

Оливер О'Рейли

КУРС ДИНАМИКИ для инженеров

Единый подход
к механике Ньютона–Эйлера
и механике Лагранжа



R&C
Dynamics

R&C
Dynamics



Intermediate Dynamics for Engineers

A UNIFIED TREATMENT OF NEWTON-EULER AND LAGRANGIAN MECHANICS

Oliver M. O'Reilly

University of California, Berkeley



Оливер М. О'Рейли

Курс динамики для инженеров

Единый подход к механике Ньютона – Эйлера и механике Лагранжа

Перевод с английского
Ю. В. Колесниченко

Под редакцией
Б. С. Бардина



Москва ♦ Ижевск

2011

УДК 531.7
ББК 22.21
О 652

Перевод и издание книги выполнены в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.

О’Рейли О. М.

Курс динамики для инженеров: единый подход к механике Ньютона – Эйлера и механике Лагранжа. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 504 с.

В этой книге содержится материал, достаточный для проведения двух полных курсов инженерной динамики. В рамках первого курса изучается подход Ньютона – Эйлера, а в рамках второго курса — подход Лагранжа. С использованием некоторых идей из дифференциальной геометрии в книге доказывается эквивалентность этих двух подходов. Кроме того, детально исследуется кинематика и динамика материальных точек и твердых тел. Изложенный материал поясняется многочисленными примерами и задачами, которые хорошо структурированы, имеют широкое применение и содержат в себе элементы численного моделирования.

ISBN 978-5-4344-0017-6

ББК 22.21

© Оливер М. О’Рейли, 2008

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011

This work was originally published in English by Cambridge University Press under the title *Intermediate Dynamics for Engineers: A Unified Treatment of Newton-Euler and Lagrangian Mechanics*. This publication is in copyright. Subject to statutory exception and to the provisions of relevant collective licensing agreements, no reproduction of any part may take place without the written permission of Cambridge University Press.

<http://shop.red.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	xiii
Предисловие	xv
ЧАСТЬ I. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	1
ГЛАВА 1. Кинематика материальной точки	3
1.1. Введение	3
1.2. Системы отсчета	3
1.3. Кинематика материальной точки	5
1.4. Часто используемые системы координат	7
1.5. Криволинейная система координат	10
1.6. Кинематика материальной точки в криволинейной системе координат	16
1.7. Связи	18
1.8. Классификация связей	25
1.9. Заключение	33
Упражнения	33
ГЛАВА 2. Кинетика материальной точки	40
2.1. Введение	40
2.2. Уравнение движения для материальной точки	41
2.3. Работа и мощность	43
2.4. Консервативные силы	44
2.5. Примеры консервативных сил	45
2.6. Реакции связей	48
2.7. Законы сохранения	55
2.8. Динамика материальной точки, находящейся в гравитационном поле	58
2.9. Динамика материальной точки на вращающемся конусе	68
2.10. Ударная связь	72

2.11. Упрощенная модель американских горок	74
2.12. Заключение	80
Задачи	81
ГЛАВА 3. Уравнения движения Лагранжа для материальной точки	87
3.1. Введение	87
3.2. Уравнения движения Лагранжа	88
3.3. Уравнения движения свободной материальной точки	91
3.4. Уравнения Лагранжа в случае наложенных связей	92
3.5. Движение материальной точки на сфере	96
3.6. Немного о геометрии и кинематике материальной точки	99
3.7. Геометрический смысл уравнений движения Лагранжа	103
3.8. Движение материальной точки по спирали	108
3.9. Заключение	114
Задачи	115

ЧАСТЬ II. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК **127**

ГЛАВА 4. Уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек	129
4.1. Введение	129
4.2. Система N материальных точек	130
4.3. Координаты	132
4.4. Связи и реакции связей	134
4.5. Консервативные силы и потенциальные энергии	138
4.6. Уравнения движения Лагранжа	139
4.7. Определение и применение понятия изображающей точки	141
4.8. Лагранжиан	147
4.9. Система связанных материальных точек	148
4.10. Уравнения Лагранжа в канонической форме	152
4.11. Альтернативные принципы механики	158
4.12. Заключение	162
Задачи	162
ГЛАВА 5. Динамика систем материальных точек	166
5.1. Введение	166
5.2. Гармонические осцилляторы	166
5.3. Гантелевидный спутник	173

5.4. Маятник и тележка	177
5.5. Две материальные точки, связанные нерастяжимой нитью	182
5.6. Заключение	188
Задачи	189

ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА **199**

ГЛАВА 6. Тензоры вращения	201
6.1. Введение	201
6.2. Простейшее вращение	202
6.3. Собственно ортогональные тензоры	205
6.4. Производные собственно ортогонального тензора	207
6.5. Эйлерово представление тензора вращения	210
6.6. Теорема Эйлера: тензоры вращения и собственно ортогональные тензоры	217
6.7. Векторы относительной угловой скорости	219
6.8. Углы Эйлера	222
6.9. Другие представления тензора вращения	235
6.10. Производные скалярных функций от тензоров вращений	238
Задачи	241
ГЛАВА 7. Кинематика твердых тел	251
7.1. Введение	251
7.2. Движение твердого тела	251
7.3. Векторы угловой скорости и углового ускорения	256
7.4. Коротационный базис	258
7.5. Три различные оси вращения	260
7.6. Центр масс и количество движения	262
7.7. Кинетические моменты	265
7.8. Тензоры Эйлера и тензоры инерции	266
7.9. Кинетический момент и тензор инерции	271
7.10. Кинетическая энергия	273
7.11. Заключение	275
Задачи	275
ГЛАВА 8. Связи и потенциалы	289
8.1. Введение	289
8.2. Связи	289
8.3. Каноническая функция	294

8.4. Критерии интегрируемости	297
8.5. Силы и моменты, действующие на твердое тело	301
8.6. Реакции связей и их моменты	303
8.7. Потенциальные энергии, консервативные силы и моменты	312
8.8. Заключение	320
Задачи	320
ГЛАВА 9. Кинетика твердого тела	330
9.1. Введение	330
9.2. Уравнения движения твердого тела	330
9.3. Работа и сохранение энергии	332
9.4. Другие выражения для теоремы об изменении кинетического момента	335
9.5. Безмоментное движение твердого тела	338
9.6. Бейсбольный и футбольный мячи	347
9.7. Движение твердого тела с одной закрепленной точкой	351
9.8. Движения катящихся и скользящих сфер	357
9.9. Заключение	361
Упражнения	363
ГЛАВА 10. Уравнения движения Лагранжа для твердого тела	373
10.1. Введение	373
10.2. Конфигурационное многообразие свободного твердого тела	374
10.3. Уравнения движения Лагранжа: первая форма	377
10.4. Задача о движении спутника	382
10.5. Уравнения движения Лагранжа: вторая форма	386
10.6. Уравнения движения Лагранжа: подход II	393
10.7. Катящиеся диски и скользящие диски	395
10.8. Волчки Лагранжа и Пуассона	402
10.9. Заключение	407
Задачи	407
 ЧАСТЬ IV. СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ	 419
ГЛАВА 11. Введение в системы многих тел	421
11.1. Введение	421
11.2. Общие теоремы динамики и уравнения движения Лагранжа	421
11.3. Два тела, соединенные цилиндрическим шарниром	424
11.4. Гироскоп с одной измерительной осью	426

11.5. Заключение	430
Задачи	431
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Основы теории тензоров	439
А.1. Введение	439
А.2. Базисы, альтернаторы и символы Кронекера	439
А.3. Тензорное произведение двух векторов	440
А.4. Тензоры второго ранга	441
А.5. Теорема представления тензоров второго ранга	442
А.6. Функции тензоров второго ранга	445
А.7. Тензоры третьего ранга	449
А.8. Особые тензоры второго ранга	451
А.9. Производные от тензоров	452
Задачи	454
Литература	457
Предметный указатель	479

Книга посвящается моей дочери Анне

Предисловие к русскому изданию

В предлагаемой читателю книге американского профессора Оливера М. О'Рейли дается изложение наиболее содержательных для инженерных приложений разделов теоретической механики. Материал книги охватывает вопросы кинематики и динамики материальной точки, системы материальных точек, твердого тела и системы твердых тел. Данная книга написана на основе многолетнего опыта преподавания автором курса динамики твердого тела. Она существенно отличается от имеющихся учебников по механике, как по методике изложения, так и по комплексу рассмотренных в ней вопросов.

С методической точки зрения отличительной особенностью книги является применение автором единого подхода к выводу уравнений движения механических систем, а также применение аппарата тензорного анализа для изложения вопросов кинематики и динамики твердого тела. Другой характерной особенностью данной книги является большое разнообразие примеров и задач, охватывающих широкий круг вопросов современной механики и иллюстрирующих разработанные к настоящему времени аналитические и численные подходы к решению задач инженерной динамики.

Обширный список литературы, представленный в книге, содержит ссылки, как на классические работы по теоретической механике, так и на работы многих современных авторов. Ссылки на литературу даются по ходу изложения, что, при необходимости, позволит читателю, познакомиться с оригинальными работами и углубить свои знания в интересующих его вопросах. К сожалению, ссылки на учебники и научные труды российских авторов представлены неполно. В этой связи следует упомянуть «Курс теоретической механики» Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина, сыгравший важную роль в подготовке отечественных инженеров, а также замечательный учебник А. П. Маркеева «Теоретическая механика», ориентированный на подготовку студентов в области прикладной математики и механики. Более полный список литературы по многим разбираемым автором задачам можно найти в монографиях А. П. Маркеева «Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника

относительно центра масс» и «Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью».

В подготовке редакции данной книги принимали участие сотрудники кафедры теоретической механики Московского авиационного института: профессора Бардин Б. С., Холостова О. В. и доценты Зародов В. К., Прудников В. В., Сухоручкин Д. А. Мы стремились максимально сохранить оригинальный стиль автора, указывая при этом на замеченные неточности изложения, некоторые спорные утверждения автора или явные разночтения с принятой в русскоязычных учебниках терминологией.

Данная книга рассчитана на широкий круг читателей: студентов, аспирантов, преподавателей вузов.

Предисловие

Работа над этой книгой началась более десяти лет назад, когда мне впервые поручили вести два курса динамики твердого тела. В рамках первого курса мы изучали уравнения движения Лагранжа, а в рамках второго — уравнения Ньютона–Эйлера. Я долго пытался объединить эти два подхода к построению уравнений движения механических систем. По счастливой случайности, в то время один мой коллега, Джим Кейси, проводил исследования замечательных работ Синга [205, 207, 208] и его сотрудников, посвященных этому вопросу. В упомянутых работах частично решается задача объединения подходов Лагранжа и Ньютона–Эйлера. Кейси пошел еще дальше, показав, что уравнения движения для твердого тела, сформулированные в рамках обоих подходов, эквивалентны друг другу [27, 28]. С его результатом несколько перекликается ранняя работа Гринвуда [79], однако доказательство Кейси носит более точный, недвусмысленный характер. По ходу моей книги становится очевидно, что, составляя лекции для своих курсов, я во многом опирался на исследования Кейси, которые были дополнены и расширены. Помимо Кейси, на мою работу повлияли исследования Папаставридиса [169] и Розенберга [182], а также результаты моих собственных исследований динамических систем, полученные в конце 1980-х гг. в аспирантуре при Корнеллском университете. Под руководством Филипа Холмса, Фрэнка Муна, Ричарда Рэнда и Энди Руина я, будучи аспирантом, усвоил, что уравнения движения (часто простых) механических систем, состоящих из материальных точек и твердых тел, могут иметь на удивление сложные свойства.

Эта книга отличается от традиционных учебников по инженерной динамике несколькими аспектами. Во-первых, в ней явным образом демонстрируется эквивалентность уравнений движения Лагранжа и Ньютона–Эйлера. При этом более детально рассматриваются вопросы, связанные с геометрией и криволинейными координатами, чем это принято в аналогичных учебниках. Во-вторых, при изучении вращения твердого тела здесь широко используются тензоры, подобно тому, как это делается в механике сплошных сред. Я считаю, что такой подход позволяет вывести многие фундаментальные результаты, относящиеся к кинематике твердого тела, более понятным образом.

Я постарался привести как можно больше примеров механических систем и ссылок на литературу с самыми последними результатами их исследований. Тем не менее моя книга далеко не такая исчерпывающая, как работы Папаставридиса [169] и Рауса [184, 185]. По ходу книги я довольно много цитирую этих и других замечательных авторов разных статей и книг по динамике, поэтому надеюсь, что заинтересованный читатель сможет без труда продолжить изучение этой полезной темы.

Как пользоваться книгой

В этой книге содержится материал, достаточный для проведения двух полных курсов инженерной динамики. Материалы обоих курсов развиваются по своим собственным траекториям (иногда пересекающимся). В рамках первого курса изучается подход Ньютона – Эйлера. Эта тема раскрывается в следующих главах:

1. Кинематика материальной точки (раздел 1.5 можно опустить)
2. Кинетика материальной точки
 Приложение, посвященное тензорам
6. Тензоры вращения
7. Кинематика твердого тела
8. Связи, накладываемые на движение твердого тела, и потенциалы
9. Кинетика твердого тела
11. Системы многих тел

В рамках второго курса изучается подход Лагранжа. Эта тема раскрывается в следующих главах:

1. Кинематика материальной точки
2. Кинетика материальной точки
3. Уравнения движения Лагранжа для материальной точки
4. Уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек
5. Динамика систем материальных точек
 Приложение, посвященное тензорам
6. Тензоры вращения (особенно раздел 6.8)
7. Кинематика твердого тела

8. Связи, накладываемые на движение твердого тела, и потенциалы
9. Кинетика твердого тела
10. Уравнения движения Лагранжа для твердого тела
11. Системы многих тел

Изучая на втором курсе вращения, можно ограничиться детальным рассмотрением параметризации тензора вращения в углах Эйлера (из шестой главы) и кратким перечнем примеров на динамику твердого тела (из девятой главы).

Почти все задачи в конце глав являются хорошо структурированными; они рекомендуются к самостоятельному решению. К задачам нет ответов, но я постарался сделать так, чтобы читатели всегда смогли получить точное решение задачи. В некоторых задачах есть элементы численного моделирования; такие задачи можно решать с помощью программных пакетов Matlab или Mathematica. Я не сопроводил каждую задачу решением по двум причинам: чтобы читатели поняли, почему так полезно строить систему дифференциальных уравнений для системы, и чтобы они научились визуализировать поведение системы, прогнозируемое моделью. Помимо прочего, я настоятельно рекомендую студентам участвовать по ходу семестра в проектах, которые могли бы помочь им более детально вникнуть в конкретную проблему, например в динамику кельтского камня, полет спортивной летающей тарелки, переориентацию двухспинового спутника. Мои студенты участвуют в таких проектах парами, используя при решении элементы моделирования и анимации; к проектам они приступают после седьмой (из пятнадцати) недели семестра.

Рисунки

Портрет Уильяма Р. Гамильтона, изображенный на рис. 4.6 в подразделе 4.11.3, взят из Королевской ирландской академии в Дублине (Ирландия). За него я благодарен Паурику Демпси — руководителю отдела по коммуникациям и связям с общественностью в этом институте.

Благодарности

В основе книги лежат лекции и упражнения из двух курсов динамики (ME170, Engineering Mechanics III и ME175, Intermediate Dynamics), которые я преподаю на кафедре инженерной механики в Калифорнийском университете (г. Беркли) последние десять лет. Одна из целей этих курсов — обучить выпускников и начинающих аспирантов навыкам инженерной механики в области динамики твердого тела. Можно сказать, что эта

книга является продолжением другой моей книги «Инженерная динамика: начальный курс», которая была опубликована в 2001 году издательством Springer-Verlag.

Мне посчастливилось услышать много интересных замечаний и вопросов от моих студентов и получить весомую помощь от некоторых моих ассистентов. Объем книги не позволяет упомянуть всех студентов и ассистентов, но я рад, что могу назвать хотя бы некоторых из них: Джошуа П. Коаплин, Нур Адила Фарук Сенан, Дэвид Гулик, Монир Хелу, Ева Кансо, Пэтч Кесслер, Натан Кинкейд, Тодд Лодердейл, Генри Лопез, Дэвид Муди, Том Норденхольц, Дзеюнь Дзе Онг, Себастьян Пейен, Брайан Спирс, Филип Дж. Стефану, Менг Хоу Тан, Питер Варади и Стефан Верге. Также я благодарен Чету Вигнесу за внимательное прочтение первого варианта моей книги.

Мне помогли и другие специалисты, каждый в конкретном вопросе. Например, рисунок 9.1 был составлен Пэтчем Кесслером. Генри Лопез (бакалавр педагогических наук с 2006 года) помог мне с моделью американских горок и моделированием их уравнений движения. Профессор Крис Холл из технического вуза штата Вирджиния дал мне ссылку [118] на решение Лагранжа к задаче о динамике спутника. Профессор Ричард Монгомери из Калифорнийского университета в г. Санта-Круз обсуждал вместе со мной сложные решения, имеющие форму восьмерки, к задаче трех тел. Профессор Глен Нибур из Университета Нотр-Дам указал ссылки на значимые работы, посвященные парадоксу Кодмана, а профессор Гарольд Судак из Городского университета Нью-Йорка сделал ценные замечания, касающиеся китайского волчка. Профессоры Дональд Гринвуд и Джон Папаставридис внимательно прочли почти готовую версию книги, дали конструктивные советы и сделали полезные поправки, за что я им весьма признателен.

Большая часть книги написана в последние 10 лет в Университете штата Калифорния (г. Беркли). Огромная библиотека этого университета послужила бесценным источником информации, собранной по этой теме более чем за 300 лет. Я очень благодарен за помощь работникам этой библиотеки, а также налогоплательщикам за их поддержку Калифорнийского университета.

По ходу книги встречаются ссылки на мои собственные исследования в области динамики твердого тела. Помимо уже названных студентов, следует упомянуть Джима Кейси и Аруна Шриниваса, с которыми мне посчастливилось изучать некоторые аспекты уравнений движения твердого тела. Мою признательность отражают многочисленные цитирования их работ.

Книга не была бы опубликована без содействия и поддержки Питера Гордона, работающего в издательстве Кембриджского университета, а если бы Виктория Дэнахи не отредактировала мою рукопись, в ней было бы гораздо больше ошибок. Несмотря на помощь некоторых других корректоров, в книге неизбежно присутствует ряд типографических и технических ошибок — я один несу за них полную ответственность. Я был бы очень рад, если бы читатели смогли указать мне на них.

Часть I

Динамика материальной точки

ГЛАВА 1

Кинематика материальной точки

1.1. Введение

Одна из основных целей — научить читателя моделировать физическую систему как совокупность материальных точек или твердых тел и проводить исследование выбранной модели. Для этого необходимо владеть многими техническими навыками и методами. В первую очередь следует уметь корректно описывать кинематику материальной точки, иначе освоение дальнейшего материала книги может оказаться бессмысленным.

Многое из того, о чем говорится в первой главе, неоднократно используется далее по ходу книги. В начале главы приводится обзор систем координат для частицы, движущейся в трехмерном пространстве. После этого мы переходим к обсуждению криволинейных систем координат. К последним относятся все известные нам системы, поэтому данный материал полезен и во многих других контекстах. По завершении обсуждения систем координат и их применения к движению материальной точки читатели научатся получать выражения для векторов градиента и ускорения в произвольной системе координат.

Кроме того, большое внимание в настоящей главе уделяется связям, ограничивающим движение материальных точек. В рамках менее углубленных курсов динамики этот вопрос тесно связывают с вопросом разумного выбора подходящей системы координат. В таких случаях, как правило, накладывают связь на радиус-вектор точки. В нашей книге мы рассматриваем также изменяющиеся во времени связи, накладываемые на вектор скорости материальной точки. Очевидно, что большинство читателей никогда не решали задач с наложением связей и не использовали криволинейных координат, поэтому мы надеемся, что наша книга окажется им полезной.

1.2. Системы отсчета

Описывая кинематику материальных точек и твердых тел, мы предполагаем существование пространства, образованного тремя взаимно перпен-

дикулярными осями, пересекающимися в точке P . Система осей и точка P составляют систему отсчета. Кроме того, в механике Ньютона предполагается существование инерциальной системы отсчета, в которой точка P движется с постоянной скоростью¹.

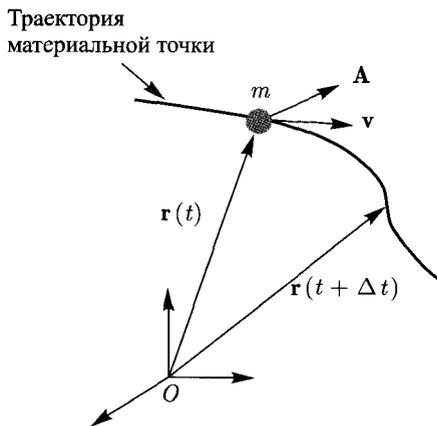


Рис. 1.1. Траектория движения точки в пространстве \mathbb{E}^3 . На рисунке показан радиус-вектор точки, вектор скорости и вектор секторной скорости точки в момент времени t , а также радиус-вектор этой точки в момент времени $t + \Delta t$

В зависимости от решаемой задачи часто бывает удобно идеализировать инерциальную систему отсчета. Так, при решении баллистических задач пренебрегают вращением Земли и поступательным движением ее центра, а некоторую точку E на поверхности Земли считают неподвижной. В этом случае точка E и три ортонормированных вектора, исходящие из этой точки (т. е. неподвижные относительно Земли), приближенно составляют инерциальную систему отсчета. Такая приближенная инерциальная система отсчета, однако, не подходит для объяснения известного эксперимента с маятником Фуко. В рамках своего остроумного опыта, впервые проведенного в 1851 году, Фуко продемонстрировал вращение Земли на примере движения маятника². Для объяснения результатов эксперимента достаточно допустить существование инерциальной системы отсчета, точка P которой совпадает с неподвижным центром вращающейся Земли, а оси не вращаются вместе с Землей. Приведем другой пример использо-

¹Необходимо еще добавить, что оси этой системы движутся поступательно. — Прим. ред.

²Обсуждение эксперимента и объяснение его результатов можно найти в работах [62, 138, 207]. Из других достижений Фуко отметим, что именно он ввел термин «гироскоп» [215].

вания идеализированной системы отсчета. При описании вращения Земли вокруг Солнца центр S Солнца считают, как правило, неподвижным, поэтому в качестве точки P берут именно центр S . В этом случае точка S является началом инерциальной системы отсчета. При решении других задач небесной механики в качестве точки P инерциальной системы отсчета берут центр масс Солнечной системы. Осями такой системы координат могут служить три взаимно перпендикулярные оси, определяемые положением конкретных неподвижных звезд [80].

Для наших целей достаточно допустить существование неподвижной точки O и системы трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в этой точке (см. рис. 1.1). Оси выбираются так, чтобы соответствовать базисным векторам декартовой системы координат. Очевидно, что эти оси и точка O составляют инерциальную систему отсчета. Пространство, занимаемое этой системой, является трехмерным. Далее будем называть его трехмерным евклидовым пространством и обозначать через \mathbb{E}^3 . В пространстве \mathbb{E}^3 можно задавать векторы и вычислять их скалярные произведения.

1.3. Кинематика материальной точки

Пусть материальная точка массы m движется в пространстве \mathbb{E}^3 . Радиус-вектор точки, проведенный из неподвижного центра O , обозначим через \mathbf{r} (см. рис. 1.1). В механике этот вектор обычно рассматривают как функцию времени t и записывают следующим образом: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Векторы скорости \mathbf{v} и ускорения \mathbf{a} материальной точки определяются соответственно как первая и вторая производная радиуса-вектора \mathbf{r} по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Обратите внимание, что векторы \mathbf{v} и \mathbf{a} являются векторами абсолютной скорости и ускорения, так как радиус-вектор \mathbf{r} задается относительно неподвижной точки. Вектор скорости равен по определению следующему пределу:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Производную по времени также будем обозначать точкой: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$.

Помимо вышеназванных кинематических величин, есть еще две: количество движения \mathbf{G} частицы, равное

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v},$$

и кинетический момент \mathbf{H}_O частицы относительно точки O , равный

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Покажем, что вектор кинетического момента связан с вектором секторной скорости \mathbf{A} .

При решении задач небесной механики за величину вектора секторной скорости берут, как правило, скорость, с которой радиус-вектор \mathbf{r} частицы заметает площадь при вращении вокруг неподвижной точки O (см., например, работу Мултона [150]). Чтобы найти выражение для расчета этого вектора, рассмотрим радиус-вектор точки в моменты времени t и $t + \Delta t$. Эти два радиус-вектора задают параллелограмм площадью $\|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)\|$ (см. рис. 1.1), что в два раза превышает площадь, заметаемую радиус-вектором за время Δt . Вычисляя предел вектора $\frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)}{2\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ и учитывая, что $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t) = 0$, приходим к следующему выражению для вектора секторной скорости $\mathbf{A}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)}{2\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (1.1)$$

Вектор \mathbf{A} играет важную роль при решении ряда задач механики, в которых остается неизменным либо вектор кинетического момента \mathbf{H}_O , либо одна из его составляющих. Другие примеры использования вектора \mathbf{A} рассматриваются в упражнениях в конце главы.

Наконец, вспомним определение кинетической энергии T материальной точки:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Перечисленные выше кинематические величины не зависят от выбора используемой системы координат в пространстве \mathbb{E}^3 . Однако при решении большинства задач приходится рассчитывать эти величины применительно к выбранной системе координат. Этим мы сейчас и займемся.

1.4. Часто используемые системы координат

В зависимости от поставленной задачи для пространства \mathbb{E}^3 можно выбрать какую-либо подходящую систему координат. Наиболее популярными и широко используемыми являются: декартова система координат $\{x = x_1, y = x_2, z = x_3\}$, цилиндрическая система координат $\{r, \theta, z\}$ и сферическая система координат $\{R, \phi, \theta\}$. Все они могут рассматриваться как частные случаи криволинейной системы координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ пространства \mathbb{E}^3 . Криволинейную систему координат мы рассмотрим позднее в этой главе.

Декартова система координат

Для декартовой системы координат зададим набор правых ортонормированных векторов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, тогда произвольный вектор \mathbf{b} пространства \mathbb{E}^3 будет иметь следующее представление:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{E}_i.$$

Для радиуса-вектора \mathbf{r} материальной точки получаем:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{E}_i,$$

где $\{x_1, x_2, x_3\}$ — декартовы координаты этой точки. Так как величина и направление каждого из векторов \mathbf{E}_i не изменяются, их производные по времени равны нулю: $\dot{\mathbf{E}}_i = 0$.

Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты $\{r, \theta, z\}$ можно задать через декартовы координаты посредством следующих формул:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad z = x_3,$$

где $\theta \in [0, 2\pi]$. При условии, что $r \neq 0$, можно обратить данные выражения и прийти к соотношениям:

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad x_3 = z.$$

Другими словами, для каждого заданного набора (x_1, x_2, x_3) , где $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, существует единственный набор (r, θ, z) . Если же $r = 0$, координата θ является неопределенной.

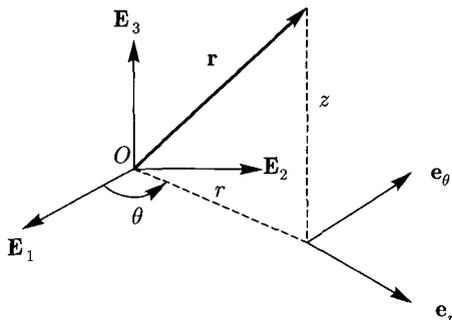


Рис. 1.2. Цилиндрические координаты r, θ и z

Пусть \mathbf{r} — заданный радиус-вектор материальной точки. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3 = \\ &= r(\cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2) + z \mathbf{E}_3 = \\ &= r \mathbf{e}_r + z \mathbf{E}_3,\end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_r = \cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2$ (рис. 1.2).

Определим единичные векторы $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{e}_r = \cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = \cos(\theta) \mathbf{E}_2 - \sin(\theta) \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{E}_3.$$

Заметим, что $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$, тогда как $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$. Следует также убедиться, что набор $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ задает правый ортонормированный базис пространства \mathbb{E}^3 .³

Сферическая система координат

Сферические координаты $\{R, \phi, \theta\}$ можно задать через декартовы координаты посредством следующих формул перехода:

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \right),$$

³Базис $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ считается правым, если $\mathbf{p}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) > 0$, и ортонормированным, если длина каждого из векторов \mathbf{p}_i равна 1 и при этом все они являются взаимно перпендикулярными: $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$ и $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$.

где $\theta \in [0, 2\pi)$ и $\phi \in (0, \pi)$. При условии, что $\phi \neq 0$ или $\phi \neq \pi$, можно обратить эти формулы, получая

$$x_1 = R \cos(\theta) \sin(\phi), \quad x_2 = R \sin(\theta) \sin(\phi), \quad x_3 = R \cos(\phi).$$

Для рассматриваемого радиус-вектора \mathbf{r} можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3 = \\ &= R \sin(\phi) (\cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2) + R \cos(\phi) \mathbf{E}_3 = \\ &= R \mathbf{e}_R, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_R = \sin(\phi) \cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\phi) \sin(\theta) \mathbf{E}_2 + \cos(\phi) \mathbf{E}_3$ (рис. 1.3).

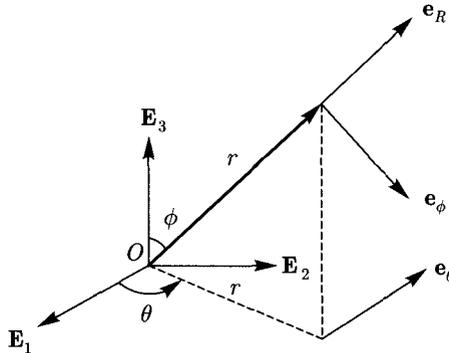


Рис. 1.3. Сферические координаты ϕ и θ

Для дальнейшего нам понадобится задать правый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta\}$. Определим его следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Чтобы установить взаимосвязь между этими и ранее введенными векторами, запишем сначала промежуточные соотношения:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

С помощью этих выражений можно осуществлять переход между тремя различными базисами.

Как и в случае с цилиндрической системой координат, базисные векторы для сферической системы координат зависят от координат выбранной точки. Так, если допустить, что θ и ϕ — функции времени, то после ряда тождественных преобразований с использованием (1.2) мы получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_R \\ \dot{\mathbf{e}}_\phi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & \dot{\theta} \sin(\phi) \\ -\dot{\phi} & 0 & \dot{\theta} \cos(\phi) \\ -\dot{\theta} \sin(\phi) & -\dot{\theta} \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Заметим, что соотношения (1.3) имеют интересную форму: фигурирующая в них матрица является кососимметричной. В дальнейшем при рассмотрении вращений и их производных по времени мы неоднократно встретимся с подобного рода матрицами. Позже мы достаточно легко сможем установить справедливость выражения (1.3).

1.5. Криволинейная система координат

Описанные выше системы координат можно рассматривать как частные случаи криволинейной системы координат. В этом разделе внимание концентрируется на векторном исчислении, связанном с криволинейными системами координат. Последние используются практически во всех областях механики, поэтому представленный здесь материал имеет широкое применение. Наше изложение базируется, главным образом, на классических работах, поэтому аналогичный материал вы можете найти во многих других учебниках, посвященных тензорному исчислению. Среди них наиболее близкой нашей книге по духу (и используемым обозначениям) является работа Симмондса [198]; также мы бы порекомендовали работы [139, 201].

Рассмотрим некоторую криволинейную систему координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, координаты которой определяются следующими функциями:

$$\begin{aligned} q^1 &= \hat{q}^1(x_1, x_2, x_3), \\ q^2 &= \hat{q}^2(x_1, x_2, x_3), \\ q^3 &= \hat{q}^3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть функции \hat{q}^i являются локально обратимыми. Тогда

$$\begin{aligned}x_1 &= \hat{x}_1(q^1, q^2, q^3), \\x_2 &= \hat{x}_2(q^1, q^2, q^3), \\x_3 &= \hat{x}_3(q^1, q^2, q^3).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Условие обратимости функции предполагает, что каждому набору криволинейных координат произвольной точки в пространстве \mathbb{E}^3 соответствует единственный набор декартовых координат этой же точки, и наоборот. Обычно условие обратимости функции нарушается в нескольких точках пространства \mathbb{E}^3 . Например, координата θ цилиндрической системы координат не может быть однозначно определена в случае, когда $x_1^2 + x_2^2 = 0$, так как заданное множество точек совпадает с осью x_3 .

Пусть рассматриваемые функции обратимы. Зафиксируем значение одной из криволинейных координат, скажем q_0^1 , и найдем значения x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющие уравнению

$$q_0^1 = \hat{q}^1(x_1, x_2, x_3).$$

Множество всех точек, имеющих такие декартовы координаты, образует координатную поверхность q^1 (рис. 1.4). Двигаясь по этой поверхности, можно заметить, что координаты q^2 и q^3 изменяются. Кривые, принадлежащие координатной поверхности q^1 и получаемые при изменении координаты q^2 при фиксированном значении q^3 , называются координатными кривыми q^2 .

В общем случае получаем: поверхность, соответствующая постоянно-му значению координаты q^j , называется координатной поверхностью q^j . Аналогично, поверхность, получаемая изменением координаты q^k при сохранении двух других криволинейных координат, называется координатной кривой q^k .

Ковариантные векторы

По-прежнему, допуская условие обратимости функции, мы можем выразить радиус-вектор \mathbf{r} произвольной материальной точки как функцию криволинейных координат:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{E}_i.$$

Определим ковариантные базисные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и \mathbf{a}_3 по формулам:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial q^i} \mathbf{E}_k.$$

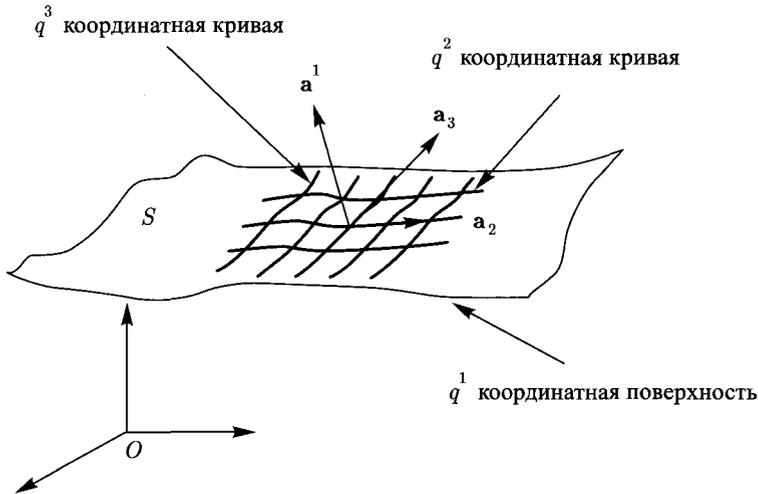


Рис. 1.4. Координатная поверхность q^1 , обозначенная символом S . В некоторой точке, принадлежащей этой поверхности, вектор \mathbf{a}^1 перпендикулярен к поверхности, а векторы \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 направлены по касательной к ней. Координатная поверхность q^1 состоит из кривых, соответствующих постоянному значению q^2 и постоянному значению q^3

Когда мы берем производную по q^2 , то с математической точки зрения мы фиксируем значения координат q^1 и q^3 . Следовательно, направление вектора \mathbf{a}_2 совпадает с направлением роста координаты q^2 . В результате вектор \mathbf{a}_2 оказывается касательным к координатной кривой q^2 . Таким образом, вектор \mathbf{a}_i направлен по касательной к координатной кривой q^i .

Заметим, что взаимосвязь между ковариантными базисными векторами и базисными векторами в декартовой системе координат можно выразить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q^1} \\ \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q^2} \\ \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q^3} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q^3} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Попробуйте записать аналогичное матричное выражение для разных случаев криволинейной системы координат, например для цилиндрической системы координат.

Контравариантные векторы

В криволинейных системах координат существует еще один набор базисных векторов: $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. Они называются контравариантными базисными векторами. Одним из возможных способов задания контравариантных базисных векторов является:

$$\mathbf{a}^1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{q}^1}{\partial x_i} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{a}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{q}^2}{\partial x_i} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{a}^3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{q}^3}{\partial x_i} \mathbf{E}_i.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a}^k = \nabla q^k.$$

С геометрической точки зрения вектор \mathbf{a}^i перпендикулярен к координатной поверхности q^i . Но, как и в случае с ковариантными базисными векторами, контравариантные базисные векторы не обязательно являются единичными векторами и могут не образовывать ортонормированный базис в пространстве \mathbb{E}^3 . Используя цепное правило дифференцирования сложных функций, можно показать, что

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i,$$

где δ_j^i — дельта Кронекера. Известно, что $\delta_j^i = 1$ при $i = j$ и $\delta_j^i = 0$ при $i \neq j$ (см. приложение). Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно⁴.

Ковариантные и контравариантные составляющие вектора

Поскольку наборы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ и $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ образуют базисы пространства \mathbb{E}^3 , любой вектор \mathbf{b} можно представить линейной комбинацией каждого из этих наборов базисных векторов:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{a}_i = \sum_{k=1}^3 b_k \mathbf{a}^k.$$

Составляющие b^i называются контравариантными, а составляющие b_k — ковариантными. Имеем:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_i = \left(\sum_{k=1}^3 b_k \mathbf{a}^k \right) \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{k=1}^3 b_k \delta_i^k = b_i,$$

⁴Отправной точкой в доказательстве служит тот факт, что $\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_k^j$.

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^i = \left(\sum_{k=1}^3 b^k \mathbf{a}_k \right) \cdot \mathbf{a}^i = \sum_{k=1}^3 b^k \delta_k^i = b^i.$$

Важно отметить, что в общем случае $b^k \neq \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_k$, так как скалярное произведение $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$ не обязательно равняется δ_k^i .

Рассмотрим более подробно тривиальный случай, когда $x_i = q^i$. Для радиус-вектора имеем: $\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{E}_k$. Следовательно, $\mathbf{a}_i = \mathbf{E}_i$. Кроме того, $\mathbf{a}^i = \mathbf{E}_i$, откуда приходим к выводу, что в рассматриваемом случае ковариантный и контравариантный базисные векторы равны.

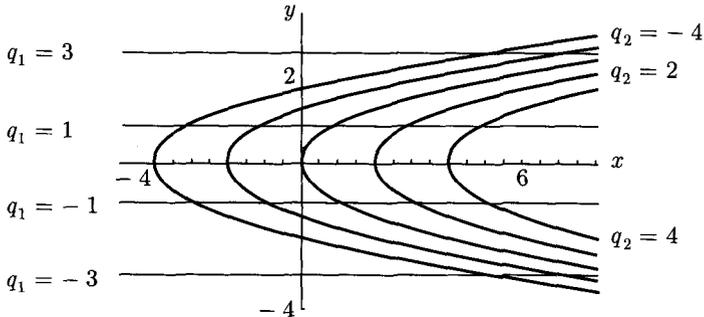


Рис. 1.5. Проекция координатных поверхностей q^1 и q^2 системы координат (1.6) на плоскость xy

Пример

Несмотря на то, что выше мы уже встречались с тремя примерами криволинейных систем координат, будет полезно затронуть еще один пример, на этот раз с неортогональными базисными векторами. Рассмотрим следующую систему координат трехмерного евклидова пространства:

$$q^1 = y, \quad q^2 = x - y^2, \quad q^3 = z, \quad (1.6)$$

где $x = x_1, y = x_2$ и $z = x_3$ — декартовы координаты. На рис. 1.5 показаны соответствующие проекции координатных поверхностей q^1 и q^2 на плоскость xy .

После небольших преобразований системы уравнений (1.6) легко видеть, что $x = q^2 + (q^1)^2$ и $y = q^1$. Тогда для радиуса-вектора получим:

$$\mathbf{r} = (q^2 + (q^1)^2) \mathbf{E}_1 + q^1 \mathbf{E}_2 + q^3 \mathbf{E}_3.$$

Беря производные от этого выражения по q^1, q^2 и q^3 , приходим к соотношениям:

$$\mathbf{a}_1 = 2q^1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Данные векторы соответствуют ковариантным базисным векторам. Беря градиент по q^i , получаем контравариантные базисные векторы:

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{E}_1 - 2q^1 \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{E}_3.$$

Заметим, что $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2 = -2q^1 \neq 0$ и что векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}^2 не обязательно являются единичными. В качестве иллюстрации на рис. 1.6 изображена координатная кривая q^1 . Вектор \mathbf{a}_1 направлен по касательной к этой кривой, а векторы \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 перпендикулярны к ней. Чтобы подчеркнуть, что вектор \mathbf{a}_1 не обязательно параллелен вектору \mathbf{a}^1 , на рисунке также показана координатная поверхность q^1 . В качестве упражнения нарисуйте самостоятельно векторы \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 , касательные к координатной поверхности q^1 .

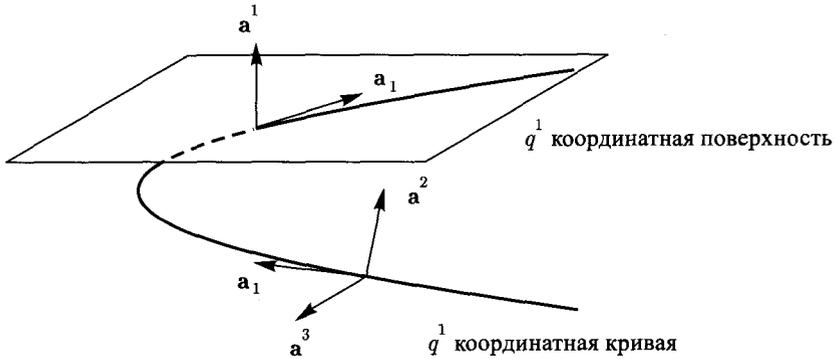


Рис. 1.6. Примеры векторов, направленных по нормали (\mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3) и по касательной (\mathbf{a}_1) к координатной кривой q^1 . Обратите внимание, что вектор \mathbf{a}^1 перпендикулярен к координатной поверхности q^1 , но не параллелен вектору \mathbf{a}_1

Некоторые пояснения относительно производных

В книге часто будут использоваться некоторые частные производные функции $\Phi(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3, t)$. Беря, например, частную производную от этой функции по q^2 , мы подразумеваем, что t, q^1, q^3 и \dot{q}^k — константы. Аналогичное допущение мы делаем и тогда, когда берем частные производные

от этой функции по скоростям \dot{q}^j и времени t . Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial q^k}{\partial q^j} = \delta_j^k, \quad \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^j} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial q^j} = 0 \quad (1.7)$$

и

$$\frac{\partial q^k}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^k, \quad \frac{\partial t}{\partial \dot{q}^j} = 0. \quad (1.8)$$

Во всех этих уравнениях индексы j и k принимают значения от 1 до 3. Первое уравнение из (1.7) мы уже использовали при расчете \mathbf{a}_i .

Следует различать между собой производные $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$. Для первой предполагается, что q^i и \dot{q}^i — функции времени, тогда как для второй предполагается, что их значения постоянны:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^k} \frac{d^2 q^k}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Рассмотрим, например, функцию

$$\Phi = q^1 + (\dot{q}^3)^2 + 10t.$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^3} = 2\dot{q}^3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 10, \quad \dot{\Phi} = \dot{q}^1 + 2\dot{q}^3\ddot{q}^3 + 10.$$

Из этого примера легко видеть, что $\dot{\Phi} \neq \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

1.6. Кинематика материальной точки в криволинейной системе координат

Найдем выражения для радиус-вектора материальной точки, векторов ее скорости и ускорения в криволинейной системе координат. Для радиуса-вектора имеем⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3 = \\ &= r \mathbf{e}_r + z \mathbf{E}_3 = \\ &= R \mathbf{e}_R = \\ &= \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{E}_i. \end{aligned}$$

⁵Ошибочно предполагать, что $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 q^i \mathbf{a}_i$.

Дифференцируя эти выражения, находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \dot{x}_1 \mathbf{E}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{E}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{E}_3 = \\
 &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{E}_3 = \\
 &= \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + R \sin(\phi) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Обратите внимание, насколько простым оказывается выражение для \mathbf{v} в терминах ковариантных базисных векторов. Если в произвольной криволинейной системе координат взять радиус-вектор точки как функцию координат q^1, q^2 и q^3 , продифференцировать ее и сравнить полученный результат с выражением $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i$, то мы легко сможем выделить ковариантные базисные векторы. Так, например, анализируя вторую строчку уравнения (1.9), можно заметить, что для цилиндрической системы координат справедливы равенства $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{a}_2 = r \mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3$.

Еще раз дифференцируя (1.9), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \ddot{x}_1 \mathbf{E}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{E}_2 + \ddot{x}_3 \mathbf{E}_3 = \\
 &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{E}_3 = \\
 &= (\ddot{R} - R \dot{\phi}^2 - R \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_R + (R \ddot{\phi} + 2 \dot{R} \dot{\phi} - R \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\phi + \\
 &\quad + (R \sin(\phi) \ddot{\theta} + 2 \dot{R} \dot{\theta} \sin(\phi) + 2 R \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi)) \mathbf{e}_\theta = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \ddot{q}^i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q^j}.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы получить последнее выражение для \ddot{r} , следует учесть, что \mathbf{a}_i зависит от криволинейных координат, которые, в свою очередь, являются функциями времени, поэтому $\dot{\mathbf{a}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial q^i} \dot{q}^i$.

Попробуйте самостоятельно получить выражения для количества движения \mathbf{G} и кинетического момента \mathbf{H}_O в различных системах координат. Кинетическая энергия T частицы, выраженная в криволинейных координатах, имеет довольно элегантную и красивую запись:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \\
 &= \frac{m}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \mathbf{a}_k \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{m}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (1.10)$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i.$$

Попробуйте также рассчитать a_{ik} в сферических координатах, а затем, используя выражение $T = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{m}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$, доказать, что

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 \right).$$

В упражнениях, приведенных в конце главы, показано соответствующее выражение в других системах координат.

