояний остается справедливым и при ненулевом взаимодействии. Хотелось бы знать, как устроены эти степени свободы к моменту образования черной дыры. Остается еще много неизвестного.

Задачи

Задача 22.1. Обзор статистической механики

- (a) Докажите справедливость уравнения (22.7). [Подсказка: уровни энергии $E_{\alpha}(V)$ системы зависят от объема. При квазистатическом изменении объема изменение средней энергии вычисляется с помощью равновесного распределения состояний. Изменение средней энергии можно интерпретировать как вызванное работой против давления]
- (б) Докажите справедливость уравнения (22.15). [Подсказка: рассмотрите дифференциал $d \ln Z(T, V)$.]

Задача 22.2. Фермионная скрипичная струна и подсчет разбиений на неравные части Рассмотрите систему простых гармонических осцилляторов с частотами ω₀, 2ω₀, равными частотам осцилляторов бозонной скрипичной струны из раздела 22.2. Однако на этот раз каждое число заполнения n_i может принимать только значения 0 или 1. Осцилляторы с данным свойством называются фермионными. (а) Вычислите свободную энергию такой струны в пределе высоких температур. Ответ содержит сумму

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots,$$

которую можно вычислить с помощью (22.38).

- (б) Пусть q(N) обозначает число разбиений N на неравные части. С помощью результата, полученного в п. (а), покажите, что поведение N при больших q(N) задается выражением (22.61).
- (в) Теперь предположите, что данная струна релятивистская, ее энергия связана с числом мод как в (22.65): $\sqrt{N} = \sqrt{\alpha' E}$. Какова температура Хагедорна для такой струны?

Задача 22.3. Производящие функции разбиений

Особенно простое бесконечное произведение приводит к производящей функции для разбиений p(n):

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^n)}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n.$$

Здесь $p(0) \equiv 0$. Для того чтобы вычислить левую часть, каждый фактор раскладывается в бесконечный ряд Тейлора около точки x = 0. Проверьте эту формулу при $n \leq 4$ и объясните (словами) почему она справедлива в общем случае. Найдите производящую функцию для неравных разбиений q(n) и проверьте ее для малых значений n.

Задача 22.4. Подсчет обобщенных разбиений

Докажите формулу (22.62) для разбиений P(N; b, f) числа N на обычные целые числа, занумерованные от 1 до b и фермионные числа, занумерованные от 1 до f. Обозначая через Z статистическую сумму для обычных осцилляторов и через Z' статистическую сумму из задачи 22.2, начните вывод с объяснения, почему статистическая сумма Z_T для объединенной системы осцилляторов с бозонными и фермионными осцилляторами равна

$$Z_{\overline{T}} = (Z)^{\flat} (Z')^f.$$

► Задача 22.5. Температура Хагедорна открытых суперструн

Рассмотрите теорию открытых суперструн, описанную в разделе 14.1.

- (a) Покажите, что полное число состояний (в секторах NS и R) с числом N^{\perp} равно 16 $P(N^{\perp}; 8, 8)$. [Подсказка: один из двух секторов вычисляется легче; затем воспользуйтесь суперсимметрией.]
- (б) Следуя методу, изложенному в разделе 22.3, вычислите температуру Хагедорна для открытой суперструны. Покажите, что она в √2 раз превышает температуру Хагедорна бозонной струны.

Задача 22.6. Статистическая сумма релятивистской частицы

Точно вычислите статистическую сумму (22.83) для точечной релятивистской частицы в терминах модифицированных функций Бесселя (и их производных), используя интегральное представление

$$K_{\nu}(z) = \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2\nu} t \, dt.$$

С помощью асимптотического разложения

$$K_{\nu}(z) \sim e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \ldots \right],$$

справедливого для больших z, подтвердите полученный ранее для низких температур результат (22.89).

Задача 22.7. Поправки в соотношение между температурой и энергией микроканонического ансамбля

Температура Хагедорна в идеализированной модели струн была найдена путем вычисления соотношения между энтропией и энергией в пределе высоких энергий, когда $p_{24}(N) \approx 4\pi \sqrt{N}$. Воспользуйтесь более точным выражением для разбиений $p_{24}(N)$, согласно (22.58), и найдите поправки в соотношение между температурой и энергией. Вы получите удивительный результат: при стремлении энергии к бесконечности температура стремится сверху к $T_{\rm H}$! Нарисуйте зависимость T(E), и вычислите (отрицательную!) удельную теплоту C в режиме высоких энергий.

Рассмотренные выше вычисления проводились с помощью $S = k \ln p_{24}(N)$ и соотношения между E и N. В обычных системах с непрерывным спектром энергии энтропия $S = k \ln \Omega(E)$, где $\Omega(E) dE$ — это число состояний в интервале энергий dE. С помощью соотношения $\Omega(E) dE = p_{24}(N) dN$ вычислите $\Omega(E)$ и покажите, что полученное значение энтропии S(E) несколько отличается от энтропии, вычисленной ранее.

Отрицательная удельная теплота, полученная для идеализированной струны, является типичной. Можно доказать, что для открытых струн на *Dq*-бране

$$\Omega(E) pprox E^{-\gamma} \exp\left(4\pi \sqrt{lpha'}E
ight)$$
 при $\gamma = rac{(25-q)}{2}.$

Используя непрерывный энергетический спектр, вычислите удельную теплоту C в режиме высоких энергий. Запишите ответ через γ , E и $kT_{\rm H}$.

Задача 22.8. Длинные струны более предпочтительны с точки зрения энтропии

Общая приближенная формула для разбиений $p_b(N)$ принимает вид

$$p_b(N) \approx \beta N^{-\gamma} \exp{(\delta \sqrt{N})},$$

где β , γ и δ — это положительные константы, зависящие от *b*. Рассмотрите открытую бозонную струну с большим числом возбуждений $N^{\perp} = N_0$ и энергией E_0 , связанной с этим числом соотношением $\alpha' E_0^2 \approx N_0$. Предположите, что все струны имеют нулевой импульс.

- (a) Найдите отношение числа состояний, допустимых для струны и числа состояний, допустимых при расщеплении струны на две (различные) струны, каждая из которых обладает половиной исходной энергии. Выразите ответ через N_0 и имеющиеся в задаче константы. Как изменяется энтропия $\Delta S/k$ в процессе объединения двух полуструн в исходную струну? Покажите, что это изменение положительно при достаточно больших N_0 . Какие из констант (β , γ , δ) ответственны за данный эффект?
- (б) Покажите, что в общем случае комбинация двух открытых струн с большим числом возбуждений в одну открытую струну является процессом, увеличивающим энтропию.
- (в) Так как полученные выше результаты справедливы для больших N_0 , то интересно проверить их для малых N_0 . Во сколько раз возрастет число допустимых состояний, если струна с $N_0 = 9$ образуется из двух струн, каждая из которых имеет равную энергию? Каково изменение энтропии $\Delta S/k$? Во всех случаях используйте точную формулу $\alpha' E^2 = N 1$. (Небольшая помощь: $p_{24}(9) = 143\ 184\ 000$.)

Задача 22.9. Оценка размера струнного состояния

Для правильной оценки энтропии (22.129) струны использовалось эвристическое описание струны как совокупности струнных битов. Теперь мы хотим воспользоваться этим описанием для оценки размера состояний открытых струн. Предположим, что каждый струнный бит может быть случайным образом направлен в любом из d ортогональных направлений. Тогда данная струна может рассматриваться как случайное блуждание с числом шагов, равным числу битов.

(a) С помощью формулы среднего значения квадрата смещения при случайных блужданиях покажите, что «размер» $R_{\rm str}$ струны массы M равен

$$R_{
m str}(M) pprox M^{1/2} \ell_s^{3/2} pprox N^{1/4} \ell_s$$

где N — это собственное значение оператора числа возбуждений соответствующего значению массы M. Отметим, что размер пропорционален корню квадратному из массы, в то время как длина струны пропорциональна массе. Найденное значение $R_{\rm str}$ является размером струны в отсутствие струнного взаимодействия.

(б) Покажите, что размер струны R_{str} массы M (с нулевым струнным взаимодействием) меньше, чем радиус Шварцшильда для массы M (с константой взаимодействия g), если $M > \overline{M}$, где

$$\overline{M}\sim rac{{f l}}{g^4\ell_s}\sim rac{m_{
m P}}{g^3}.$$

Данный результат предполагает, что достаточно массивные струны могли бы образовывать черную дыру. Покажите, что для \overline{M} радиус черной дыры равен ℓ_s/g^2 , так что для малого взаимодействия размер черной дыры слишком велик, чтобы доверять выводам данной модели теории струн. Покажите, что значение N для невзаимодействующих струн массы \overline{M} равно $N \sim 1/g^8$. Приведите грубую оценку \overline{M} в килограммах при $g \sim 0.01$.

(в) Рассмотрите очень большую черную дыру с массой M и радиусом Шварцшильда R в теории струн с некоторой конечной константой струнного взаимодействия g. Теперь предположите, что взаимодействие медленно уменьшается до нуля. Вычислите значение N, которое характеризует возникающую в итоге невзаимодействующую струну (запишите ответ через M и m_P). Покажите, что размер этой струны R_{str} равен R/g. Насколько больше длина струны?

Масса черной дыры в центре нашей Галактики приблизительно равна 2,6 миллионов солнечных масс. Оцените значение N для соответствующей невзаимодействующей струны. *Ответ:* $N \sim 10^{177}$.

Модель случайных блужданий для струнных состояний применима к струнам с небольшим либо нулевым угловым моментом (напомним, что размер жестко вращающейся открытой струны пропорционален массе). В этой модели размер струны значительно меньшее ее длины. По-видимому, наличие струнных взаимодействий приводит к дальнейшему уменьшению размера струн.

Глава 23

Сильные взаимодействия и АдС/КТП

Теория струн способствует пониманию ряда вопросов в теории сильных взаимодействий. Квантовые состояния открытой вращающейся струны обладают основными свойствами адронных возбуждений. Энергия натянутой струны достаточно хорошо совпадает с потенциальной энергией выделенной пары кварк-антикварк. Более удивительно то, что определенные калибровочные теории сильных взаимодействий физически эквивалентны теориям замкнутых суперструн. Замкнутые струны распространяются в пространстве, границу которого можно считать пространством, на котором живет калибровочная теория. Основным примером такого соответствия является AqC/КТП-соответствие, утверждающее, что четырехмерная суперсимметричная SU(N)-калибровочная теория полностью описывается IIB-теорией замкнутых суперструн в пространстве, содержащем пятимерное пространство анти-де Ситтера AdS₅. Мы рассмотрим мотивацию данного соответствия и подробно изучим геометрию пространства анти-де Ситтера и связанных с ним гиперболических пространств. Данное соответствие дает основание полагать, что свойства обнаруженной недавно кварк-глюонной плазмы связаны со свойствами черных дыр в пространстве анти-де Ситтера.

23.1. Введение

Теория струн была открыта при попытках разобраться в динамике сильно взаимодействующих адронов. Было замечено, что график зависимости углового момента J адронных возбуждений от квадрата энергии приближенно распадается на прямые $J = \alpha' E^2$, называемые траекториями Редже. Представлялось, что теория струн является правдоподобным кандидатом на роль теории сильных взаимодействий, потому что это соотношение между J и E^2 возникает естественным образом для открытых вращающихся струн, согласно обсуждению из раздела 8.6. Квантование приводит к дискретным значениям углового момента и модифицирует линейное соотношение между J и E^2 добавлением константы, такие изменения необходимы для согласования с экспериментальными данными.

Несмотря на эти обнадеживающие признаки, первые попытки использовать релятивистские струны для описания адронов столкнулись с большими сложностями. Среди прочего, одной из таких проблем было присутствие нежелательных безмассовых векторов и безмассовых тензоров, являющихся в точности теми частицами, которые необходимы, чтобы сделать теорию струн кандидатом на теорию всей физики. Струнный подход к сильным взаимодействиям был заброшен и вместо него возникла квантовая хромодинамика, или, сокращенно, КХД. КХД Рис. 23.1. Мезон как пара кварк-антикварк, соединенных друг с другом цветовыми силовыми линиями. Когда кварк и антикварк разделены, цветовые силовые линии образуют тонкую трубку потока, которую можно рассматривать как струну



607

постулирует, что фундаментальными составляющими адронов являются кварки и глюоны, КХД — это некоторая квантовая теория поля, на самом деле являющаяся SU(3)-теорией Янга—Миллса.

Мезон в КХД считается парой кварков, связанных друг с другом глюонами. Однако, струнный подход, по-прежнему, остается полезным приближенным описанием. В рамках данного подхода мезон является парой кварков, расположенных на концах открытой струны, представляющей собой тонкую трубку цветовых силовых линий (рис. 23.1). Конфайнмент кварков, то есть то, что кварки никогда не наблюдаются по отдельности, также имеет простое объяснение в струнном подходе. Так как натяжение струны, соединяющей кварки, не зависит от длины струны, то для полного разделения пары кварков необходима бесконечная энергия. Потенциальная энергия между кварком и антикварком являлась предметом множества аналитических и численных исследований в КХД. Как будет видно в дальнейшем, ключевые свойства этого потенциала следуют из простой струнной модели.

В рассмотренном выше струнном подходе мезон является струной. Когда мы обсуждали Стандартную модель на конфигурации D6-бран, кварки и лептоны были струнами. Тут нет противоречия: суперструна может описывать элементарные частицы и в тоже время другая теория струн, возможно являющаяся эффективной теорией, может описывать составные адроны. На самом деле в течение длительного времени считалось, что должно существовать некоторое точное струнное описание КХД. До сих пор такая теория струн остается неизвестной, но произошел поразительный прогресс, и мы в высшей мере близки к этой цели.

Как оказалось, определенные сильновзаимодействующие калибровочные теории обладают точным струнным описанием, однако струны не распространяются в пространстве-времени, в котором живет соответствующая теория с сильным взаимодействием. Можно сказать, что калибровочная теория живет на границе пространства-времени в котором распространяются струны. Эквивалентность калибровочной теории и теории струн впервые была обнаружена в рамках АдС/КТП-соответствия. В этом соответствии требуется, чтобы максимально суперсимметричная SU(N)-теория Янга-Миллса в четырехмерном пространствевремени была эквивалентна IIВ-теории замкнутых суперструн. Десятимерное пространство-время в данной теории суперструн имеет особенный вид: пять измерений образуют сферу S5, а остальные пять измерений образуют некомпактное пространство анти-де Ситтера, обозначаемое для краткости AdS5. Пространство Минковского в теории поля можно рассматривать как границу пространства AdS₅. Максимально суперсимметричная SU(N)-теория Янга-Миллса имеет столько суперсимметрий, сколько вообще может иметь калибровочная теория. Она является конформной теорией поля (КТП), т.е. принадлежит к классу. > теорий, не имеющих размерных параметров. В сокращении АдС/КТП АдС обозначает пространство анти-де Ситтера, а КТП обозначает конформную теорию. После обсуждения данного соответствия мы изучим его версию, которая описывает «горячую» калибровочную теорию — кварк-глюонную плазму — с помощью струн, движущихся в пространстве АдС, в котором находится черная дыра.

23.2. Мезоны и вращающиеся квантовые струны

Классическое линейное соотношение $J = \alpha' M^2$ между угловым моментом и квадратом массы вращающейся открытой струны означает, что траектории Редже мезонных возбуждений могли бы иметь струнное объяснение. Давайте рассмотрим частный мезон и соответствующую траекторию Редже.

Ро-мезон $\rho(776)$ с массой 776 МэВ на самом деле является триплетом мезонов (ρ^+, ρ^0, ρ^-) , два из которых заряжены, а один нет; ρ -мезоны являются аналогами пионов (π^+, π^0, π^-) . Также как пионы, которые являются комбинациями кварков u и d с нулевым спином, ρ -мезоны обладают угловым моментом S, равным единице. При нулевом орбитальном угловом моменте L полный угловой момент равен J = 1. ρ -Мезоны нестабильны и, как правило, распадаются на пару пионов со временем жизни примерно 10^{-23} с. Мезон $\rho(776)$ находится на траектории мезонов с S = 1 и более высокими значениями L: записывая массы (в МэВ) внутри круглых скобок, имеем $a_2(1320)$ с J = 2, $\rho_3(1690)$ с J = 3, $a_4(2040)$ с J = 4 и $\rho_5(2350)$, с J = 5. Эти пять мезонов показаны на рис. 23.2.

Приближая график линейной траекторией, мы проводим линию через два низших мезона. Запишем

$$J = \alpha' M^2 + \beta' \tag{23.1}$$

и определим константы α' и β' так, чтобы линия проходила через $M^2 = (0,776 \text{ ГэB})^2$, J = 1 и $M^2 = (1,320 \text{ ГэB})^2$, J = 2. Получим

$$J = 0.87702(\Gamma_{3}B)^{-2}M^{2} + 0.47188.$$
 (23.2)

Полученная линия показана на рис. 23.2, с помощью данной прямой предсказывается мезон J = 3 с массой 1699 МэВ, мезон J = 4 с массой 2006 МэВ и мезон J = 5 с массой 2272 МэВ. Погрешности в массе действительно малы, соответственно, 0,5 %, 1,7 % и 3,3 %.

Убедившись, что (23.1) требуется для соответствия экспериментальным данным, давайте рассмотрим, каким образом классическое соотношение $J = \alpha' M^2$ модифицируется в квантовой теории. Предположим, что открытая струна вращается в плоскости (x^2, x^3) и в этой плоскости обладает нулевым импульсом. Соответствующий оператор углового момента $J = M^{23}$ считывается из (12.147):

$$J = M^{23} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^{(2)} \alpha_n^{(3)} - \alpha_{-n}^{(3)} \alpha_n^{(2)} \right).$$
(23.3)



Рис. 23.2. Траектории Редже—Фраучи для *ρ*-мезонов: *ρ*(776), *a*₂(1320), *ρ*₃(1690), *a*₄(2040), и *ρ*₅(2350), результирующая прямая задается двумя точками *ρ*(776) и *a*₂(1320)

Естественно, что слагаемые в правой части содержат комбинации двух пространственных координат. Полезно определить новые осцилляторы α_n и $\overline{\alpha}_n$:

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_n^{(2)} + i \alpha_n^{(3)} \right), \quad \bar{\alpha}_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_n^{(2)} - i \alpha_n^{(3)} \right). \tag{23.4}$$

Отметим, что $(\alpha_n)^{\dagger} = \overline{\alpha}_{-n}$. Короткое вычисление показывает, что коммутационные соотношения для новых осцилляторов равны

$$[\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \alpha_n] = [\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = 0.$$
(23.5)

Отметим, что первое соотношение означает, что $[\bar{\alpha}_m, \alpha_n] = m \delta_{m+n,0}$. В терминах новых осцилляторов оператор углового момента имеет вид

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ \alpha_{-n}, \overline{\alpha}_n - \overline{\alpha}_{-n} \alpha_n \}.$$
(23.6)

Первое слагаемое в приведенной выше сумме считает число осцилляторов, находящихся в состоянии α , второе (с точностью до знака) считает число осцилляторов в состоянии $\overline{\alpha}$. Теперь удобство выбора нового базиса становится очевидным.

Упражнение-разминка 23.1. Проверьте уравнение (23.6) и убедитесь в справедливости утверждений, которые следуют из этого уравнения.

С помощью новых осцилляторов состояния записываются в виде

$$|\lambda\rangle = \dots \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k})^{\lambda_k} (\bar{\alpha}_{-k})^{\bar{\lambda}_k} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \qquad (23.7)$$

где $\lambda_k \ge 0$ и $\overline{\lambda}_k \ge 0$ являются целыми числами, а точки соответствуют произведению осцилляторов в направлениях, отличных от x^2 и x^3 . При действии на $|\lambda\rangle$

J имеет собственное значение
$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \bar{\lambda}_k).$$
 (23.8)

Таким образом, легко построить состояния с произвольными значениями углового момента.

Так как мы хотим найти значения квадрата массы состояний с определенным угловым моментом, рассмотрим соотношение для квадрата массы (12.164) и запишем его в виде:

$$\alpha' M^2 + 1 = N^{\perp} = N_{23} + N', \qquad (23.9)$$

где

$$N_{23} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^{(2)} \alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)} \alpha_n^{(3)} \right)$$
(23.10)

обозначает вклад N^{\perp} от направлений x^2 и x^3 , а N' обозначает вклад в N^{\perp} от остальных поперечных направлений. Легко находим, что в терминах новых осцилляторов

$$N_{23} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_{-n} \alpha_n), \qquad (23.11)$$

и это означает, что для произвольных состояний (23.7)

$$N_{23}$$
 имеет собственное значение $\mathcal{N}_{23} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k).$ (23.12)

Так как $\lambda_k, \bar{\lambda}_k \ge 0$ и $k \ge 1$, имеем

$$\mathcal{N}_{23} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k \ge \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k \right| = |\mathcal{J}|, \quad (23.13)$$

где было использовано (23.8) и отмечено, что для любых двух чисел $b_1 \ge 0$ и $b_2 \ge 0$ справедливо $b_1 + b_2 \ge |b_1 - b_2|$. Неравенство, которое мы получили имеет вид

$$\mathcal{N}_{23} \geqslant |\mathcal{J}|. \tag{23.14}$$

Замечая, что собственные значения N' больше либо равны нулю, получаем, что уравнение (23.9) приводит к неравенству $1 + \alpha' \mathcal{M}^2 \ge \mathcal{N}_{23}$, где \mathcal{M}^2 — это собственное значение M^2 . Окончательно, комбинируя это неравенство с (23.14), получаем

$$|\mathcal{J}| \leq 1 + \alpha' \mathcal{M}^2. \tag{23.15}$$

Данное неравенство выполняется для произвольных состояний (23.7). Оно является квантовой версией классического уравнения $J = \alpha' M$. Для состояний,

соответствующих равенству, имеем $\mathcal{J} = \alpha' \mathcal{M}^2 + 1$, что является уравнением типа (23.1). В то время как параметр α' должен определятся подгонкой к экспериментальным данным, β' предсказывается теоретически. Значение $\beta' = 1$, следующее из бозонной теории струн, недостаточно хорошо согласуется с траекторией Редже для ρ -мезонов. В то время как траектории Редже приводят к довольно-таки схожим значениям α' , значения β' изменяются более широко.

Давайте рассмотрим состояния, которые соответствуют равенству в (23.15). Для состояния вида $(\alpha_{-1})^N | p^+, \vec{p}_T \rangle$ имеем $\lambda_1 = N$, все другие λ и $\bar{\lambda}$ равны нулю, и N' = 0. Поэтому

$$\mathcal{J} = N, \quad 1 + \alpha' \mathcal{M}^2 = \mathcal{N}_{23} = 1 \cdot \lambda_1 = N = \mathcal{J},$$
 (23.16)

и неравенство переходит в равенство. Говорят, что состояние $(\alpha_{-1})^N | p^+, \vec{p}_T \rangle$ принадлежит траектории Редже с максимальным угловым моментом на единицу квадрата массы.

Квантовые состояния $|\psi_N\rangle \approx (\alpha_{-1})^N |p^+, \vec{p}_T\rangle$ напоминают классическую вращающуюся струну: соответствующие им собственные значения углового момента и квадрата массы связанны примерно также, как в классической теории. Для того чтобы вычислить хорошо определенные средние значения, состояния должны быть нормированы, должна появиться дельта-функция импульсов, подобно (12.171). Для упрощения обозначений и во избежание работы с суперпозициями состояний, вместо дельта-функций от нуля мы будем писать просто $\langle p^+, \vec{p}_T | p^+, \vec{p}_T \rangle = 1.$

Возможно это неожиданно, но средние значения $\langle \psi_N | X^I(\tau, \sigma) | \psi_N \rangle$ вовсе не ведут себя как классические координаты $X^I(\tau, \sigma)$ вращающейся струны. Находим

$$\langle \psi_N | X^I(\tau, \sigma) | \psi_N \rangle = \langle x_0^I \rangle + 2\alpha' p^I \tau,$$
 (23.17)

потому что осцилляторы в разложении по модам $X^{I}(\tau, \sigma)$ не могут давать вклад: добавление одного осциллятора к ненулевому среднему значению приводит к тому, что оно становится нулем. Согласно среднему значению (23.17) струна распространяется так, как будто она является точкой. Можно также увидеть в формуле указание на то, что размеры данной струны увеличатся, если вычислять среднее значений *квадратов* координат (см. задачу 23.1).

Однако, существуют когерентные состояния, для которых средние значения координат лежат на классически ожидаемой траектории. Возьмем, например,

$$|\psi\rangle = e^{\mathcal{A}}|p^+, \vec{0}\rangle$$
 при $\mathcal{A} = v(\bar{\alpha}_1 - \alpha_{-1}),$ (23.18)

где v — это вещественная константа. Так как $A^{\dagger} = -A$, то, учитывая предыдущее обсуждение, имеем $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. Давайте сначала убедимся, что средние значения J и M^2 совпадают с известными. Среднее значение J легко вычисляется:

$$\langle J \rangle = \langle \psi | J | \psi \rangle = \langle \psi | (\alpha_{-1} \overline{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_{-1} \alpha_1) | \psi \rangle, \qquad (23.19)$$

так как все члены в (23.6) коммутируют с e^{A} и уничтожают правые вакуумные состояния. Фактически, α_1 также коммутируют с A и тем самым второй член

в выражении выше также не дает вклада. Тогда имеем

$$\langle J \rangle = \langle \psi | \alpha_{-1} \overline{\alpha}_{1} e^{\mathcal{A}} | p^{+}, \vec{0} \rangle = \langle \psi | \alpha_{-1} [\overline{\alpha}_{1}, e^{\mathcal{A}}] | p^{+}, \vec{0} \rangle$$

= $\langle \psi | \alpha_{-1} [\overline{\alpha}_{1}, \mathcal{A}] e^{\mathcal{A}} | p^{+}, \vec{0} \rangle = -v \langle \psi | \alpha_{-1} e^{\mathcal{A}} | p^{+}, \vec{0} \rangle.$ (23.20)

С учетом $\langle \psi | e^{\mathcal{A}} \alpha_{-1} | p^+, \vec{0} \rangle = \langle p^+, \vec{0} | \alpha_{-1} | p^+, \vec{0} \rangle = 0$ получаем

$$\langle J \rangle = -v \langle \psi | [\alpha_{-1} e^{\mathcal{A}}] | p^+, \vec{0} \rangle = -v \langle \psi | [\alpha_{-1} \mathcal{A}] e^{\mathcal{A}} | p^+, \vec{0} \rangle = v^2.$$
(23.21)

Так при вычислении N_{23} используется в точности такой член $\alpha_{-1}\bar{\alpha}_1$, что и при вычислении $\langle J \rangle$, в итоге получаем

$$\langle J \rangle = \langle N_{23} \rangle = v^2, \quad \langle \alpha' M^2 \rangle = v^2 - 1 \Rightarrow \langle J \rangle = \langle (\alpha' M^2 + 1) \rangle, \quad (23.22)$$

как и ожидалось для вращающейся струны. Теперь рассмотрим средние значения координат. Простое вычисление с помощью разложения по модам (12.66) приводит к выражению

$$\left\langle (X^2 + iX^3)(\tau, \sigma) \right\rangle = \left\langle x_0^2 + ix_0^3 \right\rangle + 2i\sqrt{\alpha'} \left\langle (\alpha_1 e^{-i\tau} - \alpha_{-1} e^{i\tau}) \right\rangle \cos \sigma.$$
(23.23)

Замечая, что $\langle \alpha_1 \rangle = 0$ и $\langle \alpha_{-1} \rangle = -v$ и предполагая $\langle x_0^2 \rangle = \langle x_0^3 \rangle = 0$, находим

$$\langle (X^2 + iX^3)(\tau, \sigma) \rangle = 2iv\sqrt{\alpha'}e^{i\tau}\cos\sigma.$$
 (23.24)

Разделяя вещественную и мнимую части, действительно получаем классический предел вращающейся струны:

$$\langle X^{2}(\tau, \sigma) \rangle = -2v\sqrt{\alpha'} \sin \tau \cos \sigma, \langle X^{3}(\tau, \sigma) \rangle = 2v\sqrt{\alpha'} \cos \tau \cos \sigma.$$
 (23.25)

Параметр v можно связать с известными константами движения. Длина ℓ рассматриваемой струны равна $\ell = 4v\sqrt{\alpha'}$. К тому же, так как пространственные импульсы равны нулю, то $M^2 = 2p^+p^- = 2(p^+)^2$. Отсюда и из (23.22) находим

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \sqrt{v^2 - 1}.$$
 (23.26)

В классическом пределе значение v велико и

$$p^+ \approx \frac{v}{\sqrt{2\alpha'}} = \frac{\ell}{4\sqrt{2}\alpha'}.$$
 (23.27)

Это классическое соотношение между p^+ и длиной вращающейся струны. Действительно, с помощью (7.60), утверждающем, что энергия *E* такой струны равна $\pi T_0 \ell/2$, получаем

$$p^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} E = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} T_0 \ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi\alpha'} \ell = \frac{\ell}{4\sqrt{2}\alpha'}.$$
 (23.28)
Таким образом мы убедились, что средние значения координат описывают вращающуюся струну правильного размера. Использование когерентных состояний для описания квантовых состояний в квазиклассических пределах известно из примера простого гармонического осциллятора и рассматривается в задаче 23.2.

23.3. Энергия натянутой эффективной струны

Классическая потенциальная энергия статической натянутой струны равна произведению натяжения T_0 и длины ℓ . Если представить кварк и антикварк, закрепленных на концах струны, то эта энергия соответствовала бы потенциалу пары кварк-антикварк $V(\ell)$, зависящему от расстояния ℓ между ними. Из классического предела следует, что при больших r зависимость должна перейти в $V(r) \sim T_0 r$.

Каким образом квантовая теория струн помогает получить информацию о V(r)? Рассмотрим вычисление квадрата массы струны, натянутой между двумя параллельными D-бранами. D-браны не являются хорошим представлением для кварков, однако они определенно удерживают струну в натяжении и мы хотим получить энергию струны, которая, по предположению, определяет потенциал V(r). Для D-бран, находящихся на расстоянии L, мы получили выражение (15.51), которое, будучи выражено через натяжение струны и произвольную пространственно-временную размерность D, имеет вид:

$$M^{2} = (T_{0}L)^{2} + \frac{1}{\alpha'} \left(N^{\perp} - \frac{1}{24} (D-2) \right).$$
 (23.29)

Для того чтобы представить струну без возбуждений, предположим $N^{\perp} = 0$. Более того, так как струна статична, можно отождествить M^2 с квадратом потенциальной энергии. Таким образом, используя r для обозначения длины струны, записываем

$$(V(r))^2 = (T_0 r)^2 - \frac{1}{\alpha'} \frac{(D-2)}{24}.$$
 (23.30)

Этим мы достигли существенного упрощения и нам хотелось бы найти потенциал пары кварк-антикварк в *четырех* пространственно-временных измерениях. Было бы заманчиво положить в предыдущем уравнении D = 4, однако квантовая непротиворечивость действия Намбу—Гото требует D = 26. Нет никакой возможности оправдать использование этого уравнения для других значений D.

Однако есть указание на то, что существует версия действия Намбу—Гото, которая может быть сформулирована с сохранением лоренцевской и трансляционной симметрии для произвольной размерности D. Такая теория сложна и ее действие содержит бесконечное число дополнительных слагаемых. Квантование натянутой струны в этой теории приводит к потенциалу, который приближенно совпадает с (23.30): он воспроизводит несколько первых слагаемых в разложении r при больших V(r).

Подстраховавшись таким образом, продолжим изучение (23.30) для произвольных *D*. По традиции, вводят коэффициент Люшера

$$\gamma_D \equiv -\frac{\pi}{24}(D-2),$$
 (23.31)

значения которого при D = 4 и D = 3 равны

$$\gamma_4 = -\frac{\pi}{12} = -0,262, \quad \gamma_3 = -\frac{\pi}{24} = -0,1309.$$
 (23.32)

Тогда (23.30) можно записать в виде

$$V(r) = \sqrt{(T_0 r)^2 + 2T_0 \gamma_D}.$$
 (23.33)

Разложение правой части этого выражения при больших r дает

$$V(\mathbf{r}) = T_0 \mathbf{r} + \gamma_D \cdot \frac{1}{\mathbf{r}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathbf{r}^3}\right). \tag{23.34}$$

Данное выражение определяет ведущую квантовую поправку к классическому потенциалу $V(r) = T_0 r$ при больших r. Натяжение струны T(r) — это величина силы, соответствующей потенциалу:

$$T(r) = \frac{\partial V}{\partial r} = T_0 - \gamma_D \cdot \frac{1}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \qquad (23.35)$$

Натяжение T(r) равно T_0 с точностью до членов, линейных по $1/r^2$. Так как $\gamma_D < 0$ при D > 2, то $T(r) > T_0$ в трех и четырех пространственно-временных измерениях. Коэффициент Люшера может быть получен взятием производных от силы:

$$C(r) \equiv \frac{1}{2} r^3 \frac{\partial T}{\partial r} = \gamma_D + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$
(23.36)

Отметим, что $C(r) \approx \gamma_D$ с точностью до малых поправок при больших r. Величина C(r) может быть определена численно в решеточном приближении. Вычисления дают потенциал пары кварк-антикварк в теории, являющейся прототипом SU(3)-калибровочной теории. Полученные результаты являются серьезным указанием на то, что при росте r величина C(r) стремится к предсказанным значениям (23.32) как для γ_D , так D = 4 и для D = 3. Это указывает на то, что струнный подход правильно описывает не только ведущий член T_0r потенциала пары кварк-антикварк, но также и первую нетривиальную поправку!

23.4. Предел больших N в калибровочной теории

Теперь начнем рассмотрение основных идей, касающихся соответствия AdC/ КТП. Это соответствие калибровочной теории и гравитации наиболее ярко проявляется в случае, когда калибровочная теория обладает большим числом степеней свободы. Поэтому мы будем рассматривать SU(N)-калибровочную теорию при больших значениях N. В этой теории имеется безразмерная константа связи $g_{\rm YM}$, контролирующая силу взаимодействия между калибровочными бозонами. Более точно, каждый раз, когда один калибровочный бозон распадается на два калибровочных бозона, либо два калибровочных бозона превращаются в один калибровочный бозон, амплитуда такого процесса должна быть пропорциональна $g_{\rm YM}$. Ключевой результат, который мы собираемся продемонстрировать, состоит в том, что существует контролируемый $N \to \infty$ предел, в котором физической константой связи является не $g_{\rm YM}$, а удерживаемая конечной константа связи 'т Хоофта $\lambda = g_{\rm YM}^2 N$.

Для этой цели рассмотрим систему N совпадающих бран. Сила взаимодействий между открытыми струнами контролируется константой взаимодействия открытых струн g_0 : каждый раз, когда одна открытая струна расщепляется на две струны, либо когда две струны объединяются в одну, амплитуда такого процесса должна быть пропорциональна g_0 . В пределе низких энергий возникает SU(N)калибровочная теория и отщепленная U(1)-теория, которую можно проигнорировать. Так как калибровочные бозоны — это просто безмассовые открытые струны, константа связи g_{YM} возникающей калибровочной теории совпадает с константой взаимодействия открытых струн g_0 . В дальнейшем обсуждении открытые струны будут использованы для получения результатов в калибровочной теории. Соответственно, константу взаимодействия открытых струн мы будем обозначать тоже как g_{YM} .

Рассмотрим распространение открытой струны, концы которой лежат на i-й и j-й бранах при $i \neq j$. Для нахождения квантово-механической амплитуды распространения данной струны из некоторого исходного в некоторое конечное положение необходимо просуммировать все возможные промежуточные состояния, совместные с начальным и конечным положениями [ij]-струны. Эта сумма, конечно же, очень сложна для точного вычисления, однако мы собираемся определить только $g_{\rm YM}$ и зависимость от N различных вкладов. Такой результат применим для нахождения амплитуды распространения калибровочного бозона в SU(N)-калибровочной теории.

Различные вклады можно классифицировать с помощью диаграмм, на которых показана эволюция струны. Простейшей диаграммой является та, в которой со струной ничего не происходит — она свободно распространяется из начального в конечное положение. На рис. 23.3 *а* показана полоса, заметаемая при движении такой открытой струны, ее края соответствуют *i*-й и *j*-й бранам. Данная диаграмма не содержит взаимодействий и не имеет зависимости от N. Ей сопоставляется амплитуда

$$A_0 = c_0,$$
 (23.37)

где c_0 — это некоторая константа, не зависящая от g_{YM} и N.

ţ

Следующая диаграмма содержит взаимодействия. Как показано на рис. 23.36, простейшей возможностью является расшепление и объединение струн. Два таких типа взаимодействия, показанных точками, приводят к фактору $(g_{YM})^2$. Внутренняя граница диаграммы несет индекс k, указывающий на то, что струна расщепилась на k-й бране. Так как эта брана может быть любой из N допустимых бран и необходимо суммировать по всем возможностям, то рассматриваемая диаграмма также должна иметь фактор N. Вводя константу c_1 , записываем

$$A_1 = c_1 g_{\rm YM}^2 N. (23.38)$$

Рис. 23.3. (*a*) Полоска, образованная свободной эволюцией [*ij*]-струны. (б) Диаграмма, возникающая при расщеплении [*ij*]-струны и последующем объединении на *k*-й бране

б)



Рис. 23.4. Две диаграммы, каждая с четырьмя точками взаимодействия, полученные добавлением полоски к диаграмме (б) на рис. 23.3

Возникает образец: каждая граница, являющаяся замкнутой линией, дает вклад N, потому как она соответствует концу открытой струны, который может располагаться на любой из N бран. Предположим, что к диаграмме 23.3 δ добавляется другая полоска. Один из простых способов сделать это — ввести две новых точки взаимодействия и образовать одну новую границу так, как показано на двух диаграммах на рис. 23.4; если такое происходит, то в амплитуде возникает дополнительный множитель $g_{YM}^2 N$. Таким образом, имеем

$$A_2 = c_2 (g_{\rm YM}^2 N)^2. \tag{23.39}$$

Пока полоски продолжают добавляться, образовывая новую границу, мы получаем амплитуды вида

$$A_p = c_p (g_{\rm YM}^2 N)^p.$$
 (23.40)

Амплитуда A, полученная с учетом всех рассмотренных выше вкладов, равна

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g_{YM}^2 N)^n.$$
 (23.41)

Мы видим, что возникла константа связи 'т Хоофта λ, определенная как

$$\lambda \equiv g_{\rm YM}^2 N. \tag{23.42}$$

Постоянная 'т Хоофта определяет сходимость (23.41). Записываем

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = f_0(\lambda). \qquad (23.43)$$

Для нахождения полной амплитуды необходимо добавить к A вклады, возникающие при добавлении полосок, которые не приводят к новой границе. В простейшем примере добавление полоски к любой из двух диаграмм на рис. 23.4 при-

водит к диаграмме на рис. 23.5. Как обычно мы ввели два новых взаимодействия, однако число границ при этом уменьшилось на одну. Две внутренние границы объединились в одну, в чем можно убедиться проведя кончиком карандаша вдоль границы. Данный граф, на самом деле, непланарный: его нельзя нарисовать на плоскости так, чтобы полоски не пересекались. Фактически новая полоска либо увеличит, либо уменьшит число границ на одну. Каждый раз при добавлении полоски, уменьшающей число границ, возникает дополнительный множитель $g_{\rm YM}/N$ либо, что эквивалентно, множитель λ/N^2 . Добавляя в A вклады от диаграмм, содержащие все возможные полоски, которые уменьшают число границ, находим полную амплитуду А:



Рис. 23.5. Непланарная диаграмма, полученная добавлением полоски к любой из двух диаграмм на рис. 23.4. Отметим, что существует только одна внутренняя граница

$$\mathcal{A} = f_0(\lambda) + f_2(\lambda) \cdot \frac{1}{N^2} + f_4(\lambda) \cdot \frac{1}{N^4} + \dots$$
 (23.44)

При больших N и фиксированной λ предыдущее выражение является разложением амплитуды по степеням малого параметра $1/N^2$. Коэффициенты перед N^{-2k} , k = 0, 1, 2, ... определяются значением λ . Если λ мало, каждый коэффициент имеет разложение по степеням λ . Предел $N \to \infty$ при фиксированном $\lambda = g_{YM}^2 N$ автоматически приводит к $g_{YM} \to 0$, в таком пределе дает вклад только первый член разложения. Константа связи λ полностью контролирует теорию в пределе $N \to \infty$.

23.5. Гравитационные эффекты от массивных источников

С помощью открытых струн на N D-бранах мы рассмотрели калибровочные теории при больших N. Теперь зададимся вопросом: когда становятся важны гравитационные эффекты от данных D-бран? Ведь D-браны имеют энергию (благодаря натяжению) и поэтому должны искривлять пространство-время. Можно задать более общий вопрос: при каких масштабах расстояний становятся важны гравитационные эффекты от массивных объектов? После обсуждения этого вопроса мы сосредоточимся на изучении бран, намотанных на дополнительные измерения.

Величина, которую следует рассмотреть — это гравитационная потенциальная энергия на единицу массы, то есть гравитационный потенциал V, порожденный массой M на расстоянии r от себя:

$$V \approx -\frac{G^{(D)}M}{r^{D-3}}.$$
 (23.45)

Здесь D — это размерность пространства-времени. Так как в естественных единицах V безразмерен, числитель определяет характерный масштаб длины R:

$$R^{D-3} \equiv G^{(D)}M. \tag{23.46}$$

Масштаб R, с точностью до множителей первого порядка, совпадает с радиусом Шварцшильда черной дыры массы M и произвольной размерности D. Действительно, вывод радиуса четырехмерной черной дыры в разделе 22.6 следует похожей логике. Если так определить R, потенциал (23.45) может быть записан в виде

$$V \approx -\left(\frac{R}{r}\right)^{D-3}.$$
 (23.47)

Мы видим, что при $r \gg R$ гравитационными эффектами можно пренебречь. Гравитационные эффекты от точечных масс важны на масштабах порядка R, однако, если R много меньше, чем размер массы M, то гравитационными эффектами можно полностью пренебречь. Например, для астероида с массой в миллиард тонн $R \approx 10^{-15}$ м. Ни на данном, ни на больших масштабах значительных гравитационных эффектов нет.

Теперь рассмотрим совокупность из N Dp-бран, намотанных на p-мерное компактное пространство объема V_p . Натяжение T_p некоторой Dp-браны задается (18.57):

$$T_p \approx \frac{1}{g} \frac{1}{g(\sqrt{\alpha'})^{p+1}}.$$
(23.48)

Поэтому масса этой браны равна

$$M = NT_p \cdot V_p \approx N \cdot \frac{V_p}{g(\sqrt{\alpha'})^{p+1}}.$$
(23.49)

Размерно редуцированное пространство-время имеет размерность D - p. К тому же, в этом пространстве-времени браны возникают как точечные источники массы M. С помощью (23.46) характерный размер системы R равен

$$R^{D-p-3} = G^{(D-p)}M = \frac{G^{(D)}}{V_p}M \approx G^{(D)}N \cdot \frac{1}{g(\sqrt{\alpha'})^{p+1}}.$$
 (23.50)

Отметим то, что объем V_p сократился. Вспоминая, что $G^{(D)} \approx g^2 (\sqrt{\alpha'})^{D-2}$ (раздел 13.4), получаем

$$R^{D-p-3} \approx gN(\sqrt{\alpha'})^{D-p-3}.$$
(23.51)

Данный результат записывается следующим образом

$$\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\right)^{D-p-3} \approx gN. \tag{23.52}$$

При $gN \to 0$ имеем $R \to 0$ и гравитационными эффектами N Dp-бран можно пренебречь. Фактически, по мере того, как R становится меньше, чем длина струны $\sqrt{\alpha'}$, пропадает масштаб, на котором существенны гравитационные эффекты. При $g \to 0$ масса D-бран (23.49) расходится как 1/g, а гравитационная постоянная G стремится к нулю как g^2 . Пропорциональный GM общий множитель становится равным нулю. Отметим также независимость оценки (23.52) от объема компактных измерений V_p . Это указывает на то, что характерный масштаб R существенен даже для конфигураций бесконечных D-бран. Однако, в этом случае в черной дыре нет необходимости, а вместо нее требуется какая-то другая геометрия, в которой R играет существенную роль.

23.6. Обоснования соответствия АдС/КТП

В данном разделе мы обосновываем соответствие AдC/КТП, удивительную эквивалентность между суперсимметричной SU(N)-калибровочной теорией, которая возникает при низких энергиях на наборе N совпадающих D3-бран, и IIB-теорией суперструн на фоновом пространстве-времени, тесно связанном гравитационным фоном, порождаемым D3-бранами.

Несмотря на то что калибровочные теории естественно возникают в низкоэнергетическом пределе теории открытых струн, рассматриваемое соответствие вовлекает теорию замкнутых струн. Более того, замкнутые струны не могут находиться в пространстве Минковского, в том пространстве, где определены калибровочные теории. На самом деле пространство Минковского — это в некотором смысле граница того пространства, в котором живут замкнутые струны. Данное соответствие иногда называют дуальностью, потому что одна и та же физическая картина описывается двумя системами, выглядящими по разному (замкнутые струны и калибровочная теория). Так как SU(N)-калибровочная теория обладает максимальной суперсимметрией, соответствующая физическая картина отличается от описываемой КХД — калибровочной теорией, в которой нет суперсимметрии. Струнное описание КХД до сих пор отсутствует, однако открытие соответствия $A_{dC}/KT\Pi$ является мощным свидетельством в пользу того, что такое описание существует.

Следует подчеркнуть, что соответствие до сих пор не доказано. Вернее сказать, оно изначально обосновывалось некоторыми эвристическими соображениями и с тех пор подвергалось детальной проверке. Нет никаких оснований подозревать, что соответствие не выполняется. Эвристические соображения распадаются на две группы: либо они основаны на соображениях симметрии, либо исходят из низкоэнергетического предела.

Давайте сначала коротко рассмотрим соображения симметрии. Конформная теория поля в четырехмерном пространстве Минковского обладает набором конформных симметрий, которые порождают пятнадцать генераторов. Десять из них — это известные лоренцевские генераторы (шесть из них) и генераторы пространственно-временных трансляций (четыре из них). Остальные пять включают четыре генератора, которые порождают так называемые специальные конформные преобразования и один генератор, который порождает масштабные преобразования. Эти пятнадцать операторов определяют четырехмерную конформную алгебру Ли, содержащую алгебру Лоренца (11.81) в качестве подалгебры. В теории поля конформные симметрии реализуются в виде набора полевых преобразований. Данные симметрии также должны появляться со струнной стороны соответствия. Действительно, пространство-время AdS5, являющееся частью фонового пространства для замкнутых струн, обладает тем свойством, что его изометрии (гладкие, взаимнооднозначные отображения пространства на себя, оставляющие все расстояния инвариантными) порождаются пятнадцатью операторами, которые удовлетворяют той же алгебре как и те, что порождали конформную симметрию теории поля. Также есть причина появления пространства S³: рассматриваемая суперсимметричная теория Янга-Миллса содержит набор скалярных полей и набор фермионов, элементы которых преобразуются друг через друга посредством набора симметрий, совпадающего с изомериями S⁵. В итоге, пространство-время $AdS_5 \times S^5$ обладает изомериями в виде симметрий теории поля, что является некоторым указанием правильности соответствия.

Аргументация, основанная на низкоэнергетическом пределе, более простая. Будем рассматривать набор из N D3-бран при большом фиксированном N и будем постепенно увеличивать струнную константу связи g так, что gN будет изменяться от очень малого значения $gN \ll 1$ до очень большого $gN \gg 1$. Рассмотрим низкоэнергетический предел в обоих крайних случаях и сделаем ряд заключений.

Начнем с рассмотрения N совпадающих D3-бран при нулевой константе связи g в плоском десятимерном пространстве-времени. На бранах расположены свободные открытые струны и свободные IIB-замкнутые струны в пространствевремени. Нет никаких взаимодействий. Теперь представим очень малое увеличение g до фиксированного значения, такого что $gN \ll 1$. Следуя нашим рассуждениям из раздела 23.5 заключаем, что гравитационными эффектами можно пренебречь, а D3-браны можно продолжать рассматривать, как если бы они находились в плоском пространстве.

В низкоэнергетическом пределе рассматриваются энергии, меньшие, чем струнный масштаб энергий $1/\ell_s$:

$$E \ll 1/\sqrt{\alpha'}.$$
 (23.53)

Другой способ задать низкоэнергетический предел — это представить, что все значения энергии ограничены снизу при $\alpha' \to 0$:

$$E \leqslant E_0, \quad \alpha' \to 0.$$
 (23.54)

Для энергий, ограниченных соотношением (23.53), это выполняется для достаточно малых α' . В этом пределе массовые состояния открытых струн на D-бранах недопустимы, поэтому физика на бранах управляется безмассовыми U(N)полями Янга—Миллса. При $\alpha' \to 0$ поля замкнутых струн, распространяющиеся по всему пространству-времени, становятся свободными в силу того, что десятимерная гравитационная постоянная $G^{(10)} \sim g^2(\alpha')^4$, определяющая их взаимодействия, (см. (13.80)) стремится к нулю. И наконец, взаимодействия между пространственно-временными полями и U(N)-полями на бранах также стремятся к нулю, потому как они также контролируются $G^{(10)}$. В результате возникают: 1) системы невзаимодействующих замкнутых струн в десятимерном пространстве-времени Минковского; 2) суперсимметричная U(N)-теория Янга—Миллса. В разделе 21.2 было показано, что в U(N)-теории Янга—Миллса одно калибровочное поле действительно отщепляется. То что остается — это взаимодействующая калибровочная теория, являющаяся SU(N)-теорией Янга—Миллса.

Теперь рассмотрим увеличение струнного взаимодействия в системе D3бран. Пока рассматриваются низкоэнергетические возбуждения, то возбуждения на бранах и в пространстве-времени будут продолжать отщепляться. При $gN \gg 1$ становятся важны гравитационные эффекты. Браны обладают энергией и зарядом Рамон—Рамона. Как следствие, N D3-бран описываются нетривиальным решением полевых уравнений для безмассовых полей в IIB-теории струн, практически таким же способом, каким описываются заряженные черные дыры. Решение, описывающее D3-браны, содержит горизонт, расположенный в конце бесконечной горловины.

Чтобы представить такое решение, сперва рассмотрим начало системы координат плоского мира с двумя пространственными измерениями (слева на рис. 23.6). Геометрия плоского пространства такова, что на расстоянии r от начала координат длина окружности с центром в начале координат равна $2\pi r$. По мере при-



Рис. 23.6. Слева: длина окружности с центром в начале координат стремится к нулю при приближении к началу координат. Справа: геометрия горловины, начало координат сместилось на бесконечное расстояние вниз по горловине и длины окружностей с центрами в начале координат стремятся к постоянному значению. Для D3-бранного решения эта поверхность соответствует шестимерному пространству, поперечному к бранам, а окружности на горловине соответствуют 5-сферам, окружающим браны. Радиальное направление в трансверсальном пространстве соответствует линии, начинающейся в точке *P* и спускающейся внутрь горловины ближения к началу координат длина окружности стремится к нулю. Эта ситуация коренным образом изменяется, если геометрия переходит в геометрию горловины (справа на рис. 23.6). Начало координат теперь распложено на бесконечном расстоянии вниз по горловине. Более того, при движении вниз по горловине длина окружности с центром в начале координат стремится к постоянному значению, которое называется периметром горловины. Асимптотически горловина становится бесконечным цилиндром. Окружность на бесконечно удаленном «конце» горловины называется горизонтом. Он расположен на бесконечном расстоянии от любой точки на плоскости.

Теперь можно вернуться к рассмотрению D3-бран, расположенных вдоль x^1 , x^2 и x^3 , но являющимися точками вдоль шести пространственных координат x^4, \ldots, x^9 , поперечных к бране. Нет необходимости рассматривать продольные направления на бранах. В трансверсальном шестимерном пространстве браны окружены пятимерными сферами. Они аналогичны окружностям с центром в начале координат в примере двумерного пространстве. Для достижении горизонта следует преодолеть бесконечное расстояние. По мере продвижения вниз по горловине объем 5-сфер, которые окружают горизонт, стремится к постоянному значению. Ассоциированный с данным объемом радиус R называется радиусом горизонта. Имеет смысл отметить, что геометрия D3-бранного решения совершенно отличается от геометрии черной дыры Шварцшильда. У последней нет бесконечной горизонт находится на конечном расстоянии от любой точки пространства.

Геометрия близи горизонта может быть напрямую получена из метрики для соответствующего гравитационного решения: она оказывается геометрией $AdS_5 \times S^5$. D3-брана больше не присутствует в данной геометрии! Возникновение 5-сферы следовало из нашего обсуждения геометрии горловины с радиусом сферы, равном радиусу горизонта *R*. Пятимерное пространство AdS_5 возникает из четырех пространственно-временных измерений параллельных бране плюс радиальное направление из трансверсального пространства. Остальные поперечные направления образуют сферу S^5 . Такое перераспределение десяти пространственно-временных направлений вблизи горизонта суммируется следующим образом.

Здесь шесть направлений, поперечных к бране, преобразовались в направление r, которое перешло в АдС-пространство, и оставшиеся пять, которые образовали 5-сферу.

Эффект красного смещения, известный для черных дыр, имеет место также и для горизонта. Возбуждения с конечной энергией вблизи горизонта воспринимаются наблюдателем, находящемся на бесконечном удалении, как возбуждения исчезающе малой энергии (данные возбуждения испытывают красное смещение). В результате, низкоэнергетические возбуждения для наблюдателя на бесконечности могут быть двух типов: возбуждения с конечной энергией, испускаемые с горизонта, либо низкоэнергетические (длинноволновые) возбуждения вдалеке от бран. Имеется указание на то, что эти два типа возбуждений отщепляются. Возбуждения, находящиеся далеко, почти никогда не захватываются горизонтом, который выглядит очень маленьким по сравнению с длиной волны возбуждений. Возбуждения вблизи горизонта не могут вырваться на бесконечность. В итоге рассматриваемая конфигурация хорошо аппроксимируется двумя отщепленными системами: 1) система замкнутых струн при низких энергиях на плоском пространстве, представляющим удаленную область; 2) система IIB-суперструн на $AdS_5 \times S^5$ -геометрии вблизи горизонта.

Система N D3-бран была описана в двух режимах: первый режим при $gN \ll 1$ и второй режим при $gN \gg 1$. Два данных режима переходят один в другой при увеличении g, потому как N считается большим фиксированным числом. В низкоэнергетическом пределе каждый режим привел к появлению двух отщепленных систем. На самом деле при низких энергиях отщепление происходит для *всех* значений gN и одной из отщепленных систем является теория свободных струн. Другой отщепленной системой при $gN \ll 1$ является SU(N)-теория Янга—Миллса. Так как эта теория имеет смысл для всех значений gN разумно ожидать, что SU(N)-теория Янга—Миллса является второй отщепленной системой для всех значений константы связи gN. Альтернативно, при $gN \gg 1$ второй отщепленной системой является IIB-теория суперструн на $AdS_5 \times S^5$. Так как эта теория имеет смысл для всех значений для всех значений gN, разумно ожидать, что IIB-теория суперструн на $AdS_5 \times S^5$ является второй отщепленной системой для всех значений gN. Диаграммное описание ситуации представлено на рис. 23.7.

Рассмотрим сначала отщепленную систему замкнутых струн на плоском пространстве-времени. При изменении gN от очень малых до очень больших значений, система замкнутых струн в режиме $gN \ll 1$ переходит систему замкнутых



Рис. 23.7. Диаграммное представление пределов отщепления в системе из N D3-бран. Слева показаны браны при $gN \ll 1$ и две соответствующие отщепленные системы. Справа показаны браны при $gN \gg 1$ и две соответствующие отщепленные системы. В случае, когда две линии, связывающие верхние левый и правый блоки, изображают эквивалентные системы, что отражено в вертикальных отождествлениях, мы имеем соответствие АдС/КТП

струн в режиме $gN \gg 1$. Если gN изменяется от очень больших до очень малых значений, система замкнутых струн в режиме $gN \gg 1$ переходит систему замкнутых струн в режиме $gN \ll 1$, проходя через *один и тот же* набор теорий. Фактически, в пределе низких энергий замкнутые струны не взаимодействуют при всех конечных g, поэтому физически все такие теории одинаковы.

Определив одну из двух отшепленных теорий, рассмотрим вторую. Как упоминалось ранее, есть два кандидата на вторую отщепленную систему: SU(N)-теория Янга-Миллса и IIB-теория суперструн на AdS₅ × S⁵. Простейшая возможность состоит в том, что эти две теории суть одно и то же! Более подробно: при изменении gN от очень малых до очень больших значений SU(N)-теория Янга-Миллса порождает последовательность теорий, которая переводит ее в сложный режим сильной связи, по сути, эквивалентный IIB-системе вблизи горизонта, возникающей из D3-бран при $gN \gg 1$. При изменении gN от очень больших до очень малых значений, упомянутая система вблизи горизонта порождает последовательность теорий, которая переводит ее в сложный гравитационный режим, фактически эквивалентный слабовзаимодействующей SU(N)-теории Янга—Миллса, возникающей из D3-бран при $gN \ll 1$. Более того, две только что обсуждавшиеся цепочки теорий на самом деле эквивалентны, что соответствует вертикальным отождествлениям, показанным на рисунке. Если данный правдоподобный сценарий реализуется, то для любых значений g и N существуют два эквивалентных описания одной и той же физической теории, одно из которых основано на калибровочной теории, а другое — на системе вблизи горизонта, то есть на $AdS_5 \times S^5$ -теории замкнутых суперструн. В этом и состоит соответствие АдС/КТП.

23.7. Параметры соответствия АдС/КТП

Давайте обсудим параметры двух теорий в АдС/КТП-соответствии. В SU(N) теории Янга—Миллса есть два безразмерных параметра: константа связи $g_{\rm YM}$ и константа N. В IIB-теории суперструн на AdS₅×S⁵ также есть два безразмерных параметра: струнная константа связи g и радиус $R/\sqrt{\alpha'}$ сферы S⁵, выраженный в единицах струнной длины. Таким образом:

Янг-Миллс:
$$g_{YM}, N;$$

IIB-струны: $g, \frac{R}{\sqrt{\alpha'}}.$ (23.56)

Из этих четырех параметров два хорошо определены в исходной струнной системе D3-бран: число N D3-бран и струнная константа связи g. Для того чтобы связать g_{YM} и $R \, c \, g$ и N, необходимы два соотношения.

Одно соотношение следует из предела $gN \ll 1$. Ранее утверждалось (см. (13.84)). что квадрат константы связи открытых струн g_0 пропорционален константе связи замкнутых струн $g: g_0^2 \sim g$. Так как открытые струны приводят к калибровочным бозонам SU(N)-теории Янга—Миллса, то взаимодействие этих бозонов определяется константной связи $g_{\rm YM} \sim g_0$. Отсюда следует что $g_{\rm YM}^2 \sim g_0^2 \sim g$. С учетом точного определения различных констант связи имеем

$$g_{\rm YM} = 4\pi g. \tag{23.57}$$

Второе соотношение следует из предела $gN \gg 1$. Каким образом R — размер горизонта — определяется числом бран N и струнной константой связи? Похожий вопрос изучался в разделе 23.5 и было сделано заключение, что характерный гравитационный размер системы D-бран задается (23.52). На самом деле это соотношение применимо и в настоящем случае, и при D - p - 3 = 10 - 3 - 3 = 4 получаем $R^4/\alpha'^2 \approx gN$. Точное соотношение имеет вид

$$\frac{R^4}{\alpha'^2} = 4\pi g N. \tag{23.58}$$

Два рассмотренных выше уравнения определяют соотношения между гравитационными и калибровочными параметрами, необходимые для эквивалентности:

$$g = \frac{1}{4\pi} g_{YM}^2$$
 и $\frac{R^4}{{\alpha'}^2} = g_{YM}^2 N.$ (23.59)

В терминах постоянной 'т Хоофта $\lambda = g_{YM}^2 N$, предыдущие уравнения можно переписать в виде

$$g = \frac{\lambda}{4\pi N} \quad \varkappa \quad \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} = \lambda^{1/4}. \tag{23.60}$$

Струнная константа связи меньше, чем постоянная 'т Хоофта на множитель, пропорциональный N. Более того, в единицах струнной длины, радиус S^5 зависит только от постоянной 'т Хоофта.

Первое соотношение в (23.59) показывает, что слабая связь в теории Янга— Миллса означает слабую связь в теории струн. В силу того что, как правило, с теориями в режиме слабой связи работать проще, может показаться, что соответствие должно легко проверяться: обе теории можно было бы изучить в режиме слабой связи и сравнить результаты. Этот аргумент неверен по двум причинам. Во-первых, постоянная 'т Хоофта — это правильная константа связи в калибровочной теории при больших N, поэтому для простых вычислений необходимо иметь малую λ . Во-вторых, возможность что-нибудь посчитать и сделать количественные выводы на основе теории струн требуют как слабой связи *так и* больших $R/\sqrt{\alpha'}$. Если сфера S^5 имеет большой радиус, ее кривизна мала и теория суперструн может быть с хорошей степенью точности заменена на теорию супергравитации, вычисления в которой более просты. Так как $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$, возникает противоречие: IIB-теория, с которой можно работать, требует большого значения левой части этого соотношения, в то время как калибровочная теория с тем же свойством требует малой правой части.

Упражнение-разминка 23.2. Пусть λ' = α¹²/R⁴ обозначает параметр струнного разложения, который должен быть малым для того, чтобы иметь хорошую IIB-теорию. Как связаны λ и λ'? В рамках соответствия рассмотрите ряд вида (23.44) со стороны теории Янга-Миллса при фиксированных λ и больших N. Что в рамках соответствия является параметром разложения со стороны IIB-теории?

Для соответствия АдС/КТП полезно указать точное значение гравитационной постоянной $G^{(10)} \sim g^2 {\alpha'}^4$ со стороны теории суперструн:

$$16\pi G^{(10)} = (2\pi)^7 g^2 \alpha'^4. \tag{23.61}$$

Теперь можно получить пару интересных результатов.

Упражнение-разминка 23.3. С помощью подходящих соотношений покажите, что

$$G^{(10)} = \frac{\pi^4 R^8}{2N^2}.$$
 (23.62)

Так как $G^{(10)} = \ell_P^8$, где ℓ_P — это десятимерная планковская длина, $R/\ell_P \sim N^{1/4}$. В планковских единицах радиус сферы S^5 не зависит от параметра 'т Хоофта.

Упражнение-разминка 23.4. Покажите, что пятимерная гравитационная постоянная G⁽⁵⁾, возникающая при компактификации на сферу S⁵ радиуса R, равна

$$G^{(5)} = \frac{\pi R^3}{2N^2}.$$
 (23.63)

Несмотря на вызываемые споры, было проведено много нетривиальных тестов соответствия АдС/КТП. Например, набор полей, известных в теории гравитации, был сопоставлен с набором полевых операторов, существующих в теории Янга—Миллса. Также помогает присутствие суперсимметрии, потому что она приводит к существованию независящих от λ величин, известных как защищенные наблюдаемые. Их можно вычислить при нулевой константе связи со стороны калибровочной теории и сравнить с предсказаниями теории гравитации. Было проведено успешное сравнение нескольких таких величин, а также обнаружено несколько новых защищенных наблюдаемых. Если мы считаем, что правильность соответствия АдС/КТП доказана, то затруднения в проверке соответствия становятся его преимуществом: крайне трудно вычислимые в калибровочной теории эффекты при больших λ легко вычисляются в десятимерной теории супергравитации!

Большинство последних работ по соответствию АдС/КТП были посвящены ситуациям, когда теория Янга—Миллса обладает меньшим числом суперсимметрий, либо не обладает ими вообще. Подобные расширения необходимы для получения соответствия, которое можно было бы применить к КХД. К тому же, много работ было посвящено развитию других типов пределов при больших *N*, когда соответствие может быть проверено напрямую в режиме слабой связи.

23.8. Гиперболические пространства и конформная граница

В этом разделе мы начинаем подготовку к изучению геометрии пространств анти-де Ситтера. Нам уже известно пространство Минковского M_{n+1} — плоское пространство с одним временным измерением и n пространственными измерениями. Пространство анти-де Ситтера AdS_{n+1} также имеет одно временное из-

мерение и n пространственных направлений, но является искривленным. На самом деле это пространство-время с отрицательной кривизной. Пространство де Ситтера dS_{n+1} имеет одно временное измерение и n пространственных измерений и его кривизна положительна. Искривленные пространства не всегда легко представить, поэтому начнем с обсуждения искривленных пространств без временных направлений. В таких пространствах метрика положительно определена и, следовательно, все векторы обладают положительным квадратом длины (являются пространственно-подобными). Будем рассматривать гиперболические пространства, которые являются искривленными пространствами без временного измерения. Гиперболическое пространство поможет нам понять пространства анти-де Ситтера.

Сфера S^2 с единичным радиусом является простейшим примером пространства постоянной положительной гауссовой кривизны. Ее можно представить как поверхность в \mathbb{R}^3 с координатами x^1 , x^2 и x^3 , определенную уравнением

$$(x^{1})^{2} + (x^{2})^{2} + (x^{3})^{2} = 1.$$

Данное вложение изометрично: метрика, индуцированная на поверхности S^2 метрикой объемлющего пространства \mathbb{R}^3 (вспомните раздел 6.2), является известной сферической метрикой. Как правило, непосредственной проверкой легко выяснить, обладает ли двумерная поверхность, вложенная в \mathbb{R}^3 в точке p, положительной или отрицательной кривизной. Рассмотрим вектор \vec{n}_p , нормальный к поверхности в точке p и плоскость, которая содержит np. Пересечение этой плоскости с поверхностью определяет линию, проходящую через р. Вращая эту плоскость вокруг оси, направленной вдоль \vec{n}_p , получаем семейство линий, которые лежат на поверхности и проходят через *р* во всех возможных направлениях. Поверхность обладает положительной кривизной, если все эти линии в точке р расположены по одну сторону относительно касательной к поверхности плоскости. Поверхность обладает отрицательной кривизной, если существуют хотя бы две линии, которые расположены с разных сторон плоскости, касательной к поверхности в точке р. На рис. 23.8 показана сфера и две линии проходящие через точку р. На самом деле любая линия, нарисованная согласно процедуре описанной выше, является окружностью с центром расположенным, в центре сферы и все такие линии расположены с внутренней стороны касательной к сфере плоскости. На рисунке справа также показана часть поверхности с отрицательной кривизной в точке р. Горизонтальная окружность расположена с внутренней стороны касательной плоскости, а вертикальная линия — с внешней.

Рис. 23.8. Слева: сфера с положительной кривизной в точке *p* и две линии, расположенные по одну сторону относительно касательной к поверхности плоскости (с внутренней стороны). Справа: многообразие с отрицательной кривизной в точке *p*, на что указывает существование двух линий в точке *p*, которые расположены в противоположных относительно касательной к поверхности плоскости сторонах (одна снаружи, другая — изнутри)



Классическим примером двумерного пространства с постоянной отрицательной кривизной является гиперболическое пространство $\mathbb{H}_2^{(1)}$. Оно, фактически, является пространством с бесконечным объемом и не имеет границы. Первое затруднение с этим пространством состоит в том, что в противоположность сфере S^2 , его невозможно полностью изометрично вложить в \mathbb{R}^3 . Можно вложить определенные части \mathbb{H}_2 и локально они выглядят, как поверхность, показанная на рис. 23.8 справа. Так же, как \mathbb{R}^2 и S^2 , пространство \mathbb{H}_2 однородно: в нем отсутствуют выделенные точки, или что эквивалентно, любая точка p может быть переведена изометрией в любую другую точку q. Для \mathbb{R}^2 изометрией является трансляция, а для S^2 — это вращение.

Хотя \mathbb{H}_2 не может быть изометрически вложено как поверхность в \mathbb{R}^3 , его можно изометрически реализовать как поверхность в трехмерном *пространстве Минковского* M_3 . Такая реализация является весьма тонко устроенной, при этом теряется понятие расстояний. Более конкретно,

объемлющая метрика:
$$ds^2 = -(dz)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$
,
уравнение связи: $-z^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2$. (23.64)

Первое уравнение дает метрику на M_3 , показывая при этом, что z является временной координатой, а x^1 и x^2 — пространственными. Второе уравнение описывает связь, которая задает рассматриваемую поверхность. Так как на переменные трехмерного пространства наложена одна связь, то полученная поверхность двумерна. Данная связь указывает на то, что $z^2 \ge R^2$, так что поверхность обладает двумя не связанными друг с другом частями: одна при $z \ge R$ и другая при $z \le -R$. Пространство \mathbb{H}_2 состоит только из одной части, которую можно задать так: $z \ge R$.

Так как требуется, чтобы поверхность не имела временного направления, ни один касательный к поверхности вектор не может быть времениподобным. Это можно проверить следующим образом. Сперва заметим, что уравнение связи означает что вектор $v^{\mu} = (z, x^{1}, x^{2})$, соответствующий положению точки на поверхности, является времениподобным. Действительно, $v^{\mu}v_{\mu} = v \cdot v = -R^{2}$. Касательным является инфинитезимальный вектор δv^{μ} , такой что $v^{\mu} + \delta v^{\mu}$ по-прежнему принадлежит рассматриваемой поверхности: $(v + \delta v) \cdot (v + \delta v) =$ $= -R^{2} + \mathcal{O}(\delta v^{2})$. Это означает, что $v \cdot \delta v = 0$. Так как два времениподобных вектора не могут быть ортогональными друг к другу, то касательный вектор δv обязан быть пространственноподобным. Именно это мы и хотели показать.

- Упражнение-разминка 23.5. Почему скалярное произведение двух времениподобных векторов всегда отлично от нуля?
- Упражнение-разминка 23.6. Рассмотрите на гиперболоиде точку $(z, x^1, 0)$. Как связаны z и x^1 ? Найдите два ортогональных (пространственноподобных) каса-

¹⁾ Гиперболическое пространство H₂ больше известно в литературе как плоскость Лобачевского, а, соответственно, гиперболическая геометрия, о которой идет речь, как геометрия Лобачевского. — Прим. ред. перевода.

тельных вектора в данной точке. Отметим, что это означает что все касательные векторы пространственноподобны.

Стоит заметить, что для поверхностей, определяемых векторами v постоянной длины, все касательные вектора δv в точке v удовлетворяют $v \cdot \delta v = 0$. Это означает, что вектор v ортогонален к поверхности. Более того, так как v^2 не равно нулю, v не может быть касательным вектором в точке v. Так как нормаль к поверхности является времениподобным вектором, а объемлющее пространство не имеет двух ортогональных времениподобных направлений, то поверхность не может обладать времениподобным касательным вектором.

Преобразования Лоренца сохраняют норму, поэтому, при действии на вектор с концом, расположенным на поверхности, получится другой вектор, конец которого тоже расположен на поверхности. Фактически, любые два вектора v_1 и v_2 , которые заканчиваются на поверхности, могут быть переведены один в другой некоторым лоренцевскием преобразованием: существуют преобразования Лоренца L_1 и L_2 , которые переводят оба вектора v_1 и v_2 в вектор $(R, \vec{0})$, так что $L_1v_1 = L_2v_2$ и $v_2 = (L_2)^{-1}L_1v_1$. Так как преобразования Лоренца сохраняют норму объемлющей метрики, то на поверхности вложения они действуют как изометрии. В итоге, это означает что поверхность вложения является однородным пространством, то есть поверхностью без выделенных точек.

Следующая задача состоит в определении индуцированной метрики на поверхности. Так как при увеличении числа измерений задача не становится более сложной, давайте рассмотрим случай \mathbb{H}_n , который описывается как поверхность в M_{n+1} . С помощью индекса *i*, изменяющегося от 1 до *n*, записываем

объемлющая метрика:
$$ds^2 = -(dz)^2 + dx^i dx^i$$
, $i = 1, 2, ..., n$;
уравнение связи: $-z^2 + x^i x^i = -R^2$. (23.65)

Как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Снова выбираем часть $z \ge R$. Точки в пространстве вложения описываются координатами $(z, x^1, ..., x^n) = (z, \vec{x})$. Забавно отметить, что условие массовой поверхности $p^2 = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2$ определяет гиперболическое пространство \mathbb{H}_3 , вложенное в четырехмерное импульсное пространство.

При стереографической проекции, которая переводит всю часть $z \ge R$ во *внутренность* шара B^n радиуса R, возникает замечательная форма метрики на \mathbb{H}^n . Новые координаты обозначаются ξ^i , где i = 1, ..., n. Мы пользуемся векторными обозначениями $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, величина r определяется как радиальная координата в переменных ξ :

$$r^{2} \equiv \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = (\xi^{1})^{2} + (\xi^{2})^{2} + \ldots + (\xi^{n})^{2}.$$
(23.66)

Для заданной точки P на гиперболоиде рассмотрим линию, проведенную из P в точку $Q = (-R, \vec{0})$, и пересечение P' этой линии с гиперплоскостью z = 0, которая называется экраном. Тогда положим $\xi^i(P) = x^i(P')$, а именно, координаты ξ произвольной точки на гиперболоиде сопоставляются координатам x



Рис. 23.9. Проекция точки гиперболоида P на точку P' на экране z = 0. Координаты ξ точки P сопоставлены координатам x точки P'

ее образа на экране²⁾. Трехмерное представление на рис. 23.9 демонстрирует эту конструкцию в случае \mathbb{H}_2 . Из проекции следует, что $\vec{\xi}$ параллелен \vec{x} , более того, отношение их длин определяется длиной r вектора $\vec{\xi}$: все точки на окружности радиуса r на экране возникают из точек с таким же значением $|\vec{x}|$. Таким образом, записываем

$$x^{i} =
ho(r)\xi^{i} \Rightarrow |\vec{x}| =
ho r,$$
 (23.67)

где $\rho(r)$ — это искомая функция. С помощью подобных треугольников получаем соотношение

$$\frac{r}{R} = \frac{\rho r}{R+z} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\rho}{R+\sqrt{R^2+\rho^2 r^2}},$$
(23.68)

где было использовано

$$z^{2} = R^{2} + \vec{x} \cdot \vec{x} = R^{2} + \rho^{2} r^{2}. \qquad (23.69)$$

Решая относительно ρ , находим

$$\rho = \frac{2R^2}{R^2 - r^2} = \frac{2}{1 - r^2/R^2}.$$
(23.70)

Так как ρ должно быть положительным, условие $r^2 < R^2$ гарантирует, что все возможные значения ρ не содержат ни одного отрицательного значения. Возвращаясь к (23.67), получаем, что координаты x^i и ξ^i связаны друг с другом соотношением

$$x^{i} = \frac{2R^{2}}{R^{2} - r^{2}} \xi^{i}.$$
 (23.71)

Для получения метрики для начала, с помощью (23.69) и (23.70), вычислим z как функцию от r. Находим

$$z = R \, \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}.\tag{23.72}$$

630

²⁾ Ниже дается своеобразное изложение отыскания метрики в гиперболическом пространстве. Более стандартное и понятное см.: Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: URSS, 2001. — Прим. ред. перевода.

Замечая что $dr^2 = 2\xi^i d\xi^i$, простым вычислением находим

$$dz = \frac{4R^3}{(R^2 - r^2)^2} \xi^i d\xi^i. \qquad (23.73)$$

Взяв дифференциал от (23.71), получаем

$$dx^{i} = \frac{2R^{2}}{R^{2} - r^{2}} d\xi^{i} + \frac{4R^{2}}{(R^{2} - r^{2})^{2}} \xi^{i} \xi^{j} d\xi^{j}. \qquad (23.74)$$

Возведение в квадрат dx^i и упрощение приводят к выражению

$$dx^{i} dx^{i} = \frac{4R^{4}}{(R^{2} - r^{2})^{2}} d\xi^{i} d\xi^{i} + \frac{16R^{6}}{(R^{2} - r^{2})^{4}} (\xi^{i} d\xi^{i})^{2}.$$
(23.75)

Наконец, объединяя формулы (23.73) и (23.75) в $ds^2 = -dz^2 + dx^i dx^i$ немедленно получим

$$ds^{2} = \frac{4 d\xi^{i} d\xi^{i}}{(1 - r^{2}/R^{2})^{2}},$$
(23.76)

где было учтено, что $r = \sqrt{\xi^i \xi^i} < R$. Иногда удобно изменением масштаба свести радиус диска к единичному. Для этого берется $\xi^i \to R\xi^i$, что также приводит к $r \to Rr$. Тогда метрика приобретает стандартный вид

$$\mathbb{H}_n$$
 метрика: $ds^2 = \frac{4R^2 d\xi^i d\xi^i}{(1-r^2)^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad r = \sqrt{\xi^i \xi^i} < 1.$ (23.77)

В таком представлении координаты ξ безразмерны, масштаб длины обеспечивается общим множителем, зависящим от R — радиуса кривизны пространства. Гиперболические пространства обладают бесконечным объемом. Фактически, линия проведенная от r = 0 до r = 1 имеет бесконечную длину. Для проверки рассмотрим линию, проходящую из $\xi^{1} = 0$ в $\xi^{1} = \bar{r}$, а все остальные $\xi^{i} = 0$. Тогда длина $\ell(\bar{r})$ данной кривой равна

$$\ell(\bar{r}) = \int_{0}^{\bar{r}} \frac{2R \, d\xi^{1}}{1 - (\xi^{1})^{2}} = R \ln\left(\frac{1 + \bar{r}}{1 - \bar{r}}\right). \tag{23.78}$$

Действительно, при $\vec{r} \rightarrow 1$ длина $\ell(\vec{r})$ расходится.

По всей видимости, трудно говорить о границе $r \to 1$ пространства \mathbb{H}_n , так как она находится на бесконечном расстоянии от любой точки. Однако, существует понятие конформной границы, которое можно сделать точным и которое содержит очень интересную информацию. Модифицируем заданную метрику ds^2 путем умножения на дополнительный фактор $\Omega^2 > 0$ и получим новую метрику $ds'^2 = \Omega^2 ds^2$. Фактор Ω^2 выбран таким образом, чтобы в новой метрике

631

расстояние от любой точки до всех граничных точек являлось конечным. Конформная граница является границей в новой метрике ds'^2 . Эту границу можно легко изучить, потому что она находится на конечном расстоянии. Конформная граница определяется только с точностью до умножения на факторы Ω'^2 , которые сохраняют все граничные точки на конечном расстоянии. Несмотря на то что утверждения насчет точной длины или объема конформной границы лишены смысла, существует некоторая инвариантная формулировка. Для некоторых пространств конформная граница всегда является точкой. Для некоторых пространств конформная граница может быть протяженной. Если рассматриваются пространство-время с нетривиальной конформной границей, то характер векторов, касательных к границе (пространственноподобных, времениподобных, изотропных), является инвариантом, так как знак нормы вектора не может изменяться при умножении на $\Omega^2 > 0$.

В качестве первого примера рассмотрим двумерное плоское пространство \mathbb{R}^2 с координатами $-\infty \leq x, y \leq \infty$ и плоской метрикой

$$ds^{2} = (dx)^{2} + (dy)^{2} = (dr)^{2} + r^{2}(d\theta)^{2},$$

где r и θ — это обычные полярные координаты. Получим конформно связанную с ней метрику путем умножения на квадрат $C(r, \theta) > 0$:

$$ds'^{2} = C^{2}(r,\theta) ds^{2} = C^{2}(r,\theta) ((dr)^{2} + r^{2}(d\theta)^{2}).$$
(23.79)

Если линии, проведенные из начала координат на бесконечность вдоль постоянного θ , обладают в новой метрике конечной длиной, то обязано должно возникнуть ограничение

$$\int_{0}^{\infty} \mathcal{C}(r,\theta) dr < \infty.$$
 (23.80)

Интегрируя по в и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{r} \int_{0}^{2\pi} \mathcal{C}(r,\theta) \ r \ d\theta < \infty.$$
(23.81)

Замечая, что интеграл по θ в точности дает длину $\ell(r)$ окружности с постоянным радиусом r, записываем

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{r} \ell(r) < \infty.$$
 (23.82)

Если $\ell(r)$ имеет ненулевой предел при $r \to \infty$, то интеграл расходится. Поэтому мы получаем, что $\ell(r) \to 0$ при $r \to \infty$ в любой подходящей конформной метрике. Длина окружностей с радиусом, стремящимся к бесконечности, стремится к нулю, и поэтому конформная граница является просто точкой. Конформно сопряженным пространством является сфера с выколотой точкой. В разделе 25.6

похожим способом будет изучаться построение «сферы Римана». Будет также доказано, что конформная граница \mathbb{R}^n при n > 2 — это всегда точка.

Теперь можно вернуться к гиперболическому пространству (23.77). Очевидно, что можно получить нечто очень простое путем умножения на конформный фактор $(1 - r^2)^2/(4R^2)$:

$$ds'^{2} = \frac{1}{4R^{2}}(1-r^{2})^{2} ds^{2} = d\xi^{i} d\xi^{i}. \qquad (23.83)$$

Конформно связанным пространством является внутренность $\xi^i \xi^i < 1$ единичного шара B^n с плоской постоянной метрикой. Конформной границей в этом случае является множество $\xi^i \xi^i = 1$, то есть единичная сфера S^{n-1} . Интересно, что конформная граница гиперболического пространства гораздо более значительна, чем граница плоского пространства.

23.9. Геометрия АдС и голография

В данном разделе мы подробно изучаем геометрию пространств АдС в целях понимания голографических аспектов соответствия АдС/КТП. В оптике голограммой является двумерная пластинка, на которую записан образ трехмерного объекта. В фотографии образ объекта напрямую фокусируется на пленку, в голографии записывается интерференционный узор, оставляемый когерентным светом, отраженным от объекта и когерентным светом эталонного луча. Этот записанный интерференционный узор остается двумерным, однако содержит значительно больше информации, чем фотография. Он содержит всю информацию о всех трех измерениях объекта. Узор позволяет видеть трехмерный образ, обладающий параллаксом: образ выглядит по разному в зависимости от направления, в котором смотрит на него наблюдатель.

В гравитационной физике система, занимающая макроскопическую область пространства, называется голографической, если все ее физическое содержание может быть представлено некоторой теорией, определенной на границе этой области. Более того, требуется, чтобы граничная теория не содержала более одной степени свободы (конечное число состояний) на элемент планковской площади. Голография мотивирована физикой черных дыр: энтропия черной дыры пропорциональна площади горизонта, а не объему области под горизонтом. К тому же, как уже обсуждалось (уравнение (22.124)), эта энтропия воспроизводится, исходя из предположения о том, что горизонт обладает одной степенью свободы на элемент планковской площади горизонта. Соответствие АдС/КТП является более конкретной реализацией голографии. В точности, четырехмерное пространство, в котором живет теория Янга-Миллса может рассматриваться как граница AdS5. SU(N) теория, в которой содержится вся физика внутренности десятимерного пространства-времени, обеспечивает голографическое описание мира с гравитацией. Более того, приближенно можно считать справедливым голографический предел на граничные степени свободы.

Пространство AdS_{n+1} обычно определяется как поверхность, вложенная в плоское пространство $\mathbb{R}^{2,n}$ с двумя временными координатами u и v и про-

странственными координатами x¹:

объемлющая метрика: $ds^2 = -(du)^2 - (dv)^2 + dx^i dx^i$, i = 1, ..., n; уравнение связи: $-u^2 - v^2 + x^i x^i = -R^2$. (23.84)

На пространстве $\mathbb{R}^{2,n}$ существуют обобщенные преобразования Лоренца: линейные преобразования сохраняющие метрику. Из уравнения связи следует, что вектор $V(u, v, \vec{x})$ принадлежит поверхности, если $V \cdot V = -R^2$, где скалярное произведение берется по объемлющей метрике. Вектор V времениподобен. Предыдущие уравнения аналогичны уравнениям, определяющим гиперболическое пространство (23.65), за тем исключением, что теперь есть два временных направления. Так как V задается условием на свою длину, то он нормален к поверхности. Учитывая, что V времениподобен, а объемлющее пространство имеет два ортогональных временных направления, поверхность должна содержать одно временное направление. Фактически, это направление легко представить. Зафиксируем на поверхности специальную точку (u_0, v_0, \vec{x}_0). Очевидно, что

$$u_0^2 + v_0^2 = R^2 + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0. \tag{23.85}$$

Теперь рассмотрим окружность, заданную всеми значениями u и v, которые удовлетворяют

$$u^2 + v^2 = R^2 + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0. \tag{23.86}$$

Эта окружность лежит на поверхности и проходит через точку (u_0, v_0, \vec{x}_0) . Более того, касательные к окружности векторы времени везде времениподобны, потому что они являются векторами с ненулевыми компонентами только вдоль u и v.

Пространство анти-де Ситтера является однородным пространством: ни одна из точек не выделена и любая точка может быть отображена в любую другую точку преобразованием, являющимся изометрией. Действительно, два вектора V_1 и V_2 , обладающие одинаковой нормой $V_1 \cdot V_1 = V_2 \cdot V_2 = -R^2$, всегда могут быть отображены друг в друга с помощью обобщенного преобразования Лоренца (читатель может попытаться доказать это утверждение). Чтобы убедиться в том, что поверхность нигде не содержит двух независимых направлений, достаточно проверить, что в одной точке не существует двух ортогональных времениподобных направлений. Это легко можно сделать.

Упражнение-разминка 23.7. Рассмотрите на поверхности точку (R, 0, 0). Покажите, что в данной точке поверхность не содержит двух ортогональных времениподобных направлений.

Пространство AdS можно представить с помощью двумерной поверхности, каждая точка которой — это сфера. Запишем уравнение связи в виде

$$u^2 + v^2 = R^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}$$
 (23.87)

и нарисуем график этого пространства с помощью осей u, v и $\rho = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$. Так как значение ρ фиксировано, точка двумерной поверхности, показанной на рис. 23.10, определяется u и v. Чтобы увидеть пространство АдС целиком, необходимо



Рис. 23.10. Пространство AdS_{n+1} , описываемое как двумерная поверхность, каждая точка которой является половиной сферы $S^{n-1}(\rho)$. На горизонтальных осях ρ растет от нуля до бесконечности как слева, так и справа. Полусферы в точках с равными u и v (как показано на рисунке) должны склеиваться и образовывать единую сферу $S^{n-1}(\rho)$

в каждой точке поверхности прикрепить сферу S^{n-1} , определенную точками \vec{x} , которые удовлетворяют $\vec{x} \cdot \vec{x} = \rho^2 = u^2 + v^2 - R^2$. Как показано на рисунке, поверхность тянется как направо, так и налево и в обоих областях ρ изменяется от 0 до ∞ ! Если бы мы нарисовали это пространство в виде области, которая тянется только направо, то можно было бы придти к неправильному выводу, что у пространства есть граница в точке $\rho = 0$, либо, эквивалентным образом, на окружности $u^2 + v^2 = R^2$. Такой вывод подозрителен, потому как на этой окружности сферы S^{n-1} имеет нулевой радиус. Так как ρ дважды пробегает каждое значение, существует две точки, соответствующие каждому значению u, v. Совместность требует, чтобы поверх каждой из этих двух точек была расположена *половина* сферы S^{n-1} . Сфера разрезается на две части и каждая половина располагается поверх каждой точки, учитывая то, что эти половины должны быть склеены.

Маломерный аналог помогает представить ситуацию. Представим сигару как окружность вдоль полубесконечной прямой $r \ge 0$, так, как показано на рис. 23.11

Ŧ



Рис. 23.11. Сверху: сигара как набор окружностей вдоль полупрямой *r* ≥ 0, радиус которых стремится к нулю при *r* → 0. Снизу: то же самое пространство, представленное для *r*, растущего от нуля до бесконечности как слева так и справа. Теперь над каждой точкой расположена половина окружности, две половины окружности в точке *r* склеиваются и образуют единую окружность

сверху. Радиус окружности равен нулю при приближении к точке $\tau \to 0$, где сигара заканчивается. Тем не менее, сигара не имеет границы в данной точке. Для показанного на рисунке снизу описания пространства, аналогичного тому, что мы использовали в случае АдС, τ пробегает значения в обоих направлениях, а в симметричных точках расположены половинки окружности S^1 .

На пространстве АдС было выявлено времениподобное направление, однако, на самом деле, было найдено нечто странное, а именно замкнутые времениподобные кривые. Действительно, окружности (u, v) в (23.86) замкнуты и всюду имеют времениподобные касательные векторы. Это не тот тип пространства, который нам нужен; во вселенной с замкнутыми времениподобными интервалами можно было бы путешествовать в течение некоторого времени, после чего вернуться в момент времени отправления. То, что иногда называется «полным» пространством АдС, а мы будем называть просто пространством АдС, является пространством, в котором времениподобные кривые разматываются и становятся незамкнутыми линиями. Полное пространство АдС можно представлять как пространство, накрученное на поверхность на рис. 23.10 бесконечное число раз.

Теперь определим метрику на AdS_{n+1} . Начнем с явной параметризации временной координаты посредством соотношений

$$u = z\cos t, \quad v = z\sin t, \tag{23.88}$$

где u и v заменят время t и дополнительную координату z. Из этих соотношений следует, что

$$u^{2} + v^{2} = z^{2}$$
 и $(du)^{2} + (dv)^{2} = (dz)^{2} + z^{2}(dt)^{2}$. (23.89)

Теперь можно использовать эти уравнения в (23.84) для приведения метрики пространства вложения и уравнения связи к следующему виду.

Метрика пространства вложения:

$$ds^2 = -z^2 (dt)^2 - (dz)^2 + dx^i dx^i, \quad i = 1, ..., n;$$
 (23.90)
уравнение связи: $-z^2 + x^i x^i = -R^2.$

Помимо дополнительного $-z^2(dt)^2$, появляющегося в метрике, предыдущие выражения являются в точности уравнениями (23.65) гиперболического пространства. В любой фиксированный момент времени (dt = 0) пространственная геометрия AdS совпадает с геометрией \mathbb{H}_n . Именно таким образом гиперболическое пространство появляется в геометрии анти-де Ситтера.

Осталось совсем немного для того, чтобы найти полную метрику. Как и прежде, мы используем координаты ξ^i и записываем через них как x^i , так и z. Значение z было определено в (23.72) и часть метрики $-(dz) + dx^i dx^i$ была вычислена в (23.76). Таким образом находим, что метрика в (23.9) принимает вил

$$ds^{2} = -\frac{(R^{2} + r^{2})^{2}}{(R^{2} - r^{2})^{2}} R^{2} (dt)^{2} + \frac{4R^{4} d\xi^{i} d\xi^{i}}{(R^{2} - r^{2})^{2}}.$$
 (23.91)

В качестве последнего шага делаем замену $\xi^i \to R\xi^i$ и получаем метрику на AdS_{n+1}.

AdS_{n+1} метрика:
$$ds^2 = R^2 \left[-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 (dt)^2 + \frac{4 d\xi^i d\xi^i}{(1-r^2)^2} \right].$$
 (23.92)

Здесь, как и прежде, $r^2 = \xi^i \xi^i$ и i = 1, 2, ..., n. Из анализа \mathbb{H}_n уже известно, что в любой фиксированный момент времени расстояние от любой точки до границы $r \to 1$ бесконечно. Что интересно, так это то, что свет достигает границы за конечное время. Предполагая, что луч света распространяется в направлении ξ^i , условие $ds^2 = 0$ приводит к выражению

$$\frac{1+r^2}{1-r^2} dt = \frac{2 d\xi^1}{1-r^2} \Rightarrow \frac{d\xi^1}{1+(\xi^1)^2} = \frac{1}{2} dt.$$
(23.93)

Интегрируя при $\xi^1 = 0$ для t = 0, находим $\xi^1 = tg(t/2)$, показывающее что граничная точка ξ^1 достигается за $t = \pi/2$.

Чтобы понять конформные свойства пространства и его границы, воспользуемся метрикой (23.92) и определим конформно связанную метрику

$$ds'^{2} = \frac{(1-r^{2})^{2}}{4R^{2}} ds^{2} = -\left(\frac{1+r^{2}}{2}\right)^{2} (dt)^{2} + d\xi^{i} d\xi^{i}. \qquad (23.94)$$

Метрика ds'^2 описывает пространственный *n*-мерный шар (внутренность $\xi^i \xi^i = 1$) и временную координату. Вблизи r = 1 имеем

$$ds^{\prime 2} \approx -(dt)^2 + d\xi^i d\xi^i, \quad r \to 1, \qquad (23.95)$$

и конформная граница принимает вид $\mathbb{R} \times S^{n-1}$, где фактор \mathbb{R} соответствует времени, а фактор S^{n-1} соответствует границе $\xi^i \xi^i = 1$ гиперболических пространственных сечений. Для AdS₃ граница $\mathbb{R} \times S^1$ является поверхностью цилиндра, а полное пространство-время находится внутри него (см. рис. 23.12). Нетривиальный факт состоит в том, что пространство-время АдС обладает конформной границей и с временным и пространственным направлениями. Например, конформная граница пространства Минковского содержит только изотропные направления (см. задачу 23.4).

Для пространства-времени AdS_5 границей является $\mathbb{R} \times S^3$. Калибровочная теория, дуальная к IIB суперструнному бэкграунду, живет на этой границе. Масштабный произвол конформной границы согласуется



Рис. 23.12. Конформный вид AdS_3 . Конформная граница является поверхностью $\mathbb{R} \times S^1$ цилиндра, где \mathbb{R} — это время, а S^1 конформная граница пространственных сечений \mathbb{H}_2 . Полное пространство AdS_3 конформно внутренности цилиндра. с масштабной инвариантностью теории поля. Физическое содержание калибровочной теории не зависит от радиуса 3-сферы. Если положить радиус равным бесконечности, то граница станет четырехмерным пространством Минковского.

Понимания AdS_5 -голографии можно достичь, рассматривая ее геометрию при фиксированном времени, которая является геометрией \mathbb{H}_4 . Вычислим объем и граничную площадь сферических подмножеств $S(\bar{r})$ в \mathbb{H}_4 , которые содержат все точки с $r \leq \bar{r}$. В пределе $\bar{r} \rightarrow 1 S(\bar{r})$ стремится к полному пространственному сечению AdS_5 . Площадь границы $S(\bar{r})$ равна «площади» $A_3(\bar{r})$ 3-сферы, расположенной в $r = \bar{r}$. Из метрики (23.92) следует, что физическая длина получается умножением координатной длины на $2R/(1-r^2)$. Отсюда следует, что

$$A_{3}(\bar{r}) = \left[\frac{2R}{1-\bar{r}^{2}}\right]^{3} \operatorname{Vol}(S^{3}(\bar{r})) = \left[\frac{2\bar{r}R}{1-\bar{r}^{2}}\right]^{3} \cdot 2\pi^{2}.$$
(23.96)

Объем $V_4(\bar{r})$ поверхности $\mathcal{S}(\bar{r})$ задается выражением

$$V_4(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \left[\frac{2R}{1-\bar{r}^2} \right]^4 \operatorname{Vol}\left(S^3(\bar{r})\right) dr = 2\pi^2 (2R)^4 \int_0^{\bar{r}} \frac{r^3 dr}{(1-r^2)^4}.$$
 (23.97)

Этот интеграл легко берется и ответ имеет вид

$$V_4(\bar{r}) = 2\pi^2 (2R)^4 \frac{3\bar{r}^2 - 1}{12(1 - \bar{r}^2)^3} = \frac{R}{6} \frac{3\bar{r}^2 - 1}{\bar{r}^3} \left[\frac{2\bar{r}R}{1 - \bar{r}^2}\right]^3 \cdot 2\pi^2.$$
(23.98)

Как и ожидалось, площадь $A_3(\bar{r})$ и объем $V_4(\bar{r})$ расходятся при $\bar{r} \to 1$. Однако это не касается их отношения

$$\frac{A_3(\bar{r})}{V_4(\bar{r})} = \frac{6}{R} \frac{\bar{r}^3}{3\bar{r}^2 - 1} \implies \lim_{\bar{r} \to 1} \frac{A_3(\bar{r})}{V_4(\bar{r})} = \frac{3}{R}.$$
 (23.99)

Поскольку рассматриваемые подмножества при неограниченном увеличении покрывают \mathbb{H}_4 , площадь границы и внутренний объем становятся пропорциональными друг другу! Константой пропорциональности является радиус кривизны R пространства АдС. В плоском пространстве четырехмерная область характерного размера L будет иметь площадь $A_3 \sim L^3$ и объем $V_4 \sim L^4$. Отношение $A_3/V_4 \sim 1/L$ стремится к нулю при неограниченном росте размера области. Именно поэтому голографию трудно реализовать, граница слишком мала, чтобы вместить физическое содержание объема. Тем более это становится проблематичным в АдС-пространстве, где отношение площади к объему не стремится к нулю.

Можно и дальше продолжить изучение, если ввести регулятор, который делает конечными как площадь границы, так и число степеней свободы. Рассмотрим малое число $\delta \ll 1$ и сферу радиуса $\bar{r} = 1 - \delta$. Из (23.96) следует, что площадь этой сферы A_3^{δ} равна

$$A_3^{\delta} \equiv A_3(1-\delta) \approx 2\pi^2 \frac{R^3}{\delta^3}.$$
 (23.100)

Теперь рассмотрим граничную теорию при $\bar{r} = 1$. Чтобы оценить число степеней свободы $N_{\text{ст. св.}}$ в этой теории, выбирем δ в качестве параметра обрезания на небольших расстояниях. Представим, что имеется одна степень свободы на малый куб *координатного* объема δ^3 . Так как граница имеет координатный объем порядка единицы, имеем $1/\delta^3$ степеней свободы. Граничная теория состоит из SU(N)-полей, поэтому оценка домножается на N^2 , приводя тем самым к окончательному ответу: N^2/δ^3 степеней свободы. Теперь проверим, что это число, $N_{\text{ст. св.}}$ степеней свободы, соответствует голографическому ожиданию для степени свободы на элемент поверхности планковского размера. Сперва отметим, что

$$N_{\rm ct. \, cB.} \sim \frac{N^2}{\delta^3} \sim \frac{N^2 A_3^{\delta}}{R^3}.$$
 (23.101)

Вспоминая (23.63), откуда следует что $R^3 \sim G^{(5)} N^2$, находим

$$N_{\rm ct.\,cb.} \sim \frac{A_3^{\delta}}{G^{(5)}}.$$
 (23.102)

Это и есть результат, ожидаемый с точки зрения голографии. Если принять, что полный объем пространства V в IIB-теории задается произведением $V_4^{\delta} = V_4(1-\delta)$ на объем $V_5 \sim R^5$ сферы S^5 , то число степеней свободы на единичный объем ведет себя как

$$\frac{N_{\rm cr. \, cs.}}{V} \sim \frac{A_3^{\delta}}{V_4^{\delta}} \frac{1}{R^5 G^{(5)}} \sim \frac{1}{R} \frac{1}{G^{(10)}}.$$
(23.103)

При больших R число степеней свободы, приходящихся на единичный объем, в теории очень мало. Если увеличить число бран, R возрастет и отношение $N_{\text{ст. св.}}/V$ можно сделать произвольно малым. Эта теория в объеме с такой малой плотностью степеней свободы является теорией струн с фиксированной струнной длиной $\sqrt{\alpha'}$.

23.10. АдС/КТП при конечной температуре

Пространство AdS_5 поддерживает существование черных дыр в том же смысле, что и пространство Минковского: геометрия пространства деформируется присутствием черной дыры, однако, по мере отдаления от нее, пространственно-временная метрика стремится к исходной. Черная дыра Шварцшильда внутри AdS₅ описывается метрикой:

$$ds^{2} = -\left(1 + \frac{r^{2}}{R^{2}} - \frac{r_{0}^{2}}{r^{2}}\right)(dt)^{2} + \left(1 + \frac{r^{2}}{R^{2}} - \frac{r_{0}^{2}}{r^{2}}\right)^{-1}(dr)^{2} + r^{2} d\Omega_{3}^{2}. \quad (23.104)^{\frac{3}{2}}$$

Приведенная выше метрика описывает пространство, которое *асимптотически* является пространством АдС. А именно, при $r \gg r_0$,

$$r \gg r_0$$
: $ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)(dt)^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2 d\Omega_3^2$, (23.105)

что является метрикой пространства AdS₅ с радиусом R, записанной в виде, отличающемся от рассмотренного ранее (см. задачу 23.5). Таким образом, в (23.104) R обозначает радиус асимптотического AdS₅. Присутствие параметра длины r_0 говорит нам, что мы имеем дело с черной дырой. Параметр длины r_0 можно записать в терминах массы M черной дыры и пятимерной гравитационной постоянной: $r_0^2 \sim G^{(5)}M$. Фактически, при $R \to \infty$ метрика (23.104) становится метрикой черной дыры в пятимерном пространстве Минковского с радиусом Шварцшильда r_0 . И наконец, $d\Omega_3^2$ обозначает метрику на 3-сфере S^3 единичного радиуса.

Радиус Шварцшильда r_+ АдС черной дыры — это значение r, при котором коэффициент при $(dt)^2$ в метрике равен нулю:

$$1 + \frac{r_+^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r_+^2} = 0.$$
 (23.106)

Решая это уравнение относительно r_{+}^2 , находим

$$\mathbf{r}_{+}^{2} = \frac{\mathbf{R}^{2}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\mathbf{r}_{0}^{2}}{\mathbf{R}^{2}}} - 1 \right).$$
(23.107)

Для фиксированного АдС масштаба R, радиус Шварцшильда r_+ является функцией r_0 , либо, эквивалентным образом, функцией массы черной дыры. При $r_0 \ll R$ можно видеть, что $r_+ \sim r_0$, а при $r_0 \gg R$ находим $r_+ \sim \sqrt{r_0 R}$. Фактически, как можно видеть переписав выражение (23.107) в виде

$$\frac{r_{+}^{2}}{r_{0}^{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4r_{0}^{2}}{R^{2}}}} \leq 1, \qquad (23.108)$$



Рис. 23.13. Зависимость радиуса Шварцшильда r_+ АдС черной дыры от ее массы, выраженной через r_0

радиус r_+ всегда меньше, чем r_0 . Масштаб R асимптотического АдС-пространства не является пределом для размера черной дыры. Большая черная дыра — это та, для которой $r_+ \gg R$; маленькая черная дыра — это та, для которой $r_+ \ll R$. График r_+ как функции r_0 показан на рис. 23.13.

Представленное здесь решение для черной дыры обладает температурой Хокинга $\overline{T}_{\rm H}$. Вычисление этой температуры дает:

$$\overline{T}_{\rm H} = \frac{R^2 + 2r_+^2}{2\pi r_+ R^2}.$$
 (23.109)

Хотя обоснование данного результата требует знаний, выходящих за рамки этой книги, полезно знать, что данная температура возникает следующим образом из общей формулы.



Рис. 23.14. Температура Хокинга $\tilde{T}_{
m H}$ АдС-черной дыры (умноженная на АдС радиус R), представленная как функция радиуса Шварцшильда r_+ , масштаб которого уменьшен делением на R. Для каждого значения температуры Хокинга, превышающей значение T_0 , существуют две черные дыры. Температура T_1 определяет переход Хокинга—Пейджа

Упражнение-разминка 23.8. Рассмотрите метрику

$$ds^{2} = -f(r)(dt)^{2} + (f(r))^{-1}(dr)^{2} + \dots$$

с функцией f(r) от радиальной координаты, определяющей радиус горизонта r_+ посредством $f(r_+) = 0$. Температура Хокинга \overline{T}_H , соответствующая данному гравитационному решению, задается формулой $\overline{T}_H = f'(r_+)/(4\pi)$. Примените этот результат к (23.104) и получите (23.109).

У температуры (23.109) есть интересные предельные значения. Для маленьких черных дыр находим:

$$\overline{T}_{\rm H} \approx rac{1}{2\pi r_+}$$
 при $r_+ \ll R.$ (23.110)

В пространстве Минковского температура черной дыры обратно пропорциональна радиусу Шварцшильда (см. (22.120)), т. е. малые черные дыры оказываются горячими. Данный результат был воспроизведен в (23.110), потому что для маленьких черных дыр кривизной пространства АдС можно пренебречь. Более удивительным оказывается поведение больших черных дыр. В этом случае

$$\overline{T}_{\mathrm{H}} \approx \frac{r_{+}}{\pi r^{2}}$$
 при $r_{+} \gg R.$ (23.111)

Такая зависимость не является обычной: как только черная дыра стала достаточно большой, ее температура начинает расти при увеличении ее размера. В этом состоит важное качественное свойством черных дыр в пространстве АдС. На рис. 23.14 показан примерный график температуры $\overline{T}_{\rm H}$ как функции от r_+/R .

 \textcircled Упражнение-разминка 23.9. Покажите, что для фиксированного радиуса кривизны R, все черные дыры имеют температуру \overline{T}_{H} , удовлетворяющую неравенству

$$\overline{T}_{\mathrm{H}} \ge T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R}, \qquad (23.112)$$

где нижний предел T_0 реализуется при $r_+/R = 1/\sqrt{2}$. Данная информация отображена на рис. 23.14.

Разумно ожидать, что АдС/КТП-соответствие распространяется на случай черной дыры в отныне асимптотическом пространстве АдС. Действительно, имеется очевидный кандидат на дуальную калибровочную теорию: SU(N)-теория Янга—Миллса при конечной температуре $\overline{T}_{\rm H}$, температуре черной дыры. Метрика (23.104) при фиксированном r принимает вид

$$ds^2 \approx \frac{r^2}{R^2} \left[-(dt)^2 + R^2 d\Omega_3^2 \right].$$
 (23.113)

Также, как при обсуждении, приведенном ниже формулы (23.95), мы видим существование границы $\mathbb{R} \times S^3$, где сфера имеет радиус R. Несмотря на то что этот был радиус несущественен при температуре, равной нулю, теперь он становится существенен. Радиус R является радиусом сферы, на которой живет теория поля при температуре \overline{T}_{H} .

Нельзя безнаказанно перемасштабировать временную координату t в (23.113), потому что при ненулевой температуре временная координата несет информацию о температуре, что определяет масштаб энергий. Конформный произвол приведенной выше метрики по прежнему сохраняется: умножение на λ^2 фактора в скобках равносильно замене радиуса на λR , а растяжение времени $t \rightarrow \lambda t$ — замене температуры на $\overline{T}_{\rm H}/\lambda$. При отождествлении дуальной теории поля про-изведение $R\overline{T}_{\rm H}$ радиуса и температуры является единственной инвариантной комбинацией.

В качестве теста рассматриваемого соответствия, вычислим энтропию в теории поля с конечной температурой и, надеясь на совпадение, сравним ее с энтропией (большой) черной дыры. Оба этих числа являются конечными (не бесконечными!). Энтропия в теории поля имеет конечную плотность, и сама теория живет в пространстве конечного объема, а черная дыра обладает горизонтом с конечной площадью. Давайте начнем с вычисления энтропии $S_{\rm YM}$ в теории поля. Во-первых, напомним что *плотность* энтропии s_{γ} фотонного газа в обычном трехмерном пространстве при температуре T задается выражением

$$s_{\gamma} = \frac{2}{45} \pi^2 T^3 \cdot 2, \qquad (23.114)$$

где последний множитель 2 возникает в силу того, что фотон обладает двумя безмассовыми степенями свободы. В SU(N)-теории поля полная энтропия равна

$$S_{\rm YM} = \frac{2}{45} \pi^2 \overline{T}_{\rm H}^3 \cdot \left(8 + 8 \cdot \frac{7}{8}\right) N^2 \cdot (2\pi^2 R^3). \tag{23.115}$$

Последний множитель является объемом трехмерной сферы радиуса R, на которой живет данная теория поля. В пределе малых значений константы связи 'т Хоофта, безмассовые частицы в SU(N)-теории очень слабо взаимодействуют и полная энтропия получается сложением отдельных вкладов. В спектре теории содержится восемь бозонных степеней свободы и восемь фермионных степеней свободы, повторяющихся $N^2 - 1$ раз, либо N^2 раз, согласно тому уровню точности, на котором мы находимся. Более того, в энтропию фермионные степени свободы дают вклад 7/8 от вклада бозонных степеней свободы. Все это объясняет результат, приведенный в (23.115). Упрощая это выражение, получаем

$$S_{\rm YM} = \frac{2}{3} \pi^2 N^2 \overline{T}_{\rm H}^3 \cdot (2\pi^2 R^3), \quad \lambda \ll 1.$$
 (23.116)

С точки зрения теории гравитации энтропия черной дыры $S_{\rm BH}$ задается «площадью» горизонта, деленного на пятимерную постоянную Ньютона $G^{(5)}$:

$$S_{\rm BH} = \frac{A_{\rm hor}}{4G^{(5)}}.$$
 (23.117)

Горизонт является местоположением точек с $r = r_+$. Последнее слагаемое в метрике (23.104) показывает, что горизонт является трехмерной сферой радиуса r_+ , поэтому $A_{\rm hor} = 2\pi^2 r_+^3$. Совместно со значением $G^{(5)}$ из (23.63) и зависимостью r_+ от $\overline{T}_{\rm H}$ в (23.111), это приводит к выражению

$$S_{\rm BH} = \frac{2\pi^2 r_+^3}{\frac{2\pi^2 R^3}{N^2}} = \frac{N^2 2\pi^2 R^3 r_+^3}{2\pi R^6} = \frac{1}{2} \pi^2 N^2 \overline{T}_{\rm H}^3 \cdot (2\pi^2 R^3), \quad \lambda \gg 1.$$
(23.118)

Каждый раз, когда используется картина мира с черными дырами, неявно подразумеваются большие значения λ . Результат (23.118) находится в качественном соответствии с оценкой из теории поля (23.116). Для этого соответствия существенным был линейный рост температуры при росте радиуса черной дыры. Тем не менее, мы получаем

$$S_{\rm BH} = \frac{3}{4} S_{\rm YM}.$$
 (23.119)

так что соответствие не является точным. Оно и не должно быть таковым: в теории поля предполагалось, что постоянная 'т Хоофта λ мала, в то время как из теории гравитации предполагалось, что λ принимает большие значения. Есть надежда, что точное вычисление для произвольных λ даст энтропию, уменьшающуюся от значения, которое легко получается в теории поля при нулевой константе связи до значения, которое легко получается в модели черной дыры при большой константе связи.

Есть еще одна отличительная черта соответствия при конечной температуре: в (23.112) было замечено, что в заданном пространстве АдС с фиксированным радиусом кривизны R все черные дыры имеют температуру Хокинга $\overline{T}_{\rm H} \ge T_0$ (см. рис. 23.14). Рассмотрим SU(N)-калибровочную теорию при некотором большом значении константы связи, которая дуальна теории в АдС с радиусом кривизны R. Для температур, меньших T_0 , теория поля не может иметь дуального описания в виде черных дыр, так как черные дыры отсутствуют. Дуальной теорией в этом случае является само нагретое пространство АдС, т. е. пространство АдС, заполненное газом частиц при некоторой специальной температуре. Теория поля при таких низких температурах является аналогом фазы конфайнмента: энтропия теории порядка $\mathcal{O}(N^0)$. Для температур, больших чем T_0 , имеется две черные дыры: любая горизонтальная линия над T_0 на рис. 23.14 разрезает кривую графика в двух точках со значениями r_+/R меньшими, чем $1/\sqrt{2}$, и большими $1/\sqrt{2}$. Нагретое пространство АдС также остается возможным кандидатом на роль гравитационного фона. Оказывается, что для температур T в интервале

$$T_0 \leqslant T \leqslant T_1$$
 c $T_1 = \frac{3}{2\pi R}$, (23.120)

нагретое пространство АдС остается термодинамически предпочтительным состоянием — его свободная энергия ниже свободной энергии любого чернодырного фона. Теория поля остается в фазе конфайнмента при $T \leq T_1$. Отметим что T_1 лишь ненамного превышает T_0 (см. рис. 23.14).