1.7. Связи

Связь — это кинематическое ограничение, накладываемое на движение материальной точки. Связи используются при решении задач на движение материальной точки в трех случаях: как упрощающие допущения, в случае предопределенного движения либо при наличии любых жестких соединений. Связи, ограничивающие движение материальной точки, в значительной степени определяют выбор системы координат, используемой для исследования движения материальной точки. В этом разделе рассматриваются простейшие связи, накладываемые на движение материальной точки. Позднее они будут классифицированы нами как интегрируемые.

Классические примеры

Рассмотрим четыре механические системы, изображенные на рис. 1.7. Первая из них — это сферический маятник. Здесь материальная точка массы m соединена жестким стержнем длины L_0 с неподвижной точкой O . На движение точки в этой системе накладывается связь, которая может быть записана как

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_R = L_0.$$

Дифференцируя это уравнение, мы видим, что вектор скорости удовлетворяет соотношению $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_R = 0$. Вторая механическая система представляет собой плоский маятник. Здесь так же, как и в предыдущем случае, материальная точка крепится жестким стержнем длины L_0 к неподвижной

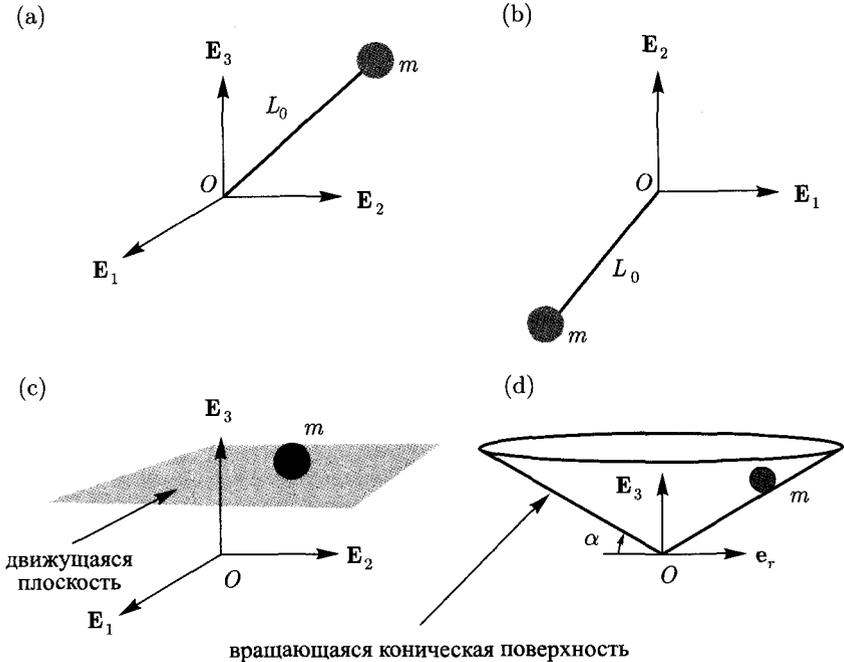


Рис. 1.7. Четыре механические системы, в которых на движение материальной точки накладываются связи: (а) сферический маятник, (б) плоский маятник, (с) материальная точка, движущаяся по плоскости и (д) материальная точка, движущаяся по поверхности вращающегося конуса

точке O , и, кроме того, предполагается, что материальная точка движется в вертикальной плоскости. Уравнения связей в этом случае будут иметь вид

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r = L_0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, мы видим, что вектор скорости материальной точки имеет лишь одну составляющую — в направлении \mathbf{e}_θ , тогда как $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_3 = 0$. Третья механическая система представляет собой материальную точку, движущуюся по горизонтальной поверхности, которая, в свою очередь, движется с вектором скорости $\dot{f}(t)\mathbf{E}_3$. На движение частицы в этом случае накладывается связь

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 = f(t).$$

И наконец, четвертая механическая система состоит из материальной точки, движущейся по поверхности вращающегося конуса. Связь, накладываемая здесь на движение материальной точки, легче всего описывается в сферической системе координат:

$$\phi + \alpha(t) - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Для каждой из рассмотренных механических систем мы выбрали такую систему координат, в которой легче всего описываются связи, накладываемые на движение материальной точки.

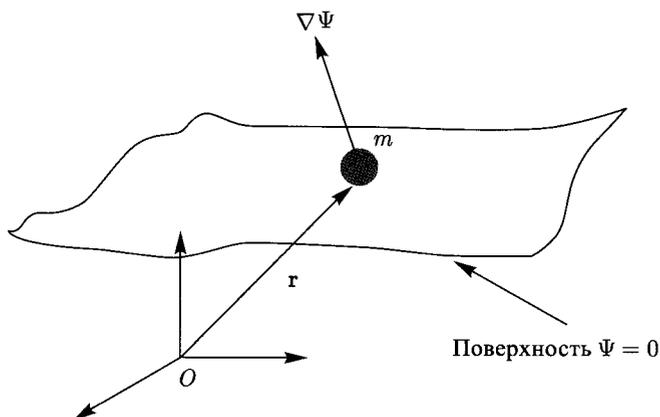


Рис. 1.8. Материальная точка, движущаяся по произвольной поверхности $\Psi = 0$. В этом случае на движение материальной точки накладывается единственная связь

Движение материальной точки по поверхности

Рассмотрим общий случай — движение материальной точки по некоторой поверхности. Используя гладкую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$, можно допустить, что связь, ограничивающая движение материальной точки, выражается в стандартной (канонической) форме:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

В каждый момент времени это уравнение связи можно рассматривать как единственное условие, накладываемое на три независимые декартовы координаты материальной точки. Следовательно, условие $\Psi = 0$ задает двумерную поверхность (рис. 1.8).

Единичный вектор нормали \mathbf{n} к данной поверхности параллелен градиенту $\nabla\Psi = \text{grad}(\Psi)$ (см. рис. 1.8). В зависимости от выбранной системы координат вектор $\nabla\Psi$ может быть записан по-разному:

$$\begin{aligned}\nabla\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \mathbf{E}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i = \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \mathbf{E}_3 = \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R \sin(\phi)} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Обратите внимание, насколько простой вид имеет выражение для градиента в криволинейной системе координат⁶.

Дифференцируя функцию Ψ , мы получаем уравнение связи, накладываемое на вектор скорости:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Стоит заметить, однако, что если \mathbf{r} удовлетворяет уравнению связи, то $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$ и $\dot{\Psi} = 0$. Значит, из условия $\Psi = 0$ следует, что вектор скорости удовлетворяет уравнению связи

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0.$$

Полученный результат играет важную роль при изучении вопросов, связанных с механической энергией реакций связи. Эти вопросы будут рассмотрены нами позднее.

Движение материальной точки вдоль кривой

Рассмотрим теперь более сложный случай — движение материальной точки вдоль некоторой кривой. Эту кривую можно описать как пересече-

⁶При выводе этого выражения мы учли, что $\dot{\Psi}(q^1, q^2, q^3) = \nabla\Psi \cdot \mathbf{v}$ и $\dot{\Psi}(q^1, q^2, q^3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Psi}{\partial q^i} \dot{q}^i$. Подставляя вместо \mathbf{v} соответствующее выражение и приравнявая правые части, мы получаем вторую формулу из (1.11).

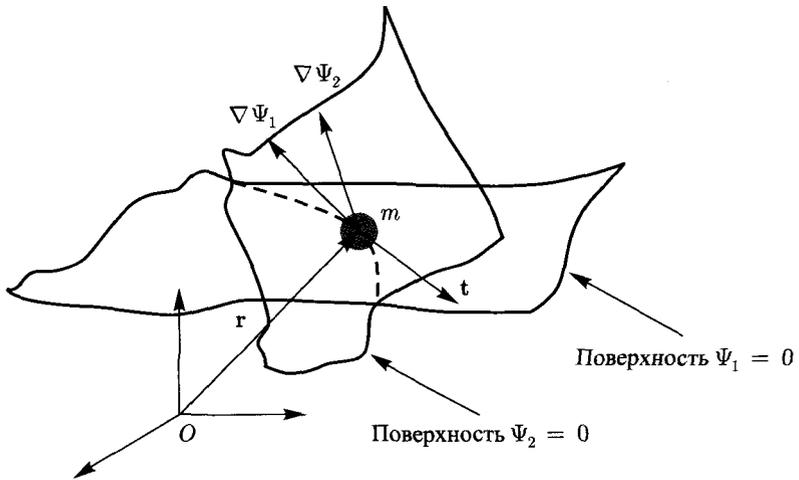


Рис. 1.9. Материальная точка, на движение которой накладываются две связи. Пунктирная линия — линия пересечения поверхностей $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$, а вектор t — это единичный касательный вектор к этой кривой

ние двух поверхностей. Используя полученные выше результаты, мы можем определить условие, при котором материальная точка движется вдоль кривой, двумя (одновременно удовлетворяющимися) уравнениями связи:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Psi_2(\mathbf{r}, t) = 0$$

(рис. 1.9). Здесь предполагается, что нормали к двум поверхностям, проведенные из точки их пересечения, не параллельны друг другу: $\nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 \neq 0$. Следовательно, две связи $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$ являются независимыми.

Для заданных функций Ψ_1 и Ψ_2 легко получить выражения для векторов нормали к рассматриваемой кривой. Заметим, что уравнения связей, накладываемых на вектор скорости, строятся на основе соответствующего результата для случая одной связи:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Если кривая неподвижна, то Ψ_1 и Ψ_2 не зависят явно от времени. В этом случае с помощью выражений (1.12) можно показать, что вектор \mathbf{v} направлен по касательной к этой кривой.

Заданное движение материальной точки

Заданное движение материальной точки опишем как случай, в котором материальная точка совпадает с точкой пересечения трех заданных поверхностей. Другими словами, на материальную точку накладываются три связи:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Psi_2(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Psi_3(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Эти три связи считаются независимыми, поэтому соответствующие им нормальные векторы, проведенные из точки пересечения поверхностей, образуют базис пространства \mathbb{E}^3 :

$$\nabla\Psi_3 \cdot (\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2) \neq 0.$$

Три условия $\Psi_i = 0$ могут рассматриваться как три уравнения, определяющие изменение трех составляющих радиус-вектора \mathbf{r} .

К ситуациям, в которых на материальную точку накладываются три связи, относятся в первую очередь следующие: 1) движение материальной точки полностью контролируется и 2) на материальную точку действует сила трения покоя, поэтому она по отношению к кривой или поверхности остается неподвижной.

Координаты и связи

Все рассмотренные выше связи, накладываемые на движение материальной точки, задавались при помощи уравнений поверхностей, в которых происходило движение данной точки. Эти поверхности могут быть заданы в рамках некоторой системы координат пространства \mathbb{E}^3 . В зависимости от выбора системы координат уравнение поверхностей и, следовательно, уравнения связи имеют разный вид. Так, например, если движение материальной точки ограничено неподвижной плоскостью, то наиболее удобным будет выбор декартовой системы координат с началом в точке O , такой что уравнение связи будет иметь простой вид $x_3 = \text{const}$. Аналогично если движение материальной точки ограничено поверхностью сферы, то очевидным выбором будет сферическая система координат.

Чем сложнее поверхности, по которым происходит движение рассматриваемой точки, тем сложнее выбрать подходящую систему координат. Заметим, однако, что поверхности $\Psi(\mathbf{r}) = 0$, с которыми мы имеем дело в рамках настоящей книги, можно описать в подходящей криволинейной системе координат простым уравнением $q^3 = \text{const}$. Аналогичным образом можно задать движущуюся поверхность $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$ уравнением $q^3 = f(t)$, где f — функция времени. Рассмотрим, к примеру, движение материальной

точки по поверхности сферы известного радиуса $R_0(t)$. Уравнение связи в этом случае будет иметь вид:

$$R = R_0(t).$$

В данном примере целесообразным является выбор сферической системы координат.

И снова классические примеры

Вернемся к четырем механическим системам, изображенным на рис. 1.7. Проверим, что во всех этих случаях на движение материальной точки накладывается одна или более связей вида $\Psi = 0$. Для сферического маятника имеем:

$$\Psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_R - L_0.$$

Действительно, материальная точка сферического маятника может рассматриваться как движущаяся по поверхности сферы. Для плоского маятника имеем:

$$\Psi_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r - L_0, \quad \Psi_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 = 0.$$

В этом случае материальная точка может рассматриваться как движущаяся по окружности, образованной пересечением цилиндра радиуса L_0 и горизонтальной⁷ плоскости. Если длина стержня L_0 изменяется со временем, то радиус окружности также изменяется. Если материальная точка движется по горизонтальной поверхности, то

$$\Psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 - f(t).$$

Заметим, что в этом примере $\Psi = \Psi(r, t)$. И наконец, при движении материальной точки по поверхности конуса соответствующее уравнение связи может быть задано выражением $\Psi = 0$, а именно

$$\Psi(\mathbf{r}) = \phi + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Если бы конус двигался так, что $\alpha = \alpha(t)$, то мы бы получили функцию $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$. Пусть, например, $\alpha = \alpha_0 + A \sin(\omega t)$, тогда

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi - \frac{\pi}{2} + \alpha_0 + A \sin(\omega t).$$

Легко видеть, что хотя $\dot{\Psi} = 0$, но $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t)$. Случай с вращающимся конусом мы не затронули специально. Этот случай является важным примером для определения сил трения, действующих на материальную точку. Позже мы узнаем, что если материальная точка движется по поверхности конуса, то на движение точки накладываются три связи (раздел 2.9).

⁷Ошибка в оригинале: следует писать «вертикальной плоскости». — Прим. ред.

1.8. Классификация связей

Все рассмотренные связи могут быть записаны в общем виде как

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Их часто называют позиционными связями. Определим далее еще один вид связей:

$$\pi = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\pi = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e,$$

а $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ и $e = e(\mathbf{r}, t)$. Связь вида $\pi = 0$ не ограничивает положение точки — она накладывает ограничение лишь на вектор скорости точки. Поэтому связь вида $\pi = 0$ часто называют связью по скорости.

Ранее уже говорилось, что мы можем продифференцировать связь вида $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$ и получить уравнение связи для вектора скорости:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Это уравнение имеет вид (1.13). Таким образом, любая связь вида $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$ даст связь $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$. Обратное утверждение не верно.

Если мы можем проинтегрировать связь $\pi = 0$ и получить связь вида $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$, то первая называется интегрируемой (голономной). Точнее говоря, если для заданной связи $\pi = 0$ можно найти интегрирующий множитель $k = k(\mathbf{r}, t)$ и функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$, такие что⁸

$$k(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e) = \nabla \Psi \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

то связь $\pi = 0$ называется интегрируемой. В противном случае связь $\pi = 0$ называется неинтегрируемой (неголономной). Такая терминология введена Генрихом Герцем [92] (1857–1894). Согласно Ланцошу [124], дальнейшая классификация интегрируемых связей была осуществлена Людвигом Больцманом (1844–1906). Связи вида $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ он назвал реономными, а связи вида $\Psi = \Psi(\mathbf{r})$ (т. е. когда Φ не зависит явно от времени) — склерономными.

⁸Более подробно об интегрирующих множителях читайте в работах, посвященных дифференциальным уравнениям или дифференциальным формам, например в работах [61, 64, 114]. Известно, что интегрирующие множители не являются однозначными.

Особенно важно различать интегрируемые и неинтегрируемые связи при решении задач на твердые тела. Однако с методической точки зрения правильнее вводить эти понятия на этапе изучения кинематики материальной точки. Далее мы кратко рассмотрим силы, возникающие при наложении связей на какой-либо объект. Эти силы называются реакциями связей. Чтобы понять разницу между интегрируемыми и неинтегрируемыми связями, рассмотрим сначала несколько примеров, с помощью которых мы сформулируем критерии определения интегрируемости (или неинтегрируемости) уравнений связей.

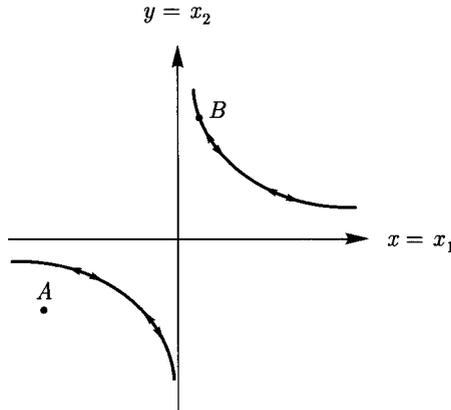


Рис. 1.10. Движение материальной точки, ограниченное связями $xy = c$ и $z = 0$, где c — положительная константа. Стрелками на гиперболах обозначены возможные направления движения материальной точки

Три примера

В качестве первого примера рассмотрим материальную точку, на движение которой накладываются следующие связи:

$$xy - c = 0, \quad z = 0.$$

Такие связи соответствуют движению точки по гиперболе в плоскости xy (рис. 1.10). На рисунке также показаны две точки A и B . Легко видеть, что материальная точка не может пройти расстояние между A и B , не нарушив при этом связь $xy - c = 0$. Условия $xy - c = 0$ и $z = 0$ также накладывают ограничения на вектор скорости материальной точки:

$$(xE_2 + yE_1) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad E_3 \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.14)$$

Из этих выражений следует, что вектор \mathbf{v} не имеет составляющей, перпендикулярной к гиперболе $xy = c$. Очевидно, что оба уравнения связи (1.14) имеют вид $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$, где $e = 0$ и $\mathbf{f} = x\mathbf{E}_2 + y\mathbf{E}_1$ (для первого уравнения) и $e = 0$ и $\mathbf{f} = \mathbf{E}_3$ (для второго уравнения). По определению, обе связи (1.14) являются интегрируемыми.

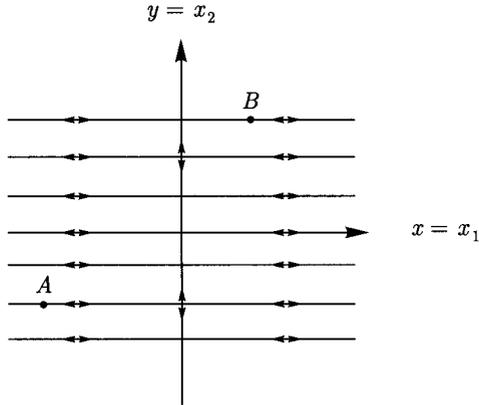


Рис. 1.11. Движение материальной точки, ограниченное связями $\dot{y}x = 0$ и $z = 0$. Стрелками обозначены возможные направления движения материальной точки

В качестве второго примера рассмотрим следующие связи:

$$(x\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad z = 0. \quad (1.15)$$

На рис. 1.11 показано движение материальной точки, ограниченное этими связями. Заметим, что в этом случае есть возможность пройти расстояние между любыми двумя точками A и B , принадлежащими плоскости xy , без нарушения связи $\dot{y}x = 0$. По сути, данное ограничение лишь определяет способ перемещения из точки A в точку B , в отличие от связи $xy - c = 0$. Умножая, например, $\dot{y}x = 0$ на $\frac{1}{x}$, мы видим, что всюду, кроме оси y , рассматриваемая связь является интегрируемой⁹. Анализируя возможные движения материальной точки, показанные на рис. 1.11, мы действительно обнаруживаем, что не существует гладкой функции Ψ , такой что можно было бы сделать заключение об интегрируемости связи $\dot{y}x = 0$ на всем пространстве \mathbb{E}^3 . Поэтому связь $\dot{y}x = 0$ классифицируется как кусочно-ин-

⁹Здесь $\frac{1}{x}$ выступает в качестве интегрирующего множителя $k(\mathbf{r}, t)$, о котором мы упоминали при определении неинтегрируемой связи.

тегрируемая¹⁰. В разделе 2.10 мы более подробно поговорим о необычных свойствах этой связи.

В качестве третьего примера возьмем простейшую из возможных неинтегрируемых связей, накладываемых на движение материальной точки¹¹. Уравнение связи имеет вид

$$(-z\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.16)$$

Следовательно, $\dot{y} - z\dot{x} = 0$. Чтобы продемонстрировать, какие именно ограничения накладывает связь $\dot{y} - z\dot{x} = 0$, выберем две точки A и B и параметризуем расстояние между ними с помощью координаты x . Полагая

$$y = f(x), \quad z = \frac{df}{dx},$$

где $f(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция, мы видим, что уравнение связи $-z\dot{x} + \dot{y} = 0$ удовлетворяется. Чтобы материальная точка могла двигаться между любыми двумя точками A и B , функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$y_A = f(x_A), \quad z_A = \frac{df}{dx}(x_A), \quad y_B = f(x_B), \quad z_B = \frac{df}{dx}(x_B),$$

где $\mathbf{r}_A = x_A\mathbf{E}_1 + y_A\mathbf{E}_2 + z_A\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{r}_B = x_B\mathbf{E}_1 + y_B\mathbf{E}_2 + z_B\mathbf{E}_3$. Графически изобразить функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим ограничениям, несложно. На рис. 1.12 показано несколько соответствующих примеров. Частный случай функции $f(x)$ исследуется в работе Парса [170], а несколько модифицированный его вариант приводится здесь:

$$\begin{aligned} f(x) = & (3(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(z_B + z_A)) \left(\frac{x - x_A}{x_B - x_A} \right)^2 - \\ & - (2(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(z_B + z_A)) \left(\frac{x - x_A}{x_B - x_A} \right) + \\ & + c(x - x_A)^2(x_B - x)^2 + d \sin^2 \left(\frac{\pi(x - x_A)}{x_B - x_A} \right) + \end{aligned}$$

¹⁰Не считая работы Папаставридиса [169], такая классификация связей не встречается в книгах по классической и аналитической механике. Более подробно о кусочно-интегрируемых связях можно узнать в занимательной статье Руина [186]. Согласно этой статье, подобного рода связи встречаются во многих локомотивных системах, таких как пассивно движущиеся вагоны, подвергаемые удару.

¹¹Доказательство этого утверждения можно найти в работе Форсайта [64, раздел 163]. Наше рассмотрение связи (1.16) основывается на работах Гурса [75] и Парса [170].

$$+ z_A(x - x_A) \left(\frac{x_B - x}{x_B - x_A} \right) + y_A, \quad (1.17)$$

где c и d — произвольные постоянные. В качестве упражнения докажите, что между точками A и B существует бесконечное множество траекторий, таких что связь $\dot{y} - z\dot{x} = 0$ не нарушается. Позже мы докажем, что эта связь действительно является неинтегрируемой.

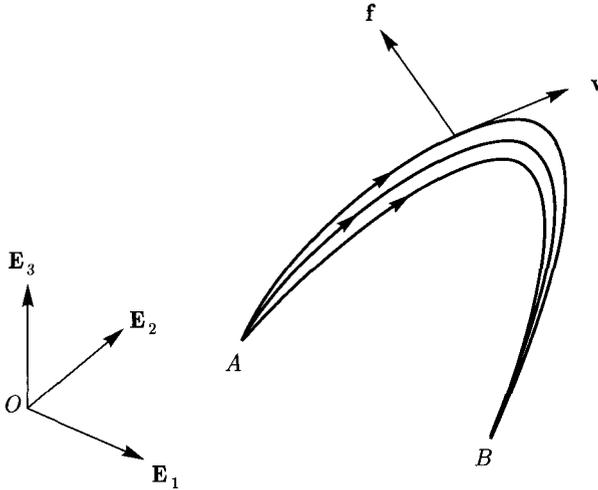


Рис. 1.12. Три возможные траектории движения материальной точки между двумя заданными точками A и B ; движение ограничено связью $\dot{y} - z\dot{x} = 0$. Стрелками обозначены направления движения материальной точки; кроме того, показан вектор $\mathbf{f} = -z\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Изображенные траектории движения построены в соответствии с функцией (1.17)

Критерии интегрируемости

Пусть на движение материальной точки накладывается связь $\pi = 0$. Как отмечалось ранее, эта связь является интегрируемой в том случае, если существует функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ и интегрирующий множитель k , такие что

$$\dot{\Psi} = k(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e). \quad (1.18)$$

В противном случае связь $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$ является неинтегрируемой. Знать об интегрируемости (или неинтегрируемости) связи полезно потому, что тогда

мы можем выбрать систему координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, в которой связь $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$ была бы равнозначна связи $\dot{q}^3 + e = 0$. Последняя, в свою очередь, эквивалентна связи $q^3 = g$,¹² где $\dot{g} = e$. В такой системе координат динамику материальной точки легче анализировать. С учетом вышесказанного перейдем к рассмотрению некоторых классических критериев интегрируемости как одиночных уравнений связи, так и систем уравнений связи¹³.

Одиночная склерономная связь

Первый критерий, который мы рассмотрим, применим для анализа связи вида $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$, где \mathbf{f} не зависит явно от времени. Используя координатную систему $\{q^1, q^2, q^3\}$, запишем связь $\pi = 0$ в виде

$$f_1 \dot{q}^1 + f_2 \dot{q}^2 + f_3 \dot{q}^3 = 0.$$

Необходимым и достаточным условием для интегрируемости связи $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$ является следующее¹⁴:

$$I_c = 0 \quad (1.19)$$

для всех возможных значений q^i . В нашем случае

$$I_c = f_1 \left(\frac{\partial f_3}{\partial q^2} - \frac{\partial f_2}{\partial q^3} \right) + f_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q^3} - \frac{\partial f_3}{\partial q^1} \right) + f_3 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q^1} - \frac{\partial f_1}{\partial q^2} \right).$$

На этом этапе удобно воспользоваться формулой для вихря векторного поля \mathbf{P} , записанной в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{P}) &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{E}_i \right) \times \mathbf{P} = \\ &= \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{E}_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{E}_2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{E}_3, \end{aligned} \quad (1.20)$$

¹²Ошибка в оригинале: надо писать $q^3 + \dot{g} = 0$ (или же $\dot{g} = -e$). — Прим. ред.

¹³Для более глубокого изучения рассматриваемого вопроса (где приводятся также наглядные механические примеры) мы рекомендуем работы Папаставридиса [169] и Розенберга [182]. Исторический обзор, данный в этих работах, основан на работе Хокинса [91].

¹⁴Классическое доказательство этого утверждения можно найти в работах Форсайта [64, раздел 151], Гурса [74, раздел 442] и Папаставридиса [169]. Доказательство с использованием дифференциальных форм смотрите в работе Фландерса [61], который ссылается на соответствующее утверждение как на теорему интегрирования Фробениуса.

где $P_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_i$. С учетом этого выражения критерий (1.19) можно записать в более компактной форме:

$$\mathbf{f} \cdot (\text{rot}(\mathbf{f})) = 0.$$

Впервые критерий (1.19) был введен Карлом Якоби (1804–1851), поэтому будем называть его критерием Якоби.

Тот факт, что функция \mathbf{f} удовлетворяет критерию (1.19), свидетельствует о существовании функции $\Psi(\mathbf{r})$ и интегрирующего множителя $k(\mathbf{r})$, но ничего не говорит нам об их виде. Более того, этот критерий является локальным, т. е. не указывает на то, являются ли эти две функции одинаковыми для всех точек пространства или нет. К примеру, несмотря на то, что связи $x\dot{y} + y\dot{x} = 0$ и $x\dot{y} = 0$ удовлетворяют критерию интегрируемости (1.19), лишь для первой из них существует непрерывно определенная функция $\Psi(\mathbf{r})$. Для второй связи функция $\Psi(\mathbf{r})$ является кусочной (см. рис. 1.11). Если проверить связь $\dot{y} - z\dot{x} = 0$ с помощью критерия (1.19), то мы получим¹⁵

$$I_c = -z(0 - 0) + 1(-1 - 0) + 0(0 - 0).$$

Поскольку $I_c = -1 \neq 0$, связь $\dot{y} - z\dot{x} = 0$ является неинтегрируемой.

Одиночная реономная связь

Обобщим критерий Якоби на реономные связи, имеющие вид $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$. Конечный результат очень схож с результатом для склерономной связи, но его вывод более трудоемок.

Представим связь $\pi = 0$ в виде

$$f_1\dot{q}^1 + f_2\dot{q}^2 + f_3\dot{q}^3 + f_4 = 0$$

и определим переменные

$$U^1 = q^1, \quad U^2 = q^2, \quad U^3 = q^3, \quad U^4 = t.$$

Очевидно, что $f_4 = e$. Далее построим функции

$$I_{JKL} = f_J \left(\frac{\partial f_L}{\partial U^K} - \frac{\partial f_K}{\partial U^L} \right) + f_K \left(\frac{\partial f_J}{\partial U^L} - \frac{\partial f_L}{\partial U^J} \right) + f_L \left(\frac{\partial f_K}{\partial U^J} - \frac{\partial f_J}{\partial U^K} \right),$$

¹⁵Т. е. мы полагаем $q^1 = x$, $q^2 = y$ и $q^3 = z$.

где целочисленные индексы J, K и L принимают значения от 1 до 4. Необходимым и достаточным условием для интегрируемости связи $\pi = 0$ является следующее: все q^1, q^2, q^3, t удовлетворяют четырем уравнениям

$$I_{JKL} = 0 \quad \text{для всех } J, K, L \in \{1, 2, 3, 4\}, L \neq J \neq K, K \neq L. \quad (1.21)$$

Доказательство этой теоремы смотрите в работе Форсайта [64, раздел 161] или Фландерса [61].

Системы уравнений связей

Если движение материальных точек ограничивается не одной, а несколькими связями, необходимо установить, являются ли эти связи независимыми. В случае двух связей мы сначала выражаем их в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} + e_1 &= 0, \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} + e_2 &= 0. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 \neq 0$, то связи являются независимыми. Для интегрируемых связей данное условие равнозначно условию $\nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 \neq 0$, согласно которому нормальные векторы к поверхностям $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$ не параллельны друг другу. Условие независимости трех связей формулируется аналогичным образом. Сначала мы запишем все три связи в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} + e_1 &= 0, \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} + e_2 &= 0, \\ \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{v} + e_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Тогда условием их независимости будет

$$\mathbf{f}_1 \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3) \neq 0.$$

Если связи являются интегрируемыми, то это условие равнозначно условию $\nabla \Psi_1 \cdot (\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3) \neq 0$, геометрический смысл которого следующий: нормальные векторы в точке пересечения поверхностей $\Psi_1 = 0, \Psi_2 = 0$ и $\Psi_3 = 0$ образуют базис.

Система связей, каждая из которых по отдельности является неинтегрируемой, может стать интегрируемой. Примером служит движение материальной точки с двумя склерономными связями [169]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где f_1 и f_2 — функции от r , такие что $f_1 \times f_2 \neq 0$. В этом случае система связей является интегрируемой. Доказательство этого утверждения приводится в разделе 8.4; оно основано на использовании критерия, разработанного Фердинандом Фробениусом (1849–1917) и рассматриваемого нами в главе 8. С помощью этого критерия можно также показать, что если на движение материальной точки накладываются три связи (1.22), то система связей является интегрируемой. Следовательно, движение материальной точки является предопределенным. Другие примеры системы связей, ограничивающих движение материальной точки, приводятся в упражнениях в конце главы.

1.9. Заключение

В этой главе мы рассмотрели ряд кинематических понятий и методов, необходимых для решения задач на динамику материальной точки. Многие читатели впервые столкнулись с использованием криволинейных координат и кинематических связей. Эти два раздела кинематики точки тесно связаны между собой и будут раскрываться в последующих главах.

Упражнения

1.1. Пусть движение материальной точки описывается уравнением в декартовой системе координат:

$$\mathbf{r}(t) = c\mathbf{E}_2 + 10t\mathbf{E}_1,$$

где c — постоянная. Найдите вектор секторной скорости \mathbf{A} материальной точки и докажите, что длина этого вектора равна скорости, с которой радиус-вектор точки заметает сектор конкретной площади. Замечает ли радиус-вектор материальной точки за одинаковые промежутки времени равные площади? При решении задачи рассмотрите также случай $c = 0$.

1.2. Пусть движение материальной точки описывается уравнением в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{r}(t) = 10e_r, \quad \theta(t) = \omega t,$$

где $\omega \neq 0$. Найдите вектор секторной скорости \mathbf{A} этой точки. При каких условиях радиус-вектор материальной точки заметает за одинаковые промежутки времени секторы равной площади?

1.3. С учетом того, что цилиндрическая система координат $\{r, \theta, z\}$ задается через декартову систему координат $\{x = x_1, y = x_2, z = x_3\}$ посредством соотношений

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad z = x_3,$$

докажите, что ковариантные базисные векторы, определенные в криволинейной системе координат $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$, равны

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{a}_2 = r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Кроме того, докажите, что контравариантными базисными векторами будут

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{E}_3.$$

Покажите с помощью рисунка, что вектор \mathbf{a}_2 направлен по касательной к координатной кривой θ , а вектор \mathbf{a}^2 перпендикулярен к координатной поверхности θ . Наконец, докажите, что в рассматриваемой системе координат справедливо равенство

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2).$$

1.4. С учетом того, что сферическая система координат $\{R, \phi, \theta\}$ задается через декартову систему координат $\{x = x_1, y = x_2, z = x_3\}$ посредством соотношений

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right),$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \right),$$

докажите, что ковариантные базисные векторы, определенные в криволинейной системе координат $q^1 = R, q^2 = \phi, q^3 = \theta$, равны

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{a}_2 = R\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}_3 = R \sin(\phi)\mathbf{e}_\theta.$$

Кроме того, докажите, что контравариантными базисными векторами будут

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{R}\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{R \sin(\phi)}\mathbf{e}_\theta.$$

1.5. Параболическая система координат $\{u, v, \theta\}$ может быть задана через декартову систему координат $\{x = x_1, y = x_2, z = x_3\}$ посредством следующих формул перехода:

$$\begin{aligned} u &= \pm \sqrt{x_3 + \sqrt{x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2)}}, \\ v &= \pm \sqrt{-x_3 + \sqrt{x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2)}}, \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Обратные формулы перехода имеют вид

$$x_1 = uv \cos(\theta), \quad x_2 = uv \sin(\theta), \quad x_3 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

- (a) Нарисуйте в плоскости координат r, x_3 , где r — цилиндрическая координата, равная $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, несколько наглядных примеров проекций координатных поверхностей u и v . Анализируя достаточно большое количество примеров, убедитесь, что координаты u, v и θ образуют полноценную систему координат.
- (b) В пространстве координат x_1, x_2, x_3 нарисуйте координатную поверхность u . Покажите на рисунке, что эта поверхность состоит из координатных кривых v и θ .
- (c) Покажите, что ковариантные базисные векторы для параболической системы координат имеют вид

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = v \mathbf{e}_r + u \mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = u \mathbf{e}_r - v \mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = u v \mathbf{e}_\theta.$$

Используя результаты, полученные в (a) и (b), нарисуйте несколько примеров этих векторов.

- (d) Покажите, что контравариантные базисные векторы для параболической системы координат имеют вид

$$\mathbf{a}^1 = \operatorname{grad}(u) = \frac{1}{u^2 + v^2} \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{a}^2 = \text{grad}(v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}^3 = \text{grad}(\theta) = \frac{1}{uv} \mathbf{e}_\theta.$$

Используя результаты, полученные в (а), (b) и (с), нарисуйте несколько примеров этих векторов.

- (е) Где в параболической системе координат находятся вырожденные точки? Убедитесь, что в этих точках нельзя определить контравариантные базисные векторы.
- (f) Выразите в координатах $\{u, v, \theta\}$ кинетическую энергию T и кинетический момент \mathbf{G} материальной точки массы m , движущейся в пространстве E^3 . Найдите также их производные по времени.

1.6. Рассмотрите классический пример — движение материальной точки по винтовой линии (рис. 1.13). Уравнение винтовой линии в цилиндрической системе координат r, θ, z имеет вид

$$r = R_0, \quad z = \alpha R_0 \theta,$$

где R_0 и α — постоянные. Для описания движения материальной точки используем иную криволинейную систему координат:

$$q^1 = \theta, \quad q^2 = r, \quad q^3 = \nu = z - \alpha r \theta.$$

Координатная поверхность q^3 называется прямым геликоидом.

- (а) Покажите, что ковариантными базисными векторами в этой системе координат будут

$$\mathbf{a}_1 = r(\mathbf{e}_\theta + \alpha \mathbf{E}_3), \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_r + \alpha \theta \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Докажите, что они не являются ортонормированными.

- (b) Покажите, что кинетическая энергия материальной точки находится по формуле

$$T = \frac{m}{2} \left((1 + \alpha^2 \theta^2) \dot{r}^2 + (1 + \alpha^2) r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\nu}^2 \right) + \frac{m}{2} \left(2\dot{\nu} \dot{r} \alpha \theta + 2\dot{\nu} \dot{\theta} \alpha r + 2\dot{r} \dot{\theta} \alpha^2 r \theta \right).$$

Рассчитайте контравариантные базисные векторы для этой криволинейной системы координат.

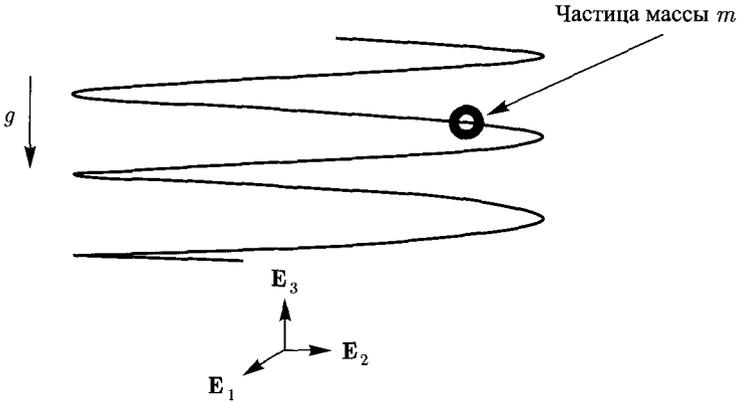


Рис. 1.13. Движение материальной точки по винтовой линии

1.7. Простейшей координатной системой с неортогональными базисными векторами является следующая криволинейная система координат:

$$q^1 = x_1 \sec(\alpha), \quad q^2 = x_2 - x_1 \operatorname{tg}(\alpha), \quad q^3 = x_3,$$

где α — постоянная. Используя (1.5), вычислите функции $\hat{x}_k(q^1, q^2, q^3)$. Нарисуйте для этой криволинейной системы координат координатные кривые и координатные поверхности и докажите, что ковариантные и контравариантные базисные векторы будут соответственно равны

$$\mathbf{a}_1 = \cos(\alpha)\mathbf{E}_1 + \sin(\alpha)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3 \quad (1.24)$$

и

$$\mathbf{a}^1 = \sec(\alpha)\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{a}^2 = -\operatorname{tg}(\alpha)\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{E}_3. \quad (1.25)$$

Покажите на рисунке направление этих векторов относительно координатных кривых и координатных поверхностей. При каких значениях α векторы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ не будут составлять базис?

1.8. Для вектора

$$\mathbf{b} = 10\mathbf{E}_1 + 5\mathbf{E}_2 + 6\mathbf{E}_3$$

найдите его ковариантные b_i и контравариантные b^i составляющие, используя формулы (1.24) и (1.25) для ковариантных и контравариантных базис-

ных векторов соответственно. Кроме того, докажите, что

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{a}^i = \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{a}_i.$$

Далее покажите, что $\mathbf{b} \neq \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{a}^i$ и $\mathbf{b} \neq \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{a}_i$. Для каких значений α векторы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ не являются базисом?

1.9. В этом упражнении показывается, как соотносятся между собой ковариантные и контравариантные составляющие вектора. Для начала определим через ковариантные и контравариантные базисные векторы следующие скаляры:

$$a_{ik} = a_{ik}(q^r) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k, \quad a^{ik} = a^{ik}(q^r) = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k.$$

Обратите внимание, что $a_{ik} = a_{ki}$ и $a^{ik} = a^{ki}$. Значения индексов i, k, r и s варьируются здесь от 1 до 3.

(а) Покажите, что ковариантные и контравариантные составляющие произвольного вектора \mathbf{b} равны

$$b_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b^k, \quad b^i = \sum_{k=1}^3 a^{ik} b_k.$$

Таким образом, ковариантные составляющие вектора представляют собой линейные комбинации контравариантных составляющих, и наоборот. В матричной форме эти выражения имеют вид

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(б) Полагая $\mathbf{b} = \mathbf{a}_r$ и \mathbf{a}^s и учитывая симметрию величин a^{km} и a_{rs} , докажите, что

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} a^{kj} = \sum_{k=1}^3 a_{ki} a^{kj} = \sum_{k=1}^3 a_{ki} a^{jk} = \delta_i^j.$$

Полезно заметить, что в матричном представлении один из полученных выше результатов имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.10. Используя критерии интегрируемости (1.19) и (1.21), докажите, что лишь одно из уравнений связи

$$x\dot{x} + y\dot{y} = -e(t), \quad z\dot{y} + \dot{x} = 0, \quad \cos(z)\dot{y} - \sin(z)\dot{x} = 0$$

является интегрируемым. Кроме того, докажите, что эта интегрируемая связь накладывается на движение материальной точки по поверхности цилиндра, радиус которого изменяется во времени.

1.11. Используя критерий интегрируемости (1.21), докажите, что одно из уравнений связи

$$z\dot{x} + \dot{y} = -e(t), \quad \dot{z} = 0$$

является неинтегрируемым. Также докажите, что если обе эти связи одновременно накладываются на движение материальной точки, то система связей будет интегрируемой. Дайте геометрическое описание прямой, вдоль которой движется материальная точка.

ГЛАВА 2

Кинетика материальной точки

2.1. Введение

В этой главе центральное место занимает уравнение движения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ для материальной точки. Мы воспользуемся им для исследования моделей нескольких физических систем: от модели планетарного движения до модели аттракциона «американские горки». В рамках моделей, прогнозирующих поведение этих систем, по большей части используется численное интегрирование уравнений движения, которые строятся по закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Предполагается, что читатели уже знакомы с численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении задач чаще всего приходится иметь дело с консервативными силами и реакциями связей. Типичный пример консервативной силы — сила гравитационного взаимодействия между двумя частицами. Простейшей же реакцией связи в механике материальной точки является нормальная реакция. Очень важно уметь корректно определять и рассчитывать консервативные силы и реакции связей, поэтому в данной главе этим вопросам отводится много места. В отличие от большого числа учебников по динамике, мы рассматриваем силы трения как разновидность реакций связей.

При рассмотрении большинства задач нельзя получить их точное (т. е. аналитическое) решение, поэтому единственным выходом служит использование численных методов. Для обоснования законности получаемых таким образом результатов решающим является наличие в рамках данной задачи законов сохранения. Поэтому мы подробно рассмотрим вопросы, связанные с законами сохранения количества движения, кинетического момента и энергии и на двух примерах продемонстрируем способы применения закона сохранения кинетического момента. Нельзя сказать, что рассматриваемые в этой главе примеры являются исчерпывающими. Упражнения, приведенные в конце главы, содержат несколько других примеров, но и они не могут покрыть всего разнообразия задач по механике материальной

точки. Заинтересованным читателям мы рекомендуем прочитать классические учебники Рауса [185] и Уиттекера [228], а также более поздние работы Баруха [14], Муна [146] и Шека [190].

2.2. Уравнение движения для материальной точки

Пусть в пространстве \mathbb{E}^3 движется материальная точка массы m . Как и ранее, обозначим радиус-вектор этой точки, проведенный из неподвижного начала координат O , символом \mathbf{r} . Уравнение движения для материальной точки называют еще теоремой об изменении количества движения, вторым законом Ньютона или первым законом Эйлера. В интегральной форме оно записывается следующим образом:

$$\mathbf{G}(t) - \mathbf{G}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где \mathbf{F} — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, а $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ — количество движения точки. Заметим, что для такой записи уравнения движения величина \mathbf{v} не обязательно должна быть дифференцируемой по времени t . Как следствие, этот закон применим и для решения задач с соударениями. Одну из таких задач мы рассмотрим в разделе 2.10.

Если допустить, что \mathbf{G} дифференцируемо по времени, то можно взять производную от каждой части уравнения (2.1) и получить теорему об изменении количества движения в локальной форме:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}.$$

Полагая, что масса материальной точки не изменяется, приходим к уравнению:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.2)$$

Полученное уравнение задает систему трех (скалярных) уравнений, связывающих \mathbf{F} со скоростью изменения количества движения частицы. Уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ мы называем теоремой об изменении количества движения¹.

Несмотря на то, что в этой главе мы акцентируем внимание на законе $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, помимо него в динамике принято несколько других принципов.

¹Точная эйлерова формулировка уравнений (2.2), впервые полученная в работе [51], восходит к «Началам» Ньютона [152]. Более подробно читайте в некоторых работах Клиффорда Трусделла [1919–2000], например [216, 217].

С тех пор как 300 лет назад Ньютон сформулировал этот закон, было предложено несколько альтернативных (и часто эквивалентных) принципов динамики. Некоторые из них мы рассмотрим в разделе 4.11.

Уравнение (2.2) удобно записывать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}.$$

При отсутствии ограничений эта система включает в себя шесть скалярных дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$. Для решения этих уравнений необходимо задать шесть начальных условий $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$. Если же задача формулируется как краевая задача, то необходимо задать комбинацию из шести начальных и конечных условий для $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$.

Запишем уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ в декартовой системе координат. Получим три уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1, \\ m\ddot{x}_2 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2, \\ m\ddot{x}_3 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Теперь запишем это же уравнение в цилиндрической системе координат, получим:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta, \\ m\ddot{z} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В сферической системе координат будем иметь:

$$\begin{aligned} m(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_R, \\ m(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\sin(\phi)\cos(\phi)\dot{\theta}^2) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\phi, \\ m(R\sin(\phi)\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}\sin(\phi) + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi)) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что все эти уравнения являются разными проекциями векторного уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ на систему базисных векторов пространства \mathbb{E}^3 .