Упражнение-разминка 23.10. Каковы значения r₊/R для двух черных дыр, существующих при температуре T₁? Сравните ответ с рис. 23.14.

При превышении температурой значения T_1 , термодинамически предпочтительный фон перестает быть нагретым пространством АдС и становится большей черной дырой — это процесс называется *переходом Хокинга—Пейджа*. Фактически, среди существующих трех возможностей, меньшая черная дыра всегда менее предпочтительна; так же, как черные дыры в пространстве Минковского, она нестабильна при испарении. При температуре T_1 сильновзаимодействующая калибровочная теория при больших N переходит из фазы конфайнмента в фазу *деконфайнмента*: энтропия становится порядка $O(N^2)$, указывая на высвобождение элементарных степеней свободы. Дуальным описанием калибровочной теории в фазе деконфайнмента является (большая) АдС-черная дыра.

Эти рассуждения о конечных температурах, когда пространство-время с черной дырой является не совсем пространством анти-де Ситтера, указывают на более общие утверждение о соответствии АдС/КТП. Теперь соответствие может быть сформулировано как эквивалентность четырехмерной суперсимметричной SU(N)-калибровочной тоерии и IIB-теории суперструн в пространстве с геометрией, асимптотически являющейся геометрией AdS₅ × S⁵. Данное утверждение, очевидно, применимо как в случае нулевой, так и в случае конечной температуры. Были найдены дальнейшие примеры асимптотических AdS₅ × S⁵-пространств, которые соответствуют некоторым частным состояниям в теории поля.

23.11. Кварк-глюонная плазма

В экспериментах на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (RHIC), находящемся в Брукхейвенской национальной лаборатории было получено, с очень коротким временем жизни, состояние КХД в фазе деконфайнмента. Физики ускоряли и сталкивали друг с другом ядра золота. В системе отсчета центра масс каждый нуклон достигает энергии примерно в 100 ГэВ, 197 нуклонов каждого атомного ядра золота несут энергию порядка 20 ТэВ. При столкновении возникает кварк-глюонная плазма (КГП) — сильновзаимодействующая система кварков и глюонов в фазе деконфайнмента.

Отвлечемся на время и обсудим масштабы энергий и расстояний, существенные при данных столкновениях. Ядра в 100 000 раз меньше атомов, размер которых примерно 10^{-10} м. Тем самым естественной единицей измерения при описании ядер является фемтометр (фм): 1фм = 10^{-15} м. Приближенная формула выражает радиус ядра r через атомное число A нуклонов: $r \simeq r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1,2$ фм. Время также удобно измерять в фемтометрах, используя при этом скорость света как единицу пересчета. Таким образом, время 1 фм равно $1/3 \times 10^{-23}$ с.

Упражнение-разминка 23.11. Убедитесь, что оценка ядерного радиуса приводит к плотности энергии ядра, равной примерно 0,13 ГэВ/фм³, а также, что радиус ядер атомов золота примерно равен 7 фм.

Решеточные³⁾ вычисления указывают на то, что деконфайнмент в КХД происходит при критической температуре $T_c \approx 175$ МэВ, с неопределенностью примерно в 10%, вызванной систематической погрешностью. Данная температура соответствует примерно двум триллионам градусов по Кельвину и является температурой Вселенной спустя 10^{-11} с после Большого Взрывы. При этой температуре плотность энергии плазмы равна 0,7 ГэВ/фм³, что примерно в пять-шесть раз больше плотности ядерной материи.

После столкновения ядер на RHIC, они обладают фактором Лоренца $\gamma \sim 100$, а в системе отсчета центра масс выглядят как тонкие блинчики с толщиной меньшей, чем 14фм/100 = 0,14 фм. КГП образуется, когда эти блинчики проходят друг через друга и, как считается, достигает теплового равновесия за время всего 1 фм. КГП живет не более чем 15 фм, и за это время кварки и глюоны рекомбинируют в адроны, которые в последствии регистрируются детекторами. Путем измерения энергий этих адронов делается оценка плотности энергии: в КГП за время 1 фм она равна, по меньшей мере, 5 ГэВ/фм³. Для столкновений, *направленных вперед*, плазма за это время расширяется до цилиндра длины 2 фм и радиуса, равного радиусу ядер золота.

Упражнение-разминка 23.12. Вычислите энергию в КГП для направленных вперед столкновений и покажите, что она равна примерно 4% от энергии, доступной в системе отсчета центра масс

Также можно оценить температуру. Вспоминая, что плотность энергии газа безмассовых частиц равна $U \sim T^4$, имеем

$$\left(\frac{T_{\rm RHIC}}{T_c}\right)^4 = \frac{5 \,\, \Gamma \Rightarrow B/\Phi M^3}{0,7 \,\, \Gamma \Rightarrow B/\Phi M^3} \,\, \Rightarrow \,\, T_{\rm RHIC} \approx 1.6 \,\, T_c. \tag{23.121}$$

Из этой оценки следует, что за время, равное 1 фм, температура КГП существенно превышает температуру деконфайнмента. На Большом адронном коллайдере (БАК) в ЦЕРНе можно достичь температур примерно в 5 T_c .

³⁾ Решеточными принято называть вычисления в рамках решеточных моделей теории поля. — Прим. ред. перевода.

В целом, столкновения не центральны и изначально КГП образуется приблизительно в виде эллипса, определяемого пересечением двух «блинчиков» со смещенными центрами. Направление импакт-параметра находится вдоль короткой оси эллипса. Рассмотрим частицы, образованные при столкновении с импульсом, ортогональным направлению пучка. Вдоль направления короткой оси эллипса возникает больше частиц, чем вдоль направления длинной оси. Численные эксперименты указывают на то, что что анизотропия согласуется с предположением о том, что КГП является жидкостью с крайне малой вязкостью. В капле жидкости в центре давление максимально, а на краях оно равно нулю. Градиент давления больше вдоль короткой оси эллипса, что приводит к бо́льшему числу частиц, испущенных в этом направлении.

Естественно поинтересоваться: можно ли изучать КГП с помощью конечнотемпературной версии АдС/КТП-соответствия? На первый взгляд это не кажется правдоподобным, потому как КХД, являющаяся несуперсимметричной SU(3)-калибровочной теорией, весьма отлична от суперсимметричной SU(3)-калибровочной теории. Тем не менее, имеется набор фактов, которые делают данное предположение более оправданным. Во-первых, КГП — это система с сильным взаимодействием: даже при N = 3 можно считать, что возникает большая постоянная 'т Хоофта $\lambda \sim 20$, что необходимо для вычислений в рам-ках теории гравитации. Более того, при конечной температуре суперсимметрия нарушена и поэтому ее проявления достаточно скрыты. Весьма правдоподобно, что КХД при конечной температуре и суперсимметричная калибровочная теория при конечной температуре не так уж различаются.

Общее свойство очень малой вязкости является прямым следствием AdC/ КТП-соответствия. Вязкость жидкости η определяется как коэффициент пропорциональности между силой F, с которой действуют друг на друга элементы жидкости площадью A, и скорости градиента $|\nabla v|$:

$$\frac{F}{A} = \eta |\nabla v|. \tag{23.122}$$

Размерность вязкости равна $[\eta] = M/(LT)$. Плотность энтропии *s* является другой важной характеристикой жидкости и ее размерность $[s] = [k]/L^3$, где k — постоянная Больцмана. Отсюда следует, что η/s имеет размерность \hbar/k . Из АдС/КТП-соответствия следует что

$$\frac{\eta}{s} \ge \frac{\hbar}{4\pi k} \approx 0.08 \cdot \frac{\hbar}{k}.$$
(23.123)

Действительно, в режиме сильной связи вычисление в рамках теории гравитации величины η/s приводит к результату, соответствующему нижнему пределу приведенного выше неравенства. Вязкость η связана с сечением поглощения черной дыры, а плотность энтропии следует из (23.118). Анализ данных, полученных на RHIC, согласуется со значением η/s , которое не более чем в два-три раза превышает нижний предел неравенства. По-видимому, ограничение (23.123) применимо ко всем известным в природе жидкостям или газам. В случае разреженного

_ 647

газа ограничение на η/s может быть связано с соотношением неопределенностей Гейзенберга (задача 23.8).

Упражнение-разминка 23.13. При температуре 25° и давлении 1 атм. жидкая вода имеет вязкость 0,9 × 10⁻³ кг/(м · c) и молярную энтропию 70 Дж/К. Вычислите отношение η/s и подтвердите, что оно превышает нижний предел примерно в четыреста раз. (Нужные константы: k = 1,38 × 10⁻²³ Дж/К.)

Другое интересное открытие, сделанное на RHIC состоит в том, что очень высокоэнергетические кварки (струи), распространяющиеся через КГП, тормозятся, или «гасятся», после прохождения нескольких фемтометров. Данное свойство КХД-плазмы описывается параметром гашения струи \hat{q} . Потеря энергии струи ΔE пропорциональна \widehat{q} и, что совершенно поразительно, квадрату пройденного в плазме расстояния $L: \Delta E \sim \widehat{g}L^2$. Это указывает на то, что \widehat{g} имеет размерность отношения энергии к квадрату длины. В естественных единицах, ($\hbar = c = 1$), это эквивалентно отношению квадрата энергии к длине и именно таким образом традиционно представляется \hat{q} . Экспериментальное значение \hat{q} совершенно неопределенно, потому что КГП расширяется и остывает, и наблюдаемы только последствия зависящего от времени параметра \hat{q} . За время 1 фм значение \hat{q} находится в интервале 5–15 ГэВ²/фм. Параметру \hat{q} в КХД может быть дано естественное определение в рамках калибровочной теории, а его значения в сильновзаимодействующей суперсимметричной теории Янга-Миллса при конечной температуре могут быть вычислены с помощью дуальной фоновой геометрии черной дыры. Этот результат можно оценить для момента времени 1 фм с помо + щью постоянной 'т Хоофта $\lambda \sim 20$ и полученный результат равен $\widehat{q} \sim 4 \ \Gamma_{2}B^{2}/\Phi_{M}$. Несмотря на то что аналитические вычисления в суперсимметричной теории Янга—Миллса приводят к значениям \hat{q} , меньшим, чем для разогретой КХД, учитывая различные теоретические и экспериментальные неопределенности, такой 🧖 уровень совпадения вселяет надежды. Вполне вероятно что АдС/КТП окажется 👞 действенным инструментом описания и, возможно, предсказания свойств КГП, которые будут получены на БАК при высоких энергиях.

Задачи

Задача 23.1. Длина вращающейся струны

Рассмотрите нормированное струнное состояние, соответствующее открытой струне, вращающейся в плоскости (x^2, x^3) :

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\alpha_{-1})^N |p^+, \vec{0}\rangle.$$
(1)

Согласно обсуждению (23.17), вместо правильного, но громоздкого выражения для дельта-функции с нулевым аргументом, записываем $\langle p^+, \vec{0} | p^+, \vec{0} \rangle = 1$. Для оценки длины струнного состояния вычислим среднее значение оператора квадрата длины L^2 , определенного как

$$L^{2}(\tau) \equiv : \left(\Delta X^{2}(\tau) \Delta X^{2}(\tau) + \Delta X^{3}(\tau) \Delta X^{3}(\tau) \right) : .$$
 (2)

Здесь

$$\Delta X^{I}(\tau) = X^{I}(\tau,\pi) - X^{I}(\tau,0)$$

— это разница координат X^{i} на концах струны, а двоеточие обозначает нормальное упорядочение. Для заданного произведения осцилляторов, содержащего операторы рождения и уничтожения, нормальное упорядочение располагает все операторы уничтожения справа от операторов рождения. Таким образом, например, : $\alpha_{1}^{i}\alpha_{-1}^{j}$:= $\alpha_{-1}^{j}\alpha_{1}^{i}$ и нормальное упорядочение не преобразовывает ни $\alpha_{-1}^{i}\alpha_{-1}^{j}$, ни $\alpha_{1}^{i}\alpha_{1}^{j}$. Нормальное упорядочение необходимо в (2), потому что иначе L^{2} имело бы бесконечное среднее значение, даже в основном состоянии. Полезно определить струнные координаты

$$X \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 + iX^3), \quad \overline{X} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - iX^3).$$

Проверьте, что $L^2(\tau) = :2\Delta X \Delta \overline{X}$: и с помощью этого выражения вычислите среднее значение $\langle L^2 \rangle = \langle \psi_N | L^2 | \psi_N \rangle$. Покажите, что для состояний с большими $N, \sqrt{\langle L^2 \rangle}$ приводит к ожидаемому классическому значению длины струны. Для дальнейшей проверки полученного результата, убедитесь что вращающаяся струна массы $M^2 = 3/\alpha'$ имеет длину $\sqrt{\langle L^2 \rangle}$, равную восьми длинам струны. [Подсказка: разложение : $2\Delta X \Delta \overline{X}$: содержит слагаемые четырех типов, различающихся по структуре осцилляторов α и $\overline{\alpha}$. Только один из них дает вклад в искомое среднее значение.]

Задача 23.2. Когерентные состояния квантового осциллятора

Для лучшего понимания (23.18) рассмотрим аналогичные когерентные состояния

$$|z
angle\equiv e^{za^{\dagger}-z^{*}a}|0
angle$$

простого гармонического осциллятора. Здесь z^* — комплексное сопряжение комплексного числа z. Гамильтониан осциллятора выбирается в виде $H = a^{\dagger}a$ с $a = (x + ip)/\sqrt{2}$.

- (a) Объясните почему $\langle z|z\rangle = 1$. Покажите что $|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{za^{\dagger}}|0\rangle$.
- (б) Покажите, что средние значения x и p в состоянии $|z\rangle$ определяются вещественной и мнимой частями z с помощью соотношения $1/\sqrt{2}(\langle x \rangle + i \langle p \rangle) = z$.
- (в) Вычислите зависимое от времени физическое состояние $e^{-iHt}|z_0\rangle$, где z_0 это произвольное комплексное число. Найдите соответствующие, зависящие от времени средние значения x и p через константы x_0 и p_0 определяемые $z_0 \equiv (x_0 + ip_0)/\sqrt{2}$.
- (г) Убедитесь, что зависящие от времени средние значения x и p удовлетворяют классическим уравнениям движения осциллятора.

648
▶ Задача 23.3. Изометричное вложение части \mathbb{H}_2 в \mathbb{R}^3 с помощью *трактрисы* Метрика (23.77) на \mathbb{H}_2 может быть точно записана с помощью комплексной переменной $w = \xi^1 + i\xi^2$:

$$ds^{2} = R^{2} \frac{4(d\xi^{1} d\xi^{1} + d\xi^{2} d\xi^{2})}{\left(1 - (\xi^{1}\xi^{1} + \xi^{2}\xi^{2})\right)^{2}} = R^{2} \frac{4dw \, d\overline{w}}{(1 - w\overline{w})^{2}}.$$
 (1)

Значения комплексной переменной w лежат внутри единичного диска |w| < 1.

(a) Более удобно описывать \mathbb{H}_2 с помощью верхней полуплоскости (ВПП), являющейся частью комплексной плоскости над вещественной осью. При использовании комплексной координаты z = x + iy для описания комплексной плоскости, конформное отображение

$$z = \frac{1}{i} \frac{w-1}{w+1} \tag{2}$$

переводит область |w| < 1 в область Im (z) > 0 комплексной z-плоскости. Чтобы убедиться в этом, покажите что окружность $w = e^{i\theta}$ отражается посредством (2) на полную вещественную ось, что приводит к функции $x(\theta)$. [Подсказка: ответом является простая функция от $\theta/2$.] Далее проверьте, что точка внутренности w-диска переходит в точку над вещественной осью на z-плоскости.

(б) Докажите, что в координатах z метрика (1) принимает вид

$$ds^{2} = R^{2} \frac{dz \, d\bar{z}}{\left(\mathrm{Im}(z)\right)^{2}} = R^{2} \frac{dx^{2} + dy^{2}}{y^{2}}.$$
 (3)

Часть поверхности \mathbb{R}^3 возможно изометрически вложить в \mathbb{H}_2 . Рассмотрите рис. 23.15, где показана полубесконечная вертикальная полоса ширины $\Delta x = 2\pi\Delta$ при некотором произвольно выбранном положительном числе Δ . Как будет видно, вложение этой полосы реализуется до $y = y_0$, где $y_0 > 0$ зависит от Δ . Удобно преобразовать полосу в цилиндр, отождествляя вертикальные края. Данное отождествление согласовано с метрикой, которая явно инвариантна



Рис. 23.15. Задача 23.3. Слева: часть \mathbb{H}_2 , которая изометрично садывается в \mathbb{R}^3 . Справа: кривая $u(\rho)$ при вращении вокруг оси u приводит к поверхности вложения

относительно горизонтальных трансляций $x \to x + c$, $y \to y$. Вложенная поверхность является поверхностью вращения, получаемой вращением кривой $u(\rho)$, показанной на рис. 23.15 справа, вокруг оси u.

(в) Предположите, что вложение реализовано таким образом, что u растет с ростом y. Отсюда следует, что ρ уменьшается при уменьшении u (почему?). Рассмотрите небольшую круговую полоску ширины dy, показанной на рисунке слева и соответствующую полоску высоты du, показанную на рисунке справа, полученную вращением кривой. Приравнивая длину и площади этих частей поверхности, выведете следующее дифференциальное уравнение для $u(\rho)$:

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\rho}.$$
(4)

Очевидно, что $\rho \leq R$. Найдите соотношение между y_0 и Δ . Эта кривая $u(\rho)$ является *трактрисой*.

- (г) Для произвольной точки P на кривой $u(\rho)$ рассмотрите точку P' на оси u такую, что отрезок PP' является касательной к кривой в точке P. С помощью дифференциального уравнения (4) (а не его решения!) покажите, что расстояние между P и P' всегда равно R. Это свойство было использовано Ньютоном для определения трактрисы. Трактрису можно легко построить следующим образом: прикрепите к небольшому тяжелому грузику кусочек струны длины R и положите грузик на стол на расстоянии R от края стола. Если потянуть грузик, равномерно перемещая конец струны вдоль края стола, то грузик будет двигаться по трактрисе.
- (д) С помощью u(R) = 0 проинтегрируйте (4) и приведите точный вид $u(\rho)$. В случае правильного ответа $\rho = \frac{3}{5} R$ должна приводить к $u = R\left(-\frac{4}{5} + \ln 3\right)$. Нарисуйте график $u(\rho)$.

Задача 23.4. Конформный вид двумерного пространство Минковского

Метрика двумерного пространства Минковского равна

$$-ds^2 = -dt^2 + dx^2,$$

где координаты (x, t) принимают все возможные вещественные значения: $-\infty < t, x < \infty$. Рассмотрите новые координаты (x', t'), определенные следующими двумя соотношениями:

$$\operatorname{tg}\left(x'\pm t'\right)=x\pm t.$$

(а) Покажите что в новых координатах метрика принимает вид

$$-ds^{2} = \Omega^{2}(t', x')(-dt'^{2} + dx'^{2}),$$

и найдите функцию Ω^2 . Покажите что вся плоскость (x, t) отражается на конечную область плоскости (x', t'). Опишите эту область и примерно нарисуйте ее.

- (б) Рассмотрите лучи света выходящие из x = 0 в моменты времени t = -1, 0, и 1, и распространяющиеся в направлении положительных x. Схематично нарисуйте соответствующие три световых луча на плоскости (x', t').
- (в) Рассмотрите времениподобную линию $x = \alpha t$, где α это положительная постоянная удовлетворяющая $\alpha < 1$, а $t \in [0, \infty]$. Покажите, что на плоскости (x', t') соответствующая траектория начинается в начале координат и в итоге попадает в точку $(x', t') = (0, \pi/2)$. Более того, вблизи этой точки траектория удовлетворяет уравнению $t' = \pi/2 x'/\alpha$. Обсудите соответствующие результаты для пространственноподобных линий $x = \alpha t$, где $\alpha > 1$ и $t \in [0, \infty]$. Возможно, будет полезным следующее разложение при больших u:

$$\operatorname{tg}^{-1} u \approx \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u}, \quad u \to \pm \infty.$$

Задача 23.5. Другой вид полного пространства AdS_{n+1}

(a) Рассмотрите метрику пространства вложения и уравнение связи (23.90), затем положите $z = R \operatorname{ch} \rho$, где $\rho \in [0, \infty]$ является новой переменной. Затем разрешите связь, введя

$$x^i = R\Omega^i \operatorname{sh} \rho$$
 c $\Omega^i \Omega^i = 1.$ (1)

Ограниченные переменные Ω^i являются координатами на единичной сфере S^{n-1} . Отметим, что из $\Omega^i \Omega^i = 1$ следует, что дифференциалы удовлетворяют $\Omega^i d\Omega^i = 0$. Покажите, что метрика принимает вид

$$ds^{2} = R^{2} \left[-(\operatorname{ch} \rho)^{2} (dt)^{2} + (d\rho)^{2} + (\operatorname{sh} \rho)^{2} d\Omega_{n-1}^{2} \right], \qquad (2)$$

где $d\Omega_{n-1}^2 \equiv d\Omega^i d\Omega^i$, с учетом $\Omega^i \Omega^i = 1$, является метрикой на единичной сфере S^{n-1} . Уравнение (2) является полезной формой метрики на AdS_{n+1} .

(б) Рассмотрите *n*-мерную пространственную область $\rho \leq \bar{\rho}$. Выпишите интеграл, определяющий ее объем $V(\bar{\rho})$ и выражение для площади $A(\bar{\rho})$ ее границы. Покажите, что

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{A(\bar{\rho})}{V(\bar{\rho})} = \frac{c_n}{R},\tag{3}$$

где константа c_n , которую следует найти, согласуется с (23.99). [Подсказка: основной расходящийся член в интеграле легко вычислить, а оставшиеся члены не дают вклада в рассматриваемом пределе.]

(в) С помощью соотношения $r = R \sinh \rho$ введите в (2) новую радиальную переменную $r \in [0, \infty]$. Также, пусть $t \to t/R$. Покажите, что метрика принимает вид

$$ds^{2} = -\left(1 + \frac{r^{2}}{R^{2}}\right)(dt)^{2} + \left(1 + \frac{r^{2}}{R^{2}}\right)^{-1}(dr)^{2} + r^{2} d\Omega_{n-1}^{2}.$$
 (4)

Это другая полезная форма AdS_{n+1}-метрики. Простая модификация вида (23.104) приводит к метрике черной дыры Шварцшильда с асимптотической АдС-геометрией.

► Задача 23.6. Частный, но простой вид пространства AdS_{n+1}

Рассмотрите метрику пространства вложения и уравнение связи (23.84) в виде

объемлющая метрика:
$$ds^2 = -(du)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} dx^i dx^i + (dx^n)^2 - (dv)^2,$$

уравнение связи: $-u^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i x^i + (x^n)^2 - v^2 = -R^2.$

(a) Теперь определим координаты z, t и $\vec{y} = (y^1, \dots, y^{n-1})$, исхоля из следующих соотношений:

$$v+x^n=rac{R}{z},\quad u=rac{R}{z}t,\quad x^i=rac{R}{z}y^i,\quad i=1,\ldots,n-1.$$
 (1)

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $z \in \mathbb{R}^+$. Так как z положительно, то $x^n + v$ также положительно и рассматриваемая параметризация не описывает ту часть АдС пространства, в котором $x^n + v$ отрицательно. С помощью уравнения связи определите значение $v - x^n$ в терминах новых координат.

(6) Покажите, что метрика на AdS_{n+1} принимает крайне простой вид

$$ds^{2} = \frac{R^{2}}{z^{2}} (dz^{2} - (dt)^{2} + (d\bar{y})^{2}). \qquad (2)$$

[Подсказка: для вычисления используйте $(dx^n)^2 - (dv)^2 = d(x^n + v) d(x^n - v)$.] Граница пространства расположена в z = 0, где метрика конформна метрике $-(dt)^2 + (d\vec{y})^2$, т. е. метрике *n*-мерного пространства Минковского. Связанная с предыдущей форма метрики получается введением $z = R^2/r$:

$$ds^{2} = R^{2} \frac{dr^{2}}{r^{2}} + \frac{r^{2}}{R^{2}} \left[-(dt)^{2} + (d\vec{y})^{2} \right].$$
(3)

Задача 23.7. Пространство де Ситтера

n-Мерное пространство-время де Ситтера обладает положительной кривизной. Оно определяется по аналогии с определением гиперболических пространств: пространство-время де Ситтера можно получить как поверхность в пространстве Минковского более высокой размерности. Однако, на этот раз нормаль к поверхности является пространственноподобной, поэтому поверхность содержит временное направление. К тому же, так же, как гиперболические пространства могут описывать пространственные сечения АдС, сферы можно использовать для описания пространственных сечений дС.

При i = 1, 2, ..., n пространство-время dS_n и его метрика определяются соотношениями

объемлющая метрика:
$$ds^2 = -(dz)^2 + dx^i dx^i$$
,
уравнение связи: $-z^2 + x^i x^i = R^2$. (1)

- (a) Подробно объясните, почему поверхность содержит времениподобное направление. Установите времениподобный касательный вектор в точках поверхности с $z \neq 0$ и в точках с z = 0.
- (б) Для решения уравнения связи положим

$$z = R \operatorname{sh} t, \quad x^{i} = R\Omega^{i} \operatorname{ch} t, \quad c \quad \Omega^{i}\Omega^{i} = 1.$$
 (2)

В задаче 23.5 содержатся комментарии относительно ограниченных переменных Ω^i . Покажите, что метрика на пространстве dS_n принимает вид

$$ds^{2} = R^{2} \left[-(dt)^{2} + (\operatorname{ch} t)^{2} d\Omega_{n-1}^{2} \right], \qquad (3)$$

где $d\Omega_{n-1}^2 \equiv d\Omega^i d\Omega^i$ является метрикой на единичной сфере S^{n-1} . В любой фиксированный момент времени пространственное сечение является сферой радиуса R ch t. Пространственное сечение стягивается при t < 0 и расширяется при t > 0.

(в) В разделе 23.8 было замечено, что массовая поверхность для массивной частицы является гиперболическим пространством. Чем является массовая поверхность для тахиона?

Задача 23.8. Вязкость и энтропия разреженного газа.

Рассмотрите ящик объема $V \, c \, N$ молекулами газа. Молекулы газа имеют массу m, среднюю скорость \bar{v} и длину свободного пробега ℓ . В предположении, что газ разрежен, вязкость задается приближенной формулой

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \bar{v} m \ell. \tag{1}$$

Для одноатомного идеального газа плотность энтропии *s* задается выражением

$$\frac{s}{k} = \frac{1}{k} \frac{S}{V} = \frac{N}{V} \left[\ln \left(\frac{V/N}{\lambda_{\rm th}^3} \right) + \frac{5}{2} \right], \quad \lambda_{\rm th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}.$$
 (2)

Здесь λ_{th} — это термальная длина волны де Бройля. Вывод приведенных выше соотношений для η и *s* можно найти во многих учебниках по термодинамике.

- (a) С помощью (2) вычислите значение s/k на единицу см³ для одноатомного газа водорода при $T = 25^{\circ}$ и 1 атм. Сравните со значением молярной энтропии 114,7, приведенной в химических таблицах.
- (б) С помощью учебника найдите температуру $T_{\rm B}$ конденсации Бозе—Эйнштейна. Покажите, что при этой температуре фактор в скобках в выражении (2) принимает приближенное значение 1,5397. Поэтому, пока имеется газ, s/k > (1,5397) N/V. Покажите, что при температурах ниже одной тысячной $T_{\rm B}$, имеем s/k < 11,901 N/V.
- (в) Оцените среднюю длину свободного пробега ℓ через N, V и диаметр молекулы d. Вспоминая, что $\bar{v} \sim \sqrt{kT/m}$, сделайте вывод, что величина $\eta \sim T^{1/2}$ не зависит от давления или плотности. В случае газа вязкость растет с температурой. В случае жидкости вязкость уменьшается с температурой.

(г) Для газа $\bar{v}^2 \approx (v^2)$. С помощью этого соотношения покажите, что

$$\eta=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\,u\tau,$$

где u — это средняя энергия молекулы и τ — это время свободного пробега. Сделайте вывод, что в интервале температур, рассмотренном в п. (б), имеем

$$\frac{\eta}{s} \ge \frac{\eta}{s_{\max}} \approx 0.056 \, \frac{1}{k} \, u\tau. \tag{3}$$

Из соотношения неопределенностей для энергии-времени следует $u\tau \ge \hbar$, что приводит к ограничению η/s снизу некоторой частью \hbar/k (сравните с (23.123)). Оценка (3) является приближенной; она не учитывает рост η в зависимости от температуры.

Глава 24

Ковариантное квантование струны

При лоренц-ковариантном квантовании струны все струнные координаты $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ рассматриваются на равных основаниях. Физические состояния выделяются с помощью связей, порождаемых подмножеством операторов Вирасоро. Данные состояния автоматически наделяются временной зависимостью, поэтому гамильтониан не порождает эволюции во времени. Описывается действие Полякова для струны и показывается, что оно классически эквивалентно действию Намбу—Гото.

24.1. Введение

В этой книге квантование струн было выполнено с помощью координат светового конуса в калибровке светового конуса. Теория струн является лоренцинвариантной, однако симметрия Лоренца квантовой теории в калибровке светового конуса реализована неявно. Действительно, выбор частной координаты X^+ для особых нужд приводит к нарушению явной симметрии Лоренца в теории. Как было продемонстрировано построением лоренцевского генератора M^{-1} , симметрия Лоренца по-прежнему остается симметрией квантовой теории, оставаясь при этом скрытой. В том случае, когда пространство-время имеет критическую размерность, данный генератор обладает всеми требуемыми свойствами.

Так как лоренцевская симметрия имеет первостепенную важность, естественно задаться вопросом: можем ли мы проквантовать теорию струн, сохраняя при этом *явную* лоренц-инвариантность. Действительно, это можно осуществить. Лоренц-ковариантное квантование обладает некоторыми преимуществами по отношению к квантованию в калибровке светового конуса. Рассмотренное квантование открытых струн в калибровке светового конуса не подходило для D0-бран, потому что калибровка светового конуса требует, чтобы по крайней мере одна пространственная координата открытой струны удовлетворяла граничным условиям Неймана. Ковариантное квантование применимо к D0-бранам. Уравнения движения полей, которые возникают в теории струн, более понятны в лоренцковариантном описании. Вычисление тахионных потенциалов, о которых упоминалось в разделе 12.8, оказывается возможным только в рамках лоренц-ковариантного квантования струн.

Тогда почему мы так долго откладывали обсуждение лоренц-ковариантного квантования струн? Ковариантный подход очень элегантен, однако из соответствующих уравнений порой трудно выделить физическое содержание. Более того, у ковариантного квантования имеется ряд совершенно необычных свойств. Мы привыкли к тому, что в квантовой механике положение частицы становится оператором, а время остается параметром. В лоренц-ковариантном квантовании все координаты частицы x^{μ} , включая x^{0} , становятся операторами. Аналогичные комментарии справедливы и для струнных координат X^{μ} . Также мы убедимся, что струнный гамильтониан аннулирует физические состояния теории. Наконец, в ковариантном квантовании необходимо рассматривать состояния с неположительной нормой, что приводит нас к обычным постулатам гильбертова пространства.

Квантование струн в калибровке светового конуса было выбрано потому, что все вышеупомянутые свойства увели бы нас в сторону от задачи выделения физического содержания теории. Калибровка светового конуса оказалась весьма полезной для вычислений и будет продолжать оставаться таковой в последующих главах, где с помощью струнных диаграмм в калибровке светового конуса мы начанем обсуждение струнных взаимодействий. Для надлежащего рассмотрения ковариантного квантования необходимы методы, находящиеся за рамками данной книги. Например, мы не сможем получить критическую размерность. Несмотря на то что наше рассмотрение не будет полным, все-таки некоторые важные результаты в понимании структуры теории будут получены.

Давайте начнем наше обсуждение с напоминания некоторых аспектов параметризации мирового листа. В главе 9 был описан широкий класс калибровок, характеризуемых вектором n^{μ} . Подходящим выбором n^{μ} можно получить статическую калибровку или калибровку светового конуса. Для открытых струн выбор n^{μ} полностью фиксирует параметризацию мирового листа. Это почти правильно и для замкнутых струн, за тем исключением, что остается свобода в постоянных сдвигах координаты σ вдоль струны. Было показано, что при любом выборе n^{μ} струнные координаты удовлетворяют связям

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0,$$
 (24.1)

так как *любой* выбор n^{μ} приводит к данным связям, но сами по себе они не фиксируют полностью параметризацию мирового листа. Фактически, как можно было видеть в задаче 12.10, для многих репараметризаций данные связи остаются инвариантными.

Ранее удалось показать что, в силу связей (24.1), уравнения движения становятся простыми волновыми уравнениями:

$$\ddot{X}^{\mu} - X^{\prime\prime\mu} = 0. \tag{24.2}$$

К тому же, из них следует, что плотности импульсов имеют вид

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu\prime}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \tag{24.3}$$

Связи (24.1), и, как следствие, (24.2) и (24.3) используются в ковариантном формализме, однако параметризация мирового листа полностью *не* фиксируется. Связи (24.1) можно рассматривать как условия *частичной* фиксации калибровки.

На классическом уровне мы решаем волновые уравнения и проверяем, что связи удовлетворяются. На квантовом уровне наличие связей приводит к некоторым тонкостям.

Читатель возможно помнит, что для вывода волновых уравнений и простых плотностей импульсов для действия Намбу—Гото потребовалось проделать большую работу. Существует ли такое действие, для которого все эти результаты возникают незамедлительно? Да, существует. На самом деле для поперечных координат светового конуса подобное действие имеет вид (12.81). С помощью этого действия был дан более физический вывод осцилляторных коммутационных соотношений. В настоящем случае, искомое действие имеет вид

$$S = \int d\tau \, d\sigma \, \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \left(\partial_\tau X^{\mu} \partial_\tau X_{\mu} - \partial_\sigma X^{\mu} \partial_\sigma X^{\mu} \right). \tag{24.4}$$

Отметим что это действие, в противоположность действию Намбу—Гото, не содержит квадратного корня. Оно квадратично по динамическим переменным X^{μ} . Это действие оказывается полезным, потому что вариация по X^{μ} незамедлительно приводит к волновым уравнениям (24.2). Более того, непосредственно возникают простые выражения для плотностей канонических импульсов. Например,

$$\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \tag{24.5}$$

Классический гамильтониан также легко вычисляется. Опустим у \mathcal{P}^{τ}_{μ} индекс τ и выразим все через импульсы и координаты

$$H = \int d\sigma \left(\mathcal{P}_{\mu} \dot{X}^{\mu} - \mathcal{L} \right) =$$

$$= \int d\sigma \left(\mathcal{P}_{\mu} \dot{X}^{\mu} - \frac{1}{4\pi\alpha'} \left((2\pi\alpha'\mathcal{P})^2 - X'^2 \right) \right) =$$

$$= \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right). \qquad (24.6)$$

Это гамильтониан аналогичен гамильтониану в калибровке светового конуса (12.15), однако теперь свертки индексов ведутся по всем пространственно-временным направлениям. В квантовании светового конуса были определены операторы Гейзенберга $X^{I}(\tau, \sigma)$ и $\mathcal{P}_{I}(\tau, \sigma)$ с каноническими коммутационными соотношениями. С их помощью было проверено, что гамильтониан порождает правильные операторные уравнения движения. В ковариантной теории естественно ввести операторы Гейзенберга

$$X^{\mu}(\tau,\sigma)$$
 и $\mathcal{P}_{\mu}(\tau,\sigma)$ (24.7)

и постулировать коммутационные соотношения

$$[X^{\mu}(\tau,\sigma),\mathcal{P}^{\nu}(\tau,\sigma')]=i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{24.8}$$

Отметим, что даже X^0 является квантовым оператором. Как обычно, коммутаторы координат с координатами и коммутаторы импульсов с импульсами приравниваются нулю. Вычисления аналогичные тем, которые были выполнены в калибровке светового конуса, показывают что квантовые уравнения движения принимают вид (24.2). Это убедительно свидетельствует о том, что *H* является правильным гамильтонианом.

24.2. Операторы Вирасоро для открытых струн

В квантовании светового конуса связи использовались для того, чтобы выразить X^- через поперечные координаты X'. Моды координаты X^- отождествлялись с поперечными операторами Вирасоро. В ковариантном подходе квантовые связи не используются для выражения величин; вместо этого они накладываются на состояния теории. Теперь рассмотрим квантовые связи для открытых струн.

Квантование произвольных координат открытой струны X^{μ} аналогично квантованию поперечных конусных координат X^{I} . Напомним осцилляторное разложение (9.56):

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{\mu}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}e^{-in\tau}\cos n\sigma.$$
(24.9)

Оно приводило к особенно простым выражениям для линейных комбинаций производных в (9.59):

$$\dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$
(24.10)

На этот раз калибровочные условия, которые можно использовать для упрощения частных координат, отсутствуют. Приведенные выше разложения будут использоваться для всех струнных координат. Совокупность коммутационных соотношений (24.8), разложения (24.10) и уравнения (24.5) определяют коммутационные соотношения для осцилляторов. Так как вычисления аналогичны вычислениям в калибровке светового конуса, предыдущие результаты (12.45) и (12.64) модифицируются только заменой η^{IJ} на $\eta^{\mu\nu}$:

$$\left[\alpha_{m}^{\mu},\alpha_{n}^{\nu}\right]=m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0},\quad \left[\alpha_{m}^{\mu},\alpha_{n}^{\nu\dagger}\right]=\delta_{m,n}\eta^{\mu\nu}.$$
(24.11)

На этот раз $\alpha_0^{\mu} = \sqrt{2\alpha'} p^{\mu}$, а операторы нулевых мод удовлетворяют

$$[x_0^{\mu}, p^{\nu}] = i\eta^{\mu\nu}. \tag{24.12}$$

Это уравнение должно заставить нас задуматься. Мы знакомы с квантово-механической процедурой, согласно которой пространственные координаты и пространственные импульсы частицы становятся операторами. В этой схеме состояния, по определению, зависят от пространственных координат, а зависимость от времени определяется уравнением Шрёдингера. При ковариантном квантовании даже временная координата x^0 становится оператором, поэтому состояния по опре-

делению зависят от времени. Это означает, что роль уравнения Шрёдингера должна измениться, этот вопрос будет детально обсуждаться в разделе 24.4.

Теперь можно явным образом изучить связи (24.1). Вычисления опять аналогичны вычислениям из главы 9. Сравнивая с (9.79) находим

$$(\dot{X}^{\mu} \pm X')^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha^{\mu}_{n-p} \alpha_{p,\mu}.$$
 (24.13)

Ковариантные операторы Вирасоро L_n отличны от поперечных операторов Вирасоро L_n^{\perp} , потому что они содержат вклады от всех струнных координат. Как и прежде, единственным оператором Вирасоро, обладающим произволом в упорядочении, является L_0 , он по-прежнему определяется в нормально-упорядоченном виде без дополнительной константы.

На классическом уровне, из уравнений связей $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ следует, что

классически:
$$L_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
 (24.14)

На классическом уровне имеем $L_n^* = L_{-n}$, так что связи (24.14) необходимо проверить только для $n \ge 0$. На квантовом уровне имеем $L_n^{\dagger} = L_{-n}$. Аналогичное свойство поперечных операторов Вирасоро было доказано после формулы (12.112).

Упражнение-разминка 24.1. Убедитесь, что на классическом уровне $L_n^* = L_{-n}$.

Квантовые операторы Вирасоро имеют весьма нетривиальные коммутационные соотношения. Коммутаторы поперечных операторов Вирасоро были вычислены и результат приведен в (12.133). Центральный член был пропорционален D - 2, т. е. числу поперечных координат в теории струн. Каждая поперечная координата дает равный вклад в центральный член. На ковариантном уровне, когда операторы Вирасоро содержат сумму по всем координатам пространствавремени, коммутационные соотношения принимают вид

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \qquad (24.15)$$

где D = 26 является полной размерностью пространства-времени (мы не будем здесь выводить критическую размерность). Удивительно, что временная координата, осцилляторы которой коммутируют на знак минус (см. (24.11)), дают вклад в центральный член на равных основаниях с пространственными координатами. Это происходит потому, что центральный член возникает из коммутатора, который содержит четыре осциллятора, так что исходный коммутатор используется дважды и знак минус сокращается.

Из уравнений (12.139) следует, что действие поперечных операторов Вирасоро на струнные координаты X^{I} описывает проявления определенного класса репараметризаций мирового листа. В точности такие же результаты справедливы для действия ковариантных операторов Вирасоро на струнные координаты X^{μ} . Репараметризации обладают особым свойством: как показывается в задаче 12.10, они сохраняют связи $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$. Это результат приводит к физической интерпретации ковариантных операторов Вирасоро: данные операторы генерируют репараметризации мирового листа, которые сохраняют калибровочные условия лоренц-ковариантного формализма.

24.3. Отбор квантовых связей

Интуиция, основанная на классической теории подсказывает, что физические состояния квантовой теории, — квантовый аналог непротиворечивого движения классических струн, — должны аннулироваться всеми операторами Вирасоро. Однако, как будет видно: ни одно состояние не выживает при наложении всех связей Вирасоро.

При этом совершенно понятно, что часть связей должна быть наложена. В ковариантном квантовании доступны 26 наборов осцилляторов, поэтому если не накладывать никаких связей, то набор квантовых состояний будет отличаться от полученного ранее набора квантовых состояний, когда имелось только 24 набора осцилляторов. Разные процедуры квантования не должны приводить к разным физическим результатам. Поэтому следует ожидать, что, по крайней мере, часть операторов Вирасоро должна аннулировать физические состояния.

Давайте начнем с рассмотрения той связи, которую оператор Вирасоро L_0 накладывает на состояния. Мы *определили* квантовый L_0 в нормально упорядоченном виде без дополнительной константы, однако нет никакой причины, по которой этот L_0 должен аннулировать физические состояния. Вместо этого, ожидается что $(L_0 + a)$, где a — это некоторая константа, должен действовать на физических состояниях как нулевой. Похожий вопрос изучался в калибровке светового конуса. Энергия в калибровке светового конуса p^- пропорциональна $L_0^{\perp} - 1$, а не L_0^{\perp} (см. (12.157)). Такая же связь должна присутствовать в ковариантном формализме и поэтому квантовая связь имеет вид

$$(L_0 - 1)|\Phi\rangle = 0,$$
 (24.16)

для любого физического состояния $|\Phi\rangle$. Хотя мы не будем выводить константу упорядочения из первых принципов, будет видно, что она необходима для того, чтобы ковариантный спектр был согласовыван со спектром, полученным в калибровке светового конуса. При конусном квантовании соотношение между p^- и L_0^{\perp} фиксирует квадрат массы состояний. На ковариантном уровне квадрат массы определяется связью (24.16). Выписывая явно оператор L_0 , имеем

$$L_0 - 1 = \frac{1}{2} \alpha_0^{\mu} \alpha_{0,\mu} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{\mu} \alpha_{p,\mu} - 1 = \alpha' p^2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu \dagger} a_{n,\mu} = 0.$$
 (24.17)

Так как $M^2 = -p^2$, находим

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1+N), \qquad N = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu \dagger} a_{n,\mu}.$$
 (24.18)

Данное выражение имеет тот же вид, что и в квантовании светового конуса, за тем исключением, что оператор числа частиц N^{\perp} заменяется соответствующим ковариантным аналогом N. Собственные значения оператора числа частиц в калибровке светового конуса N^{\perp} явно неотрицательны и это позволило нам заключить, что $M^2 \ge -1/\alpha'$. Правда ли, что собственные значения оператора числа частиц N также неотрицательны? Для нахождения ответа в формуле для N разложим сумму по μ . Учитывая должным образом метрику Минковского, находим

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-a_{n,0}^{\dagger} a_{n,0} + \sum_{i=1}^{25} a_{n,i}^{\dagger} a_{n,i} \right).$$
(24.19)

В классической теории крестик обозначает комплексное сопряжение, поэтому при подходящих вкладах от временных компонент оператор числа частиц N не может быть отрицательным. В квантовой теории ситуация улучшается. В силу того, что коммутатор двух времениподобных осцилляторов имеет знак минус $([a_{n,0}, a_{n,0}^{\dagger}] = -1)$,

$$\left[-na_{n,0}^{\dagger}a_{n,0}, a_{n,0}^{\dagger}\right] = +na_{n,0}^{\dagger}.$$
 (24.20)

Поэтому положительные вклады в N дают даже времениподобные осцилляторы. Таким образом, N неотрицателен и на ковариантном уровне $M^2 \ge -1/\alpha'$ по-прежнему выполнено. Более того, для основного состояния в ковариантной теории N = 0, поэтому $M^2 = -1/\alpha'$. Данное значение согласуется со значением квадрата массы основного состояния, полученным в квантовании светового конуса. Полученное соответствие обосновывает выбор константы упорядочения в (24.16).

Однако существует проблема, указывающая на то, что должны быть наложены дополнительные связи: многие состояния не имеют положительной нормы! Рассмотрим собственное состояние $|\Phi\rangle$ оператора N с собственным значением N_0 и положительной нормой $\langle \Phi | \Phi \rangle > 0$. Тогда, $a_{n,0} | \Phi \rangle = 0$ для $n > N_0$. Теперь рассмотрим состояние $|\chi\rangle = a_{n,0}^{\dagger} | \Phi \rangle$ и эрмитово сопряженное состояние $\langle \chi | = \langle \Phi | a_{n,0}$. Норма этого состояния равна

$$\langle \chi | \chi \rangle = \left\langle \Phi \left| a_{n,0} a_{n,0}^{\dagger} \right| \Phi \right\rangle = \left\langle \Phi \right| \left[a_{n,0}, a_{n,0}^{\dagger} \right] \left| \Phi \right\rangle = -\left\langle \Phi \right| \Phi \right\rangle < 0.$$
(24.21)

Так как $|\chi\rangle$ имеет отрицательную норму, оно является неприемлемым квантовым состоянием. Для того чтобы удалить эти неприемлимые, с физической точки зрения, состояния из спектра, необходимо наложить дополнительные условия. Напомним, что в квантовании светового конуса все состояния имеют положительную норму.

Поэтому давайте попробуем установить полный набор связей. Нельзя потребовать, в дополнение к $L_0 - 1$, чтобы все остальные операторы Вирасоро аннулировали физические состояния. Продемонстрируем это на простом примере. Будет доказано, что нетривиальных состояний, аннулируемых тремя операторами $L_0 - 1$, L_2 и L_{-2} , не существует. Поэтому рассмотрим общее состояние $|\Phi\rangle$ и наложим условия

$$(L_0-1)|\Phi\rangle=0, \quad (L_2)|\Phi\rangle=0 \quad \varkappa \quad L_{-2}|\Phi\rangle=0.$$

Если эти уравнения выполняются, то коммутатор L_2 с L_{-2} должен аннулировать данное состояние:

$$[L_2, L_{-2}]|\Phi\rangle = L_2(L_{-2}|\Phi)\rangle - L_{-2}(L_2|\Phi)\rangle = 0.$$
 (24.22)

С другой стороны, из уравнения (24.15) следует что

$$[L_2, L_{-2}] = 4L_0 + \frac{D}{2}. \tag{24.23}$$

Было показано, что левая часть этого соотношения аннулирует $|\Phi\rangle$, поэтому правая часть также должна аннулировать $|\Phi\rangle$,

$$\left(4(L_0-1)+4+\frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle = \left(4+\frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle = 0.$$
 (24.24)

Так как D положительно, то $|\Phi\rangle = 0$. Это потверждает, что невозможно наложить все условия Вирасоро и ожидать появления нетривиальных состояний.

С учетом этого результата, попробуем найти такое подмножество связей Вирасоро, наложение которых не приводит к обнулению всех состояний. Тот факт, что подмножество исходного набора связей может быть достаточным для определения непротиворечивой квантовой теории, не является очевидным, однако предыдущий опыт показывает, что такое может быть. Например, в ковариантном квантовании электромагнетизма условие лоренцевской калибровки $\partial \cdot A = 0$ возникает как квантовая связь. Это условие не может быть полностью наложено на фотонные состояния. Вместо этого, для получения последовательной теории необходимо наложить на состояния только «половину» калибровочного условия. Здесь мы будем придерживаться похожей стратегии.

Полный набор операторов, которые могли бы аннулировать физические состояния, имеет вид

$$\{\ldots, L_{-3}, L_{-2}, L_{-1}, L_0 - 1, L_1, L_2, L_3, \ldots\}.$$
 (24.25)

Мы уже видели, что связь $L_0 - 1 = 0$ необходима для фиксации правильного спектра масс. Самое простое из того, что можно попробовать сделать — это положить равными нулю либо все операторы с положительными модами, либо все операторы с отрицательными модами. Другими словами, совместно с

$$(L_0 - 1)|\Phi\rangle = 0 \tag{24.26}$$

будет наложена одна из следующих связей:

$$L_n|\Phi\rangle \stackrel{?}{=} 0, \quad n > 0, \tag{24.27}$$

$$L_{-n}|\Phi\rangle \stackrel{?}{=} 0, \quad n > 0. \tag{24.28}$$

Несмотря на то что обе возможности имеют что-то общее, выполняется только одна из них. Обе возможности приводят к

$$\langle \Phi | L_n | \Phi \rangle = 0, \quad n \neq 0. \tag{24.29}$$

Например, если выбрать (24.27), то (24.29) выполняется при положительных n, потому что L_n уничтожает состояние при действии справа. Более того, эрмитово сопряжение (24.27) даст

$$\langle \Phi | L_{-n} = 0$$
 при $n > 0,$ (24.30)

либо, эквивалентно,

$$\langle \Phi | L_n = 0$$
 при $n < 0,$ (24.31)

показывая тем самым, что (24.29) выполняется также и при отрицательных n. Аналогичное рассуждение можно применить и в случае (24.28). Таким образом, обе возможности приводят к физическим состояниям, для которых *средние значения* всех L_n при $n \neq 0$ равны нулю. Это условие равенства нулю средних значений является более слабым, чем условие, требующее чтобы L_n аннулировали состояния. К счастью, наложение только половины связей приводит к удовлетворительной теории. Было доказано, что половины связей достаточно для удаления состояний с отрицательной нормой.

Нам все еще нужно решить, какой из двух наборов условий накладывать. Работая с калибровкой светового конуса, мы видели, что только осцилляторы с положительными модами действовали как операторы уничтожения. Осцилляторы с отрицательными модами действовали как операторы рождения. Вполне естественно сопоставить операторы уничтожения операторам Вирасоро с положительными модами. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Все операторы Вирасоро с положительными модами должны аннулировать физические состояния. (24.32)

Состояния, аннулируемые всеми операторами Вирасоро с положительными модами, называются примарными¹⁾ состояниями Вирасоро. То, что состояние является примарным состоянием Вирасоро, не гарантирует, что оно действительно является физическим состоянием. Необходимы два дополнительных условия. Первое условие уже известно: состояние должно аннулироваться $L_0 - 1$. Примарные состояния, которые удовлетворяют этому первому условию будем называть *допустимыми* состояниями:

$$|\Phi\rangle$$
 допустимо $\Leftrightarrow (L_n - \delta_{n,0})|\Phi\rangle = 0, \quad n \ge 0.$ (24.33)

663

¹⁾ Используемый в оригинале термин primaries означает еще первичные или первоначальные (состояния). — Прим. ред. перевода.

Глава 24. Ковариантное квантование струны

Как будет видно далее, второе условие имеет дело с классом состояний, которые называются потомками. Будем называть состояние *физическим*, если оно является допустимым и удовлетворяет данному дополнительному условию. Данная терминология не является стандартной: наши допустимые состояния обычно называются физическими, а наши физические состояния обычно называются *настоящими* физическими состояниями! (Здесь настоящий это синоним истинного.)

Интересно заметить, что для любого фиксированного состояния все, за исключением конечного числа, операторы Вирасоро с положительными модами автоматически аннулируют данное состояние, не накладывая каких-либо условий. Произвольное состояние $|\Phi_0\rangle$ с собственным значением оператора числа частиц $N_0 \ge 0$ автоматически удовлетворяет равенству

$$L_n |\Phi\rangle = 0 \quad \text{при} \quad n > N_0. \tag{24.34}$$

Чтобы убедиться в этом, в первую очередь заметим, что $L_0 = lpha' p^2 + N$ означает

$$[N, L_n] = [L_0 - \alpha' p^2, L_n] = [L_0, L_n] = -nL_n.$$
(24.35)

Тем самым, число мод состояния $L_n | \Phi_0 \rangle$ равно

$$NL_n|\Phi_0\rangle = [N, L_n]|\Phi_0\rangle + L_nN|\Phi_0\rangle = (N_0 - n)L_n|\Phi_0\rangle.$$
(24.36)

Если $n > N_0$, то $L_n | \Phi_0 \rangle$ является состоянием с отрицательным собственным значением оператора числа частиц. Так как N обладает только неотрицательными собственными значениями, то такое состояние должно быть равно нулю.

Потомок данного примарного состояния Вирасоро — это состояние, которое можно записать в виде конечной линейной комбинации произведений операторов Вирасоро с отрицательными модами, действующих на примарное состояние. Например, если $|p\rangle$ обозначает примарное состояние, то состояние $L_{-1}|p\rangle$ является потомком $|p\rangle$, равно как и $(L_{-2}L_{-1} + L_{-4}L_{-3})|p\rangle$. Так как потомки играют важную роль, давайте обсудим их более подробно.

Из (24.36) следует, что $NL_{-1}|p\rangle = (N_p + 1)L_{-1}|p\rangle$, где N_p является собственным значением оператора числа частиц, действующем на примарное состояние. Состояние $L_{-1}|p\rangle$ является, с точностью до перенормировки, единственным потомком $|p\rangle$ с числом $N_p + 1$. Есть два базисных потомка с числом $N_p + 2$: $L_{-2}|p\rangle$ и $L_{-1}L_{-1}|p\rangle$. Для потомков с числом $N_p + 3$ подсчет становится чуть более интересным. Список возможных базисных потомков имеет вид

$$L_{-3}|p\rangle, \quad L_{-2}L_{-1}|p\rangle, \quad L_{-1}L_{-2}|p\rangle, \quad (L_{-1})^{3}|p\rangle.$$

В силу того, что операторы Вирасоро не коммутируют, второе и третье состояния не тождественны. Однако, поскольку

$$L_{-1}L_{-2} = [L_{-1}L_{-2}] + L_{-2}L_{-1} = L_{-3} + L_{-2}L_{-1},$$

между приведенными выше состояниями существует одно линейное соотношение. Это тождество позволяет представить третье состояние через первые два, поэтому на данном уровне есть только три базисных потомка.

Потомки с числом $N_p + 3$: $L_{-3}|p\rangle$, $L_{-2}L_{-1}|p\rangle$, $(L_{-1})^3|p\rangle$. (24.37)

В общем случае, для любого фиксированного числа $N_p + n$ можно выбрать базисный набор потомков таким образом, что каждый базисный элемент имеет вид:

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}|p
angle,$$
 где $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$ и $\sum_{i=1}^k n_i = n.$ (24.38)

Это общепринятое и удобное упорядочение операторов Вирасоро.

Упражнение-разминка 24.2. Убедитесь, что любой потомок |p> с числом N_p+n, представленный как произвольная последовательность операторов Вирасоро с отрицательными модами, действующими на |p>, можно записать в виде линейной суперпозиции состояний вида (24.38). Отметим, что число элементов в производящем наборе (24.38) равно числу разбиений n.

Для любого заданного примарного $|p\rangle$ между базисными потомками (24.38) могут существовать линейные соотношения. Эти соотношения возникают не из действий с операторами Вирасоро, а из специальных свойств состояния $|p\rangle$. Существуют простые примеры этого явления. Основное состояние с нулевым импульсом $|0\rangle$, например, является примарным и его потомок $L_{-1}|0\rangle$ тождественно равен нулю (задача 24.2). Важное свойство потомков состоит в том, что они все ортогональны любому примарному состоянию. Действительно, любой из базисный потомков $|d\rangle$ можно представить в виде $|d\rangle = L_{n_i}|\chi\rangle$ для некоторого $n_i > 0$ и некоторого состояния $|\chi\rangle$. Отсюда следует, что для любого примарного $|p\rangle$

$$\langle d|p\rangle = \langle \chi | L_{n_i} | p \rangle = 0 \tag{24.39}$$

в силу того, что |p> аннулируется всеми операторами Вирасоро с положительными модами.