Записать закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ в компонентной форме для разных систем координат не так просто. Однако уравнения движения Лагранжа позволяют сделать это достаточно легко. Рассмотрим их в разделе 3.2.

2.3. Работа и мощность

Механическая мощность \mathcal{P} силы \mathbf{P} , действующей на материальную точку массы m , равна

$$\mathcal{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}.$$

Очевидно, что если вектор силы \mathbf{P} перпендикулярен вектору скорости \mathbf{v} , то мощность силы равна нулю.

Траектория материальной точки

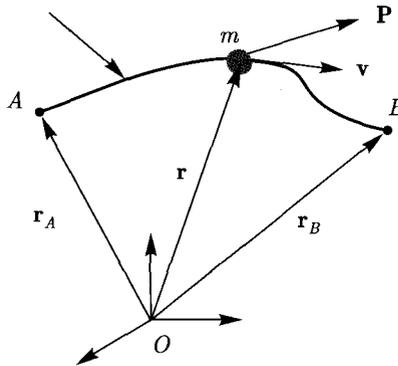


Рис. 2.1. Сила \mathbf{P} , действующая на материальную точку при ее движении из точки A в точку B

Пусть материальная точка движется из точки A в точку B (рис. 2.1). Предположим, что в момент времени $t = t_A$ материальная точка находится в точке A , т.е. $\mathbf{r}(t_A) = \mathbf{r}_A$. Аналогично в момент времени $t = t_B$ материальная точка находится в точке B , т.е. $\mathbf{r}(t_B) = \mathbf{r}_B$. Предположим, что в течение интервала времени, за который материальная точка проходит путь от A до B , на нее, помимо прочих сил, действует сила \mathbf{P} . За это время сила \mathbf{P} совершает работу W_{AB} , равную интегралу по времени от механической мощности:

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Обратите внимание, что это линейный интеграл, в котором для параметризации траектории материальной точки используется время t . В зависимости от выбора системы координат интеграл в этом выражении может иметь разные представления, но все они будут эквивалентными.

В качестве примера рассмотрим силу $\mathbf{P} = P e_{\theta}$, действующую на материальную точку, движение которой описывается уравнением $\mathbf{r}(t) = L e^{\alpha t} (\cos(\omega t) \mathbf{E}_x + \sin(\omega t) \mathbf{E}_y)$, где L , α и $\omega = \dot{\theta}$ — постоянные. С помощью непосредственных вычислений получаем, что мощность рассматриваемой силы равна

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \omega P L e^{\alpha t},$$

а совершаемая этой силой работа определяется выражением

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \omega P L e^{\alpha t} dt = \frac{\omega P L}{\alpha} (e^{\alpha t_B} - e^{\alpha t_A}),$$

где при вычислении интеграла мы допустили, что $\alpha \neq 0$.

2.4. Консервативные силы

Сила \mathbf{P} , действующая на материальную точку, называется консервативной, если совершаемая этой силой работа во время движения материальной точки не зависит от траектории материальной точки. С точки зрения векторного исчисления независимость от траектории означает, что сила \mathbf{P} есть градиент скалярной функции $U = U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{P} = -\nabla U.$$

Функция U называется потенциальной энергией, соответствующей силе \mathbf{P} , а знак минус, фигурирующий в уравнении, связывающем \mathbf{P} с градиентом функции U , есть историческое соглашение. В уравнении (1.11) мы встречались с разными представлениями градиента.

Следует заметить, что если сила \mathbf{P} консервативна, то ее механическая мощность равна $-\dot{U}$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим величину \dot{U} и воспользуемся определением консервативной силы:

$$-\dot{U} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -(-\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}.$$

Это выражение справедливо для всех возможных движений материальной точки, но особенно полезно в том случае, когда необходимо вычислить скорость изменения полной энергии E материальной точки.

Один из методов проверки, является ли сила \mathbf{P} консервативной, заключается в отыскании функции потенциала U , такой что для всех возможных

движений материальной точки справедливо выражение

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = -\dot{U}.$$

Этот метод сводится к решению системы связанных дифференциальных уравнений в частных производных для U . Если, например, используются цилиндрические координаты, то получаем три дифференциальных уравнения в частных производных для $U(r, \theta, z)$:

$$P_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad P_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad P_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{P} = P_r \mathbf{e}_r + P_\theta \mathbf{e}_\theta + P_z \mathbf{E}_3$. Заметим, что потенциальная энергия $U(r, \theta, z)$, являющаяся решением системы уравнений (2.5), находится с точностью до аддитивной постоянной. Значение этой постоянной определяется, как правило, условием $U = 0$, при котором координаты точки имеют конкретные значения.

Другой способ проверки, является ли заданная сила \mathbf{P} консервативной, заключается в анализе ее вихря. В основе этого метода лежит тождество $\text{rot}(\text{grad}(V)) = \mathbf{0}$, где $V = V(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция от \mathbf{r} . Ясно, что если сила \mathbf{P} консервативна, то $\text{rot}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$.² Следовательно, если $\text{rot}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$, то декартовы составляющие вектора силы \mathbf{P} должны удовлетворять следующим выражениям:

$$\frac{\partial P_3}{\partial x_2} = \frac{\partial P_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_3} = \frac{\partial P_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} = \frac{\partial P_1}{\partial x_2},$$

где $P_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_i$.

2.5. Примеры консервативных сил

В инженерной динамике выделяют три основных типа консервативных сил: постоянные силы, силы упругости и силовые гравитационные поля.

Постоянные силы

Все постоянные силы являются консервативными. Чтобы убедиться в этом, обозначим через \mathbf{C} постоянную силу и положим $U_c = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}$. Тогда $\nabla U_c = -\mathbf{C}$ и, следовательно, U_c будет потенциальной энергией, соответствующей силе \mathbf{C} . Наиболее типичными примерами постоянных сил служат силы земного тяготения $-mg\mathbf{E}_2$ и $-mg\mathbf{E}_3$, а также соответствующие им потенциалы $mg\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{r}$ и $mg\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{r}$.

²Выражение для вихря векторного поля приводилось ранее в (1.20).

Силы упругости

Рассмотрим пружину, изображенную на рис. 2.2. Один конец пружины закреплен в неподвижной точке A , а к другому концу пружины прикреплена материальная точка массы m . Собственная длина пружины равна L_0 . Очевидно, что в растянутом состоянии длина пружины будет равна $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\|$, а растяжение/сжатие пружины составит

$$\epsilon = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\| - L_0.$$

Потенциальная энергия U_s пружины равна

$$U_s = f(\epsilon),$$

где f — функция изменения длины пружины. Вычисляя градиент величины U_s , находим силу упругости \mathbf{F}_s :

$$\mathbf{F}_s = -\frac{\partial U_s}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\|}.$$

При этом мы воспользовались тождеством

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\| - L_0) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\|}.$$

В качестве упражнения попробуйте получить это тождество самостоятельно³.

Самой простой пружиной в инженерной динамике является пружина с линейной характеристикой (коэффициент жесткости таких пружин не изменяется). Для нее справедливы равенства

$$U_s = \frac{K}{2} (\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\| - L_0)^2, \quad \mathbf{F}_s = -K (\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\| - L_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\|}.$$

Это значит, что потенциальная энергия такой пружины есть квадратичная функция изменения ее длины. Примерами пружин с переменной жесткостью служат пружины, для которых f является многочленом от величины ϵ . Например,

$$f(\epsilon) = A\epsilon^2 + B\epsilon^4,$$

где $A > 0$ и B — постоянные. При $B > 0$ пружина называется затвердевающей, а при $B < 0$ — смягчающейся.

³Подсказка: для удобства сначала докажите, что $\frac{\partial \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Этот результат эквивалентен доказательству того, что градиент величины $\|\mathbf{r}\|$ равен \mathbf{e}_R

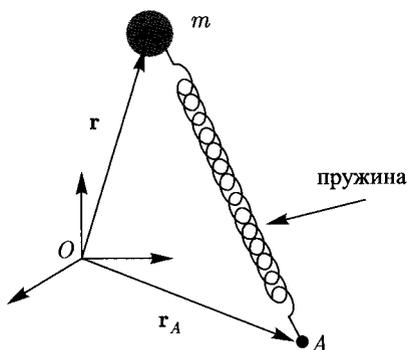


Рис. 2.2. Пружина, один конец которой закреплен в неподвижной точке A , а к другому концу прикреплена материальная точка

Сила гравитации Ньютона

Со времен Ньютона, т. е. с конца 1600-х гг., силу, с которой одно тело массы M действует на другое тело массы m , определяют по формуле

$$\mathbf{F}_n = m\mathbf{g},$$

где

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}.$$

Считается, что тело массы M находится в начале координат O ; G — универсальная гравитационная постоянная. При таком задании гравитационной силы оба тела моделируются как материальные точки. Позже в разделах 4.5 и 8.7 мы обобщим это силовое поле на случай систем материальных точек и твердых тел соответственно. Поскольку величина \mathbf{F}_n зависит от квадрата расстояния между двумя телами, ньютоново силовое поле часто называют законом обратных квадратов. Сила \mathbf{F}_n консервативна, а ее потенциальная энергия равна

$$U_n = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Из выражений для U_n и \mathbf{F}_n видно, что эти величины достаточно просто записываются в сферических координатах.

Силовое гравитационное поле Ньютона является притягивающим: оно стремится притянуть тело массы m к телу массы M . Отсюда возникает вопрос: что удерживает два тела от столкновения? Из других курсов вам

известно, что ответом служит изменение импульса тела m . Именно этот хрупкий баланс позволяет телу m равномерно вращаться вокруг тела M по круговой орбите.

2.6. Реакции связей

Реакция связи \mathbf{F}_c — это сила, появляющаяся при наложении связи. Примерами реакций связи служат силы реакции, нормальные силы и силы натяжения в нерастяжимых нитях. Пусть на движение материальной точки накладывается связь $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$. Для соответствующей реакции связи не существует универсального представления. Выбор корректного представления зависит от физической ситуации, в которой реализуется связь. При решении задач на движение материальной точки, подчиняющегося закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, необходимо решить шесть уравнений

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$$

при условии, что \mathbf{r} и \mathbf{v} удовлетворяют связям

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Чтобы система уравнений была полной, введем дополнительную неизвестную, реакцию связи \mathbf{F}_c . Тогда \mathbf{F}_c должна задаваться так, чтобы удовлетворялось уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, а для определения \mathbf{F}_c и $\mathbf{r}(t)$ можно использовать $\Psi(\mathbf{r}, t)$.

Для реакций связей не существует единого представления. Наиболее часто используется способ, предложенный Джозефом–Луисом Лагранжем (1736–1813). Согласно О’Рейли и Сринивасе [162] такой способ обеспечивает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы движение материальной точки удовлетворяло уравнению связи. Можно, однако, включать в него и другие произвольные, направленные не по нормали, составляющие. Вот почему следует относить к реакциям связей фрикционные составляющие.

Одиночная связь

Рассмотрим случай, когда на движение материальной точки накладывается единственная связь:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Напомним, что единичный нормальный вектор \mathbf{n} к этой поверхности (рис. 2.3) определяется формулой

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Psi}{\|\nabla \Psi\|}.$$

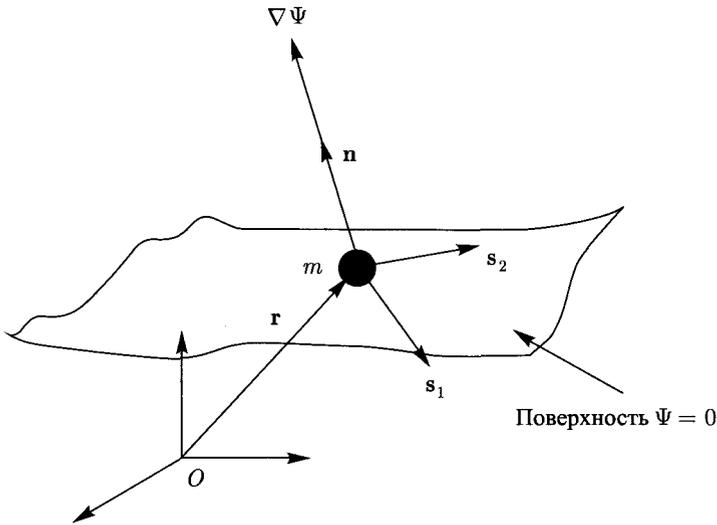


Рис. 2.3. Движение материальной точки по поверхности $\Psi = 0$. Векторы s_1 и s_2 являются единичными касательными векторами к этой поверхности в точке контакта материальной точки с поверхностью

Зная \mathbf{n} , можно построить единичный касательный вектор s_1 к этой поверхности. Определяя, кроме того, еще один единичный касательный вектор $s_2 = \mathbf{n} \times s_1$, мы получаем правый ортонормированный базис $\{s_1, s_2, \mathbf{n}\}$ в пространстве E^3 . В общем случае он не является постоянным; по мере продвижения от одной точки поверхности к другой система базисных векторов меняется. Обозначим вектор скорости точки поверхности (с которой контактирует материальная точка) через \mathbf{v}_s .

Учитывая все вышесказанное, рассмотрим теперь два представления для реакции связи \mathbf{F}_c . Первое именуется представлением Лагранжа и имеет вид

$$\mathbf{F}_c = \lambda \nabla \Psi,$$

где необходимо определить $\lambda = \lambda(t)$, используя закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Здесь λ есть неопределенный множитель Лагранжа. Согласно Кейси [27] реакция связи \mathbf{F}_c перпендикулярна к поверхности $\Psi = 0$ и соответствует *виртуальной работе*. Такое представление иногда называют принципом Лагранжа или принципом Лагранжа – Даламбера. С физической точки зрения представление Лагранжа применимо в том случае, если материальная точка движется по гладкой поверхности.

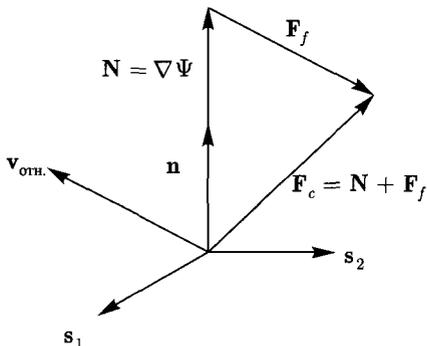


Рис. 2.4. Реакция связи \mathbf{F}_c , действующая на материальную точку при ее движении по шероховатой поверхности. Вектор скорости $\mathbf{v}_{отн.} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_s$ — это вектор скорости материальной точки относительно точки ее контакта с поверхностью

В случае шероховатой поверхности используется альтернативное представление, разработанное Чарльзом Августинном Кулоном (1736–1806)⁴:

$$\mathbf{F}_c = \lambda \nabla \Psi + \mathbf{F}_f,$$

где $\mathbf{N} = \lambda \nabla \Psi$ — нормальная сила, а сила трения определяется по формуле

$$\mathbf{F}_f = -\mu_d \|\lambda \nabla \Psi\| \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_s\|}.$$

Здесь μ_d — коэффициент динамического трения. Заметим, что тангенциальные составляющие реакции связи \mathbf{F}_c определяются вектором $\mathbf{v}_{отн.} = v_{отн.1} \mathbf{s}_1 + v_{отн.2} \mathbf{s}_2$ и препятствуют движению материальной точки относительно поверхности (рис. 2.4). Скорость $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_s\|$ иногда называют скоростью проскальзывания.

Механическая мощность реакции связи \mathbf{F}_c равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} &= \lambda \nabla \Psi \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тождеством

$$\dot{\Psi} = \nabla \Psi \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

⁴Это представление часто называют трением Амонтона – Кулона в честь Гийома Амонтона (1663–1705).

Для лагранжевого представления имеем $\mathbf{F}_f = \mathbf{0}$, поэтому если материальная точка движется по неподвижной поверхности (в этом случае $\Psi = \Psi(\mathbf{r})$), то \mathbf{F}_c не совершает работы. В противном случае можно ожидать, что реакция связи совершает работу, так как ее нормальная составляющая должна обеспечить, чтобы часть вектора скорости материальной точки равнялась \mathbf{v}_s . Если мы используем представление Кулона, кроме случая $\mathbf{v}_s = 0$, мы не можем предсказать, совершает ли реакция связи работу по перемещению материальной точки. Мы можем это сделать лишь тогда, когда $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$.

В качестве первого примера рассмотрим движение материальной точки по шероховатой сфере радиуса L_0 с центром в начале координат O . Для рассматриваемой поверхности уравнение связи имеет вид $\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_R - L_0 = 0$. Следовательно, $\nabla\Psi = \mathbf{e}_R$. Кроме того, $\mathbf{v} - \mathbf{v}_s = L_0\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + L_0\sin(\phi)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. В итоге получаем

$$\mathbf{F}_c = \lambda\mathbf{e}_R - \mu_d|\lambda|\frac{\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \sin(\phi)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2}}.$$

Здесь $|\lambda|$ обозначает величину нормальной реакции, действующей на материальную точку со стороны сферы. Если же взять сферический маятник, то \mathbf{F}_c будет иметь по Лагранжу следующее представление: $\mathbf{F}_c = \lambda\mathbf{e}_R$. Для сферического маятника величина $-\lambda$ соответствует усилию в стержне, соединяющем материальную точку с неподвижным началом координат O .

Две связи

Если на движение материальной точки накладываются две связи $\Psi_1(\mathbf{r}, t) = 0$ и $\Psi_2(\mathbf{r}, t) = 0$, то материальную точку можно рассматривать как движущуюся вдоль кривой, образованной пересечением двух поверхностей. Эти поверхности определяются уравнениями связи.

В каждой точке кривой можно провести единичный касательный вектор \mathbf{t} . Чтобы задать этот вектор, заметим, что $\nabla\Psi_1$ и $\nabla\Psi_2$ перпендикулярны к поверхностям, которым принадлежит кривая (см. рис. 1.9). Следовательно,

$$\mathbf{t} = \frac{\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2}{\|\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2\|}.$$

В каждый момент времени точка кривой, с которой контактирует материальная точка, имеет некоторую скорость. Обозначим эту скорость через \mathbf{v}_c .

Вектор скорости материальной точки относительно кривой равен $\mathbf{v} - \mathbf{v}_c = v\mathbf{t}$.

Вернемся теперь к заданию реакции связи. В лагранжевой записи будем иметь

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \nabla \Psi_1 + \lambda_2 \nabla \Psi_2,$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ подбирается так, чтобы удовлетворялось условие $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Как и в случае одиночной связи, представление Лагранжа применимо тогда, когда материальная точка движется вдоль гладкой кривой. При этом возникающая реакция связи перпендикулярна к этой кривой. В случае шероховатой кривой используется кулоновское представление:

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \nabla \Psi_1 + \lambda_2 \nabla \Psi_2 + \mathbf{F}_f,$$

где сила трения равна

$$\mathbf{F}_f = -\mu_d \|\lambda_1 \nabla \Psi_1 + \lambda_2 \nabla \Psi_2\| \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_c}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_c\|}.$$

Сила трения препятствует движению материальной точки относительно кривой, а нормальная реакция \mathbf{N} равна $\lambda_1 \nabla \Psi_1 + \lambda_2 \nabla \Psi_2$.

В рассматриваемом случае механическая мощность реакции связи \mathbf{F}_c равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} &= \lambda_1 \nabla \Psi_1 \cdot \mathbf{v} + \lambda_2 \nabla \Psi_2 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где мы снова воспользовались тождествами

$$\dot{\Psi}_1 = \nabla \Psi_1 \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0, \quad \dot{\Psi}_2 = \nabla \Psi_2 \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0.$$

Для представления Лагранжа справедливо выражение $\mathbf{F}_f = \mathbf{0}$, поэтому если материальная точка движется вдоль неподвижной кривой ($\Psi_1 = \Psi_1(\mathbf{r})$ и $\Psi_2 = \Psi_2(\mathbf{r})$), то реакция связи \mathbf{F}_c не совершает работы. В противном случае следует ожидать, что она совершает работу, так как нормальная составляющая вынуждает часть вектора скорости материальной точки принять значение, равное \mathbf{v}_c . Если используется кулоновское представление, то, как и в случае одиночной связи, мы не можем предсказать, совершает ли реакция связи работу по перемещению материальной точки. Прогноз возможен лишь в случае $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$.

Рассмотрим теперь несколько примеров. Напомним, что плоский маятник это материальная точка массы m , которая при помощи стержня длины L_0 подвешена к неподвижной точке O . Движение материальной точки ограничено вертикальной плоскостью. Таким образом, $\Psi_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r - L_0 = 0$ и $\Psi_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 = 0$. Путем несложных вычислений находим, что $\nabla \Psi_1 = \mathbf{e}_r$ и $\nabla \Psi_2 = \mathbf{E}_3$. Для этой механической системы применимо лагранжево представление:

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \mathbf{e}_r + \lambda_2 \mathbf{E}_3.$$

Здесь $\lambda_1 \mathbf{e}_r$ интерпретируется как усилие в стержне, а $\lambda_2 \mathbf{E}_3$ — как нормальная реакция, действующая на материальную точку со стороны плоскости. Если положить $L_0 = L_0(t)$, то представление реакции связи не изменится.

К плоскому маятнику имеет отношение и следующая система: материальная точка, движущаяся по шероховатой окружности радиуса $L_0 = L_0(t)$. Здесь на движение материальной точки накладываются те же связи, что и в случае плоского маятника, но представление Лагранжа неприменимо. Вместо него мы используем представление

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \mathbf{e}_r + \lambda_2 \mathbf{E}_3 - \mu_d \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \mathbf{e}_\theta,$$

где учитывается тот факт, что $\mathbf{v} - \mathbf{v}_c = L_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$.

Три связи

Вы, должно быть, уже заметили, что выражения, полученные нами для реакции связи в кулоновском представлении, не применимы тогда, когда материальная точка неподвижна относительно поверхности или кривой, по которой она движется. Все дело в том, что такая ситуация рассматривается нами как движение материальной точки с наложением трех связей: $\Psi_i(\mathbf{r}, t) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Ранее говорилось, что в случае, когда на материальную точку накладываются три связи, решение $\mathbf{r}(t)$ задачи на движение материальной точки сводится к решению трех уравнений $\Psi_i(\mathbf{r}, t) = 0$. Обозначим результирующее решение через $\mathbf{f}(t)$, т.е. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t)$. Это случай предопределенного движения, и единственное, для чего нам нужен закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, это вычислить с его помощью реакцию связи \mathbf{F}_c .

В случае трех связей лагранжево представление реакции связи и представление с использованием статического кулоновского трения оказываются эквивалентными. Эти две записи равнозначны даже несмотря на то, что относятся к двум разным физическим ситуациям.

Чтобы убедиться в их эквивалентности, рассмотрим сначала лагранжево представление

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \nabla \Psi_1 + \lambda_2 \nabla \Psi_2 + \lambda_3 \nabla \Psi_3.$$

Здесь λ_1, λ_2 и λ_3 — функции времени. Поскольку по умолчанию предполагается, что три связи являются независимыми, $\{\nabla \Psi_1, \nabla \Psi_2, \nabla \Psi_3\}$ образуют базис пространства \mathbb{E}^3 . Следовательно, вектор \mathbf{F}_c , записанный по Лагранжу, имеет три независимые составляющие. Кулоновское представление с использованием статического трения для частицы, неподвижной относительно поверхности или кривой, на которой она лежит, имеет вид

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f,$$

где величина вектора \mathbf{F}_f удовлетворяет критерию статического трения:

$$\|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|,$$

где μ_s — коэффициент трения покоя. Вектор \mathbf{F}_c , записанный по Кулону, опять же наделяется тремя независимыми составляющими. Получается, что обе записи предполагают один и тот же факт: реакция связи \mathbf{F}_c складывается из трех независимых неизвестных функций времени.

Если допустить, что равнодействующая сила \mathbf{F} имеет вид $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_a$, где \mathbf{F}_a — отличные от реакций связи силы, то получим, что вектор \mathbf{F}_c находится по закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, а именно:

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_a + m\mathbf{a} = -\mathbf{F}_a + m\ddot{\mathbf{f}}.$$

Решение \mathbf{F}_c будет одинаковым, независимо от того, используем мы для него лагранжево или кулоновское представление.

Неинтегрируемые связи

До сих пор мы рассматривали реакции связи для случаев интегрируемых связей. Если же на движение материальной точки накладывается неинтегрируемая связь

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0,$$

то перед нами опять встает вопрос, как записывать соответствующую реакцию связи. Воспользуемся консервативным подходом и запишем ее в виде

$$\mathbf{F}_c = \lambda \mathbf{f}.$$

Мы выбрали это представление по следующей причине: если случится так, что неинтегрируемая связь окажется интегрируемой, то выбранное нами представление совпадет с лагранжевым, речь о котором шла выше.

Рассмотрим далее движение материальной точки, удовлетворяющее двум связям, одна из которых является интегрируемой:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0.$$

Используя лагранжево представление, мы получим реакцию связи, действующую на материальную точку, в виде

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \nabla \Psi + \lambda_2 \mathbf{f}.$$

Допустим, что к материальной точке приложена сила \mathbf{F}_a . Тогда уравнениями движения материальной точки будут

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0, \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_a + \lambda_1 \nabla \Psi + \lambda_2 \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Полученная система уравнений состоит из восьми уравнений относительно восьми неизвестных: $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{r}$ и \mathbf{v} .

2.7. Законы сохранения

Кинематическая величина, характеризующая материальную точку и систему сил, действующих на материальную точку, называется инвариантной, если она не изменяется во время движения материальной точки. Инвариантные величины часто называют *интегралами движения*. Решение многих задач механики материальной точки основано на том факте, что импульс и/или энергия материальной точки сохраняется. На данном этапе изучения вопроса почти все законы сохранения являются *очевидными* и выводятся путем анализа. Для дальнейшего изложения, однако, полезно получить и понять соответствующие условия сохранения. Позже мы рассмотрим множество примеров сохранения кинематических величин.

Сохранение количества движения

Количество движения \mathbf{G} материальной точки определяется по формуле $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$. В интегральной форме теорема об изменении количества движения записывается как

$$\mathbf{G}(t) - \mathbf{G}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau) d\tau.$$

Мы видим, что величина $\mathbf{G}(t)$ остается неизменной в интервале времени (t_0, t) , если $\int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau) d\tau = 0$. Простейший случай подобного сохранения имеет место при $\mathbf{F}(\tau) = 0$.

В несколько иной форме этот закон сохранения применим к составляющей вектора \mathbf{G} , направление которой совпадает с направлением заданного вектора $\mathbf{b}(t)$. В этом случае $\frac{d}{dt}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{b}) = 0$. Это равенство выполнено при условии

$$\overline{\mathbf{G} \cdot \mathbf{b}} = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{b}} = 0.$$

Таким образом, если $\mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{b}} = 0$, то величина $\mathbf{G} \cdot \mathbf{b}$ сохраняется.

Свойство сохранения количества движения материальной точки встречается в рамках многих задач. Рассмотрим, например, материальную точку, на которую действует сила тяжести $\mathbf{F} = -mg\mathbf{E}_3$. Здесь составляющие \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 вектора \mathbf{G} остаются неизменными. Возьмем другой пример — столкновение материальной точки с гладкой вертикальной стеной. Здесь неизменными остаются составляющие вектора \mathbf{G} в двух касательных направлениях. В обоих примерах вектор \mathbf{b} является постоянным.

Сохранение кинетического момента

Кинетический момент материальной точки относительно неподвижной точки O определяется по формуле $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{G}$. Чтобы выяснить, как изменяется вектор \mathbf{H}_O во время движения материальной точки, необходимо выполнить простые расчеты:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{v} \times \mathbf{G} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Заметим, что в расчетах мы воспользовались законом $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Результирующую формулу называют теоремой о кинетическом моменте материальной точки:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Она гласит, что скорость изменения кинетического момента равна моменту равнодействующей силы, приложенной к материальной точке.

Сохранение кинетического момента проявляется, как правило, в двух формах. Во-первых, неизменным может оставаться сам вектор кинетического момента. Во-вторых, может сохраняться какая-либо его составляющая, направленная вдоль некоторого вектора, скажем $\mathbf{c}(t)$. В первом случае из теоремы о кинетическом моменте следует, что \mathbf{H}_O сохраняется тогда, когда вектор \mathbf{F} параллелен вектору \mathbf{r} . Задачи, в которых имеет место такой

случай, называются задачами о движении под действием центральной силы. Со времен Ньютона они занимают важное место в истории динамики. Применяя теорему о кинетическом моменте, легко видеть, что вторая форма закона сохранения, при которой неизменной остается величина $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{c}$, имеет место при $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{H}_O \cdot \dot{\mathbf{c}} = 0$.

Сохранение энергии

Прежде чем переходить к закону сохранения энергии, познакомимся с теоремой об изменении кинетической энергии. Эта теорема является следствием закона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; она связывает изменение кинетической энергии с механической мощностью силы \mathbf{F} :

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

На основе этой теоремы выводятся результаты, касающиеся сохранения энергии для одной материальной точки.

Теорема об изменении кинетической энергии доказывается очень просто. В первую очередь вспомним, что $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Дифференцируя T , находим

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2}(m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}.$$

С другой стороны, $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$, так что заменяя в приведенной выше формуле $m\dot{\mathbf{v}}$ на \mathbf{F} , получаем $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, что и требовалось доказать.

Для исследования задач на сохранение полной энергии материальной точки представим действующие на материальную точку силы как сумму равнодействующей консервативной силы $\mathbf{P} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ и равнодействующей неконсервативной силы $\mathbf{P}_{\text{некон.}}$: $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_{\text{некон.}}$. Здесь U обозначает сумму потенциальных энергий консервативных сил, действующих на материальную точку. По теореме об изменении кинетической энергии находим:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\dot{U} + \mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Определяя полную энергию материальной точки как

$$E = T + U,$$

получаем

$$\dot{E} = \mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v}.$$

Полученный результат гласит, что если во время движения материальной точки неконсервативные силы не совершают работы, то полная энергия материальной точки не изменяется.

Чтобы узнать, изменяется энергия или нет, достаточно, как правило, проверить, выполняется ли равенство $\mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Рассмотрим, например, сферический маятник с длиной $L_0 = L_0(t)$. Имеем

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{P}_{\text{некон.}} = \lambda e_R.$$

Следовательно,

$$E = T + mg\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{r}$$

и

$$\mathbf{P}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{v} = \lambda e_R \cdot \mathbf{v} = \dot{L}_0 \lambda.$$

Значит, если длина маятника неизменна ($\dot{L}_0 = 0$), то энергия E остается постоянной. С другой стороны, если $\dot{L}_0 \neq 0$, то реакция связи λe_R совершает работу, так как она сообщает материальной точке скорость в направлении e_R .

2.8. Динамика материальной точки, находящейся в гравитационном поле

В «Началах» Ньютона⁵ одной из центральных задач является задача о вращении одного тела массы m вокруг второго тела массы M . Столетие спустя подобного рода задачи были детально рассмотрены в знаменитом трактате Лагранжа «Аналитическая механика»⁶. К исследованию этого вопроса Ньютона частично подтолкнул Иоганн Кеплер (1571–1630) и его три знаменитых закона о движении планет Солнечной системы (известных к тому времени):

- I. Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- II. Радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает за равные промежутки времени секторы орбиты равной площади.

⁵См. [152, том 1, раздел III].

⁶См. [121, часть вторая, раздел VII].

III. Если обозначить через a большую полуось эллиптической орбиты, а через T — период обращения планеты по этой орбите, то для любых двух планет получим $\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$.

Более подробно о законах Кеплера читайте в работах [150, 175, 188, 220]. Авторы некоторых из перечисленных работ отмечают, что эти законы основываются на астрономических данных, полученных невооруженным глазом.

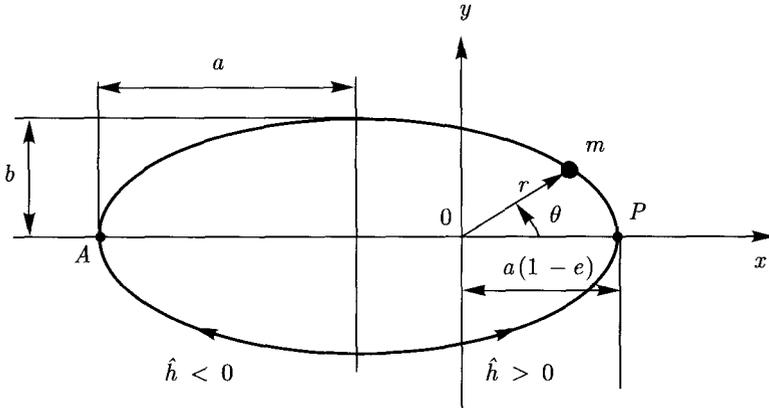


Рис. 2.5. Схема движения материальной точки массы m относительно неподвижной точки O по эллиптической траектории. Один из фокусов эллипса находится в точке O , эксцентриситет эллипса $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ меньше единицы, a и b — большая и малая полуоси эллипса соответственно. Точка A называется апоцентром, а точка P — перигентром

В наших рассуждениях мы допускаем, что тело массой M является неподвижным. Из упражнения 4.6 к главе 4 следует, что это ограничение легко устранить и применить полученные выше результаты к решению задачи о движении тел с массами m и M . Используемая при этом терминология во многом связана с эллипсами, поэтому для удобства мы приводим рис. 2.5, в котором поясняются многие термины, характеризующие эллипс, такие как эксцентриситет e , оси⁷ a и b . Площадь, которую заметает радиус-вектор материальной точки, определяется интегрированием вектора секторной скорости (1.1): $\mathbf{A} = \frac{1}{2m} \mathbf{H}_O$.

⁷Слово «оси» стоит в оригинале. Точнее, речь идет о полуосях эллипса. — Прим. ред.

Согласно [188] большая полуось a и орбитальный период T для планеты Меркурий равны 0,387 астрономических единиц (AU) и 0,241 года; для планеты Земля — 1 AU и 1 год; для Юпитера — 5,203 AU и 11,862 года; для Марса — 1,524 и 1,881 соответственно. Замечаем, что

$$\frac{0,387^3}{0,241^2} = 1,00, \quad \frac{5,203^3}{11,862^2} = 1,00, \quad \frac{1,524^3}{1,881^2} = 1,00.$$

Эти результаты согласуются с третьим законом Кеплера.

Итак, начнем с определения координат и построения уравнений движения для рассматриваемой задачи. Анализируя далее уравнения движения, мы применим закон сохранения кинетического момента и докажем, что движение должно быть плоским. Зная это, можно свести уравнения движения к единственному дифференциальному уравнению второго порядка, которое затем делается безразмерным и численно интегрируется⁸. Также мы рассмотрим альтернативный подход, который наиболее часто используется в учебниках. Описанный алгоритм позволяет классифицировать все пять возможных типов траекторий материальной точки.

Кинематика

В качестве начала координат O возьмем неподвижную материальную точку массы M . Тогда радиус-вектор \mathbf{r} другой материальной точки, имеющей массу m , будет удобно выразить в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{E}_3.$$

Выражения для векторов скорости и ускорения, зависящие от цилиндрических координат, мы приводили ранее.

Уравнения движения

Уравнения движения материальной точки находятся по закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где F — сила тяготения Ньютона, равная

$$\mathbf{F}_n = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}.$$

⁸Используемая нами процедура упрощения эквивалентна так называемому алгоритму приведения Лагранжа или Рауса, с помощью которого учитывается закон сохранения импульса в различных механических системах: от рассматриваемой нами до волчков Лагранжа и Пуассона. Более подробно об этой процедуре читайте в работах Гантмахера [67], Карапетяна и Румянцева [108, глава 2], а также Марседена и Ратиу [138].

Напомним, что она является консервативной, а ее потенциальная энергия обозначается через U_n .

Используя (2.3), запишем уравнение $\mathbf{F}_n = m\mathbf{a}$ в компонентной форме. В результате получим три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{GMmr}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3}, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0, \\ m\ddot{z} &= -\frac{GMmz}{(r^2 + z^2)^3}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для заданного набора из шести начальных условий⁹ эти уравнения дают $r(t)$, $\theta(t)$ и $z(t)$, поэтому они могут быть использованы для расчета положения материальной точки массы m .

Законы сохранения

При решении дифференциальных уравнений (2.6) неизменными остаются две важные кинематические величины: полная энергия $E = T + U$, где $U = U_n$, и кинетический момент \mathbf{H}_O материальной точки. Предлагаем читателю самостоятельно прийти к этому результату с помощью теоремы об изменении кинетической энергии и теоремы о кинетическом моменте.

Из условия сохранения кинетического момента следует, что

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{v}(t_0).$$

Начальный радиус-вектор $\mathbf{r}(t_0)$ и начальный вектор скорости $\mathbf{v}(t_0)$ задают в общем случае плоскость, в которой происходит движение материальной точки. Эта плоскость называется орбитальной. Нормаль к орбитальной плоскости параллельна вектору \mathbf{H}_O . Допустим, мы можем выбирать вектор \mathbf{E}_3 . Тогда выберем его так, чтобы $\mathbf{H}_O = \hat{h}\mathbf{E}_3$, где $\hat{h} = mr^2\dot{\theta}$. В этом случае векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} будут иметь составляющие лишь в направлениях \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , т. е. $z(t) = 0$ и $\dot{z}(t) = 0$. Таким образом, мы убеждаемся, что кинетический момент не изменяется и что движение происходит в плоскости. Поскольку \mathbf{H}_O и вектор секторной скорости — синонимы, условие сохранения кинетического момента в этой задаче часто называют «интегралом площадей»¹⁰.

⁹Шесть необходимых начальных условий это: $r(t_0)$, $\theta(t_0)$, $z(t_0)$, $\dot{r}(t_0)$, $\dot{\theta}(t_0)$, $\dot{z}(t_0)$.

¹⁰См., например, работу Муултона [150, раздел 86].

Мы по умолчанию проигнорировали случай $\mathbf{r}(t_0) \parallel \mathbf{v}(t_0)$, в котором вектор \mathbf{H}_O является нулевым и должен таковым оставаться. Значит, движение материальной точки здесь происходит по прямой. Для удобства допустим, что эта прямая принадлежит плоскости векторов $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2$. Можно показать, что движение материальной точки приведет в конечном итоге к столкновению с материальной точкой массы M , находящейся в начале координат. Следовательно, для системы, не обладающей начальным кинетическим моментом, столкновение неизбежно.

Решение уравнений движения материальной точки

В силу сохранения кинетического момента выберем \mathbf{E}_3 так, чтобы для материальной точки выполнялись равенства $z(t) = 0$ и $\dot{z}(t) = 0$. В этом случае направление вектора \mathbf{H}_O будет совпадать с направлением вектора \mathbf{E}_3 . В результате уравнения движения сводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{GMm}{r^2}, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Второе из этих уравнений можно выразить в виде

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (2.8)$$

Полученное уравнение эквивалентно сохранению величины $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$. Опираясь на это условие, мы можем исключить $\dot{\theta}$ из (2.7) так, что в конечном итоге придем к единственному определяющему дифференциальному уравнению:

$$m\ddot{r} - \frac{\hat{h}^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (2.9)$$

Здесь \hat{h} находится по начальному положению и начальной скорости материальной точки:

$$\hat{h} = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3 = (m\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{v}(t_0)) \cdot \mathbf{E}_3.$$

Если материальная точка не обладает кинетическим моментом, то из уравнения (2.8) следует, что $\dot{\theta} = 0$ и, следовательно, $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$. Нетрудно заметить, что при увеличении t получаем $r(t) \rightarrow 0$. Происходит столкновение, о котором мы говорили ранее.

Для заданных $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$ можно найти \hat{h} и затем проинтегрировать (2.9), чтобы найти $r(t)$ ¹¹. Затем можно вычислить координату $\theta(t)$, интегрируя уравнение

$$\dot{\theta} = \frac{\hat{h}}{mr^2}. \quad (2.10)$$

Далее мы находим выражения для $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$ и $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ и строим орбиту материальной точки.

Простейшее решение уравнения (2.9) достигается при $r = \text{const}$: $r(t) = r_0$ и $\dot{r}(t) = 0$. В этом случае уравнение (2.9) удовлетворяется при условии, что

$$r_0 = \frac{\hat{h}^2}{GMm^2}. \quad (2.11)$$

С помощью (2.10) покажем также, что $\dot{\theta} = \text{const}$:

$$\dot{\theta}(t) = \omega_K = \frac{\hat{h}}{mr_0^2} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}. \quad (2.12)$$

Частота ω_K называется частотой Кеплера. С физической точки зрения получаем, материальная точка движется по круговой орбите радиуса r_0 с постоянной скоростью $r_0\omega_K$ относительно неподвижного тела массы M .

При численном интегрировании (2.9) временной интервал интегрирования оказывается очень большим, поэтому для удобства лучше сделать уравнения движения безразмерными. Возьмем в качестве безразмерных переменных величину $w = \frac{r}{r_0}$ и время $\tau = \omega_K t$. Используя тождества $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dr}{d\tau} = \omega_K \frac{dr}{d\tau}$, упрощаем (2.9) и (2.10), приводя их к виду

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} = \frac{1}{w^3} - \frac{1}{w^2}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{w^2}. \quad (2.13)$$

Обратите внимание, что мы свели задачу о движении материальной точки к интегрированию двух дифференциальных уравнений.

Первое дифференциальное уравнение из (2.13) является дифференциальным уравнением второго порядка для $w(\tau)$. Вместо того, чтобы рассчитывать $w(\tau)$ для нескольких наборов начальных условий, можно воспользоваться качественным методом представления решения этого уравнения.

¹¹ Дифференциальное уравнение (2.9) имеет аналитическое решение, которое можно выразить с помощью эллиптических функций Якоби. Этот вопрос, однако, выходит за рамки нашего рассмотрения, поэтому за соответствующими пояснениями касательно такого интегрирования мы отсылаем читателя к работе Уиттекера [228].

Этот метод заключается в построении так называемого *фазового портрета*, когда $\frac{dw}{d\tau}$ изображается на графике как функция от $w(\tau)$ ¹². Равновесные точки дифференциального уравнения второго порядка соответствуют таким точкам фазового портрета, в которых $\frac{dw}{d\tau} = 0$ и $w(\tau) = \text{const}$. Чтобы найти эти точки, положим $\frac{dw}{d\tau} = 0$ и $\frac{d^2w}{d\tau^2} = 0$ в дифференциальном уравнении второго порядка для $w(\tau)$ и решим его для конечных постоянных значений $w(\tau)$. Позже в этой главе мы приведем несколько примеров дифференциальных уравнений, имеющих множество равновесных точек.

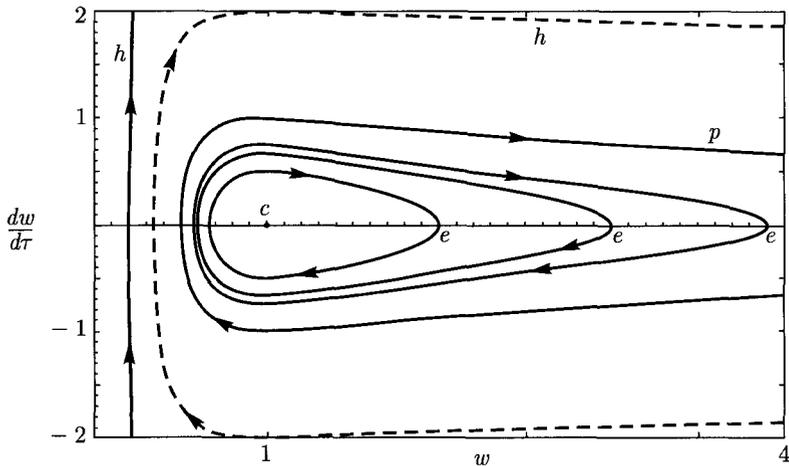


Рис. 2.6. Фазовый портрет для первого уравнения из (2.13). Траектории e и h соответствуют эллиптической и гиперболической орбитам материальной точки; точка c соответствует круговой орбите; траектория p соответствует параболическим орбитам. Стрелками показаны направления роста τ

Вернемся к нашей задаче. На рис. 2.6 показан фазовый портрет для первого уравнения из (2.13). Видим, что равновесная точка $(w, \frac{dw}{d\tau}) = (1, 0)$ соответствует круговой орбите материальной точки. Замкнутые траектории вокруг этой точки соответствуют эллиптическим орбитам¹³. Оставшиеся траектории на этом рисунке соответствуют гиперболическим орбитам материальной точки: на этих орбитах материальная точка единственный раз

¹²Построение фазовых портретов — стандартный метод графического представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [10, 18, 81, 229]).

¹³Для построения этих орбит необходимо второе интегрирование с учетом уравнения $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{w^2}$. Попробуйте провести его самостоятельно.

проходит вблизи равновесной точки и больше никогда к ней не возвращается. На рисунке также показан интересный случай — движение материальной точки по параболической траектории. Она отделяет эллиптические орбиты от гиперболических¹⁴.

Орбитальные движения

Существует альтернатива описанному в предыдущем разделе подходу, причём ей следуют в большинстве учебников по динамике. Этот альтернативный подход заключается в построении решения как функции от θ , а не t .

Воспользуемся сначала цепным правилом дифференцирования сложной функции, записав второе уравнение системы (2.13) в виде (2.10). В результате получим:

$$\dot{r} = -\frac{\hat{h}}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \ddot{r} = -\frac{\hat{h}^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Перепишем с помощью последнего выражения первое уравнение из (2.7) и получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}, \quad (2.14)$$

где r_0 находится по (2.11).

Уравнение (2.14) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, позволяющее найти $\frac{1}{r}$ как функцию от θ . Точное решение имеет вид

$$r = r(\theta) = r_0(1 + e \cos(\theta - \theta_p))^{-1}, \quad (2.15)$$

где e и θ_p — постоянные (определяемые начальными условиями для координаты и скорости материальной точки). Чтобы найти аналитическое выражение для $\theta(t)$, можно проинтегрировать уравнение $\frac{m r^2(\theta)}{\hat{h}} d\theta = dt$. Попробуйте сделать это самостоятельно. Решение (2.15) есть коническое сечение. Из теории конических сечений известно, что при $e = 0$ орбита ($r(\theta)$) является круговой, при $0 < e < 1$ — эллиптической, при $e = 1$ — параболической, а при $e > 1$ — гиперболической. Из рис. 2.5 следует, что $b = \frac{\hat{h}^2}{GMm^2}$.