Теперь мы выскажем предположение, что состояние, являющееся одновременно и примарным и потомком, соответствует состоянию, которое является чистой калибровкой. Состояние, которое одновременно и примарное и потомок, называется *шиурионным* состоянием. Из (24.39) следует, что шпурионное состояние имеет равное нулю скалярное произведение само с собой, с любым примарным состоянием и с любым потомком. Если примарное состояние видоизменить добавлением шпурионного состояния, то новое примарное состояние имеет такое же скалярное произведение с примарными состояниями, как и исходное состояние. Шпурионное состояние ведет себя как чистая калибровка если, в дополнение, физические операторы теории отображают шпурионные состояния в шпурионные; в этом случае добавление шпурионных состояний к примарным не изменяет средние значения физических величин. Это обосновывает следующее определение физического состояния.

Говорят, что ненулевое состояние представляет физическое состояние, если оно допустимо и не является потомком, т. е., данное состояние должно быть примарным, должно аннулироваться $(L_0 - 1)$ и не должно быть потомком. Два представителя одного и того же физического состояния должны отличаться на шпурионное состояние.

Отметим, что мы говорим о представителях физических состояний именно по причине произвола, порождаемого шпурионными состояниями. Физическое

состояние следует представлять не как один специальный вектор в пространстве состояний, а скорее как класс векторов, каждый из которых отличается от другого на шпурионное состояние. Любой вектор данного класса в равной степени является представителем одного и того же физического состояния. Для доказательства того, что данное определение является приемлемым, в следующем разделе на его основе будут найдены физические состояния на двух нижних массовых уровнях открытой струны. Будут воспроизведены результаты, полученные ранее в калибровке светового конуса.

24.4. Пространство лоренц-ковариантных состояний

Прежде чем строить пространство состояний ковариантно проквантованной струны, полезно напомнить некоторые свойства пространства состояний в калибровке светового конуса. Независящие от времени состояния в калибровке светового конуса зависят от конусных импульсов p^+ и \vec{p}_T . Например, основные состояния имеют вид $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Как мы видели в разделе 11.4 и 12.7, зависящие от времени состояния удовлетворяют уравнению Шрёдингера с гамильтонианом в калибровке светового конуса.

В ковариантном формализме все компоненты импульса p^{μ} — это независимые коммутирующие операторы и основное состояние может зависеть от полного вектора импульса $|p\rangle = |p^0, p^1, \ldots, p^{25}\rangle$. Сопряженные переменные x^{μ} определяют векторы положения $|x\rangle = |x^0, x^1, \ldots, x^{25}\rangle$. Существует столько векторов положений, сколько существует *пространственно-временных* точек, а состояния зависят от времени! Для заданного состояния $|\psi\rangle$ соответствующая волновая функция $\langle x | \psi \rangle$ будет зависеть от времени даже до того, как будет введено уравнение Шрёдингера.

Для понимания роли уравнения Шрёдингера давайте рассмотрим гамильтониан (24.6). Перепишем его через \dot{X} ,

$$H = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{0}^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}^{2} + X'^{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{0}^{\pi} d\sigma \frac{1}{2} \left((\dot{X} + X')^{2} + (\dot{X} - X')^{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{0}^{\pi} d\sigma L_{n} (e^{-in\sigma} + e^{in\sigma}) e^{-in\tau}, \qquad (24.40)$$

где было использовано (24.13). Все интегралы при $n \neq 0$ равны нулю, а при n = 0 правая часть дает L_0 . Однако, этот оператор неоднозначен, потому что (24.13) не приводит к нормально упорядоченному оператору L_0 . Таким образом, H равен

666

 L_0 с точностью до константы. Гамильтониан в калибровке светового конуса равен $L_0^{\perp} - 1$, что указывает на то, что ковариантный гамильтониан следует выбрать в виде

$$H = L_0 - 1 = \alpha' p^2 + N - 1.$$
 (24.41)

Данная константа упорядочения совпадает с константой, необходимой для связи соответствующей L_0 . Так как все физические состояния аннулируются $L_0 - 1$, то мы приходим к удивительному заключению, что гамильтониан аннулирует все физические состояния! Это означает, что невозможно ввести временную переменную и с помощью уравнения Шрёдингера породить нетривиальную временную эволюцию. Но с другой стороны, нет никакой необходимости вводить переменную времени и порождать временную эволюцию так, как это делалось в калибровке светового конуса. Ковариантные состояния по определению зависят от времени. Уравнение Шрёдингера превратилось в уравнение связи $H|\Phi_0\rangle = 0$. Можно сказать, что эта связь фиксирует у состояний зависимость между переменной времени и переменными положения. В импульсном пространстве оно накладывает условие массовой поверхности, которое выражает энергию p^0 через импульс \vec{p} .

Базисные векторы пространства ковариантных состояний строятся посредством действием на основное состояние $|p\rangle$ всеми возможными операторами рождения:

$$|\mathbf{r}\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} \left(a_n^{\mu\dagger}\right)^{\lambda_{n,\mu}} |\mathbf{p}\rangle.$$
(24.42)

Здесь $\lambda_{n,\mu}$ — это неотрицательные целые числа и как обычно, только их конечное подмножество отлично от нуля. Все 26 значений индекса μ можно использовать для построения базисных состояний. В калибровке светового конуса все определенные ранее базисные состояния являлись физическими состояниями. Теперь это не так: вектор $|\Phi\rangle$ представляет физическое состояние, если он удовлетворяет связям Вирасоро (24.33) и не является потомком.

Давайте точно изучим некоторые физические состояния теории. Сначала рассмотрим основное состояние $|p\rangle$. Собственное число оператора числа частиц на этом состоянии равно нулю. В силу (24.34) оно автоматически аннулируется операторами $L_{n\geq 1}$ и единственная нетривиальная связь равна

$$0 = (L_0 - 1)|p\rangle = (\alpha' p^2 - 1)|p\rangle \implies p^2 = \frac{1}{\alpha'}.$$
 (24.43)

Это выражение является условием массовой поверхности для тахионного состояния с $M^2 = -1/\alpha'$. Состояние $|p\rangle$ не является потомком, потому что в этом случае оно являлось бы потомком состояния с отрицательным собственным числом оператора числа частиц, а таких состояний в теории нет. Поэтому возникает тахионное физическое состояние. В главе 12 такое же физическое состояние было найдено с помощью квантования светового конуса открытой струны.

(•) Упражнение-разминка 24.3. С помощью (24.13) явно убедитесь, что $L_1|p\rangle = 0$.

Небольшое обобщение предыдущей конструкции позволит также рассматривать тахионные *поля*, а соответствующая связь приведет к классическим полевым уравнениям для тахиона. Общее тахионное состояние $|T\rangle$ можно построить в виде суперпозиции вакуумных векторов в импульсном представлении:

$$|T\rangle \equiv \int d^{D} p \,\phi(p)|p\rangle, \qquad (24.44)$$

где $\phi(p)$ — это произвольная функция от 4-импульса. Чтобы $|T\rangle$ было физическим состоянием, оно должно аннулироваться $(L_0 - 1)$:

$$(L_0 - 1)|T\rangle = \int d^D p \,\phi(p)(L_0 - 1)|p\rangle = \int d^D p \,\phi(p)(\alpha' p^2 - 1)|p\rangle = 0. \quad (24.45)$$

Так как вакуумные векторы $|p\rangle$ линейно независимы, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю для всех p:

$$(\alpha' p^2 - 1)\phi(p) = 0. \tag{24.46}$$

Это полевое уравнение для тахиона. Функция $\phi(p)$, введенная при построении общего тахионного состояния, оказывается тахионным полем. Так как тахионное состояние $|T\rangle$ имеет собственное число, равное нулю, то дальнейшие связи Вирасоро отсутствуют и данное состояние не может быть потомком.

Далее рассмотрим фотонные состояния, которые в квантовании светового конуса открытой струны были отождествлены как $\xi_i a_1^{I\dagger} | p^+, \vec{p}_T \rangle$. Теперь рассматрим состояния с N = 1, фиксированным импульсом p и поляризацией ξ_{μ} :

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\alpha}_{-1}^{\boldsymbol{\mu}}|\boldsymbol{p}\rangle. \tag{24.47}$$

Условие $L_0 - 1 = 0$ дает

$$0 = (\alpha' p^2 + N - 1)\xi_{\mu} \alpha^{\mu}_{-1} |p\rangle = \alpha' p^2 \xi_{\mu} \alpha^{\mu}_{-1} |p\rangle \implies p^2 = 0.$$
 (24.48)

С учетом $L_1 = \alpha_0 \cdot \alpha_1 + (\alpha_{-1} \cdot \alpha_2 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_3 + \ldots)$, условие $L_1 \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = 0$ дает

$$0 = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = \sqrt{\alpha'} p^\mu \xi_\mu |p\rangle \Rightarrow p \cdot \xi = 0.$$
 (24.49)

Операторы $L_{n\geq 2}$ автоматически аннулируют состояния $\xi_{\mu}\alpha_{-1}^{\mu}|p\rangle$. Таким образом. мы выяснили, что физические состояния фотона существуют только при $p^2 = 0$ и должны удовлетворять $p \cdot \xi = 0$. Для любого p^{μ} , удовлетворяющего $p^2 = 0$. можно выбрать лоренцевский репер $p_{\mu}(p_0, p_0, 0, ..., 0)$, тогда связь $p \cdot \xi = 0$ принимает вид

$$\boldsymbol{\xi}^0 + \boldsymbol{\xi}^1 = 1. \tag{24.50}$$

Это выражение не может являться окончательным ответом; (24.50) оставляет D-1 независимых поляризаций ξ_{μ} , а из анализа на световом конусе следовало. что фотоны обладают только D-2 независимыми поляризациями. Необходимо наложить условие того, что физические состояния определены с точностью до шпурионных состояний. Для этой цели рассмотрим потомка

$$|d\rangle = L_{-1} \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} i\epsilon |p\rangle = (ip_{\mu}\epsilon)\alpha^{\mu}_{-1}|p\rangle$$
 при $p^2 = 0.$ (24.51)

Это состояние имеет вид (24.47) при $\xi_{\mu} = ip_{\mu}\epsilon$. Из (24.49) следует, что $|d\rangle$ также является примарным, так как $p^{\mu}(i\epsilon p_{\mu}) = 0$. Поэтому $|d\rangle$ — это шпурионных состояние. Таким образом, возникает следующая эквивалентность состояний

$$\boldsymbol{\xi}_{\mu}\boldsymbol{\alpha}_{-1}^{\mu}|\boldsymbol{p}\rangle\sim(\boldsymbol{\xi}_{\mu}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\alpha}_{-1}^{\mu}|\boldsymbol{p}\rangle, \qquad (24.52)$$

и, следовательно, эквивалентность поляризаций

ſ

$$\xi^{\mu} \sim \xi^{\mu} + i p^{\mu} \epsilon$$
 при $p^2 = 0.$ (24.53)

Опять, с помощью $p_{\mu} = (p_0, p_0, 0, \dots, 0)$ — это приводит к

$$\boldsymbol{\xi}^{0} \sim \boldsymbol{\xi}^{0} - \boldsymbol{i} \boldsymbol{p}_{0} \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\mu} \quad \boldsymbol{\xi}^{1} \sim \boldsymbol{\xi}^{1} + \boldsymbol{i} \boldsymbol{p}_{0} \boldsymbol{\epsilon}. \tag{24.54}$$

Так как $\xi^0 - \xi^1 \sim \xi^0 - \xi^1 - 2ip_0\epsilon$, то представителей поляризации можно выбрать в виде

$$\boldsymbol{\xi}^0 - \boldsymbol{\xi}^1 = 0. \tag{24.55}$$

На основе этого выражения и (24.50), приходим к заключению, что физические состояния обладают D-2 независимыми поляризациями. Именно такой результат был получен в калибровке светового конуса.

Можно также рассматривать общие суперпозиции состояний. Определим состояние калибровочного поля $|A\rangle$ в виде

$$|A\rangle = \int d^D p A_{\mu}(p) \alpha^{\mu}_{-1} |p\rangle. \qquad (24.56)$$

() Упражнение-разминка 24.4. Покажите, что связи $L_0 - 1$ и L_1 приводят к $p^2 A_\mu(p) = 0$ и $p \cdot A = 0$, соответственно. Условие $p \cdot A = 0$ — это калибровочное условие Лоренца. Уравнение $p^2 A_\mu = 0$ является известным полевым уравнением Максвелла $p^2 A^\mu - p^\mu(p \cdot A) = 0$ в калибровке Лоренца.

Дополнительное обсуждение фотонных состояний содержится в задаче 24.3.

24.5. Операторы Вирасоро для замкнутых струн

Ковариантное квантование замкнутых струн не приводит к новым трудностям. Есть два набора ковариантных операторов Вирасоро, операторы с неотрицательным числом мод аннулируют физические состояния. Равенство нулю обоих операторов Вирасоро с нулевым числом мод (и подходящей константой вычитания) означает, что левые и правые операторы числа частиц обладают одинаковыми собственными значениями при действии на физические состояния. Замкнутые струны будут рассматриваться только в отсутствии компактификации.

Разложение по модам (13.24) для произвольных координат замкнутой струны имеет вид

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{\mu}\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}\left(\alpha_n^{\mu}e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^{\mu}e^{-in\sigma}\right), \qquad (24.57)$$

где $\alpha_0^{\mu} = p^{\mu} \sqrt{\alpha'/2}$. С учетом $\bar{\alpha}_0^{\mu} = \alpha_0^{\mu}$, производные координат по τ и σ выписаны в (13.26). Так же, как в (13.36),

$$(\dot{X}^{\mu} + X^{\mu\nu})^{2} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}^{\mu}_{p} \bar{\alpha}_{n-p,\mu}\right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_{n} e^{-in(\tau+\sigma)},$$
$$(\dot{X}^{\mu} - X^{\mu\nu})^{2} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha^{\mu}_{p} \alpha_{n-p,\mu}\right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{n} e^{-in(\tau-\sigma)},$$
$$(24.58)$$

где были введены определения

$$\overline{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha}_p^{\mu} \overline{\alpha}_{n-p,\mu}, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^{\mu} \alpha_{n-p,\mu}.$$
(24.59)

Это два набора операторов Вирасоро в теории замкнутых струн. Если наложить связи (24.1), то физические состояния аннулируются всеми операторами Вирасоро. Так же, как для открытых струн, это приведет к отсутствию физических состояний. Поэтому, по аналогии с квантовыми связями в теории открытых струн (24.33), для физических состояний замкнутых струн $|\Psi\rangle$ потребуем

$$(L_n - \delta_{n,0})|\Psi\rangle = 0, \quad (\bar{L}_n - \delta_{n,0})|\Psi\rangle = 0, \quad n \ge 0.$$
(24.60)

Вектор $|\Psi\rangle$, удовлетворяющий этим условиям, является представителем физического состояния замкнутой струны, если он не является потомком. Потомок примарного состояния $|p\rangle$ является состоянием, возникающим при действии на примарное состояние набором операторов Вирасоро с отрицательными модами. Причем могут быть использованы оба набора операторов (с черточкой и без черточки).

При n = 0 условия (24.60) дают

$$(L_0 - 1)|\Psi\rangle = \left(\frac{\alpha'}{4}p^2 + N - 1\right)|\Psi\rangle = 0,$$

$$(\overline{L}_0 - 1)|\Psi\rangle = \left(\frac{\alpha'}{4}p^2 + \overline{N} - 1\right)|\Psi\rangle = 0,$$
(24.61)

где N и \overline{N} — это ковариантные операторы числа частиц. Отметим, что из уравнений (24.61) следует, что $L_0 - \overline{L}_0$ аннулирует все физические состояния. Как и прежде, данное условие интерпретируется как инвариантность физических состояний относительно постоянного сдвига координаты σ на мировом листе, либо как равенство нулю двумерного импульса вдоль струны (раздел 13.2). Уравнения (24.61) приводят к *двум* выражениям для квадрата массы:

$$M^{2} = -p^{2} = \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\overline{N}-1), \qquad (24.62)$$

и поэтому возникает условие

$$N = \overline{N}.\tag{24.63}$$

С помощью (24.63) можно выписать более симметричное выражение

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2).$$
 (24.64)

Пространство состояний замкнутой струны строится действием произвольного числа осцилляторов на струнный вакуум $|p\rangle$. Для выявления тахионных состояний замкнутой струны достаточно рассмотреть вакуумное состояние и потребовать выполнения условий $L_0 - 1 = \overline{L}_0 - 1 = 0$. Для выявления безмассовых состояний замкнутой струны — поля Кальба — Рамона, гравитона и дилатона — необходимо также рассмотреть связи $L_1 = \overline{L}_1 = 0$. В силу того, что на безмассовых состояниях $N = \overline{N} = 1$, этих связей оказывается достаточно и поэтому операторы Вирасоро с более высоким числом мод автоматически аннулируют данные состояния. Конечно же, также необходимо рассмотреть эквивалентно-сти, порождаемые нулевыми состояниями (задача 24.5).

24.6. Струнное действие Полякова

Несмотря на элегантность действия (24.4), легкость, с которой из него получаются уравнения движения, импульсы и гамильтониан, уравнения связи (24.1) по-прежнему приходится накладываться извне. Теперь будет разработано другое действие, действие Полякова, уравнения связи из которого возникают не менее естественным образом. В первую очередь перепишем (24.4) в более обещающем виде:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}. \qquad (24.65)$$

Пространственно-временные индексы струнных координат сворачиваются с помощью метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Индексы α и β пробегают два значения, соответствующие двум координатам на мировом листе τ и σ :

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}}, \quad \xi^{\alpha} = (\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma).$$
 (24.66)

Также вводится *двумерная* метрика Минковского $\eta^{\alpha\beta}$. По аналогии с пространственно-временной метрикой Минковского, она диагональная; элемент «времявремя» равен -1, а элемент «пространство-пространство» равен +1:

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24.67}$$

В (24.65) суммирование происходит по повторяющимся индексам α и β , которые принимают два значения τ и σ . Раскрывая эти суммы, мы воспроизводим действие (24.4).

Приведенная выше метрика, возможно, напоминает метрику, которая возникает при обсуждении явной инвариантности действия Намбу—Гото относительно репараметризаций. При этом мы видели, что действие принимает вид (6.44):

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-\gamma}. \tag{24.68}$$

Здесь $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$, а $\gamma_{\alpha\beta}$ это — метрика на мировом листе, индуцированная метрикой Минковского объемлющего пространства. В явном виде она задается выражением (6.42):

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^{\beta}} = \partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X.$$
(24.69)

В действие Полякова входит новая метрика на мировом листе, $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$. Это что-то вроде метрики в двумерной теории гравитации. В рассматриваемом действии метрика $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ является динамической переменной, поэтому у нее есть собственные уравнения движения. Как оказывается, уравнения движения будут связывать новую метрику $h_{\alpha\beta}$ с индуцированной метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$. Метрика $h_{\alpha\beta}$ входит в действие Полякова способом, аналогичным тому, как $\eta^{\alpha\beta}$ входит в действие (24.65). Действие Полякова имеет вид

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}. \qquad (24.70)$$

Здесь $h \equiv \det(h_{\alpha\beta})$, а $h^{\alpha\beta}$ является матрицей, обратной к $h_{\alpha\beta}$:

$$h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \quad h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = 2.$$
 (24.71)

Вариация действия Полякова по отношению к метрике $h_{\alpha\beta}$ приводит к связям Вирасоро. Так как $h_{\alpha\beta}$ — это симметричная два-на-два матрица и у таких матриц три независимых элемента, то следует ожидать появления трех связей. Однако есть только два условия Вирасоро. Каким образом эти факты могут быть согла-сованы?

Сперва заметим, что метрика $h^{\alpha\beta}$ входит в действие в виде специальной комбинации $\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}$. В разделе 6.2 мы убедились в том, что множитель с квадратным корнем необходим, для репараметризационной инвариантности меры $(d\tau \ d\sigma \ \sqrt{-h})$. Множитель $h^{\alpha\beta}$ необходим для свертки индексов производных X. Хотя $h^{\alpha\beta}$, очевидно, определяется тремя вещественными числами в любой фиксированной точке на мировом листе, комбинация $\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}$ на самом деле определяется только двумя числами! В этом особенность двумерных метрик. Определяние следующую комбинацию

$$M^{\alpha\beta} = \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}.$$
 (24.72)

Будет показано, что симметричная матрица *М* удовлетворяет дополнительной связи. Для понимания того, почему двумерные метрики являются специальными,

обозначим через n размер матрицы $h^{\alpha\beta}$. Тогда

$$\det(M^{\alpha\beta}) = (\sqrt{-h}) \det(h^{\alpha\beta}) = \frac{(-h)^{n/2}}{\det(h_{\alpha\beta})} = \frac{(-h)^{n/2}}{h} = -(-h)^{n/2-1}.$$
 (24.73)

Окончательное упрощение происходит только при n = 2, в этом случае находим

$$\det\left(M^{\alpha\beta}\right) = -1. \tag{24.74}$$

Симметричная матрица 2×2 с детерминантом, равным константе, определяется двумя параметрами. Именно поэтому вариация метрики имеет только две независимые связи, т.е. столько, сколько нам нужно.

Однако вступление явно затянулось. Давайте всерьез возьмемся за вариацию действия Полякова. Сначала проварьируем его по отношению к струнным координатам X^{μ} . Вариация имеет вид

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} (\delta X^{\mu}) \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu} = = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \delta X^{\mu} \partial_{\alpha} (\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}), \qquad (24.75)$$

где не учитываются полные производные, которые в случае открытых струн приводят к известным граничным вкладам. В результате возникает уравнение движения

$$\partial_{\alpha} \left(\sqrt{-h} h^{\alpha \beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) = 0.$$
 (24.76)

Данное уравнение пока не является волновым уравнением для X^{μ} , но скоро мы его получим.

Для вариации по отношению к метрике $h^{\alpha\beta}$ необходим предварительный результат. Пусть A — это матрица 2 × 2 и пусть δA обозначает ее вариацию:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{n} \quad \delta A = \begin{pmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} \end{pmatrix}. \tag{24.77}$$

Прямым вычислением проверяется, что вариация det A может быть представлена в виде

$$\delta \det A = (\det A) \operatorname{Tr}(A^{-1} \delta A), \qquad (24.78)$$

где A^{-1} обозначает матрицу, обратную к A, а Tr обозначает след. На самом деле данное тождество справедливо для матриц произвольной размерности.

Упражнение-разминка 24.5. Явно убедитесь, что уравнение (24.78) справедливо для матриц 2 × 2.

Пусть $\delta h^{\alpha\beta}$ обозначает вариацию метрики. С помощью (24.78) можно вычислить вариацию h:

$$\delta h = \delta \det A(h_{\alpha\beta}) = h(h^{\alpha\beta} \delta h_{\beta\alpha}), \qquad (24.79)$$

Вариацию $\delta h_{\alpha\beta}$ необходимо записать через $\delta h^{\alpha\beta}$. С этой целью найдем вариацию второго уравнения (24.71)

$$\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = 0 \implies h^{\alpha\beta} \delta h_{\beta\alpha} = -\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \qquad (24.80)$$

где использовано $\delta h_{\alpha\beta} = \delta h_{\beta\alpha}$. Тогда можно представить вариацию h в виде

$$\delta h = -h \, \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \tag{24.81}$$

Конечно же, на самом деле, требуется найти вариацию $\sqrt{-h}$. Теперь это можно сделать следующим образом

$$\delta(\sqrt{-h}) = -\frac{1}{2} \frac{\delta h}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2} \frac{(-h) \,\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}} = \frac{1}{2} \sqrt{-h} \,\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \tag{24.82}$$

Наконец, рассмотрим вариацию действия (24.70) по отношению к метрике:

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-h} \left(-\frac{1}{2} \, \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \left(h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X \cdot \partial_{\delta} X \right) + \delta h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X \right) = \\ = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-h} \, \delta h^{\alpha\beta} \left(\partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X - \frac{1}{2} \, h_{\alpha\beta} \left(h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X \cdot \partial_{\delta} X \right) \right). \quad (24.83)$$

Таким образом, уравнение движения, которое возникает из вариации $\delta h^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X \cdot \partial_{\delta} X) = 0.$$
 (24.84)

Вспоминая что $\partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X$, на самом, деле является индуцированной метрикой в (24.69), приведенное выше уравнение может быть записано в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}) = 0. \qquad (24.85)$$

Так как множитель у $(h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta})$ не имеет свободного индекса, то из данного уравнения следует, что метрика мирового листа $h^{\alpha\beta}$ с точностью до множителя равна индуцированной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$ в каждой точке мирового листа. Коэффициент пропорциональности может зависеть от положения. Он *не определяется* из (24.85): для заданного решения этого уравнения $h^{\alpha\beta}$, метрика $h'_{\alpha\beta} = \Omega^2 h_{\alpha\beta}$, где Ω произвольная отличная от нуля функция, также является решением. Это происходит потому, что второе слагаемое в левой части (24.85) содержит произведение метрики и обратной к ней. Таким образом, решение уравнения (24.85) записывется в виде

$$h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}, \qquad (24.86)$$

где $f(\xi)$ — это некоторая произвольная, отличная от нуля функция на мировом листе. Введением $f^2(\xi)$ в (24.86) мы делаем дополнительное допущение: коэффициент пропорциональности метрики положителен. У этого утверждения тесть физический смысл: понятия времениподобных и пространственноподобных векторов, определенных посредством $h_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$, взаимно согласованы. Так как индуцированная метрика фактически является внешней метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ на мировом листе, то вектор на мировом листе является пространственноподобным или времениподобным по отношению к $h_{\alpha\beta}$, и он будет, соответственно, пространственноподобным или времениподобным, по отношению к метрике Минковского. Метрики, связанные (положительным) коэффициентом пропорциональности, называются конформными друг другу. Таким образом, метрика мирового листа конформна индуцированной метрике.

Давайте посмотрим, что происходит с действием Полякова при подстановке в него полученных соотношений. Сначала с помощью (24.86) вычислим $\sqrt{-h}h^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta}$. Хорошо, что произвольная функция $f(\xi)$ выпадает из вычислений. В этом можно убедиться, если вспомнить, что детерминант матрицы $M^{\alpha\beta}$ равен (-1), вне зависимости от метрики $h^{\alpha\beta}$. При перенормировке метрики $h^{\alpha\beta}$ единственное, что может произойти с $M^{\alpha\beta}$ — это то, что она тоже перенормировке метрики $h^{\alpha\beta}$ образом, нормировка $h^{\alpha\beta}$ не влияет на $M^{\alpha\beta}$. Этот аргумент можно проверить явным образом. Обозначим $\gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta})$ и с помощью (24.86) определим детерминант $h_{\alpha\beta}$ и обратную матрицу $h^{\alpha\beta}$:

$$h = f^4 \gamma$$
 μ $h^{\alpha\beta} = \frac{1}{f^2} \gamma^{\alpha\beta}$, (24.87)

где $\gamma^{\alpha\beta}$ является матрицей, обратной к $\gamma_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{-h}h^{\alpha\beta} = f^2 \sqrt{-\gamma} \frac{1}{f^2} \gamma^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta}.$$
 (24.88)

Мы показали, что произвольная функция *f* несущественна. Теперь, при подстановке этого выражения обратно в действие Полякова (24.70), получаем

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau \,d\sigma \,\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}.$$
 (24.89)

Второе уравнение в (24.71), справедливое для произвольной двумерной метрики, теперь дает

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, \sqrt{-\gamma}. \tag{24.90}$$

Это действие является в точности действием Намбу—Гото. Мы приходим к заключению, что действие Полякова на классическом уровне эквивалентно действию Намбу—Гото.

Упражнение-разминка 24.6. Убедитесь, что если вместо (24.86) выбрать $h^{\alpha\beta} = -f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}$, то действие Намбу—Гото получается с неправильным знаком.

При доказательстве того, что множитель $f^2(\xi)$ в (24.86) несущественнен для вычисления струнного действия, было также показано, что действие Поля-

кова инвариантно относительно преобразования

$$h_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \rightarrow \Omega^2(\tau,\sigma)h_{\alpha\beta}(\tau,\sigma),$$
 (24.91)

где Ω^2 — это произвольная функция на мировом листе. Такая перенормировка метрики мирового листа называется *преобразованием Вейля*. Инвариантность действия Полякова относительно преобразования Вейля указывает на то, что расстояния, измеренные с помощью метрики $h_{\alpha\beta}$ на мировом листе, не имеют физического смысла.

Нам все еще остается показать, как возникают волновые уравнения для струнных координат и связи Вирасоро. Уравнение движение (24.76) для X^{μ} выглядит достаточно сложным образом, а уравнение движения (24.84) для $h_{\alpha\beta}$ никак не напоминает связи Вирасоро. Чтобы разобраться с этим, воспользуемся репараметризационной инвариантностью и выберем $h_{\alpha\beta}$ в удобном виде.

Из двумерной геометрии хорошо известно, что репараметризация координат позволяет локально привести произвольную метрику $h_{\alpha\beta}$ на поверхности к виду

$$h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi)\eta_{\alpha\beta}. \tag{24.92}$$

Здесь ρ — это конформный фактор, а $\eta_{\alpha\beta}$ — это двумерная метрика Минковского. Метрика $h_{\alpha\beta}$ называется конформно плоской. Ограничение на класс координат на мировом листе, в которых метрика является конформно плоской, соответствует частичному выбору калибровки. Такая калибровка называется конформной. В конформной калибровке $\sqrt{-h}h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, поэтому уравнение (24.76) принимает вид

$$\partial_{\alpha} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) = \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} X^{\mu} = 0.$$
 (24.93)

Расписывая суммы по двумерным индексам, видим, что возникающее выражение является в точности волновым уравнением. Уравнения (24.84) в конформной калибровке (24.92) сводятся к

$$\partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X \cdot \partial_{\delta} X) = 0.$$
 (24.94)

Расписывая выражение в скобках, получаем

$$\partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (-\dot{X}^2 \cdot \dot{X}'^2) = 0.$$
 (24.95)

Это система из трех уравнений, но только два из них независимы. При $\alpha = \beta = 1$ получаем уравнение

$$\dot{X}^2 + \frac{1}{2} \left(-\dot{X}^2 + \dot{X}'^2 \right) = 0 \implies \dot{X}^2 + \dot{X}'^2 = 0,$$
 (24.96)

которое является одной из связей. При $\alpha = 1, \beta = 2$ получаем уравнение

$$\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{0}, \tag{24.97}$$

676

которое является второй связью. Наконец, при $\alpha = \beta = 2$ получаем лишнее уравнение

$$X^{\prime 2} - \frac{1}{2} \left(-\dot{X}^2 + X^{\prime 2} \right) = 0 \implies \dot{X}^2 + \dot{X}^{\prime 2} = 0, \qquad (24.98)$$

Таким образом, показано, что в конформной калибровке уравнения движения для метрики мирового листа сводятся к известным связям Вирасоро.

В силу своей элегантности и удобства, струнное действие Полякова, как правило, является исходной позицией в любом подробном анализе ковариантного квантования струны. При таком анализе различного рода факты, для доказательства которых мы должны были обращаться к результатам, полученным ранее в калибровке светового конуса, получают независимое обоснование.

Задачи

Задача 24.1. Ковариантное квантование точечной частицы

Лагранжиан точечной частицы равен $L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}$, где $\dot{x}^{\mu} = dx^{\mu}(\tau)/d\tau$.

- (a) Вычислите канонический импульс p_{μ} , сопряженный $x^{\mu}(\tau)$. Убедитесь, что импульс удовлетворяет уравнению связи $p^2 + m^2 = 0$. Докажите, что скорость нельзя выразить через импульс однозначным образом, показав, что из заданного решения можно легко получить любое другое решение. Более того, только для импульсов, которые удовлетворяют уравнению связи, возможно выразить скорости через импульсы.
- (б) Покажите, что $H \equiv p_{\mu} \dot{x}^{\mu} L = 0$. Задайте коммутационные соотношения и опишите пространство состояний.
- (в) Физические состояния это те, которые удовлетворяют уравнению связи. Постройте все возможные состояния в виде произвольных линейных суперпозиций и сравните с (11.48). Наложите связь и покажите, что волновая функция, соответствующая физическим состояниям, удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона для скалярного поля массы *m*.

Задача 24.2. Примарные состояния и их потомки

Рассмотрите операторы Вирасоро

$$L_n=\frac{1}{2}\sum_p\alpha_{n-p}\alpha_p,$$

соответствующие одной координате открытой струны X с осцилляторами, удовлетворяющими $[\alpha_m, \alpha_n] = m \delta_{m+n,0}$. Состояния, которые можно построить из вакуума, с импульсом $|0\rangle$ при $N \leq 4$ имеют вид:

$$N = 0; |0\rangle;$$

$$N = 1; \quad \alpha_{-1}|0\rangle;$$

$$N = 2; \quad \alpha_{-2}|0\rangle, \quad \alpha_{-1}\alpha_{-1}|0\rangle;$$

$$N = 3; \quad \alpha_{-3}|0\rangle, \quad \alpha_{-2}\alpha_{-1}|0\rangle, \quad (\alpha_{-1})^{3}|0\rangle;$$

$$N = 4; \quad \alpha_{-4}|0\rangle, \quad \alpha_{-2}(\alpha_{-1})^{2}|0\rangle, \quad \alpha_{-3}\alpha_{-1}|0\rangle, \quad \alpha_{-2}\alpha_{-2}|0\rangle, \quad (\alpha_{-1})^{4}|0\rangle.$$
(1)

Мы хотим показать, что на каждом уровне N можно построить эквивалентный базис состояний, в котором каждое состояние — это либо примарное, либо потомок от примарного состояния из приведенного выше списка.

- (a) Определите норму $|0\rangle$, как $\langle 0|0\rangle \equiv 1$. Объясните, почему любое состояние $|\chi\rangle$ в (1) обладает положительной нормой $\langle \chi|\chi\rangle > 0$ и почему любые два отличные друг от друга состояния $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$ ортогональны: $\langle \chi_2|\chi_1\rangle = 0$. Покажите, что любая не равная нулю линейная комбинация перечисленных выше состояний является состоянием с положительной нормой и в результате никакое состояние в пространстве не является одновременно и примарным и потомком.
- (б) Объясните, почему состояние $|0\rangle$ является примарным. Теперь рассмотрите состояние $\alpha_{-1}|0\rangle$ с N = 1. Данное состояние либо потомок от $|0\rangle$, либо примарное. Покажите, что единственно возможный потомок от $L_{-1}|0\rangle$ равен нулю. Докажите, что $\alpha_{-1}|0\rangle$ является примарным и обозначьте его $|p_1\rangle$. С помощью базиса, аналогичного базису (24.38), объясните, почему потомки от $|0\rangle$ с одним и более операторами L_{-1} равны нулю.
- (в) Покажите, что для N = 2 одно состояние является потомком от $|0\rangle$ и одно состояние является потомком от $|p_1\rangle$.
- (г) Покажите, что для N = 3 одно состояние является потомком от $|0\rangle$ и два состояния являются потомками от $|p_1\rangle$.
- (д) Для N = 4 есть три возможных потомка от $|p_1\rangle$. Покажите, что одна из линейных комбинаций этих состояний равна нулю:

$$\left(L_{-3}-2L_{-2}L_{-1}+\frac{1}{2}(L_{-1})^{3}\right)|p_{1}\rangle=0,$$

а другие две приводят к состояниям, эквивалентным первым двум из N = 4 списка. Отметим, что есть только два возможных потомка от $|0\rangle$. Поэтому последние три состояния в списке должны распадаться на два потомка и одно новое примарное состояние $|p_4\rangle$. Покажите, что с точностью до произвольной нормировки,

$$|p_4\rangle = \left(\alpha_{-3}\alpha_{-1} - \frac{3}{4}(\alpha_{-2})^2 - \frac{1}{2}(\alpha_{-1})^4\right)|0\rangle,$$

и явно выпишите три последние состояния в списке в виде линейной суперпозиции этого примарного состояния и двух потомков.

Задача 24.3. Ковариантное описание фотонных состояний

(а) Рассмотрите уравнение и калибровочные преобразования поля Максвелла:

$$p^2 A^\mu - p^\mu (p \cdot A) = 0, \quad \delta A^\mu = i p^\mu \epsilon.$$

Покажите, что для $p^2 \neq 0$ возможно так выбрать потенциалы, чтобы они удовлетворяли калибровочному условию Лоренца $p \cdot A = 0$. Также покажите, что для $p^2 = 0$ величина $p \cdot A$ калибровочно инвариантна и равна нулю на уравнениях движения. Отсюда следует, что калибровочное преобразование

Лоренца, в целом, выполняется для произвольных p. Однако, отсюда также следует, что для $p^2 = 0$ калибровка Лоренца не фиксирует калибровочную симметрию. Мы уже сталкивались с этим явлением: при $p^2 = 0$ решения уравнений движения в калибровке Лоренца характеризуются (D - 1) независимыми степенями свободы.

(б) Рассмотрите взаимодействие калибровочного поля

$$\int A_{\mu} j^{\mu} d^{D} x$$

с сохраняющимся током j^{μ} . Покажите, что при $p^2 = 0$ та часть калибровочного поля, которую можно откалибровать, выпадает из данного взаимодействия.

(в) Рассмотрите потомка $|D\rangle$ в русле обсуждения общей суперпозиции (24.56):

$$|D
angle = L_{-1} rac{1}{\sqrt{2lpha'}} \int d^D p \, i\epsilon(p) |p
angle$$

Когда $|D\rangle$ является шпурионным состоянием? Покажите, что при $p^2 = 0$ возникает отождествление $A^{\mu}(p) \simeq A^{\mu}(p) + ip^{\mu}\epsilon(p)$. Это есть калибровочная инвариантность на массовой поверхности.

Задача 24.4. DO-браны, открытые струны и М-теория

- (а) Мы хотим показать, что невозможна ситуация, когда на D0-бране расположен только один конец открытой струны. Интуитивно ясно, что струнному заряду, рассматриваемому как ток на струне, на точечной D0-бране некуда течь. На более количественном уровне, на D0-бране, как и на любой D-бране есть калибровочное поле, взаимодействующее с концами струны согласно (16.54). Так как D0-брана не имеет пространственных координат, то калибровочное поле — это просто A_0 . Покажите, что действие Максвелла обращается в нуль и в результате вариация A_0 приводит к противоречивым уравнениям движения. Отметим, что противоречивость устраняется в случае, когда на D0-бране расположены два конца открытой струны.
- (б) Рассмотрите ковариантное квантование открытой струны, концы которой расположены на D0-бране. Опишите основное состояние с учетом того, что импульс обладает лишь одной компонентой. Постройте основные состояния с N = 0 и рассмотрите уравнение движения для тахионного поля $\phi(t)$. Постройте физические состояния с N = 1. Покажите, что подходящие шпурионные состояния отсутствуют и есть D независимых физических состояний с нулевым импульсом.
- (в) Пусть D0-брана имеет массу m_0 (см. раздел 18.4). В IIА-теории суперструн применима такая же формула и известно, что связанное состояние n D0-бран имеет массу, в точности равную nm_0 . Такие состояния могут быть отождествлены с импульсными состояниями, возникающими из компактного одиннадцатого измерения, если предположить, что импульс p вдоль этого измерения

679

дает вклад в массу m = p эффективно десятимерной частицы. Чему равен радиус этого одиннадцатого измерения \overline{R} ? Каково его поведение как функции от g? Этот результат представляет собой часть доказательства того, что Мтеория в одиннадцати измерениях, компактифицированная на окружность, является IIA-теорией суперструн.

Задача 24.5. Состояния гравитона и дилатона в ковариантном квантовании

Рассмотрите состояния замкнутой струны $\xi_{\mu\nu} \alpha_{-1}^{\mu} \overline{\alpha}_{-1}^{\nu}$ с $\xi_{\mu\nu} = \xi_{\nu\mu}$.

- (a) Покажите, что связи Вирасоро приводят к условиям $p^2 = 0$ и $p_{\mu}\xi^{\mu\nu} = 0$.
- (б) Найдите шпурионные состояния, которые порождают отношение эквивалентности физических состояний $\xi^{\mu\nu} \sim \xi^{\mu\nu} + p^{\mu} \epsilon^{\nu} + p^{\nu} \epsilon^{\mu}$, при $p^2 = 0$ и $p \cdot \epsilon = 0$.
- (в) Покажите, что имеется (D-2)(D-1)/2 независимых физических степеней свободы в состоянии $\xi_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-1}\vec{\alpha}^{\nu}_{-1}|p\rangle$, для каждого значения p_{μ} , удовлетворяющего условию $p^2 = 0$. Это и есть степени свободы гравитона и скалярного дилатона.

Глава 25

Взаимодействия струн и римановы поверхности

Мировые поверхности взаимодействующих открытых струн являются римановыми поверхностями и процессы взаимодействия сводятся к построению пространств модулей этих поверхностей. С помощью конформного отображения определяются канонические реализации взаимодействующих мировых поверхностей в калибровке светового конуса. Обосновывается и обсуждается знаменитая амплитуда Венециано для взаимодействия тахионов открытых струн.

25.1. Введение

Процессы взаимодействия и силы, которые в них участвуют, делают окружающий мир весьма интересным. Если бы электрон и протон не взаимодействовали, то не было бы атома водорода. Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$ определяет силу электромагнитных взаимодействий и потенциал взаимодействия между электроном и протоном (см. раздел 13.4). Раскаленная нить лампочки излучает фотоны, часть из которых регистрируется глазом. Процессы излучения и поглощения также являются взаимодействиями. Нейтрон может превратиться в протон, электрон и антинейтрино. Это процесс, называемый β -распадом, является результатом слабого взаимодействия.

В теории струн сила взаимодействий параметризуется струнной константой связи g. Как обсуждалось в разделе 13.4, значение этого безразмерного числа определяется средним значением поля дилатона. Струнная константа связи g вместе с параметром наклона α' определяет гравитационную постоянную. Константы g и α' также определяют натяжение D-бран.

В теории струн взаимодействия возникают весьма элегантно, потому что они описываются процессами, в которых струны объединяются и расшепляются. В этих процессах мировые поверхности свободных струн комбинируются и образуют единую мировую поверхность, которая соответствует данному взаимодействию. Напомним, что мировые поверхности распространяющихся струн определяют двумерное пространство параметров (τ , σ). Для свободной открытой струны это пространство параметров является бесконечной полоской; для свободной замкнутой струны это бесконечный цилиндр.

Римановы поверхности — одни из наиболее интересных среди двумерных поверхностей. Можно сказать, что это поверхности, на которых две координаты

образуют одну комплексную переменную. Римановы поверхности сохраняются при конформных отображениях, поэтому понятие расстояний *a priori* отсутствует! Неэквивалентные римановы поверхности могут различаться параметрами, которые называются модулями. Нахождение способа построения всех римановых поверхностей с соответствующими модулями является трудной математической проблемой. Наш анализ струнных взаимодействий приведет к весьма строгому доказательству следующего замечательного утверждения: мировые поверхности взаимодействующих струн приводят к искомому методу построения.

Мировые поверхности струн можно использовать для вычисления квантовомеханических амплитуд рассеяния. На основе анализа римановых поверхностей будет получена амплитуда рассеяния четырех тахионов, знаменитая амплитуда Венециано. Теория струн началась именно после открытия Венециано этой амплитуды. Можно сказать, что до этого места нашего курса, мы шли по историческому пути развития в сильной степени наоборот!

Прежде чем начать, сделаем один комментарий о терминологии. Мировая поверхность струны была определена как пространственно-временная поверхность $X^{\mu}(\tau, \sigma)$, которая описывает историю распространения струны. Как упоминалось в разделе перед уравнением (6.29), физики иногда используют термин мировая поверхность также и для обозначения пространства параметров (τ, σ). В настоящей главе будет использоваться именно это альтернативное значения данного термина.

25.2. Взаимодействия и наблюдаемые

Прежде чем начать изучение струнных взаимодействий и римановых поверхностей, давайте подготовим почву для понятия «взаимодействие». Наша цель состоит в сопоставлении описанию набора взаимодействующих струн некоторого числа, которое дает вероятность того, что событие произойдет. Процедура состоит из трех пунктов.

- 1. Изображение струнной диаграммы и вычисление конформного отображения, которое приводит к канонической реализации данной диаграммы.
- Вычисление амплитуды рассеяния с помощью конформной теории поля на основе канонической реализации.
- Формульный перевод амплитуды рассеяния в сечение. Сечение является наблюдаемой величиной.

Изучим более подробно пункт номер (1). Это влечет за собой понимание интереснейшей связи между струнными диаграммами и римановыми поверхностями. Пункт номер (2) во всей его общности, является предметом более углубленных курсов теории струн. Пункт (3) на самом деле принадлежит курсу квантовой теории поля. Пункт (1) во многих отношениях является наиболее нетривиальным из трех.

Давайте рассмотрим три данных пункта для случая точечной частицы в четырехмерном пространстве-времени. Рассмотрим специальную теорию с двумя типами скалярных частиц: частицы ϕ с массой M и частицы χ с массой m. Предположим, что M > 2m, так что частица ϕ может распадаться на две частицы χ . Действительно, в покоящейся системе полная энергия частицы ϕ равна Mc^2 и для образования двух частиц χ необходимо иметь по меньшей мере $2mc^2$. Таким образом, M > 2m следует из закона сохранения энергии и разница $(M - 2m)c^2$ переходит в кинетическую энергию возникающих частиц χ .

Диаграммой из п. (1) является простая схема, показанная на рис. 25.1. На этой схеме, которая называется диаграммой Фейнмана, три линии сходятся в точке.

Одна из этих линий, показанная пунктиром, соответствует частице ϕ и две другие соответствуют частицам χ . На шаге (2) необходимо вычислить амплитуду распада. Для этого введем константу λ , которая определяет силу взаимодействия. Значение λ является параметром теории. Если обозначить p импульс входящей частицы ϕ , а импульсы исходящих частиц χ через p_1 , p_2 , то амплитуда перехода из начального состояния частицы ϕ в конечное состояние двух исходящих частиц χ равна



Рис. 25.1. Диаграмма иллюстрирует распад частицы ϕ на две частицы χ

_{out}
$$\langle p_1, p_2 | p \rangle_{in} = -i(2\pi)^4 \delta(p - p_1 - p_2) T(p, p_1, p_2),$$
 (25.1)

где амплитуда распада Т задается

$$T(p, p_1, p_2) = \lambda. \tag{25.2}$$

Четырехмерная дельта-функция $\delta(p - p_1 - p_2)$ обеспечивает сохранение энергии и импульса. Пункт (3) состоит в построении наблюдаемой. В этом случае вычисляется время жизни τ_{ϕ} частицы ϕ . Вычисление времени жизни на основе амплитуды является стандартной процедурой. Ответ имеет вид

$$\frac{1}{\tau_{\phi}} = \frac{\lambda^2}{32\pi} \frac{1}{M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}.$$
 (25.3)

Это выражение вполне осмысленно: по мере того, как параметр взаимодействия λ стремится к нулю, время жизни частицы ϕ становится бесконечно большим. Множители при λ^2 являются кинематическими; они контролируют пространство состояний продуктов распада.

Все становится более интересным, если рассмотреть возможность рассеяния двух частиц χ друг на друге. В этом случае начальное и конечное состояния описывают две частицы χ . Обозначим p_1 и p_2 импульсы входящих частиц, а p'_1 и p'_2 — импульсы исходящих частиц. Теперь построим простейшие диаграммы Фейнмана, соответствующие данному процессу рассеяния. Так как две частицы χ могут слиться в частицу ϕ , после чего ϕ может распасться на две χ , процесс рассеяния будет вовлекать основное взаимодействие $\phi \chi \chi$ дважды. Как показано на рис. 25.2, для этого процесса существуют три возможные диаграммы Фейнмана. Диаграммы Фейнмана являются полезным наглядным инструментом.



Рис. 25.2. Три возможные диаграммы Фейнмана рассеяния двух частиц *χ*, на всех диаграммах промежуточной частицей является частица *φ*

В формулировке квантовой механики в виде интеграла по путям, амплитуда процесса получается сложением амплитуд всех «путей», согласованных с начальным и конечным состояниями. Диаграмма Фейнмана некоторого процесса — это способ описать специальный класс допустимых путей.

На диаграмме (a) входящие частицы χ с импульсами p_1 и p_2 объединяются и образуют частицу ϕ с импульсом $p_1 + p_2$. Затем эта частица распадается на две частицы χ с импульсами p'_1 и p'_2 . В данном процессе все внешние частицы (все χ) нахолятся на массовой поверхности, то есть все они удовлетворяют $p^2 = -m^2$ и таким образом соответствуют физическим состояниям частиц. Что происходит с промежуточной частицей ϕ ? Ее импульс равен $p_1 + p_2$ и, в общем случае, $(p_1+p_2)^2 \neq -M^2$. Промежуточная частица, как правило, *не находится* на массовой поверхности; промежуточные состояния не являются физическими состояниями частиц. Если начальное состояние тщательно выбрано, то ϕ может оказаться на массовой поверхности: допустимая энергия центра масс для этого в точности должна совпадать с Mc^2 . Диаграмма (a) дает вклад в амплитуду рассеяния вне зависимости от того, находится частица ϕ на массовой поверхности или нет.

Так как измеряются только начальные и конечные состояния, взаимодействия могут происходить более хитрым способом. В частности, есть диаграммы, в которых промежуточная частица ϕ никогда не может находиться на массовой поверхности. Рассмотрим диаграмму (δ), где входящая частица χ с импульсом p_1 превращается в исходящую частицу χ с импульсом p'_1 плюс промежуточная частица ϕ . У этой промежуточной частицы ϕ нет никакой возможности быть физической — закон сохранения энергии запрещает образование физических частиц χ и ϕ из одной физической частицы χ (почему?). Промежуточная частица объединяется с входящей частицей χ с импульсом p_2 и возникает исходящая χ с импульсом p'_2 . На диаграмме (s) показан последний вариант: χ с импульсом p_2 порождает промежуточную ϕ и исходящую χ с импульсом p'_1 . Промежуточная частица объединяется с частицей χ и возникает исходящая χ с импульсом p'_2 . На этих трех диаграммах промежуточный импульс переносимый частицей ϕ равен

первая диаграмма:
$$p_1 + p_2$$
,
вторая диаграмма: $p_1 - p'_1$, (25.4)
третья диаграмма: $p_2 - p'_1$.

На этом п. (1) завершается.
На основании трех данных диаграмм можно перейти к п. (2), вычислению амплитуды рассеяния. Это вычисление аналогично тому, которое привело нас к уравнениям (25.1) и (25.2). Правила Фейнмана из теории поля дают

$$\sup \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle_{in} = -i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) T(p_1, p_2; p'_1, p'_2), \qquad (25.5)$$

где

$$T(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = -\lambda^2 \left(\frac{1}{(p_1 + p_2)^2 + M^2} + \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 + M^2} + \frac{1}{(p_2 - p'_1)^2 + M^2} \right).$$
(25.6)

Полезно определить инвариантные величины s, t и u, которые описывают квадраты промежуточных импульсов. Обозначим

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p_1')^2, \quad u = -(p_2 - p_1')^2.$$
 (25.7)

В системе отсчета центра масс полный пространственный импульс равен нулю, поэтому $p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{0})$, где E_1 и E_2 — это энергии входящих частиц в системе центра масс. Так как *s* является лоренцевскием инвариантом, то его можно вычислить в любой системе отсчета. В системе центра масс находим $s = (E_1 + E_2)^2$. Таким образом, инвариант *s* дает квадрат полной энергии в системе центра масс. С помощью инвариантов *s*, *t* и *u* амплитуда рассеяния представляется в виде

$$T(s, t, u) = \lambda^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right).$$
(25.8)

Каждый знаменатель имеет вид $(p^2 + M^2)$, где p — это импульс промежуточной частицы. Когда промежуточная частица находится на массовой поверхности, знаменатели обращаются в ноль и возникает полюс амплитуды. Таким способом полюса амплитуд рассеяния сообщают о присутствии в теории частиц: соответствующие значения $-p^2$ равны массам частиц. Таким образом, например, если изначально было известно только о частицах χ с массой m, то из уравнения амплитуды можно было бы заключить, что существует промежуточная частица с массой M. На этом п. (2) завершается.

Хотя амплитуда рассеяния весьма интересна, она не является наблюдаемой. С ее помощью вычисляется сечение рассеяния σ — величина с размерностью площади. В рассмотренной выше задаче сечение — это эффективная площадь поверхности, окружающая частицу-мишень χ . Через эту поверхность проходит входящий пучок частиц χ , если площадь сечения входящего пучка равна A, то вероятность \mathcal{P} того, что какая-либо частица пучка провзаимодействует с мишенью, равна σ/A . От полных сечений можно перейти к дифференциальным сечениям $d\sigma$, что дает, например, эффективную площадь частиц, рассеивающихся на малый телесный угол $d\Omega$ в некотором выбранном направлении. Дифференциальное сечение является типичной величиной, которая вычисляется теоретиками и измеряется экспериментаторами. Стандартная модель была проверена в значительной мере путем сравнения предсказанных и измеренных сечений. Дифференциальные сечения вычисляются с помощью методов теории поля. Это интегралы от $|T|^2$ (с точностью до соответствующих кинематических множителей) по допустимому фазовому пространству. В рассмотренном примере дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4s} \left| \frac{T}{4\pi} \right|^2. \tag{25.9}$$

На этом п. (3) завершается.

25.3. Струнные взаимодействия и глобальные мировые поверхности

Число возможных способов взаимодействия струн достаточно ограничено. Два возможных взаимодействия открытых струн происходят следующим образом: открытая струна может расщепиться на две открытые струны, и две открытые струны могут объединиться в одну открытую струну. Струнные диаграммы описывают взаимодействия струн; они аналогичны диаграммам Фейнмана в физике частиц. Ключевое место струнной диаграммы — это мировая поверхность с координатами (τ , σ). Струнная диаграмма не является представлением пространственно-временной поверхности, заметаемой струной. В струнной диаграмме мировые поверхности свободных струн складываются и образуют мировую поверхность процесса взаимодействия.

Так как выбор калибровки влияет на способ описания мировой поверхности, то взаимодействия следует рассматривать в специальной калибровке. Напомним, как мировые поверхности выглядят в статической калибровке. В этой калибровке

$$X^0(\tau,\sigma) = c\tau \tag{25.10}$$

и струны параметризованы энергией, которую они переносят:

$$\sigma \in \left[0, \frac{E}{T_0}\right] = [0, 2\pi \alpha' E], \qquad (25.11)$$

где T_0 — натяжение струны. Так как энергия должна сохраняться, а именно энергия струны определяет ее длину σ , то полная длина σ при взаимодействиях не должна изменяться. На рис. 25.3 показана струна с энергией E, расщепляющаяся на две струны с энергиями E_1 и E_2 . Отметим, что входящая струна с энергией Eполубесконечна в направлении прошлого, а исходящие струны полубесконечны в направлении будущего. В отдаленном прошлом $\tau \to -\infty$ существует только одна струна; в отдаленном будущем $\tau \to +\infty$ существуют две струны. Также показана точка взаимодействия Q. Взаимодействие происходит при некотором значении τ_Q параметра τ . Для каждого $\tau < \tau_Q$ есть только одна струна, а для каждого $\tau > \tau_Q$ есть две струны.

Также возможны несколько более сложные процессы. Две струны с энергиями E_1 и E_2 могут встретиться и образовать одну открытую струну с энергией



Рис. 25.3. Основной тип взаимодействия открытых струн, при котором струна с энергией E расщепляется на струны с энергиями E_1 и E_2 , взаимодействие происходит при $\tau = \tau_0$



Рис. 25.4. Входящие открытые струны (один и два) объединяются и образуют промежуточную струну, которая затем расщепляется на струны три и четыре

 $E_1 + E_2$. Эта промежуточная струна может затем расщепиться на две открытые струны с энергиями E_3 и E_4 , такими что $E_3 + E_4 = E_1 + E_2$ (см. рис. 25.4). С помощью такой струнной диаграммы можно вычислить струнную амплитуду, независимо от типов частиц, соответствующих квантовым состояниям струн. Например, начальные квантовые состояния двух входящих струн могут быть: двумя тахионами, или двумя фотонами, или фотоном и тахионом, или любыми двумя частицами из спектра квантовой струны. То же самое справедливо и для исходящих состояний. Струнные диаграммы универсальны; информация о промежуточных частицах задействована только в п. (2) вычисления амплитуды.

Теперь рассмотрим струнные диаграммы в калибровке светового конуса. В этой калибровке ((9.62) при $\beta = 2$)

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \pi \mathcal{P}^{\tau+}.$$
 (25.12)

В частности, второе уравнение означает, что $\sigma \in [0, \pi]$ для каждой струны. Приведенные выше уравнения не подходят для рассмотрения взаимодействий. Если для каждой струны $\sigma \in [0, \pi]$, то длина σ не может сохраняться при взаимодействии и тогда не ясно, как рисовать диаграммы! Есть дополнительная трудность. Представим две открытых струны (один и два), которые при взаимодействии образуют одну открытую струну (струну три). Выберем лоренцевскую систему отсчета, воспользуемся конусными координатами, и с помощью приведенной выше версии калибровки светового конуса, примененной к каждой из трех струн, получим

$$X_{1}^{+} = 2\alpha' p_{1}^{+} \tau_{1},$$

$$X_{2}^{+} = 2\alpha' p_{2}^{+} \tau_{2},$$

$$X_{3}^{+} = 2\alpha' p_{3}^{+} \tau_{3}.$$
(25.13)

Здесь нижний индекс нумерует струны. Взаимодействие — это выделенное событие в пространстве-времени, и три струны должны иметь согласованное значение физического времени X^+ , при котором оно происходит. Более того, так как три мировых поверхности объединяются в одну поверхность с единой координатой τ , то точка взаимодействия должна иметь одно единственное значение τ . Данное значение τ , как правило отлично от нуля, поэтому приведенные выше уравнения с различными значениями p_i^+ , в общем случае, не приводят к $X_1^+ = X_2^+ = X_3^+$.

Как можно модифицировать подход в переменных светового конуса с целью описания взаимодействий? Напомним более общую версию уравнения (9.62), которая применима при любых β (см. комментарии после (9.34)):

$$X^+ = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^+_{\mu}.$$
 (25.14)

С формальной точки зрения выбор $\beta = 2$ был сделан с целью получения открытых струн с $\sigma \in [0, \pi]$. Теперь идея такова: выбрать β таким образом, чтобы исключить зависимость от p^+ из соотношения между X^+ и τ . Если выбрать

$$\beta = \frac{1}{\alpha' p^+},\tag{25.15}$$

получим калибровку

$$X^+ = \tau, \tag{25.16}$$

с помощью которой становится возможным использование для всех взаимодействующих струн единого τ . Если обозначить за τ_0 время взаимодействия в только что обсуждавшемся случае трех струн, получим

$$X_1^+ = \tau, \quad \tau \leq \tau_0,$$

$$X_2^+ = \tau, \quad \tau \geq \tau_0,$$

$$X_3^+ = \tau, \quad \tau \geq \tau_0.$$
(25.17)

Первая струна перестает существовать в тот момент τ_0 , когда рождаются вторая и третья струны. Отметим, что $X_2^+ = X_3^+$ при $\tau \ge \tau_0$. В момент времени $\tau = \tau_0$ три координаты X^+ согласованы между собой. Учитывая (25.16), каждая струна параметризуется

$$\sigma \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right] = \left[0, 2\pi\alpha' p^+\right], \qquad (25.18)$$

где p^+ — импульс, переносимый струной. Если бы мы использовали это соглашение в предыдущем рассмотрении квантования струн, то оно привело бы к появлению громоздких множителей во многих уравнениях.



Рис. 25.5. Глобальная мировая поверхность процесса расщепления струн в калибровке светового конуса. Сохранение *p*⁺ означает, что полная ширина полоски постоянна относительно *т*

Теперь, с помощью одной диаграммы на плоскости (τ , σ), можно представить расщепление первой струны на вторую и третью так, как это показано на рис. 25.5. Процесс взаимодействия выглядит как бесконечная полоска постоянной ширины с разрезом. Данная фигура описывается двумя параметрами: ширина первой струны и ширина второй или третьей струны. Расположение начала разреза на бесконечной полоске является вопросом соглашения, поэтому время взаимодействия τ_0 на самом деле не является параметром.

25.4. Мировые поверхности как римановы поверхности

Теперь покажем, что имеет смысл мировые поверхности струны рассматривать как римановы поверхности. Римановы поверхности двумерны. Простейшей римановой поверхностью является комплексная плоскость \mathbb{C} . Это обычная плоскость (x, y), однако для описания ее точек можно использовать комплексную координату $z \equiv x + iy$. Подобласти комплексной плоскости также являются римановыми поверхностями. Например, верхняя полуплоскость \mathbb{H} , которая, согласно определению, содержит все точки z с положительной мнимой частью, Im (z) > 0, — это важный пример римановой поверхности. Поверхностью, тесно связанной с предыдущей, является верхняя полуплоскость с границей $\overline{\mathbb{H}}$, содержащая все точки z с Im $(z) \ge 0$ и «точку на бесконечности» (которая обсуждается в разделе 25.6). Кольцо также является римановой поверхностью. Примерами более сложных римановых поверхностей являются сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$ и тор. У нас еще будет возможность более подробно изучить все эти поверхности, в этой или в следующей главе.

В данном и в нескольких последующих разделах уровень математической строгости будет выше, чем прежде. Потребуются некоторые знания из комплексного анализа. Для полноты изложения приводится определение римановой поверхности (см. далее), которое, однако, не является совершенно необходимым в дальнейшем.

Определение римановой поверхности требует привлечения понятия аналитической функции. Функция f(z) комплексной переменной z является аналитической в точке z_0 , если в некоторой окрестности z_0 существует производная f'(z). Если записать f(z) = u(x, y) + iv(x, y), то в области аналитичности функции uи v удовлетворяют уравнениям Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$
 (25.19)

Риманова поверхность — это двумерное вещественное многообразие, снабженное комплексными картами: это гомоморфизмы z_{α} , которые отображают открытые множества U_{α} в открытые подмножества комплексной плоскости \mathbb{C} (гомоморфизм — это взаимнооднозначное отображение, для которого существует непрерывное обратное отображение). Здесь α — это индекс открытых множеств U_{α} , которые покрывают данное многообразие. Функции перехода $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ должны быть аналитическими на пересечении $z_{\alpha} \circ z_{\beta}^{-1}$.

Две римановы поверхности считаются эквивалентными, если существует связывающее их взаимнооднозначное отображение, которое является аналитическим. Это означает что такое отображение, выраженное в терминах карт, является аналитической функцией из подмножества в \mathbb{C} в некоторое другое подмножество в \mathbb{C} . Аналитическое отображение *конформно*: утлы между дугами, пересекающимися в некоторой точке, сохраняются при этом отображении, возможно за исключением точек, где производная отображения равна нулю (мы скоро увидим примеры этого). Несмотря на то что локально углы сохраняются, в целом при конформном отображении форма поверхности может изменяться весьма существенным образом. В этой и следующей главах под конформным отображением мы будем понимать аналитическое и взаимнооднозначное соответствие. Соответственно, существование конформного отображения, переводящего одну риманову поверхность в другую риманову поверхность, означает эквивалентность двух римановых поверхностей.

Так как конформно связанные поверхности можно считать одной и той же римановой поверхностью, концепция расстояния не может быть определена во внутренних терминах. Рассмотрим комплексную z-плоскость и две точки P_1 и P_2 с координатами z_1 и z_2 , соответственно. Естественное определение расстояния между двумя точками на C задается абсолютным значением $|z_1 - z_2|$ разницы координат. Теперь отобразим z-плоскость в w-плоскость как w = 2z. Две данные плоскости являются одной и той же римановой поверхностью. После конформного отображения образы P_1 и P_2 (также обозначаемые P_1 и P_2 на w-плоскости), имеют координаты $w_1 = 2z_1$ и $w_2 = 2z_2$. Таким образом, расстояние между P_1 и P_2 на w-плоскости равно $|w_1 - w_2| = 2|z_1 - z_2|$. Расстояние удвоилось. Так как обе плоскости являются одной и той же римановой поверхностью, то вопрос о расстоянии между точками P_1 и P_2 вызывает затруднения. Конформные отображения изменяют локальный масштаб. Фактически, длины, локально измеряемые во всех направлениях, перемасштабируются одним и тем же фактором. Из w = f(z) находим dw = f'(z) dz. Отсюда следует, что в любой точке z_0 имеем $|dw| = |f'(z_0)||dz|$. Так как |dw| — это длина образа вектора dz, мы видим, что локально все длины перемасштабируются с одним и тем же коэффициентом $|f'(z_0)|$.

Возможно, что это напоминает читателю метрику, масштаб которой несущественен. Действительно, метрика мировой поверхности $h_{\alpha\beta}$ входит в действие Полякова (24.70) и преобразования Вейля $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$ оставляют струнное действие инвариантным (см. (24.91)). Преобразования Вейля перемасштабируют все компоненты метрики в каждой точке мировой поверхности с одним и тем же коэффициентом. В итоге, все длины локально перемасштабируются одинаковым образом, именно так, как на римановых поверхностях действует конформное преобразование. Инвариантность струнного действия относительно локальных преобразований масштаба в метрике мировой поверхности указывает на то, что масштаб длин на мировой поверхности не является физической величиной. Так как на римановых поверхностях масштаб длин не является хорошо определенным, это указывает на то, что рассмотрение мировых поверхностей как римановых вполне естественно.

Несмотря на то что масштабы расстояний ведут себя похожим образом, существует одно различие. Метрику мировой поверхности можно сделать пропорциональной метрике Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, которая определяет расстояния, согласно $-ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2$. С другой стороны, на комплексной плоскости естественной метрикой является евклидова метрика: $ds^2 = |dz|^2 = dx^2 + dy^2$. Из-за этого различия в знаке фактически нельзя доказать, что мировые поверхности можно рассматривать как римановы. Однако ничто не мешает попробовать считать их таковыми, особенно в силу того, что очень многое о теории в пространстве Минковского можно узнать из ее евклидовой версии. Оказывается, что отождествление мировых поверхностей с римановыми поверхностями приводит к самосогласованному описанию струнных взаимодействий.

При рассмотрении мировых поверхностей как римановых, первоочередной задачей является нахождение подходящих комплексных координат τ и σ , которые объединяются в комплексную координату w следующим образом:

$$w = \tau + i\sigma. \tag{25.20}$$

Простейшая мировая поверхность соответствует свободно распространяющейся открытой струне. Как показано на рис. 25.6, мировая поверхность струны



Рис. 25.6. Струна, свободно распространяющаяся от $\tau = -\infty$ до $\tau = +\infty$. Струнная диаграмма — это полоска постоянной ширины $2\pi \alpha' p^+$. Открытые струны изображены в виде вертикальных пунктирных отрезков



Рис. 25.7. Слева: с помощью экспоненциального преобразования бесконечная полоска отображается на $\overline{\mathbb{H}}$. Бесконечно удаленное прошлое находится в точке z = 0, а бесконечно удаленное будущее в точке $z = \infty$. Открытые струны изображаются пунктирными линиями. Справа: с помощью дробно-линейного преобразования $\overline{\mathbb{H}}$ отображается на единичный диск η . Бесконечно удаленное прошлое находится в точке $\eta = 1$, а бесконечно удаленное будущее — в точке $\eta = -1$

с импульсом на конусе p^+ представлена в виде полоски $0 \leq \text{Im}(w) \leq 2\pi \alpha' p^+$ (Im (w) — это мнимая часть w, а Re (w) — вещественная часть w). Струны изображаются вертикальными отрезками при постоянном τ . Так как конформные отображения не изменяют физического содержания, хорошо было бы более подробно рассмотреть области, конформно эквивалентные полоске.

Давайте проследим, что происходит с полоской при конформном отображении с помощью экспоненциальной функции

$$z = \exp\left(\frac{w}{2\alpha' p^+}\right). \tag{25.21}$$

(Напомним, что $\exp(u + iv) = \exp(u)(\cos v + i \sin v)$.) Итог данного отображения изображен в левой части рис. 25.7. Отметим, что полная струна в пределе бесконечно удаленного прошлого отображается в точку! Действительно, при $w = -\tau_0 + i\sigma$ и $\tau \to -\infty$,

$$z = \exp\left(-\frac{\tau_0}{2\alpha' p^+}\right) \exp\left(i\frac{\sigma}{2\alpha' p^+}\right) \to 0, \qquad (25.22)$$

для всех значений σ . Как показано на рисунке, струны, стремящиеся в бесконечно удаленное прошлое, стягиваются в точку z = 0. Отметим также другой любопытный факт: две границы полоски отображаются на вещественную ось, граница $\sigma = 0$ отображается на положительную вещественную полуось, а граница $\sigma = 2\pi \alpha' p^+$ отображается на отрицательную вещественную полуось. Эти границы можно считать линиями, идущими из прошлого. Угол между границами был изменен в точке бесконечного удаленного прошлого: несмотря на то, что эти границы на полоске образовывали нулевой угол, при *z*-описании утол равен 180°. При данном отображении полоска отображается на $\overline{\mathbb{H}}$, и струны становятся полуокружностями с центрами в точке z = 0. Струна при $\tau = 0$ является бесконечно малой полуокружностью, струны, находящиеся в далеком будущем — очень большими полуокружностями на плоскости *z*. Радиусы полуокружностей неограниченно растут по мере приближения струн к бесконечно удаленному будущему. Существует другая полезная реализация римановой поверхности свободной открытой струны. Можно отобразить $\overline{\mathbb{H}}$ на единичный диск в плоскости η с помощью следующего преобразования

$$\eta = \frac{1+iz}{1-iz}.\tag{25.23}$$

Данное отображение, проиллюстрированное в правой части рис. 25.7, отображает вещественную ось Im (z) = 0 в единичную окружность. Действительно, для $z = x \in \mathbb{R}$

$$|\eta|^{2} = \eta \eta^{*} = \frac{1 + ix}{1 - ix} \cdot \frac{1 - ix}{1 + ix} = 1.$$
 (25.24)

На этот раз бесконечно удаленное прошлое z = 0 отображается в $\eta = 1$, а бесконечно удаленное будущее $z = \infty$ отображается в $\eta = -1$. Двумя составляющими границы являются единичные полуокружности *BAF* и *CDE*.

Из рассмотренных выше отображений следует сделать один важный вывод. В том случае, когда полоска отображается на ограниченную область, струны в бесконечно удаленном прошлом и бесконечно удаленном будушем целиком отображаются в две *точки* на границе ограниченной области. Более точно, эти точки являются предельными в том смысле, что они не достигаются струнами за конечное время, поэтому топологически эти точки должны быть удалены из границы ограниченной области: это выколотые точки. Говорят, что струны находятся в выколотых точках. Рассмотрение конформных отображений показало, что бесконечная полоска конформно эквивалентна диску с двумя выколотыми точками на границе. Выколотые точки разделяют границу единичного диска на две несвязанные компоненты. При отображении полоски в \overline{H} точка z = 0недостижима струнами в бесконечно удаленном прошлом. Отдаленное прошлое на полоске отображается в точки с большими z, и, как станет ясно в разделе 25.6, «точка на бесконечности» также недостижима. Поэтому бесконечная полоска отображается на \overline{H} с двумя выколотыми точками.

Свободная замкнутая струна может быть изображена в виде струнной диаграммы рис. 25.6, с учетом отождествления верхнего и нижнего краев полоски. Более точно, мы отождествляем точки на двух краях с одинаковым значением Im (τ). Данное отождествление приводит к бесконечному цилиндру с длиной окружности $2\pi \alpha' p^+$. Вертикальные пунктирные отрезки становятся замкнутыми струнами.

Упражнение-разминка 25.1. Покажите, что функция

$$z = \exp\left(\frac{w}{\alpha' p^+}\right) \tag{25.25}$$

отображает мировые поверхности свободных замкнутых струн на всю z-плоскость с выколотым началом координат. Убедитесь, что вертикальные пунктирные отрезки, представляющие на w-плоскости замкнутые струны, становятся на z-плоскости замкнутыми окружностями.

Отметим, что при отображении (25.25) замкнутые струны в бесконечно удаленном прошлом переходят в точку z = 0, а замкнутые струны, стремящиеся

в бесконечно удаленное будущее, отображаются в окружности возрастающего радиуса с центром в начале координат. Мировой поверхностью замкнутой струны является комплексная плоскость с выколотым началом координат.

25.5. Отображение Шварца—Кристоффеля и трехструнное взаимодействие

Теперь, когда мы рассмотрели некоторые конформные отображения мировых поверхностей свободно распространяющейся открытой струны, перейдем к случаю взаимодействующих струн. Простейшим является взаимодействие, при котором открытая струна расщепляется на две открытые струны так, как показано на рис. 25.5. Следуя приобретенной ранее интуиции, эта поверхность должна быть конформно эквивалентна диску с тремя выколотыми точками на границе. На самом деле теорема Римана об отображении гарантирует, что данная взаимодействующая мировая поверхность может быть конформно отображена в \overline{H} , причем границы открытой струны отображаются на вещественную ось.

Зачем нам нужно отображать мировую поверхность в $\overline{\mathbb{H}}$? Потому что $\overline{\mathbb{H}}$ осуществляет каноническую реализацию, которая позволяет сравнить различные римановы поверхности. Это сравнение будет играть главную роль при изучении взаимодействий с участием более чем трех струн. Построением отображения струнной диаграммы в $\overline{\mathbb{H}}$ будет реализован п. (1) из приведенного в начале раздела 25.2 списка.

Не так легко реализовать отображение мировой поверхности, показанной на рис. 25.5, на $\overline{\mathbb{H}}$. Однако, ее можно рассматривать как предел многоугольника и существует хорошо отработанный метод построения отображения, которое переводит многоугольник в $\overline{\mathbb{H}}$. Это отображение конформно во всех точках, кроме углов многоугольника. В общем случае нельзя задать это конформное отображение явно, но всегда можно записать дифференциальное уравнение для функции отображения. Отображение, связывающее многоугольники и $\overline{\mathbb{H}}$, называется отображением Шварца—Кристоффеля.

Предположим, что в комплексной w-плоскости есть многоугольник. Пусть данный многоугольник имеет n сторон и тем самым n углов, обозначенных P_1 , P_2, \ldots, P_n . Отображение Шварца—Кристоффеля w(z) переводит точку $z \in \overline{\mathbb{H}}$ на многоугольник. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 25.8. Ориентация границы многоугольника выбирается таким образом, чтобы внутренние области находились по левую сторону от ориентированной границы. Данное отображение переводит вещественную ось на z-плоскости, ориентированную в направлении возрастающих значений, на ориентированную границу многоугольника.

Углы поворота многоугольника в вершинах α_i равны P_i . Угол поворота положителен, если ориентированная сторона, выходящая из соответствующей вершины, получается вращением против часовой стрелки продолжения стороны. которая входит в эту вершину. По определению, углы поворота ограничены интервалом $[-\pi, \pi]$

$$-\pi \leqslant \alpha_i \leqslant \pi. \tag{25.26}$$



Рис. 25.8. Отображение Шварца—Кристоффеля w(z) переводит $\mathbb H$ в многоугольник, показаны вершины P_i и углы поворота α_i . Точки x_i , лежащие на границе верхней полуплоскости, изображенной справа, отображаются в вершины многоугольника

Угол поворота со значением близким, но меньшим, чем π , соответствует углу, в котором многоугольник покрывает лишь малый сектор. С другой стороны, угол поворота со значением близким, но большим, чем $-\pi$ соответствует углу, в котором многоугольник не может покрыть малый сектор. Углы поворота со значениями π или $-\pi$ приводят к вырожденным многоугольникам. На самом деле конусные струнные диаграммы представляют собой вырожденные многоугольники. Значения π и $-\pi$ приводят к совершенно различным типам углов.

Потребуем, чтобы дифференциальное уравнение функции отображения w(z)имело вид

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{-\alpha_1/\pi}(z-x_2)^{-\alpha_2/\pi}\dots(z-x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}/\pi}.$$
 (25.27)

Здесь x_i — это набор упорядоченных вещественных чисел:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}, \tag{25.28}$$

а отображение z(w) переводит вершины в точки:

$$z(P_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$
 (25.29)

Отметим, что углы поворота α_n с индексом *n* не входят в дифференциальное уравнение (25.27). Фактически, отображение, построенное в (25.27), переводит P_n в $z = \infty$:

$$z(P_n) = \infty. \tag{25.30}$$

Так как многоугольник замкнут, сумма углов поворота должны быть равна 2π :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi. \tag{25.31}$$

Таким образом, α_n определяется другими углами поворота. Именно поэтому отображение (25.27) должным образом помнит об «отсутствующей» вершине (подробнее см. задачу 25.6).

Теперь объясним, почему (25.27) является правильным дифференциальным уравнением для отображения Шварца—Кристоффеля. Для этого рассмотрим аргументы обеих частей уравнения. Аргумент комплексного числа $z = r \exp(i\theta)$

с вещественным *r* определяется как arg $(z) = \theta$. Так как углы определены неоднозначно и функция arg имеет аддитивный произвол, то можно добавлять либо вычитать любое число, кратное 2π . Функция arg удовлетворяет правилам: arg $(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ и arg $(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$. Используя эти свойства и рассматривая аргументы обеих частей (25.27), находим

$$\arg(dw) - \arg(dz) = \arg A + \arg(z - x_1)^{-\alpha_1/\pi} + \ldots + \arg(z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}/\pi}.$$
 (25.32)

Будем считать, что функции arg в правой части предыдущего выражения заменны на главные значения Arg, которые принадлежат интервалу

$$-\pi < \operatorname{Arg}\left(z\right) \leqslant \pi. \tag{25.33}$$

Для положительного вещественного числа Arg равен нулю, а для отрицательного вещественного числа Arg равен π . Если определить z^{β} как главную ветвь $z^{\beta} \equiv \exp \left[\beta \left(\ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)\right)\right]$, то получим

Arg
$$(z^{\beta}) = \beta$$
 Arg (z) при $|\beta| \leq 1.$ (25.34)

Условие $|\beta| \leq 1$ гарантирует, что правая часть удовлетворяет неравенствам, которые имеют место для Arg комплексного числа. Так как $|\alpha_1/\pi| \leq 1$, с помощью (25.34) выражение (25.32) можно упростить:

$$\arg(dw) - \arg(dz) = \operatorname{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \operatorname{Arg}(z - x_1) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \operatorname{Arg}(z - x_{n-1}). \quad (25.35)$$

Если z = x находится на вещественной оси, а dz = dx > 0, то из уравнения (25.35) следует

$$\arg(dw) = \operatorname{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \operatorname{Arg} (x - x_1) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \operatorname{Arg} (x - x_{n-1}).$$
(25.36)

Так как вещественная ось z-плоскости отображается на границу многоугольника, то arg (dw) является углом, образованным стороной многоугольника и горизонтальной прямой. Пока x изменяется, не пересекая точку поворота x_i , в правой части уравнения ничего не изменяется: аргументы положительных величин остаются равными нулю, а аргументы отрицательных величин остаются равными π , на *w*-плоскости это приводит к прямому краю. С другой стороны, при переходе точки x через точку поворота x_i , Arg $(x - x_i)$ изменяется от π до 0, и полное изменение составляет ($-\pi$). При этом правая часть рассмотренного выше уравнения изменяется на $(-\alpha_i/\pi)(-\pi) = \alpha_i$. Это означает, что dw вдоль нового края будет иметь аргумент, больший на α_i , т. е. в точности то, что и предполагалось. Это подтверждает наше предположение о том, что дифференциальное уравнение действительно описывает нужное отображение. Для заданного многоугольника точки поворота x_i и константа A зависят от длин сторон многоугольника и могут быть вычислены. Преобразование Шварца-Кристоффеля будет нами применено сначала для случая открытой струны, расщепляющейся на две, так, как показано на рис. 25.9. Эту мировую поверхность можно рассматривать как вырожденный



Рис. 25.9. Отображение трехструнного взаимодействия на верхнюю полуплоскость. Струнная диаграмма является вырожденным многоугольником с вершинами P_1 , P_2 , Q и P_3 . Точка взаимодействия Q отображается в точку $z = x^*$, вершина P_1 отображается на бесконечность

многоугольник с четырьмя вершинами. Если ориентировать границу многоугольника, начав с нижней горизонтальной линии, то первой встретившейся вершиной будет P_2 — вторая струна в бесконечно удаленном будущем, соответствующий угол поворота равен $+\pi$. Двигаясь вдоль следующего края в обратном направлении, мы приходим в точку взаимодействия Q, это вторая вершина и соответствующий угол поворота равен $-\pi$. Двигаясь вдоль следующего края, приходим в точку бесконечного будущего P_3 третьей струны, здесь находится третья вершина и соответствующий угол поворота равен $+\pi$. Наконец, четвертая вершина — это P_1 , что соответствует точке бесконечно удаленного прошлого первой струны, здесь угол поворота равен $+\pi$. В итоге,

угол поворота в
$$P_2 = \alpha_2 = +\pi$$
,
угол поворота в $Q = \alpha_Q = -\pi$,
угол поворота в $P_3 = \alpha_3 = +\pi$,
угол поворота в $P_1 = \alpha_1 = +\pi$.
(25.37)

Отметим, что сумма углов поворота равна 2π , как следует из (25.31). Возможно, что углы поворота легче распознать на рис. 25.10, на котором мировая поверхность схематически показана в виде почти вырожденного многоугольника, полученного путем уменьшения величины углов поворота по сравнению со значением π и добавления двух малых углов поворота сверху и снизу точки Q.



Рис. 25.10. Невырожденная версия вырожденного многоугольника, показанного в левой части рис. 25.9. В пределе вырожденного многоугольника малые углы поворота выше и ниже *Q* исчезают

Отображение на $\overline{\mathbb{H}}$ будем строить, исходя из требования, чтобы точка P_2 переходила в z = -1, P_3 в z = +1, а P_1 в $z = \infty$. Возникновение одной вершины на бесконечности явно отображено в выписанном ранее дифференциальном уравнении, и это упрощает наш анализ. Можно задаться вопросом: откуда известно, что две другие точки, P_2 и P_3 , можно отобразить в выбранные нами значения z? Ответ основывается на результате следующего раздела: три точки вещественной оси могут быть отображены в любые три заданные точки при сохранении $\overline{\mathbb{H}}$ и выбранного упорядочения. Тремя данными точками являются P_2 , P_3 и P_1 , мы выбрали такое отображение, что они переходят в -1, +1 и ∞ . Однако, координаты x^* последней вершины Q определить невозможно. Как показано в правой части рис. 25.9, точка x^* должна находиться между -1 и +1, потому что вершина Q находится между вершинами P_2 и P_3 ориентированного многоугольника.

Теперь, следуя (25.27), продолжим поиск дифференциального уравнения, задающего данное отображение. Учитывая упорядоченные точки поворота $z = -1, x^*, +1$ и углы поворота $\alpha_2, \alpha_0, \alpha_3$, запишем

$$\frac{dw}{dz} = A(z - (-1))^{-\alpha_1/\pi} (z - x^*)^{-\alpha_Q/\pi} (z - 1)^{-\alpha_3/\pi}.$$
 (25.38)

С помощью значений углов (25.37), получим:

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{(z - x^*)}{(z + 1)(z - 1)}.$$
(25.39)

Для вещественных z, больших чем единица, величина dw/dz должна быть вещественна и отрицательна, в силу того, что образ z > 1 является горизонтальной линией, расположенной между P_3 и P_1 . Таким образом, мы приходим к выводу, что A является вещественной и отрицательной. Для интегрирования этого уравнения разложим правую часть на элементарные дроби:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A}{2} \left(\frac{1+x^*}{z+1} + \frac{1-x^*}{z-1} \right).$$
(25.40)

После интегрирования,

$$w = \frac{A}{2}(1+x^*)\ln(z+1) + \frac{A}{2}(1-x^*)\ln(z-1).$$
 (25.41)

Здесь логарифмы определены как $\ln(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$, а логарифм вещественного числа считается вещественным. Нам по-прежнему требуется определить константы A и x^* в терминах параметров струнной диаграммы p_2^+ и p_3^+ . Нам нужно, чтобы $\sigma = \operatorname{Im}(w)$ прирастала на $2\pi \alpha' p_2^+$ как только z пересекает точку z = -1, являющуюся образом P_2 . Так как $\operatorname{Im}(\ln z) = \operatorname{Arg}(z)$, а A вещественно, то

$$\sigma = \operatorname{Im}(w) = \frac{A}{2}(1+x^*)\operatorname{Arg}(z+1) + \frac{A}{2}(1-x^*)\operatorname{Arg}(z-1). \qquad (25,42)$$

При перемещении z с левой стороны точки -1 на правую, Arg (z+1) изменяется от π до 0, поэтому

$$\Delta \sigma = \frac{A}{2} (1 + x^*) (0 - (\pi)) = 2\pi \alpha' p_2^+, \qquad (25.43)$$

отсюда

$$\frac{A}{2}(1+x^*) = -2\alpha' p_2^+.$$
 (25.44)

Аналогично, поведение вблизи z = 1 приводит к уравнению

$$\frac{A}{2}(1-x^*) = -2\alpha' p_3^+. \qquad (25.45)$$

Подставляя эти два уравнения обратно в (25.41) получаем

$$w = -2\alpha' p_2^+ \ln (z+1) - 2\alpha' p_3^+ \ln (z-1). \qquad (25.46)$$

Это выражение и является искомым уравнением отображения, записанным в терминах известных параметров.

Упражнение-разминка 25.2. Убедитесь, что вещественная ось w-плоскости совпадает с верхним краем полоски в левой части рис. 25.9.

В дальнейшем мы будем выписывать уравнения, подобные (25.46), методом подбора. Правила просты: необходимо записать логарифм для каждой из струн, за исключением той, чья точка поворота отображается на бесконечность верхней полуплоскости, Префактор в каждом из этих логарифмов связан с шириной соответствующей струны — она равна $(-2\alpha' p^+)$ в случае, когда σ растет при пересечении точки поворота. Это будет учтено при написании отображения четырехструнного взаимодействия в разделе 25.7.

Отображение (25.46) было выписано без вычисления x^* , которое может быть найдено делением уравнения (25.44) на (25.45):

$$\frac{1+x^*}{1-x^*} = \frac{p_2^+}{p_3^+} \Rightarrow x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+}.$$
 (25.47)

Если $p_2^+ = p_3^+$, то, как и ожидалось $x^* = 0$, потому что Q находится ровно посередине между P_2 и P_3 . Если $p_2^+ \gg p_3^+$, из вида получаемой фигуры следует, что с конформной точки зрения Q становится ближе к P_3 . При $x^* \to 1$ это действительно так. С другой стороны, если $p_3^+ \gg p_2^+$, то $x^* \to -1$ и Q действительно становится ближе к P_2 .

Значение x^* также может быть вычислено с помощью (25.46). Для этого отметим, что dw/dz = 0 в $z = x^*$, потому что в Q значения производной dw/dzизменяются от отрицательных до положительных (τ достигает локального минимума). С помощью (25.46) находим, что

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2\alpha' p_2^+}{x^* + 1} - \frac{2\alpha' p_3^+}{x^* - 1} = 0, \qquad (25.48)$$



Рис. 25.11. Трехструнное взаимодействие, представленное на III. Пунктирные линии являются образами (вертикальных) струн на рис. 25.9. Струна в момент взаимодействия отмечена непрерывной линией

что приводит к тому же значению x^* . Интересно посмотреть на струны на z-плоскости, показанные на рис. 25.11. Рассмотрим струны, сходящиеся в точках z = -1и z = +1. Струны, приходящие из P_1 , находящейся в $z = \infty$, в конце концов достигают точки взаимодействия. Струна в момент взаимодействия выделена непрерывной линией. Ее концы расположены слева и справа от P_2 и P_3 , соотвстственно, а одна из ее внутренних точек касается границы в x^* .

() Упражнение-разминка 25.3. Рассмотрите трехструнное взаимодействие при $p_2^+ = p_3^+$, причем $x^* = 0$. Проверьте, что Re $(w(x^*)) = 0$. Покажите, что концы струны в момент взаимодействия расположены в $z = \pm \sqrt{2}$.

Рассмотренная в этом разделе амплитуда трехструнного взаимодействия содержит константу связи открытых струн g_0 в виде мультипликативного фактора $(g_0^2 \sim g, \text{где } g - \text{константа связи замкнутых струн})$. Она аналогична амплитуде (25.2), которая также содержит константу связи.

25.6. Пространства модулей римановых поверхностей

Так как конформно связанные поверхности являются, по определению, одной и той же римановой поверхностью, то важно понимать, что две поверхности можно отображать друг в друга. Для более конкретного изучения этого вопроса возьмем простой пример. Рассмотрим верхнюю полуплоскость $\overline{\mathbb{H}}$ с одной выколотой точкой на вещественной оси. Может ли такая конфигурация быть отображена на верхнюю полуплоскость $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотой точкой $x' \neq x$? Являются ли эти два пространства одной и той же римановой поверхностью? Да, являются. Воспользуемся координатой z для первой $\overline{\mathbb{H}}$ и координатой z' для второй $\overline{\mathbb{H}}$. Затем рассмотрим

$$z' = z + (x' - x).$$
 (25.49)

Это конформное отображение (z' является аналитической функцией от z) переводит выколотую точку z = x в выколотую точку z' = x'. Оно также сохраняет

 $\overline{\mathbb{H}}$, так как Im (z') = Im(z). Суть этого примера в том, что $\overline{\mathbb{H}}$ с одной выколотой точкой на границе является римановой поверхностью без параметра. Вне зависимости от того, какая точка выбрана в качестве выколотой, риманова поверхность остается неизменной. Будем называть параметры римановых поверхностей модулями, или модулем, если такой параметр только один. Таким образом, $\overline{\mathbb{H}}$ с одной выколотой точкой на вещественной оси не имеет модулей.

В этом разделе и в упражнениях в конце данной главы будет видно, что ситуация становится более интересной, если на вещественную линию добавить еще выколотых точек: $\overline{\mathbb{H}}$ с двумя выколотыми точками по-прежнему не имеет модулей! При желании, положения выколотых точек можно изменить. Полупоскость $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками по-прежнему не имеет непрерывных модулей, однако есть один дискретный модуль, который описывает упорядочение выколотых точек на границе $\overline{\mathbb{H}}$. Наконец, $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми точками имеет один непрерывный и один дискретный модуль.

Начнем наш анализ с комплексной плоскости \mathbb{C} , расширенной до сферы Римана. Затем вернемся к случаю $\overline{\mathbb{H}}$, который немедленно найдет применение при рассмотрении взаимодействия открытых струн. Анализ сферы Римана понадобится в следующей главе, в которой обсуждаются замкнутые струны.

Комплексная плоскость \mathbb{C} может быть расширена до сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$. Представим сферу, расположенную поверх комплексной плоскости так, что южный полюс совпадает с началом координат, а северный полюс расположен прямо над ним (см. рис. 25.12). Каждая точка P на комплексной плоскости может быть отображена в точку P' на сфере с помощью стереографической проекции: P' является точкой пересечения сферы с линией, соединяющей P с северным полюсом. Очевидно, что это взаимнооднозначное соответствие. По мере удаления от начала координат на комплексной плоскости, точки на сфере приближаются к северному полюсу. Образом \mathbb{C} при данной проекции является сфера без точки северного полюса — сфера минус одна точка. Для построения полной сферы комплексную плоскость необходимо расширить добавлением «точки на бесконечности», точки { ∞ }, образ которой при отображении объявляется северным полюсом. При стереографической проекции расширенная плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ эквивалентна сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}}$. Вот почему риманову поверхность иногда называют расширенной комплексной плоскостью. На практике, для работы со сферой Римана используют



Рис. 25.12. Отображение плоскости на сферу. Сфера расположена поверх плоскости таким образом, что ее южный полюс S находится в начале координат. Каждой точке P на плоскости сопоставлена точка P' на сфере. Точка на бесконечности соответствует северному полюсу N

комплексную плоскость с учетом того, что $z = \infty$ является точкой, которую надо рассматривать на равных основаниях с любой другой конечной точкой.

Сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$ имеет непосредственное отношение к замкнутым струнам. Рассмотрим отображение (25.25) бесконечного цилиндра на комплексную z-плоскость. Здесь имеется некоторая ассиметрия: на цилиндре замкнутые струны в точках бесконечно удаленного прошлого и бесконечно удаленного будущего появляются симметричным образом, а на плоскости первая точка выглядит, как выколотая точка z = 0, а вторая точка отображается в окружность бесконечного радиуса. Очевидно, что именно надо сделать для восстановления симметрии решений: окружность бесконечного радиуса следует считать одной выколотой точкой. Таким образом, мы говорим, что мировая поверхность свободной замкнутой струны является расширенной комплексной плоскостью $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с выколотой точкой z = 0 и выколотой точкой на бесконечности. Эквивалентным образом, мировой поверхностью свободной замкнутой струны является $\hat{\mathbb{C}}$ с двумя выколотыми точками. Выколотыми точками являются z = 0 и бесконечно удаленная точка, которые на $\hat{\mathbb{C}}$ рассматриваются на равных основаниях.

Каково наиболее общее аналитическое взаимнооднозначное отображение из $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$? Математиками было показано, что это *дробно-линейное отображение*. Рассмотрим две копии $\widehat{\mathbb{C}}$ с координатами z и w. Дробно-линейное преобразование имеет вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\tag{25.50}$$

где a, b, c и d являются комплексными числами. Отметим, что бесконечно удаленная точка на *z*-плоскости отображается в w = a/c, что, как правило. является конечным числом. Это согласуется с тем мнением, что на $\widehat{\mathbb{C}}$ бесконечно удаленная точка является обычной точкой. Для того чтобы рассматриваемое отображение было взаимнооднозначным, необходимо также потребовать

$$ad - bc \neq 0. \tag{25.51}$$

Если, например, a = b = 0, то данное условие нарушается и из (25.50) следует w = 0 для всех z. Чтобы показать, что (25.51) гарантирует взаимнооднозначность отображения, необходимо показать, что $w(z_1) = w(z_2)$ приводит к $z_1 = z_2$. Равенство $w(z_1) = w(z_2)$ с помощью (25.50) дает

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}.$$
 (25.52)

При $cz_1 + d = 0$ левая часть этого выражения бесконечна, поэтому правая часть также должна быть бесконечной. Отсюда следует, что $cz_2 + d = 0$, и поэтому $z_1 = z_2$. Если знаменатели не равны нулю, то можно перемножить эти выражения наискосок и, после приведения подобных, получить:

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2,$$
 (25.53)

что, в силу (25.51), приводит к $z_1 = z_2$. Дробно-линейное преобразование является обратимым преобразованием. Можно легко выразить z через w и получить

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$
 (25.54)

Как можно видеть из рассмотрения условия (25.51), это также дробно-линейное преобразование, оно также взаимнооднозначно. Умножением наискосок, отображение (25.50) можно привести к виду

$$Awz + Bw + Cz + D = 0$$
 (25.55)

при некоторых комплексных константах A, B, C и D. Это всего лишь другая форма записи, которую следует рассматривать как определение дробно-линейного преобразования. Симметричное поведение w и z оказывается здесь явным.

Упражнение-разминка 25.4. Каково условие на коэффициенты A, B, C и D при которых (25.55) является дробно-линейным преобразованием?

Сколько параметров у отображения (25.50)? Несмотря на то что данное отображение записано с помощью четырех комплексных чисел a, b, c и d, есть только три параметра. Если a, b, c и d умножить на одно комплексное число $\alpha \neq 0$, то отображение (25.50) не изменится, потому как постоянный множитель появляется как в знаменателе, так и в числителе. Так как $ad - bc \neq 0$, параметры a, b, c и d можно перемасштабировать путем деления на $\sqrt{ad - bc}$. Новые, переопределенные параметры удовлетворяют отношению

$$ad - bc = 1.$$
 (25.56)

Теперь очевидно, что имеется только три подгоночных параметра: например, при заданных a, b и c уравнение фиксирует параметр d.

Имея три комплексных параметра, можно было бы ожидать, что дробнолинейное преобразование может отображать z-сферу с тремя (разными) выколотыми точками z_1 , z_2 и z_3 на w-сферу, на которой три выколотые точки переходят в *произвольные* (разные) точки w_1 , w_2 и w_3 (см. рис. 25.13). Это действительно так, и отсюда следует, что $\widehat{\mathbb{C}}$ с тремя выколотыми точками является римановой поверхностью без модулей.

Теперь давайте построим данное отображение. Запишем

$$(z-z_1)(\ldots) = (w-w_1)(\ldots),$$
 (25.57)

потому что мы хотим иметь $w = w_1$ при $z = z_1$. Многоточие соответствует дополнительным мультипликативным факторам, которые будут включены позднее.



Рис. 25.13. Три выколотые точки P_1 , P_2 и P_3 с координатами z_1 , z_2 и z_3 , соответственно, могут быть конформно отображены в любые три точки w_1 , w_2 и w_3 на w-плоскости

Очевидно, что z_1 будет отображаться в w_1 так как при $z = z_1$ и $w = w_1$ обе части уравнения равны, вне зависимости от мультипликативных факторов. Далее мы хотим, чтобы $w = w_2$ при $z = z_2$. Для этой цели поместим множители $w - w_2$ и $z - z_2$ в знаменатели:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}(\ldots) = \frac{w-w_1}{w-w_2}(\ldots).$$
 (25.58)

При $w = w_2$ это равенство приводит к $z = z_2$. Для учета условия $z = z_3$ при $w = w_3$, просто добавим численные факторы которые гарантируют равенство единице каждой из сторон:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}.$$
(25.59)

Приведенное выше уравнение является окончательным уравнением отображения, переводящего z_1 , z_2 и z_3 в w_1 , w_2 и w_3 , соответственно. Оно является дробнолинейным преобразованием: с помощью умножения наискосок, находим, что (25.59) приводится к виду (25.55). Сферы с тремя выколотыми точками не имеют модулей, потому что все подобные сферы конформно эквивалентны; их можно отобразить друг на друга с помощью (25.59). В задаче 25.1 будет показано, что (25.59) является единственным отображением $\widehat{\mathbb{C}}$, переводящим упорядоченный набор из трех различных точек в другой упорядоченный набор из трех различных точек.

Теперь рассмотрим $\widehat{\mathbb{C}}$ с четырьмя выколотыми точками z_1 , z_2 , z_3 и z_4 и другую копию $\widehat{\mathbb{C}}$ с четырьмя выколотыми точками w_1 , w_2 , w_3 и w_4 . Будем считать выколотые точки пронумерованными, с индексами 1, 2, 3 и 4. Можно ли отобразить данные копии $\widehat{\mathbb{C}}$ друг на друга таким образом, что бы выколотые точки переходили друг в друга, т. е. $z_i \rightarrow w_i$ при i = 1, 2, 3 и 4? В общем случае нельзя. Чтобы отобразить четыре выколотых точки друг в друга, необходимо обязательно отобразить z_1 , z_2 и z_3 в w_1 , w_2 и w_3 . Это требование фиксирует (25.59), что приводит к единственному отображению, которое допускает отображение выколотых точек. Так как отображение единственно, то не удается наложить дополнительное условие и z_4 будет переходить в некоторую точку, которую нельзя задать. Конечно же, может так случиться, что данное отображение переводит z_4 в заданную w_4 , которая, однако, будет случайна, потому что z_4 и w_4 не были использованы при построении отображения. Тем самым, сферы с четырьмя пронумерованными выколотыми точками не обязаны быть конформно эквивалентными.

Предположим, что некто предъявляет вам z-сферу и z'-сферу, каждая с четырьмя выколотыми точками P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Как понять, являются ли они конформно эквивалентными? В первую очередь отобразим на каждой сфере точки P_1 , P_3 и P_4 в 0, 1 и ∞ . Для этого необходимо дробно-линейное преобразование w = f(z) и w' = f'(z'). Вопрос конформной эквивалентности z-и z'-сфер теперь является вопросом конформной эквивалентности w- и w'-сфер. Теперь посмотрим на P_2 . Предположим, что P_2 отображается в $w = \lambda$ на w-сфере и в $w' = \lambda'$ на w'-сфере; w-сфера и w'-сфера с четырьмя выколотыми точками конформно эквивалентны morda и monькo morda, когda $\lambda = \lambda'$. Единственным конформным



Рис. 25.14. Четыре выколотые точки на комплексной *z*-плоскости могут быть единственным образом отображены на *w*-плоскость если потребовать, что P_1 , P_3 и P_4 переходят в w = 0, 1 и ∞ , соответственно. В данной канонической реализации оставшаяся выколотая точка P_2 перейдет в некоторую точку с некоторым значением $w = \lambda$

отображением $w \to w'$, сохраняющим выколотые точки P_1 , P_3 и P_4 (расположенные в обоих случаях в 0, 1 и ∞), является тождественное преобразование. Если выколотые точки P_2 должны переходить друг в друга, то их координаты должны совпадать. Это доказывает требуемое утверждение. В канонической реализации, когда три выколотые точки переходят в 0, 1 и ∞ , положение λ последней выколотой точки является, таким образом, модулем сферы с четырьмя выколотыми точками (см. рис. 25.14). Так как положение этой точки является комплексным числом, то мы имеем комплексный модуль, либо, эквивалентно, два вещественных модуля. Так как положение четвертой выколотой точки можно изменять непрерывным образом, то данные модули являются непрерывными параметрами.

Комплексный модуль λ , соответствующий положению выколотой точки, может принимать все комплексные значения, за исключением 0, 1 и ∞ , так как в этих случаях две выколотые точки совпадают. С другой точку зрения, рассмотрим новую сферу Римана с координатой λ и выколотыми точками 0, 1 и ∞ . Каждой точке λ_0 этой сферы сопоставим сферу с выколотыми точками 0, 1, ∞ и λ_0 . При данном сопоставлении две различные точки на λ -сфере соответствуют двум конформно неэквивалентным сферам с четырьмя выколотыми точками. Наконец, каждая сфера с четырьмя выколотыми точками 0, 1 и ∞ пространством модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ сферы с четырьмя выколотыми точками. Ноль обозначает то, что данная поверхность имеет четыре выколотые точки, которые считаются пронумерованными. Будучи двумерной поверхностью, $\mathcal{M}_{0,4}$ обладает (вещественной) размерностью равной двум:

$$\dim \left(\mathcal{M}_{0,4} \right) = 2. \tag{25.60}$$

Любопытно, что пространство модулей сфер Римана с четырьмя выколотыми точками само является римановой поверхностью — сферой λ с тремя выколотыми точками. Учет пространства модулей означает, что мы контролируем все

неэквивалентные римановы поверхности заданного типа. Пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ будет играть важную роль при обсуждении амплитуд замкнутых струн в главе 26. Чтобы разобраться в рассеянии замкнутых струн, давайте теперь рассмотрим $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотыми точками на вещественной оси и пространства модулей таких римановых поверхностей.

Напомним, что $\overline{\mathbb{H}}$ определяется как верхняя полуплоскость, содержащая вещественную ось, а также бесконечно удаленную точку. Эта бесконечно удаленная точка добавляется так же, как добавлялась к сфере Римана. В $\overline{\mathbb{H}}$ плюс и минус бесконечность на вещественной оси являются одной точкой и тем самым равны пределу $r \exp(i\theta)$, для $0 \leq \theta \leq \pi$, при $r \to \infty$. Бесконечно удаленная точка принадлежит границе $\overline{\mathbb{H}}$; эта граница является окружностью. Отметим, что $\overline{\mathbb{H}}$ конформно эквивалентна единичному диску, что следует из отображения (25.23). При данном отображении граница $\overline{\mathbb{H}}$ отображается на границу диска, а бесконечно удаленная точка отображается в $\eta = -1$. Теперь мы ясно понимаем, что бесконечная полоска конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотой точкой z = 0, у которой также выколота бесконечно удаленная точка. Бесконечно удаленная точка выкалывается по той причине, что она может быть достигнута струной за любое конечное время. Бесконечная полоска конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{H}}$ с двумя выколотыми точками на границе.

Давайте рассмотрим отображения \widetilde{H} на себя. Разумный подход состоит в изучении отображений $\widehat{\mathbb{C}}$ на себя, при которых сохраняется верхняя полуплоскость $\overline{\mathbb{H}}$. Следуя (25.50) рассмотрим преобразования вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$
(25.61)

Если a, b, c и d вещественны, то вещественная ось z-плоскости отображается на вещественную ось w-плоскости. Фактически, с точностью до общего фазового фактора, который сокращается в (25.61), условие того, что вещественная ось отображается на вещественную ось означает (задача 25.3)

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{25.62}$$

Наконец, существует одно дополнительное условие. Как и прежде, рассматриваемое отображение взаимнооднозначно тогда и только тогда, когда

$$ad - bc \neq 0. \tag{25.63}$$

Так как сейчас рассматриваются вещественные коэффициенты, левая часть приведенного выше соотношения является некоторым числом, либо положительным, либо отрицательным. Так как допускается только перемасштабирование коэффициентов с помощью вещественных чисел, можно положить ad - bc = 1 в случае положительной левой части, и ad - bc = -1 в случае отрицательной левой части. Оказывается, что для сохранения $\overline{\mathbb{H}}$ необходима первая возможность:

$$ad - bc = 1.$$
 (25.64)

Действительно, рассматривая мнимую часть (25.61), находим

$$\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right). \tag{25.65}$$

Упрощая это выражение,

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{1}{2i} \frac{(ad - bc)(z - \overline{z})}{|cz + d|^2} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z). \tag{25.66}$$

Из этого уравнения со всей очевидностью следует, что из Im $(z) \ge 0$ следует, что Im $(w) \ge 0$ тогда и только тогда, когда ad - bc > 0. Тем самым, (25.64) гарантирует что (25.61) сохраняет верхнюю полуплоскость. В итоге, отображения $\overline{\mathbb{H}}$ на себя определяются уравнениями (25.61), (25.62) и (25.64). Они характеризуются тремя вещественными параметрами. Бесконечно удаленная точка на $\overline{\mathbb{H}}$ рассматривается как регулярная точка; ее образ при отображении (25.61) есть w = a/c.

Давайте рассмотрим несколько примеров. Является ли отображение

$$w = -z \tag{25.67}$$

отображением $\overline{\mathbb{H}}$ в $\overline{\mathbb{H}}$? Нет, не является: точка z на положительной мнимой оси, например, будет отображаться в точку w на отрицательной мнимой оси. Таким образом, (25.67) не может быть записано в виде (25.61) при требуемых условиях. Действительно, можно попробовать записать

$$w = \frac{(-1) \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} \implies a = -1, \ b = 0, \ c = 0, \ d = 1.$$
 (25.68)

но это приведет к ad - bc = -1, что нарушает условие (25.64). Как насчет

$$w = z + 1$$
? (25.69)

Эта функция отображает \overline{H} в \overline{H} . Фактически, она просто сдвигает \overline{H} в правую сторону на единицу. Более интересным отображением является

$$w = -\frac{1}{z}.$$
 (25.70)

Чтобы увидеть, почему оно справедливо, сначала отметим, что его можно записать в виде (25.61) при выборе

$$w = \frac{0 \cdot z + (-1)}{1 \cdot z^{s} + 0} \implies a = 0, \ b = -1, \ c = 1, \ d = 0.$$
(25.71)

Так как ad - bc = 1, условие (25.64) выполнено. Для большей очевидности, напишем $z = re^{i\theta}$. Тогда $w = -1/z = -(1/r) \cdot e^{i\theta}$. Как выглядит данное преобразование на комплексной плоскости? Рассмотрим комплексное число z с положительной мнимой частью, такое, как показано на рис. 25.15. Вектор $(1/r) \cdot e^{-i\theta}$ получается из z отражением относительно вещественной оси и растяжением. Таким образом, данный вектор находится в нижней полуплоскости. Однако, w = -1/z и отрица-



Рис. 25.15. Объяснение того, почему отображение $z \to -1/z$ переводит \mathbb{H} в себя

тельный знак соответствует отражению вектора относительно начала координат. Поэтому окончательный вектор w расположен в верхней полуплоскости. Теперь очевидно, что (25.70) отображает верхнюю полуплоскость на себя.

Можно вообразить, что с помощью вещественного дробно-линейного преобразования с тремя вещественными параметрами $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками на вещественной оси можно отобразить в $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками с произвольными вещественными координатами. Это почти правильно! Действительно, с помощью (25.59) можно построить некоторое отображение, однако кое-что может оказаться неправильным. Условие (25.64) может не выполниться. Поскольку это имеет отношение к некоторому важному свойству открытых струн, то интересно посмотреть, почему так происходит.

Рассматриваемые отображения (25.61) удовлетворяют

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(ad - bc)}{(cz + d)^2},$$
(25.72)

и, в силу ad - bc > 0, данная производная положительна на всей вещественной оси. Это означает, что отображение переводит *ориентированную* вещественную ось (скажем, слева направо) в вещественную ось с такой же ориентацией! На самом деле вещественную ось в $\overline{\mathbb{H}}$ можно считать окружностью, которая содержит бесконечно удаленную точку. Три точки на вещественной оси могут быть отражены в другие три точки тогда и только тогда, когда их *циклические* упорядочения как точек на окружности совпадают. Пусть ($P_1P_2P_3$) обозначает выколотые точки 1, 2 и 3, в том случае, когда они появляются в этом порядке при движении по вещественной оси слева направо. Тогда данная конфигурация может быть отображена в любую другую конфигурацию при условии, что циклическое упорядочение сохранено. Например, она может быть отображена в конфигурацию ($P_2P_3P_1$), но не в конфигурацию ($P_2P_1P_3$).

Рассмотрим пример. Пусть A, B и C — это точки на z-плоскости, расположенные в -1, 0 и 1, соответственно (рис. 25.16). Давайте попробуем построить отображение на w-плоскость, которое переводит данные точки в 1, 0 и -1, соответственно. По сути, мы пытаемся обратить порядок расположения точек на вещественной оси. С помощью (25.59) выясняем, что требуется следующее



Рис. 25.16. Конформного отображения верхней полуплоскости на себя, обращающего упорядочение трех точек на вещественной оси, не существует

от Сраз ение:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{w+1}{w-1}.$$
 (25.73)

При умножении наискосок, находим, что это отображение равно w = -z, а ранее было показано, что оно не отображает $\overline{\mathbb{H}}$ на $\overline{\mathbb{H}}$. Так как существуют только два неэквивалентных циклических упорядочения трех точек на границе диска, то пространство модулей \mathcal{N}_3 диска $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками на его границе имеет двух представителей. Один соответствует $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками, упорядоченными как $(P_1P_2P_3)$, а другой соответствует $\overline{\mathbb{H}}$ с тремя выколотыми точками упорядоченными как $(P_2P_1P_3)$. Можно сказать, что существует один дискретный модуль, который принимает два значения и больше ничего! Отметим, что пространство модулей $\mathcal{M}_{0,3}$ сферы с тремя выколотыми точками не имеет дискретных модулей — все такие сферы конформно эквивалентны. Пространство модулей $\mathcal{M}_{0,3}$ — это просто точка, в то время как пространство модулей \mathcal{N}_3 — это две точки. Хотя существует очевидный способ определять упорядочение точек, расположенных на окружности (граница $\overline{\mathbb{H}}$), нет никакого способа определить упорядочение точек на сфере.