¹⁴На языке теории динамических систем это означает, что гомоклиническая орбита, проходящая через точку $(w, \frac{dw}{d\tau}) = (0, 5; 0)$, соединяется с неподвижной точкой $(w, \frac{dw}{d\tau}) = (\infty, 0)$ и соответствует параболической орбите материальной точки.

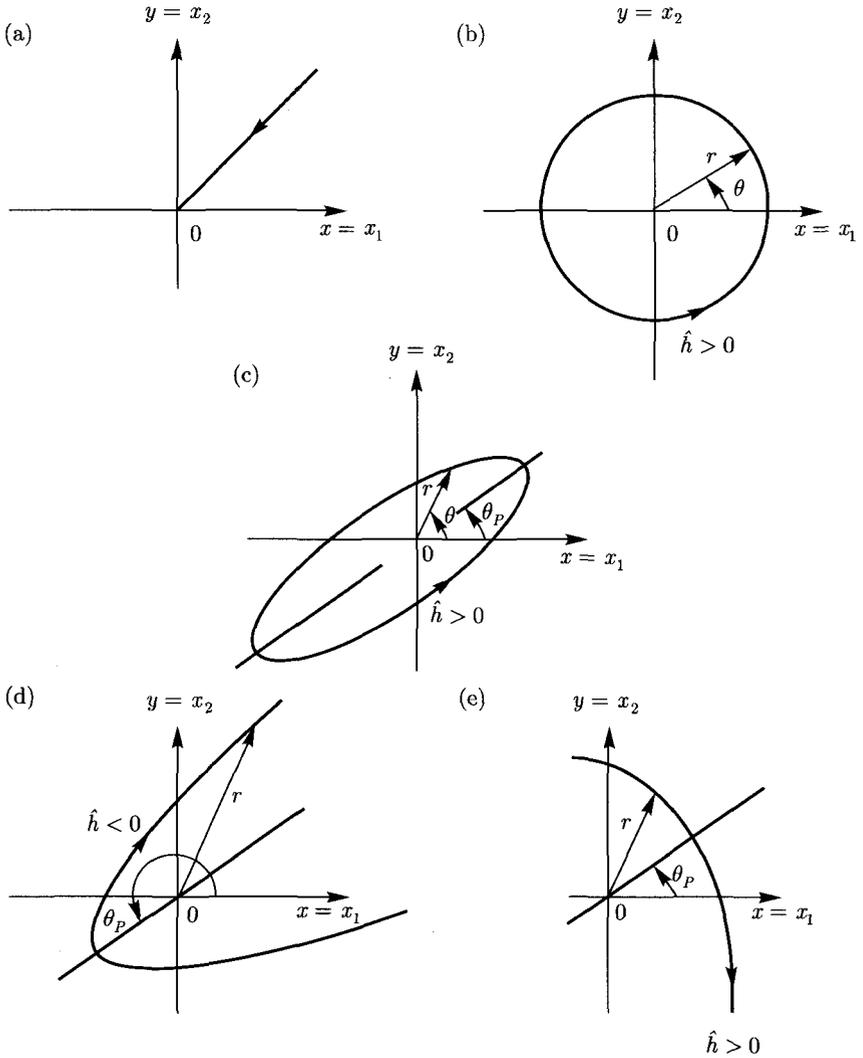


Рис. 2.7. Схематичное изображение четырех типов орбит для материальной точки массы m , движущейся относительно неподвижной точки O : (а) прямая, (б) круговая орбита ($e = 0$), (с) эллиптическая орбита ($0 < e < 1$), (д) параболическая орбита ($e = 1$) и (е) гиперболическая орбита ($e > 1$). Для каждой из орбит (с)–(е) берутся разные значения θ_p

Чтобы получить решения для e и θ_p , сделаем допущение, что нам известны значения $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$. Далее найдем \mathbf{H}_O и определяем E_3 и \hat{h} . Чтобы рассчитать θ_p , сначала надо найти \dot{r} , используя (2.15) и цепное правило дифференцирования сложной функции:

$$\dot{r}(t) = - \left(\frac{GMm}{\hat{h}} \right) e \sin(\theta(t) - \theta_p). \quad (2.16)$$

Вычислим также полную энергию E_0 материальной точки:

$$E_0 = \frac{m}{2} \mathbf{v}(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0) - \frac{GMm}{\|\mathbf{r}(t_0)\|}. \quad (2.17)$$

Поскольку полная энергия не изменяется, значение этой кинематической величины при $\theta = \theta_p$ также равно E_0 . Комбинируя (2.15) и (2.16), получаем

$$E_0 = \frac{G^2 M^2 m^2}{2\hat{h}^2} (e^2 - 1). \quad (2.18)$$

Таким образом, по заданным начальным условиям находим значения e и θ_p . Метод заключается в том, чтобы при помощи (2.17) рассчитать E_0 , а затем по (2.18) вычислить $e \geq 0$. Зная e , находим далее θ_p при помощи (2.16). Наконец, рассчитываем $r(\theta)$ и $\theta(t)$. В зависимости от значения e результирующие траектории будут иметь один из четырех типов: окружность, эллипс, парабола или гипербола (рис. 2.7).

Для полноты уравнение (2.14) можно было бы получить в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 1, \quad (2.19)$$

где $u = \frac{1}{w} = \frac{r_0}{r}$. На рис. 2.8 показан фазовый портрет для этого уравнения. В отличие от фазового портрета, который мы приводили ранее, параболическая орбита здесь замкнутая. Как и в предыдущем случае, чтобы понять физический смысл траекторий, изображенных на рис. 2.8, необходимо построить радиус-вектор материальной точки для каждой конкретной орбиты.

Замечания

Рассмотренная задача — редкий случай, когда можно составить полную классификацию движений материальной точки. Позже нам встретится немало задач, в которых такая классификация не проведена и, более того, невозможна. Поэтому наши предыдущие результаты будем считать эталонными.

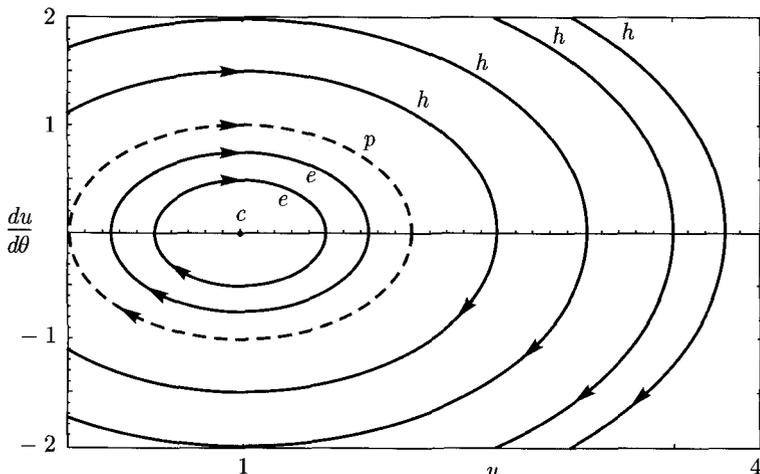


Рис. 2.8. Фазовый портрет для уравнения (2.19). Траектории e и h соответствуют эллиптической и гиперболической орбитам материальной точки, точка c соответствует круговой орбите, а траектория p соответствует параболическим орбитам. Стрелками показано направление роста значений θ . Для параболической траектории значения угла варьируются от $-\pi$ до π

Теме данного раздела посвящено огромное количество учебников, из которых, в частности, можно подробнее узнать о скоростях отрыва и переходных орбитах; см., например, книгу Баруха [14]. В литературе также встречаются обобщения этой задачи, два из которых мы рассмотрим позже в книге. Прежде чем переходить к следующему разделу, покажем, что эллиптические (и круговые) орбиты согласуются с законами Кеплера. Сразу заметим, что для первого закона Кеплера это утверждение тривиально, а для второго — является следствием сохранения кинетического момента. Чтобы доказать, что эллиптические орбиты удовлетворяют третьему закону Кеплера, необходимо рассчитать период T прохождения материальной точки по эллиптической орбите. Покажите самостоятельно, что $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}$, и тогда утверждение будет доказано.

2.9. Динамика материальной точки на вращающемся конусе

Как показано на рис. 1.7d, материальная точка массы m движется по поверхности конуса. Она соединена с неподвижной вершиной O конуса

пружиной жесткости K . В свободной состоянии длина пружины равна L_0 . Допустим, что поверхность конуса шероховатая и что он вращается относительно своей оси симметрии с угловой скоростью Ω_0 . Необходимо получить уравнения движения материальной точки и сделать некоторые выводы касательно ее динамики.

Координаты, связи и скорости

В разделе 1.7 говорилось, что при движении материальной точки по поверхности конуса на нее накладывается единственная связь $\Psi = 0$. Эту связь удобно выразить в сферических координатах:

$$\Psi = \phi + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

В будущем нам понадобится градиент функции Ψ , он равен $\nabla\Psi = \frac{1}{R}\mathbf{e}_\phi$. Так как конус вращается со скоростью Ω_0 , скорость материальной точки относительно конуса равна

$$\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\cos(\alpha)(\dot{\theta} - \Omega_0)\mathbf{e}_\theta.$$

Случай, когда материальная точка неподвижна относительно конуса, рассмотрим позже.

Силы

На материальную точку действует сила земного тяготения $-mg\mathbf{E}_3$ и сила сжатия пружины, равная

$$\mathbf{F}_s = -K(R - L_0)\mathbf{e}_R,$$

где K — жесткость пружины, а L_0 — длина пружины в свободном состоянии. Пусть материальная точка движется относительно поверхности конуса, тогда реакция связи \mathbf{F}_c , действующая на материальную точку, будет равна

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f,$$

где \mathbf{N} — нормальная сила, параллельная $\nabla\Psi$:

$$\mathbf{N} = \frac{\lambda}{R}\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{F}_f = -\mu_d\|\mathbf{N}\|\frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|}.$$

Таким образом, равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, равна $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s - mg\mathbf{E}_3$.

Уравнения движения

Чтобы получить уравнения движения, запишем уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ в сферических координатах (см. (2.4)) и наложим на движение материальной точки связь $\Psi = 0$. Получим:

$$\begin{aligned} m(\ddot{R} - R\cos^2(\alpha)\dot{\theta}^2) &= -K(R - L_0) + \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{e}_R - mg\sin(\alpha), \\ m(R\cos(\alpha)\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}\cos(\alpha)) &= \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{e}_\theta, \\ -mR\sin(\alpha)\cos(\alpha)\dot{\theta}^2 &= \frac{\lambda}{R} + mg\cos(\alpha). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Первые два уравнения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения для R и θ . Третье уравнение можно разрешить относительно λ (и следовательно, нормальной реакции) как функцию движения материальной точки.

Чтобы проинтегрировать уравнения (2.20), следует привести их к безразмерному виду. В качестве меры длины возьмем L_0 , а в качестве меры времени $\sqrt{\frac{L_0}{g}}$:

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{L_0}}, \quad w = \frac{R}{L_0}.$$

С помощью тождеств вида $\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dR}{d\tau} = \sqrt{\frac{g}{L_0}} \frac{dR}{d\tau}$ можно переписать уравнения (2.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\tau^2} &= w\cos^2(\alpha) \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - \omega^2(w - 1) - \sin(\alpha) - \\ &\quad - \mu_k n \frac{\frac{dw}{d\tau}}{\sqrt{w^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} - \omega_0 \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2}}, \\ \frac{d}{d\tau} \left(w^2 \cos^2(\alpha) \frac{d\theta}{d\tau} \right) &= -\mu_k n (w \cos(\alpha)) \frac{w \left(\frac{d\theta}{d\tau} - \omega_0 \right)}{\sqrt{w^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} - \omega_0 \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Постоянные и безразмерная нормальная реакция, фигурирующие в этих уравнениях, равны

$$\omega^2 = \frac{KL_0}{mg}, \quad \omega_0 = \Omega\sqrt{\frac{L_0}{g}}, \quad n = \frac{\|\mathbf{N}\|}{mg} = \cos(\alpha) + \frac{h^2}{w} + \operatorname{tg}(\alpha).$$

Кроме того, можно показать, что полная энергия E и кинетический момент $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$, приведенные к безразмерному виду, равны

$$\frac{E}{mgL_0} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 w^2 \cos^2(\alpha) \right) + \frac{\omega^2}{2} (w-1)^2 + w \sin(\alpha),$$

$$h = \frac{\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3}{m\sqrt{gL_0^3}} = w^2 \cos^2(\alpha) \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Заметим, что, обезразмерив уравнения движения, мы уменьшили число используемых параметров на два.

Случай статического трения

Если материальная точка неподвижна относительно конуса, ее вектор скорости равен $\mathbf{v} = R_0 \Omega_0 \cos(\alpha) \mathbf{e}_\theta$. Кроме того, на материальную точку накладываются три связи, при этом сила трения и нормальные реакции образуют систему трех независимых сил, которые определяются через эти связи:

$$\mathbf{F}_c = \frac{\lambda}{R_0} \mathbf{e}_\phi + \frac{\lambda_1}{R_0 \cos(\alpha)} \mathbf{e}_\theta + \lambda_2 \mathbf{e}_R.$$

Чтобы найти λ , λ_1 и λ_2 , применим уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. После некоторых преобразований, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_f &= (K(R_0 - L_0) + mg \sin(\alpha) - mR_0 \cos^2(\alpha) \Omega_0^2) \mathbf{e}_R + \\ &\quad + mR_0 \cos(\alpha) \dot{\Omega}_0 \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{N} &= -(mg \cos(\alpha) + mR_0 \Omega_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

В таком состоянии материальная точка может находиться лишь при условии, что на нее действует достаточная сила трения. Условием достаточности является критерий статического трения $\|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|$. Если критерий удовлетворяется, то материальная точка, покоящаяся на поверхности конуса, останется неподвижной. В противном случае она начнет скользить в направлении, параллельном силе \mathbf{F}_f .¹⁵

Гладкий конус

Если материальная точка движется по гладкой поверхности конуса, можно существенно упростить уравнения (2.21). Как и в предыдущей

¹⁵Чтобы описать начальное движение материальной точки, скользящей по поверхности конуса, необходимо определить начальное направление скольжения. Зная начальное направление скольжения, можно рассчитать $\frac{\mathbf{v}_{\text{отн}}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн}}\|}$ даже при $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{0}$.

задаче, применим закон сохранения кинетического момента и сведем (2.21) к единственному уравнению для w :

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} = \frac{h^2}{w^3 \cos^2(\alpha)} - \omega^2(w - 1) - \sin(\alpha). \quad (2.22)$$

Интегрируя, находим зависимость $w(\tau)$. Второе интегрирование с учетом выражения $w^2 \cos^2(\alpha) \frac{d\theta}{d\tau} = h$ дает зависимость $\theta(\tau)$. Равновесие в точке с координатами $(w, \frac{d\theta}{d\tau}) = (w_0, 0)$, где w_0 — решение уравнения

$$\frac{h^2}{w_0^3 \cos^2(\alpha)} - \omega^2(w_0 - 1) - \sin(\alpha) = 0,$$

соответствует круговой орбите материальной точки с радиусом $r = L_0 w_0 \cos(\alpha)$. На рис. 2.9 показаны некоторые другие траектории w на плоскости $w, \frac{dw}{d\tau}$. Кроме них, на рисунке изображены возможные траектории материальной точки, соответствующие $w(\tau)$. В отличие от задачи о движении материальной точки под действием силы \mathbf{F}_n (раздел 2.8), здесь имеет место простая классификация траекторий движения точки по поверхности конуса.

2.10. Ударная связь

Возвратимся вновь к связи $\dot{y}x = 0$ (см. (1.15)). Построим уравнения движения материальной точки с учетом этой связи при условии, что на нее также действует сила $\mathbf{F}_a = P_1 \mathbf{E}_1 + P_2 \mathbf{E}_2$.

Во-первых, допустим, что реакция связи, реализующая связь $\dot{y}x = 0$, задается традиционным образом как

$$\mathbf{F}_c = \lambda x \mathbf{E}_y, \quad (2.23)$$

где λ — множитель Лагранжа. Заметим, что если $x = 0$, то $\mathbf{F}_c = \mathbf{0}$. Из теоремы об изменении количества движения находим, что уравнения движения материальной точки имеют вид

$$\begin{aligned} x\dot{y} &= 0, \\ m\ddot{x} &= P_1, \\ m\ddot{y} &= P_2 + \lambda x, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

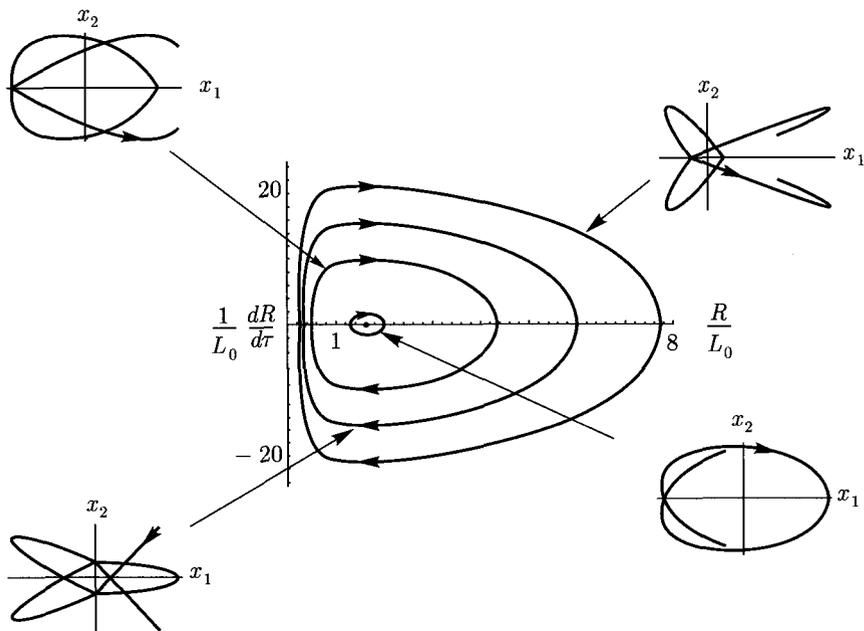


Рис. 2.9. Фазовый портрет для уравнения (2.22) и плоские проекции траекторий материальной точки. Предполагается, что $\alpha = 20^\circ$, $h = 5$ и $\omega^2 = 10$. Равновесная точка, соответствующая круговой траектории, имеет координаты $(w_0, 0) = (1,58896; 0)$

Уравнение движения в направлении оси z интегрируется и интерпретируется элементарно, поэтому впредь будем пренебрегать этим направлением и считать движение плоским.

Если на P_1 и P_2 наложить некоторые ограничения, то легко получить точные решения первых трех уравнений (2.24), описывающие прямолинейное движение

$$y(t) = y_0, \quad x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{P_1}{m} du d\tau, \quad \lambda = \frac{F_y}{x(t)} \quad (2.25)$$

и

$$x = 0, \quad y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{P_2}{m} du d\tau. \quad (2.26)$$

Здесь $x_0 = x(0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $y_0 = y(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ — начальные условия. Анализируя эти решения уравнений движения, приходим к выводу, что при $x = 0$ значение λ не определяется.

Удар

Возвращаясь к рис. 1.11, вспомним, что ударную связь можно разложить на две кусочно-интегрируемые связи:

$$\dot{y} = 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x = 0.$$

В точках перехода от одной из этих интегрируемых связей к другой вектор скорости \mathbf{v} не является непрерывным, поэтому соответствующий вектор ускорения не определяется. В момент перехода выражение (2.23) для реакции связи не применимо. Мы можем рассчитать лишь импульс \mathbf{I}_c этой силы при помощи формулы (2.1). Если предположить, что переход наблюдается в момент времени $t = T$, то получим:

$$\mathbf{I}_c = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(m\mathbf{v}(T + \sigma) - m\mathbf{v}(T - \sigma) - \int_{T-\sigma}^{T+\sigma} \mathbf{F}_a d\tau \right).$$

Чтобы, к примеру, совершить движение из точки A в точку B (рис. 2.10b), материальная точка должна, как минимум, в двух положениях иметь разрыв вектора скорости. Это значит, что материальная точка подвергнется ударам, обусловленным импульсами \mathbf{I}_{c1} и \mathbf{I}_{c2} . На рис. 2.10а показан случай непрерывного движения материальной точки. В этом случае удар отсутствует и, следовательно, $\mathbf{I}_c = 0$.

Если связь не дает импульса \mathbf{I}_c , то это значит, что на движение материальной точки накладывается единственная голономная связь. В зависимости от начального положения и начальной скорости материальной точки эта связь имеет вид $y = y_0$ или $x = 0$. В качестве самостоятельного упражнения продумайте, как может быть реализована связь $\dot{y}x = 0$: представьте, что слева от оси y на рис. 1.11 находится твердая стена.

2.11. Упрощенная модель американских горок

Представьте, что вы находитесь в тележке на вершине американских горок. При отсутствии трения легчайший толчок приведет тележку в движение. Если будет присутствовать кулоновское трение с прерывистым

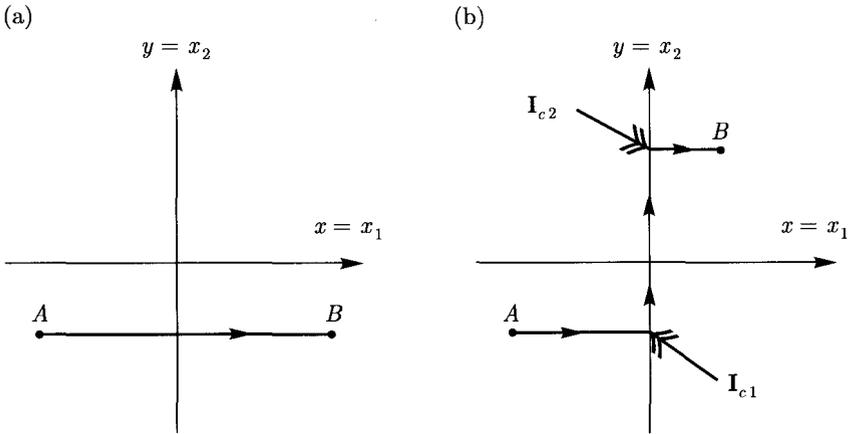


Рис. 2.10. Два возможных движения материальной точки с наложенной связью $\dot{y}x = 0$. (a) Материальная точка движется из точки A в точку B при отсутствии импульса I_c в точке $x = 0$. (b) Движение материальной точки из A в B , при котором вектор скорости \mathbf{v} дважды терпит разрыв

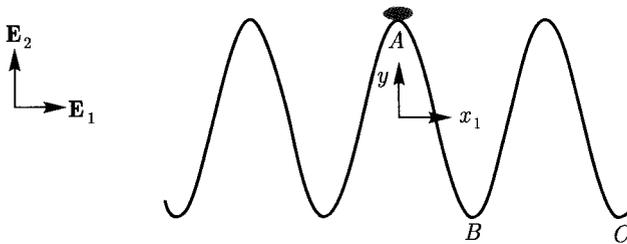


Рис. 2.11. Схема движения материальной точки по косинусоидальной траектории

скольжением, то ситуация изменится. В любом случае тележка когда-нибудь остановится, возможно даже вблизи самой верхней точки горок. При наличии достаточно большого статического трения тележка может остановиться в любой точке трека. Величина, характеризующая как быстро в этом случае произойдет остановка тележки, называется коэффициентом динамического трения.

В этом разделе мы рассмотрим простейшую модель американских горок, учитывающую скачкообразное движение при трении¹⁶. Сначала мы

¹⁶Модель была разработана при сотрудничестве с Генри Лопезом [130].

получим дифференциальное уравнение, описывающее движение тележки по треку, а затем с помощью численного интегрирования проанализируем динамику тележки.

Уравнения движения

Чтобы смоделировать движение тележки по американским горкам, можно рассмотреть тележку как материальную точку массы m , движущуюся вдоль неподвижной плоской кривой: $y = f(x_1), z = 0$. В этом случае на движение материальной точки накладываются две связи $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$, где

$$\Psi_1 = y - f(x_1), \quad \Psi_2 = z.$$

Эти связи обуславливаются силой $\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$. Рассчитаем единичный касательный вектор \mathbf{e}_t , единичный вектор нормали \mathbf{e}_n и вектор бинормали \mathbf{e}_b к этой кривой [159]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} (\mathbf{E}_1 + f' \mathbf{E}_2), \\ \mathbf{e}_n &= \frac{\text{sign}(f'')}{\sqrt{1 + f'^2}} (\mathbf{E}_2 - f' \mathbf{E}_1), \\ \mathbf{e}_b &= \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

где знак штриха обозначает производную по x_1 . Эти три вектора составляют тройку Френе, которая рассчитывается при условии $\dot{x}_1 > 0$. На тележку действует нормальная реакция $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_n + \lambda_2 \mathbf{E}_3$, сила трения $F_f \mathbf{e}_t$ и направленная вертикально вниз сила тяжести $-mg \mathbf{E}_2$ (рис. 2.11).

Вектор ускорения для материальной точки, движущейся вдоль кривой со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t$, равен

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{e}_t + \kappa v^2 \mathbf{e}_n,$$

где κ — кривизна пространственной кривой:

$$\kappa = \frac{|f''|}{(\sqrt{1 + f'^2})^3}.$$

Взяв составляющие \mathbf{e}_t и \mathbf{e}_n векторного уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, можно легко получить уравнения движения тележки и нормальную реакцию:

$$m \left((1 + f'^2) \ddot{x}_1 + f'' f' \dot{x}_1^2 \right) = -mgf' - \mu_d \sqrt{1 + f'^2} \|\mathbf{N}\| \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|}, \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} (\text{sign}(f'')mg + |f''|m\dot{x}_1^2) \mathbf{e}_n, \quad \text{если } f'' \neq 0, \\ &= \frac{mg}{\sqrt{1+f'^2}} \mathbf{e}_n, \quad \text{если } f'' = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Эти уравнения применимы тогда, когда тележка движется, а трение носит динамический характер. В случае когда тележка неподвижна, на нее действует сила трения покоя. Тележка останется неподвижной до тех пор, пока удовлетворяется критерий статического трения:

$$\left| \frac{mgf'}{\sqrt{1+f'^2}} \right| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|. \quad (2.29)$$

С учетом (2.28) условие (2.29) можно упростить до вида

$$|f'| \leq \mu_s. \quad (2.30)$$

Это уравнение лежит в основе классического эксперимента по измерению коэффициента статического трения: на наклонную плоскость помещается брусок; угол наклона плоскости медленно увеличивают, пока брусок не начинает скользить. Тангенс угла наклона равен μ_s . Получим с помощью (2.30) непрерывную последовательность точек, в которых тележка продолжает оставаться неподвижной.

Выберем косинусоидальную траекторию

$$f(x_1) = A \cos\left(\frac{\pi x_1}{L_0}\right) \quad (2.31)$$

и определим следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{x_1}{L_0}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{L_0}} t.$$

Возможны, конечно, и другие траектории; в книге Шоу и Хаддоу [193] описывается несколько интересных вариантов кривой $f(x)$. Еще один интересный вариант — спираль Эйлера (клотоида) — характерный для американских горок типа «мертвая петля».

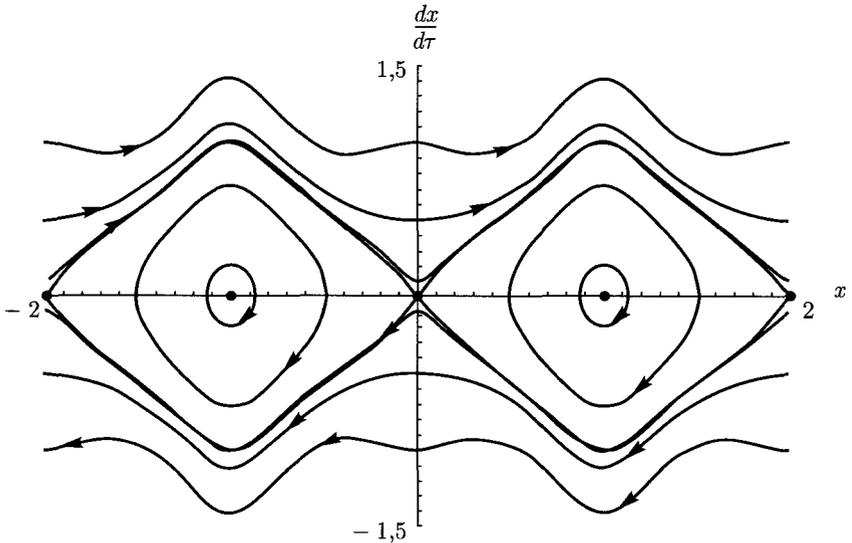


Рис. 2.12. Фазовый портрет для уравнений (2.27)–(2.29) при отсутствии трения. Точки на оси $x = \frac{x_1}{L_0}$, обозначенные как \cdot , соответствуют равновесным положениям тележки. Рисунок построен для $\frac{A}{L_0} = 0,25$ и $\mu_s = \mu_d = 0,0$

Состояния покоя

Если американские горки имеют гладкий трек, то тележка будет двигаться бесконечно; на рис. 2.12 изображена часть фазового портрета для этого случая. Мы говорили, что в точке $(x = 0, \frac{dx}{dt} = 0)$ тележка находится в состоянии равновесия. При этом она покоится на самой верхней точке американских горок. По рис. 2.13а видно, что такого рода равновесия являются седловыми точками. Два равновесных положения в точках $(x = \pm 1, \frac{dx}{dt} = 0)$ соответствуют случаю, когда тележка покоится в одной из нижних точек американских горок. Анализируя фазовый портрет на рис. 2.13с, легко понять, что равновесия этого типа являются центрами. Равновесные положения в точках $(x = (-2, 0, 2), \frac{dx}{dt} = 0)$ соответствуют случаю, когда тележка покоится в одной из верхних точек трека.

При наличии трения со скачкообразным движением фазовый портрет существенно изменяется (рис. 2.14). Во-первых, седлообразные участки расщепляются; между двумя такими расщеплениями находится область прилипания (рис. 2.13b). В зависимости от значения x_1 в эту область входят либо $\dot{x}_1 > 0$, либо $\dot{x}_1 < 0$. Если тележка войдет в эту область, она

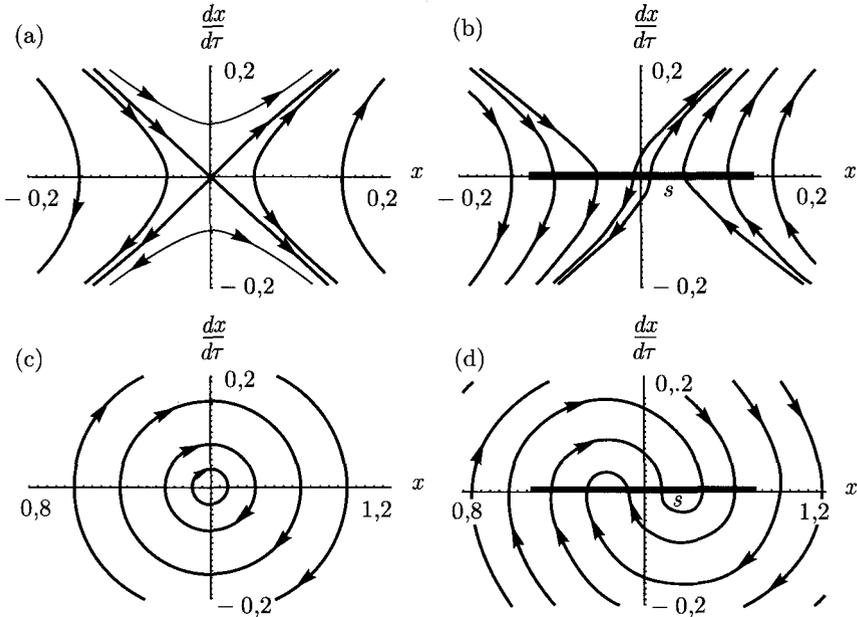


Рис. 2.13. Более подробные фазовые портреты в окрестности равновесных точек для уравнения (2.27); функция f рассчитывается по (2.31). Для (a) и (c) $\mu_d = 0$, поверхность трека гладкая. Для b и d $\mu_d = 0,1$; область прилипания s показана для случая $\mu_s = 0,3$

остановится, причем остановится она вблизи верхней точки трека. Аналогичным образом изменятся равновесные положения тележки в нижних точках пути: они будут соответствовать не дискретным точкам, а их окрестностям (рис. 2.13d). Эти окрестности также являются областями прилипания, в которых тележка останавливается.

Размеры области прилипания легко рассчитать по формуле (2.30). Существует и графический метод, изображенный на рис. 2.15. По мере роста значений μ_s область прилипания (или состояния прилипания) вокруг точек равновесия при $\mu_d = 0$ увеличивается в размерах. В конечном итоге все точки $(x, 0)$ на оси $\frac{dx}{d\tau}$ окажутся равновесными, в которых тележка будет покоиться¹⁷. Это явление достаточно просто объяснить с физической точки

¹⁷Для фазового портрета, изображенного на рис. 2.13b, область прилипания s служит отрезок $[-0,124755; 0,124755]$, а для фазового портрета на рис. 2.13d область прилипания s является отрезок $[1 - 0,124755; 1,124755]$.

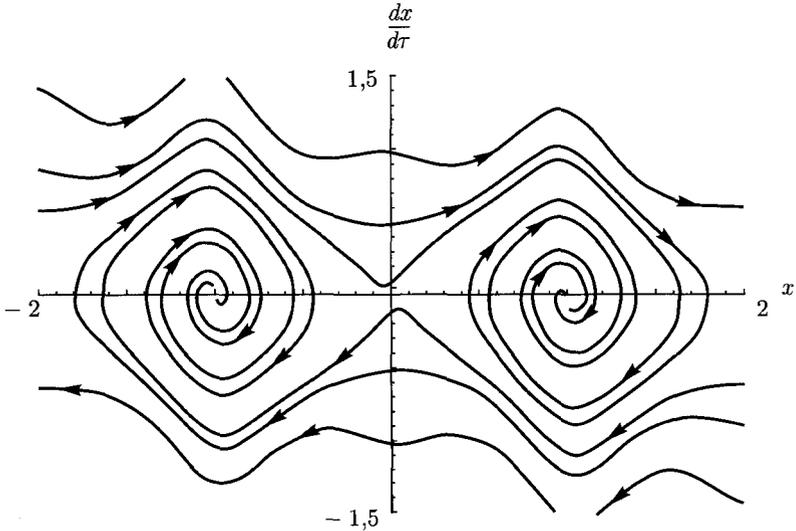


Рис. 2.14. Фазовый портрет для уравнений (2.29)–(2.29). Дискретные равновесия, характерные для случая без трения на рис. 2.12, заменяются семействами равновесий, которым соответствуют возможные состояния покоя (прилипания) тележки. Рисунок построен для значений $\frac{A}{L_0} = 0,25$ и $\mu_d = 0,1$

зрения. Для полноты картины заметим, что для косинусоидальной траектории $f(x)$ при

$$\mu_s \geq \frac{\pi A}{L_0}$$

тележка может остановиться в любом месте. Аналогичный результат дает графический метод, изображенный на рис. 2.15.

2.12. Заключение

В этом разделе нам удалось охватить огромный объем материала, начиная с описания различных сил, рассмотрения законов сохранения и анализа множества примеров. При решении задач мы неизменно сталкивались с численным интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения и последующей интерпретацией его решений. Физическое обоснование результатов модели — один из наиболее «благодарных» аспектов динамики, который, однако, может занимать много времени. Во многих последующих главах рассматриваются другие примеры подобной интерпретации

результатов. Мы настоятельно рекомендуем вам обосновывать получаемые результаты с физической точки зрения, когда будете решать задачи в конце каждой главы книги или проводить свои собственные исследования.

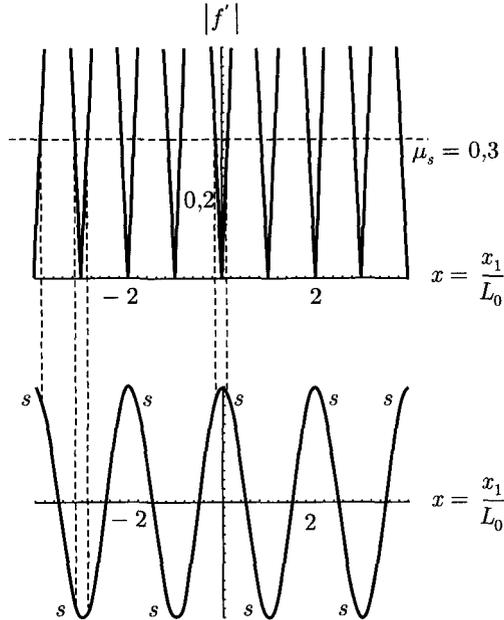


Рис. 2.15. Графический метод расчета возможных областей прилипания s для случая, когда тележка движется по гладкому треку американских горок; $\mu_s = 0,3$. Метод основан на анализе условия (2.30) для траектории (2.31). То есть $|f'| = |\frac{A\pi}{L_0} \sin(\frac{\pi x_1}{L_0})|$. Примеры областей прилипания смотрите на рис. 2.13

Задачи

2.1. Какие из следующих силовых полей являются консервативными, а какие — неконсервативными?

$$\mathbf{P} = x_1 \mathbf{E}_1 + x_3 \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{P} = x_2 \mathbf{E}_1 + x_1 \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{P} = x_1 x_2 \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{P} = -L_0 \sin(\theta) \mathbf{E}_1 + L_0 \cos(\theta) \mathbf{E}_2.$$

Здесь L_0 — постоянная. Чему равны соответствующие потенциальные энергии для консервативных силовых полей?

2.2. Пусть материальная точка массы m движется в пространстве \mathbb{E}^3 . Допустим, что на материальную точку действуют только консервативные силы. Применяя теорему о соотношении работы и энергии, докажите, что полная энергия E материальной точки не изменяется.

Предположим, что нам известно положение $\mathbf{r}(t_1)$ материальной точки в некоторый более поздний момент времени t_1 . Также известны начальные условия \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 . Докажите, что скорость $\|\mathbf{v}\|$ материальной точки можно найти из условия сохранения энергии. Приведите, как минимум, три физических примера применения полученного результата.

2.3. Пусть материальная точка движется по гладкой неподвижной поверхности. На материальную точку действует сила реакции, которая задается с помощью лагранжева представления. К материальной точке приложены консервативные силы. Докажите, что энергия E не изменяется. Кроме того, докажите, что если известны начальный радиус-вектор и начальный вектор скорости материальной точки, то мы всегда можем найти скорость материальной точки по известному ее положению $\mathbf{r}(t_1)$. Как применяется этот результат в физике? Приведите три разных примера.

2.4. Материальная точка свободно движется по гладкой горизонтальной плоскости $x_3 = 0$. Одновременно с этим шероховатая плоскость двигает материальную точку в направлении \mathbf{E}_1 . Таким образом, на движение материальной точки накладываются две связи: $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$, где

$$\Psi_1 = \Psi_1(\mathbf{r}) = x_3, \quad \Psi_2 = \Psi_2(\mathbf{r}, t) = x_1 - f(t).$$

Чему равна реакция связи, действующая на материальную точку?

2.5. Рассмотрите движение материальной точки массы m , радиус-вектор которой равен \mathbf{r} , а вектор скорости равен \mathbf{v} .

- Докажите, что вектор секторной скорости \mathbf{A} не изменяется в том случае, если равнодействующая \mathbf{F} всех сил, приложенных к материальной точке, является центральной силой¹⁸.
- Докажите, что условие сохранения кинетического момента \mathbf{H}_O эквивалентно условию сохранения вектора секторной скорости.
- Пусть материальная точка движется по горизонтальной поверхности стола под действием упругой силы, нормальной реакции и вертикально

¹⁸Сила \mathbf{P} называется центральной, если вектор \mathbf{P} параллелен вектору \mathbf{r} .

направленной силы тяжести $-mgE_3$. Один конец пружины закреплен в неподвижной точке O , а другой конец прикреплен к материальной точке. Жесткость пружины равна K , а длина пружины в свободном состоянии равна L_0 . Какую площадь заметает радиус-вектор материальная точка за определенный период времени?

- (d) Получите уравнения движения материальной точки из пункта (c). Используя безразмерные параметры

$$\tau = \sqrt{\frac{K}{m}}t, \quad x = \frac{r}{L_0}$$

и условие сохранения кинетического момент, докажите, что движение материальной точки можно описать интегрированием следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{\beta^2}{x^3} = -(x-1), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\beta}{x^2}, \quad (2.32)$$

где

$$\beta = \frac{h}{L_0^2 \sqrt{Km}},$$

а h — постоянная, определяемая из начальных условий движения. Для ряда значений β (например, $\beta = -20; -2; -1; 0; 1; 2; 20$) постройте фазовые портреты для первого уравнения из (2.32). Для некоторых траекторий из каждого фазового портрета зарисуйте движение материальной точки¹⁹.

- (e) Удостоверьтесь, что вектор секторной скорости при движениях материальной точки, описанных в пункте (d), не изменяется.

2.6. Материальная точка массы m вращается вокруг неподвижной планеты массы M . Считается, что внешняя сила, действующая на тело, является консервативной силой \mathbf{P} . Соответствующая этой силе потенциальная энергия $U_{\mathbf{P}}$ находится как функция от $\|\mathbf{r}\|$, где \mathbf{r} — радиус-вектор материальной точки, проведенный из неподвижного центра O планеты.

- (a) Докажите, что вектор \mathbf{r} параллелен вектору \mathbf{P} .
 (b) Докажите, что кинетический момент \mathbf{H}_O материальной точки не изменяется и что факт его сохранения означает, что движение материальной

¹⁹Полученные результаты будут качественно совпадать с результатами, приведенными в разделе 2.9 для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности конуса.

точки является плоским. Плоскость, называется орбитальной и содержит точку O . Докажите, что за равные интервалы времени материальной точки заметает секторы орбитальной плоскости равной площади.

- (с) Напишите уравнения движения материальной точки в сферических координатах.
- (d) Применяя закон сохранения \mathbf{H}_O , докажите, что уравнения из пункта (с) упрощаются до вида

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{\partial U_{\mathbf{P}}}{\partial r}, \\ mr^2\dot{\theta} &= h, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где h — постоянная.

- (е) Докажите, что для решений системы (2.33) полная энергия E материальной точки сохраняется.

2.7. Материальная точка массы m свободно движется по внутренней поверхности шероховатой сферы постоянного радиуса R_0 . Центр сферы расположен в начале координат O , а материальная точка прикреплена к неподвижной точке A , радиус-вектор которой равен $a\mathbf{E}_x + b\mathbf{E}_y$, пружиной постоянной жесткости K . Длина недеформированной пружины равна L_0 . На материальную точку действует вертикально направленная сила тяжести $-mg\mathbf{E}_z$.

- (а) Применяя сферическую систему координат $\mathbf{r} = R_0\mathbf{e}_R$, получите выражения для вектора ускорения \mathbf{a} и кинетического момента \mathbf{H}_O материальной точки.
- (b) Чему равен вектор скорости материальной точки относительно любой точки на поверхности сферы?
- (с) Определите реакцию связи \mathbf{F}_c , действующую на материальную точку.
- (d) Докажите, что если материальная точка движется по поверхности, то уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} mR_0(\ddot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\dot{\theta}^2) &= mg\sin(\phi) - K(\|\mathbf{x}\| - L_0)\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\phi}{\|\mathbf{x}\|} - \\ &- \mu_d\|\mathbf{N}\|\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_0 \sin(\phi)} \frac{d}{dt} \left(mR_0^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta} \right) = -K(\|\mathbf{x}\| - L_0) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\theta}{\|\mathbf{x}\|} - \mu_d \|\mathbf{N}\| \frac{\sin(\phi) \dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2}},$$

где $\mathbf{x} = R_0 \mathbf{e}_R - a \mathbf{E}_x - b \mathbf{E}_y$.

- (e) Докажите, что со стороны поверхности на материальную точку действует нормальная реакция, равная

$$\mathbf{N} = - \left(mg \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_R + K(\|\mathbf{x}\| - L_0) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_R}{\|\mathbf{x}\|} \right) \mathbf{e}_R - mR_0(\dot{\phi}^2 + \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_R.$$

- (f) Докажите, что если материальная точка неподвижна относительно поверхности, то реакция связи равна

$$\mathbf{F}_c = mg \mathbf{E}_3 + K(\|\mathbf{x}\| - L_0) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Каково в этом случае условие статического трения?

- (g) Докажите, что если материальная точка движется по поверхности, то полная энергия материальной точки со временем уменьшается.
- (h) Уберем из задачи пружину и допустим, что поверхность сферы гладкая. Докажите, что кинетический момент $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$ не изменяется. Используя факт его сохранения, докажите, что безразмерные уравнения движения материальной точки упрощаются до вида

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{h}{\sin^2(\phi)}, \quad \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = h^2 \frac{\cos(\phi)}{\sin^3(\phi)} + \sin(\phi),$$

где $h = \left(\frac{1}{mR_0^2} \sqrt{\frac{R_0}{g}} \right) \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$ и $\tau = \sqrt{\frac{g}{R_0}} t$.