Рассмотрим \mathbb{H} с четырьмя занумерованными выколотыми точками, P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , на вещественной оси и зафиксируем их циклическое упорядочение в виде ($P_1P_2P_3P_4$) (рис. 25.17). Можно ли отобразить \mathbb{H} на себя и перевести четыре выколотые точки в точки с произвольными координатами при условии сохранения циклического упорядочения? Нет. Существует только три вещественных параметра в наиболее общем отображении \mathbb{H} в \mathbb{H} , и поэтому можно задать только три положения. Придерживаясь той же стратегии, что и ранее, можно отобразить



Рис. 25.17. Верхняя полуплоскость z с четырьмя выколотыми точками на вещественной оси может быть канонически реализована отображением на верхнюю полуплоскость w, при котором три выколотые точки, скажем P_1 , P_3 и P_4 , отображаются в w = 0, 1 и ∞ . Выколотая точка P_2 перейдет в $w = \lambda$ при $0 < \lambda < 1$

три выколотые точки в точки с фиксированными w координатами. Например, давайте отобразим P_1 в w = 0, P_3 в w = 1, а P_4 в $w = \infty$. При таком отображении, P_2 будет переходить в $w = \lambda$, где λ — это некоторое вещественное число. В силу того, что циклическое упорядочение сохраняется, P_2 должна по-прежнему находиться между P_1 и P_3 , так что $0 < \lambda < 1$.

Мы можем рассматривать интервал $0 < \lambda < 1$ как пространство, представляющее все возможные $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми точками на границе. Для любого λ_0 в этом интервале существует ассоциированный $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотыми точками в 0, λ_0 , 1 и ∞ . Две точки с различными значениями λ соответствуют конформно неэквивалентным $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми точками. Наконец, в данном интервале учтены все $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми точками. Таким образом, будем называть $0 < \lambda < 1$ пространством модулей \mathcal{N}_4 верхних полуплоскостей с четырьмя пронумерованными выколотыми на границе с заданным циклическим упорядочением. Это пространство модулей имеет один вещественный параметр и на самом деле является всего лишь отрезком с открытыми концами. Это пространство одномерно:

dim
$$\mathcal{N}_4 = 1.$$
 (25.74)

Поверхности $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками важны по той причине, что они являются поверхностями, которые возникают в процессах взаимодействия с участием четырех открытых струн. Как будет видно далее, мировая поверхность такого процесса конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками. Мы также увидим, что струнная диаграмма обладает одним параметром — разницей во времени T между точками взаимодействия. Будет доказан замечательный результат: по мере того как T пробегает свой естественный интервал значений, струнные диаграммы порождают все $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками! То есть порождаются полное пространство модулей \mathcal{N}_4 . Для доказательства необходимо изучить функцию $\lambda(T)$, которая описывает модули как функцию от T. Конечно же, это требует наличия конформного отображения из струнной диаграммы в $\overline{\mathbb{H}}$. Необходимо показать, что по мере того, как T пробегает свой естественный интервал, $\lambda(T)$ изменяется от нуля до единицы. Давайте теперь перейдем к обсуждению этого утверждения.

Упражнение-разминка 25.5. Сколько неэквивалентных упорядочений четырех точек может быть на границе П? Какой вывод отсюда следует для пространства модулей диска П с четырьмя выколотыми граничными точками?

25.7. Взаимодействие четырех открытых струн

Давайте рассмотрим процесс, в котором две открытые струны соединяются и образуют промежуточную струну, которая затем расшепляется на две открытые струны. Входящие струны — это третья и четвертая струны, а исходящие струны — ны — первая и вторая. Струнная диаграмма показана на рис. 25.18.

Отметим, что точка взаимодействия Q_1 возникает при $\tau = T_1$, а Q_2 возникает при $\tau = T_2$. Временной интервал между моментами взаимодействий равен

$$T = T_1 - T_2. \tag{25.75}$$



Рис. 25.18. Сверху: конусная струнная диаграмма, показывающая третью и четвертую струны, которые объединяются и образуют промежуточную струну, после чего расщепляются на первую и вторую струны. Внизу: конусная диаграмма отображается на $\widetilde{\mathbb{H}}$; P_1 , P_3 и P_4 , переходят в 0, 1 и ∞; точки взаимодействия Q_1 и Q_2 переходят в x_1 и x_2 , а P_2 переходит в λ

На диаграмме, показанной на рисунке, T > 0. Однако, набор всех возможных взаимодействий содержит также процессы, для которых T < 0. В таких случаях разрезы движутся друг сквозь друга. Полный интервал T в данном взаимодействии равен

$$-\infty < T < \infty. \tag{25.76}$$

Для $p_2^+ = p_3^+$ имеется исключение. В этом случае разрезы сталкиваются при T = 0 и T не может быть отрицательным. Подобная ситуация изучается в задаче 25.7.

Теперь с помощью отображения Шварца—Кристоффеля отобразим данную диаграмму в $\overline{\mathbb{H}}$. Выделенные точки на границе струнной диаграммы упорядочены как $(P_1Q_1P_2P_3Q_2P_4)$. Три точки могут быть отображены в точки с произвольными координатами (совместно с циклическим упорядочением), поэтому выберем P_1 , P_3 и P_4 и отобразим их в 0, 1 и ∞ , соответственно. Тогда точка P_2 , координата которой выступает в качестве модуля, должна отображаться в некоторую точку $0 < \lambda < 1$. Так как Q_1 расположена между P_1 и P_2 , а Q_2 расположена между P_3 и P_4 , их образы x_1 и x_2 на $\overline{\mathbb{H}}$ удовлетворяют

$$0 < x_1 < \lambda, \quad 1 < x_2 < \infty.$$
 (25.77)

Цель состоит в вычислении модуля λ на $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками в виде функции параметров T и p_i^+ струнной диаграммы:

$$\lambda = \lambda (T; p_1^+, p_2^+, p_3^+, p_4^+).$$
(25.78)

Мы хотим доказать замечательное утверждение: набор всех возможных диаграмм для $T \in (-\infty, \infty)$ даст все $\lambda \in (0, 1)$, т. е. полное пространство модулей \mathcal{N}_4 диска $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками. Параметр λ — это явно и хорошо определенная функция T: для заданного T можно вычислить λ . Хотя мы не будем доказывать этого, функция $\lambda(T)$ на самом деле является взаимнооднозначной. Это показывает, что две струнные диаграммы с различными значениями T приводят к разным римановым поверхностям. В результате, набор струнных диаграмм содержит каждую поверхность из \mathcal{N}_4 по одному разу.

Дифференциальное уравнение для конформного отображения легко записывается с помощью (25.27). В точках P_i углы поворота равны $+\pi$, в точках взаимодействия Q_i углы поворота равны $-\pi$. Таким образом,

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{1}{z}(z-x_1) \frac{1}{(z-\lambda)} \frac{1}{(z-1)}(z-x_2). \qquad (25.79)$$

Теперь необходимо разложить правую часть этого уравнения на элементарные дроби. Можно воспользоваться трюком, который справедлив в случае, когда все сомножители в знаменателе разные, так же, как мы поступили в (25.79). Например, коэффициент перед 1/z получается удалением множителя 1/z и вычислением остатка в правой части при z = 0. Аналогичным образом, для определения коэффициента перед $1/(z - \lambda)$ этот множитель удаляется, а остаток вычисляется при $z = \lambda$. Таким образом, правая часть без коэффициента A равна

$$\frac{1}{z}\frac{(-x_1)(-x_2)}{(-\lambda)(-1)} + \frac{1}{(z-\lambda)}\frac{(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{1}{(z-1)}\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1-\lambda)}.$$
 (25.80)

После упрощения, уравнение (25.79) принимает вид

$$\frac{dw}{dz} = A \left[\frac{1}{z} \frac{x_1 x_2}{\lambda} + \frac{1}{z - \lambda} \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{1}{z - 1} \frac{(1 - x_1)(x_2 - 1)}{1 - \lambda} \right].$$
 (25.81)

Также известен способ записи конформного отображения напрямую, который уже объяснялся после уравнения (25.46). В данном случае это приводит к

$$w(z) = -2\alpha' p_1^+ \ln z - 2\alpha' p_2^+ \ln (z - \lambda) + 2\alpha' p_3^+ \ln (z - 1). \qquad (25.82)$$

Дифференцирование приведет к

$$\frac{dw}{dz} = -2\alpha' p_1^+ \frac{1}{z} - 2\alpha' p_2^+ \frac{1}{z-\lambda} + 2\alpha' p_3^+ \frac{1}{z-1}.$$
 (25.83)

Можно сравнить два дифференциальных уравнения (25.81) и (25.83) и получить три уравнения, связывающие импульсные параметры струнной диаграммы с па-

раметрами в реализации ІІ:

$$-2\alpha' p_{1}^{+} = A \frac{x_{1}x_{2}}{\lambda},$$

$$-2\alpha' p_{2}^{+} = A \frac{(\lambda - x_{1})(x_{2} - \lambda)}{\lambda(1 - \lambda)},$$

$$-2\alpha' p_{3}^{+} = A \frac{(1 - x_{1})(x_{2} - 1)}{1 - \lambda}.$$
(25.84)

Итак, мы имеем три уравнения для отыскания четырех неизвестных (A, λ, x_1, x_2) . Какой информации не достает? Пока не был задействован параметр струнной диаграммы $T = T_1 - T_2$. Заметим, что T_1 — это вещественная часть w при $z = x_1$, а T_2 — это вещественная часть w при $z = x_2$:

$$T_1 = \operatorname{Re}(w(x_1)), \quad T_2 = \operatorname{Re}(w(x_2)).$$
 (25.85)

Так как Re (ln z) = ln |z|, с помощью уравнения (25.82) можно записать

$$T_1 = -2\alpha' p_1^+ \ln x_1 - 2\alpha' p_2^+ \ln (\lambda - x_1) + 2\alpha' p_3^+ \ln (1 - x_1),$$

$$T_2 = -2\alpha' p_1^+ \ln x_2 - 2\alpha' p_2^+ \ln (x_2 - \lambda) + 2\alpha' p_3^+ \ln (x_2 - 1).$$

Здесь было использовано $0 < x_1 < \lambda < 1 < x_2$. Теперь можно вычислить $T = T_1 - T_2$:

$$\frac{1}{2\alpha'}T = p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{\lambda - x_1}\right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1 - x_1}{x_2 - 1}\right).$$
(25.86)

Это последнее уравнение, в совокупности с тремя предыдущими, фиксирует значения всех неизвестных параметров. Данную систему уравнений достаточно сложно решить и получить точные значения параметров, однако, к счастью, наше утверждение можно доказать, избежав этого. Для получения требуемого результата следует провести лишь небольшой анализ этих уравнений.

Так как A не входит в (25.86), то удобно исключить его из уравнений (25.84) путем составления следующих отношений:

$$\frac{p_2^+}{p_1^+} = \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{(1 - \lambda)x_1x_2}, \quad \frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{(1 - x_1)(x_2 - 1)\lambda}.$$
 (25.87)

При изменении T значения x_1 , x_2 и λ будут изменяться непрерывно; T меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Если нам удастся показать, что λ стремится к нулю при $T \to \infty$ и что λ стремится к единице при $T \to -\infty$, то λ будет принимать все значения $0 < \lambda < 1$.

Мы только что предположили, что $\lambda \to 0$ при $T \to \infty$. Интуиция подсказывает, что при $T \to \infty$ точки P_1 и P_2 отделены от точек P_3 и P_4 длинной полоской. С конформной точки зрения, P_1 и P_2 стремятся к друг другу. Для рассматриваемого отображения в $\overline{\mathbb{H}}$ это соответствует $\lambda \to 0$ (для дальнейшего развития интуиции в данном вопросе читателю предлагается решить задачу 25.5). Тепе

докажем, что $T \to \infty$ при $\lambda \to 0$. Так как $\lambda(T)$ является хорошо определенной функцией¹⁾ от T, это означает что и $\lambda \to 0$ при $T \to \infty$.

Для заданного $0 < x_1 < \lambda$ имеем: $x_1 \to 0$ при $\lambda \to 0$. Рассмотрим, что происходит с *T* в этом случае. С помощью (25.86) находим

$$\frac{1}{2\alpha'}T \approx p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \frac{x_2}{\lambda - x_1} + p_3^+ \ln \frac{1}{x_2 - 1}.$$
 (25.88)

Чтобы разобраться с поведением T, необходимо знать, как ведет себя x_2 . В этом нам помогут уравнения (25.87), при $\lambda \to 0$ и $x_1 \to 0$ из них следует

$$\frac{p_2^+}{p_1^+} \approx \frac{(\lambda - x_1)}{x_1} = \frac{\lambda}{x_1} - 1,$$

$$\frac{p_2^+}{p_3^+} \approx \frac{(\lambda - x_1)x_2}{(x_2 - 1)\lambda} = \frac{1 - \frac{x_1}{\lambda}}{1 - \frac{1}{x_2}}.$$
(25.89)

Так как отношения конусных импульсов — это положительные числа, то из верхнего уравнения следует, что в рассматриваемом пределе λ/x_1 конечно и больше единицы. Тогда из нижнего уравнения следует, что x_2 конечно и больше единицы. С учетом конечности x_2 , уравнение (25.88) принимает вид

$$\frac{1}{2\alpha'}T\approx -p_1^+\ln x_1 - p_2^+\ln (\lambda - x_1) +$$
конечные вклады. (25.90)

Так как x_1 и $\lambda - x_1$ стремятся к нулю при $\lambda \to 0$, то получаем, что $T \to +\infty$. Таким образом, $\lambda \to 0$ при $T \to \infty$, что и требовалось доказать.

Теперь нам хотелось бы показать, что $\lambda \to 1$ при $T \to -\infty$. С точки зрения струнной диаграммы, этот предел также является осмысленным. В данном случае разрезы отходят друг от друга на большое расстояние, так, что точки P_2 и P_3 оказываются отделены от точек P_1 и P_4 длинной полоской. С конформной точки зрения, P_2 и P_3 стремятся к друг другу. Так как P_3 расположена в единице, то это приводит к $\lambda \to 1$.

Давайте посмотрим на уравнения (25.87) и выясним, что происходит с параметрами. При $\lambda \to 1$ второе отношение принимает вид

$$\frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{(1 - x_1)(x_2 - 1)}.$$
 (25.91)

Если в предыдущем уравнении наивно положить $\lambda \to 1$, то получим $p_2^+/p_3^+ \to 1$, что неверно. Таким образом, при $\lambda \to 1$ необходимо иметь либо $x_1 \to 1$ при

¹⁾ Здесь на самом деле используется то, что функция $\lambda(T)$ жетется взаимнооднозначной. — Прим. ред. перевода.

конечном x_2 , либо $x_2 \rightarrow 1$ при конечном x_1 . Если положить $x_1 \rightarrow 1$, получим

$$x_1 \to 1$$
: $\frac{p_2^+}{p_3^+} \approx \frac{(\lambda - x_1)}{(1 - x_1)} < 1,$ (25.92)

где последнее неравенство возникает в силу $x_1 < \lambda$. Из рис. 25.18 следует, что сделан стандартный выбор $p_2^+ > p_3^+$. Тем самым, мы рассматриваем возможность $x_2 \rightarrow 1$. В этом случае

$$x_1 \to 1:$$
 $\frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{(x_2 - \lambda)}{(x_2 - 1)} > 1.$ (25.93)

Тогда возникает правильный асимптотический режим:

$$p_2^+ > p_3^+, \quad \lambda \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad \text{a} \quad x_1 \quad \text{конечен.}$$
 (25.94)

Теперь можно вернуться к (25.86) и разобраться, что в этом режиме происходит с T:

$$\frac{1}{2\alpha'} T \to p_1^+ \ln \frac{1}{x_1} + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{1 - x_1}\right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1 - x_1}{x_2 - 1}\right).$$
(25.95)

Отделяя конечные вклады, получаем

$$\frac{1}{2\alpha'} T \to p_2^+ \ln (x_2 - \lambda) - p_3^+ \ln (x_2 - 1) +$$
 конечные вклады. (25.96)

Первые два слагаемых в правой части предыдущего выражения можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2\alpha'}$$
 $T \rightarrow (p_2^+ - p_3^+) \ln (x_2 - \lambda) + p_3^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{x_2 - 1}\right)$ + конечные вклады. (25.97)

Первые два члена в правой части последнего уравнения могут быть переписаны как

$$\frac{1}{2\alpha'} T \rightarrow (p_2^+ - p_3^+) \ln (x_2 - \lambda) +$$
конечные вклады. (25.98)

При $p_2^+ - p_3^+ > 0$, и $x_2 \to \lambda \to 0$, находим, что $T \to -\infty$. Так как $T \to -\infty$ при $\lambda \to 1$, то получаем, что $\lambda \to 1$ при $T \to -\infty$, что и требовалось доказать.

Так как λ изменяется непрерывно и достигает как нуля, так и единицы, то она должна принимать все значения в интервале между ними. Таким образом, показано, что конусные диаграммы порождают все существенные римановы поверхности, то есть все $\overline{\mathbb{H}}$ с четырьмя выколотыми граничными точками. Струнные диаграммы порождают пространство модулей \mathcal{N}_4 . Как упоминалось ранее, λ изменяется монотонно при изменении T, поэтому каждое значение λ в интервале (0, 1) используется только один раз.

Предыдущее обсуждение иллюстрирует важный и общий результат в теории струн. Аналогичный вывод имеет место и для произвольных струнных взаимодействий. Если фиксировать топологический тип струнной диаграммы и если параметры диаграммы изменяются в стандартных пределах, то возникает полный набор неэквивалентных римановых поверхностей заданного топологического типа. Струнные взаимодействия порождают пространства модулей римановых поверхностей.

25.8. Амплитуда Венециано

Теперь воспользуемся тем, что мы уже знаем о пространстве модулей N_4 и приведем обоснование амплитуды Венециано — амплитуды рассеяния четырех тахионов открытых струн (две входящих и две исходящих). Как уже обсуждалось ранее, тахионы открытых струн — это частицы с $p^2 = -M^2 = 1/\alpha'$. В разделе 25.2 обсуждались три пункта, необходимых для вычисления сечений в теории струн. Нами был выполнен п. (1) — графическое представление струнных диаграмм и их конформное отображение в стандартную реализацию. Теперь сосредоточимся на п. (2), в котором необходимо получить амплитуды рассеяния. Пункт (3), — построение сечений, — рассматриваться не будет.

У нас нет возможности выводить здесь амплитуду рассеяния, однако мы можем объяснить ее происхождение. Для этой цели отметим, что амплитуда должна представляться в виде интеграла по пространству *модулей* тех поверхностей, которые дают вклад в рассматриваемый процесс, т. е. по пространству модулей \mathcal{N}_4 . Отметим, что интеграл берется по пространству модулей поверхностей, а не по самим поверхностям! Каждая поверхность соответствует возможному «пути», соединяющему исходное и конечное состояния, поэтому каждая поверхность дает вклад в амплитуду. Для того чтобы найти полную амплитуду необходимо сложить вклады всех поверхностей; так возникает интеграл по пространству параметров рассматриваемых поверхностей.

Рассмотрим $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотыми точками x_1, x, x_3 и x_4 при $x_1 < x < x_3 < x_4$, так, как показано на рис. 25.19. Это точки, в которых, по предположению, находятся четыре тахиона: на конусной диаграмме это образы края полоски в удаленном прошлом и края полоски в удаленном будущем. В точке x_1 расположен тахион с пространственно-временным импульсом p_1 , в x — тахион с импульсом p_2 , а в x_3 и x_4 — тахионы с импульсами p_3 и p_4 , соответственно. Точки x_1, x_3 и x_4 можно было бы отобразить в 0, 1 и ∞ , однако, мы не будем пока этого



Рис. 25.19. Амплитуда рассеяния четырех тахионов открытых струн является диском с четырьмя выколотыми граничными точками. При отображении на $\overline{\mathbb{H}}$ выколотые точки P_i имеют координаты $i = 1, \ldots, 4$. Их также можно отобразить в x_1, x, x_3 и x_4

делать. Рассмотрение всех выколотых точек на равных основаниях делает структуру взаимодействия более прозрачной. Наша стратегия будет состоять в том, чтобы с помощью условий конформной инвариантности обосновать выражение для амплитуды.

С помощью поверхностей с выколотыми точками x_1 , x, x_3 и x_4 пространство модулей \mathcal{N}_4 можно описать, как набор поверхностей, возникающих при изменении x в пределах $x_1 < x < x_3$ (при отображении x_1 , x_3 и x_4 в 0, 1 и ∞ воспроизводится каноническая реализация $x \in (0, 1)$). Запишем амплитуду рассеяния $A(p_1, p_2, p_3, p_4)$ в виде интеграла

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int d\mu, \qquad (25.99)$$

где мера $d\mu$ должна содержать dx, потому что по x происходит интегрирование. Амплитуда пропорциональна квадрату константы связи открытых струн g_0 , потому что рассматриваемый процесс содержит два элементарных взаимодействия, в которых две струны объединяются и образуют одну струну, и каждое такое взаимодействие пропорционально первой степени g_0 . Данная амплитуда A является объектом, похожим на амплитуду T, рассмотренную в (25.2). Мы не будем пытаться зафиксировать у A общий нормировочный множитель. Мера $d\mu$ также должна зависеть от импульсов тахионов и от положений выколотых граничных точек. Импульсы удовлетворяют соотношению

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \frac{1}{\alpha'}.$$
 (25.100)

Первое уравнение — это закон сохранения импульса, в котором все импульсы рассматриваются как входящие: например, если исходящими тахионами являются третий и четвертый тахионы, то p_3 и p_4 на самом деле равны импульсам этих исходящих тахионов со знаком *минус*. Второе уравнение означает, что четыре рассматриваемых тахиона находятся на массовой оболочке. Теперь рассмотрим меру $d\mu$:

$$d\mu = dx |x_3 - x_1| \cdot |x_4 - x_1| \cdot |x_4 - x_3|$$

$$|x - x_1|^{2\alpha' p_2 \cdot p_1} \cdot |x_3 - x_1|^{2\alpha' p_3 \cdot p_1} \cdot |x_3 - x|^{2\alpha' p_3 \cdot p_2}$$

$$|x_4 - x_1|^{2\alpha' p_4 \cdot p_1} \cdot |x_4 - x|^{2\alpha' p_4 \cdot p_2} \cdot |x_4 - x_3|^{2\alpha' p_4 \cdot p_3}.$$
(25.101)

Данное выражение является весьма симметричным. Каждой паре выколотых точек сопоставляется множитель, являющийся расстоянием между точками, возведенным в степень, равную скалярному произведению их полных импульсов. В той части $d\mu$, которая расположена на второй и третьей строках, все выколотые точки рассматриваются на равных основаниях. Однако в первой строке переменная выколотая точка x рассматривается отдельно от остальных трех выколотых точек x_1 , x_3 и x_4 .

Теперь рассмотрим вопрос конформной инвариантности. Выражение для $d\mu$ было выписано в виде, в котором три специальные выколотые точки были выбраны произвольным образом. Теперь интегрируем по пространству модулей \mathcal{N}_4 , представленным как $x \in (x_1, x_3)$ для произвольно выбранных x_1, x_3 и x_4 . Конкретный выбор должен быть несущественен — интеграл по $d\mu$ должен давать одинаковый ответ для любых других выборов. Так как любые два выбора трех фиксированных выколотых точек на вещественной оси связаны вещественным дробно-линейным преобразованием, можно гарантировать, что амплитуда не изменится, если мера $d\mu$ инвариантна относительно вещественных дробно-линейных преобразований. Общее преобразование этого типа имеет вид

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$
 (25.102)

Оно преобразует все величины dx, x_1, x_2, x_3 . Действительно,

$$x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}, \quad dx \rightarrow \frac{dx}{(cx+d)^2}, \quad x_i - x_j \rightarrow \frac{x_i - x_j}{(cx_i + d)(cx_j + d)}.$$
 (25.103)

Мера $d\mu$ должна быть инвариантна относительно всех таких преобразований. Это является жестким требованием. Теперь можно понять происхождение первой строки в (25.101). При учете всех множителей вместе с dx, первая строка преобразуется достаточно нетривиально. При $x_2 \equiv x$ получаем:

$$dx |x_{3} - x_{1}| \cdot |x_{4} - x_{1}| \cdot |x_{4} - x_{3}| \rightarrow$$

$$\rightarrow dx |x_{3} - x_{1}| \cdot |x_{4} - x_{1}| \cdot |x_{4} - x_{3}| \prod_{i=1}^{4} (cx_{i} + d)^{-2}. \qquad (25.104)$$

В результате этого преобразования для каждой из выколотых точек возник совершенно одинаковый множитель. С помощью последнего уравнения в (25.103) преобразуем вторую и третью строки в выражении для меры и найдем, что $d\mu$ преобразуется в произведение самой себя и множителей ($cx_i + d$) для каждой из выколотых точек. Для того чтобы $d\mu$ была инвариантна, каждый такой множитель должен иметь значение, равное единице. Давайте рассмотрим множитель ($cx_i + d$). По аналогии с вычислением (25.104) для первой строки, каждая из строк выражения для меры дает свой вклад, совместно получается:

$$(cx_i + d)^{-(2+2\alpha' p_2 \cdot p_1 + 2\alpha' p_3 \cdot p_1 + 2\alpha' p_4 \cdot p_1)}.$$
(25.105)

Это выражение может быть равно единице в случае, когда степень равна нулю. К счастью, это именно так. Рассматрим выражение для степени

$$2 + 2\alpha' p_1 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = 2 - 2\alpha' p_1^2 = 2 - 2\alpha' \frac{1}{\alpha'} = 0.$$
 (25.106)

При выводе этого результата мы воспользовались законом сохранения импульса и условием массовой поверхности (см. (25.100)). Совершенно аналогичные результаты справедливы для других выколотых точек. Это подтверждает наше предположение об инвариантности меры $d\mu$. Условие конформной инвариантности не настолько сильно, чтобы определить меру единственным образом, поэтому нельзя доказать, что $d\mu$ чем-то выделена. Оказывается, что $d\mu$ — это правильная мера при рассеянии тахионов открытых струн.

Мера упрощается, если выбрать $x_1 = 0$, $x = \lambda$, $x_3 = 1$ и $x_4 = \infty$. Может показаться, что размещение x_4 на бесконечности может создать проблемы. Однако, если доверять предыдущему анализу, никакой проблемы быть не может. Мера $d\mu$ конечна при конечных x_1 , x_3 и x_4 . Любое дробно-линейное преобразование, даже если оно переводит одну из точек в бесконечность, не изменяет меру. С помощью $x_4 \gg x_1$, x, x_2 выражение (25.104) можно упростить:

$$d\mu = d\lambda |x_4|^2 \cdot |\lambda|^{2\alpha' p_2 \cdot p_1} \cdot |1 - \lambda|^{2\alpha' p_3 \cdot p_2} \cdot |x_4|^{2\alpha' p_4 \cdot (p_1 + p_2 + p_3)}.$$
 (25.107)

Суммарный показатель $|x_4|$ равен нулю, а посему $d\mu$ сводится к

$$d\mu = d\lambda \left|\lambda\right|^{2\alpha' p_2 \cdot p_1} \cdot \left|1 - \lambda\right|^{2\alpha' p_3 \cdot p_2}.$$
(25.108)

Так как $\lambda \in (0, 1)$, то находим, что амплитуда Венециано определяется выражением

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int_0^1 d\lambda \, \lambda^{2\alpha'(p_1, p_2)} (1-\lambda)^{2\alpha'(p_2, p_3)}. \quad (25.109)$$

Теория струн началась с этой формулы, написанной Венециано в конце 1960-х годов. Эта формула была просто постулирована и физики задавались вопросом, что за теория могла бы привести к подобной амплитуде. Прошло несколько лет, прежде чем было продемонстрировано, как она возникает из теории струн.

В конце раздела 25.2 мы видели, как с помощью полюсов в амплитудах рассеяния можно определять типы возникающих частиц. Мы проделаем это для амплитуды Венециано, так же, как это было сделано вскоре после ее открытия. В качестве первого шага выразим скалярное произведение импульсов через лоренц-инварианты *s* и *t*. Если первая и вторая струны объединяются и образуют промежуточную струну, то ее импульс будет равен $p_1 + p_2$. С другой стороны, если вторая и третья струны объединяются и образуют промежуточную струну, то ее импульс будет равен $p_2 + p_3$. Так как выколотые точки циклически упорядочены, то других возможностей нет: первая струна не может объединится с третьей и образовать промежуточную струну (также как и вторая струна не может объединиться с четвертой). Таким образом, подходящие инварианты равны

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_2 + p_3)^2.$$
 (25.110)

Разложим s и с помощью условия массовой поверхности найдем

$$s = -p_1^2 - p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2p_1 \cdot p_2, \qquad (25.111)$$

что приводит к соотношению

$$2\alpha' p_1 \cdot p_2 = -\alpha' s - 2 = -(\alpha' s + 1) - 1. \qquad (25.112)$$

Для удобства определим

$$\alpha(s) \equiv \alpha' s + 1, \tag{25.113}$$

и тогда (25.112) можно представить в виде

$$2\alpha' p_1 \cdot p_2 = -\alpha(s) - 1. \tag{25.114}$$

С помощью данного соотношения и соответствующего соотношения для t амплитуда Венециано (25.109) представляется в виде

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \int_0^1 d\lambda \, \lambda^{-\alpha(s)-1} (1-\lambda)^{-\alpha(t)-1}. \quad (25.115)$$

Этот интеграл можно выразить через гамма-функции. Действительно, так как

$$\int_{0}^{1} dx \, x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
 (25.116)

находим, что

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_0^2 \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}.$$
 (25.117)

Для определения полюсов амплитуды *А* нужно найти полюсы и нули гаммафункции. Мы уже предварительно рассматривали гамма-функцию в разделе 3.4, где было доказано рекуррентное соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \text{Re}(z) > 0.$$
 (25.118)

Из этого уравнения следует что гамма функция имеет полюс при z = 0. Действительно, $\Gamma(1 + \epsilon) = \epsilon \Gamma(\epsilon)$ при малых ϵ дает

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1+\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \left(\Gamma(1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1).$$
 (25.119)

Посредством аналитического продолжения определение гамма-функции можно расширить на область отрицательных вещественных чисел: уравнение (25.118) будем считать справедливым даже при $\text{Re}(z) \leq 0$. Тогда, например, в точке z = -1 находим полюс:

$$\Gamma(\epsilon) = (-1+\epsilon)\Gamma(-1+\epsilon) \to \Gamma(-1+\epsilon) \simeq -\frac{1}{\epsilon}.$$
 (25.120)

Аналогичные рассуждения показывают, что гамма-функция имеет полюсы для всех отрицательных целых чисел (см. также задачу 3.6). Знаменитый (и нетривиальный) результат состоит в том, что гамма-функция не имеет нулей.

Теперь все готово для изучения структуры полюсов в амплитуде Венециано (25.117). Так как у гамма-функции нет нулей, то ее присутствие в знаменателе не приводит к полюсам. Все полюсы должны возникать из гамма-функций в числителе. Полюса возникают в том случае когда

$$\alpha(s) = n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$
 (25.121)
и когда

$$\alpha(t) = m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$
 (25.122)

Давайте сосредоточимся на полюсах в *s*-канале. Напомним, что полюс при $s = M^2$ означает присутствие частицы с квадратом массы, равным M^2 (см. (25.8)). Таким образом, для того чтобы выяснить, какие частицы присутствуют в амплитуде Венециано, необходимо найти значения *s*, которые приводят к полюсам в (25.121). С помощью (25.113) это условие сводится к виду

$$\alpha' s + 1 = n \implies s = \frac{1}{\alpha'}(-1+n) = M_n^2.$$
 (25.123)

Так как *n* изменяется от нуля до бесконечности, то присутствует бесконечное число полюсов и бесконечное число частиц. Отметим, что значения M_n^2 в точности задают уровни релятивистской струны, которую мы изучали в этой книге. При n = 0 получаем тахион ($M_n^2 = -1/\alpha'$). При n = 1 получаем безмассовые частицы. Для старших *n* существует бесконечно много массивных частиц. В точности такой же набор частиц возникает в полюсах *t*-канала. Физики с самого начала понимали, что предложенная Венециано модель как-то связана с релятивистскими струнами. Это ощущение подтвердилось в начале 1970-х годов, когда струна была проквантована в калибровке светового конуса и был выяснен ее спектр.

Задачи

► *Задача 25.1*. Отражения сферы Ĉ на себя

- (a) Покажите, что композиция двух дробно-линейных преобразований (25.50) является дробно-линейным преобразованием.
- (б) Неподвижная точка преобразования w = f(z) является точкой z_0 такой, что $f(z_0) = z_0$. Докажите, что каждое дробно-линейное преобразование, за исключением тождественного преобразования w = z, имеет не более двух неподвижных точек.
- (в) Покажите, что (25.59) является единственным дробно-линейным преобразованием, которое отображает три различные точки z_1 , z_2 и z_3 в три различные точки w_1 , w_2 и w_3 , соответственно. [Подсказка: пусть S и T это два различных дробно-линейных преобразования, которые удовлетворяют этому свойству, рассмотрите преобразование, полученное комбинацией S и обратного к T.]

► Задача 25.2. Конформный инвариант сферы C с четырьмя выколотыми точками

Рассмотрим четыре точки z_1 , z_2 и z_3 на $\widehat{\mathbb{C}}$. Выпишите отображение w(z) такое, что $w(z_2) = 0$, $w(z_3) = 1$ и $w(z_4) = \infty$. Определите $\lambda = w(z_1)$. Вычислите λ и покажите, что оно имеет вид

$$\lambda = \lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

Явно убедитесь, что λ является конформным инвариантом, т.е.

 $\lambda(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \lambda(z_1, z_2, z_3, z_4),$

где ϕ — произвольное дробно-линейное преобразование.

Задача 25.3. Отражения ІІ на себя

Докажите, что если дробно-линейное преобразование w = (az + b)/(cz + d) отображает вещественную ось плоскости z на вещественную ось плоскости w, то a, b, c и d должны быть вещественными, возможно исключая общий фазовый множитель от которого можно избавиться не изменяя отображения $z \to w$.

Задача 25.4. Верхняя полуплоскость ІІ с двумя выколотыми граничными точками

Рассмотрите $\tilde{\mathbb{H}}$ с двумя выколотыми точками P_1 и P_2 на вещественной оси с координатами $z = x_1$ и $z = x_2$, соответственно. Рассмотрите другую копию $\overline{\mathbb{H}}$ с двумя выколотыми точками P_1 и P_2 на вещественной оси с координатами $z' = x'_1$ и $z' = x'_2$ соответственно. Являются ли две данные поверхности одной и той же римановой поверхностью? Покажите, что являются, и с этой целью найдите конформное отображение, которое переводит выколотые точки друг в друга, сохраняя при этом $\overline{\mathbb{H}}$. Вы найдете два конформных отображения, в зависимости от знака $(x'_2 - x'_1)/(x_2 - x_1)$. Каков геометрический смысл этого знака?

Задача 25.5. Что означает близкое расположение точек на римановой поверхности?

Концепция близости точек на римановом пространстве требует пояснений, потому как всегда можно изменить масштаб координат. Рассмотрим $\overline{\mathbb{H}}$ с выколотыми граничными точками. Если есть только две выколотые точки, то нельзя сказать, что они близко расположены, потому как их всегда можно отобразить в любые другие две точки. То же самое справедливо для трех выколотых точек. Для четырех выколотых точек возможно ввести понятие сходящихся выколотых точек. Это понятие применимо к семейству поверхностей с перемещающимися выколотыми точками.

Рассмотрите \mathbb{H} с четырьмя выколотыми точками P_i , i = 1, 2, 3, 4 с вещественными координатами $x_i(t)$, где $t \in [0, 1]$. Данное семейство поверхностей параметризуется параметром t. При изменении t, координаты выколотых точек также изменяются. Конечно же, с помощью (вещественных) дробно-линейных преобразований можно изменить значения $x_i(t)$.

Определение. Говорят, что $P_i \to P_j$ при $t \to 0$ $(i \neq j)$, если координата P_i стремится к координате P_j в реализации $\overline{\mathbb{H}}$, где P_j и две другие выколотые точки остаются неподвижными.

Для правильного понимания данного определения рассмотрим следующий пример:

 $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1$, $x_4(t) = \infty$.

Из определения ясно, что $P_2 \rightarrow P_1$ при $t \rightarrow 1$. Докажите, что следующие утверждения справедливы для этого семейства при $t \rightarrow 1$.

- (a) $P_1 \to P_2$. Это означает, что если одна выколотая точка стремится ко второй выколотой точке, то вторая так же стремится к первой.
- (6) $P_3 \to P_4$. Две другие выколотые точки также стремятся друг к другу!

Теперь докажите, исходя из общих соображений, что

(в) предложенное выше определение является конформно-инвариантым. То есть, если соответствующие координаты стремятся друг к другу в заданной реализации <u>H</u>, где P_j и другие две выколотые точки остаются неподвижными, то они будут стремится друг к другу в любой такой реализации.

Задача 25.6. Отображение Шварца—Кристоффеля замкнутого многоугольника

Дифференциальное уравнение (25.27) не содержит угол поворота α_n в P_n , потому что эта точка отображается в $z = \infty$. Наша цель состоит в том, чтобы разобраться, что происходит с этой точкой на бесконечности.

(а) Для нахождения угла поворота в $z = \infty$ рассмотрите предел (25.27) при больших z:

$$\frac{dw}{dz}\simeq A_z^{-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i}$$

Определите t = -1/z и вычислите dw/dz как функцию от t. Объясните, почему из полученных результатов следует, что угол поворота равен α_n .

(б) Дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{-\alpha_1/\pi}(z-x_2)^{-\alpha_2/\pi}\dots(z-x_n)^{-\alpha_n/\pi},$$
 (1)

в котором последняя точка поворота P_n включена как конечная точка x_n , описывает ситуацию, при которой угол в точке $z = \infty$ отсутствует. Докажите, что многоугольник замыкается. Для этого покажите, что при прохождении всей вещественной оси, изменение w равно нулю:

$$w(x=\infty)-w(x=-\infty)=\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}dx\,\frac{dw}{dx}=0.$$

[Подсказка: воспользуйтесь (1) и деформацией контура интегрирования. Покажите, что полуокружности вокруг x_i и ∞ не дают вклада.]

Задача 25.7. Взаимодействие четырех открытых струн в специальной конфигурации

Рассмотрите конусную диаграмму открытой струны, показанную на рис. 25.18 в специальной конфигурации, где все импульсы p^+ равны: $p_1^+ = p_2^+ = p_3^+ = p_4^+$. Пусть $T = T_1 - T_2$ обозначает разницу во времени на мировой поверхности между точками. Явно вычислите модуль $\lambda(T)$. Покажите, что пространство модулей \mathcal{N}_4 порождается при $T \in [0, \infty)$. Убедитесь, что λ является монотонной функцией от T.

Задача 25.8. Распад протона в моделях пересекающихся бран

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что в моделях пересекающихся бран отсутствуют струнные диаграммы распада протона на лептоны и калибровочные бозоны. Сосредоточим наше внимание на модели, представленной на рис. 21.7, и ограничимся рассмотрением струнных диаграмм, представленных в виде диска с выколотыми граничными точками, в которых расположен набор (входящих и исходящих) состояний открытой струны, имеющих отношение к данному процессу. Выколотые точки разбивают границу диска на компоненты, являющиеся местоположением концов открытой струны и, следовательно, индексируются D-бранами.

Докажите, что невозможно самосогласованным образом приписать граничным компонентами индексы бран, при условии, что в распаде протона участвуют три кварка (а также ряд лептонов и калибровочных бозонов), и каждый кварк соответствует открытой струне, один из концов которой расположен на барионной бране, а другой конец где-нибудь еще. [Подсказка: попробуйте нарисовать струнные диаграммы. Ваши попытки должны привести к очень краткому и ясному аргументу.]

Глава 26

Петлевые амплитуды в теории струн

Для вычисления амплитуд рассеяния с высокой степенью точности необходимо учитывать вклады от диаграмм, содержащих петли, которые соответствуют виртуальным процессам. В теории гравитации Эйнштейна такие диаграммы приводят к ультрафиолетовым расходимостям, что свидетельствует о неконтролируемом поведении теории на малых расстояниях. Римановы поверхности, являющиеся возможными кандидатами для описания поведения теории на малых расстояниях, допускают интерпретацию, в которой они очевидным образом описывают регулярные процессы на больших расстояниях. Это замечательное свойство иллюстрируется на примере колец, которые являются поверхностями, возникающими в виртуальных процессах с участием открытых струн, а также на примере торов, которые являются поверхностями, возникающими в виртуальных процессах с участием замкнутых струн.

26.1. Петлевые диаграммы и ультрафиолетовые расходимости

При вычислении амплитуд рассеяния в физике частиц, как правило, используется приближенная схема, в которой сила взаимодействия предполагается малой, тогда амплитуда записывается в виде пертурбативного разложения по степеням малого параметра взаимодействия. Диаграммы Фейнмана, рассмотренные в главе 25, и похожие на них струнные диаграммы, все являлись *древесными* диаграммами. Это означает, что соответствующие графы (например, см. рис. 25.2) не содержали нетривиальных замкнутых путей, т. е. петель. Древесные диаграммы дают основной вклад в пертурбативном разложении амплитуд рассеяния. Для того чтобы продвинуться за пределы приближения низшего порядка, необходимо рассмотреть диаграммы Фейнмана с петлями.

Рассмотрим диаграмму Фейнмана с петлей, показанную на рис. 26.1. Эта диаграмма описывает входящую частицу, которая распадается на две частицы, которые затем снова объединяются и образуют исходящую частицу. Эти две короткоживущие частицы называются виртуальными частицами, а их появление и последующее исчезновение называется виртуальным процессом. При вычислении вклада таких графов в амплитуды, как правило, возникают расходящиеся величины. Эти расходимости называются ультрафиолетовыми (УФ) расходимостями, если они возникают в виртуальных процессах с высокими энергиями или импульсами, или, что эквивалентно, с очень малыми временами или рас-



Рис. 26.1. Однопетлевой граф Фейнмана, описывающий виртуальный процесс. В пределе, когда виртуальные процессы происходят на малых расстояниях или с большими импульсами, в соответствующей амплитуде может возникнуть ультрафиолетовая расходимость

стояниями. Виртуальные процессы, происходящие на малых расстояниях, могут приближенно представляться как графы с маленькими петлями.

Ультрафиолетовые расходимости не обязательно являются фатальными во многих случаях с ними можно справиться с помощью методов регуляризации и перенормировки. Однако для некоторых теорий регуляризация и перенормировка не работают, и одним из таких наиболее важных случаев является теория гравитации Эйнштейна. Столкнувшись с неперенормируемыми ультрафиолетовыми расходимостями, иногда можно продолжать работать в режиме низких энергий с помощью эффективных полевых теорий, которые, при некоторой потере предсказательной силы, все же моделируют проблематичные процессы при высоких энергиях вполне контролируемым образом. Однако, на фундаментальном уровне такой подход нельзя считать полностью удовлетворительным.

Если теория струн является полной квантовой теорией, то тогда существуют лишь две возможности: либо ультрафиолетовые расходимости устраняются, либо они попросту отсутствуют. Это удивительно, но *в теории струн нет ультрафиолетовых расходимостей*. Теория струн является первым примером квантовой теории, которая содержит гравитацию и не имеет ультрафиолетовых расходимостей. Именно по этой причине теория струн стала главным кандидатом на роль теории квантовой гравитации. Цель этой главы состоит как раз в том, чтобы до некоторой степени познакомить читателя с этим замечательным результатом.

Основное свойство струнных диаграмм состоит в том, вся необходимая информация закодирована в тех *римановых поверхностях*, которые они определяют. Любое конформное отображение струнной диаграммы приводит к физически *эквивалентному* описанию, потому что риманова поверхность при этом остается неизменной. С помощью конформного отображения будет показано, что те струнные диаграммы, которые могут возникать при описании потенциально опасной физики на малых расстояниях, на самом деле эквивалентны диаграммам, которые свободны от ультрафиолетовых проблем. Мы выяснили в главе 25, что струнная амплитуда для заданного процесса получается как интеграл по соответствующему пространству модулей римановых поверхностей. При таком интегрировании мы суммировали вклады в амплитуду от всех поверхностей, которые согласуются с исходным и конечным состояниями, при этом интегрирования по поверхностям не происходило.

Для петлевых струнных диаграмм простейшими соответствующими римановыми поверхностями являются кольца и торы. Мы будем рассматривать оба типа поверхностей более подробно, а также будем изучать соответствующие простран-

ства модулей: пространство всех возможных колец и пространство всех возможных торов. Будут рассмотрены области в пространствах модулей, для которых римановы поверхности могут соответствовать процессам на малых расстояниях и с помощью подходящих конформных отображений будет показано, что они соответствуют регулярным процессам на больших расстояниях. Мы будем считать это доказательством того, что в теории струн нет места ультрафиолетовым расходимостям. Несмотря на то что будут рассматриваться только однопетлевые струнные диаграммы, это замечательное свойство римановых поверхностей и соответствующих пространств модулей выполнено для струнных диаграмм с произвольным числом петель.

26.2. Кольца и однопетлевые открытые струны

Начнем с рассмотрения однопетлевой диаграммы открытой струны показанной на рис. 26.2 *а*, диаграмма содержит одну входящую открытую струну, одну исходящую открытую струну, и две промежуточные открытые струны. Это струнный аналог однопетлевой диаграммы Фейнмана на рис. 26.1, менее очевидный струнный аналог будет обсуждаться в разделе 26.4.

Конусная диаграмма показывает открытую струну с конусным импульсом p^+ , которая расщепляется на две открытые струны. Две открытые струны распространяются в течение времени ΔT , после чего рекомбинируют. В силу закона сохранения конусного импульса имеем $p^+ = p_1^+ + p_2^+$. При фиксированном внешнем импульсе p^+ , эта диаграмма имеет два параметра: $\Delta T \in (0, \infty)$, и вертикальное положение разреза, параметризованного $p^+ \in (0, p^+)$. С помощью подхода, развитого в главе 25, мы видим, что класс римановых поверхностей, соответствующих рассматриваемому процессу, обладает двумя модулями. Амплитуда получается суммированием вкладов от всех таких струнных диаграмм.

Теперь рассмотрим последовательность конформных отображений, которые переводят данную диаграмму в каноническую реализацию. Первые два отображения определены на полной полоске. В разделе 25.4 мы убедились в том, что бесконечная полоска может быть отображена на $\overline{\mathbb{H}}$ с помощью экспоненциального отображения (25.21). Это отображение, примененное в настоящем случае, приводит к результату, показанному на рис. 26.26, где новый разрез является образом исходного разреза при данном отображении. Входящая струна отображается в z = 0, а исходящая струна — в $z = \infty$. С помощью (25.23) эту поверхность можно отобразить в единичный диск — и опять разрез никуда не пропадает, а входящие и исходящие струны заканчиваются в $\eta = 1$ и $\eta = -1$, соответственно. На этом этапе струнная поверхность топологически является кольцом, т. е. диском с отверстием. Отверстие оказывается разрезом.

Последнее отображение совершенно нетривиально. Кольцо, показанное на рис. 26.2 в можно конформно отобразить в каноническое кольцо, показанное на рис. 26.2 г. Каноническое кольцо с параметром r в интервале 0 < r < 1 является областью $r \leq |\xi| \leq 1$ на комплексной плоскости ξ . Это отображение является частным примером общего результата: область комплексной плоскости,



Рис. 26.2. (*a*) Струнная диаграмма, соответствующая однопетлевому процессу с участием открытых струн. У данной диаграммы есть два параметра. (*б*) Отображение струнной диаграммы на $\overline{\mathbb{H}}$ с разрезом. (*в*) Отображение струнной диаграммы на диск с разрезом. (*г*) Наконец, отображение струнной диаграммы на каноническое кольцо



Рис. 26.3. Топологическое кольцо — область между двумя замкнутыми кривыми на плоскости w — может быть отображено в каноническое кольцо $r \leqslant |z| \leqslant 1$ при некотором значении модуля r

топологически являющаяся кольцом, может быть конформно отображена в каноническое кольцо (см. рис. 26.3). Значение внутреннего радиуса r не может быть заданно наперед; его однозначным образом фиксирует отображение. Эта величина r называется *модулем кольца*. На рис. 26.2 г входящая струна может быть помещена в $\xi = 1$; если исходно она расположена где угодно на единичной окружности, то конформное отображение $\xi \rightarrow \exp(i\alpha)\xi$ переведет ее в $\xi = 1$ при подходящем α . Как только входящая струна зафиксирована, положение исходящей струны не может задано. На рисунке исходящая струна соответствует разрезу, расположенному под углом θ по отношению к положительной вертикальной оси. Данная риманова поверхность является кольцом с двумя выколотыми точками. Граница кольца состоит из двух частей: две окружности которые ограничивают область кольца. На этой струнной диаграмме две выколотые точки расположены на одной части границы.

В последующем разделе с помощью параллелей с электростатикой мы покажем явным образом, что существует конформное отображение произвольного топологического кольца в каноническое кольцо. Модуль кольца тесно связан с емкостью цилиндрического конденсатора, сечение которого, находящееся между проводниками, является кольцом. Будет также выяснено, что два канонических кольца с внутренними радиусами r_1 и r_2 могут быть конформно отображены друг на друга только если $r_1 = r_2$. Именно поэтому внутренний радиус уместно называть модулем. Так как внутренний радиус должен быть больше нуля и меньше единицы, то пространством модулей кольца является пространство 0 < r < 1.

Струнная диаграмма на рис. 26.2 *а* обладает двумя параметрами, значит, конечная диаграмма в части (г) тоже имеет два параметра: это модуль кольца r и угол θ , который определяет положение исходящей струны на внешней границе. Фактически, эти два параметра являются модулями кольца с двумя выколотыми граничными точками. При вычислении струнной амплитуды суммируются вклады от всех римановых поверхностей, которые входят в соответствующее пространство модулей. Для амплитуды Венециано мы рассматривали все диски с четырьмя выколотыми точками. Для петлевой амплитуды открытых струн, которую мы сейчас изучаем, необходимо интегрирование по модулям r и θ , интегрирование может усложняться появлением ультрафиолетовой расходимости.

Ультрафиолетовая расходимость возникает в том случае, когда струнные диаграммы в некоторой области пространства модулей содержат определенный тип коротких кривых, которые могут сделать неограниченные вклады в амплитуду, давайте рассмотрим этот вопрос более подробно.

На струнной диаграмме на рис. 26.2 *а* открытые струны являются вертикальными отрезками, часть из которых натянута между внешними краями струнной диаграммы, а другая часть натянута между внешним краем и разрезом. Напомним, что разрез является одной компонентой границы, а внешние края струнной диаграммы, которые разделены выколотыми точками, составляют другую компоненту границы. Все открытые струны являются открытыми кривыми, нетривиальными в следующем смысле: они не могут быть стянуты в точку до тех пор, пока концы расположены на границе и не допускается, чтобы они проходили через выколотые точки (внешние состояния). Давайте любую такую нетривиальную открытую кривую называть потенциально открытой струной. Потенциально открытых струн существует гораздо больше, чем открытых струн. Любая кривая, начинающаяся на верхнем крае и заканчивающаяся на нижнем крае, является потенциально открытой струной. Такой же является любая кривая, которая начинается на левой стороне верхнего края, проходит под разрезом. и заканчивается на правой стороне верхнего края. Как следует из названия, потенциально открытая струна является кривой, из которой можно сделать открытую струну при подходящей параметризации мировой поверхности. Понятие потенциально открытой струны на римановой поверхности хорошо определено: нетривиальный характер потенциально открытой струны не изменяется при конформных преобразованиях. Аналогичным образом, потенциально замкнутой струной является замкнутая кривая, которая не может быть стянута в точку. На рис. 26.2 а замкнутая кривая, обматывающая разрез, является потенциально замкнутой струной. На данной струнной диаграмме канонические замкнутые струны отсутствуют, однако есть много потенциально замкнутых струн. Указанием на физику на малых расстояниях, в которой могут быть ультрафиолетовые расходимости, является появление на струнной диаграмме коротких потенциально открытых струн либо коротких потенциально замкнутых струн. Их длина вычисляется очевидным образом: в комплексных координатах z, отрезку dz приписывается длина |dz|. Так как длина не является конформно инвариантной, можно видеть, что появление коротких потенциальных струн может иметь альтернативную интерпретацию.

Теперь давайте вернемся к нашему примеру и поищем короткие потенциальные струны, которые могут возникать при изменении модуля кольца r: нам интересны концевые точки пространства модулей 0 < r < 1. Как показано на рис. 26.4, кольцо с $r = 1 - \epsilon$ и $\epsilon \to 0$ является узкой полоской с шириной, стремящейся к нулю. Короткие радиальные линии, идущие от одной границы к другой, являются короткими потенциально открытыми струнами длины є. Данная диаграмма может быть проинтерпретирована как короткая открытая струна, распространяющаяся вокруг кольца. Однако с помощью конформного отображения, которое растягивает всю фигуру с большим коэффициентом $1/\epsilon$, мы получаем физически эквивалентную ситуацию, в которой открытая струна единичной длины распространяется на очень большое расстояние $2\pi/\epsilon$. Таким образом, эта область пространства модулей соответствует физике открытых струн на больших расстояниях и не является проблематичной с точки зрения ультрафиолетовых расходимостей. Существование такой «дуальной» интерпретации не решает проблему; скорее всего это просто указывает на то, что настоящая проблема находится не здесь. Как можно представить, область $r \to 1$ соответствует $\Delta T \to \infty$ в исходной конусной диаграмме. Это происходит потому, что разрез, являющийся внутренней границей кольца, становится очень большим.

Кольца в области $r \to 0$ особенно интересны. Кольцо с $r \approx 0$ имеет очень маленькое отверстие (см. нижнюю часть рис. 26.4), в результате чего возникают короткие потенциально замкнутые струны, намотанные вокруг отверстия. На этот раз, при помощи отображения $\xi = \ln z$ возникает более красивая физическая интерпретация. Это отображение переводит кольцо в длинную полоску,



Рис. 26.4. Сверху: кольцо с $r \rightarrow 1$. Справа показана малая область вблизи z = 1, растянутая с большим коэффициентом, что приводит к открытой струне единичной длины, распространяющейся на большое расстояние. Внизу: кольцо с $r \rightarrow 0$. Физически оно интерпретируется как замкнутая струна, распространяющаяся на большое расстояние

верхний и нижний края которой отождествлены. Фактически, это длинный цилиндр с длиной $(-\ln r)$ и периметром 2π , он интерпретируется как замкнутая струна с периметром 2π , распространяющаяся на большое расстояние $|\ln r|$. Отсюда следует, что область $r \to 0$ пространства модулей колец описывает физику замкнутых струн на больших расстояниях. Короткие потенциально замкнутые кривые не приводят к проблемам с ультрафиолетовыми расходимостями.

Эти результаты обобщаются на произвольные струнные диаграммы, которые содержат произвольное число открытых и замкнутых струн. Каждый раз, когда короткие открытые струны возникают в конусной диаграмме, она может быть представлена как диаграмма, в которой открытая струна конечной длины распространяется в течение длительного времени. Каждый раз, когда короткие замкнутые струны возникают в конусной диаграмме, она может быть представлена как диаграмма, в которой замкнутая струна конечной длины распространяется в течение длительного времени. На самом деле требуется нечто большее: реализации в различных областях соответствующего пространства модулей должны непрерывным образом переходить друг в друга по мере изменения модулей. Этого можно достичь. Можно задать реализацию, которая непрерывно изменяется при изменении модулей и обладает двумя свойствами:

 (i) открытые и замкнутые струны, распространяющиеся на большие расстояния, представляются, соответственно, полосками постоянной ширины и цилиндрами с постоянным периметром; не возникает никаких коротких потенциальных струн. Это составляет геометрическую основу для отсутствия ультрафиолетовых расходимостей в теории струн.

26.3. Кольца и электростатическая емкость

Кольцо на комплексной плоскости z = x + iy определяется как область между двумя непересекающимися замкнутыми кривыми. Эти кривые не должны иметь самопересечений и одна из них должна быть расположена внутри области, которая ограничивается другой кривой. Мы хотим с помощью идей, заимствованных в электростатике, показать, что такое кольцо может быть отображено в каноническое кольцо — область $r \leq |\xi| \leq 1$ на комплексной плоскости ξ . Внутренний радиус r является параметром, определяющим кольцо. Мы хотим показать, что r является модулем для колец; то есть два кольца с разными значениями r не являются конформно эквивалентными.