- (i) Допустим, что поверхность сферы гладкая. Используя факт сохранения полной энергии E материальной точки, докажите, что материальная точка будет оставаться на внешней поверхности сферы до тех пор, пока выполняется неравенство

$$mg(3 \cos(\phi) - 2 \cos(\phi_0)) - mR_0 \left(\dot{\phi}_0^2 + \sin^2(\phi_0) \dot{\theta}_0^2 \right) > 0,$$

где ϕ_0 — значение начальной координаты ϕ материальной точки, а $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\phi}_0$ — начальные скорости. Поместим материальную точку на вершину сферы. Докажите, что если задать материальной точке начальную скорость $v_0 > \sqrt{gR_0}$, то она немедленно оторвется от поверхности.

2.8. Пусть на движение материальной точки массы m накладываются две связи:

$$(x\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{v} + e(t) = 0. \quad (2.34)$$

- (a) Докажите, что одна из связей является интегрируемой, а другая — нет. Для интегрируемой связи определите вид функции $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$.
- (b) Пусть на материальную точку, помимо реакции связи

$$\mathbf{F}_c = \mu_1(x\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2) + \mu_2\mathbf{E}_2,$$

действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$. Исходя из теоремы об изменении количества движения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, получите уравнения движения материальной точки и рассчитайте реакции связи.

- (c) С помощью теоремы об изменении кинетической энергии $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ докажите, что полная энергия материальной точки со временем изменяется. Обоснуйте с физической точки зрения этот факт.
- (d) Используя результаты из пункта (b), получите уравнение движения материальной точки и найдите реакцию связи \mathbf{F}_c .

ГЛАВА 3

Уравнения движения Лагранжа для материальной точки

3.1. Введение

Теорема об изменении количества движения материальной точки $\mathbf{F} = \dot{m}\mathbf{a}$ была сформулирована Ньютоном в конце 17-го века. Мы уже знаем, что это векторное уравнение распадается на три дифференциальных уравнения, описывающих движение материальной точки. Позже были сформулированы альтернативные принципы механики, некоторые из которых, как, например, принцип наименьшего действия, приводили к уравнениям движения, эквивалентным тем, что получаются из равенства $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Другие альтернативные принципы приводим к иным соотношениям. Поэтому до сих пор центральное место при изучении динамики занимает вопрос об эквивалентности и взаимосвязи принципов механики.

В конце 18-го века Лагранж получил уравнения движения для материальной точки [121]¹. Уравнения движения Лагранжа имеют ряд привлекательных свойств: их можно использовать при наличии интегрируемых связей, и они имеют одну и ту же каноническую форму как для материальной точки, так и для системы материальных точек или твердых тел.

В этой главе рассматриваются уравнения движения Лагранжа для материальной точки. Мы изучим несколько форм записи этих уравнений. Одной из форм, например, является (см. (3.2))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathbf{F}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{a}_i.$$

Во многих формах уравнений движения Лагранжа могут использоваться динамическое кулоновское трение и неконсервативные силы. Мы особо бу-

¹Знаменитый трактат Лагранжа «Аналитическая механика» издавался четырежды: в 1789, 1811, 1853 и 1888 годах. Последние два издания выпущены уже после смерти автора. Не так давно было опубликовано второе издание книги на английском языке [122].

дем подчеркивать эквивалентность уравнений Лагранжа закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Об этой эквивалентности хорошо рассказывается во многих классических учебниках по динамике, например в работах Синга и Гриффита [207], а также Уиттекера [228]. В этой главе мы во многом придерживаемся объяснений Кейси [27], изложенных четко и понятно. На работу Кейси мы также будем ссылаться при изучении систем материальных точек и твердых тел.

3.2. Уравнения движения Лагранжа

В разных учебниках используются разные способы вывода уравнений движения Лагранжа. Самым популярным способом является использование вариационного принципа Гамильтона (или принципа наименьшего действия), хотя сам Лагранж [121] пользовался принципом Даламбера. Свои разработки Лагранж осуществлял, рассматривая механические системы, подверженные голономным связям. Впоследствии Эдвард Раус (1831–1907) и Аурел Восс (1845–1931) обобщили уравнения Лагранжа на системы с неголономными связями (см. [183, раздел 24 главы IV] и [221])².

Мы применим подход, разработанный в дифференциальной геометрии и встречающийся, например, в учебнике Синга и Шильда [208]. Вполне возможно, что именно из этой книги упомянутый подход был перенесен в классический учебник Синга и Гриффита [207] и более поздний учебник Кейси [27].

Два тождества

Предположим, что для \mathbb{E}^3 выбрана криволинейная система координат. Следовательно, вектор скорости \mathbf{v} задается следующим образом:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i.$$

Кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \dot{q}^i \dot{q}^k.$$

Заметим, что $T = T(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$.

²Более подробно об истории уравнений Лагранжа читайте в работах Папаставридиса [167, 169]. Второе и третье уравнения движения из (3.8) называются уравнениями движения Рауса–Восса.

Рассмотрим теперь частные производные от T по координатам и их скоростям. Мы должны прийти к следующим результатам:

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i.$$

На основе этих выражений строятся уравнения движения Лагранжа.

Сначала рассчитаем производную от T по координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \\ &= m\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i} \right). \end{aligned}$$

Чтобы получить результат $\frac{\partial T}{\partial q^i} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i$, в первую очередь заметим, что $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \mathbf{a}_k$ и $\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i} = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial q^i} \right).$$

Учитывая, что $\mathbf{a}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q^i} &= m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial q^i} \right) = \\ &= m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^k} = \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^i} \right) = \\ &= m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{a}_i \right) \right) = \\ &= m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались формулой $\dot{f} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial q^k} \dot{q}^k$, где $f = f(q^1, q^2, q^3)$ — произвольная функция.

Частную производную от T по скорости рассчитать гораздо проще, так как базисные векторы \mathbf{a}_i не зависят от \dot{q}^k . Получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^i} \mathbf{a}_k \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= m\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \delta_i^k \mathbf{a}_k \right) = \\
 &= m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i.
 \end{aligned}$$

Оба тождества доказаны.

Уравнения Лагранжа в ковариантной форме

Важно отметить, что уравнения Лагранжа эквивалентны закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Уравнения движения Лагранжа в той форме, в которой мы их изучаем, выводятся из этого уравнения путем расчета его ковариантных составляющих, получаемых при помощи умножения его на \mathbf{a}_i .

Сначала рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{d}{dt} (m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i) - m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i = \\
 &= m\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_i + m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i - m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i = \\
 &= m\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_i = \\
 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем ковариантную форму уравнений движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i. \quad (3.1)$$

Чтобы оценить всю красоту этого уравнения, воспользуемся им для вывода уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ в покомпонентной форме для разных криволинейных координатных систем.

Лагранжиан

Если разложить силу \mathbf{F} на консервативную и неконсервативную составляющие

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_{\text{некон.}},$$

где $U = U(q^1, q^2, q^3)$ — потенциальная энергия, то мы сможем получить уравнения Лагранжа в другой форме. Поскольку

$$\nabla U = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^k} \mathbf{a}^k, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k} = 0,$$

уравнения Лагранжа сводятся к виду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{\partial U}{\partial q^i} \right) = \mathbf{F}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{a}_i.$$

Определим лагранжиан $L = T - U$. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathbf{F}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{a}_i. \quad (3.2)$$

Если на материальную точку не действуют неконсервативные силы, то правая часть уравнений (3.2) равна нулю. Чтобы рассчитать уравнения движения, необходимо провести минимальные вычисления: достаточно найти \mathbf{v} и U .

3.3. Уравнения движения свободной материальной точки

Уравнения Лагранжа очень просто применять. Рассмотрим, например, случай, когда движение материальной точки описывается сферическими координатами: $q^1 = R$, $q^2 = \phi$ и $q^3 = \theta$. Тогда будем иметь

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{a}_2 = R\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}_3 = R \sin(\phi)\mathbf{e}_\theta$$

и

$$T = \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2).$$

Заметим, что T не зависит от θ .

Чтобы получить уравнения движения Лагранжа в сферических координатах, рассчитаем сначала шесть частных производных от T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial R} &= mR \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + mR\dot{\phi}^2, & \frac{\partial T}{\partial \phi} &= mR^2 \sin(\phi) \cos(\phi)\dot{\theta}^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{R}} &= m\dot{R}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2\dot{\phi}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta}. \end{aligned}$$

С учетом этих выражений получаем уравнения Лагранжа в ковариантной форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} = m\dot{R} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial R} = mR \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + mR\dot{\phi}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_R,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} = mR^2 \sin^2(\phi) \cos(\phi) \dot{\theta}^2 \right) &= \mathbf{F} \cdot R \mathbf{e}_\phi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \right) &= \mathbf{F} \cdot R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что эти уравнения гораздо легче рассчитать, чем в альтернативном подходе, где мы дважды дифференцируем $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R$ по t .

Предположим теперь, что на материальную точку действует только сила тяжести:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{E}_3, \quad U = mg\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{r} = mgR \cos(\phi).$$

В этом случае лагранжиан L равен

$$\begin{aligned} L &= T - U = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) - mgR \cos(\phi). \end{aligned}$$

Используя L или подставляя в (3.3) выражение для \mathbf{F} , находим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0.$$

Докажите, что оба подхода ведут к одному и тому же результату.

3.4. Уравнения Лагранжа в случае наложенных связей

В предыдущем разделе мы не рассматривали уравнения Лагранжа в случае, когда на движение материальной точки накладываются связи. Сделаем это сейчас. Если связи являются интегрируемыми, то соответствующие реакции связей записываются при помощи лагранжева представления, и тогда становится очевидной вся красота и мощь уравнений Лагранжа. В рассматриваемом случае можно так выбрать криволинейные координаты q^i , чтобы уравнения движения распались на две системы. Первая система описывает свободное движение материальной точки, а вторая — задает реакции связей как функции от свободного движения.

Существует два подхода к построению уравнений Лагранжа, назовем их подход I и подход II. Новичкам рекомендуем использовать первый подход. Как и в предыдущем разделе, будем придерживаться объяснений Кейси [27].

Предварительные расчеты

Пусть на движение материальной точки накладывается интегрируемая связь

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

и неинтегрируемая связь

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0.$$

Предположим, что для выбранных криволинейных координат интегрируемая связь имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = q^3 - d(t) = 0$$

и что реакции связей записываются по Лагранжу следующим образом:

$$\mathbf{F}_c = \lambda_1 \mathbf{a}^3 + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{a}^i \right).$$

Заметим, что $f_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{a}_i$.

Пусть к материальной точке приложена сила \mathbf{F}_a , которую можно разложить на консервативную и неконсервативную составляющие:

$$\mathbf{F}_a = -\nabla U + \mathbf{F}_{\text{анекон.}}$$

Равнодействующая сила равна

$$\mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{a}^3 + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{a}^i \right) - \nabla U + \mathbf{F}_{\text{анекон.}}$$

Суммарная неконсервативная сила, действующая на материальную точку, равна $\mathbf{F}_{\text{некон.}} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{\text{анекон.}}$.

Кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} (q^1, q^2, q^3) \dot{q}^i \dot{q}^k,$$

где $a_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$. Накладывая на T интегрируемую связь, находим связанную кинетическую энергию:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_2 + \tilde{T}_1 + \tilde{T}_0, \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{T}_2 = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \tilde{a}_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad \tilde{T}_1 = m \sum_{i=1}^2 \tilde{a}_{i3} \dot{q}^i \dot{d}, \quad \tilde{T}_0 = \frac{m}{2} \tilde{a}_{33} \dot{d}^2. \quad (3.5)$$

Здесь

$$\tilde{a}_{ik} = \tilde{a}_{ik}(q^1, q^2, t) = a_{ik}(q^1, q^2, q^3 = d(t))$$

есть связанный метрический тензор. Знаком ($\tilde{}$) мы обозначили наложенные интегрируемой связи (связей); подстрочные индексы в записи величин \tilde{T}_2 , \tilde{T}_1 и \tilde{T}_0 указывают на степени величин \dot{q}^i .

Пусть $g = 10t^2$. Тогда $\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=5} = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100$. Другими словами, мы сначала вычисляем производную g по t и затем в результирующую функцию подставляем $t = 5$.

Путем прямых вычислений находим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^1}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^2}, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial q^1} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^1}, & \left. \frac{\partial T}{\partial q^2} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^2}, & (3.6) \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &\neq \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^3} = 0, & \left. \frac{\partial T}{\partial q^3} \right|_{q^3=d, \dot{q}^3=d} &\neq \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^3} = 0. \end{aligned}$$

В этих выражениях сначала считается частная производная от T и только затем учитывается уравнение связи $q^3 = d(t)$. Из (3.6) следует, что, используя \tilde{T} , можно построить лишь первые два уравнения движения Лагранжа, но не третье. Для частных производных от L и \tilde{L} , а также от U и \tilde{U} результаты аналогичны (3.6).

Обратите внимание, что мы не накладывали на кинетическую энергию T и лагранжиан L неинтегрируемую связь. Это можно сделать, но для наших целей не потребуется.

Подход I

В рамках первого подхода частные производные, фигурирующие в уравнениях движения Лагранжа (3.2), рассчитываются при отсутствии связей:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_k + (\mathbf{F}_c = \mathbf{0}) \cdot \mathbf{a}_k.$$

В явном виде получаем три уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(m \sum_{i=1}^3 a_{i1} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^1} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^1} = \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \sum_{i=1}^3 a_{i2} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^2} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^2} = \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \sum_{i=1}^3 a_{i3} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^3} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^3} = \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_3.$$

В правых частях этих уравнений нет реакций связей, поэтому $\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_{\text{анекон.}}$.

Наложим теперь интегрируемую связь $q^3 = d(t)$ и введем неинтегрируемую связь и реакции связей. Движение материальной точки и реакции связей описываются следующими уравнениями:

$$q^3 = d,$$

$$\dot{q}^3 = \dot{d},$$

$$f_1 \dot{q}^1 + f_2 \dot{q}^2 + f_3 \dot{d} + e = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 m a_{i1} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^1} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^1} = \lambda_2 f_1 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 m a_{i2} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^2} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^2} = \lambda_2 f_2 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 m a_{i3} \dot{q}^i \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{m}{2} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q^3} \dot{q}^i \dot{q}^r + \frac{\partial U}{\partial q^3} = \lambda_1 + \lambda_2 f_3 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{a}_3. \quad (3.7)$$

В последних четырех уравнениях мы опустили знак \sim над U , f_i , \mathbf{a}_i и a_{ik} .

Важно отметить, что при отсутствии неинтегрируемой связи уравнения (3.7) сводились бы к двум системам уравнений. Первую систему составляли бы четвертое и пятое уравнения из (3.7), т. е. дифференциальные уравнения для $q^1(t)$ и $q^2(t)$, описывающие свободное движение материальной точки. Вторую систему составляло бы шестое уравнение из (3.7), определяющее реакцию связи $\mathbf{F}_c = \lambda_1 \mathbf{a}^3$, действующую на материальную точку.

Подход II

В рамках второго подхода мы непосредственно оперируем лагранжианом $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}$. Поскольку

$$\tilde{L} = \tilde{L}(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2, t),$$

частные производные от \tilde{L} по q^3 и \dot{q}^3 равны нулю. Следовательно, с учетом (3.6) и (3.2) получаем всего два уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^1} &= \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^2} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^2} &= \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2. \end{aligned}$$

Вводя неинтегрируемую связь и выражение для реакции связи \mathbf{F}_c , находим уравнения для определения λ_2 , $q^1(t)$ и $q^2(t)$:

$$\begin{aligned} f_1 \dot{q}^1 + f_2 \dot{q}^2 + f_3 \dot{d} + e &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^1} &= \lambda_2 f_1 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^2} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^2} &= \lambda_2 f_2 + \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Обратите внимание, что в этих уравнениях не фигурирует λ_1 . Заметим также, что при отсутствии неинтегрируемой связи для расчета $q^1(t)$ и $q^2(t)$ достаточно использовать дифференциальные уравнения из подхода II. Второе и третье уравнения из (3.8) являются примерами уравнений движения Рауса–Восса.

3.5. Движение материальной точки на сфере

Для иллюстрации описанных выше подходов рассмотрим движение материальной точки по гладкой поверхности сферы. Радиус R сферы — известная функция времени: $R = d(t)$. На материальную точку действует консервативная сила $-mg\mathbf{E}_3$ и неконсервативная сила $D\mathbf{R}e_\theta$, где D — постоянная. Позже мы наложим на движение материальной точки неинтегрируемую связь.

Для решения этой задачи удобно воспользоваться сферической системой координат:

$$q^1 = \theta, \quad q^2 = \phi, \quad q^3 = R.$$

Тогда интегрируемая связь $R = d(t)$ будет иметь вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = R - d(t) = 0.$$

Так как поверхность сферы гладкая, запишем реакцию связи с помощью множителя Лагранжа:

$$\mathbf{F}_c = \lambda \mathbf{e}_R.$$

В выбранной системе координат кинетическая и потенциальная энергии материальной точки равны

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \right), \quad U = mgR \cos(\phi).$$

Связанные кинетическая и потенциальная энергии равны

$$\tilde{T} = \frac{m}{2} \left(\dot{d}^2 + d^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + d^2 \dot{\phi}^2 \right), \quad \tilde{U} = mgd \cos(\phi). \quad (3.9)$$

Ковариантными базисными векторами являются

$$\mathbf{a}_1 = R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a}_2 = R \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_R.$$

Из этих выражений легко найти связанные составляющие $\tilde{\mathbf{a}}_i$ базисных векторов.

Сначала применим подход II и построим уравнения для $\theta(t)$ и $\phi(t)$. Эти два уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} &= \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \\ &= \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 + D d \mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \\ &= D d^2 \sin(\phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} &= \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 = \\ &= \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 + D d \mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Вычисляя частные производные от связанного лагранжиана, преобразуем эти уравнения к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(md^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta}) &= Dd^2 \sin(\phi), \\ \frac{d}{dt}(md^2\dot{\phi}) - md^2 \sin(\phi) \cos(\phi)\dot{\theta}^2 - mgd \sin(\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Видим, что в этих уравнениях нет реакции связи λe_R .

Теперь обратимся к альтернативному подходу (подходу I), в рамках которого мы оперируем свободным лагранжианом L . Получаем три уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \right) &= \\ &= \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} = mR^2 \sin(\phi) \cos(\phi)\dot{\theta}^2 + mgR \sin(\phi) \right) &= \\ &= \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot R \mathbf{e}_\phi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = m\dot{R} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial R} = mR \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + mR\dot{\phi}^2 - mg \cos(\phi) \right) &= \\ &= \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \mathbf{e}_R. \end{aligned}$$

Накладываем интегрируемую связь и вводим реакцию связи \mathbf{F}_c . Уравнениями движения будут:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(md^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta}) &= Dd^2 \sin(\phi), \\ \frac{d}{dt}(md^2\dot{\phi}) - md^2 \sin(\phi) \cos(\phi)\dot{\theta}^2 - mgd \sin(\phi) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{R}) - (mR \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + mR\dot{\phi}^2 - mg \cos(\phi)) &= \lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Первые два уравнения идентичны уравнениям (3.10), а третье уравнение служит для вычисления реакции связи \mathbf{F}_c .

Определим еще одну связь:

$$f_1\dot{\theta} + f_2\dot{\phi} + f_3\dot{R} + e = 0.$$

Используя представление Лагранжа, находим полную реакцию связи, действующую на материальную точку:

$$\mathbf{F}_c = \lambda \mathbf{e}_R + \lambda_2 \left(\frac{f_1}{R \sin(\phi)} \mathbf{e}_\theta + \frac{f_2}{R} \mathbf{e}_\phi + f_3 \mathbf{e}_R \right).$$

Чтобы получить уравнения движения для случая, когда активна неинтегрируемая связь, мы должны ввести лишь реакцию связи, соответствующую неинтегрируемой связи в правой части уравнения (3.11), и добавить в результирующие уравнения неинтегрируемую связь:

$$f_1 \dot{\theta} + f_2 \dot{\phi} + f_3 \dot{d} + e = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (md^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}) = Dd^2 \sin(\phi) + \lambda_2 f_1,$$

$$\frac{d}{dt} (md^2 \dot{\phi}) - md^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\theta}^2 - mgd \sin(\phi) = \lambda_2 f_2,$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{d}) - (md \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 - mg \cos(\phi)) = \lambda + \lambda_2 f_3.$$

В качестве упражнения попробуйте доказать, что если бы неинтегрируемая связь была интегрируемой с $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = 0$ и $e = 0$, то можно было бы еще более упростить эти уравнения. В этом случае материальная точка двигалась бы по окружности радиуса $d \sin(\phi_0)$.

3.6. Немного о геометрии и кинематике материальной точки

Прежде чем говорить об уравнениях Лагранжа и их геометрическом смысле, рассмотрим некоторые сведения из дифференциальной геометрии. Мы ограничимся обсуждением лишь тех аспектов дифференциальной геометрии, которые нам понадобятся в будущем. Таким образом, мы ни в коей мере не претендуем на полноценное знакомство с этой удивительной областью науки. Мы можем порекомендовать несколько превосходных учебников, например [47, 149, 155, 201]. Особенно настойчиво рекомендуем прочитать главу 1 из книги Ланцоша [124], в которой рассматривается кинетическая энергия с точки зрения дифференциальной геометрии, и более позднюю работу Люцена [132], где имеется исторический обзор о взаимодействии геометрии и динамики в 19 веке.

Нас интересуют поверхности и кривые в пространстве \mathbb{E}^3 . Допустим, что они являются гладкими, т. е. не имеют краев и острых углов. Назовем

их многообразиями. Если речь идет о кривой, то для локальной параметризации точек P на этом многообразии необходима единственная координата. Такое многообразие называется одномерным. Для параметризации точек на поверхности необходимы две координаты, поэтому такое многообразие называется двумерным. Обобщая, найдем, что такие подмножества \mathbb{E}^3 , как твердые шары и твердые эллипсоиды, являются трехмерными многообразиями.

Ранее в разделе 1.5 мы ввели криволинейные координаты. Для заданной поверхности (или кривой) мы использовали эти координаты как для задания положений точек на многообразии, так и для определения самого многообразия. К примеру, точки на сфере радиуса R_0 определяются с помощью сферических координат ϕ и θ , а сама сфера задается координатой R : $R = R_0$. Аналогично для окружности: точки на окружности задаются цилиндрической координатой θ , а для задания самой окружности используются координаты r и z . Криволинейная система координат, с помощью которой мы определяем точки на многообразии, называется *картой*. Для некоторых многообразий, таких как плоскость, прямая, окружность, достаточно единственной карты для задания каждой точки на многообразии. Для таких поверхностей, как сферы, для которых в полюсах нельзя задать сферические координаты, нужны по меньшей мере две карты. Набор всех карт для многообразия называется *атласом* (термин заимствован из картографии).

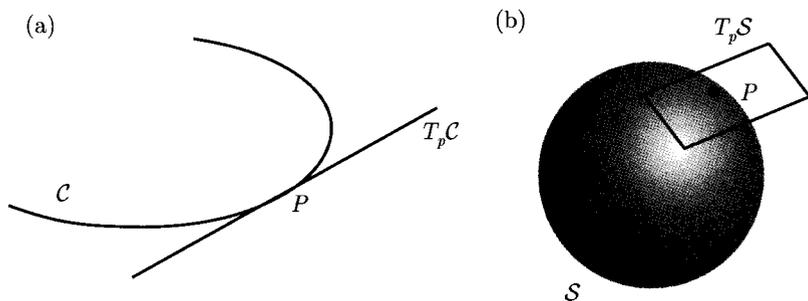


Рис. 3.1. Два примера многообразий и касательных пространств в точках на этих многообразиях: (a) кривая C и (b) сфера S

В каждой точке P многообразия M существует касательное пространство $T_P M$. Если многообразие n -мерно, то касательное пространство $T_P M$ также n -мерно. Для кривой, изображенной на рис. 3.1a, касательное пространство $T_P C$ является прямой, а для сферы S на рис. 3.1b — плоскостью. Если зафиксировать точку P на сфере, то это эквивалентно фиксированию

полярных координат $\phi = \phi_0$ и $\theta = \theta_0$. Векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_\phi(\phi_0, \theta_0) = \sin(\phi_0)(\cos(\theta_0)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta_0)\mathbf{E}_2) + \cos(\phi_0)\mathbf{E}_3, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\theta(\theta_0) = -\sin(\theta_0)\mathbf{E}_1 + \cos(\theta_0)\mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

образуют базис для касательного пространства $T_P\mathcal{S}$ в точке P , и любой вектор, касающийся сферы в этой точке, можно выразить через эти базисные векторы. То же самое справедливо и для точки на кривой, только касательное пространство здесь определяется единственным вектором. И последний пример: для материальной точки, свободно движущейся в пространстве $\mathcal{M} = \mathbb{E}^3$, размерность касательного пространства $T_P\mathcal{M}$ также равна трем.

Снова вернемся к сфере радиуса R . Выберем на ней две точки P_1 и P_2 и рассмотрим траекторию ν между ними (рис. 3.2). Найдём длину пути, которую необходимо пройти по этой траектории ν . Сначала параметризуем кривую параметром u , где $u = u_\alpha$ в точке P_α . Тогда кривую можно однозначным образом задать функциями $\theta(u)$ и $\phi(u)$ ³. Чтобы найти расстояние вдоль ν , можно вычислить интеграл

$$\Delta s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{R^2 \sin^2(\phi) \frac{d\theta}{du} \frac{d\theta}{du} + R^2 \frac{d\phi}{du} \frac{d\phi}{du}} du. \quad (3.12)$$

С учетом (3.4), (3.5) и (3.9) выражаем подынтегральную функцию в правой части уравнения (3.12) через кинетическую энергию материальной точки, движущейся по поверхности сферы:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\frac{2\tilde{T}_2}{m}} \left(\frac{dt}{du} \right) du = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{2\tilde{T}_2}{m}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\| dt. \end{aligned}$$

Для второго интеграла мы заменили переменную и параметризовали путь параметром t , а не u . Попробуйте доказать, что для окружности мера длины, аналогичная (3.12), может быть получена с помощью единственной

³Если бы, например, кривая была участком экваториальной линии, тогда $\theta(u) = \theta(u_1) + \frac{u_2 - u_1}{2\pi R}$ и $\phi(u) = \frac{\pi}{2}$.

угловой координаты θ . Для $\mathcal{M} = \mathbb{E}^3$ меру длины можно определить стандартным образом с помощью декартовых координат:

$$\Delta s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\sum_{k=1}^3 \frac{dx_k}{du} \frac{dx_k}{du}} du.$$

Легко видеть, что это выражение сводится к виду $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{2T}{m}} dt$.

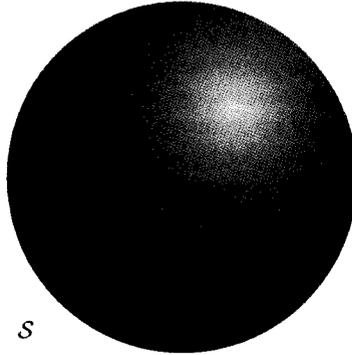


Рис. 3.2. Кривая ν , соединяющая две точки на поверхности сферы S . Вектор скорости $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ материальной точки, движущейся вдоль этой кривой, лежит в касательной плоскости $T_P S$ к кривой в каждой ее точке P

Для n -мерного многообразия \mathcal{M} меру длины, аналогичную (3.12), можно найти по формуле⁴

$$\Delta s = \int_{u_1}^{u_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sqrt{\tilde{a}_{ik} \frac{\partial q^i}{\partial u} \frac{\partial q^k}{\partial u}} du.$$

Параметризуя путь временем t , а не переменной u , находим

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k} dt. \quad (3.13)$$

⁴Индекс n здесь равен 1, 2 или 3. В последующих главах мы увидим, что значения n могут варьироваться от 1 до $3N$ для системы N материальных точек и от 1 до 6 для твердого тела.

Следуя Герцу [92], представим себе частицу массы m , движущуюся внутри многообразия \mathcal{M} , называемого *конфигурационным*. Скорость частицы относительно \mathcal{M} равна $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \tilde{\mathbf{a}}_k$. Следовательно, выражение (3.13) сводится к виду

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\| dt. \quad (3.14)$$

Отсюда следует, что, определяя Δs , мы также определяем меру длины вектора $\mathbf{v}_{\text{отн.}} \in T_P \mathcal{M}$. Такая мера называется *метрикой*, а многообразие, наделенное метрикой, — *римановым многообразием*. Этим термином мы обязаны Георгу Риману (1826–1866) и его значимой работе [179].

Очевидно, что мера длины (3.13) напрямую связана с кинетической энергией материальной точки, поэтому Синг [205] назвал величину

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k} dt \quad (3.15)$$

кинематическим линейным элементом. В историю появления этой меры длины внесли свой вклад такие выдающиеся фигуры, как Якоби [103], Риччи и Леви-Чивита [178]. Возможны и другие выражения для ds (см., например, [123, 124, 149, 205]), некоторые из которых широко используются в релятивистской механике. Согласно теории относительности Эйнштейна, мы вправе выбирать конкретное выражение для ds , как и единицу расстояния, будь то метр или фут.

Чуть выше мы представляли себе частицу массы m , движущуюся внутри многообразия \mathcal{M} . Ясно, что в случае одной материальной точки такое представление составить легко. Конфигурационное многообразие в этом случае соответствует физической поверхности или кривой, вдоль которой движется частица. Однако движение системы материальных точек или твердых тел, подверженных связям, существенно сложнее, а описание движения изображающей точки вовсе не тривиально. Лишь не так давно Кейси [27] смог решить эту проблему для системы материальных точек⁵. Впоследствии он расширил свое построение на случаи одного твердого тела [28] и системы твердых тел [30].

3.7. Геометрический смысл уравнений движения Лагранжа

Некоторые читатели, возможно, догадались, что уравнения движения Лагранжа, получаемые в рамках подхода II, соответствуют проекциям урав-

⁵В разделе 4.7 мы это увидим.

нения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ на ковариантные базисные векторы для несвязанных координат. Иначе говоря, мы проецируем $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ на базис касательного пространства $T_P\mathcal{M}$.

Для тех, кто еще не пришел к этому выводу, рассмотрим уже знакомый нам пример с движением материальной точки по сфере радиуса $R = d(t)$. Мы знаем, что этот случай описывается двумя уравнениями Лагранжа для θ и ϕ , которые получаются в том случае, если мы вычислим составляющие $d\sin(\phi)\mathbf{e}_\theta$ и $d\mathbf{e}_\phi$ векторного уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Два вектора $d\sin(\phi)\mathbf{e}_\theta$ и $d\mathbf{e}_\phi$ образуют базис касательного пространства $T_P\mathcal{S}$ в точке P сферы \mathcal{S} . Более того, поскольку реакция связи, соответствующая интегрируемой связи $\lambda \in R$, перпендикулярна сфере, она не фигурирует в двух уравнениях Лагранжа.

Важной характеристикой неинтегрируемых связей является то, что соответствующую им реакцию связи нельзя убрать из уравнений, описывающих свободное движение. Этот недостаток уравнений движения Лагранжа устраняется в том случае, если использовать альтернативные формы уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, подходящие для систем с неинтегрируемыми связями. Но мы не будем углубляться в этот вопрос, а поговорим более подробно о геометрическом смысле уравнений движения Лагранжа. В своих рассуждениях будем придерживаться работ Кейси [27], Ланцоша [124] и Синга [205].

Движение материальной точки при наличии одной интегрируемой связи

Сначала рассмотрим случай с одной интегрируемой связью:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = q^3 - d(t) = 0,$$

где $d(t)$ — известная функция. Связь $\Psi = 0$ задает в пространстве \mathbb{E}^3 движущуюся двумерную поверхность, в данном случае есть координатная поверхность q^3 . Ранее говорилось, что такая поверхность называется конфигурационным многообразием \mathcal{M} (рис. 3.3). Скорость материальной точки относительно координатной поверхности равна

$$\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{q}^1 \tilde{\mathbf{a}}_1 + \dot{q}^2 \tilde{\mathbf{a}}_2.$$

Координаты q^1 и q^2 называются *обобщенными*. Число обобщенных координат равно числу степеней свободы материальной точки. Таким образом, свободно движущаяся частица имеет три степени свободы, а частица, движущаяся по поверхности, — только две.

Напомним, что в каждой точке P многообразия \mathcal{M} векторы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ образуют базис для касательной плоскости $T_P\mathcal{M}$ к \mathcal{M} в точке P . Опреде-

лим относительную кинетическую энергию $T_{\text{отн.}} = \tilde{T}_2$:

$$T_{\text{отн.}} = \frac{m}{2} \mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{v}_{\text{отн.}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{m}{2} \tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \tilde{\mathbf{a}}_k \dot{q}^i \dot{q}^k.$$

Теперь рассмотрим движение материальной точки по многообразию \mathcal{M} . Чтобы найти расстояние, которое проходит материальная точка за интервал времени $t_1 - t_0$, надо проинтегрировать величину вектора скорости $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ по времени:

$$\begin{aligned} s(t_1) - s(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{v}_{\text{отн.}}} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{2T_{\text{отн.}}}{m}} dt. \end{aligned}$$

Продифференцируем полученный результат по времени t и найдем кинематический элемент длины ds :

$$ds = \sqrt{\frac{2T_{\text{отн.}}}{m}} dt = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \tilde{\mathbf{a}}_k dq^i dq^k}. \quad (3.16)$$

Как говорилось в разделе 3.6, мера длины определяется кинетической энергией $T_{\text{отн.}}$. В качестве упражнения докажите, что интеграл в (3.16) есть не что иное, как интеграл в (3.12).

Предположим, что реакции связей, соответствующие интегрируемым связям, задаются по Лагранжу как $\mathbf{F}_c = \lambda \tilde{\mathbf{a}}^3$. Тогда $\mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 = 0$, т. е. в первых двух уравнениях Лагранжа реакции связи не будет. Силы

$$Q_1 = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \quad Q_2 = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2$$

называются *обобщенными*. Мы используем для них такие же выражения, как в других учебниках по динамике (например, [14, 80]). Кроме того, с помощью подхода II получаем дифференциальные уравнения для $q^1(t)$ и $q^2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^1} &= \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^2} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^2} &= \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

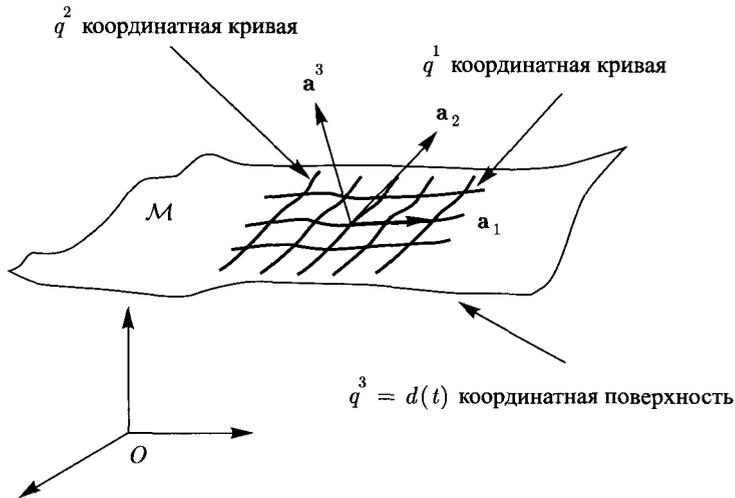


Рис. 3.3. Конфигурационное многообразие M для материальной точки, движущейся по поверхности. Координаты q^1 и q^2 называются обобщенными, а M есть координатная поверхность $q^3 = d(t)$

Накладывая на движение материальной точки неинтегрируемую связь, мы не изменяем M . В общем случае эта связь привносит в уравнения (3.17) реакции связей. Наличие этих сил препятствует разделению уравнений Лагранжа, характерному для интегрируемых связей.

Движение материальной точки с двумя интегрируемыми связями

Рассмотрим случай, когда на движение материальной точки накладываются две интегрируемые связи:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = q^3 - d^3(t) = 0, \quad \Psi_2(\mathbf{r}, t) = q^2 - d^2(t) = 0.$$

Заметим, что мы работаем с криволинейными координатами, поэтому связи задаются очень просто. В каждый момент времени пересечением двух поверхностей $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$ в пространстве \mathbb{E}^3 является кривая — в нашем случае координатная кривая q^1 (рис. 3.4). Конфигурационное многообразие M соответствует координатной кривой q^1 . Для рассматриваемой системы координата q^1 является обобщенной.

Вектор скорости материальной точки относительно M задается также легко. Он равен

$$\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{q}^1 \tilde{\mathbf{a}}_1.$$

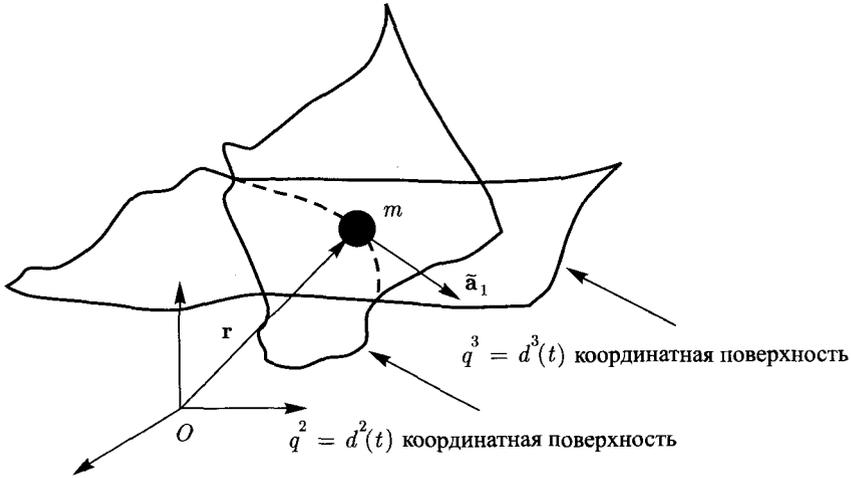


Рис. 3.4. Движение материальной точки по кривой. Вектор $\tilde{\mathbf{a}}_1$ касается координатной кривой q^1 , получающейся при пересечении координатных поверхностей $q^2 = d^2(t)$ и $q^3 = d^3(t)$. Таким образом, координатная кривая q^1 является конфигурационным многообразием \mathcal{M} . Векторы $\tilde{\mathbf{a}}^2$ и $\tilde{\mathbf{a}}^3$ (на рисунке не показаны) перпендикулярны к \mathcal{M}

Ясно, что $\tilde{\mathbf{a}}_1$ касается \mathcal{M} . Действительно, вектор \mathbf{a}_1 , рассчитываемый в точке P , является базисным для одномерного пространства $T_P\mathcal{M}$. Кроме того, вектору $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ соответствует относительная кинетическая энергия

$$T_{\text{отн.}} = \frac{m}{2} \mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{v}_{\text{отн.}} = \frac{m}{2} \tilde{\mathbf{a}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \dot{q}^1 \dot{q}^1.$$

С учетом предыдущих построений (см. уравнение (3.15)) находим кинематический элемент длины для \mathcal{M} :

$$ds = \sqrt{\frac{2T_{\text{отн.}}}{m}} dt = \sqrt{\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1} dq^1.$$

Если реакции связей задаются по методу Лагранжа, т. е. $F_c = \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^3 + \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2$, то, применяя подход II, мы можем легко найти дифференциальное уравнение для $q^1(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^1} = \mathbf{F}_{\text{анекон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1,$$

где $\tilde{L} = \tilde{L}(q^1, \dot{q}^1, t)$, а $\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1$ — обобщенная сила.

3.8. Движение материальной точки по спирали

В качестве иллюстрированного примера рассмотрим движение материальной точки по спирали и проведем все необходимые расчеты (рис. 3.5). Спираль может быть как шероховатой, так и гладкой; приложенные силы также могут варьироваться. Этот пример представляет для нас интерес по нескольким причинам. Во-первых, он позволяет наглядно продемонстрировать, как с помощью формул Серре–Френе и тройки Френе $\{e_t, e_n, e_b\}$ описать движение материальной точки вдоль пространственной кривой. Во-вторых, на этом примере мы продемонстрируем применение неортогональной системы криволинейных координат⁶.

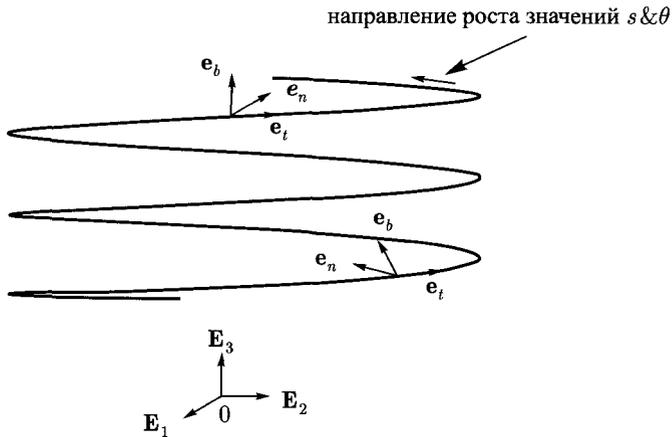


Рис. 3.5. Спираль и соответствующая ей тройка Френе $\{e_t, e_n, e_b\}$, где e_t — единичный касательный вектор, e_n — единичный вектор главной нормали, а $e_b = e_t \times e_n$ — вектор бинормали

Криволинейные координаты, базисные векторы и другие кинематические величины

Спираль есть кривая, образованная пересечением двух поверхностей: цилиндрической $r = R$ и винтовой (геликоида) $z = c\theta$, где c и R — постоянные. Эти поверхности удобно задать с помощью криволинейных координат:

$$q^1 = \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad q^2 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

⁶Это такая координатная система, в которой a^i не обязательно параллельно a_i .

$$q^3 = \eta = z - \alpha r \theta = x_3 - \alpha \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3 = \\ &= r \cos(\theta) \mathbf{E}_1 + r \sin(\theta) \mathbf{E}_2 + (\eta + \alpha r \theta) \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Вводя координаты таким образом, мы минимизируем дальнейшие преобразования. Не следует забывать, что при $r = 0$ криволинейную систему координат задать нельзя. Это значит, что для нее характерны те же случаи вырождения, что и для цилиндрической или сферической систем координат.

С помощью координат θ, r и η можно задать базис для \mathbb{E}^3 :

$$\mathbf{a}_1 = r \mathbf{e}_\theta + \alpha r \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_r + \alpha \theta \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Кроме того, зная представление градиента в цилиндрических координатах, находим контравариантные базисные векторы:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{E}_3 - \alpha \theta \mathbf{e}_r - \alpha \mathbf{e}_\theta.$$

Обратите внимание, что $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j$, как и следовало ожидать. Ни ковариантный, ни контравариантный базисы не являются ортогональными.

Согласно [159], тройка Френе для спирали радиуса R равна:

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (\mathbf{e}_\theta + \alpha \mathbf{E}_3), \quad \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (\mathbf{E}_3 - \alpha \mathbf{e}_\theta).$$

Кручение τ , кривизна κ и параметр длины дуги s для спирали равны:

$$\tau = \frac{\alpha}{R(1 + \alpha^2)}, \quad \kappa = \frac{1}{R(1 + \alpha^2)}, \quad s = R\sqrt{1 + \alpha^2}(\theta - \theta_0) - s_0.$$

Эти же результаты применимы и к спирали с зависимыми от времени α и R . Проверьте, что вектор \mathbf{a}_1 параллелен вектору \mathbf{e}_t и что векторы \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 принадлежат плоскости, образованной векторами \mathbf{e}_n и \mathbf{e}_b .

В случае свободного движения материальной точки в пространстве \mathbb{E}^3 ее скорость рассчитывается по общей формуле $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i$, из которой немедленно следует, что

$$\mathbf{v} = \dot{\theta}(r \mathbf{e}_\theta + \alpha r \mathbf{E}_3) + \dot{r}(\mathbf{e}_r + \alpha \theta \mathbf{E}_3) + \dot{\eta} \mathbf{E}_3.$$

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + (\dot{\eta} + \alpha r \dot{\theta} + \alpha r \dot{\theta})^2).$$

На движение материальной точки по спирали накладываются две связи: $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = 0$. Они имеют вид:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = q^2 - R,$$

$$\Psi_2(\mathbf{r}, t) = q^3.$$

Прежде чем записывать выражения для реакций связей, действующих на материальную точку при ее движении по спирали, необходимо вычислить градиент этих двух функций. В качестве обобщенной координаты будем использовать координату θ .