В нашем электростатическом подходе используется понятие емкости, а также некоторые свойства аналитических функций, обзором которых мы сейчас займемся. Как упоминалось в разделе 25.4 аналитическая функция f(z) может быть разбита на вещественную и мнимую части,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$
 (26.1)

которые удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
 (26.2)

Вычисляя дополнительные частные производные, легко убедиться, что функции u и v удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$. Например,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x, y) = 0.$$
 (26.3)

К тому же, градиенты *u* и *v* являются ортогональными векторами одинаковой величины. Действительно, градиенты определяются следующим образом

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{26.4}$$

а из уравнений Коши-Римана следует, что

$$\nabla \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}, -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right). \tag{26.5}$$

С помощью этого вектора ∇u легко видеть что $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ и $|\nabla u| = |\nabla v|$. Более того, ∇v получается из ∇u вращением против часовой стрелки на 90° (ориентация $(a, b) \rightarrow (-b, a)$ вращает вектор (a, b) на 90° в направлении против часовой



Рис. 26.5. Линии постоянного u и линии постоянного v. Здесь $u_0 < u_1 < < u_2 < \ldots$ и $v_0 < v_1 < v_2 < \ldots$, векторы ∇u и ∇v ортогональны друг к другу

стрелки). Так как ∇u ортогонален линиям постоянного u, а ∇v ортогонален линиям постоянного v, то ортогональность ∇u и ∇v означает, что линии постоянных u и линии постоянных v ортогональны. Эти факты отображены на рис. 26.5. Для заданных двух точек P_1 и P_2 различие u в значениях $u(P_2) - u(P_1)$ связано с потоком ∇v вдоль любой кривой соединяющей эти две точки:

$$u(P_2) - u(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \nabla v \cdot \vec{n} \, d\ell.$$
 (26.6)

Здесь $d\ell$ — это элемент длины, а \vec{n} — это единичный вектор, нормальный к кривой, полученной вращением на 90° против часовой стрелки единичного вектора \vec{t} , касательного к кривой, ориентированной от P_1 и P_2 (см. рис. 26.5). Причина проста: $\nabla v \cdot \vec{n} = \nabla u \cdot \vec{t}$, потому что векторы в левой части получаются вращением на 90° против часовой стрелки из векторов в правой части, а $\nabla u \cdot \vec{t}$ — это изменение в u на единицу длины вдоль кривой.

Рассмотрев основные необходимые факты, можно обсудить электростатическую аналогию. С помощью топологического кольца будет определен цилиндрический конденсатор. Сечение конденсатора таково, что внешняя и внутренняя границы кольца соответствуют внутренней и внешней пластинам конденсатора. Сама кольцевидная область соответствует области пространства между двумя проводниками. Кольцо/конденсатор показан на рис. 26.6 в виде некоторой области на комплексной плоскости z (z = x + iy).

Теперь представим, что на внутреннем проводнике задан единичный (электростатический) потенциал, а на внешнем проводнике потенциал равен нулю. Обозначая, как v(x, y) потенциал в области между проводниками, получаем граничные условия Дирихле v = 1 и v = 0 на внутренней и внешней границе, соот-



Рис. 26.6. Сечение цилиндрического конденсатора. Область между двумя проводниками определяет топологическое кольцо. На внутреннем проводнике задан единичный потенциал, на внешнем проводнике задан нулевой потенциал

ветственно. Электрическое поле в кольцевидной области задается выражением

$$\vec{E} = -\nabla v. \tag{26.7}$$

Из электростатики следует, что граничные условия Дирихле определяют потенциал v(x, y), удовлетворяющий уравнению Лапласа в промежутке между проводниками единственным образом. Физическая интуиция вполне определенно подсказывает наличие двух фактов, которые не будут строго доказываться: (1) решение для потенциала v(x, y) существует, и (2) силовые линии электрического поля начинаются на внутреннем проводнике и заканчиваются на внешнем проводнике.

Так как мнимая часть аналитической функции удовлетворяет уравнению Лапласа, v(x, y) будет отождествлена с мнимой частью аналитической функции f(z) = u(x, y) + iv(x, y), после чего будет построена u(x, y). Линии постоянного u будут ортогональны линиям постоянного v — эквипотенциальным линиям. В итоге, линии постоянного u должны быть силовыми линями электрического поля.

Для построения функции u(x, y) воспользуемся (26.6) и определим

$$u(P) \equiv \int_{P_0}^{P} \nabla v \cdot \vec{n} \, d\ell, \qquad (26.8)$$

где P_0 — это фиксированная точка, выбранная на внутреннем проводнике. Функция u(x, y) является хорошо определенной в следующем смысле: для двух различных путей γ_1 и γ_2 из P_0 в P возникающие значения u(P) будут одинаковыми, если два данных пути могут быть деформированы друг в друга (см. рис. 26.6). В этом случае пути γ_1 и γ_2 , объединенные вместе посредством обращения ориентации γ_2 , образуют замкнутый путь $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, который служит границей для области R. Тогда полный интеграл вдоль Γ равен нулю:

$$\int_{\gamma_1} \nabla v \cdot \vec{n} \, d\ell - \int_{\gamma_2} \nabla v \cdot \vec{n} \, d\ell =$$
$$= \oint_{\Gamma} \nabla v \cdot \vec{n} \, d\ell = \int_{R} da \, \nabla \cdot (\nabla v) = \int_{R} da \, \nabla^2 v = 0, \qquad (26.9)$$

где с помощью теоремы Гаусса поток ∇v был переведен в интеграл по площади от дивергенции ∇v . Это доказывает то, что два пути дают одинаковое значение u(P). Однако, отметим, что путь, который наматывается вокруг внутреннего проводника, не обязательно дает то же самое значение u(P), что и путь, который не наматывается. В дальнейшем это сыграет определенную роль.

Теперь докажем, что u + iv является аналитической функцией. Для этой цели полезно ввести единичный вектор \vec{k} , который направлен перпендикулярно плоскости сечения и удовлетворяет $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{t}$ (см. рис. 26.5). С помощью этого вектора запишем (26.8) в виде

$$u(P) = \int_{P_0}^{P} \nabla v \cdot (\vec{k} \times \vec{t}) \, d\ell = \int_{P_0}^{P} \nabla v \cdot (\vec{k} \times d\vec{\ell}) = \int_{P_0}^{P} d\vec{\ell} \cdot (\nabla v \times \vec{k}), \qquad (26.10)$$

где была использована цикличность смешанного произведения. Из этого уравнения следует

$$\nabla u = \nabla v \times \vec{k}. \tag{26.11}$$

Покомпонентная запись данного уравнения приводит в точности к уравнениям Коши – Римана, доказывая, таким образом, желаемый результат.

Теперь рассмотрим силовые линии, выходящие из P_0 и достигающие внешней границы в точке P'_0 так, как показано на рис. 26.6; $\nabla v \cdot \vec{n}$ на любой силовой линии равно нулю, таким образом, из (26.8) следует, что рассматриваемая силовая линия является линией, на которой u = 0. Однако из топологии кольца следует, что u не является однозначной. Существуют пути, которые не могут быть продеформированы друг в друга. С помощью пути, который намотан один раз вокруг кольца, находим, что силовая линия u = 0 является также линией $u = u_f$, где u_f — это константа, значение которой и физическая интерпретация будут даны ниже.

Константа u_f может быть вычислена с помощью определения (26.8) и интегрирования вокруг внутреннего проводника, начиная с P_0 и двигаясь против часовой стрелки, пока не вернемся обратно в P₀:

$$\boldsymbol{u}_f = \oint \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\vec{n}} \, d\boldsymbol{\ell}. \tag{26.12}$$

Также как и $\nabla v = -\vec{E}$, вектор \vec{n} вдоль этого пути направлен к внутренней пластине конденсатора. Таким образом, $\nabla v \cdot \vec{n} > 0$ вдоль контура интегрирования и, как следствие, $u_f > 0$. Перепишем предыдущее уравнение с помощью $\nabla v = -\vec{E}$,

$$u_{f} = \oint \vec{E} \cdot (-\vec{n}) d\ell. \qquad (26.13)$$

Так как $(-\vec{n})$ направлен от внутреннего проводника, предыдущий интеграл задает поток \vec{E} , направленный от внутренней пластины конденсатора. По теореме Гаусса находим, что

$$u_f = Q, \tag{26.14}$$

где Q — это заряд поверхности внутреннего проводника на единицу длины, а длина измеряется вдоль оси цилиндрического конденсатора. Конденсатор нейтрален, поэтому внешний проводник будет обладать зарядом (-Q) на единицу длины. Для двух проводников с разницей потенциалов V и зарядами Q и (-Q), емкость C на единицу длины определяется из уравнения Q = CV. В нашем случае V = 1 и тем самым C = Q. С помощью (26.14) находим

$$C = u_f. \tag{26.15}$$

Конформное отображение из кольца в каноническую реализацию теперь легко получается с помощью v(x, y), u(x, y) и определения

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$
 (26.16)

Конформное отображение $z \to w$ переводит кольцевидную область в конфигурацию плоского конденсатора! Это показано на рис. 26.7. Внутренний проводник, поверхность постоянного v = 1, отображается в Im (w) = 1, а внешний проводник, поверхность постоянного v = 0, отображается в Im (w) = 0. Более того, полное кольцо расположено между вертикальными линиями u = 0 и $u = u_f$. Два вертикальных отрезка u = 0 и $u = u_f c \ 0 \le v \le 1$, должны быть отождествлены, так как показано на рис. 26.6. Окончательное конформное отображение ξ переводит кольцеобразную область на плоскости w к каноническому виду:

$$\boldsymbol{\xi} = \exp\left(2\pi i \, \frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{u}_f}\right). \tag{26.17}$$

Это отображение переводит внешний проводник ($0 \le u \le u_f$, v = 0) в единичную окружность $|\xi| = 1$. Внутренний проводник ($0 \le u \le u_f$, v = 1) переходит в окружность $|\xi| = r$, где

$$r = \exp\left(-\frac{2\pi}{u_f}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi}{C}\right)$$
(26.18)



Рис. 26.7. Конденсатор, преобразованный в плоскопараллельный конденсатор, а затем — в цилиндрический

Это соотношение связывает внутренний радиус возникающего кольца r с константой u_f и емкостью C. Основываясь на данном окончательном отображении, мы показали, как с помощью электростатической задачи построить отображение из топологического кольца в каноническое кольцо. Область в пространстве модулей колец, проинтерпретированная как распространение открытой струны в течение длительного времени ($r \rightarrow 1$), соответствует большой емкости. Область, проинтерпретированная как распространение замкнутой струны в течение длительного времени ($r \rightarrow 0$), соответствует малой емкости.

Остается показать, что r является модулем. Для доказательства сперва покажем, что емкость является конформным инвариантом. Это утверждение справедливо, потому что электростатическое решение для одного конденсатора может быть использовано в качестве решения для любого конформно связанного с ним конденсатора. Рассмотрим два конденсатора: на плоскости z = x + iy и на плоскости $\eta = \psi + i\phi$ такие, как на рис. 26.8. Предположим, что для конденсатора на плоскости z найдена аналитическая функция f(z) = u + iv, где v является потенциалом в случае, когда внутренний и внешний проводники обладают единичным и нулевым потенциалами, соответственно. Более того, предположим что конформное отображение

$$z = h(\eta) \tag{26.19}$$

переводит конденсатор на плоскости η в конденсатор на плоскости z. Конечно же, это означает, что внутренние и внешние пластины конденсаторов переводятся с помощью этого отображения друг в друга. Теперь потребуем, чтобы функция

$$f(h(\eta)) = u(x(\psi, \phi), y(\psi, \phi)) + iv(x(\psi, \phi), y(\psi, \phi)) \equiv \\ \equiv \widetilde{u}(\psi, \phi) + i\widetilde{v}(\psi, \phi)$$
(26.20)

была устроена по отношению к конденсатору на плоскости η так же, как f(z) устроена по отношению к конденсатору на плоскости z. Эта функция приписывает точке η такое же число, что f приписывает образу η при отображении на плоскость z. Так как $f(h(\eta))$ является аналитической функцией, ее вещественная и мнимая части удовлетворяют уравнениям Коши—Римана и по отдельности



Рис. 26.8. Если кольцо на плоскости η можно конформно отобразить в кольцо на плоскости z, то емкости соответствующих цилиндрических конденсаторов совпадают. Здесь $z = h(\eta)$ обозначает конформное отображение колец, а w = f(z) отображает конденсатор на плоскости z в плоский конденсатор

удовлетворяют уравнению Лапласа. Кроме того, функция $\tilde{v}(\psi, \phi)$ приписывает единичный потенциал внутреннему проводнику конденсатора на η , а внешнему проводнику — нулевой потенциал. Единственным решением для потенциала конденсатора η является $\tilde{v}(\psi, \phi)$ η . С точностью до аддитивной константы, $\tilde{u}(\psi, \phi)$ является единственной функцией, которая при комбинировании с \tilde{v} становится аналитической. Произвол в константе несущественен, так как емкость зависит только от полного изменения \tilde{u} при обходе вокруг внутреннего проводника. Очевидно, что данное изменение равно изменению u при обходе внутреннего проводника конденсатора на плоскости z. Таким образом, емкость является конформным инвариантом.

Из конформной инвариантности емкости следует, что внутренний радиус канонического кольца является модулем. Почему? Из (26.18) следует, что два канонических кольца с различными внутренними радиусами обладают разными емкостями. Так как емкость — это конформный инвариант, то два канонических кольца с различными не могут быть конформно отображены друг на друга. Именно это мы и хотели показать.

26.4. Непланарные диаграммы открытых струн

При изучении однопетлевых диаграмм открытых струн на рис. 26.2 мы упомянули, что существует другая струнная диаграмма, которая соответствует диаграмме Фейнмана на рис. 26.1. Эта другая струнная диаграмма показана в верхней части рис. 26.9. Может показаться, что диаграмма нарисована необычным способом: если бы не было разрезов, один из которых тянется налево, а другой



Рис. 26.9. Сверху: входящая первая открытая струна расщепляется на две струны, струну *а* и струну *b*, которые потом сходятся и образуют вторую струну. Данная струнная диаграмма непланарна. Внизу: если разрезы не пересекаются, то возникают промежуточные замкнутые струны

направо, то это была бы диаграмма замкнутой струны. Входящая и исходящая струны, называемые первой струной и второй струной, являются открытыми струнами. При пересечении двух разрезов возникают две промежуточные открытые струны, струна *a* и струна *b*. Процесс взаимодействия состоит в том, что открытая струна расщепляется на две открытые струны, которые позднее рекомбинируют и образуют одну открытую струну.

Каково различие между однопетлевой диаграммой в верхней части рис. 26.9 и однопетлевой диаграммой на рис. 26.2? Это различие имеет топологическую природу и весьма значительно. В обеих диаграммах у границы есть две несвязанные компоненты. На рис. 26.2 обе внешние открытые струны прикреплены к одной компоненте границы, а другая компонента границы соответствует промежуточному разрезу. Это в явном виде показано на рис. 26.2 г. Ситуация на рис. 26.9 совершенно другая. Разрезы сами являются компонентами границы и каждая компонента содержит внешнюю струну. Говорят, что такая струнная диаграмма непланарна, потому что ее нельзя распрямить, не разорвав ее, либо без того, чтобы одна часть поверхности легла поверх другой части поверхности. Другой планарной диаграммой является бесконечный цилиндр который, описывает распространение свободной замкнутой струны.

Ранее мы убедились в том, что набор струнных диаграмм, дающих вклад в амплитуду, получается изменением параметров, задающих струнную диаграмму. Диаграмма в верхней части рис. 26.9 обладает двумя параметрами. Первый параметр определяет конусный импульс одной из промежуточных открытых струн. Второй параметр, более важный для текущего рассмотрения, задает длину ΔT временного интервала, в течение которого разрезы перекрывают друг друга. При больших ΔT разрезы проходят друг через друга в течение длительного времени. При $\Delta T \rightarrow 0$ время пересечения стремится к нулю. Однако, $\Delta T = 0$ не является краевой точкой в пространстве параметров; ΔT может стать отрицательным, в этом случае возникает струнная диаграмма, показанная в нижней части рис. 26.9. Удивительным образом возникает промежуточная замкнутая струна! Струнная интерпретация струнной диаграммы полностью изменяется. Теперь процесс взаимодействия описывается как замыкание открытой струны, в результате чего образуется замкнутая струна, распространяющаяся в течении некоторого времени, после чего она распадается и образует исходящую открытую струну. Справа от струнной диаграммы показан соответствующий граф. Прямая линия, соответствующая открытой струне, переходит в волнистую линию, соответствующую замкнутой струне. Затем волнистая линия переходит обратно в прямую линию. Этот граф не имеет петель!

Отсюда следует важный урок. В самосогласованной теории взаимодействующих квантовых открытых струн, в общем случае, требуется добавление замкнутых струн. Это утверждение не должно быть слишком удивительным. Процесс взаимодействия, в котором две открытые струны объединяются путем соединения своих концов, является локальным процессом; он зависит только от окрестностей струн вблизи концевых точек, следовательно это также может произойти и с концами одной открытой струны. Таким образом, если наша теория включает в себя процессы, в которых две струны могут объединяться, то она в общем случае должна включать в себя процессы, в которых одна открытая струна замыкается и образует замкнутую струну.

И последний комментарий насчет модулей. В случае больших отрицательных значений ΔT две границы кольца расположены далеко друг от друга. Это соответствует области пространства модулей, в которой внутренний радиус канонического кольца стремится к нулю. Такая область мала по сравнению с областью, которая соответствует длительному распространению замкнутой струны, так же, как это было в нашем анализе в конце раздела 26.2. В первом случае, замкнутая струна распространяется на большое расстояние, после чего останавливается. В данном случае, пройдя достаточно большое расстояние, замкнутая струна опять превращается в открытую струну.

26.5. Взаимодействие четырех замкнутых струн

Ранее мы убедились в том, что струнная диаграмма свободно распространяющейся замкнутой струны — это сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$ с двумя выколотыми точками (раздел 25.6). Струнные диаграммы взаимодействия замкнутых струн с двумя исходящими и двумя входящими замкнутыми струнами — это сферы Римана с четырьмя выколотыми точками. В разделе 25.7 мы видели, что струнные диаграммы взаимодействия четырех открытых струн порождают пространство модулей поверхности \mathbb{H} с четырьмя выколотыми точкамы взаимодействия четырех замкнутых струн порождают пространство модулей поверхности \mathbb{H} с четырьмя выколотыми граничными точками. Вполне естественно ожидать, что струнные диаграммы взаимодействия четырех замкнутых струн порождают пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ сферы Римана с четырьмя выколотыми точками. Напомним, что из уравнения (25.60) следует, что это пространство модулей имеет два вещественных параметра. Пространство модулей задается положением выколотой точки на $\hat{\mathbb{C}}$, в то время, как остальные тои выколотые точки зафиксированы стандартным образом в 0, 1, и ∞ . Цель это раковают струнные стандартным образом в стандартные стандартные стандартные струнные стандартные стандартные стандартные образом в стандартные стандартные стандартные стандартные выколотые точки зафиксированы стандартные образом в стандартные во стандартные стандартные образом в стандартные выколотые точки в стандартные образом в стандартное образом в стандартное образом в стандартные образом в стандартные обра



Рис. 26.10. Конусная струнная диаграмма взаимодействия четырех замкнутых струн. Соответствующей римановой поверхностью является сфера с четырьмя выколотыми точками. Такая струнная диаграмма обладает двумя параметрами: временем ΔT и углом перекрутки θ . Вторая струна стремится к первой при очень больших ΔT

раздела показать, что на самом деле, предложенная выше гипотеза верна: струнные диаграммы порождают пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$. Доказательство будет дано только на качественном уровне.

Рассмотрим взаимодействие четырех замкнутых струн, изображенных конусной диаграммой на рис. 26.10. Отметим способ взаимодействия замкнутых струн: две входящие замкнутые струны встречаются в некоторой точке и образуют более длинную замкнутую струну. После некоторого движения, две точки на этой промежуточной замкнутой струне встречаются и замкнутая струна расшепляется на две исходящие замкнутые струны. Даже если эта диаграмма порождает лишь часть двумерного пространства модулей $\mathcal{M}_{0.4}$, она должна обладать двумя параметрами. С одним из параметров мы уже встречались: время ΔT между точками взаимодействия. Для простоты будем считать, что данная диаграмма соответствует только интервалу $\Delta T \in [0,\infty]$. Будет видно, что область $\Delta T < 0$ на самом деле охватывает две диаграммы! Где находится другой параметр струнной диаграммы? Возьмем ножницы и разрежем средний цилиндр вдоль двойных линий, показанных на рисунке. Повернем правую часть диаграммы на угол θ , после чего заново ее склеим. Например, при повороте на 90° третья струна окажется перед четвертой. Можно показать, что диаграммы, полученные при различных значениях θ , не являются конформно эквивалентными. Таким образом, $0 \le \theta < 2\pi$ это второй параметр струнной диаграммы.

Какую область пространства модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ порождает диаграмма на рис. 26.10 при параметрах $0 \leq \Delta T < \infty$ и $0 \leq \theta < 2\pi$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, представим отображение этой диаграммы в $\widehat{\mathbb{C}}$, допуская что P_1 , P_3 и P_4 переходят в 0, 1, и ∞ , соответственно. Модулярным параметром является положение λ точки P_2 . Как изменяется λ при изменении ΔT и θ ? При $\Delta T \rightarrow \infty$, λ стремится к P_1 , расположенной в начале координат. Кроме того, для каждого фиксированного ΔT при изменении θ от 0 до 2π , λ проходит замкнутую кривую вокруг P_1 . Струнная диаграмма порождает область в $\mathcal{M}_{0,4}$ с топологией диска. При $\Delta T = 0$ полученная кривая является границей области диска порожденной струнной диаграммой.



Рис. 26.11. На этой струнной диаграмме P_2 стремится к P_3 при очень больших $\Delta \widetilde{T}$



Рис. 26.12. На этой струнной диаграмме P_2 стремится к P_4 при очень больших $\Delta \widehat{T}$

На струнной диаграмме рис. 26.10 есть одна промежуточная струна. Сушествуют две диаграммы, на которых точки взаимодействия пересекаются и имеется три промежуточные струны. На первой диаграмме, показанной на рис. 26.11 первая струна соединяется с четвертой, на второй диаграмме, показанной на рис. 26.12, вторая струна соединяется с четвертой.

На рис. 26.11 время между моментами взаимодействия равно $\Delta \tilde{T}$. Если $\Delta \tilde{T}$ становится большим, P_2 стремится к P_3 , которая расположена в $\lambda = 1$. Промежуточную замкнутую струну с импульсом $p_1^+ - p_4^+$ можно разрезать, повернуть и заново склеить, считая при этом параметром угол поворота θ . Эта струнная диаграмма будет порождать область диска вокрут $\lambda = 1$. Кривая, возникающая из $\Delta \tilde{T} = 0$, является границей области, порожденной данной струнной диаграммой.

На рис. 26.12 время между моментами взаимодействия равно ΔT . Если ΔT становится очень большим, то P_2 стремится к P_4 , которая расположена в $z = \infty$. Промежуточная замкнутая струна с импульсом $p_1^+ - p_4^+$ также имеет параметр θ . Эта струнная диаграмма будет порождать область диска вокруг $\lambda = \infty$. Возникающая из $\Delta \hat{T} = 0$ кривая является границей этой области, порожденной данной струнной диаграммой.

Оказывается, что полное пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ в точности покрывается тремя рассмотренными струнными диаграммами, каждая из которых порождает область диска с выколотой точкой. Так как учтены все области в $\mathcal{M}_{0,4}$, то границы областей дисков должны сходиться. Тогда в $\mathcal{M}_{0,4}$ должны сходиться образы



Рис. 26.13. Пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ сферы с четырьмя выколотыми точками порождается тремя струнными диаграммами. Струнная диаграмма рис. 26.10 порождает область диска вокруг $\lambda = 0$. Струнные диаграммы рис. 26.11 и 26.12 порождают области диска вокруг $\lambda = 1$ и $\lambda = \infty$, соответственно. Три данные области диска полностью покрывают $\mathcal{M}_{0,4}$, которая эквивалентна $\widehat{\mathbb{C}}$ тремя выколотыми точками

кривых $\Delta T = 0$, $\Delta \widetilde{T} = 0$ и $\Delta \widehat{T} = 0$. Это происходит весьма изощренным способом, что показано на рис. 26.13. Кривые $\Delta \widetilde{T} = 0$ и $\Delta \widehat{T} = 0$, вообще, не сходятся. Часть кривой $\Delta T = 0$ совпадает с кривой $\Delta \widetilde{T} = 0$, а другая часть совпадает с кривой $\Delta \widehat{T} = 0$. Наконец, некоторая часть кривой $\Delta T = 0$ совпадает сама с собой! Области диска вокруг $\lambda = 1$ и $\lambda = \infty$ имеют обычную форму, однако форма области вокруг $\lambda = 0$ весьма необычна. В качестве хорошей задачи читателю предлагается попробовать объяснить эти свойства рис. 26.13 путем тщательного рассмотрения зависимости от θ каждой из трех струнных диаграмм в пределе, когда промежуточное время стремится к нулю.

26.6. Пространство модулей тора

В завершение этой главы рассмотрим интереснейшие свойства петлевых амплитуд замкнутых струн. Конусная струнная диаграмма, соответствующая однопетлевому процессу с одной замкнутой струной, показана на рис. 26.14. Разрез на диаграмме отделяет друг от друга два цилиндра — это промежуточные замкнутые струны. Если бы разрез отсутствовал, то струнная диаграмма была бы сферой Римана с двумя выколотыми точками. На тор можно смотреть как на сферу с дыркой. Для этого на сфере надо вырезать диск вокруг северного полюса и диск вокруг южного полюса. После чего две получившиеся границы сдвигаются и склеиваются. В результате получается тор. Разрез на рис. 26.14 является дыркой, которая делает из сферы тор. Более точно, возникает тор с двумя выколотыми точками.



Рис. 26.14. Однопетлевая конусная диаграмма замкнутой струны. Эта струнная диаграмма является тором с двумя выколотыми точками

Для того чтобы понять, могут ли возникнуть ультрафиолетовые расходимости, необходимо решить следующие ключевые вопросы.

- 1. Почему тор является римановой поверхностью?
- 2. Сколько модулей у тора?
- 3. Как выглядит пространство модулей тора?

Так как ответы на эти вопросы интересны даже тогда, когда у тора нет выколотых точек, то мы подробно рассмотрим этот случай. Мы увидим, что тор обладает двумя вещественными модулями, а его пространство модулей удивительным образом оказывается достаточно сложным.

Начнем с простейшего типа тора — прямоугольного. Как показано на рис. 26.15, тор можно определить как прямоугольную область на комплексной плоскости С с некоторыми отождествлениями. В частности, горизонтальные стороны должны отождествляться согласно направлению двойных стрелок, а вертикальные стороны должны отождествляться согласно направлению тройных стрелок. На рисунке справа показана поверхность, возникающая после отождествления вертикальных сторон, и затем, в крайней справа части рисунка, показана итоговая поверхность.

Отождествления, которые от полной комплексной плоскости привели к прямоугольному тору, описываются следующими уравнениями:

$$z \simeq z + L_1, \quad z \simeq z + iL_2.$$
 (26.21)

Фундаментальной областью этих отождествлений является прямоугольная область $0 \leq \text{Re}(z) < L_1, 0 \leq \text{Im}(z) < L_2$. Данный тор — это риманова поверхность,



Рис. 26.15. (a) Прямоугольный тор — это прямоугольная область на комплексной *z*-плоскости с отождествлениями. (б) Склеиванием вертикальных сторон прямоугольной области получаем цилиндр. (в) Таким же склеиванием горизонтальных сторон получаем тор

потому что комплексная плоскость \mathbb{C} единственна и потому что указанные выше отождествления являются аналитическими: $z \simeq f(z)$, где f — аналитическая функция.

Важно отметить, что ни L_1 ни L_2 не являются параметрами прямоугольного тора. Координату *z* можно растянуть с постоянным коэффициентом. Если ввести $z' = z/L_1$, что очевидным образом является конформным отображением, отождествления (26.21) принимают вид

$$z' \simeq z' + 1, \quad z' \simeq z' + iT, \quad T \equiv L_2/L_1.$$
 (26.22)

Отсюда следует, что прямоугольный тор имеет только один параметр — значение *T*. Предыдущие уравнения определяют каноническую реализацию прямоугольного тора. Длина горизонтальной стороны в канонической реализации равна единице.

Удивительно, что прямоугольные торы с различными параметрами T иногда могут быть конформно эквивалентными. Чтобы доказать это, рассмотрим тор, показанный в верхней левой части рис. 26.16. Это прямоугольный тор с T < 1, представленный как прямоугольная область на плоскости w. Теперь осуществим серию из трех конформных отображений. Для простоты восприятия вертикальные линии и их образы при отображении показаны в виде двойных линий. Первое отображение равно $\tilde{w} = -iw$, это поворот исходного прямоугольника по часовой стрелке на 90°. Затем полученная фигура растягивается с коэффициентом 1/T: $\eta = \tilde{w}/T$, теперь прямоугольник расположен под вещественной осью. На конечном шаге мы его поднимаем: $z = \eta + i/T$. Полученный результат (внизу слева на рисунке) — это каноническая реализация прямоугольного тора с параметром 1/T! Таким образом показано, что два тора с параметрами T и 1/T конформно эквивалентны. Это означает, что торы с $0 < T \leq 1$ конформно эквивалентны



Рис. 26.16. Вверху слева: прямоугольный тор с параметром T на плоскости w. Вверху справа: тор, отображенный посредством $\widetilde{w} = -iw$. Внизу справа: тор, отображенный посредством $\eta = \widetilde{w}/T$. Внизу слева: тор, отображенный посредством $z = \eta + i/T$. В итоге получается тор с параметром 1/T

торам с $1 \leq T < \infty$. В итоге, пространство модулей прямоугольного тора может быть выбрано в виде интервала $1 \leq T < \infty$ либо, эквивалентным образом, в виде интервала $0 < T \leq 1$. При этом подразумевается, что не существует такого конформного преобразования, которое порождает дальнейшее отождествление между прямоугольными торами, и это на самом деле оказывается верным.

Предыдущий вывод приводит к некоторым следствиям для ультрафиолетовых расходимостей. Торы с $T \rightarrow 0$ дают короткие замкнутые струны, которые появляются в виде вертикальных отрезков в левой верхней части рис. 26.16. С другой стороны, эти торы конформно эквивалентны большим торам с $T \rightarrow \infty$, поэтому с математической точки зрения они не могут привести к проблемам с ультрафиолетовыми расходимостями. На самом деле если добавить торы с $1 \leq T < \infty$, то *не* следует добавлять торы с 0 < T < 1, потому что струнные амплитуды — это интегралы по пространству неэквивалентных римановых поверхностей и, если добавить короткие торы, возникнет двойной учет. С помощью канонической реализации модулей $1 \leq T < \infty$ можно ограничиться рассмотрением только длинных торов.

Прямоугольные торы не исчерпывают множество всех возможных конформно неэквивалентных торов. Торы можно также подвергать перекручиванию. Возвращаясь к части (б) рис. 26.15, можно склеить нижний и верхний края перекрученного цилиндра. Иногда способ того, как это делается труден для понимания, поэтому давайте подробно рассмотрим этот вопрос. В частности, если имеется настоящий резиновый цилиндр, то склейки его открытых краев после перекручивания на угол θ и после перекручивания на угол $\theta + 2\pi$ будут физически неэквивалентными процессами. Но для римановой поверхности типа тора, перекручивание на θ и перекручивание на $\theta + 2\pi$ эквивалентны.

Для ясности при обсуждении перекрученных торов, сначала рассмотрим общую конструкцию произвольного тора. Для получения тора из комплексной плоскости нужны два отождествления. Выберем два комплексных числа ω_1 и ω_2 , оба отличные от нуля и удовлетворяющие

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0. \tag{26.23}$$

Это условие гораздо проще, чем выглядит. Из него следует, что два данных комплексных числа соответствуют непараллельным векторам. Тогда, по соглашению, выберем ω_2 в качестве вектора, получаемого из ω_1 вращением против часовой стрелки на угол, меньший 180°, пример показан на рис. 26.17. Тор возникает посредством следующих отождествлений

$$z \simeq z + \omega_1, \quad z \simeq z + \omega_2.$$
 (26.24)

Фундаментальная область на рисунке — это затемненный параллелограмм с отождествленными краями. В этом состоит общая конструкция торической римановой поверхности, однако в ней присутствуют внешние параметры. Можно определить

$$\tau \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \text{Im} (\tau) > 0, \tag{26.25}$$



Рис. 26.17. Общий тор получается из комплексной *z*-плоскости путем отождествления $z \simeq z + \omega_1$ и $z \simeq z + \omega_2$

и, растягивая z с коэффициентом $1/\omega_1$, замечаем, что предыдущие отождествления эквивалентны следующим

$$z \simeq z+1, \quad z \simeq z+\tau, \quad \operatorname{Im}(\tau) > 0.$$
 (26.26)

Заметим, что τ живет в верхней полуплоскости Ш. Новый вид параллелограмма показан на рис. 26.18. Отметим, что данный тор является прямоутольным при Re (τ) = 0 (когда τ чисто мнимое).

Может ли пространство модулей тора быть просто $\tau \in \mathbb{H}$? Нет, не может. Из предыдущего анализа прямоугольного тора следует, что торы с разными τ могут быть эквивалентными. Действительно, для прямоугольного тора с параметром T имеем $\tau = iT$, что ясно следует из сравнения с (26.22) и (26.26). Однако этот тор эквивалентен тору с параметром $\tau' = i/T$. Отсюда следует, что $\tau' = -1/\tau$ и, по крайней мере для прямоугольного тора, τ и ($-1/\tau$) конформно эквивалентны. На самом деле мы скоро увидим, что τ и ($-1/\tau$) всегда определяют конформно эквивалентные торы.

Теперь давайте поясним перекручивание тора при Re (τ) $\neq 0$. Рассмотрим рис. 26.18. Пусть P обозначает точки z = 0 и $z = \tau$, которые при отождествлении становятся эквивалентными. С помощью отождествления $z \simeq z + 1$ затемненную область, показанную вверху слева, можно передвинуть и получить схему, показанную вверху справа. Фундаментальная область стала прямоугольником, даже несмотря на то, что тор не является прямоугольным! Хотя вертикальные края по-прежнему отождествляются, при отождествлении горизонтальных линий происходит сдвиг: точка P не отождествляется с точкой, расположенной прямо над ней, как это было бы в случае прямоугольного тора. Теперь прямоугольную область можно свернуть в цилиндр, края которого все еще должны быть соединены друг с другом. Этот цилиндр показан в нижней части рисунка. Отождествление точек на двух граничных компонентах этого цилиндра должно происходить со сдвигом, так как P на нижнем конце должна совпадать с P на верхнем конце. С помощью угловой переменной, изменяющейся от 0 до 2π , граничные компо-



Рис. 26.18. Каноническая реализация тора с параметром τ ∈ Ⅲ. Затемненная область в верхней левой части рисунка может быть передвинута так, как показано в правой верхней части рисунка.
 С помощью данной прямоугольной фундаментальной области получаем цилиндр и находим угол перекручивания θ, соответствующий окончательному отождествлению

ненты цилиндра можно параметризовать единым образом. Точке P на нижней граничной компоненте приписывается утол, равный нулю. Верхняя граничная компонента параметризуется таким образом, что угловое значение данной точки совпадает с угловым значением точки на нижней границе, которая до отождествлений расположена прямо под ней. Так как отождествления происходят со сдвигом вдоль границы на Re (τ) , а границы имеют единичную длину, то угол θ , сопоставленный P на верхней границе, равен

$$\theta = 2\pi \operatorname{Re}\left(\tau\right),\tag{26.27}$$

что изображено на рис. 26.18. Угол θ будем называть углом перекручивания.

Теперь можно заняться изучением последствий увеличения угла перекручивания на 2π . Как следует из уравнения (26.27), этого можно достичь при $\tau \rightarrow \tau + 1$. Если тор с параметром τ и тор с параметром $\tau + 1$ (рис. 26.19) действительно совпадают, то увеличение угла перекручивания на 2π не приведет к каким-либо изменениям. Теперь с помощью произвола в выборе фундаментальной области



Рис. 26.19. Тор с параметром τ (слева) и тор с параметром $\tau + 1$ (справа). Передвигая с помощью $z \simeq z + 1$ затемненную область налево, видим что два тора на самом деле совпадают

покажем, что два таких тора на самом деле совпадают. Посредством отождествления $z \simeq z + 1$ затемненную область в левой части рисунка можно сдвинуть в положение, показанное в правой части рисунка. При этом каждая точка в данной области сдвигается в горизонтальном направлении на единицу. При данной процедуре тор не изменяется, так как это просто другой выбор фундаментальной области. Отсюда следует, что левый тор с параметром τ — это один и тот же тор, что и правый с параметром $\tau + 1$:

$$\tau \simeq \tau + 1. \tag{26.28}$$

Возвращаясь к (26.27) заключаем, что $\theta \simeq \theta + 2\pi$. Таким образом, например, углы перекручивания вне интервала $-\pi \leq \theta < \pi$ не приводят к новым торам. Теперь мы можем придать этому точный смысл. О перекручивании не надо думать как о физическом процессе кручения цилиндра, который предшествует склейке его границ. Перекручивание — это всего лишь некоторый рецепт отождествления точек на двух граничных компонентах цилиндра: выберите произвольным образом точку P на нижней границе, после чего зафиксируйте произвольным образом точку на верхней границе, с которой она будет отождествляться. Тогда отождествление распространяется единым образом на все границы. Из данного рецепта ясно, что параметр отождествления при перекручивании просто описывает положение точки на верхней границе, и, следовательно, параметр перекручивания определен на окружности.

Что касается пространства модулей тора, то отождествление (26.28) имеет важное следствие. Хотя τ , конечно, принадлежит \mathbb{H} , пространство неэквивалентных торов гораздо меньше. Отождествление показывает, что любая бесконечная вертикальная полоска единичной ширины содержит все неэквивалентные торы. Как правило, полоску S_0 выбирают в виде

$$S_0 \equiv \left\{ -\frac{1}{2} < \text{Re}(\tau) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{Im}(\tau) > 0 \right\}.$$
 (26.29)

Множество неэквивалентных торов содержится в S_0 . Отметим, что правая граница полоски Re (τ) = 1/2 включена в это множество, а левая граница Re (τ) = -1/2 не включена, потому что она отождествляется с правой границей при $\tau \to \tau + 1$.

Из нашего анализа прямоугольных торов следует, что возможно $\tau \simeq -1/\tau$. Давайте теперь докажем что это так. Рассмотрим тор с параметром τ , так как показано вверху слева на рис. 26.20. Теперь определим конформно связанную плоскость $\tilde{z} = z/\tau$. Это отображение состоит из вращения с постоянным параметром плюс однородное растяжение, в результате чего исходный параллелограмм переходит в параллелограмм, показанный в верхней правой части рисунка. На последнем шаге осуществим трансляцию с постоянным параметром $z' = \tilde{z} - 1/\tau$. Окончательный параллелограмм на z'-плоскости имеет канонический вид, а параметр соответствующего тора равен $(-1/\tau)$. Таким образом, $\tau \simeq -1/\tau$.

На данный момент, нами обнаружено две эквивалентности для торов, описываемых $\tau \in \mathbb{H}$:

$$\tau \simeq \tau + 1, \quad \tau \simeq -\frac{1}{\tau}.$$
 (26.30)



Рис. 26.20. Последовательность конформных отображений демонстрирующая, что тор с параметром τ конформно эквивалентен тору с параметром $-1/\tau$

Оказывается, что дополнительных независимых отождествлений не существует. Таким образом, значительный интерес представляет нахождение фундаментальной области для отождествлений (26.30), что даст нам множество всех неэквивалентных торов. Фундаментальной областью для первого отождествления является полоса S_0 . Так как второе соотношение отождествляет точки в области $|\tau| < 1$ с точками в области $|\tau| > 1$, можно попробовать использовать подмножество в S_0 , расположенное за пределами единичной окружности и некоторые точки, расположенные на единичной окружности. На самом деле это уже ответ, но он далеко не очевиден. С помощью такой же логики можно было бы показать, что можно использовать подмножество в S_0 , расположенное внутри единичной окружности и некоторые точки, расположенные на единичной окружности, однако ответ был бы неправильным. Утверждение состоит в том, что фундаментальной областью является область \mathcal{F}_0 , определяемая как

$$\mathcal{F}_{0} \equiv \left\{-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\left(\tau\right) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}\left(\tau\right) > 0, \quad |\tau| \ge 1, \text{ с учетом дальнейшего} \right.$$
ограничения: Re $(\tau) \ge 0, \text{ если } |\tau| = 1 \right\}.$ (26.31)

Фундаментальная область \mathcal{F}_0 показана на рис. 26.21 в виде затемненной области. Как следует из предыдущих условий, определенные границы (показанные на рисунке пунктиром) не включены в \mathcal{F}_0 . Эти границы составлены из точек вертикальной линии Re (τ) = -/12 и из точек единичной окружности, расположенных слева от $\tau = i$, которые удаляются при дальнейшем ограничении в (26.6). Ниже будет приведена часть доказательства того, что \mathcal{F}_0 — это фундаментальная область для отождествлений (26.30), оставшаяся часть доказательства оставлена для задачи 26.6.



Рис. 26.21. Фундаментальная область \mathcal{F}_0 для отождествлений $\tau \simeq \tau + 1$ и $\tau \simeq -1/\tau$ в \mathbb{H} . Замыкание $\overline{\mathcal{F}}_0$ области \mathcal{F}_0 при подходящих отождествлениях является для торов пространством модулей $\mathcal{M}_{1,0}$, показанным справа

Пространство модулей τ для торов, обозначаемое $\mathcal{M}_{1,0}$, является верхней полуплоскостью \mathbb{H} , подчиненной отождествлениям (26.30). В разделе 2.7 было выяснено, как построить пространство, возникающее при отождествлениях: берем фундаментальную область вместе с ее границей и на границу накладываем имеющиеся отождествления. В данной ситуации фундаментальная область \mathcal{F}_0 вместе со своей границей определяет замыкание $\overline{\mathcal{F}}_0$:

$$\overline{\mathcal{F}}_{0} = \left\{ -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\left(\tau\right) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}\left(\tau\right) > 0, \quad |\tau| \ge 1 \right\}.$$
(26.32)

На $\overline{\mathcal{F}}_0$ накладываются два отождествления: Re (τ) = -1/2 и Re (τ) = 1/2 отождествляются посредством $\tau \rightarrow \tau + 1$, а точки с $|\tau| = 1$ отождествляются друг с другом посредством $\tau \rightarrow -1/\tau$. На самом деле это все возможные отождествления в $\overline{\mathcal{F}}_0$ (см. задачу 26.6). Возникающее пространство модулей $\mathcal{M}_{1,0}$ для торов можно представлять путем отрезания области \mathcal{F}_0 , скручивания ее мнимой оси и склейки границ так, как показано на рис. 26.21.

() Упражнение-разминка 26.1. Рассмотрите точки на единичной окружности $|\tau| = 1$, расположенные на \mathbb{H} между вертикальными линиями $\operatorname{Re}(\tau) = \pm 1/2$. Покажите, что точки справа от $\tau = i$ отождествляются с точками слева от $\tau = i$ посредством $\tau \to -1/\tau$.

Давайте рассмотрим физические следствия полученного результата. Так как все неэквивалентные торы содержаться в \mathcal{F}_0 , то однопетлевые амплитуды замкнутых струн должны содержать только вклады от торов с $\tau \in \mathcal{F}_0$. Так как торы в \mathcal{F}_0 — это длинные торы, то вопрос об ультрафиолетовых расходимостях не стоит. Если бы в амплитудах была задействована полная полоска S_0 , ситуация могла бы стать крайне проблематичной. Причина этого не в том, что потребовалось бы рассматривать малые торы, потому как, помимо всего прочего, они конформно эквивалентны (безопасным) длинным торам. Проблема возникла бы по той причине, что дополнение \mathcal{F}_0 в S_0 содержит *бесконечное* число копий всех торов из $\mathcal{F}_0!$ Можно легко проверить, например, что оно содержит бесконечно много копий тора $\tau = i$. Рассмотрим множество τ_n со значениями

$$\tau_n = i + n, \quad n \ge 1, \tag{26.33}$$

все из которых, посредством $\tau \simeq \tau + 1$, являются всего лишь копиями тора $\tau = i$. С помощью отождествления $\tau \simeq -1/\tau$ приходим к выводу, что

$$-\frac{1}{\tau_n} = -\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{i}{n^2 + 1}$$
(26.34)

также являются копиями тора $\tau = i$. Однако, при $n \ge 1$ эти копии находятся в $S_0 - \mathcal{F}_0$. Это очевидно, потому что вещественная часть $-1/\tau_n$ принадлежит [-1/2, 0], а $[1/\tau_n] = 1/\sqrt{n^2 + 1} < 1$. Если бы мы включили в S_0 все торы, то все однопетлевые амплитуды были бы бесконечными. Вместо этого, однопетлевые амплитуды задействуют \mathcal{F}_0 , потому что все неэквивалентные торы входят в этом пространстве ровно по одному разу.

Чтобы установить, что \mathcal{F}_0 является фундаментальной областью для отождествлений (26.30) необходимо проделать некоторую осязаемую работу. Давайте сделаем часть этой работы здесь для того, чтобы читатель представлял, какая общая идея стоит за необходимыми для этого методами. Для начала, полезно ввести некоторую дополнительную структуру. Отметим, что отождествления (26.30) на самом деле являются дробно-линейными преобразованиями, такими же, какие мы изучали в разделе 25.6. Пусть T и S обозначают генераторы дробно-линейных преобразований, которые действуют как

$$T\tau = \tau + 1, \quad S\tau = -\frac{1}{\tau}.$$
 (26.35)

Рассмотрим теперь преобразования g вида

$$g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$
 (26.36)

Отметим, что это дробно-линейное преобразование с целочисленными параметрами, значит, его можно описать в матричных обозначениях. Сопоставим преобразованию g матрицу 2 × 2, определенную в виде [g]

$$[g] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det[g] = 1.$$
 (26.37)

В матрице [g] заложен некий произвол: можно изменить знак всех элементов, не изменяя при этом самого преобразования. Таким образом, необходимо эту матрицу и ее же со знаком минус рассматривать как эквивалентные. Для двух заданных преобразований g_1 и g_2 вида (26.36), композиция g_1g_2 также является преобразованием того же вида, и

$$[g_1g_2] = [g_1][g_2]. \tag{26.38}$$

Упражнение-разминка 26.2. Докажите соотношение (26.38).

Матрицы сопоставленные преобразованиям T и S, как правило, выбираются в виде

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (26.39)

Композиция любого числа преобразований S и T в любом порядке, приводит к преобразованию вида (26.36). Полезное свойство подобных преобразований имеет вид

$$\operatorname{Im}\left(g\tau\right) = \frac{\operatorname{Im}\left(\tau\right)}{|c\tau+d|^{2}},\tag{26.40}$$

что ранее проверялось в похожем вычислении (см. (25.66)).

Множество дробно-линейных преобразований с целочисленными коэффициентами (a, b, c, d), удовлетворяющих ad - bc = 1, определяют группу G преобразований относительно композиции функций. Эта группа называется *модулярной группой*, и совпадает с группой матриц 2×2 с целочисленными элементами и единичным детерминантом, с тем условием, что матрица и она же со знаком минус рассматриваются как один и тот же групповой элемент. Здесь групповым умножением является матричное умножение. Данная модулярная группа называется $PSL(2, \mathbb{Z})$. Здесь L обозначает линейное преобразование или матрицы; двойка отвечает размеру матрицы 2×2 ; S образовано от «специальная», так как матрицы имеют единичный детерминант; \mathbb{Z} указывает на то, что элементами являются целые числа; наконец, P образовано от «проективная», что учитывает тот факт, что знак всех элементов можно обратить.

Пусть G' обозначает множество проективных преобразований, которые можно породить комбинацией произвольного числа преобразований S и T и обратных к ним; G' очевидно является подгруппой модулярной группы G. Теперь докажем, что для любого $\tau \in \mathbb{H}$ существует такой $g \in G'$, что $g\tau \in \mathcal{F}_0$. Это сводится к утверждению, что \mathcal{F}_0 содержит одну копию каждого тора — необходимое условие для того, чтобы \mathcal{F}_0 была фундаментальной областью. Доказательство этого утверждения является отнюдь нетривиальным, и проблема в том, что совсем непросто понять, каким образом торы из $S_0 - \mathcal{F}_0$ можно отобразить в \mathcal{F}_0 . Общая стратегия доказательства сводится тому, чтобы убедиться, что любую точку можно отобразить в некоторую новую точку с достаточно большой мнимой частью, после чего ее можно было бы отобразить в \mathcal{F}_0 посредством некоторого числа T преобразований.

Сперва покажем, что для каждого τ существует такой $g \in G'$, что Im $(g\tau)$ принимает наибольшее значение. Из (26.40) следует, что необходимо найти такое g, чтобы $|c\tau + d|$ принимало наименьшее значение. Так как c и d являются целыми числами, по мере их изменения, $(c\tau + d)$ образует решетку из точек на комплексной плоскости, порожденных τ и 1. Для любого числа $\alpha > 0$ существуют по крайней мере конечное число точек, таких что $|c\tau + d| < \alpha$. Таким образом, среди всех $|c\tau + d|$ следует найти такое, для которого g достигает минимума, а Im $(g\tau)$ принимает наибольшее значение. Такое преобразование g не единственно.

Теперь подействуем на T^n преобразованием $g\tau$, с $n \in \mathbb{Z}$, выбранным таким образом, чтобы $T^n g\tau \in S_0$. Утверждение состоит в том, что во всех случаях, за исключением $T^n g\tau \in \overline{\mathcal{F}}_0$, возникает противоречие. Пусть

$$\tau' = T^n g \tau. \tag{26.41}$$

Мнимая часть τ' равна мнимой части $g\tau$ и, согласно нашему предыдущему доказательству, нельзя найти такое $g' \in G'$, чтобы $g'\tau'$ имело мнимую часть, большую чем у τ' . Если τ' не принадлежит $\overline{\mathcal{F}}_0$, то $|\tau'| < 1$. Однако тогда, с помощью (26.40), находим, что

$$\ln (S\tau') = \frac{\mathrm{Im} (\tau')}{|\tau'|^2} > \mathrm{Im} (\tau')$$
(26.42)

противоречит тому, что ни одно преобразование из G' не должно увеличивать мнимую часть τ' . Это противоречие показывает, что любая точка $\tau \in \mathbb{H}$ может быть отображена в $\overline{\mathcal{F}}_0$ с помощью преобразований, порождаемых T и S(и обратными к ним). Пусть она лежит в $\overline{\mathcal{F}}_0$, тогда, если она принадлежит \mathcal{F}_0 , утверждение доказано. Если она не принадлежит \mathcal{F}_0 , то она обязана находиться на границе $\overline{\mathcal{F}}_0$. Применяя один раз либо S либо T, эту точку можно перевести в \mathcal{F}_0 . Это завершает доказательство того, что любая точка $\tau \in \mathbb{H}$ может быть отображена в \mathcal{F}_0 преобразованиями, порождаемыми T и S.

Конечно же, многое еще остается сделать, чтобы доказать, что \mathcal{F}_0 является фундаментальной областью. Необходимо установить, что никакие две точки в \mathcal{F}_0 не могут быть связаны преобразованием из G'. На самом деле можно доказать более сильный результат: никакие две точки не могут быть связаны преобразованием из модулярной группы G. Если это доказано, можно показать, что G' совпадает с G. Это означает, что S и T порождают полную модулярную группу (см. задачу 26.6). Отсюда также следует, что \mathcal{F}_0 является фундаментальной областью модулярной группы.

Задачи

Задача 26.1. Переход струн из открытых в замкнутые

Изучите процесс, в котором открытая струна с конусным импульсом p^+ замыкается и образует замкнутую струну.

- (a) Нарисуйте конусную диаграмму в виде бесконечного цилиндра с полубесконечным разрезом, параллельным его оси. Предъявите входящую открытую струну и специальную струну, порожденную в точке взаимодействия.
- (б) Для того чтобы нарисовать эту диаграмму в виде некоторой области на плоскости w, рассеките цилиндр вдоль направления разреза. Результатом будет бесконечная полоска $0 < \text{Im}(w) \le 2\pi \alpha' p^+$. Открытые струны существуют при Re (w) < 0, а замкнутые струны существуют при Re (w) > 0. Линии Im (w) = 0 и Im $(w) = 2\pi \alpha' p^+$ склеиваются при Re (w) > 0. Что является границей этой струнной диаграммы?

(в) Постройте отображение из данной конусной диаграммы в $z \in \overline{\mathbb{H}}$. Потребуйте, чтобы входящая открытая струна в бесконечном прошлом отображалась как z = 0, а исходящая замкнутая струна в бесконечном прошлом отображалась как z = i.

[Подсказки: с помощью $\xi = \exp(w/(2\pi\alpha'p^+))$ отобразите полоску в $\overline{\mathbb{H}}$. Затем определите $\eta = \xi^2$. Почему при данном отображении отпадает необходимость в отождествлениях? Покажите, что рассматриваемая поверхность отобразилась во внешность конечного разреза на полной комплексной плоскости η . Для того чтобы отобразить ее в $z \in \overline{\mathbb{H}}$, потребуется отображение, содержащее квадратные корни.]

(г) На *z*-плоскости нарисуйте возникновение замкнутой струны в точке взаимодействия. Также схематически изобразите входящие открытые струны и исходящие замкнутые струны.

Задача 26.2. Отображение кольца в каноническое

Найдите ошибку в следующем рассуждении, из которого следует, что конформно отобразить топологическое кольцо в каноническое кольцо невозможно.

Из теоремы отображения Римана следует, что любой топологический диск можно отобразить в единичный диск. Таким образом, топологическое кольцо можно отобразить во внутренность единичного диска $|z| \leq 1$, при этом внешняя граница отображается в |z| = 1, а внутренняя граница отображается в некоторую замкнутую кривую внутри диска. Для того чтобы осуществить отображение в каноническое кольцо, внутренней кривой необходимо придать форму окружности с центром в начале координат, сохраняя при этом границу |z| = 1. Это приводит к отображению диска на себя. Так же, как отображения $\overline{\mathbb{H}}$ на себя, отображения диска на себя обладают тремя вещественными параметрами. Невозможно произвольной кривой придать форму окружности с помощью лишь трех параметров, поэтому невозможно отобразить кольцо в каноническое.

► Задача 26.3. Пространство модулей T^2 компактификаций с полем В

В задаче 17.5 параметрами компактификации квадратного тора T^2 являлись R и поле Кальба—Рамона b. Определите комплексную переменную

$$ho\equiv b\,rac{R^2}{lpha'}+i\,rac{R^2}{lpha'}=rac{f_B}{2\pi}+i\,rac{R^2}{lpha'}.$$

Отметим, что $\rho \in \mathbb{H}$. Докажите, что преобразования (1) и (2) в задаче 17.5 принимают вид

$$\rho \to \rho + 1, \quad \rho \to -\frac{1}{\rho}.$$

Опишите пространство модулей компактификаций на квадратный тор T^2 .