Силы

Пусть на материальную точку действует приложенная сила \mathbf{F}_a . Предположим также, что трение носит кулоновский характер. Тогда если материальная точка движется относительно спирали, то

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3 + \mathbf{F}_f,$$

где

$$\mathbf{F}_f = -\mu_d \|\lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3\| \frac{\dot{\theta} \tilde{\mathbf{a}}_1}{\|\dot{\theta} \tilde{\mathbf{a}}_1\|}.$$

С другой стороны, если материальная точка неподвижна относительно спирали (т.е. значение θ постоянно), то

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3 + \lambda_3 \tilde{\mathbf{a}}^1.$$

При этом сила трения должна удовлетворять условию статического трения

$$\|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|,$$

где

$$\mathbf{F}_f = \left((\lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3 + \lambda_3 \tilde{\mathbf{a}}^1) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|} \right) \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|},$$

$$\mathbf{N} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3 + \lambda_3 \tilde{\mathbf{a}}^1 - \mathbf{F}_f.$$

Уравнения Лагранжа

Случай свободного движения материальной точки в пространстве \mathbb{E}^3 описывается тремя уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i.$$

В системе координат $\{\theta, r, \eta\}$ эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} + m\alpha r(\dot{\eta} + \alpha \dot{r}\theta + \alpha r\dot{\theta}) \right) - \\ - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} = m\alpha \dot{r}(\dot{\eta} + \alpha \dot{r}\theta + \alpha r\dot{\theta}) \right) &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_1 = r\mathbf{e}_\theta + \alpha r\mathbf{E}_3), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + m\alpha\theta(\dot{\eta} + \alpha \dot{r}\theta + \alpha r\dot{\theta}) \right) - \\ - \left(\frac{\partial T}{\partial r} = m\alpha\dot{\theta}^2 + m\alpha\dot{\theta}(\dot{\eta} + \alpha \dot{r}\theta + \alpha r\dot{\theta}) \right) &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_r + \alpha\theta\mathbf{E}_3), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m(\dot{\eta} + \alpha \dot{r}\theta + \alpha r\dot{\theta}) \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \right) &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3). \end{aligned}$$

Уравнения движения материальной точки по спирали

Подставляя в предыдущие уравнения соответствующее выражение для равнодействующей силы и накладывая связи, получаем уравнения движения материальной точки по спирали. Если материальная точка движется относительно спирали, то путем несложных математических преобразований приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m(1 + \alpha^2)R^2\dot{\theta} \right) &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 - \mu_d \|\lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3\| \|\tilde{\mathbf{a}}_1\| \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}, \\ \frac{d}{dt} \left(m\alpha^2 R\theta\dot{\theta} \right) - m(1 + \alpha^2)R\dot{\theta}^2 &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 + \lambda_1 - \mu_d \|\lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3\| \frac{\dot{\theta}\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2}{\|\dot{\theta}\tilde{\mathbf{a}}_1\|}, \\ \frac{d}{dt} \left(m\alpha R\dot{\theta} \right) &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_3 + \lambda_2 - \mu_d \|\lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3\| \frac{\dot{\theta}\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_3}{\|\dot{\theta}\tilde{\mathbf{a}}_1\|}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = R\mathbf{e}_\theta + \alpha R\mathbf{E}_3, \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{e}_r + \alpha\theta\mathbf{E}_3, \quad \tilde{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Одно из этих уравнений есть дифференциальное уравнение, описывающее свободное движение материальной точки, а два других – уравнения относительно неизвестных λ_1 и λ_2 .

В случае когда движение материальной точки является предопределенным (материальная точка неподвижна относительно спирали), из уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ получаем три уравнения для трех неизвестных:

$$\lambda_3 = -\mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \quad \lambda_2 = -\mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2, \quad \lambda_1 = -\mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_3.$$

Остается применить критерий статического трения. Прodelайте это самостоятельно.

Материальная точка на гладкой спирали

В этом случае будем иметь

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3.$$

Поскольку $\mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = 0$, уравнения Лагранжа разделяются:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m(1 + \alpha^2)R^2\dot{\theta}) &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1, \\ \frac{d}{dt}(m\alpha^2 R\dot{\theta}) - m(1 + \alpha^2)R\dot{\theta}^2 &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 + \lambda_1, \\ \frac{d}{dt}(m\alpha R\dot{\theta}) &= \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_3 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m(1 + \alpha^2)R^2\ddot{\theta} = \mathbf{F}_a \cdot (R\mathbf{e}_\theta + \alpha R\mathbf{E}_3),$$

а реакция связи равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \lambda_1 \tilde{\mathbf{a}}^2 + \lambda_2 \tilde{\mathbf{a}}^3 = \\ &= (m\alpha^2 R\dot{\theta}^2 - mR\dot{\theta}^2 - \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2)\tilde{\mathbf{a}}^2 + (m\alpha R\dot{\theta} - \mathbf{F}_a \cdot \tilde{\mathbf{a}}_3)\tilde{\mathbf{a}}^3. \end{aligned}$$

Найдя из обыкновенного дифференциального уравнения θ как функцию времени, можно затем определить \mathbf{F}_c как функцию времени.

Проиллюстрируем полученные уравнения на примере движения материальной точки под действием силы тяжести $\mathbf{F}_a = -mg\mathbf{E}_3$. Из этих уравнений следует, что

$$m(1 + \alpha^2)R^2\ddot{\theta} = -mg\alpha R. \quad (3.18)$$

При начальных условиях $\theta(t_0) = \theta_0$ и $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ решением уравнения (3.18) будет

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) - \frac{g\alpha}{2R(1 + \alpha^2)}(t - t_0)^2.$$

С учетом этого находим реакцию связи:

$$\mathbf{F}_c = \left(\frac{mg\alpha\theta(t)}{1 + \alpha^2} - mR\dot{\theta}^2(t) \right) \tilde{\mathbf{a}}^2 + \frac{mg}{1 + \alpha^2}(\mathbf{E}_3 - \alpha(\theta\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta)),$$

где $\theta(t)$ получена выше.

Замечания

Предположим, нам надо составить уравнение движения материальной точки, свободно движущейся по гладкой спирали. В этом случае реакции связей нас не интересуют, поэтому искомое дифференциальное уравнение может быть найдено методом наложения связей на выражение для T :

$$\tilde{T} = \frac{m}{2} \left(R^2\dot{\theta}^2 + (\alpha R\dot{\theta})^2 \right) = \frac{m}{2} \left((1 + \alpha^2)R^2\dot{\theta}^2 \right).$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{F} \cdot (R\mathbf{e}_\theta + \alpha R\mathbf{E}_3) = \mathbf{F}_a \cdot (R\mathbf{e}_\theta + \alpha R\mathbf{E}_3).$$

Получающееся в результате простых вычислений дифференциальное уравнение идентично уравнению (3.18).

Уравнения Лагранжа, которые получаются в рамках подхода II (т. е. содержащие \tilde{T}), имеют свои очевидные преимущества. Однако в них нельзя учесть динамические силы трения. Тем не менее именно подход II традиционно используется в учебниках и научной литературе для построения уравнений Лагранжа. Заметим, что $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\eta}} = 0$, поэтому, накладывая связи, мы лишаемся возможности получить оставшиеся два уравнения Лагранжа.

3.9. Заключение

В этой главе мы рассмотрели разные формы уравнений движения Лагранжа для материальной точки. Самой фундаментальной из них является следующая (см. (3.1)):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i.$$

В одном из упражнений, которые приводятся ниже, мы получим другие две формы этих уравнений, представляя частные производные в виде функций координат и их скоростей. Этими формами являются: ковариантная (уравнение (3.22)) и контравариантная (уравнение (3.23)). Если разложить силы, действующие на материальную точку, на консервативные и неконсервативные, то (3.1) сводится к (3.2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathbf{F}_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{a}_i.$$

Предположим теперь, что на движение материальной точки накладывается интегрируемая связь и что эту связь можно записать в виде уравнения $q^3 - f(t) = 0$. Предположим также, что соответствующая реакция связи равна $\mathbf{F}_c = \lambda \mathbf{e}_3$. Тогда уравнениями Лагранжа будут дифференциальные уравнения относительно обобщенных координат q^1 и q^2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{F}_{\text{некон.}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.19)$$

В этих уравнениях фигурирует связанный лагранжиан \tilde{L} , который получается из L путем наложения интегрируемой связи $q^3 = f(t)$, и, что еще более важно, не содержит λ . Это значит, что уравнения движения (3.19) не содержат реакций связей. Данный случай, в котором все связи являются интегрируемыми, а для реакций связей применимо лагранжево представление, является примером механической системы, на которую наложены «идеальные связи».

В этой главе мы также рассмотрели ситуацию, когда на систему накладываются неинтегрируемые связи, и описали метод построения уравнений движения. При наложении неинтегрируемых связей число обобщенных координат, конфигурационное многообразие и кинематический линейный элемент не изменяются.

Аналогичные выводы справедливы и для систем материальных точек, твердых тел и систем материальных точек и твердых тел. Главные отличия состоят в том, что в этих случаях усложняется расчет кинетической энергии и что в правых частях уравнений Лагранжа фигурирует несколько сил и моментов. Несмотря на эти отличия, в уравнениях движения выделяется система таких уравнений для обобщенных координат, которые не содержат реакций связей, при условии, что реакции связей были записаны по методу Лагранжа. В этом и состоит наиболее значимое свойство уравнений Лагранжа для систем, подверженных интегрируемым связям.

Задачи

3.1. Из задачи 1.5 главы 1 вспомним, что для параболической системы координат $\{u, v, \theta\}$ справедливы равенства:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = v\mathbf{e}_r + u\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = u\mathbf{e}_r - v\mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = uv\mathbf{e}_\theta$$

и

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{u^2 + v^2} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{u^2 + v^2} \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{uv} \mathbf{e}_\theta.$$

- (а) Пусть на материальную точку массы m действует сила \mathbf{F} и она свободно движется в пространстве \mathbb{E}^3 . Докажите, что уравнения движения материальной точки имеют вид

$$\frac{d}{dt} (m(u^2 + v^2)\dot{u}) - m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)u - mv^2u\dot{\theta}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_1,$$

$$\frac{d}{dt} (m(u^2 + v^2)\dot{v}) - m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)v - mu^2v\dot{\theta}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2,$$

$$\frac{d}{dt} (mu^2v^2\dot{\theta}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3.$$

- (б) Пусть теперь материальная точка движется по параболической поверхности вращения

$$c^2 = -z + \sqrt{z^2 + r^2},$$

где c — постоянная. На материальную точку действует вертикально направленная сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$. Используя результаты из пункта (а),

получите уравнения, описывающие свободное движение материальной точки, и докажите, что на материальную точку действует нормальная реакция, равная

$$\mathbf{N} = - \left(m\dot{u}^2 c + mu^2 c\dot{\theta}^2 + mgc \right) \mathbf{a}^2.$$

Покажите также, что два дифференциальных уравнения второго порядка для обобщенных координат могут быть записаны в виде одного дифференциального уравнения второго порядка

$$(m(u^2 + c^2))\ddot{u} + m\dot{u}^2 u - \frac{h^2}{mu^3 c^2} = -mgu, \quad (3.20)$$

где h — постоянная (она равна величине $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$, являющейся интегралом движения). Принимая во внимание, что u и c измеряются в метрах^{1/2}, запишите уравнения движения (3.20) в безразмерной форме.

(с) Докажите, что для решений уравнений (3.20) энергия

$$E = \frac{m}{2}(u^2 + c^2)\dot{u}^2 + \frac{h^2}{2mu^2 c^2} + \frac{mg}{2}(u^2 - c^2)$$

сохраняется. Как можно получить это выражение для E ?

3.2. Для многих механических систем можно построить уравнения Лагранжа в канонической форме, которая удобна для численного интегрирования. В этом упражнении мы получим одну из таких форм (см. (3.2))⁷. Задача взята из работ МакКоннелла [139] и Синга и Шильда [208]. Пользуясь случаем, заметим, что уравнение (3.23) встречается в более ранней статье Риччи и Леви-Чивиты [178].

Начнем с того, что запишем уравнения Лагранжа в ковариантной покомпонентной форме, рассматривая движение материальной точки, под действием внешней равнодействующей силы $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{a}^i = \sum_{i=1}^3 F^i \mathbf{a}_i$ ⁸:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_k,$$

⁷Из последующих глав вы узнаете, что ее можно получить для любой механической системы, в которой действуют склерономные интегрируемые связи, а реакции связей и моменты задаются по методу Лагранжа.

⁸Значения индексов i, j, k, r и s варьируются от 1 до 3.

где

$$T = T(q^r, \dot{q}^s) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (3.21)$$

а

$$a_{ik} = a_{ik}(q^r) \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k, \quad a^{ik} = a^{ik}(q^r) = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k.$$

Обратите внимание, что $a_{ik} = a_{ki}$ и $a^{ik} = a^{ki}$.

Необходимо доказать, что уравнения Лагранжа могут быть записаны в двух других эквивалентных формах. Первой из них является ковариантная форма:

$$m \sum_{i=1}^3 a_{ki} \ddot{q}^i + m \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 [si, k] \dot{q}^i \dot{q}^s = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}_k = F_k, \quad (3.22)$$

где фигурирует *символ Кристоффеля первого рода*:

$$[si, k] = \frac{\partial a_s}{\partial q^i} \cdot \mathbf{a}_k.$$

Заметим, что $[si, k] = [is, k]$. Вторая форма уравнений Лагранжа называется контравариантной:

$$m \ddot{q}^k + m \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 \Gamma_{si}^k \dot{q}^i \dot{q}^s = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}^k = F^k. \quad (3.23)$$

Здесь фигурирует *символ Кристоффеля второго рода*:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial a_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{a}^k.$$

Отметим, что $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Эта форма уравнений Лагранжа используется при численном моделировании механических систем⁹.

(а) Покажите, что символы Кристоффеля равны

$$[si, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q^s} + \frac{\partial a_{sk}}{\partial q^i} - \frac{\partial a_{si}}{\partial q^k} \right)$$

⁹В рамках большинства программных пакетов, выполняющих численное интегрирование, предполагается, что дифференциальные уравнения, которые необходимо проинтегрировать, имеют вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Если определить набор переменных (состояний) $x_1 = q^1, \dots, x_3 = q^3, x_4 = \dot{q}^1, \dots, x_6 = \dot{q}^3$, то уравнения Лагранжа в контравариантной форме легко свести к виду $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

и

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^3 a^{kr} [ij, r].$$

(b) Исходя из уравнений Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_k,$$

получите их в ковариантной покомпонентной форме¹⁰

$$m \sum_{i=1}^3 a_{ki} \ddot{q}^i + m \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 [si, k] \dot{q}^i \dot{q}^s = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}_k = F_k.$$

(c) Исходя из уравнений Лагранжа вида

$$m \sum_{i=1}^3 a_{ki} \ddot{q}^i + m \sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^3 [si, k] \dot{q}^i \dot{q}^s = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}_k = F_k,$$

получите их в контравариантной компонентной форме¹¹

$$m \ddot{q}^k + m \sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^3 \Gamma_{si}^k \dot{q}^i \dot{q}^s = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}^k = F^k.$$

(d) В какой системе координат символы Кристоффеля равны нулю?

3.3. Напомним, что в сферической системе координат $\{R, \phi, \theta\}$ ковариантные базисные векторы равны

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{a}_2 = R \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}_3 = R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta,$$

¹⁰Подсказка: разложите частные производные от T , используя для кинетической энергии представление (3.21). Затем возьмите производную по времени и преобразуйте результирующее уравнение с учетом рассмотренных выше симметрий. Чтобы прийти к желаемому результату, вам, возможно, придется переименовать некоторые индексы.

¹¹Подсказка: умножьте уравнения Лагранжа в ковариантной форме на a^{sk} и просуммируйте по k . Осуществите некоторые преобразования и переименуйте индексы и тогда придете к конечному результату. Обратите внимание, что ковариантную и контравариантную покомпонентные формы уравнений Лагранжа можно рассматривать как линейные комбинации друг друга.

а контравариантные базисные векторы равны

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{R \sin(\phi)} \mathbf{e}_\theta.$$

Кроме того, количество движения и кинетическая энергия материальной точки массы m равны

$$\mathbf{G} = m\dot{R}\mathbf{a}_1 + m\dot{\phi}\mathbf{a}_2 + m\dot{\theta}\mathbf{a}_3, \quad T = \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + R^2 \sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 \right).$$

- (а) Пусть материальная точка массы m движется в пространстве \mathbb{E}^3 под действием равнодействующей силы \mathbf{F} . Найдите три ковариантных компонента уравнений движения Лагранжа. При решении задачи постарайтесь избежать явного расчета 27 символов Кристоффеля первого рода.
- (б) Пусть материальная точка массы m движется в пространстве \mathbb{E}^3 под действием равнодействующей силы \mathbf{F} . Найдите три контравариантных компонента уравнений движения Лагранжа. При решении задачи постарайтесь избежать явного расчета 27 символов Кристоффеля второго рода.

3.4. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по шероховатой поверхности. Выберем такую криволинейную систему координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, чтобы поверхность описывалась уравнением

$$q^3 = d(t),$$

где $d(t)$ — известная функция времени t .

- (а) Предположим, что материальная точка движется по шероховатой поверхности.
- (1) Докажите, что $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{q}^1 \tilde{\mathbf{a}}_1 + \dot{q}^2 \tilde{\mathbf{a}}_2$.
 - (2) Определите реакцию связи, действующую на материальную точку.
- (б) Предположим, что материальная точка покоится на шероховатой поверхности. В этом случае реакцию связи можно задать двояко:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{a}^i,$$

где для удобства опущены знаки \sim .

(1) Докажите, что

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_f^1 \\ F_f^2 \\ N \end{bmatrix},$$

где N , F_f^1 и F_f^2 однозначно задают нормальную реакцию N и силу трения \mathbf{F}_f , а $a_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$ ($i, k=1,2,3$).

(2) В каких координатных системах справедливы равенства $F_f^1 = \lambda_1$, $F_f^2 = \lambda_2$ и $N = \lambda_3$? Проиллюстрируйте свой ответ на конкретном примере.

(с) Предположим, что на материальную точку действуют сила упругости и сила тяжести. Докажите, что полная энергия материальной точки не сохраняется даже в случае статического трения.

3.5. Пусть материальная точка массы m движется по геликоиду. Уравнение прямого геликоида в цилиндрической системе координат r, θ, z имеет вид

$$z = \alpha\theta,$$

где α — постоянная. На материальную точку действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.

(а) Докажите, что в криволинейной системе координат

$$q^1 = \theta, \quad q^2 = r, \quad q^3 = \nu = z - \alpha\theta$$

пространства \mathbb{E}^3 справедливы равенства

$$\mathbf{a}_1 = r\mathbf{e}_\theta + \alpha\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3$$

и

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{E}_3 - \frac{\alpha}{r}\mathbf{e}_\theta.$$

(b) Предположим, что поверхность геликоида, по которой движется материальная точка, является гладкой.

(1) Какая связь накладывается на движение материальной точки? Как задать соответствующую реакцию связи \mathbf{F}_c ?

- (2) Докажите, что уравнения движения материальной точки при отсутствии связей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m(r^2 + \alpha^2)\dot{\theta}) &= -mg\alpha, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

- (3) Докажите, что кинетический момент $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$ не сохраняется.

- (с) Наложим на материальную точку связь

$$r\dot{\theta} + h(t) = 0.$$

Получите дифференциальное уравнение второго порядка для $r(t)$, дифференциальное уравнение для $\theta(t)$ и уравнение для реакции связи, вызываемой неинтегрируемой связью. Опишите, как бы вы решали эти уравнения, если бы хотели описать движение материальной точки и найти действующие на нее реакции связей.

3.6. Пусть материальная точка массы m свободно движется по гладкой внутренней поверхности полусферы радиуса R_0 (рис. 3.6). На материальную точку действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.

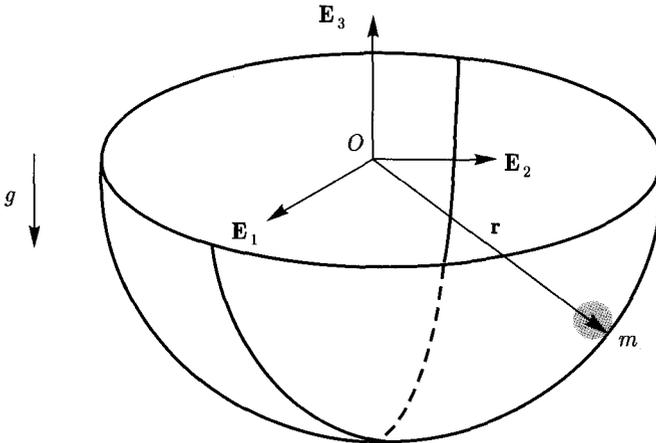


Рис. 3.6. Схема движения материальной точки массы m по внутренней поверхности полусферы радиуса R_0

- (a) Запишите в сферической системе координат уравнение связи, которая накладывается на движение материальной точки. Чему равна соответствующая реакция связи, действующая на материальную точку?
- (b) Используя уравнения Лагранжа, получите уравнения движения материальной точки и выражение для реакции связи.
- (c) Докажите, что полная энергия E и кинетический момент $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$ материальной точки сохраняются.
- (d) Покажите, что нормальная реакция, действующая на материальную точку, может быть выражена как функция координат материальной точки и начальной энергии E_0 :

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{2E_0}{R_0} + 3mg \cos(\phi) \right) \mathbf{e}_R.$$

- (e) Численно проинтегрируйте уравнения движения материальной точки и расскажите, при каких условиях материальная точка всегда будет оставаться на поверхности полусферы.

3.7. Пусть бусина массы m свободно движется по гладкой проволоке, изогнутой в форме полуокружности, радиуса R_0 (рис. 3.7). Проволока вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega_0 \mathbf{E}_3$ так, как показано на рисунке. На бусину действует сила тяжести $-mg \mathbf{E}_3$. Эта классическая задача встречается во многих учебниках (см., например, [78]).

- (a) Какие две связи накладываются на движение бусины? Запишите их уравнения в сферической системе координат. Чему равна действующая на бусину реакция связи \mathbf{F}_c ?
- (b) Исходя из уравнений Лагранжа, получите уравнение движения бусины

$$\ddot{\phi} = \left(\Omega_0^2 \cos(\phi) + \frac{g}{R_0} \right) \sin(\phi). \quad (3.25)$$

Приведите (3.25) к безразмерному виду и численно проинтегрируйте полученное дифференциальное уравнение. Постройте для него фазовый портрет при значениях параметра $\frac{g}{R_0 \Omega_0^2}$, равных 0,5; 1,0; 1,5.

- (c) Напомним, что для равновесной точки $x = x_0$ дифференциального уравнения $\ddot{x} = f(x)$ выполняются условия $\dot{x} = 0$ и $f(x_0) = 0$. Докажите, что уравнение (3.25) имеет три равновесные точки:

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_0 = \pi, \quad \phi_0 = \cos^{-1} \left(-\frac{g}{R_0 \Omega_0^2} \right).$$

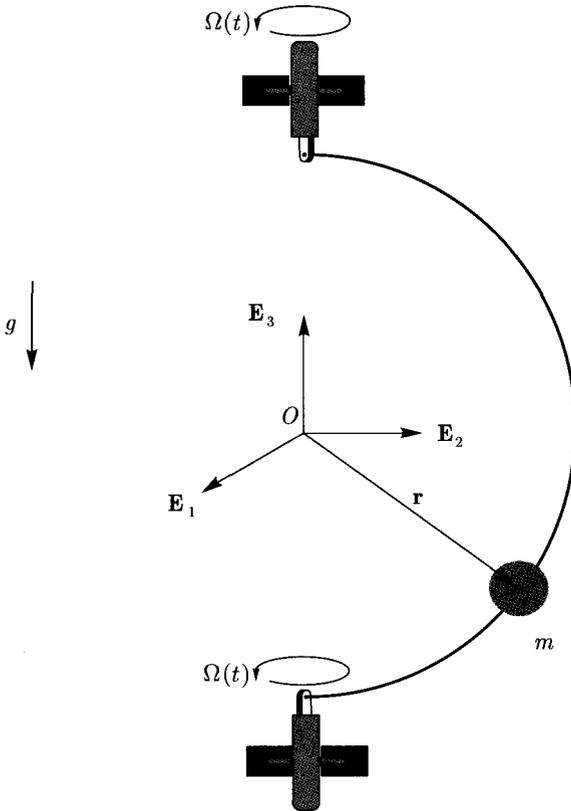


Рис. 3.7. Схема движения бусины массой m по гладкой проволоке, изогнутой в форме полуокружности. Провод вращается вокруг вертикальной оси со скоростью $\Omega(t) = \Omega_0$

Каков физический смысл этих равновесий? Покажите, что третье равновесие возможно тогда и только тогда, когда значение Ω_0^2 достаточно велико. Как полученные результаты коррелируют с построенными ранее фазовыми портретами?

- (d) Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, докажите, что полная энергия бусины — величина изменяемая:

$$\dot{E} = N_\theta R_0 \Omega_0 \sin(\phi).$$

Здесь N_θ — составляющая по оси e_θ нормальной реакции, действующей на бусину.

3.8. Рассмотрим материальную точку массы m , движущуюся в пространстве \mathbb{E}^3 . Пусть кинематика материальной точки описывается в системе координат (1.6). Получите выражения для вектора скорости \mathbf{v} и кинетической энергии T материальной точки.

- (a) Пусть материальная точка движется по шероховатой параболической поверхности, описываемой уравнением

$$x - y^2 = -4.$$

Чему равна реакция связи \mathbf{F}_c , действующая на материальную точку? Каковы уравнения движения материальной точки?

- (b) Пусть материальная точка движется по гладкой параболе, описываемой уравнениями

$$x - y^2 = -4, \quad z = 0$$

(рис. 3.8). Чему равна действующая на материальную точку реакция связи \mathbf{F}_c ? Каковы уравнения движения материальной точки?

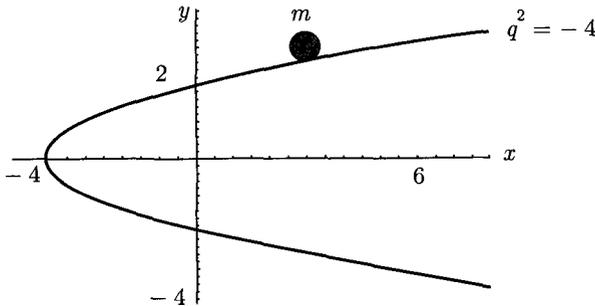


Рис. 3.8. Схема движения материальной точки по параболе в плоскости xy

3.9. Пусть материальная точка массы m движется по гладкому эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

-
- (a) Получите в подходящей криволинейной системе координат выражения для связанной кинетической энергии материальной точки¹².
- (b) При условии, что на материальную точку действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$, получите два дифференциальных уравнения второго порядка, описывающих движение материальной точки.
- (c) Численно проинтегрируйте уравнения, полученные в пункте (b), и опишите особенности движения материальной точки.

¹²Эта задача решается в криволинейной системе координат, которую мы не рассматривали, но которая часто встречается в других литературных источниках. Речь идет о так называемых софоксных эллипсоидальных координатах.

Часть II

Динамика системы материальных точек

ГЛАВА 4

Уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек

4.1. Введение

В этой главе рассматриваются уравнения Лагранжа для системы материальных точек. Прежде всего, мы запишем теорему об изменении количества движения для каждой из материальных точек, принадлежащих системе. Дальнейшие рассуждения будут основываться на результатах, полученных в главе 15 Сингем и Гриффитом [207]¹. Дополнительно мы рассмотрим связи и потенциальные энергии. Анализируя геометрический смысл уравнений движения Лагранжа для системы материальных точек, мы будем использовать метод изображающей точки, разработанный Кейси [27]. Весь материал этой главы подобран так, чтобы подчеркнуть эквивалентность уравнений Лагранжа для системы материальных точек и теоремы об изменении количества движения. Для полноты картины в разделе 4.11 рассматривается принцип виртуальной работы, принцип Даламбера², принцип наименьшего принуждения Гаусса и принцип Гамильтона. В конце главы приводится каноническая форма уравнений движения Лагранжа, в которой учитываются независимые от времени интегрируемые связи.

При решении ряда конкретных задач уравнения Лагранжа можно получить простым расчетом кинетической и потенциальной энергий системы. Этот подход используется в большинстве учебников по динамике без какого-либо упоминания метода построения изображающей точки и расчета составляющих векторов силы³. И действительно, получив уравнения

¹Аналогичные построения для систем материальных точек можно найти в некоторых других учебниках. Например, в разделе 6-6 работы Гринвуда [79] или в разделе 21 работы Уиттекера [228].

²Рассматриваемый в разделе 4.11 принцип виртуальной работы совместно с принципом Даламбера (см. (4.36)) часто называют принципом Даламбера – Лагранжа, или общим уравнением динамики. — *Прим. ред.*

³В этих учебниках уравнения Лагранжа выводятся на основе принципа виртуальных скоростей или принципа Гамильтона (также известного как принцип наименьшего действия).

Лагранжа, можно вовсе не прибегать к методу построения изображающей точки. Во многих случаях, однако, этот подход не применим. К счастью, представление уравнений движения Лагранжа по методу Синга и Гриффита позволяет существенно расширить диапазон их применения. В рамках такого представления можно, к примеру, учесть динамическое кулоновское трение. В главе 5 мы продемонстрируем это на примере.

4.2. Система N материальных точек

Наша задача — получить уравнения движения для системы N материальных точек. Сначала рассмотрим каждую точку системы.

Каждая из N точек движется в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 . Радиус-вектор материальной точки массы m_i (рис. 4.1) равен

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^3 x_i^j \mathbf{E}_j.$$

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Количество движения материальной точки массы m_i $\mathbf{G}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \mathbf{v}_i$.

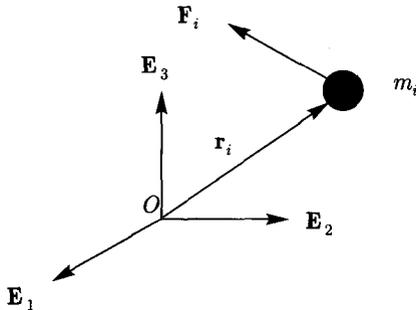


Рис. 4.1. Материальная точка массы m_i в пространстве \mathbb{E}^3 . Радиус-вектор этой точки равен \mathbf{r}_i ; равнодействующая всех внешних сил, приложенных к точке, равна \mathbf{F}_i

Равнодействующая всех сил, приложенных к точке массы m_i , находится по формуле

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^3 F_i^j \mathbf{E}_j.$$

Теорема об изменении количества движения для материальной точки массы m_i имеет вид

$$\mathbf{F}_i = m_i \dot{\mathbf{v}}_i.$$

Из этой теоремы сразу следует теорема о кинетическом моменте:

$$\dot{\mathbf{H}}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{H}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ есть кинетический момент материальной точки относительно неподвижной точки O . Из теоремы об изменении количества движения также следует теорема об изменении кинетической энергии для материальной точки массы m_i :

$$\dot{T}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Кинетическая энергия

Суммарная (полная) кинетическая энергия T системы материальных точек равна сумме кинетических энергий:

$$T = T_1 + \dots + T_N.$$

По теореме об изменении кинетической энергии для каждой материальной точки находим соответствующий результат для системы материальных точек:

$$\dot{T} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v}_N. \quad (4.1)$$

Это выражение используется при формулировке закона сохранения (или отсутствия сохранения) энергии системы материальных точек.

Центр масс

Для системы материальных точек можно задать центр масс C . Радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}$ этой точки, принадлежащей пространству \mathbb{E}^3 , равен

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1 + \dots + m_N} (m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_N \mathbf{r}_N).$$

Отсюда следует, что количество движения системы материальных точек определяется по формуле $\mathbf{G} = (m_1 + \dots + m_N) \dot{\bar{\mathbf{r}}}$. Далее мы рассмотрим движение материальной точки массы m в пространстве \mathbb{E}^{3N} . Важно не путать эту точку с точкой C .

4.3. Координаты

При решении многих задач не очень удобно задавать векторы \mathbf{r}_i с помощью декартовых координат. Для многих двухчастичных систем радиус-вектор \mathbf{r}_1 задается в одной системе координат, а относительный радиус-вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — в другой. Например, для системы на рис. 4.2 вектор \mathbf{r}_1 задается в декартовой системе координат, а вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — в сферической:

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{r}_2 = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 + R_2\mathbf{e}_{R_2}. \quad (4.2)$$

Во втором уравнении $R_2 = L_0$ — длина стержня, соединяющего материальные точки, а

$$\mathbf{e}_{R_2} = \sin(\phi_2)(\cos(\theta_2)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta_2)\mathbf{E}_2) + \cos(\phi_2)\mathbf{E}_3.$$

Векторы \mathbf{e}_{ϕ_2} и \mathbf{e}_{θ_2} определяются аналогично. Заметим, что вектор \mathbf{e}_{R_2} направлен из точки m_1 в точку m_2 . Как и в случае с одной материальной точкой, подходящая система координат должна выбираться с учетом связей и приложенных сил.

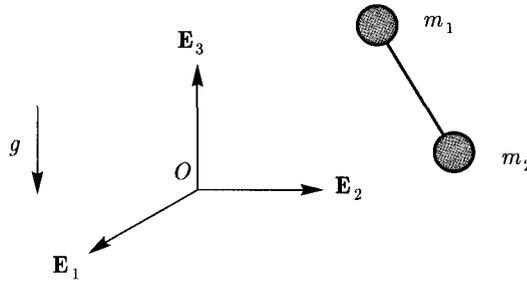


Рис. 4.2. Материальная точка массы m_1 соединена жестким стержнем длины L_0 с материальной точкой массы m_2

В общем случае для системы N материальных точек мы будем использовать систему координат, обозначаемую как $\{q^1, \dots, q^{3N}\}$. Как и в случае с одной материальной точкой, будем предполагать, что если известны координаты q^1, \dots, q^{3N} , то мы всегда сможем однозначным образом определить декартовы координаты для системы материальных точек, и наоборот:

$$q^K = \hat{q}^K(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3) \quad (K = 1, \dots, 3N),$$

$$x_i^j = \hat{x}_i^j(q^1, \dots, q^{3N}) \quad (i = 1, \dots, N \text{ и } j = 1, 2, 3).$$

Чтобы получить уравнения движения Лагранжа, необходимо вычислить следующие $3N^2$ векторов:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \quad (K = 1, \dots, 3N \text{ и } i = 1, \dots, N).$$

Эти векторы играют роль базисных векторов \mathbf{a}_k , которые мы использовали при описании движения одной материальной точки.

В качестве примера вернемся к уравнениям (4.2) и зададим координаты для системы двух материальных точек:

$$q^1 = x = x_1^1, \quad q^2 = y = x_1^2, \quad q^3 = z = x_1^3, \quad q^4 = R_2, \quad q^5 = \theta_2, \quad q^6 = \phi_2.$$

С учетом (4.2) для этой координатной системы будем иметь:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^j} = \mathbf{E}_j, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^{(j+3)}} = \mathbf{0}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^j} = \mathbf{E}_j, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^4} = \mathbf{e}_{R_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^5} = R_2 \sin(\phi_2) \mathbf{e}_{\theta_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^6} = R_2 \mathbf{e}_{\phi_2},$$

где во всех уравнениях $j = 1, 2, 3$. Подумайте, как с помощью системы координат (4.2) описать кинематику системы частиц, изображенной на рис. 4.3.

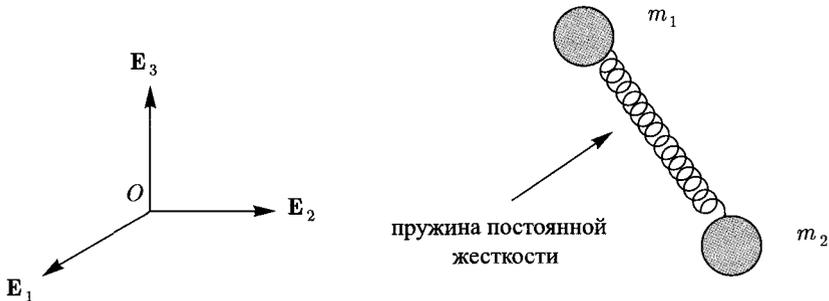


Рис. 4.3. Материальная точка массы m_1 соединена пружиной постоянной жесткости K с материальной точкой массы m_2 . Собственная длина пружины равна L_0

4.4. Связи и реакции связей

При рассмотрении одной материальной точки ключевым понятием было «кинематические связи». Обратимся к этому вопросу с точки зрения системы материальных точек. Позже мы увидим, что расширить это понятие на случай системы материальных точек гораздо проще, чем кажется на первый взгляд.

Для начала получим выражения для реакций связи на примере одной физической системы. Впоследствии станет ясно, что для этих реакций связи применимо лагранжево представление. Пусть две материальные точки, соединенные жестким стержнем длины L_0 (см. рис. 4.2). Со стороны стержня на движение материальных точек накладывается связь $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| - L_0 = 0$. На материальные точки действуют равные по величине и противоположные по направлению реакции связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{c1} &= -\mu \mathbf{t}, \\ \mathbf{F}_{c2} &= \mu \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где μ — усилие в стержне, а единичный вектор \mathbf{t} направлен от m_1 к m_2 :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.$$

Если, как и ранее, определить $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = L_0 \mathbf{e}_{R_2}$, то получим $\mathbf{t} = \mathbf{e}_{R_2}$. Записывая уравнение связи в виде

$$\Psi = 0,$$

где

$$\Psi = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - L_0,$$

с учетом выражений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_2} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$$

придем к выводу, что уравнения (4.3) переписуются в виде

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad \mathbf{F}_{c2} = \mu \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_2}. \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что реакции связи, действующие на систему материальных точек, лучше задавать с помощью представления Лагранжа.

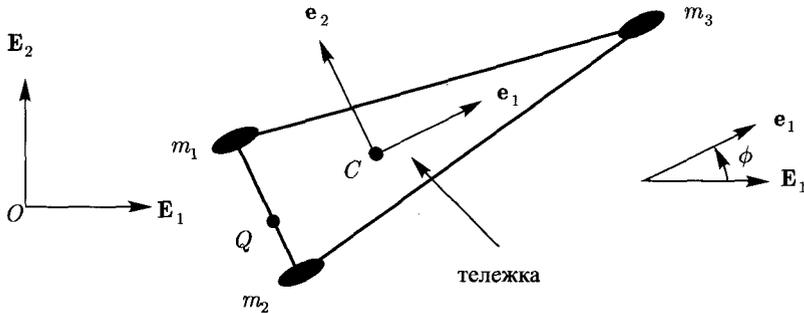


Рис. 4.4. Модель тормозящей трехколесной тележки. Распределенная масса тележки моделируется с помощью трех материальных точек массами m_1 , m_2 и m_3 . Материальные точки m_1 и m_2 соответствуют колесам, которые катятся без скольжения, а материальная точка m_3 моделирует скользящее колесо

В качестве второго примера рассмотрим систему трех материальных точек, изображенную на рис. 4.4. Это типовая модель тормозящего трехколесного средства передвижения, которая используется для объяснения его неустойчивости в момент блокировки передних колес при торможении⁴. Допустим, что движение тележки плоское. Следовательно, плоским является и движение центра масс C системы: $\mathbf{r} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2$. Чтобы определить координаты любой точки тележки, помимо x и y , нам нужен угол ϕ . Значит, для рассматриваемой системы девятью координатами q^1, \dots, q^9 могут быть следующие:

$$q^1 = x, \quad q^2 = y, \quad q^3 = \phi, \quad q^{3+k} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{E}_k, \quad q^{6+k} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{E}_k.$$

Здесь $k = 1, 2, 3$ и $\mathbf{r} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2$. Единичный вектор $\mathbf{e}_1 = \cos(\phi)\mathbf{E}_1 + \sin(\phi)\mathbf{E}_2$ на рис. 4.4 перпендикулярен отрезку прямой, соединяющему m_1 и m_2 . Вектор \mathbf{e}_2 параллелен этой прямой. Уравнение связи, согласно которой вектор скорости материальной точки массы m_1 всегда остается перпендикулярным вектору \mathbf{e}_2 , может быть записано по-разному. К примеру, оно может иметь вид

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Эта связь является неинтегрируемой. Сила, реализующая эту связь, параллельна вектору \mathbf{e}_2 :

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu\mathbf{e}_2. \quad (4.5)$$

⁴Более подробно читайте в работах О'Рейли и Тонга [165], Руина [186]. Там же вы найдете множество ссылок на литературу, посвященную исследованию этой типовой системы с неинтегрируемыми связями.

Эта сила гарантирует, что материальная точка массы m_1 будет двигаться только в направлении \mathbf{e}_1 .

Представление Лагранжа

Из всего вышесказанного следует, что реакции связи, действующие на систему материальных точек, удобно записывать по методу Лагранжа. Пусть на систему материальных точек действует интегрируемая связь

$$\Psi = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t).$$

Уравнение связи (4.6) можно продифференцировать и свести к виду

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i + e = 0,$$

где

$$\mathbf{f}_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_i},$$

$$e = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

При расчете, скажем $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_1}$, мы фиксируем $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. Реакция связи \mathbf{F}_{ci} , действующая на материальную точку массы m_i , записывается по Лагранжу следующим образом:

$$\mathbf{F}_{ci} = \mu \mathbf{f}_i = \mu \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Примером такой записи служит полученный ранее результат (4.4). Как и в случае одной материальной точки, при наличии динамического трения представление Лагранжа не применимо. Позже мы рассмотрим несколько примеров, доказывающих неприменимость представления Лагранжа при наличии трения⁵.

Ясно, что лагранжево представление может быть также использовано в случаях неинтегрируемых связей. Неинтегрируемые связи записываются следующим образом:

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{v}_N + e = 0, \quad (4.7)$$

⁵См., например, подраздел 8.6.2 главы 8.

где $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ и $e = e(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$. Для таких связей реакция задается в виде

$$\mathbf{F}_{ci} = \mu \mathbf{f}_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

Это выражение эквивалентно уравнению (4.5) для системы трех материальных точек, подверженных неинтегрируемой связи. Вы, должно быть, уже поняли, как обобщить лагранжево представление на системы материальных точек, подверженных многим связям (интегрируемым и неинтегрируемым).

Мощность реакций связей

Все связи, которые мы рассматриваем, могут быть представлены в виде (4.7). Если реакции связей определяются по Лагранжу, то мы легко можем рассчитать мощность этих сил по формуле

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ci} \cdot \mathbf{v}_i = \mu \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = -\mu e.$$

Таким образом, при $e = 0$ реакции связей не совершают работы. В случае интегрируемой связи такая ситуация возникает тогда, когда Ψ не зависит явно от времени: $\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. В предыдущем примере, изображенном на рис. 4.2, функция Ψ зависела от \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Если бы функция L_0 зависела от времени, то мы бы имели $\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$.

Третий закон Ньютона

Если уравнение связи имеет вид $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| - L_0 = 0$, то реакции связи равны

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|},$$

$$\mathbf{F}_{c2} = \mu \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}.$$

Заметим, что эти силы направлены вдоль стержня (чего и следовало ожидать с точки зрения физики). Более того, $\mathbf{F}_{c2} = -\mathbf{F}_{c1}$, что есть не что иное как третий закон Ньютона⁶.

⁶Более подробно об этом результате читайте в работах Нолла [153], О'Рейли и Сриниваса [163], а также в подразделе 8.6.4 настоящей книги.

4.5. Консервативные силы и потенциальные энергии

В динамике систем материальных точек мы часто встречаемся с консервативными силами. Они возникают, например, тогда, когда две материальные точки связаны пружиной (см. рис. 4.3) или когда каждая материальная точка системы притягивается к центральному телу силовым гравитационным полем. В этом разделе мы посмотрим, как задаются консервативные силы $\mathbf{F}_{\text{кон.1}}, \dots, \mathbf{F}_{\text{кон.N}}$, действующие на точки системы. Запишем потенциальную энергию системы в виде

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.8)$$

При этом мы считаем, что (4.8) есть общее представление потенциальной энергии консервативных сил, действующих в системе материальных точек.

Частным случаем уравнения (4.8) является обратный закон гравитационного взаимодействия для двух материальных точек массами m_1 и m_2 :

$$U_n = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|},$$

где G — универсальная гравитационная постоянная. Потенциальная энергия силы упругости пружины соединяет две материальные точки массами m_1 и m_2 равна

$$U_s = \frac{K}{2} (\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - L_0)^2,$$

где K — коэффициент жесткости пружины.

Для расчета консервативных сил мы приравниваем производную от U по времени к отрицательной мощности консервативных сил. После некоторых преобразований получаем

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_{\text{кон.}i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \mathbf{v}_i = 0. \quad (4.9)$$

Полагая, что величины $\mathbf{F}_{\text{кон.}i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$ не зависят от $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ и что уравнение (4.9) справедливо для всех возможных $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, приходим к выражению

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.10)$$

Так вычисляются консервативные силы.

Для силы упругости пружины и гравитационных сил, соответствующих U_n и U_s , уравнение (4.10) сводится к выражениям:

$$\mathbf{F}_{\text{кон.1}} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad \mathbf{F}_{\text{кон.2}} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$$

и

$$\mathbf{F}_{\text{кон.1}} = -K(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - L_0) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|},$$

$$\mathbf{F}_{\text{кон.2}} = -K(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - L_0) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.$$

И снова заметим, что пары сил удовлетворяют третьему закону Ньютона. Впервые этот результат получили Ланцош [124] и Нолл [153].

4.6. Уравнения движения Лагранжа

Для системы несвязанных частиц уравнения движения складываются из N теорем об изменении количеств движения:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

Покажем, что эти уравнения эквивалентны уравнениям движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} = \Phi_K \quad (K = 1, \dots, 3N), \quad (4.11)$$

где

$$\Phi_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}.$$

Поскольку на систему материальных точек не накладываются никакие связи, все координаты q^1, \dots, q^{3N} являются обобщенными, а силы Φ_K — обобщенными силами. Полученные нами результаты взяты из работы Синга и Гриффита [207, раздел 15.1]. Чуть позже мы расскажем об альтернативном способе построения (4.11), который придумал Кейси [27]⁷.

Для получения уравнений Лагранжа необходимо, чтобы радиус-вектор каждой материальной точки выражался в виде функции координат q^1, \dots, q^{3N} :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, \dots, q^{3N}) \quad (i = 1, \dots, N).$$

⁷См. уравнение (4.20) в разделе 4.7.

При помощи этих выражений можно рассчитать скорости \mathbf{v}_i , а затем вычислить кинетическую энергию T .

Вывод уравнений движения Лагранжа

Прежде чем выводить уравнения движения Лагранжа, получим важное тождество

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^K} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}, \quad (4.12)$$

которое часто называют «сокращением точек». Для доказательства этого тождества рассчитаем скорость \mathbf{v}_i по цепному правилу дифференцирования сложной функции:

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{J=1}^{3N} \dot{q}^J \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^J}.$$

Беря частную производную от обеих частей этого выражения по \dot{q}^K , приходим к (4.12).