Задача 26.4. Амплитуда Шапиро—Вирасоро

Амплитуда Шапиро—Вирасоро — это амплитуда рассеяния четырех тахионов в замкнутых струнах. Напомним, что для тахиона в замкнутой струне

$$p^2 = -M^2 = \frac{4}{\alpha'}.$$
 (1)

Для вычисления амплитуды Шапиро—Вирасоро требуется пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ сферы с четырьмя выколотыми точками. В случае, когда три выколотые точки расположены в 0, 1, и ∞ , пространство модулей параметризуется положением последней выколотой точки — комплексным числом $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}}$. Отображениями *z*сферы $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ на себя являются дробно-линейные преобразования

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1.$$
 (2)

- (a) Предположим, что мы хотим проинтегрировать по сфере некоторую величину. Тогда записываем интеграл $\int d^2 z \dots$ Здесь $d^2 z \equiv dx \, dy$, с z = x + iy. Как преобразуется $d^2 z$ относительно дробно-линейных преобразований? (Не забудьте использовать якобиан!)
- (б) По аналогии с амплитудой Венециано рассмотрите для амплитуды Шапиро— Вирасоро A_{SV} выражение вида

$$A_{\rm SV} = g^2 \int d^2 z \, |z_1 - z_3|^{\alpha} \dots |z - z_1|^{\beta p_2 \cdot p_1} \dots, \qquad (3)$$

где многоточие обозначает дополнительные множители, которые необходимо выписать, а α и β являются константами, которые необходимо определить из условия инвариантности подынтегрального выражения относительно дробно-линейных преобразований.

(в) Теперь упростите (3) для случаев $z_1 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$ и $z = \lambda$. Покажите, что возникает выражение вида

$$A_{\rm SV} = g^2 \int d^2\lambda \, |\lambda|^{\beta p_2 \cdot p_1} |1 - \lambda|^{\beta p_2 \cdot p_3}. \tag{4}$$

(г) Для вычисления интеграла сначала докажите следующее тождество:

$$|z|^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a/2)} \int_{0}^{\infty} dt \ t^{a/2-1} \exp\left(-t|z|^{2}\right).$$
 (5)

Теперь в (4) примените его дважды, т. е. по одному разу для каждого множителя в подынтегральном выражении. Обозначьте требуемые параметры через t и s. Интеграл по λ гауссов, что становится очевидным при замене $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и $d^2\lambda = d\lambda_1 d\lambda_2$. Вычислите этот гауссов интеграл. Для того чтобы теперь найти интегралы по t и s, обозначьте t = xu и s = (1 - x)u, где 0 < x < 1 и $0 < u < \infty$. Окончательный ответ должен быть представим в виде отношения трех гамма функций к трем гамма-функциям.

(д) Рассмотрите инварианты

$$s = -(p_1 + p_2)^2$$
, $t = -(p_2 + p_3)^2$, $u = -(p_1 + p_3)^2$

Покажите, что полученный ответ имеет ожидаемую структуру полюсов в каждом из трех возможных каналов.
Задача 26.5. Отображение т в фундаментальную область

Пусть $\tau = (9 + i)/10$. Найдите преобразование из модулярной группы, которое отображает данную точку в точку τ_0 фундаментальной области \mathcal{F}_0 . Покажите, что такое преобразование единственно, удостоверившись, что в модулярной группе нет такого преобразования (исключая тождественное), которое оставляло бы τ_0 неподвижной. Частный ответ: $\tau_0 = 5i$. Повторите предыдущие вычисления для $\tau = 9/10 + i/100$. Частный ответ: $\tau_0 = i + 1/10$. [Подсказка: воспользуйтесь процедурой, которая обсуждалась при доказательстве того, что любая τ может быть отображена в фундаментальную область.]

Задача 26.6. S и T порождают модулярную группу

- (a) Пусть $z \in \overline{\mathcal{F}}_0$ и предположим, что $gz \in \overline{\mathcal{F}}_0$ это другая точка, где g является элементом модулярной группы (так же как в (26.37)). Так как можно заменить (z, g) на (gz, g^{-1}) , то можно допустить что $\operatorname{Im}(gz) \ge \operatorname{Im}(z)$. Это приводит к $|cz + d| \le 1$. Объясните, почему значение $|c| \ge 2$ невозможно. Обсудите конечное число возможных значений c и d и докажите, что либо Re $(z) = \pm 1/2$ и $gz = z \mp 1$, либо |z| = 1 и gz = -1/z.
- (б) Докажите, что группа G', порожденная S и T (и обратными к ним), совпадает с модулярной группой G. Так как G' — это подгруппа в G, достаточно показать, что любой элемент G является элементом G'. Постройте доказательство с помощью следующих двух фактов: (i) любая точка вне \mathcal{F}_0 может быть отображена в \mathcal{F}_0 с помощью преобразования из G', и (ii) для любой точки z_0 на \mathcal{F}_0 и любого $g \in G$, отличного от тождественного преобразования, точка gz_0 расположена вне \mathcal{F}_0 (это является следствием (a)).

Библиография

Большинство работ в теории струн подразумевают знание основ квантовой теории поля и общей теории относительности, по этой причине настоящая библиография состоит в основном из обзорных статей. Несмотря на то что обзоры нелегки для чтения, тем не менее они более педагогично написаны, нежели исследовательские статьи, в них содержится много ссылок и с некоторыми из них читатель в какой-то момент захочет познакомиться. В данную библиографию включены также некоторые доступно написанные исследовательские статьи, которые дополняют материал, представленный в книге.

Тем читателям, которые ищут более серьезный материал по теории струн, можно посоветовать учебник Becker, Becker and Schwarz (2007), двухтомник Polchinski (1998) и двухтомник Green, Schwarz and Witten (1987). Полезным справочником является книга Kiritsis (2007). Подробное обсуждение вопросов, связанных с D-бранами, можно найти в книге Johnson (2003). Несмотря на то что все вышеперечисленные книги требуют знания основ квантовой теории поля и общей теории относительности, это не требуется для понимания отдельных частей.

Обзор раннего этапа развития теории струн содержится в книге Frampton (1974). Книга Siegel (1988) посвящена струнной теории поля. Книга Kaku (2000) охватывает самый широкий круг вопросов. Среди полезных лекционных записок можно отметить лекции Lüst and Theisen (1989), Ooguri and Zin (1997) и 't Hooft (2004). Хорошей литературой является ряд популярных книг: Gell-Mann (2002) о теории струн в физике, введение в теорию струн Greene (2000), Randall (2005) о дополнительных измерениях и Susskind (2006) о теории струн и ландшафте.

Основной ссылкой для части I этой книги является статья Goddard et al. (1973), в которой было развито квантование теории открытых бозонных струн в калибровке светового конуса. После изучения части I читатель может более подробно ознакомиться с этой статьей. Прекрасный обзор различных сопутствующих вопросов содержится в ранней работе Scherk (1973). Обсуждение раздела 7.4 основано на неопубликованной работе Джеффри Голдстоуна (Jeffrey Goldstone). Основные сведения, необходимые в части I, могут быть найдены в учебниках по специальной теории относительности, электродинамике, классической и квантовой механике. Хотя в этом нет особой необходимости, можно обратиться к чтению введения в общую теорию относительности Hartle (2003) и введения в квантовую теорию поля Mandl and Shaw (1984).

Теперь укажем статьи и обзоры, в которых рассматриваются специальные вопросы. Задача 2.9 основана на вычислении Seiberg (1997). По поводу экспериментальной проверки существования больших дополнительных измерений см. Chiaverini et al. (2003), Hoyle (2003), Long and Price (2003), Kapner et al (2007). Курс лекций о дополнительных измерениях см. Sundrum (2005). Задача 4.6 основана на предложении Алана Гута (Alan Guth). Задача 6.10 о круговой струне основана на домашнем задании, предложенном в Frey (2005). Космические струны подробно обсуждаются в Vilenkin and Shellard (2000). Обзор текущего состояния дел в этой области представлен в Polchinski (2006), обсуждение космологических ограничений содержится в Jeong and Smoot (2004). Вычисление основного члена в алгебре Вирасоро следует методу, предложенному в 't Hooft (2004). Обсуждение тахионов и распадов D-бран (гипотеза Ceна) содержится в двух ссылках: Gaiotto and Rastelli (2003) и Sen and Zwiebach (2000). Смотрите также обзоры Ohmori (2001), Sen (1999) и Taylor and Zwiebach (2003). Аналитическое описание тахионного вакуума было дано в Schnabl (2006). В качестве дополнения к обсуждению суперструн в главе 14, читатель может обратиться к лекциям Schwarz (2000), а также ко многим другим большим и малым обзорам. Вот некоторые из них: Douglas (1996), Polchinski (1996), Sagnotti and Sevrin (2002), Schwarz (2003), Schwarz and Seiberg (1999), Sen (2001), Taylor (2001) и Witten (2002).

Значительная часть вопросов, обсуждавшихся в части II, рассматриваются (с более технической точки зрения) в приведенных выше книгах. По поводу D-бран читатель может обратиться к лекциям Bachas (1998), Polchinski, Chaudhuri, and Johnson (1996), Taylor (1998), к обзору Giveon and Kutasov (1999) и к статье Hanany and Witten (1997). Некоторый взгляд на КХД в рамках стандартной модели обсуждается в Gross (1999).

Электромагнитная дуальность обсуждается в Deser (1982) и в обзоре Нагvey (1996), Т-дуальность в замкнутых струнах обсуждается в обзорах Giveon, Porrati, and Rabinovici (1994) и Lerche, Schellekens, and Warner (1989). Электромагнитные поля на D-бранах и T-дуальность в открытых струнах являются взаимосвязанными вопросами, некоторые обзоры представлены в Ambjorn et al. (2003) и Taylor (1998), обсуждение дополнительных подробностей поведения струн в электрических полях содержится в Seiberg and Witten (1999) и в доступно написанном обзоре Bigatti and Susskind (2000а). Ясное и подробное обсуждение нелинейной электродинамики представлено в Bialynicki—Birula (1983). Материалы, связанные с теорией Борна—Инфельда, и ссылки на нее можно найти в Gibbons (2003). Задачи 20.6 и 20.7 основаны на результатах Callan and Maldacena (1998).

Обсуждение интересных бранных моделей и струнной феноменологии основано на статьях Ibanez, Marchesano, and Rabadan (2001) и Cremades, Ibanez, and Marchesano (2002a, 2003). Обзоры приводятся в Uranga (2003) и Cremades, Ibanez, and Marchesano (2002b). Более ранними работами в этой области являются Cvetic, Shiu, and Uranga (2001) и Blumenhagen et al (2000). Другие аспекты построения струнных моделей обсуждаются в обзорах Aldazabal et al. (2000), Angelantonj and Sagnotti (2002), Dienes (1997), Ovrut (2002) и Quevedo (1996, 2002). Наше обсуждение стабилизации модулей и ландшафта заимствовано из Denef, Douglas, and Kachru (2007). Ключевые идеи в этой области возникли в Bousso and Polchinski (2000). Недавнее обсуждение ландшафта и физики частиц содержится в Lüst (2007).

Серьезное историческое введение в термодинамику и статистическую механику можно найти в книге Atkins (1994). Так как область струнной термодинамики очень широка, процитируем относительно недавнюю статью со многими ссылками Abel et al. (1999). Также можно порекомендовать лекции Deo, Jain, and Tan (1990). Доступно написанное введение в физику черных дыр имеется, например, в книге Begelman and Rees (1998) и в книге Thorne (1994). См. также статью Bekenstein (2001). В обзоре Das and Mathur (2001) обсуждаются многие аспекты физики черных дыр в рамках теории струн. Наше обсуждение энтропии черной дыры Шварцшильда основано на Horowitz and Polchinski (1997). Обсуждение пятимерной черной дыры в этой книге заимствовано из Strominger and Vafa (1996). Новый подход к энтропии черных дыр обсуждается в Mathur (2005). Недавнее обсуждение этой области содержится в Sen (2007).

Обсуждение траекторий Редже содержится в Tang and Norbury (2000) и Selem and Wilczek (2006). Задача 23.1 основана на аналогичной задаче из Frey (2005). Пуанкаре-инвариантные модификации теории струн в критической размерности, равной четырем, содержатся в Polchinski and Strominger (1991). Обзор результатов для кварк-антикварк потенциала содержится в Kuti (2005). Доступно написанным кратким обзором по AдC/КТП-соответствию является Horowitz and Polchinski (2006). Другими полезными обзорами являются Aharony et al. (2000), D'Hocker and Freedman (2002), Klebanov (2000), Maldacena (2003), Mateos (2007) и Petersen (1999). Соответствие AдC/КТП происходит из гипотезы Малдасены (1998). Другими обзорами по сопутствующим тематикам являются Banks (1999), Bigatti and Susskind (1997, 2000b), Taylor (2001) и Witten (1998). Обсуждение кваркглюонной плазмы содержится в популярно написанных работах Riordan and Zajc (2006) и Blau (2005). Обсуждение технических подробностей содержится в недавних работах Son and Starinets (2007), Liu, Rajagopal, and Wiedemann (2006) и Herzog et al. (2006).

Ковариантное квантование и струнные взаимодействия обсуждаются в приведенных выше учебниках по теории струн. Те читатели, которые хотят выйти за пределы нашего первоначального обсуждения операторов Вирасоро, могут обратиться к лекциям Ginsparg (1991), которые представляют собой эффективное введение в конформную теорию поля. Хорошо написанной книгой по римановым поверхностям является Springer (1981). Обсуждение построения всех римановых поверхностей без коротких потенциальных струн содержится в Zwiebach (1993). Наше обсуждение модулярной группы следует книге Serre (1973).

Abel S. A., Barbon J. L., Kogan I. I., and Rabinovich E. (1999). String thermodynamics in D-brane backgrounds. *J. High Energy Phys.* **9904**, 015 [arXiv:hep-th/9902058].

Aharony O., Gubser S. S., Maldacena J. M., Ooguri H., and Oz Y. (2000). Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rep.* 323, 183 [arXiv:hep-th/9905111].

Aldazabal G., Ibanez L. E., Quevedo, F., and Uranga A. M. (2000). D-branes at singularities: a bottom-up approach to the string embedding of the standard model. *J. High Energy Phys.* 0008, 002 [arXiv:hep-th/0005067].

Ambjorn J., Makeenko Y. M., Semenoff G. W., and Szabo R. J. (2003). String theory in electromagnetic fields. J. High Energy Phys. 0302, 026 [arXiv:hep-th/0012092].

Angelantonj C. and Sagnotti A. (2002). Open strings. *Phys. Rep.* **371**, 1 [Erratum **376**, 339 (2003)] [arXiv:hep-th/0204089].

Atkins P.W. (1994). The Second Law. New York: Scientific American Library.

Bachas C. P. (1998). Lectures on D-branes [arXiv:hep-th/9806199].

Banks T. (1999). TASI lectures on matrix theory [arXiv:hep-th/9911068].

Bartlett J. (1919). Familiar Quotations. Boston: Little, Brown, and Company.

Becker K., Becker M., and Schwarz J. H. (2007) String Theory and M-Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Begelman B. and Rees M. (1998). Gravity's Fatal Attraction. New York: Scientific American Library.

Bekenstein J. D. (2001). The limits of information. Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. 32, 511 [arXiv:gr-qc/0009019].

Bialynicki-Birula I. (1983). Non-linear electrodynamics: variations on a theme of Born and Infeld. In *Quantum Theory of Fields and Particles*, ed. B. Jancerwicz and J. Lukierski. Singapore: World Scientific.

Bigatti D. and Susskind L. (1997). Review of matrix theory [arXiv:hep-th/9712072].

(2000a). Magnetic fields, branes and noncommutative geometry. *Phys. Rev. D.* 62, 066004 [arXiv:hep-th/9908056].

(2000b). TASI lectures on the holographic principle [arXiv:hep-th/0002044].

Blau S. K. (2005) A string-theory calculation of viscosity could have surprising applications. *Phys. Today.* **58**N**5**:23.

Blumenhagen R., Goerlich L., Kors B., and Lüst D. (2000). Noncommutative compactifications of type I strings on tori with magnetic background flux. *J. High Energy Phys.* **0010**, 006 [arXiv:hep-th/0007024].

Bousso R. and Polchinski J. (2007). Quantization of four form fluxes and dynamical neutralization of the cosmological constant. J. High Energy Phys. 0006:006 [arXiv:hep-th/0004134].

Callan C. G. and Maldacena J. M. (1998). Brane dynamics from the Born-Infeld action. *Nucl. Phys. B.* 513, 198 [arXiv:hep-th/9708147].

Chiaverini J., Smullin S. J., Geraci A. A., Weld D. M., and Kapitulnik A. (2003). New experimental constraints on non-Newtonian forces below 100-mu-m. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 151101 [arXiv:hep-ph/0209325].

Cremades D., Ibanez L. E., and Marchesano F. (2002a). Intersecting brane models of particle physics and the Higgs mechanism. *J. High Energy Phys.* 0207, 022 [arXiv:hep-th/0203160].

(2002b). More about the Standard Model at intersecting branes [arXiv:hep-ph/0212048].

(2003). Yukawa couplings in intersecting D-brane models. J. High Energy Phys. 0307 038 [arXiv:hep-th/0302105].

Cvetic M., Shiu G., and Uranga A. M. (2001). Three-family supersymmetric standard like models from intersecting brane worlds. *Phys. Rev. Lett.* 87, 201801 [arXiv:hep-th/0107143].

Das S. R. and Mathur S. D. (2001). The quantum physics of black holes: results from string theory. *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 50, 153 [arXiv:gr-qc/0105063].

Denef F., Douglas M. R., and Kachru S. (2007). Physics of String Flux Compactifications. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 57, 119 [arXiv:hep-th/0701050].

Deo N., Jain S., and Tan C. I. (1990). The ideal gas of strings. Bombay Quant. Field Theory. 1990 112-148 (scanned version: KEK library).

Deser S. (1982). Off-shell electromagnetic duality invariance. J. Phys. A: Math. Gen. 15, 1053.

D'Hoker E. and Freedman D. Z. (2002). Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence [arXiv:hep-th/0201253].

Dienes K. R. (1997). String theory and the path to unification: a review of recent developments. *Phys. Rep.* 287, 447 [arXiv:hep-th/9602045].

Douglas M. R. (1996). Superstring dualities, Dirichlet branes and the small scale structure of space [arXiv:hep-th/9610041].

Frampton P. H. (1974). Dual Resonance Models. Frontiers in Physics Series. Benjamin.

Frey A. (2005). http://theory.caltech.edu/~frey/ph135/.

Gaiotto D. and Rastelli L. (2003). Experimental string field theory. J. High Energy Phys. 0308, 048 [arXiv:hep-th/0211012].

Gell-Mann M. (2002). *The Quark and the Jaguar*. New York: Henry Holt and Company, LLC.

Gibbons G. W. (2003). Aspects of Born-Infeld theory and string/M-theory. *Rev. Mex. Fis.* **49S1**, 19 [arXiv:hep-th/0106059].

Ginsparg P. (1991). Applied conformal field theory [arXiv:hep-th/9108028].

Giveon A. and Kutasov D. (1999). Brane dynamics and gauge theory. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 983 [arXiv:hep-th/9802067].

Giveon A., Porrati M., and Rabinovich E. (1994). Target space duality in string theory. *Phys. Rep.* 244, 77 [arXiv:hep-th/9401139].

Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., and Thorn C. B. (1973). Quantum dynamics of a massless relativistic string. *Nucl. Phys. B.* 56, 109.

Green M. B., Schwarz J. H., and Witten E. (1987). Superstring Theory. Vol. 1: Introduction, Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology. Cambridge: Cambridge University Press.

Greene B. (2000). *The Elegant Universe*. New York: Vintage Books. (Рус. пер.: Грин Б. Элегантная Вселенная. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011.)

Gross D. J. (1999). Twenty five years of asymptotic freedom. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 74, 426 [arXiv:hep-th/9809060].

Hanany A. and Witten E. (1997). Type IIB superstrings, BPS monopoles, and threedimensional gauge dynamics. Nucl. Phys. B. 492, 152 [arXiv:hep-th/9611230].

Hartle J. B. (2003). Gravity. San Francisco, CA: Addison-Wesley.

Harvey J. A. (1996). Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry [arXiv:hep-th/9603086].

Herzog C. P., Karch A., Kovtun P., Kozcaz C., and Yaffe L. G. (2006). Energy loss of a heavy quark moving through N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *JHEP*. 0607, 013 [arXiv:hep-th/0605158].

Horowitz G. T. and Polchinski J. (1997). A correspondence principle for black holes and strings. *Phys. Rev. D.* 55, 6189 [arXiv:hep-th/9612146].

(2006). Gauge/gravity duality [arXiv:gr-qc/0602037].

Hoyle C. D. (2003). The weight of expectation. Nature. 421, 899.

Ibanez L. E., Marchesano E, and Rabadan R. (2001). Getting just the Standard Model at intersecting branes. J. High Energy Phys. 0111 002 [arXiv:hep-th/0105155].

Jeong E. and Smoot G. F. (2005). Search for cosmic strings in CMB anisotropies. Astrophys. J. 624, 21 [astro-ph/0406432].

Johnson C. V. (2003). D-branes. Cambridge: Cambridge University Press.

Kaku M. (2000). Strings, Conformal Fields and M-theory. New York: Springer.

Kapner D. J., Cook T. S., Adelberger E. G., Gundlach J. H., Heckel B. R., Hoyle C. D., and Swanson H. E. (2007). Tests of the gravitational inverse-square law below the darkenergy length scale. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 021101 [arXiv:hep-ph/0611184].

Kiritsis E. (2007). String Theory in a Nutshell. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Klebanov I. R. (2000). TASI lectures: introduction to the AdS/CFT correspondence [arXiv:hep-th/0009139].

Kuti J. (2005). Lattice QCD and string theory [arXiv:hep-lat/0511023].

Lerche W., Schellekens A. N., and Warner N. P. (1989). Lattices and strings. *Phys. Rep.* 177, 1.

Liu H., Rajagopal K., and Wiedemann U. A. (2006). Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.* 97, 182301 [arXiv:hep-ph/0605178].

Long J. C. and Price J. C. (2003). Current short-range tests of the gravitational inverse square law [arXiv:hep-ph/0303057].

Lüst D. (2007) String Landscape and the Standard Model of Particle Physics [arXiv:hep-th/0707.2305].

Lüst D. and Theisen S. (1989). Lectures on String Theory. Berlin: Springer Verlag.

Maldacena J. M. (1998). The large N limit of superconformal field theories and supergravity. Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999)) [arXiv:hep-th/9711200].

(2003) TASI 2003 lectures on AdS/CFT [arXiv:hep-th/0309246].

Mandl F. and Shaw G. (1984). Quantum Field Theory. New York: Wiley.

Mateos D. (2007). String Theory and Quantum Chromodynamics [arXiv:hep-th/0709.1523].

Mathur S. D. (2005). The Fuzzball proposal for black holes: An Elementary review. *Fortsch. Phys.* 53, 793 [arXiv:hep-th/0502050].

Ohmori K. (2001). A review on tachyon condensation in open string field theories [arXiv:hep-th/0102085].

Ooguri H. and Zin Y. (1997). Lectures on perturbative string theories. In *Fields, Strings, and Duality, TASI* 1996, ed. C. Efthimiou and B. Greene, pp. 5–82. Singapore: World Scientific [arXiv:hep-th/9612254].

Ovrut B.A. (2002). Lectures on heterotic M-theory [arXiv:hep-th/0201032].

Petersen J. L. (1999). Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT. Int. J. Mod. Phys. A. 14, 3597 [arXiv:hep-th/9902131].

Polchinski J. (1996). String duality: a colloquium. Rev. Mod. Phys. 68, 1245 [arXiv:hep-th/9607050].

(1998). String Theory. Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String, Vol. 2: Superstring Theory and Beyond. Cambridge: Cambridge University Press.

(2006) Cosmic String Loops and Gravitational Radiation [arXiv:0707.0888].

Polchinski J., Chaudhuri S., and Johnson C. V. (1996). Notes on D-branes [arXiv:hep-th/9602052].

Polchinski J. and Strominger A. (1991). Effective string theory. Phys. Rev. Lett. 67, 1681.

Quevedo F. (1996). Lectures on superstring phenomenology [arXiv:hep-th/9603074].

(2002). Lectures on string/brane cosmology. Class. Quant. Grav. 19, 5721 [arXiv:hep-th/0210292].

Riordan M. and Zajc W. (2006). The first few microseconds. Sci. Am. 294N5, 24.

Randall L. (2005). Warped Passages. New York: Harper Collins. (Рус. пер.: Рэндалл Л. Закрученные пассажи. М.: URSS, в печати.)

Sagnotti A. and Sevrin A. (2002). Strings, gravity and particle physics [arXiv:hep-ex/0209011].

Scherk J. (1975). An introduction to the theory of dual models and strings. *Rev. Mod. Phys.* 47, 123.

Schnabl M. (2006). Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory. Adv. Theor. Math. Phys. 10, 433 [arXiv:hep-th/0511286].

Schwarz J. H. (2000). Introduction to superstring theory [arXiv:hep-ex/0008017].

(2003). Update on string theory [arXiv:astro-ph/0304507].

Schwarz J. H. and Seiberg N. (1999). String theory, supersymmetry, unification, and all that. *Rev. Mod. Phys.* **71**, S112 [arXiv:hep-th/9803179].

Seiberg N. (1997). Why is the matrix model correct? *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3577 [arXiv:hep-th/9710009].

Seiberg N. and Witten E. (1999). String theory and noncommutative geometry. J. High Energy Phys. 9909, 032 [arXiv:hep-th/9908142].

Seiberg N., Susskind L.; and Toumbas N. (2002). Strings in background electric field, space/time noncommutativity and a new noncritical string theory. J. High Energy Phys. 0006, 021 [arXiv:hep-th/0005040].

Selem A. and Wilczek F. (2006). Hadron systematics and emergent diquarks [arXiv:hep-ph/0602128].

Sen A. (1999). Non-BPS states and branes in string theory [arXiv:hep-th/9904207].

(2001). Recent developments in superstring theory. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 94, 35 [arXiv:hep-lat/0011073].

(2005). Tachyon dynamics in open string theory. Int. J. Mod. Phys. A20:5513 [arXiv:hep-th/0410103].

(2007). Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates [arXiv:0708.1270].

Sen A. and Zwiebach B. (2000). Tachyon condensation in string field theory. J. High Energy Phys. 0003, 002 [arXiv:hep-th/9912249].

Serre J. P. (1973). A Course in Arithmetic. Graduate Texts in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag.

Siegel W. (1988). Introduction to string field theory [arXiv:hep-th/0107094].

Son D. T. and Starinets A. O. (2007). Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 57, 95 [arXiv:0704.0240].

Springer G. (1981). Introduction to Riemann Surfaces. New York: Chelsea Publishing Company.

Strominger A. and Vafa C. (1996). Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Phys. Lett. B.* 379, 99 [arXiv:hep-th/9601029].

Sundrum R. (2005). TASI 2004 lectures: To the fifth dimension and back [arXiv:hep-th/0508134].

Susskind L. (2006). The Cosmic Landscape. New York: Little, Brown and Company.

Tang A. and Norbury J. W. (2000). Properties of Regge trajectories. *Phys. Rev.* D62, 016006 [arXiv:hep-ph/0004078].

Taylor W. (1998). Lectures on D-branes, gauge theory and M(atrices) [arXiv:hep-th/9801182].

(2001). M(atrix) theory: matrix quantum mechanics as a fundamental theory. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 419 [arXiv:hep-th/0101126].

Taylor W. and Zwiebach B. (2003). D-branes, tachyons, and string field theory [arXiv:hep-th/0311017].

Thome K. S. (1994). Black Holes and Time Warps. New York: Norton & Company.

't Hooft G. (2004). Introduction to string theory, http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/stringnotes.pdf

Uranga A. M. (2003). Chiral four-dimensional string compactifications with intersecting D-branes. *Class. Quant. Grav.* 20, S373 [arXiv:hep-th/0301032].

Vilenkin A. and Shellard E. P. S. (2000). Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge: Cambridge University Press.

Witten E. (1998). New perspectives in the quest for unification [arXiv:hep-ph/9812208].

(2002). Comments on string theory [arXiv:hep-th/0212247].

Zwiebach B. (1993). Closed string field theory: an introduction [arXiv:hep-th/9305026].

Литература, добавленная редакторами перевода*

По конформной теории поля

Friedan D., Martinec E., and Shenker S. (1986). Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory. Nucl. Phys. B. 271, 93.

Belavin A. A., Polyakov A. M., and Zamolodchikov A. B. (1984). Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys. B.* 241, 333.

По струнной теории поля

Aref'eva I. Ya., Belov D. M., Giryavets A. A., Koshelev A. S., and Medvedev P. B. (2001). Noncommutative Field Theories and (Super)String Field Theories [arXiv:hep-th/0111208]. Taylor W. (2006). String field theory [arXiv:hep-th/0605202].

^{*} Редакторы не ставили перед собой задачу расширения списка литературы за счет статей, так или иначе дополняющих авторский список. Добавлен лишь перечень нескольких курсов лекций, которые появились недавно. — Прим. изд.

По струнной космологии

Danielsson U. H. (2005). Lectures on string theory and cosmology. *Class. Quant. Grav.* S1-S40 [arXiv:hep-th/0409274].

Trodden M. and Carroll S. M. (2004). TASI Lectures: Introduction to Cosmology [arXiv:astro-ph/0401547].

Linde A. (2005). Inflation and String Cosmology. J. Phys. Conf. Ser. 24, 151–160 [arXiv:hep-th/0503195].

Burgess C. P. (2006). Strings, Branes and Cosmology: What can we hope to learn? [arXiv:hep-th/0606020].

Cline J. M. (2006). String Cosmology [arXiv: hep-th/0612129].

McAllister L. and Silverstein E. (2008). String Cosmology: A Review. Gen. Rel. Grav. 40, 565-605 [arXiv:0710.2951].

Предметный указатель

АдС/КТП соответствие

- в конформной теории поля 607
- — в пределе больших N 614
- геометрии вблизи горизонта 622
- — голографии 633
- —, обоснование 619
- , параметры 624
- при конечной температуре 639
- ансамбль канонический 572, 591
- микроканонический 572, 583, 591, 594, 603
- анти-де Ситтера пространство, изометрии 620
- —, конформная граница 637
- , метрика 636, 651
- —, определение 633
- —, черная дыра 640
- Бома-Ааронова эффект 473
- Борна—Инфельда электродинамика, гамильтониан 519
- —, емкость 518
- — и Т-дуальность 514
- —, лагранжиан для Dp-браны 516
- , общая теория 504, 509, 511–513
- —, плотность лагранжиана 508, 510
- , струны, заканчивающиеся на D-бране 520, 521
- , энергия точечного заряда 508, 511

Вейля преобразования 676 Венециано амплитуда 681, 682, 716

- Вильсона петли, воздействие на спектр открытых струн 478
- —, голономии см. голономии
- —, определение 475
- — с константой A_x 477
- Вирасоро алгебра без центрального расширения 304
- — как алгебра Ли 326
- с центральным расширением 306
- операторы замкнутых струн на световом конусе 338
- ковариантных замкнутых струн 669
- — открытых струн 659
- открытых струн на световом конусе 658
- — упорядочения L_0^{\perp} 299
- -, поперечные моды 232
- потомки 668
- примарные состояния 663, 677
- Витта алгебра 304
- вращающаяся открытая струна в калибровке светового конуса
 - 234
- — —, квантованная длина 647
- — —, квантовые состояния 608
- —, когерентные состояния 611
- — —, подробный анализ 178 выколотые точки 632, 693

Гамильтона принцип 109, 110 гамильтониан замкнутой струны на световом конусе 337, 341, 452 – заряженной точечной частицы 72

 ковариантной открытой струны — ИЗ КОВАРИАНТНЫХ ЗАМКНУТЫХ 657, 667 открытой струны на световом конусе 285, 311 плотность для скалярного поля 240 -, - - струны 164 точечной частицы на световом конусе 267 электродинамики Борна-Инфельда 519 гамма-функция, амплитуда Венециано 720 –, аналитическое продолжение 99 , определение 80, 99 , рекурентное соотношение 81 геодезическая на конусе 185, 186, 192 —, уравнение 132 гиперболическое пространство H₂ 628 $- - \mathbb{H}_2$, изометрическое вложение в ℝ' 649 — — —, конформные границы 631 — — —, метрика 631 — — —, определение 629 голография 633, 638, 639 голономия W как угловая переменная 478 — —, определение 475 — —, петли Вильсона см. Вильсона петли гравитационное поле, калибровка светового конуса 256 — , калибровочное преобразование 255 — , квантовая теория 254 — —, степени свободы 257 гравитонные состояния из гравитационного поля 254 — из замкнутых струн

на световом конусе 345

```
струн 680
группа U(1) 404, 472
-U(N) 404
Де Ситтера пространство 627, 652
действие заряженной точечной
     частицы 130, 131

    Намбу—Гото 133, 145–147, 219,

     657, 672, 675
-, определение 108

    открытой струны с заряженными

     концами 430

    полевой системы и его симметрии

     213

    свободного скалярного поля 240

    свободной точечной частицы 120,

     121, 131

    , седловые точки 110, 118

    струны в поперечных координатах

     659
— — и поля Кальба—Рамона 416

    — Полякова 655, 671–673,

     675-677, 691

    точечной частицы в искривленном

     пространстве 132

    частицы в электромагнитном поле

     131
дефицит угла 183
дзета-функции, аналитическое
     продолжение 326

    , определение 301

диаграммы Фейнмана 683
дилатон из квантовой замкнутой
     струны 345

    из ковариантной замкнутой

     струны 680
-, связанный со сцеплением струн
     346
Дирихле граничное условие,
     определение 104
— — —, открытые струны 201
```

Калуцы — Клейна подход 454 дополнительные измерения большие 71, 95-98 Кальба-Рамона поле, T^2 -компактификация 463 — — компактные 36, 56, 93 — , анализ 259 – , лоренц-инвариантность 55 допустимые состояния 663 — , взаимодействие с полем Максвелла на D-бране 432 дробно-линейные преобразования, — —, — со струной 417 количество параметров 703 — —, движение струны 437 — , определение 703 — —, калибровочные — , построение по трем точкам 703 преобразования 259 дуальность в электромагнетизме 440 — —, плотность электрического для классического осциллятора заряда 418 440 — , состояния в теории замкнутой –, определение 439 струны на световом конусе 345 -, Т-дуальность см. Т-дуальность — —, — частиц 260 Дынкина метки 540, 541 — — струны 437 каспы в замкнутых струнах 180, 191 Единицы измерения 36 в открытых струнах 191 — — естественные 219 квадрат массы, ND вклад 409 — — планковские 88 — — в секторе NS 369 — — системы СИ 36 — — в секторе R 372 — — Хевисайда—Лоренца 66 — замкнутой струны 343 емкость и модули колец 729, 732, 737 — — — с компактификацией 451 электродинамики – , нормально упорядоченные Борна-Инфельда 518 вклады 384 — — открытой струны 302, 322 Заряд лоренцев 208 — — — — (классической) 608 сохраняющийся в механике — — — между D-бранами 400 Лагранжа 193 — твистового сектора 356 —, — для плотностей лагранжиана 196 квантовая теория гравитационного поля 254, 345 — электрический 193, 194 — массивного векторного поля 260 Иерархии проблема 89 — — поля Максвелла 251 интервал 38 — скалярного поля 258 Калаби-Яу пространство 554, 555 кварк-глюонная плазма, вязкость 646 калибровочное U(1)-преобразование — —, получение 644 470 киральные фермионы 523, 529, 530, преобразование гравитационного 537, 538 поля 255 компактификация потока 523, 559, — — поля Кальба—Рамона 259 562 — — — Максвелла 404, 430, 466, 678 конформная граница H_n 631

- $--\mathbb{R}^2$ 632
- — АдС 637
- —, определение 631
- пространства Минковского 637
- калибровка 676
- конформное отображение см. Шварца—Кристоффеля отображение
- космические струны 32, 167, 183, 187
- Коши—Римана уравнения 690, 732, 735, 737
- Лагранжиан для Dp-браны с электромагнитными полями 516
- нерелятивистской струны 107
- -, определение 107
- электродинамики
 Борна–Инфельда 508
- лагранжиана симметрии, определение 194
- ландшафт 523, 557
- Лоренца алгебра 278, 279, 281
- генераторы квантовой открытой струны 308
- — точечной частицы 276
- преобразования, бусты 42
- — инфинитезимальные 205, 206
- —, определение 44
- сила 72, 73, 98, 129
- Люшера коэффициент 613, 614

Магнитное поле, движение открытой струны 501 — —, квантование потока 497. 500 — — на D-бране 483, 491, 493 — —, связанное с утлом наклона 493 массивное векторное поле из разделенных D-бран 401 — — —, формулировка 260 метрика динамическая 86

 для открытой струны в магнитном поле 502 , индуцированная на мировом листе 146 —, — на поверхности 146, 161, 162 конформная 632, 637, 675, 676 Минковского 40, 41 — мирового листа $h_{\alpha\beta}$ 672 преобразование при репараметризации 138 механизм Хиггса 405 мировая линия 39, 121 мировой лист, импульс 202 — , класс параметризации 151 — —, определение 133 — —, ток \mathcal{P}_{μ} 200 — —, фермионы 363, 365 модулей пространство при T^2 компактификации с полем В 755 — римановых поверхностей см. Риманова поверхность модулярная группа $PSL(2, \mathbb{Z})$, определение 753 ---, порожденная S и T 757 — — —, фундаментальная область \mathcal{F}_0 753 М-теория 31, 556 Намбу—Гото действие для струны 133, 145, 146 намотки замкнутых струн 444, 448 заряженных струн 463 -, определение 444 –, число 443, 444 Невье-Шварца фермионы 408 Неймана граничное условие 104, 105 нелинейная электродинамика, поле **D** 503, 504 $--, -\vec{H}$ 504

- , структура 503
- , теория Борна—Инфельда 503, 504, 509, 514

- нелинейная электродинамика, функционал энергии 518
- неориентированные замкнутые струны 358
- открытые струны 318, 329
- непланарные диаграммы открытых струн 738
- нормальное упорядочивание 301
- нулевые векторы 46
- Ньютона закон тяготения 592
- постоянная, выраженная через g
 347
- для произвольной размерности 91
- постоянная G 184

Оператор Гейзенберга 261, 280

- — открытой струны 284
- рождения и уничтожения замкнутых струн 342
- — квантованного скалярного поля 247
- — открытых струн 337
- скалярного поля 248
- точечной частицы Гейзенберга 266
- — Шрёдингера 266
- числа замкнутых струн 338
- — открытых струн 302
- Шрёдингера 62, 264
- открытой струны 284
- орбифолд \mathbb{C}/\mathbb{Z}_N 61
- $-\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$ 60
- — замкнутых струн 349
- —, твистовый сектор 352
- $-T^{2}/\mathbb{Z}_{3}$ 67
- -, определение 60
- -, построение 67
- ориентация открытой струны 318
- ориентифолда плоскость 359
- — и **D***p*-брана 411

- — и разделенные Dp-браны 412 — и совпадающие Dp-браны 412 Параметр наклона α' 208, 209 пересечений число 526-529 Планка длина в произвольной размерности 91 — , масса, время 90, 184 постоянная 62 — энергия 90 плотность j^0 электрического заряда 418 подсчет числа симметричных произведений 328 - состояний с помощью производящей функции 373, 374 поля Максвелла, взаимодействие с открытой струной 417 — , голономия 475 — , калибровка светового конуса 256 – , калибровочные преобразования 255 — , квантовая теория 251 — , фотонные состояния 454 поперечные колебания, волновое уравнение 102 — —, определение 102 — —, частота 105 постоянная тонкой структуры 89, 346, 681 потенциал пары кварк-антикварк 613, 614 пространства состояний замкнутой струны без компактификации 359 – — — с компактификацией 452 – лоренц-ковариантные 666 — между Dp- и Dq-бранами 405 — — на Dp-бране 415 — открытой струны 314, 315, 401
 - — параллельных Dp-бран 397

Р азбиение $N p(N)$ 576, 579	Самодуальный радиус 456
P(N; b, f) 582	световой конус, калибровка
$p_b(N)$ 581	гравитационного поля 256
q(N) 582, 602	— —, — открытых и замкнутых
— —, производящая функция 602	струн 234, 235
разложение по модам для	— —, — поля Максвелла 252
ND-координаты открытой	— —, — точечной частицы 261, 262
струны 408	— —, компоненты тензоров 258
— — — — NN-координаты	— —, координаты 36, 46
открытой струны 391	— -, энергия и импульс 53, 267
X^- -координаты	свободные граничные условия 150,
открытой струны 232	156
— — – координат замкнутой струны	связи из действия Полякова 671
без компактификации 335, 446	— квантовые Вирасоро 660
размерная редукция 73	 параметризация 224, 656
Рамон—Рамона взаимодействие для	-, разрешимые в калибровке
D-бран 551	светового конуса 229
 поля в замкнутой суперструне 416 	секторы для открытых струн между
Рамона фермионы 362, 368, 371, 373,	D-бранами 525
380	— — суперструн типа II 380
Редже траектории 210, 608, 609, 611	- Рамона и Невье-Шварца 367, 373
репараметризационная	сечение рассеяния 685
Инвариантность взаимодеиствия Кальба Рамона 435	скакалка релятивистская 189, 190
	—, угловой момент 214
	скалярное поле, гамильтониан 240
	— —, квантовая теория 237, 270
репараметризация, тенерируемая	— —, принцип действия 238
378, 347	— —, степени свободы 243
риманова поверхность верхней	— —, уравнения движения
полуплоскости Ш 689	на световом конусе 243
— — колыа 727	— —, — —, плосковолновые
— — комплексной плоскости С 689	решения 238
— —, определение 690	собственное время 51
— — пространство молулей <i>М</i> ол	— — как действие 122
709	состояния (частинеподобные)
$, \mathcal{M}_{10}$ 751	Кальба—Рамона 260
N_{3} 709	— — одногравитонные 257
N_{4} 710	— — одно-частичные 260
— — сферы Ĉ 701	— — однофотонные 254
— — сходящихся точек 722	— — одночастичные 249
— — тора 744	спиральность 536
· vpm · · · ·	

Стандартная модель, калибровочная	суперсимметрия 28, 362, 363, 553, 597
группа 530	суперструны гетеротические 381, 383
— —, описание 27, 536	— замкнутые 379
— —, струнная модель 33	— на D-бране 433
статистическая сумма одиночной	— открытые 362, 376, 379
струны 587	— сектора NS 379
— — распределения релятивистской	— - R 379
частицы 585	— типа 1 556
статическая калибровка, действие	—, GSO-проекция 377, 383, 384
для струны 151	сфера, объем 78, 79
— —, определение 152	— произвольной размерности 79
степени свободы гравитационного поля 257 — —, определение 243 — — поля Максвелла 253 струн взаимодействие и постоянная	Тахион, амплитуда рассеяния 682, 716 —, потенциал 322–324 —, состояния в замкнутой струне
Ньютона 347	343, 671
— —, изменения ввиду Т-дуальности	—, — в открытой струне 316
482	ток, 4-вектор 77
— —, связанное с дилатоном 346	— сохраняющийся для плотностей
струнное число \mathcal{N} 423, 425	лагранжиана 196
струнный бит 595, 597	— — лоренцев 211
— заряд \vec{Q} 420, 423, 436	— —, определение 193
— —, переносимый электрическим	— электрический 193
полем 432	точечной частицы гамильтониан,
струны длина 30	при наличии заряда 131
— концевые точки, движение	— — Гейзенберга оператор 266
с закреплением на D-бране 165	— — движение в искривленном
— — — заряженные 430	пространстве 132
— — —, ковариантный анализ	— — действие 120
движения 164	— — —, при наличии заряда 130
 – – –, свободное движение 151 – координаты 141 – натяжение эффективное 171 – нерелятивистской натяжение 110, 117 	 — квантовые состояния 261, 270 — ковариантное квантование 677 — лагранжиан 275, 281 — лоренцевы генераторы на световом конусе 276 — репараметризационные
 ориентация 318, 329 пространственная поверхность 133 релятивистской натяжение 103 супергравитация 597 	симметрии 281 — — уравнение Шрёдингера 261, 271 — — уравнения движения 120, 122, 127, 130

774 _____

— — Шрёдингера оператор 266	Чана—Пат
Т-дуальная инвариантность	черная ды
гамильтониана 481	анти-
Т-дуальность, влияние	— — в суп
на взаимодействие струн 480	— —, осно
— замкнутых струн 457	597, 6
— как дуальность тора 439	— —, пост
— открытых струн 466	— —, темг
— — —, воздействие на D-браны 471	— —, энтр 591—5
Vантрафиолеторые расходимости 725	чистая кал
эльтрафиолетовые расходимости 725	— — поля
Δ	— — состо
Физические состояния при	
конусе открытой струны 315	Шапиро— 756
— — — — — Конусе точечной	Шварца—
частицы 209	в обц
ковариантном квантовании,	— — дляч
физическое состояние гравитона 680	— — замк
— — тахионное 667	_
	Электриче
— — фотона 008 фоновые доля 422 423 483_485	услов
	— — движ
открытой струны 678	492, 4
— — открытой струны на световом	— — крип
конусе 668	— — на D
— — поля Максвелла 254	300KTPOMA
фунламентальная область	— луяльня
модулярной группы \mathcal{F}_0 754	, душина — калибр
— —, определение 57	
функция распределения.	— опреле
определение 573	, onpege. 418
	 –, уравне
Хагедорна температура бозонной	503
теории струн 583	энергия ва
— — теории открытых суперструн	модел
602	— — в ком
Харди—Рамануджана формула 579,	— — во Ве
580	энтропия,
Хокинга-Пейджа переход 641, 644	— струны

Чана—Патона индексы 404
черная дыра в пространстве
анти-де Ситтера 640
— — в суперструнах IIB 597, 598
— —, основные свойства 592, 594,
597, 641
— —, построенная с D-бранами 598
 — , температура 100, 593, 598, 641
 — , энтропия 34, 35, 572, 575, 591–596, 598, 601, 643
чистая калибровка, определение 253
— — поля Максвелла 253
— — состояний 665
Шапиро—Вирасоро амплитуда 755,
756
Шварца-Кристоффеля отображение
в общем случае 694
— — для четырех открытых струн 711
— — замкнутого многоугольника 723
2
Электрическое поле, граничные
успория открытой струны 485
условия открытой струны 485
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503 энергия вакуума в игрушечной
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503 энергия вакуума в игрушечной модели 571
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503 энергия вакуума в игрушечной модели 571 — — в компактификации потока 562
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503 энергия вакуума в игрушечной модели 571 — — в компактификации потока 562 — — во Вселенной 100, 562
условия открытой струны 485 — — движения открытых струн 491, 492, 499, 501 — — критическое 491, 508, 514 — — на D-бране 433, 435, 483 электромагнетизм, вектор тока 78, 193 —, дуальная инвариантность 440 —, калибровочные потенциалы 74 —, — преобразования 73 —, определение напряженности поля 418 —, уравнения Максвелла 25, 27, 439, 503 энергия вакуума в игрушечной модели 571 — — в компактификации потока 562 — — во Вселенной 100, 562 энтропия, определение 572

- энтропия черной дыры 593-595, 597, 598, 633
- Янга—Миллса U(1)-теория 404 — U(3) (SU(3))-теория 530 — U(N)-калибровочные поля 404
- 4-вектор 45, 51
- **D**-браны, D0-браны 150, 655, 679
- –, граничные условия Dp-браны 150, 389, 390
- –, заряд 97, 416
- –, классические движения концевых точек 160
- —, — открытой струны 171

- , лагранжиан с электромагнитными полями 508
- -, намотанные на цилиндр 443, 444
- , натяжение T_p Dp-браны 480-482,
 618
- , открытые струны между Dpи Dq-бранами 405
- , — параллельными
 Dp-бранами 397
- -, на Dp-бране 165, 391, 392, 397
- –, первое подробное обсуждение 150
- —, распад 320
- с магнитными полями 491, 501
- с электрическими полями 483, 487

Основные формулы и константы

Пространство Минковского:	$-ds^{2} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -(c dt)^{2} + (dx^{1})^{2} + \dots$ $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ $a \cdot b = -a^{0}b^{0} + a^{1}b^{1} + a^{2}b^{2} + \dots$
Световой конус:	$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$ $a \cdot b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + \dots$
Импульс:	$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), p^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2$
Объем сферы:	$\operatorname{vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$
Компактификация:	$\frac{G^{(D)}}{G} = V_C$
Действие Намбу—Гото:	$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{0}^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$ $\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_{\mu} - (X')^2 \dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$ $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_{\mu} - (\dot{X})^2 X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$
Уравнение движения (1):	$0 = \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma}$
Статическая калибровка:	$X^0(\tau,\sigma) \equiv ct = c au, L = -T_0 \int ds \sqrt{1-\frac{v_\perp^2}{c^2}}$

Параметризация:		1 = ($\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c}$	$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2$,	$d\sigma = -$	$\frac{ds}{\sqrt{1-\frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} =$	$= \frac{dE}{T_0}$
Уравнение движен	ия (2):	$0 = \frac{\partial^2}{\partial t}$	$\frac{2^2\vec{X}}{\sigma^2} - \frac{1}{c^2}$	$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}$			
Импульс струны:		$p_{\mu} = $	$\int_{T} \left(\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma \right)$	$r - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} d\tau$)		
Вращающаяся откр	ытая струна:	$E=\frac{\pi}{2}$	$\begin{bmatrix} T_0 \ell, J \end{bmatrix}$	$V = \frac{1}{2\pi T_0}$	$\frac{1}{c}E^2$		
Параметр наклона:		$\alpha' = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\pi T_0 \hbar c},$	ℓ _s = ħα	:√α′		
Калибровка светово	ого конуса:	$X^+ =$	$\beta \alpha' p^+ \tau$	$p^{+} =$	$\frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{r+}$		
		$\beta = \left\{ \right.$	2 для	открыты	х струн		
			ідля. 1. ф	замкнуте 4 Ф ^{ен}	ах струн 1	ΨШ	
		$p \cdot \equiv$	$\frac{1}{2\pi \alpha'} \Lambda$, <i>P</i> ·	$=-\frac{1}{2\pi\alpha'}$	Y.	_
		$0 = \ddot{X}'$	$^{\mu}-X^{\mu \prime \prime},$	$\dot{X}^{-} \pm X$	$T'' = \frac{1}{2\beta\alpha'}$	$\frac{1}{p^+}(\dot{X}^I\pm$	$X^{I'})^2$
Открытая струна:	$X^{\mu}(au,\sigma)=a$	$x_0^{\mu} + \sqrt{2}$	$\overline{\alpha'} \alpha_0^{\mu} \tau +$	$i\sqrt{2lpha'}\sum_{n eq}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^{\mu} e^{-i}$	$n^{\pi \tau} \cos n \sigma$	
	$lpha_0^\mu = \sqrt{2lpha'} p^\mu$	$^{\mu}, [\alpha_n]$	$[\alpha_n, \alpha_n^J] =$	$m\delta_{m+n,0}$	η^{IJ}		
	$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^2)$	^L – 1),	$N^{\perp} = \sum_{\mu}$	$\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{I} \alpha_{j}$	l p		
	$\left[L_m^{\perp},L_n^{\perp}\right]=0$	(m - n)	$L_{m+n}^{\perp} + $	$\frac{D-2}{12}(m$	$(\delta^3 - m)\delta_m$	+n, 0	
	$L_n^{\perp} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty}$	$\alpha_{n-p}^{I}\alpha_{p}$	$p (n \neq 0)$	$D), L_0^{\perp}$	$= \alpha' p' p'$	$+ N^{\perp}$	
	$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}p}$	${+}L_{n}^{\perp}$,	$\left[L_m^{\perp}, \alpha_n^J\right]$	$]=-n\alpha$	J m+n		

Замкнутая струн	a: $X^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0^{\mu} + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} \left(\alpha_n^{\mu} e^{in\sigma} + \overline{\alpha}_n^{\mu} e^{-in\sigma} \right)$
	$lpha_0^\mu = \sqrt{rac{lpha'}{2}}p^\mu, L_0^\perp = rac{lpha'}{4}p^Ip^I + N^\perp, ar{L}_0^\perp = rac{lpha'}{4}p^Ip^I + ar{N}^\perp$
	$N^{\perp} = \sum_{p=1}^{\infty} lpha_{-p}^{I} lpha_{p}^{I}, \overline{N}^{\perp} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{lpha}_{-p}^{I} \overline{lpha}_{p}^{I}$
	$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2), \overline{N}^{\perp} = N^{\perp}$
Сектор NS:	$(-1)^F = -1$ для основных NS-состояний
	$a_{\rm NS} = -\frac{1}{48}, \alpha' M^2 = -\frac{1}{2} + N^{\perp}, {\rm NS} + : (-1)^F = +1$
Сектор R:	8 фермионных нулевых мод $\rightarrow 2^{8/2} = 16$ основных состояний
	$(-1)^F = -1$ для $ R_a\rangle$, $a = 1, 2,, 8$
	$(-1)^{F} = +1$ для $ R_{\bar{a}}\rangle, \ \bar{a} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}, a_{R} = \frac{1}{24}, \alpha' M^{2} = N^{\perp}$
 D <i>p</i> -брана:	Осцилляторы: α_n^i , $i = 2, 3,, p$ и α_n^a , $a = p + 1,, d$
Основные состоя	яния: $ p^+, \vec{p}\rangle, \vec{p} = (p^2, \dots, p^p)$
Квадрат массы:	$\alpha'M^2 = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a)$
N D <i>p</i> -бран:	Основные состояния $ p^+, \vec{p}; [jk]\rangle, j, k = 1, 2,, N,$
	$\vec{p} = (p^2, \dots, p^p), a_{NN} = a_{DD} = -\frac{1}{24}, a_{ND} = a_{DN} = \frac{1}{48}$

Взаимодействие струн и концов открытых струн с полем Кальба—Рамона на D-бране:

$$S = -\int d\tau \, d\sigma \, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} \, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} \, B_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma)) + \\ + \int d\tau A_m(X) \, \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \, A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

Т-дуальность: $$ намотка $w = \frac{mR}{lpha'}$, н	ампульс $p=rac{n}{R},$ дуальный радиус $\widetilde{R}=rac{lpha'}{R}$	
$M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'}$	$(N^{\perp} + \overline{N}^{\perp} - 2), N^{\perp} - \overline{N}^{\perp} = \alpha' p w = n m$	
$X = X_L + X_R \longrightarrow \widetilde{X}$	$(au,\sigma)\equiv X_L-X_R$	
Натяжение браны: $\frac{T_p}{T_{p-t}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{lpha'}}, T_1 = \frac{1}{2\pilpha'} \frac{1}{g}$		
Взаимодействие открытой струны с Э!	М-полем: $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}+F_{mn}\partial_{ au}X^{n}=0$ при $\sigma=0,\pi$	
Плотность лагранжиана Борна—Инфе	льда: $\mathcal{L} = -T_p \sqrt{-\det\left(\eta_{mn} + 2\pi \alpha' F_{mn}\right)}$	
Температура Хагедорна: $\frac{1}{\beta_{\rm H}}$	$=kT_{\rm H}=\frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}$	
Температура черной дыры: $k\overline{T}_{ extsf{H}}$	$h = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$	
Энтропия Бекенштейна: $\frac{S_{\mathrm{B}}}{k}$	$=\frac{A}{4\ell_{\rm P}^2}$	
Параметры соответствия АдС/КТП:	$g=rac{1}{4\pi}g_{\mathrm{YM}}^2=rac{\lambda}{4\pi N}, rac{R^4}{lpha'^2}=g_{\mathrm{YM}}^2N=\lambda$	
Струнное действие Полякова:	$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}$	
$G = 6.674 \times 10^{-11} - \frac{M^3}{2}$	$m_{\rm P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{\pi}} = 2,176 \times 10^{-5} {\rm r}$	
$c = 2,998 \times 10^8 \frac{M}{c}$	V G $\hbar c \simeq 197 $ МэВ $\times 10^{-15}$ м	
$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \ \frac{\mathrm{Kr} \cdot \mathrm{M}^2}{\mathrm{c}}$	$m_e c^2 = 0,5110 \text{ M}$ B	
$\ell_{\rm P} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \ { m cm}$	$m_{\rm P}c^2 = 1,221 \times 10^{19}$ ГэВ	