Теперь докажем, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial q^K} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right). \quad (4.13)$$

Сначала осуществим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^K} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^K} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались тождеством (4.12). Второе выражение получается аналогичным образом, поэтому опустим некоторые промежуточные выкладки:

$$\frac{\partial T}{\partial q^K} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^K} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q^K} \left(\sum_{J=1}^{3N} \dot{q}^J \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^J} \right) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\sum_{J=1}^{3N} \dot{q}^J \frac{\partial}{\partial q^J} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right).
\end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались тождествами

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^K \partial q^J} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^J \partial q^K}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \sum_{J=1}^{3N} \dot{q}^J \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^J},$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{f}(q^1, \dots, q^{3N})$. Теперь с учетом (4.13) проведем несложные расчеты и получим уравнения движения Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} = \\
&= \Phi_K,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где Φ_K — сила, равная

$$\Phi_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}.$$

Итак, мы показали, как выводятся уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек, исходя из теоремы об изменениях количества движения для каждой точки.

4.7. Определение и применение понятия изображающей точки

Кейси [27] продемонстрировал альтернативный метод построения уравнений Лагранжа. Этот метод заключается в построении изображаю-

шей точки, движущейся в $3N$ -мерном пространстве под действием некоторой силы. С помощью этого метода достаточно просто получить уравнения Лагранжа и понять их геометрический смысл.

В этом разделе мы, придерживаясь объяснений Кейси [27], определим изображающую точку массы m , движущуюся в пространстве \mathbb{E}^{3N} . Радиус-вектор этой точки равен \mathbf{r} . Кинетическая энергия T точки соответствует кинетической энергии системы материальных точек. На изображающую точку действует сила, такая что

$$\dot{T} = \Phi \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad \Phi = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

В работе Кейси [27] масса m считается (без потери общности) как сумма масс: $m = m_1 + \dots + m_N$. Для наших целей достаточно допустить, что $m > 0$. Как уже говорилось в разделе 3.6, заинтересованный читатель может более подробно узнать о геометрии механической системы из работы Ланцоша [124, глава 1].

Конфигурационное пространство

Пространство \mathbb{E}^{3N} , называемое конфигурационным, наделяется декартовой системой координат. Следовательно, произвольный вектор \mathbf{b} равен

$$\mathbf{b} = \sum_{K=1}^{3N} b_K \bar{\mathbf{e}}_K = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 b_{3i+j-3} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3},$$

где $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_{3N}\}$ — фиксированный ортонормированный базис пространства \mathbb{E}^{3N} . Зададим, кроме того, две другие системы базисных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{3i+j-3} &= \sqrt{\frac{m_i}{m}} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3}, \\ \mathbf{e}^{3i+j-3} &= \sqrt{\frac{m}{m_i}} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3}, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, 2, 3$. Заметим, что

$$\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}^J = \delta_K^J.$$

Радиус-вектор материальной точки равен \mathbf{r} , а вектор силы Φ . Эти векторы рассчитываются аналогично вектору \mathbf{b} .

Выражение для радиус-вектора \mathbf{r}

Как говорилось выше, радиус-вектор \mathbf{r} определяется из условия, согласно которому кинетическая энергия материальной точки массы m равна кинетической энергии системы материальных точек:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Подставляя вместо \mathbf{v} и \mathbf{v}_i выражения

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \dot{r}_{3i+j-3} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3}, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_i^j \mathbf{E}_j$$

и приравнивая кинетические энергии, находим выражение для \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}_j) \sqrt{\frac{m_i}{m}} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}_j) \mathbf{e}_{3i+j-3}. \quad (4.15)$$

Полезно доказать, что другие выражения для \mathbf{r} , эквивалентные (4.15), получаются, если переместить начала координат и переименовать оси пространства \mathbb{E}^{3N} . Обратите внимание, как в (4.15) отношения масс $\frac{m_i}{m}$ позволяют перейти к базисным векторам \mathbf{e}_{3i+j-3} .

Выражение для вектора силы Φ

Вектор силы Φ задается исходя из условия

$$m \dot{\mathbf{v}} = \Phi.$$

С учетом (4.15) и теоремы об изменении количества движения для каждой материальной точки, получаем

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \sqrt{\frac{m_i}{m}} \bar{\mathbf{e}}_{3i+j-3} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \mathbf{e}^{3i+j-3}. \quad (4.16)$$

Опять-таки обратите внимание на то, как в (4.15) отношения масс $\frac{m_i}{m}$ приводит к базисным векторам \mathbf{e}^{3i+j-3} .

Далее заметим, что из (4.16) следует тождество:

$$\Phi \cdot \mathbf{e}_{3i+j-3} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j.$$

Легко доказать, что из теорем об изменении кинетической энергии для каждой материальной точки $T_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$ (без суммирования по i) следует теорема об изменении кинетической энергии для материальной точки массы m :

$$\dot{T} = \Phi \cdot \mathbf{v}.$$

С помощью этой теоремы можно получить результаты, касающиеся сохранения энергии в системе материальных точек.

Криволинейные координаты

Определим с помощью декартовых координат базисные векторы в пространстве \mathbb{E}^{3N} :

$$\mathbf{a}_K = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^K} = \frac{\partial}{\partial q^K} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}_j = \hat{x}_i^j) \mathbf{e}_{3i+j-3} \right)$$

и

$$\mathbf{a}^J = \text{grad}(q^J) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial q^J}{\partial x_i^j} \right) \mathbf{e}^{3i+j-3}.$$

Можно показать, что $\mathbf{a}_K \cdot \mathbf{a}^J = \delta_K^J$. При решении большинства задач можно избежать явного расчета контравариантных базисных векторов \mathbf{a}^J .

Эквивалентности

В будущем нам понадобится формула

$$\Phi \cdot \mathbf{a}_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}. \quad (4.17)$$

Чтобы прийти к этому результату, необходимо применить ряд тождеств и соотношение $\hat{x}_s^p = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{E}_p$:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \mathbf{a}_K &= \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^K} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \mathbf{e}^{3i+j-3} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q^K} \left(\sum_{s=1}^N \sum_{p=1}^3 (\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{E}_p) \mathbf{e}_{3s+p-3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^N \sum_{p=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \left(\frac{\partial \hat{x}_s^p}{\partial q^K} \right) \mathbf{e}^{3i+j-3} \cdot \mathbf{e}_{3s+p-3} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^N \sum_{p=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \left(\frac{\partial \hat{x}_s^p}{\partial q^K} \right) \delta_s^i \delta_p^j = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{E}_j) \left(\frac{\partial \hat{x}_i^j}{\partial q^K} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q^K} \left(\sum_{j=1}^3 \hat{x}_i^j \mathbf{E}_j \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}.
 \end{aligned}$$

Тождество доказано.

Выражение (4.17) схоже с некоторыми другими результатами, справедливыми для системы материальных точек и для одной материальной точки массы m . Рассмотрим, например, функцию

$$\Gamma = \Gamma(\mathbf{r}, t) = \bar{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t).$$

Путем несложных преобразований находим несколько выражений для производной функции Γ по криволинейной координате:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial q^K} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^K} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}. \quad (4.18)$$

Применяя эти формулы, мы увидим, что консервативные силы и реакции связей, действующие на систему материальных точек и на одну материальную точку массы m , эквивалентны между собой.

Связи и реакции связей

Если ввести изображающую точку, то связь вида $\Psi = 0$, где

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$

(см. (4.6)), можно представить как связь, накладываемую на движение одной материальной точки массы m :

$$\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Таким образом, связь, накладываемая на движение точки, и соответствующая реакция связи (записанная по Лагранжу) равны

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0, \quad \Phi_c = \mu \mathbf{f},$$

где

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad e = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Далее, раз связь интегрируемая, то материальная точка движется по конфигурационному многообразию \mathcal{M} , т. е. по $(3N - 1)$ -мерному подмножеству конфигурационного пространства \mathbb{E}^{3N} .

Важно отметить, что выражения для Φ_c и \mathbf{F}_{ci} не противоречат друг другу. И действительно, к эквивалентности между реакциями связей \mathbf{F}_{ci} , действующими на систему материальных точек, и реакцией связи Φ_c , действующей на одну материальную точку массы m , можно прийти при помощи соотношений (4.17) и (4.18).

Консервативные силы и потенциальные энергии

Потенциальную энергию U одной материальной точки можно выразить как функцию положения материальной точки массы m :

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \bar{U}(\mathbf{r}).$$

Вычисляя $\dot{\bar{U}}$ и приравнивая полученный результат к $-\Phi_{\text{кон.}} \cdot \mathbf{v}$, находим, что⁸

$$\Phi_{\text{кон.}} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.19)$$

Снова заметим, что выражения для $\Phi_{\text{кон.}}$ и $\mathbf{F}_{\text{кон.}i}$ (см. (4.10)) не противоречат друг другу. Как и в случае с реакциями связей, их эквивалентность следует из соотношений (4.17) и (4.18).

Уравнения Лагранжа для системы свободных материальных точек

Пришло время получить уравнения движения Лагранжа для материальной точки массы m . Поскольку система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ m_N \dot{\mathbf{v}}_N = \mathbf{F}_N \end{array} \right\} \text{ эквивалентна } m \dot{\mathbf{v}} = \Phi,$$

эти уравнения и есть уравнения Лагранжа для системы N материальных точек.

⁸Мы, по существу, решаем уравнение $(\Phi_{\text{кон.}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{v} = 0$ для всех возможных движений системы. Это уравнение разрешимо только в том случае, если выражение в скобках (при условии, что его члены не зависят от \mathbf{v}) равно нулю. Таким образом, приходим к (4.19).

Легко видеть, что для одной материальной точки массы m справедливо равенство

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}^K \mathbf{a}_K.$$

Как следствие, получаем два промежуточных результата:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_K, \quad \frac{\partial T}{\partial q^K} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_K.$$

С их помощью находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} &= \frac{d}{dt} (m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_K) - m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}}_K = \\ &= \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}_K = \\ &= \Phi \cdot \mathbf{a}_K. \end{aligned}$$

Итак, уравнения Лагранжа для системы материальных точек имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} = \Phi \cdot \mathbf{a}_K. \quad (4.20)$$

Эти уравнения описывают движение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ материальной точки массы m и, стало быть, системы материальных точек.

Замечаем, что в силу (4.17) уравнения (4.20) идентичны уравнениям, которые мы получали ранее. В частности,

$$\Phi_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} = \Phi \cdot \mathbf{a}_K.$$

При решении многих задач вместо Φ удобно использовать $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$. Уравнения (4.20), однако, позволяют глубже понять геометрический смысл уравнений Лагранжа для системы материальных точек.

4.8. Лагранжиан

Во многих механических системах действуют только консервативные силы. В этом случае для системы материальных точек можно задать лагранжиан, зависящий от потенциальной энергии:

$$L = T - U.$$

С помощью этого лагранжиана и тождества⁹

$$\frac{\partial U}{\partial q^K} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}$$

получаем уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^K} = Q_K, \quad (4.21)$$

где Q_K — неконсервативные силы, действующие на систему материальных точек. Неконсервативные силы можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_K &= \Phi_K + \frac{\partial U}{\partial q^K} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\text{некон.}i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} = \\ &= \Phi_{\text{некон.}} \cdot \mathbf{a}_K, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{F}_{\text{некон.}i} = \mathbf{F}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \Phi_{\text{некон.}} = \Phi + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Заметим, что если $Q_K = 0$ (как во многих задачах небесной механики), то при построении уравнений движения для системы материальных точек не надо рассчитывать вектор ускорения.

В случае наложенных связей мы можем получить уравнения Лагранжа, идентичные по виду уравнениям (4.21), при условии, что связи являются интегрируемыми, а соответствующие реакции связей задаются с помощью лагранжева представления. В результате мы приходим к уравнениям, идентичным (4.21), но в которых фигурируют связанные кинетическая и потенциальная энергии¹⁰.

4.9. Система связанных материальных точек

Рассмотрим систему, в которой материальные точки подвержены одной интегрируемой и одной неинтегрируемой связям. Выразим эти связи

⁹Оно встречалось ранее в разделе 4.7 (см. (4.18)).

¹⁰То есть T заменяется на \bar{T} , а U заменяется на \bar{U} . Как следствие, лагранжиан L заменяется на связанный лагранжиан $\bar{L} = \bar{T} - \bar{U}$.

с помощью криволинейных координат:

$$q^{3N} - r(t) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i + e = 0.$$

Эти связи эквивалентны связям, накладываемым на движение одной (изображающей) точки:

$$q^{3N} - r(t) = 0, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0.$$

Значит, обобщенными координатами для рассматриваемой системы будут q^1, \dots, q^{3N} . Эти координаты параметризуют $(3N - 1)$ -мерное конфигурационное многообразие \mathcal{M} , которое принадлежит $3N$ -мерному пространству конфигураций. Последнее было рассмотрено в разделе 4.7 в связи с методом построения изображающей точки, разработанным Кейси. Иллюстративный пример приведен на рис. 4.5.

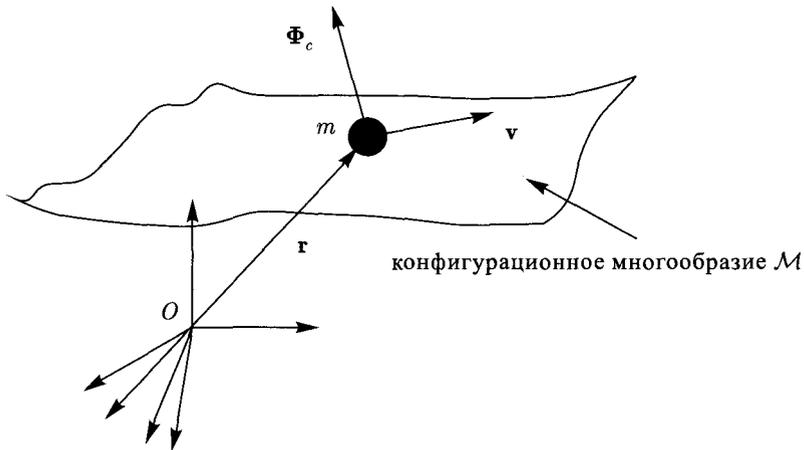


Рис. 4.5. Движение изображающей точки на конфигурационном многообразии. Конфигурационное многообразие \mathcal{M} фиксировано, а вектор Φ_c перпендикулярен к \mathcal{M}

Предположим, что соответствующие реакции связи задаются по Лагранжу. Тогда все силы, действующие на систему материальных точек, представляются в виде суммы

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \mu_1 \frac{\partial q^{3N}}{\partial \mathbf{r}_i} + \mu_2 \mathbf{f}_i + \mathbf{P}_i,$$

где \mathbf{P}_i — равнодействующая всех неконсервативных сил, отличных от реакций связей, приложенных к материальной точке массы m_i . Заметим, что

$$\begin{aligned}\Phi_K &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K} = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q^K} \mu_1 \delta_K^{3N} + \mu_2 f_K + \Pi_K,\end{aligned}\quad (4.22)$$

где

$$\Pi_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}, \quad f_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}.$$

С учетом полученных результатов легко получить $\Phi = \sum_{K=1}^{3N} \Phi_K \mathbf{a}^K$.

Подход I

В рамках первого подхода мы расписываем частные производные от T и U и затем в полученные уравнения подставляем интегрируемую связь $q^{3N} = r(t)$. Результирующие уравнения движения Лагранжа распадаются на две системы:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^S} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^S} = -\frac{\partial U}{\partial q^S} + \mu_2 f_S + \Pi_S \right]_{q^{3N}=r, \dot{q}^{3N}=\dot{r}}$$

и

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{3N}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^{3N}} = -\frac{\partial U}{\partial q^{3N}} + \mu_1 + \mu_2 f_{3N} + \Pi_{3N} \right]_{q^{3N}=r, \dot{q}^{3N}=\dot{r}},$$

где $S = 1, \dots, 3N - 1$. Обратите внимание, что связь $q^{3N} = r(t)$ накладывается *после* того, как будут рассчитаны частные производные от T и U .

Подход II

Для сравнения рассмотрим второй подход. Сначала наложим на кинетическую и потенциальную энергии интегрируемую связь. Например:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{T}(q^1, \dots, q^{3N-1}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N-1}, t) = \\ &= T(q^1, \dots, q^{3N-1}, q^{3N} = r(t), \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N-1}, \dot{q}^{3N} = \dot{r}(t)).\end{aligned}$$

Как в случае с одной материальной точкой, определяем для конфигурационного многообразия \mathcal{M} линейный элемент по функции \tilde{T} .

Замечаем, что в силу

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{3N}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{3N}} = 0$$

нельзя построить выражение для μ_1 . Иначе говоря, раз мы исключили координату, соответствующую интегрируемой связи, мы можем записать лишь $3N - 1$ уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^S} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^S} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q^S} + \mu_2 \tilde{f}_S + \tilde{\Pi}_S.$$

Этот подход не дает никакой информации о реакции связи, реализующей интегрируемую связь.

Геометрическое толкование

Если на движение материальной точки массы m накладывается интегрируемая связь, то она движется на $(3N - 1)$ -мерном подмногообразии пространства конфигураций \mathbb{E}^{3N} . Это подмногообразие называется, как и прежде, конфигурационным многообразием \mathcal{M} . С помощью \tilde{T} можно определить меру длины при движении материальной точки на этом многообразии. Энергия \tilde{T} раскладывается в сумму

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 &= \frac{m}{2} \tilde{a}_{3N3N} \dot{r}^2, \\ \tilde{T}_1 &= m \sum_{K=1}^{3N-1} \tilde{a}_{K3N} \dot{q}^K \dot{r}, \\ T_{\text{отн.}} = \tilde{T}_2 &= \frac{m}{2} \sum_{K=1}^{3N-1} \sum_{J=1}^{3N-1} \tilde{a}_{KJ} \dot{q}^K \dot{q}^J. \end{aligned} \quad (4.23)$$

В случае когда движение материальной точки массы m определено, имеет место разложение:

$$a_{JK} = \mathbf{a}_K \cdot \mathbf{a}_J \quad (J, K = 1, \dots, 3N).$$

Масса m в (4.23) часто берется равной $m_1 + \dots + m_N$. Допустимыми являются и другие варианты, например $m = 1$.

Кинематический элемент длины ds многообразия \mathcal{M} равен

$$ds = \left(\sqrt{\frac{2T_{\text{отн}}}{m}} \right) dt.$$

Эту величину можно переписать в виде

$$ds = \sqrt{\sum_{K=1}^{3N-1} \sum_{J=1}^{3N-1} \tilde{a}_{KJ} dq^K dq^J}.$$

Как и в предыдущем случае после наложения неинтегрируемой связи многообразии \mathcal{M} и величина ds не изменяются.

4.10. Уравнения Лагранжа в канонической форме

Рассмотрим систему материальных точек с интегрируемыми и независимыми от времени связями, для которой реакции связи задаются по методу Лагранжа. В этом случае для построения уравнений движения достаточно проанализировать уравнения, соответствующие обобщенным координатам. Далее получим две альтернативные формы уравнений движения Лагранжа (см. (4.30) и (4.32)).

Предварительные расчеты

Возьмем систему N материальных точек, на движение которых накладывается набор из C (склерономных) интегрируемых связей вида¹¹

$$\Psi_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \dots, \Psi_C(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0. \quad (4.24)$$

Выберем такие координаты q^1, \dots, q^{3N} , чтобы обобщенными координатами для системы были q^1, \dots, q^M , где $M = 3N - C$. В этом случае связи $\Psi_1 = 0, \dots, \Psi_C = 0$ выражаются через координаты q^{M+1}, \dots, q^{3N} .

Связанная кинетическая энергия системы равна

$$\tilde{T} = \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M \tilde{a}_{KJ} \dot{q}^J \dot{q}^K,$$

¹¹Обобщение наших результатов на случай реономных связей см., например, в работе Гинзберга [71].

где мы положили $m = m_1 + \dots + m_N$. Заметим, что $\tilde{a}_{KJ} = \tilde{a}_{JK}$, и сделаем предположение, что матрица, состоящая из этих элементов, обратима. Обратной матрицей будет \tilde{a}^{JK} . Если, например, $M = 3$, то

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}^{11} & \tilde{a}^{12} & \tilde{a}^{13} \\ \tilde{a}^{12} & \tilde{a}^{22} & \tilde{a}^{23} \\ \tilde{a}^{13} & \tilde{a}^{23} & \tilde{a}^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определим также символы Кристоффеля первого рода:

$$[SJ, K] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{KJ}}{\partial q^S} + \frac{\partial a_{KS}}{\partial q^J} - \frac{\partial a_{SJ}}{\partial q^K} \right) \quad (J, K, S = 1, \dots, 3N). \quad (4.25)$$

Число этих символов равно $(3N)^3$. Многие из них, однако, одинаковы, т. к. $[SJ, K] = [JS, K]$. Символы Кристоффеля второго рода равны

$$\Gamma_{IJ}^K = \sum_{R=1}^{3N} a^{KR} [IJ, R] \quad (I, J, K = 1, \dots, 3N). \quad (4.26)$$

Для дальнейшего осмысления символов Кристоффеля рассмотрим движение материальной точки массы m .

Изображающая точка

Метод Кейси, заключающийся в построении изображающей точки, очень удобно применять при расчете символов Кристоффеля. Рассматривая движение материальной точки в конфигурационном пространстве, мы оперируем ковариантными (\mathbf{a}_K) и контравариантными (\mathbf{a}^J) базисными векторами в \mathbb{E}^3 . С помощью этих векторов можно задать a_{JK} , a^{JK} и символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} a_{JK} &= \mathbf{a}_J \cdot \mathbf{a}_K, & a^{JK} &= \mathbf{a}^J \cdot \mathbf{a}^K, \\ [SI, K] &= \frac{\partial \mathbf{a}_S}{\partial q^I} \cdot \mathbf{a}_K, & \Gamma_{KS}^J &= \frac{\partial \mathbf{a}_K}{\partial q^S} \cdot \mathbf{a}^J. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Все индексы в этих уравнениях принимают значения от 1 до $3N$. Из (4.27) очевидны симметрии $a_{JK} = a_{KJ}$, $a^{JK} = a^{KJ}$, $[SI, K] = [IS, K]$ и $\Gamma_{KS}^J = \Gamma_{SK}^J$. Кроме того, замечаем, что символы Кристоффеля есть не что иное как ковариантные и контравариантные составляющие вектора $\frac{\partial \mathbf{a}_K}{\partial q^S}$. В качестве упражнения покажите, как с помощью соотношений (4.25) и (4.26)

получить третье и четвертое уравнения из (4.27) при условии, что удовлетворяются первое и второе уравнения из (4.27).

Производные кинетической энергии

Прежде чем выводить ковариантную и контравариантную формы уравнений Лагранжа, запишем выражения для производных кинетической энергии. Наши рассуждения полностью базируются на применении связанной кинетической энергии, поэтому знак \sim над различными кинематическими величинами будем опускать.

В первую очередь заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^R} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^R} \left(\frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M a_{KJ} \dot{q}^J \dot{q}^K \right) = \\ &= \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M a_{KJ} \left(\frac{\partial \dot{q}^J}{\partial \dot{q}^R} \dot{q}^K + \dot{q}^J \frac{\partial \dot{q}^K}{\partial \dot{q}^R} \right) = \\ &= m \sum_{K=1}^M a_{RK} \dot{q}^K. \end{aligned}$$

При этом мы учли симметрии $a_{RK} = a_{KR}$ и тот факт, что величина a_{RK} не зависит от \dot{q}^S . Аналогичным образом получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q^R} &= \frac{\partial}{\partial q^R} \left(\frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M a_{KJ} \dot{q}^J \dot{q}^K \right) = \\ &= \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M \frac{\partial a_{KJ}}{\partial q^R} \dot{q}^J \dot{q}^K. \end{aligned}$$

Теперь продифференцируем выражение $m \sum_{K=1}^M a_{RK} \dot{q}^K$ по времени. После некоторых преобразований и переименования индексов¹² находим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^R} \right) = m \sum_{K=1}^M a_{RK} \ddot{q}^K + m \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} \dot{q}^S \dot{q}^K =$$

¹²Несмотря на то, что $\frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} \neq \frac{\partial a_{RS}}{\partial q^K}$, всегда справедливо равенство $\sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} \dot{q}^S \dot{q}^K = \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \frac{\partial a_{RS}}{\partial q^K} \dot{q}^S \dot{q}^K$, так как мы суммируем по S и K .

$$\begin{aligned}
&= m \sum_{K=1}^M a_{RK} \ddot{q}^K + \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} \dot{q}^S \dot{q}^K + \\
&+ \frac{m}{2} \sum_{J=1}^M \sum_{I=1}^M \frac{\partial a_{IR}}{\partial q^J} \dot{q}^I \dot{q}^J = \\
&= m \sum_{K=1}^M a_{RK} \ddot{q}^K + \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \left(\frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} + \frac{\partial a_{SR}}{\partial q^K} \right) \dot{q}^S \dot{q}^K.
\end{aligned}$$

Таким образом, производные от T равны

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^R} &= \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{J=1}^M \frac{\partial a_{KJ}}{\partial q^R} \dot{q}^J \dot{q}^K, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^R} \right) &= m \sum_{K=1}^M a_{RK} \ddot{q}^K + \frac{m}{2} \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \left(\frac{\partial a_{RK}}{\partial q^S} + \frac{\partial a_{SR}}{\partial q^K} \right) \dot{q}^S \dot{q}^K.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Уравнения движения Лагранжа в ковариантной форме

Ранее мы уже получали уравнения движения Лагранжа в ковариантной форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^R} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^R} = \Phi_R \quad (R = 1, \dots, M). \tag{4.29}$$

Здесь Φ_1, \dots, Φ_M есть обобщенные силы. Теперь разложим производные от T и приведем это уравнение к другому виду. Используя соотношение (4.28) и определение символа Кристоффеля первого рода, приходим к выводу, что уравнения движения Лагранжа имеют вид

$$m \sum_{K=1}^M a_{RK} \ddot{q}^K + m \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M [SK, R] \dot{q}^K \dot{q}^S = \Phi_R \quad (R = 1, \dots, M). \tag{4.30}$$

В одном из упражнений к третьей главе говорилось, что в такой форме уравнения Лагранжа встречаются в ряде учебников по дифференциальной геометрии¹³. В упомянутом упражнении рассматривался случай одной материальной точки.

¹³См., например, работы Макконнела [139], Синга и Шильда [208].

Из (4.30) становится ясно, что, зная a_{JK} , мы можем сразу записать левую часть уравнений движения Лагранжа. Для рассматриваемой системы кинематический элемент длины ds равен

$$ds = \sqrt{\sum_{R=1}^M \sum_{K=1}^M a_{RK} \dot{q}^R \dot{q}^K} dt.$$

Если известно выражение для ds (и следовательно, известны a_{JK}), то мы немедленно можем записать левую часть уравнений Лагранжа.

Уравнения движения Лагранжа в контравариантной форме

Если умножить обе части уравнений Лагранжа в ковариантной форме на матрицу, обратную a_{RK} , получим уравнения движения Лагранжа в контравариантной форме. Поскольку мы наложили интегрируемые связи и ищем первые M уравнений движения, нам достаточно получить лишь M контравариантных уравнений из M ковариантных уравнений¹⁴

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1M} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1M} & \cdots & a^{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Таким образом, некоторые a_{KJ} должны равняться нулю:

$$\begin{bmatrix} a_{1(M+1)} & a_{1(M+2)} & \cdots & a_{1(3N)} \\ a_{2(M+1)} & a_{2(M+2)} & \cdots & a_{2(3N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M(M+1)} & a_{M(M+2)} & \cdots & a_{M(3N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Если удовлетворяется соотношение (4.31), то правая часть уравнений движения Лагранжа получается преобразованием ковариантных составляющих Φ в контравариантные:

$$\Phi^J = \sum_{R=1}^M a^{JR} \Phi_R.$$

В конечном итоге уравнения движения Лагранжа в контравариантной форме представляются в виде

$$m \ddot{q}^J + m \sum_{K=1}^M \sum_{S=1}^M \Gamma_{KS}^J \dot{q}^K \dot{q}^S = \Phi^J \quad (J = 1, \dots, M). \quad (4.32)$$

¹⁴В контексте изображающей точки эти ограничения эквивалентны условиям $a_J \cdot a_K = 0$ для всех $J = 1, \dots, M$ и всех $K = M + 1, \dots, 3N$.

Уравнения Лагранжа в контравариантной форме особенно полезны при численном моделировании, так как предоставляют сразу получить явные выражения для $\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^M$.

Пример

Применим уравнения (4.30)–(4.32) к решению простой задачи на движение материальной точки в пространстве \mathbb{E}^3 под действием силы \mathbf{F} . Опишем движение материальной точки в сферической системе координат: $q^1 = R$, $q^2 = \phi$ и $q^3 = \theta$. Таким образом, $M = 3$. На основе последующих рассуждений также решается задача 3.3.

Мы уже знаем, что

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \right).$$

Из выражения для T немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2(\phi) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{12} & a^{22} & a^{23} \\ a^{13} & a^{23} & a^{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & R^{-2} \sin^{-2}(\phi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из уравнения $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = F_i$ можно сразу получить уравнения движения Лагранжа в ковариантной форме:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -mR \left(\sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \right) \\ -mR^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\theta}^2 + 2mR\dot{R}\dot{\phi} \\ 2mR \sin^2(\phi) \dot{R}\dot{\theta} + 2mR^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_R \\ \mathbf{F} \cdot R\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{F} \cdot R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_R \\ \mathbf{F} \cdot \frac{1}{R} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{F} \cdot \frac{1}{R \sin(\phi)} \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}.$$

Из (4.33) находим символы Кристоффеля первого рода. Например, $[22, 1] = -R$, $[33, 1] = -R \sin^2(\phi)$, $[12, 2] = R$ и $[13, 3] = R \sin^2(\phi)$.

Умножая обе части уравнения (4.33) на матрицу, обратную $[a_{ij}]$, получаем уравнения Лагранжа в контравариантной форме:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mR (\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ -m \sin(\phi) \cos(\phi)\dot{\theta}^2 + \frac{2m}{R} \dot{R}\dot{\phi} \\ \frac{2m}{R} \dot{R}\dot{\theta} + 2m \operatorname{ctg} \phi \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

И снова из правой части этих уравнений находим символы Кристоффеля второго рода. Среди них, например, следующие: $\Gamma_{22}^1 = -R$, $\Gamma_{33}^2 = -\sin(\phi) \cos(\phi)$ и $\Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg}(\phi)$.

4.11. Альтернативные принципы механики

В 17 веке Ньютон внес огромный вклад в механику, но некоторые вопросы остались без ответа. Например, не были получены уравнения движения для твердых тел и деформируемой среды. Впоследствии был выдвинут ряд принципов механики: принцип виртуальной работы Бернулли (в 1717 году), принцип Даламбера (в 1743 году, [44]), принцип наименьшего принуждения Гаусса (в 1829 году, [68]), принцип Гамильтона (в 1835 году, [89]) и др.¹⁵ Цель данного раздела — установить, как некоторые из этих принципов связаны с теоремой об изменении количества движения, на основе которых строятся уравнения движения для системы материальных точек.

4.11.1. Принцип виртуальной работы и принцип Даламбера

Сначала рассмотрим принцип виртуальной работы и принцип Даламбера применительно к системе N материальных точек. Во многих учебниках уравнения движения Лагранжа строятся на базе этих двух принципов¹⁶. Предположим, что на материальные точки накладывается единствен-

¹⁵Более подробно об этих и многих других принципах читайте в работах Дюга [48], Сабо [209] и Трусделла [216, 217].

¹⁶См., например, работы Баруха [14, раздел 4.9], Гринвуда [78, раздел 2.1], Синга [206, раздел 46]. Многие авторы уточняют, что принцип виртуальной работы применим к статическим задачам, тогда как для решения динамических задач его необходимо дополнять принципом Даламбера. По этой причине в настоящем разделе эти два принципа рассматриваются вместе.

ная связь:

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{v}_N + e = 0. \quad (4.35)$$

Принцип виртуальной работы и принцип Даламбера совместно утверждают, что движение системы материальных точек подчиняется уравнению

$$(\mathbf{F}_{a1} - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \mathbf{d}_1 + \dots + (\mathbf{F}_{aN} - m_N \ddot{\mathbf{r}}_N) \cdot \mathbf{d}_N = 0 \quad (4.36)$$

для всех возможных векторов $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_N$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \dots + \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{d}_N = 0. \quad (4.37)$$

Обратите внимание, что e присутствует в (4.35), но отсутствует в (4.37). Векторы \mathbf{d}_K называются *виртуальными перемещениями* и часто обозначаются как $\delta \mathbf{r}_K$. Приложенная сила \mathbf{F}_{aK} совершает виртуальную работу, равную $\mathbf{F}_{aK} \cdot \mathbf{d}_K$. Таким образом, из (4.36) следует, что совокупная виртуальная работа, совершаемая приложенными силами \mathbf{F}_{aK} и инерциальными силами $-m_K \ddot{\mathbf{r}}_K$, равна нулю.

Наша цель — получить из (4.36) уравнения движения для системы материальных точек. Определим множители Лагранжа и запишем связь, накладываемую на векторы \mathbf{d}_K ¹⁷:

$$\sum_{K=1}^N (\mathbf{F}_{aK} - m_K \ddot{\mathbf{r}}_K) \cdot \mathbf{d}_K + \mu \sum_{K=1}^N \mathbf{f}_K \cdot \mathbf{d}_K = 0. \quad (4.38)$$

Из-за отсутствия множителя Лагранжа векторы \mathbf{d}_K можно изменять независимо друг от друга. Чтобы уравнение (4.38) имело место для всех таких перемещений, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось условие

$$m_K \ddot{\mathbf{r}}_K = \mathbf{F}_{aK} + \mu \mathbf{f}_K \quad (K = 1, \dots, N). \quad (4.39)$$

С другой стороны, уравнения (4.39) есть не что иное как уравнения движения для системы материальных точек, подверженных связи (4.35). Соответствующие реакции связи задаются с помощью лагранжевого представления:

$$\mathbf{F}_{cK} = \mu \mathbf{f}_K \quad (K = 1, \dots, N). \quad (4.40)$$

Дальнейшее построение уравнений движения Лагранжа для системы материальных точек достаточно просто. Таким образом, принцип виртуальной

¹⁷Если связь (4.35) интегрируемая, то рассматриваемый метод в точности соответствует методу Лагранжа, описанному в [121, 122] (см. раздел 4 главы 11 в работе Дюга [48]).

работы и принцип Даламбера позволяют получить уравнения движения для системы связанных материальных точек при условии, что реакции связей имеют лагранжево представление.

Если связь (4.35) интегрируемая, то уравнение (4.37) задает условие ортогональности векторов \mathbf{d}_K . Нетрудно заметить, что в этом случае выражение (4.40) для реакций связей предполагает перпендикулярность силы конфигурационному многообразию \mathcal{M} .

4.11.2. Принцип наименьшего принуждения Гаусса

Принцип наименьшего принуждения Гаусса был сформулирован в 1829 году и опубликован в статье [68], посвященной исследованию роли реакций связи в механических системах. Рассмотрим систему N материальных точек, ограниченных связью (4.35), и допустим, что реакции связи имеют лагранжево представление (т. е. имеет место (4.40)). Тогда при любом движении системы, удовлетворяющем этой связи, минимально необходимыми реакциями связей, реализующими эту связь, будут $\mathbf{F}_{cK} = \mu \mathbf{f}_K$. Стало быть, лагранжево представление является в некотором смысле оптимальным!

С момента своего появления в 1829 году принцип наименьшего принуждения сыграл ключевую роль в ряде плодотворных исследований в механике (см., например, работу Герца [92]). Очень хорошо этот принцип описывается в [218]; О'Рейли и Сриниваса [162] сформулировали его для случаев, когда лагранжево представление не применимо.

4.11.3. Принцип Гамильтона

Последний принцип, который мы рассмотрим, был сформулирован сэром Уильямом Гамильтоном (1805–1865) и впервые опубликован в работе [89] для системы несвязанных материальных точек, подверженных действию консервативных сил. Для простоты ограничимся рассмотрением случая с одной материальной точкой массы m . Предположим, что радиус-вектор этой точки параметризуется тремя координатами $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$. Тогда, согласно принципу Гамильтона, движение системы от заданной начальной $\mathbf{q}(t_0)$ конфигурации точки до заданной конечной $\mathbf{q}(t_1)$ конфигурации точки экстремизирует интеграл действия¹⁸

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (4.41)$$

¹⁸Экстремизировать — значит минимизировать или максимизировать.

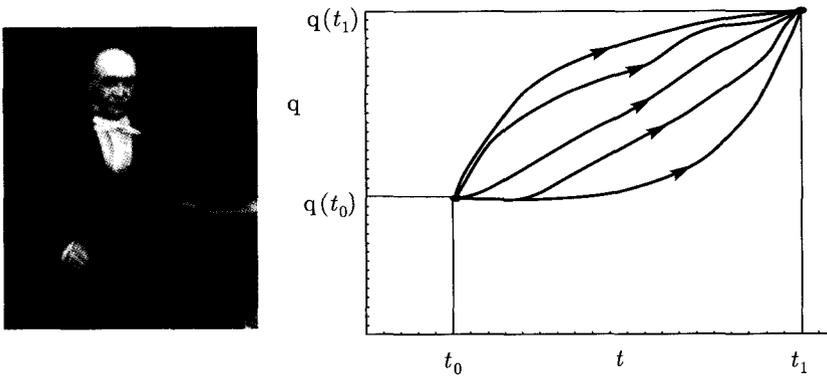


Рис. 4.6. Несколько возможных траекторий q , соединяющих две конфигурации ($q(t_0)$ и $q(t_1)$) материальной точки. Истинная траектория удовлетворяет дифференциальному уравнению $F = ma$. Принцип Гамильтона гласит, что эта траектория экстремизирует интеграл $I = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ (см. (4.41)). Портрет Гамильтона взят из Королевской ирландской академии в Дублине

где лагранжиан равен $L = T(q^i, \dot{q}^i) - U(q^i)$, а t_0 и t_1 — фиксированные моменты времени. Как показано на рис. 4.6, существует бесконечное множество траекторий $q(t)$, соединяющих две возможные конфигурации точки, поэтому задача поиска траектории, являющейся экстремумом интеграла, кажется трудоемкой.

Однако задолго до того, как в 1835 году появился интеграл (4.41), были известны необходимые условия для того, чтобы $q^1(t)$, $q^2(t)$, $q^3(t)$ задавали экстремум интеграла I . Эти условия описывались следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.42)$$

В контексте задачи на поиск экстремума интеграла I уравнения (4.42) называются уравнениями Эйлера–Лагранжа¹⁹. Таким образом, принцип Гамильтона утверждает, что движение системы материальных точек удовле-

¹⁹Задачи, связанные с нахождением экстремума I , решаются с помощью вариационного исчисления. В середине 18 века огромную роль в развитии вариационного исчисления сыграли Эйлер и Лагранж [72]. Именно этого вопроса касалось первое письмо, адресованное 19-летним Лагранжем Эйлеру в 1755 году.

творяет уравнениям (4.42), которые эквивалентны закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ для материальной точки. В заключение скажем, что в случае свободного движения материальной точки принцип Гамильтона эквивалентен теореме об изменении количества движения. Получается, что движение системы, описываемое решением уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, есть экстремум интеграла I !

Впоследствии некоторые авторы сформулировали принцип Гамильтона для более общих случаев. Например, для случая, когда движение системы материальных точек ограничено интегрируемыми связями. Якоби [102] широко применял принцип Гамильтона при исследовании движения материальных точек по гладким поверхностям и поиске кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности. Несмотря на то, что принцип Гамильтона не применим к системам материальных точек с неинтегрируемыми связями, с его помощью было сформулировано несколько фундаментальных положений современной физики.

4.12. Заключение

В этой главе мы вывели уравнения движения Лагранжа для системы материальных точек и показали, как они изменяются при наложении связей. Всякий раз мы подчеркивали, что уравнения Лагранжа эквивалентны ньютоновскому закону для каждой материальной точки. Это важное свойство позволяет нам рассчитывать силы $\Phi_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^K}$, фигурирующие в правой части уравнений движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} = \Phi_K \quad (K = 1, \dots, 3N).$$

Кроме того, мы можем накладывать интегрируемые и неинтегрируемые связи и рассчитывать соответствующие реакции связей.

На более глубоком уровне метод изображающей точки Кейси позволяет рассмотреть систему материальных точек как одну материальную точку, движущуюся по конфигурационному многообразию \mathcal{M} , принадлежащему $3N$ -мерному евклидову пространству. В следующей главе мы изучим примеры, связанные с построением уравнений движения Лагранжа для нескольких систем материальных точек.

Задачи

4.1. Каковы кинематические элементы длины ds , обобщенные координаты и конфигурационные многообразия \mathcal{M} для следующих систем:

- (a) материальная точка, соединенная пружиной с неподвижной точкой;
- (b) материальная точка, соединенная стержнем длины $L(t)$ с неподвижной точкой;
- (c) материальная точка, совершающая гармонические колебания;
- (d) плоский двойной маятник;
- (e) сферический двойной маятник.

4.2. При каких условиях реакции связей не совершают работы?

4.3. Многие авторы допускают, что кинетическая энергия системы материальных точек описывается положительно определенной функцией скоростей \dot{q}^K . Если положить $T = \sum_{I=1}^{3N} \sum_{J=1}^{3N} \frac{m}{2} a_{IJ} \dot{q}^I \dot{q}^J$, то это будет эквивалентно утверждению, что матрица с элементами $\frac{m}{2} a_{IJ}$ является положительно определенной²⁰.

На примере сферического маятника покажите, что некоторые представления T не всегда являются положительно определенными. В частности, условие положительной определенности нарушается в вырожденных точках сферической системы координат.

4.4. Чем отличаются базисы $\{\mathbf{e}_K\}$, $\{\mathbf{e}^K\}$ и $\{\bar{\mathbf{e}}_K\}$ при построении изображающей точки методом Кейси? Чему равны эти базисы в \mathbb{E}^6 для заданной системы двух материальных точек?

4.5. Рассмотрите функцию, зависящую от движения двух материальных точек:

$$V = V(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|, t).$$

Это типичная функция потенциальной энергии и интегрируемой связи.

- (a) Получите для произвольного вектора \mathbf{x} выражение

$$\frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

Самый простой способ — выразить вектор \mathbf{x} в декартовых координатах.

- (b) Докажите, что

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_2} \cdot \mathbf{v}_2 + \frac{\partial V}{\partial t},$$

²⁰Напомним, что матрица C называется положительно определенной, если для всех ненулевых \mathbf{x} выполняется условие $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} > 0$ и лишь для $\mathbf{x} = 0$ имеет место равенство $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = 0$.

где

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

и

$$x = \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

- (c) Пусть на систему двух материальных точек накладывается связь $\Psi = 0$, где

$$\Psi = \Psi(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|, t). \quad (4.43)$$

Используя лагранжево представление, докажите, что $\mathbf{F}_{c1} = -\mathbf{F}_{c2}$. Обратите внимание, что так записывается третий закон Ньютона. Приведите два примера физической связи, которая описывается уравнением (4.43) и для которой соответствующие реакции связи равны по величине и противоположны по направлению.

- (d) Пусть на систему двух материальных точек действует консервативная сила, для которой функция потенциальной энергии имеет вид

$$U = U(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|). \quad (4.44)$$

Используя тождество

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{\text{con}1} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{F}_{\text{con}2} \cdot \mathbf{v}_2,$$

докажите равенство $\mathbf{F}_{\text{con}1} = -\mathbf{F}_{\text{con}2}$, являющееся третьим законом Ньютона. Приведите два примера, для которых U рассчитывается по (4.44), и покажите, что консервативные силы равны по величине и противоположны по направлению.

4.6. В задаче двух тел рассматривается система двух материальных точек: одна массой $m_1 = M$ и другая массой $m_2 = m$. На систему действуют лишь силы, порождаемые ньютоновским гравитационным силовым полем, для которой функция потенциальной энергии равна $U_n = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$.

- (a) Докажите, что количество движения этой системы сохраняется и что центр масс C совершает равномерное прямолинейное движение. Кроме того, докажите, что

$$\mathbf{r}_2 - \bar{\mathbf{r}} = \frac{M}{m+M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}} = -\frac{m}{m+M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

где $\bar{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор центра масс.

- (b) Докажите, что кинетический момент системы материальных точек относительно точки C сохраняется.
- (c) Докажите, что полная энергия системы материальных точек сохраняется.
- (d) Докажите, что дифференциальные уравнения, определяющие движение точек m_1 и m_2 , имеют вид²¹:

$$\begin{aligned} M(\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\bar{\mathbf{r}}}) &= -GMm \left(\frac{m}{M+m} \right)^2 \frac{\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}}\|^3}, \\ m(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\bar{\mathbf{r}}}) &= -GMm \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \frac{\mathbf{r}_2 - \bar{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}_2 - \bar{\mathbf{r}}\|^3}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

- (e) Докажите, что результаты, полученные в разделе 2.8, можно применить к (4.45) и рассчитать орбитальные движения материальных точек относительно их центра масс C .

²¹В небесной механике построение уравнений движения в такой форме эквивалентно использованию барицентрической системы координат (см., например, [220]), т. е. такой системы координат, начало которой совпадает с центром масс системы.

ГЛАВА 5

Динамика систем материальных точек

5.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим несколько примеров систем материальных точек. Особое внимание уделим построению уравнений движения Лагранжа для этих систем. Все они являются классическими примерами систем материальных точек: от простых гармонических осцилляторов до гантелевидных спутников и маятников. Наша цель — применить знания, полученные в предыдущей главе, к решению ряда типовых задач.

Задачи, схожие с вышеперечисленными, встречаются во многих учебниках по динамике. Как правило, в этих учебниках используются альтернативные формулировки уравнений движения Лагранжа, не учитывающие неконсервативные силы в явном виде. Поскольку мы уже знаем, что уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям, полученным из теоремы об изменении количества движения, мы легко можем включить в модель неконсервативные силы, такие как кулоновское динамическое трение. В конце главы приводится краткий обзор работ, посвященных динамике систем материальных точек и выпущенных в последние годы.

5.2. Гармонические осцилляторы

Сначала рассмотрим простые примеры систем двух материальных точек, одна из которых изображена на рис. 5.1. Эта система состоит из материальной точки массы m_1 , соединенной пружиной с неподвижной опорой. Жесткость пружины равна K_1 , а собственная длина — L_1 . Кроме того, эта точка соединена с другой материальной точкой массы m_2 пружиной жесткости K_2 . Длина второй пружины в недеформированном состоянии равна L_2 . Обе материальные точки могут двигаться только в направлении \mathbf{E}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (L_1 + x_1)\mathbf{E}_1 + y_1\mathbf{E}_2 + z_1\mathbf{E}_3, \\ \mathbf{r}_2 &= (L_1 + L_2 + x_2)\mathbf{E}_1 + y_2\mathbf{E}_2 + z_2\mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 — смещения материальных точек от положений, в которых пружины не деформированы.

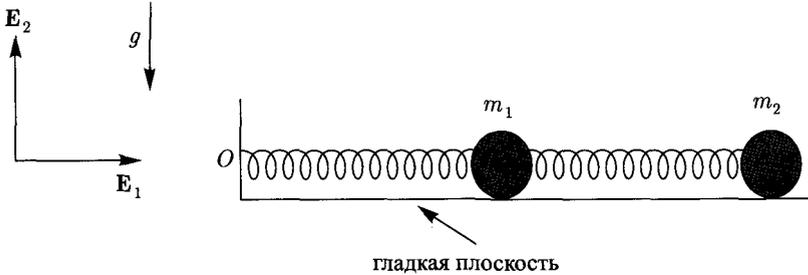


Рис. 5.1. Система двух материальных точек, движущаяся по гладкой горизонтальной плоскости. Материальные точки соединены пружинами постоянной жесткости

Координаты

Обозначим следующим образом шесть координат:

$$q^1 = x_1, \quad q^2 = x_2, \quad q^3 = y_1, \quad q^4 = y_2, \quad q^5 = z_1, \quad q^6 = z_2.$$

Материальные точки рассматриваемых систем движутся вдоль прямой. Это значит, что на систему накладываются четыре связи:

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = 0,$$

где

$$\Psi_1 = y_1, \quad \Psi_2 = y_2, \quad \Psi_3 = z_1, \quad \Psi_4 = z_2.$$

Следует заметить, что

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathbf{E}_2, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathbf{E}_3, \quad \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathbf{0}$$

и

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{E}_2, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{E}_3.$$

Позже с помощью этих выражений мы зададим реакции связей.

Кинетическая и потенциальная энергии

Легко видеть, что кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2), \\ U &= \frac{K_1}{2} x_1^2 + \frac{K_2}{2} (x_2 - x_1)^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Накладывая на эти уравнения четыре интегрируемые связи, находим их связанные аналоги:

$$\tilde{T} = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2, \quad \tilde{U} = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Реакции связей

При движении материальных точек по гладкой поверхности реакции связей можно задать по методу Лагранжа:

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{F}_{c2} = \mu_2 \mathbf{E}_2 + \mu_4 \mathbf{E}_3,$$

где μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 — нормальные составляющие сил. Если поверхность шероховатая, то эти выражения необходимо модифицировать, включив в них силы трения:

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3 - \mu_d \left\| \mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3 \right\| \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|} \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{F}_{c2} = \mu_2 \mathbf{E}_2 + \mu_4 \mathbf{E}_3 - \mu_d \left\| \mu_2 \mathbf{E}_2 + \mu_4 \mathbf{E}_3 \right\| \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} \mathbf{E}_1.$$

Равнодействующая всех сил, приложенных к каждой точке, складывается из реакции связи и консервативных сил, обусловленных земным притяжением и действием пружин.

Изображающая точка

Рассматриваемую систему легко заменить одной представляющей точкой массы m . Во-первых, радиус-вектор этой точки, движущейся в пространстве \mathbb{E}^6 , определяется по формуле (4.15):

$$\mathbf{r} = (x_1 + L_1) \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3 + (x_2 + L_1 + L_2) \mathbf{e}_4 + y_2 \mathbf{e}_5 + z_2 \mathbf{e}_6.$$

С помощью этого выражения легко вычислить шесть ковариантных векторов \mathbf{a}_J и шесть контравариантных векторов \mathbf{a}^J :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_5, \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_6 = \mathbf{e}_6$$

и

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{e}^4, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{e}^2, \quad \mathbf{a}^4 = \mathbf{e}^5, \quad \mathbf{a}^5 = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{a}^6 = \mathbf{e}^6.$$

Если бы мы нашли кинетическую энергию $T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, то это было бы эквивалентно выражению, полученному согласно (5.1).

На движение изображающей точки накладываются связи вида

$$\Psi_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^2, \quad \Psi_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^5, \quad \Psi_3 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^3, \quad \Psi_4 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^6.$$

Отсюда легко видеть, что реакция связи Φ_c , которую мы задавали бы с помощью лагранжева представления, равна

$$\Phi_c = \mu_1 \mathbf{e}^2 + \mu_2 \mathbf{e}^5 + \mu_3 \mathbf{e}^3 + \mu_4 \mathbf{e}^6. \quad (5.2)$$

При наличии трения формула (5.2) не применима.

Вектор силы Φ рассчитывается по формуле (4.16):

$$\begin{aligned} \Phi = & \left(-K_1(x_1) + K_2(x_2 - x_1) - \mu_d \|\mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3\| \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|} \right) \mathbf{e}^1 + \\ & + (\mu_1 - m_1 g) \mathbf{e}^2 + \mu_3 \mathbf{e}^3 + (\mu_2 - m_2 g) \mathbf{e}^5 + \mu_4 \mathbf{e}^6 + \\ & + \left(-K_2(x_2 - x_1) - \mu_d \|\mu_2 \mathbf{E}_2 + \mu_4 \mathbf{E}_3\| \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} \right) \mathbf{e}^4. \end{aligned}$$

Заметим, что члены этого выражения, обусловленные реакцией связи, согласуются с уравнением (5.2) при $\mu_d = 0$. Итак, мы нашли всё, что нужно для построения уравнений движения изображающей точки массы m .

Обобщенные координаты и конфигурационное многообразие

На систему накладываются четыре интегрируемые связи, поэтому обобщенными координатами будут x_1 и x_2 . Конфигурационное многообразие \mathcal{M} соответствует плоскости \mathbb{E}^2 , а кинематический линейный элемент равен

$$ds = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2} dt.$$

Этот линейный элемент легко связать со стандартной мерой расстояния, которое проходит материальная точка вдоль кривой $(x(\tau), y(\tau))$ на плоскости. Речь идет о мере $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2} d\tau$. Чуть позже мы введем в систему неинтегрируемую связь и увидим, что \mathcal{M} и ds при этом не изменятся.

Уравнения движения осциллятора

Сначала рассмотрим случай, характеризующийся отсутствием трения (рис. 5.1). Для этой системы реакции связей записываются по Лагранжу. Все другие силы, действующие на систему, являются консервативными. Следовательно, $\Phi_1 = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q^1}$ и $\Phi_2 = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q^2}$. Уравнения движения могут быть получены, исходя из следующих уравнений движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q^\alpha}, \quad (5.3)$$

где $\alpha = 1, 2$. Осуществляя небольшие расчеты, получаем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 - K_2 (x_1 - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -K_2 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

При анализе этих уравнений, имеющих классическую форму, становится очевидной их эквивалентность уравнениям $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$ и $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$ соответственно.

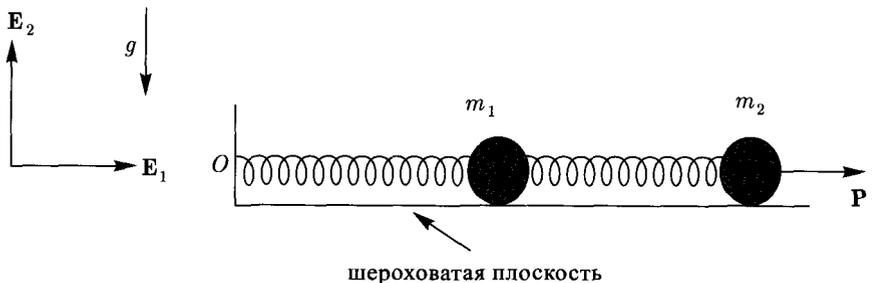


Рис. 5.2. Система двух материальных точек, движущаяся по шероховатой горизонтальной плоскости

Влияние динамического трения¹ и приложенной силы

Рассмотрим ту же систему материальных точек, но при наличии динамического трения и внешней силы $\mathbf{P} = P \cos(\omega t) \mathbf{E}_1$, приложенной к точке массы m_2 (рис. 5.2). Мы уже сделали все предварительные расчеты,

¹В литературе часто используется термин «трение скольжения».

необходимые для построения уравнений движения этой системы. Главное отличие здесь в том, что уравнения движения Лагранжа в форме (5.3) не применимы. Следует исходить из уравнений движения Лагранжа, имеющих следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} = \Phi_K, \quad (5.4)$$

где $\Phi_K = \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^K} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^K}$ или, если используется метод изображающей точки, $\Phi_K = \Phi \cdot \mathbf{a}_K$. Ясно, что мы должны добавить в \mathbf{F}_2 член $\mathbf{P} = P \cos(\omega t) \mathbf{E}_1$, а в Φ — член $P \cos(\omega t) \mathbf{e}^4$.

С учетом (5.4) и полученных выше выражений для T и силы приходим к следующим шести уравнениям:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 - K_2 (x_1 - x_2) - \mu_d m_1 g \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -K_2 (x_2 - x_1) - \mu_d m_2 g \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} + P \cos(\omega t), \\ 0 &= N_{1y} - m_1 g, \\ 0 &= N_{2y} - m_2 g, \\ 0 &= N_{1z}, \\ 0 &= N_{2z}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Последние четыре уравнения содержат реакции связей: $N_{1y} = \mu_1$, $N_{2y} = \mu_2$, $N_{1z} = \mu_3$ и $N_{2z} = \mu_4$.

Скачкообразные колебания

Одна из наиболее интересных особенностей колебательного движения появляется в случае, когда одна или обе скорости материальных точек равны нулю. При этом изменяется число интегрируемых связей и реакций связей. Результирующие колебания часто называют скачкообразными. Такой характер движения встречался нами ранее в модели американских горок. Для этих двух типов трения количество дифференциальных уравнений, описывающих движение, различно, поэтому численное моделирование уравнений движения может быть достаточно сложным².

²Более подробно о математических моделях скачкообразных колебаний читайте в [23, 50, 112]. В [21, 111] описываются интересные примеры такого рода колебаний, а также их применение к решению различных задач, например к описанию визга при торможении.

Пусть материальная точка массы m_1 находится в состоянии мгновенного покоя, тогда необходимо наложить дополнительную связь $x_1 = x_{10}$, где x_{10} — постоянная. Реакция связи \mathbf{F}_{c1} будет равна

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3 + \mu_5 \mathbf{E}_1,$$

где $\mu_5 \mathbf{E}_1$ — сила статического трения³, удовлетворяющая критерию статического трения

$$|\mu_5| \leq \mu_s \sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2},$$

где μ_s — коэффициент статического трения. Уравнения движения для рассматриваемого случая будут не (5.5), а

$$\begin{aligned} \mu_5 &= K_1 x_{10} + K_2(x_{10} - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -K_2(x_2 - x_{10}) - \mu_d m_2 g \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} + P \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$|K_1 x_{10} + K_2(x_{10} - x_2)| \leq \mu_s m_1 g.$$

Таким образом, если сила трения будет достаточно сильна, чтобы противодействовать силам натяжения пружин, то значение x_{10} не изменится. В противном случае точка начнет скользить в направлении результирующей упругой силы и движение будет описываться уравнениями (5.5).

Наложение интегрируемой связи

Рассмотрим теперь случай, когда на систему, описанную в разделе 5.2, накладывается интегрируемая связь. Уравнение связи имеет вид

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 = 0.$$

Эту связь также можно выразить в виде

$$(x_2 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

или, если речь идет об изображающей точке, в виде

$$(x_2 \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^4) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Попробуйте доказать, что эта связь является интегрируемой.

³В литературе по механике также используется термин трение покоя.

Используя лагранжево представление, приходим к выводу, что на материальные точки начинают действовать дополнительные реакции связи, равные $\mu_5 x_2 \mathbf{E}_1$ и $-\mu_5 \mathbf{E}_1$. Для изображающей точки массы m необходимо увеличить реакцию связи Φ_c на величину $\mu_5(x_2 \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^4)$. Исходя из уравнений движения Лагранжа (5.4), приходим к следующим уравнениям движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 - K_2(x_1 - x_2) - \mu_d m_1 g \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|} + \mu_5 x_2,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -K_2(x_2 - x_1) - \mu_d m_2 g \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} - \mu_5.$$

Еще четыре уравнения идентичны последним четырем уравнениям системы (5.5). Первые два уравнения движения дополняются связью $\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 = 0$.

5.3. Гантелевидный спутник

В 1960-х гг. было разработано несколько простых моделей деформируемых спутников, вращающихся вокруг планеты массы M . В настоящем разделе мы рассмотрим одну из таких моделей и проанализируем некоторые особенности ее динамики. В частности, мы расскажем о взаимосвязи между движением центра масс и вращением спутника. Эта связь обуславливается гравитационными силами, действующими на спутник; более подробно читайте в учебнике Белецкого по динамике спутников [16].

В модели, которую мы выбрали, масса спутника распределяется между двумя материальными точками, расположенными на концах пружины жесткости K и длины L_0 (рис. 5.3). Гравитационная сила, действующая на спутник со стороны планеты массы M , вокруг которой он вращается, моделируется как ньютоновское гравитационное силовое поле, действующее на каждую материальную точку. Далее обсудим, как построить для этой модели уравнения движения.

Координаты

Наша первая задача — выбрать координаты для задания радиус-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 материальных точек. В качестве первого разумного выбора можно остановиться на декартовых координатах и выразить через них радиус-векторы обеих материальных точек. Другой вариант — задать \mathbf{r}_1 в декартовых координатах, а $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — в сферических. Возможен и третий вариант — описать в декартовых координатах радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}$ центра масс C

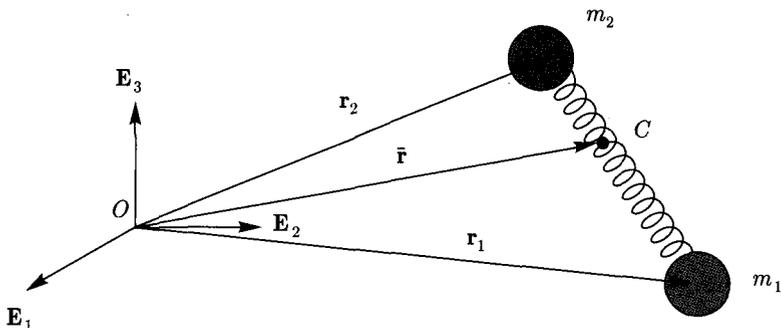


Рис. 5.3. Материальные точки с массами m_1 и m_2 , закрепленные на концах пружины постоянной жесткости K ; длина пружины в свободном состоянии равна L_0 . Каждая материальная точка притягивается к неподвижной точке O за счет ньютоновского гравитационного силового поля

системы, а в сферических координатах — векторы $\mathbf{r}_2 - \bar{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}}$. Остановимся на третьем варианте.

Обозначим вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ через $R\mathbf{e}_R$, где $R = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$, тогда получим:

$$\mathbf{e}_R = \sin(\phi)(\cos(\theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta)\mathbf{E}_2) + \cos(\phi)\mathbf{E}_3.$$

После некоторых алгебраических выкладок приходим к выводу, что

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}} - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) R\mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) R\mathbf{e}_R.$$

С учетом выбранной нами системы координат имеем $\bar{\mathbf{r}} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3$.

Для удобства обозначим координаты следующим образом:

$$q^1 = x, \quad q^2 = y, \quad q^3 = z, \quad q^4 = R, \quad q^5 = \phi, \quad q^6 = \theta. \quad (5.7)$$

Запишем, кроме того, 12 частных производных от \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 по этим координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial z} &= \mathbf{E}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial R} &= -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \mathbf{e}_R, & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \phi} &= -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) R\mathbf{e}_\phi, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} &= -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial z} &= \mathbf{E}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial R} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{e}_R, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) R \mathbf{e}_\phi, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) R \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

Поскольку силы, действующие на систему материальных точек, являются консервативными, уравнения движения Лагранжа можно получить, не рассчитывая эти векторы. Мы рассчитали их по той причине, что они помогут нам в будущем объяснить одно важное соотношение.

Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек:

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 \right).\end{aligned}$$

Мы пришли к этому выражению, опустив некоторые выкладки.

Потенциальная энергия системы обуславливается силой тяготения Ньютона и потенциальной энергией пружины:

$$U = - \frac{GMm_1}{\left\| \bar{\mathbf{r}} - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) R \mathbf{e}_R \right\|} - \frac{GMm_2}{\left\| \bar{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) R \mathbf{e}_R \right\|} + \frac{K}{2} (R - L_0)^2.$$

Мы могли бы включить в это выражение ньютоновские силы гравитационного взаимодействия между m_1 и m_2 , но для наших целей это не столь существенно.

Уравнения движения Лагранжа

На рассматриваемую систему материальных точек не накладываются никакие связи и действуют только консервативные силы. Следовательно,

движение этой системы можно описать уравнениями движения Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^S} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^S} = 0 \quad (S = 1, \dots, 6).$$

Получите эти уравнения прямым методом с использованием выражений для T и U из предыдущего подраздела.

В силу консервативности действующих на систему сил полная энергия $E = T + U$ системы не изменяется, так же как и кинетический момент системы относительно точки O , т. е. вектор \mathbf{H}_O . Кинетический момент равен

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 = \\ &= \bar{\mathbf{r}} \times m \bar{\mathbf{v}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} R^2 (\dot{\phi} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta} \sin(\phi) \mathbf{e}_\phi). \end{aligned}$$

Из условия сохранения \mathbf{H}_O вытекает связь между линейными скоростями \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} центра масс и угловыми скоростями $\dot{\theta}$ и $\dot{\phi}$ спутника. Убедимся в этом позднее при моделировании спутников как твердых тел.

Обобщенные координаты и конфигурационное многообразие

На систему не накладываются никакие связи, поэтому обобщенными координатами являются x, y, z, R, θ и ϕ . Конфигурационное многообразие соответствует пространству E^6 с кинематическим линейным элементом

$$ds = \sqrt{\frac{2T}{m_1 + m_2}} dt.$$

Примечания к уравнениям движения

Уравнения движения, получаемые с помощью уравнений Лагранжа, эквивалентны уравнениям движения, которые напрямую выводятся из законов $\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$ и $\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$. И действительно, если вернуться в раздел 4.6 к построению уравнений Лагранжа, то мы увидим, что полученные уравнения являются линейными комбинациями равенств $\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$ и $\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$. К примеру, уравнение движения Лагранжа относительно R

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0$$

эквивалентно выражению

$$(\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial R} + (\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial R} = 0.$$

Если описать движение системы в других координатах, то уравнения движения Лагранжа будут соответствовать иным линейным комбинациям составляющих уравнений $\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$ и $\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$.

Похожие системы

Описанную в этом разделе модель можно модифицировать различными способами. Во-первых, пружину можно заменить жестким стержнем. В этом случае величины E и \mathbf{H}_O будут по-прежнему неизменными. Следует отметить, что даже для такой простой системы гравитационное силовое поле эквивалентно силе, действующей на центр масс C , и моменту относительно этой точки.

5.4. Маятник и тележка

Рассмотрим систему двух материальных точек, изображенную на рис. 5.4. Материальная точка массы m_1 свободно движется по гладкой горизонтальной рельсе. К этой точке с помощью пружины жесткости K прикреплена другая материальная точка массы m_2 . Собственная длина пружины равна L_0 . Движение обеих материальных точек считается плоским.

Координаты и связи

Как обычно, в первую очередь надо выбрать координаты для задания радиус-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 материальных точек. Учитывая, что в будущем нам придется накладывать на систему связи, определим \mathbf{r}_1 в декартовых координатах, а $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ в цилиндрических:

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z_1\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{r}_2 = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + r\mathbf{e}_r + (z_1 + z_2)\mathbf{E}_3.$$

Угол θ отсчитывается от оси \mathbf{E}_1 и принимает положительные значения при движении против часовой стрелки. Таким образом, когда точка m_2 находится непосредственно под точкой m_1 , угол θ равен $\frac{3\pi}{2}$.

Обозначим координаты следующим образом:

$$q^1 = x, \quad q^2 = r, \quad q^3 = \theta, \quad q^4 = y, \quad q^5 = z_1, \quad q^6 = z_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}_3. \quad (5.8)$$

Все связи, накладываемые на систему, являются интегрируемыми:

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = 0,$$

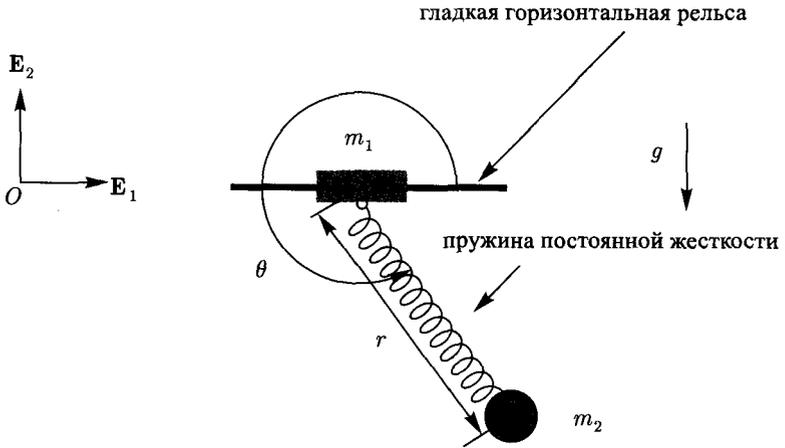


Рис. 5.4. Система двух материальных точек, соединенных пружиной постоянной жесткости K . Собственная длина пружины равна L_0 . Материальная точка массы m_1 свободно движется по гладкой горизонтальной рельсе; материальная точка массы m_2 движется в плоскости $x - y$

где

$$\Psi_1 = y = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{E}_2, \quad \Psi_2 = z_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{E}_3, \quad \Psi_3 = z_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}_3.$$

На данном этапе будет разумно вычислять производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}_1} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}_2} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{r}_1} &= \mathbf{E}_3, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{r}_2} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathbf{r}_1} &= -\mathbf{E}_3, & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathbf{r}_2} &= \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

В качестве упражнения параметризируйте вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ с помощью декартовых координат.

Кинетическая и потенциальная энергии

Потенциальная энергия системы обусловлена силой тяжести и потенциальной энергией пружины:

$$U = m_1 g y + m_2 g y + m_2 g r \sin(\theta) + \frac{K}{2} (\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - L_0)^2.$$

Накладывая интегрируемые связи, получаем

$$\tilde{U} = m_2 g r \sin(\theta) + \frac{K}{2} (r - L_0)^2.$$

Кинетическую энергию системы тоже легко вычислить:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_2^2) + \\ & + m_2 (\dot{x} \dot{r} \cos(\theta) + \dot{y} \dot{r} \sin(\theta) - \dot{x} r \dot{\theta} \sin(\theta) + \dot{y} r \dot{\theta} \cos(\theta)) + \\ & + m_2 \dot{z}_1 \dot{z}_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

При наложении связей это выражение упрощается:

$$\tilde{T} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m_2 (\dot{x} \dot{r} \cos(\theta) - \dot{x} r \dot{\theta} \sin(\theta)).$$

Обобщенные координаты и связи

Рассматриваемая система имеет три обобщенные координаты: x, r, θ . Конфигурационное многообразие \mathcal{M} есть трехмерное многообразие пространства \mathbb{E}^6 , параметризуемое этими координатами. Поскольку r принимает значения от 0 до ∞ , а θ — от 0 до 2π , эти две координаты полностью параметризуют пространство \mathbb{E}^2 . Далее, координата x принимает значения от $-\infty$ до ∞ и, значит, параметризует \mathbb{E} . В итоге заключаем, что \mathcal{M} есть \mathbb{E}^3 .

Используя \tilde{T} , находим кинематический линейный элемент для конфигурационного многообразия:

$$ds = \sqrt{\frac{2\tilde{T}}{m_1 + m_2}} dt,$$

где $m = m_1 + m_2$.⁴

Реакции связей и равнодействующие силы

Рассчитываем по методу Лагранжа реакции связей:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{c1} &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{r}_1} = \mu_1 \mathbf{E}_2 + \mu_2 \mathbf{E}_3 - \mu_3 \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{F}_{c2} &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{r}_2} = \mu_3 \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

⁴Нет необходимости водить данное обозначение, т. к. величина m в данном контексте не используется. — *Прим. ред.*

Обратите внимание, что множители Лагранжа μ_i эквивалентны нормальным силам: $\mathbf{N}_1 = \mu_1 \mathbf{E}_2 + (\mu_2 - \mu_3) \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{N}_2 = \mu_3 \mathbf{E}_3$.

Для полноты решения запишем выражения для равнодействующих сил F_1 и F_2 , приложенных к материальным точкам системы:

$$\begin{aligned} F_1 &= K(r - L_0) \mathbf{e}_r + (\mu_1 - m_1 g) \mathbf{E}_2 + (\mu_2 - \mu_3) \mathbf{E}_3, \\ F_2 &= -K(r - L_0) \mathbf{e}_r - m_2 g \mathbf{E}_2 + \mu_3 \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Позже мы рассчитаем с помощью этих выражений вектор силы Φ .

Уравнения движения Лагранжа

Движение рассматриваемой системы можно описать с помощью уравнений движения Лагранжа в любой известной вам форме. Возможно, простейшим подходом послужит построение уравнений движения Лагранжа с использованием лагранжиана (4.21):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^S} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^S} = Q_S = \sum_{i=1}^2 \mathbf{F}_{\text{некон.}i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^S} \quad (S = 1, \dots, 6). \quad (5.10)$$

Однако в силу того, что реакции связей задаются с помощью лагранжева представления, правые части первых трех уравнений (5.10) равны нулю, т. е. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ и $Q_3 = 0$.

Чтобы описать движение системы, достаточно проанализировать первые три уравнения движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^J} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^J} = 0 \quad (J = 1, \dots, 3).$$

Связанный лагранжиан равен $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}$. Вычисляя частные производные от $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}$ и затем $\frac{d}{dt}$, приходим после ряда преобразований к выводу, что уравнения движения можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos(\theta) & -m_2 r \sin(\theta) \\ m_2 \cos(\theta) & m_2 & 0 \\ -m_2 r \sin(\theta) & 0 & m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

где f_1 , f_2 и f_3 — функции, квадратичные относительно скоростей:

$$\begin{aligned} f_1 &= -2m_2 \dot{r} \dot{\theta} \sin(\theta) - m_2 r \dot{\theta}^2 \cos(\theta), \\ f_2 &= -m_2 r \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin(\theta) + K(r - L_0), \\ f_3 &= 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + m_2 g r \cos(\theta). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Уравнения движения Лагранжа в форме (5.11) легко поддаются численному расчету. Такая форма является канонической для многих механических систем, в которых действуют независимые от времени (склерономные) интегрируемые связи. Кроме того, важно отметить, что матрица в левой части (5.11) получается из анализа \tilde{T} .

Расчет реакций связей

Чтобы найти реакции связей \mathbf{F}_{c1} и \mathbf{F}_{c2} , рассчитаем сначала μ_i с помощью трех уравнений движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^J} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^J} = Q_J \quad (J = 4, \dots, 6).$$

Опуская промежуточные расчеты (выполните их самостоятельно), получаем:

$$\mathbf{F}_{c1} = (m_1 + m_2)g\mathbf{E}_2 + \frac{d}{dt}(m_2\dot{r}\sin(\theta) + m_2r\dot{\theta}\cos(\theta))\mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{F}_{c2} = \mathbf{0}.$$

Отсюда легко видеть, что $\mathbf{F}_{c1} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{c2} \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Сохранение величин

Уравнения движения (5.11) предполагают сохранение двух кинематических⁵ величин. Во-первых, неизменной остается полная энергия E системы. Чтобы убедиться в этом, заметим, что ни одна из реакций связей не совершает работы, а все остальные силы, действующие на систему, являются консервативными. Таким образом, из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что $\dot{E} = 0$, где $E = \tilde{T} + \tilde{U}$. Второе условие сохранения вытекает из первого уравнения системы (5.11) и гласит, что количество движения системы в горизонтальном направлении (т. е. величина $\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_1$) не изменяется.

Изображающая точка

Мы нашли для системы уравнения движения Лагранжа без явного расчета радиус-вектора \mathbf{r} материальной точки массы m , движущейся в про-

⁵Здесь мы сохраняем оригинальную терминологию автора. Следуя общепринятой терминологии следовало бы использовать термин «динамические величины». — *Прим. ред.*

странстве \mathbb{E}^6 . Если бы мы для расчета (5.11) применяли метод изображающей точки, то сначала нам бы пришлось по (4.15) определить радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 + (x + r \cos(\theta))\mathbf{e}_4 + (y + r \sin(\theta))\mathbf{e}_5 + (z_1 + z_2)\mathbf{e}_6.$$

С помощью этого выражения легко рассчитать шесть ковариантных векторов \mathbf{a}_J и шесть контравариантных векторов \mathbf{a}^J . Например, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$ и $\mathbf{a}_6 = \mathbf{e}_6$. Как и следовало ожидать, выражение для кинетической энергии $T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ идентично (5.9).

Вектор силы Φ можно определить по формуле (4.16), учитывая полученные ранее выражения для \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 :

$$\begin{aligned} \Phi = & K(r - L_0) \cos(\theta)\mathbf{e}^1 + (\mu_1 - m_1g + K(r - L_0) \sin(\theta))\mathbf{e}^2 + \\ & + (\mu_2 - \mu_3)\mathbf{e}^3 - K(r - L_0) \cos(\theta)\mathbf{e}^4 + \\ & + (-m_2g - K(r - L_0) \sin(\theta))\mathbf{e}^5 + \mu_3\mathbf{e}^6. \end{aligned}$$

Если вычислить $\Phi \cdot \mathbf{a}_S$ и сравнить результаты с теми, что мы получили, используя $\mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^S} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^S}$, то увидим, что эти два выражения для Φ_S абсолютно идентичны.

Замечания

На примере рассмотренной в этом разделе системы хорошо исследовать уравнения движения Лагранжа в ковариантной и контравариантной формах (уравнения (4.30) и (4.32) соответственно). В самом деле, пользуясь (5.11), мы можем рассчитать матрицу $[a_{ij}]$ и символы Кристоффеля первого рода.

5.5. Две материальные точки, связанные нерастяжимой нитью

Как показано на рис. 5.5, материальная точка массы m_1 связана с материальной точкой массы m_2 нерастяжимой нитью длины L_0 , которая проходит сквозь небольшое отверстие в точке O . Материальная точка массы m_1 движется по шероховатой горизонтальной плоскости, а материальная точка массы m_2 свободно движется в пространстве. Наша цель — получить для этой системы уравнения движения и определить, какие величины остаются неизменными. Для упрощения задачи сделаем допущение, что нить всегда остается натянутой и что материальная точка массы m_2 не ударяется снизу о горизонтальную плоскость.

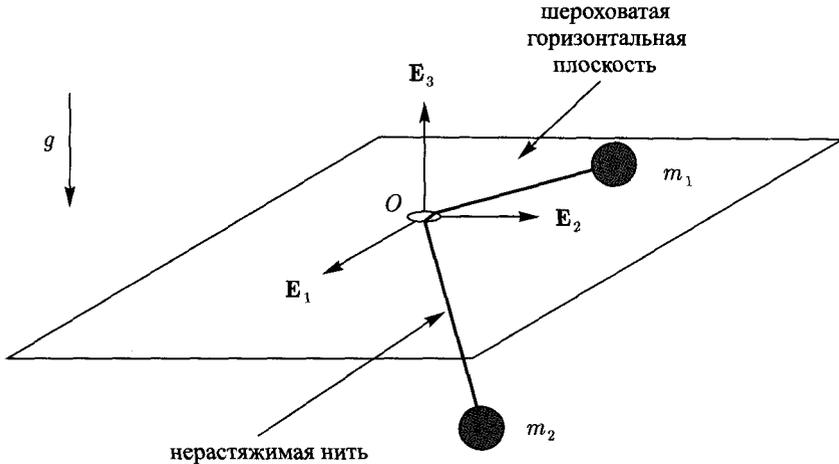


Рис. 5.5. Система двух материальных точек, связанных нерастяжимой нитью длины L_0

Координаты и другие кинематические величины

Чтобы описать кинематику этой системы материальных точек, опишем движение первой материальной точки в цилиндрических координатах $\{r_1, \theta_1, z_1\}$, а второй материальной точки — в сферических координатах $\{R_2, \phi_2, \theta_2\}$:

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{e}_{r_1} + z_1 \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{r}_2 = R_2 \mathbf{e}_{R_2}.$$

Обозначим шесть координат следующим образом:

$$q^1 = r_1, \quad q^2 = \theta_1, \quad q^3 = \phi_2, \quad q^4 = \theta_2, \quad q^5 = x, \quad q^6 = z_1. \quad (5.13)$$

Обратите внимание, что мы вводим новую координату x :

$$R_2 = L_0 - r_1 + x.$$

Пользуясь цилиндрической и сферической системами координат, получаем:

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{e}_{r_1} + z_1 \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{r}_2 = (L_0 + x - r_1) \mathbf{e}_{R_2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial r_1} = \mathbf{e}_{r_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} = r_1 \mathbf{e}_{\theta_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \phi_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial z_1} = \mathbf{E}_3,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial r_1} &= -\mathbf{e}_{R_2}, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi_2} &= (L_0 + x - r_1)\mathbf{e}_{\phi_2}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} &= (L_0 + x - r_1)\sin(\phi_2)\mathbf{e}_{\theta_2}, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} &= \mathbf{e}_{R_2}, & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial z_1} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Потенциальная и кинетическая энергии

Потенциальная энергия системы обусловлена земным притяжением:

$$U = m_1 g \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 g \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{r}_2 = m_1 g z_1 + m_2 g (L_0 + x - r_1) \cos(\phi_2).$$

Чтобы рассчитать кинетическую энергию системы, нужны выражения для векторов скорости. Выражение для \mathbf{v}_1 находится легко:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1 \mathbf{e}_{r_1} + r_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1} + \dot{z}_1 \mathbf{E}_3.$$

Для расчета \mathbf{v}_2 возьмем выражение для этого вектора в сферических координатах и заменим в нем R_2 и \dot{R}_2 :

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{x} - \dot{r}_1)\mathbf{e}_{R_2} + (L_0 + x - r_1)\sin(\phi_2)\dot{\theta}_2\mathbf{e}_{\theta_2} + (L_0 + x - r_1)\dot{\phi}_2\mathbf{e}_{\phi_2}.$$

Тогда кинетическая энергия T системы будет равна:

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \\ &= \frac{m_1}{2} (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \\ &+ \frac{m_2}{2} \left((\dot{x} - \dot{r}_1)^2 + (L_0 + x - r_1)^2 \sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2^2 + (L_0 + x - r_1)^2 \dot{\phi}_2^2 \right).\end{aligned}$$

Заметим, что T зависит от координат q^1, \dots, q^6 и их производных по времени.

Связи и реакции связей

На движение рассматриваемой системы накладываются две связи. Во-первых, материальные точки связаны нерастяжимой нитью длины L_0 , а во-вторых, движение материальной точки массы m_1 является плоским. Если выразить уравнения связей в координатах q^1, \dots, q^6 , получим:

$$x = 0, \quad z_1 = 0.$$

Реакции этих связей соответствуют силе натяжения нити, а также силе трения и нормальной силе, действующим на точку m_1 :

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \mathbf{e}_{r_1} + \mu_2 \mathbf{E}_3 - \mu_d \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|},$$

$$\mathbf{F}_{c2} = \mu_1 \mathbf{e}_{R_2},$$

где $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_{r_1} + r_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1}$. Реакции той связи, которая обусловлена нерастяжимой нитью, можно задать с помощью лагранжевой записи. Пусть

$$\Psi_1 = \|\mathbf{r}_2\| + \|\mathbf{r}_1\| - L_0,$$

тогда уравнение соответствующей связи будет иметь вид $\Psi_1 = 0$. С помощью лагранжева представления находим:

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} = \mu_1 \mathbf{e}_{r_1},$$

$$\mathbf{F}_{c2} = \mu_1 \mathbf{e}_{R_2}.$$

Заметим, что связь $z_1 = 0$ мы наложили с той целью, чтобы упростить выражение для \mathbf{F}_{c1} . Реакции второй связи, уравнение которой имеет вид $\Psi_2 = 0$, где $\Psi_2 = z_1$, нельзя задать с помощью лагранжевой записи, поскольку в этой связи участвует сила динамического трения.

Уравнения движения

Уравнениями движения являются четыре дифференциальных уравнения для обобщенных координат и два уравнения для μ_1 и μ_2 . Для большей наглядности запишем сначала дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2(L_0 - r_1) \left(\sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\phi}_2^2 \right) = \\ = -\mu_d \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{e}_{r_1}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|} + m_2 g \cos(\phi_2), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1) = -\mu_d r_1 \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{e}_{\theta_1}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m_2 (L_0 - r_1)^2 \dot{\phi}_2 \right) - m_2 (L_0 - r_1)^2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\phi_2) \cos(\phi_2) = \\ = m_2 g (L_0 - r_1) \sin(\phi_2), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_2 (L_0 - r_1)^2 \sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2 \right) = 0.$$

(5.14)

Уравнения для μ_1 и μ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= m_2 g \cos(\phi_2) - m_2 \ddot{r}_1 - m_2(L_0 - r_1) \left(\sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\phi}_2^2 \right), \\ \mu_2 &= m_1 g.\end{aligned}$$

Чтобы получить предыдущие уравнения, воспользуемся уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^K} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^K} \quad (K = 1, \dots, 6).$$

Подставим в них вместо T , \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 соответствующие выражения. Вычислив частные производные от T , накладываем на уравнения две связи и подвергаем их некоторым преобразованиям, учитывая при этом, что

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{e}_{r_1} - \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_{R_2} &= -\mu_d \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{e}_{r_1}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|} + m_2 g \cos(\phi_2), \\ \mathbf{F}_1 \cdot r_1 \mathbf{e}_{\theta_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{0} &= -\mu_d r_1 \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}} \cdot \mathbf{e}_{\theta_1}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|}, \\ \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{0} + \mathbf{F}_2 \cdot (L_0 - r_1) \mathbf{e}_{\phi_2} &= m_2 g (L_0 - r_1) \sin(\phi_2), \\ \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{0} + \mathbf{F}_2 \cdot (L_0 - r_1) \sin(\phi_2) \mathbf{e}_{\theta_2} &= 0, \\ \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{0} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_{R_2} &= \mu_1 - m_2 g \cos(\phi_2), \\ \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{E}_3 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{0} &= \mu_2 - m_1 g.\end{aligned}$$

Несохранение энергии

Полная энергия системы материальных точек — величина изменяемая. Чтобы доказать это, подставим в теорему об изменении кинетической энергии $\dot{T} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2$ соответствующие выражения для приложенной силы и реакции связи:

$$\dot{T} = (-m_1 g \mathbf{E}_3 + \mathbf{F}_{c1}) \cdot \mathbf{v}_1 + (-m_2 g \mathbf{E}_3 + \mathbf{F}_{c2}) \cdot \mathbf{v}_2.$$

Учитывая выражение для функции потенциальной энергии U , сводим уравнение к виду

$$\dot{E} = \mu_1 (\mathbf{e}_{r_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_{R_2} \cdot \mathbf{v}_2) + \mu_2 \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{v}_1 - \mu_d \|\mu_2 \mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_{\text{отн.}}}{\|\mathbf{v}_{\text{отн.}}\|} \cdot \mathbf{v}_1,$$

где полная энергия равна $E = T + U$. Так как $\mu_2 = m_1 g$, а вектор \mathbf{v}_1 равен вектору $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ и перпендикулярен вектору \mathbf{E}_3 , то заключаем, что

$$\dot{E} = \mu_1(\mathbf{e}_{r_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_{R_2} \cdot \mathbf{v}_2) - \mu_d m_1 g \|\mathbf{v}_1\|.$$

Однако $\mathbf{e}_{r_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_{R_2} \cdot \mathbf{v}_2 = \dot{r}_1 + \dot{R}_2$, поэтому эта сумма равна нулю в силу равенства $r_1 + R_2 = L_0$. В конечном итоге получаем

$$\dot{E} = -\mu_d m_1 g \|\mathbf{v}_1\|.$$

Заметим, что $\dot{E} \leq 0$, как и следовало ожидать из-за присутствия силы трения.

Сохранение кинетических моментов

При отсутствии трения из второго и четвертого уравнений системы (5.14) следует инвариантность величин $\mathbf{H}_{O1} \cdot \mathbf{E}_3 = m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1$ и $\mathbf{H}_{O2} \cdot \mathbf{E}_3 = m_2 (L_0 - r_1)^2 \sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2$. Это значит, что кинетический момент каждой материальной точки относительно точки O в направлении \mathbf{E}_3 не изменяется.

Конфигурационное многообразие и его геометрия

Конфигурационным многообразием для рассматриваемой системы является четырехмерное подпространство пространства \mathbb{E}^6 , параметризуемое координатами $r \in (0, L_0)$, $\theta_1 \in [0, 2\pi)$, $\theta_2 \in [0, 2\pi)$ и $\phi_2 \in (0, \pi)$. Кинематический линейный элемент ds для этого многообразия равен

$$ds = \sqrt{\frac{2\tilde{T}_2}{m_1 + m_2}} dt,$$

где \tilde{T}_2 находится из T наложением связей и группировкой членов, квадратичных относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 = & \frac{m_1}{2} (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \\ & + \frac{m_2}{2} \left(\dot{r}_1^2 + (L_0 - r_1)^2 \sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2^2 + (L_0 - r_1)^2 \dot{\phi}_2^2 \right). \end{aligned}$$

Чтобы наглядно представить себе конфигурационное многообразие, мысленно постройте двумерное изображение плоскости с координатами $r_1 \cos(\theta_1) - r_1 \sin(\theta_1)$. Дополните картинку трехмерным изображением сферы радиуса 1, параметризованной координатами ϕ_2 и θ_2 .

5.6. Заключение

Решение задач на системы материальных точек играет важнейшую роль в развитии динамики. Мы, в частности, говорили о модели небесной системы, состоящей из Солнца, Земли и Луны. Задачу, связанную с исследованием этой системы, называют задачей трех тел. В рамках этой задачи три тела моделируются как материальные точки, взаимодействующие между собой посредством ньютоновского гравитационного силового поля. Это значит, что потенциальная энергия системы определяется по формуле

$$U_n = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} - \frac{Gm_3m_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|} - \frac{Gm_2m_3}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|} \quad (5.15)$$

(сравните с (4.9)), где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и \mathbf{r}_3 — радиус-векторы материальных точек с массами m_1, m_2 и m_3 соответственно.

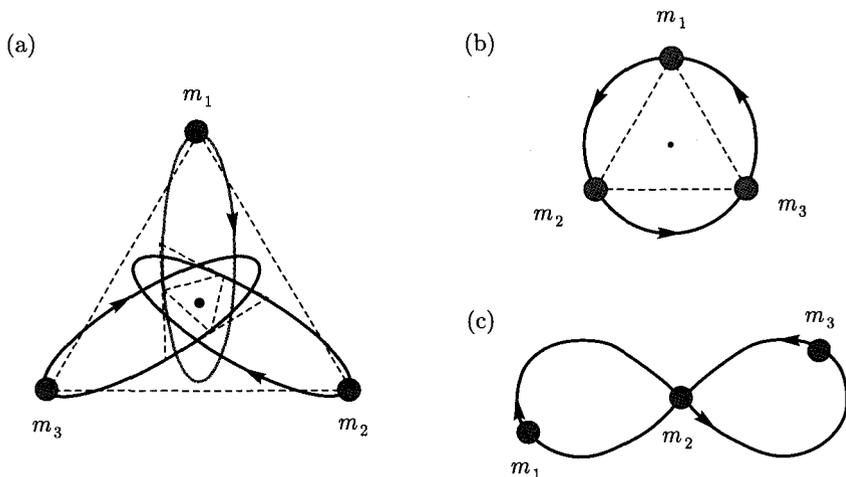


Рис. 5.6. Типовые траектории в задаче трех тел: (а), (б) примеры треугольных решений Лагранжа и (с) решение-восьмерка

Точные решения частных случаев задачи трех тел варьируются от треугольного решения Лагранжа [117], полученного в 1772 году⁶, до реше-

⁶Это решение исследуется во многих учебниках по небесной механике, например в [93, 150, 220].

Прим. ред. Строгое и исчерпывающее исследование устойчивости решения Лагранжа выполнено в монографии А. П. Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

ния-восьмерки, которое было получено численным расчетом совсем недавно и впервые упоминается в работах Мура [147] и Мура и Науенберга [148]. Существование этого решения было доказано Шенсине и Монтгомери [37, 145] (рис. 5.6)⁷. Задача трех тел хорошо известна не только благодаря малому числу точных решений⁸, но и благодаря соответствующим исследованиям Анри Пуанкаре (1854–1912) в конце 1880-х гг. (см. [4, 13, 45]). Считается, что именно он первым описал хаос в математических моделях физических систем и разработал один из принципов построения областей хаоса в динамических системах. Спустя столетие, в конце 1980-х гг., исследование областей хаоса в динамических системах стало особенно популярным.

Задачи трех и двух тел являются частными случаями задачи n тел. В небесной механике задача n тел соответствует задаче построения моделей Солнечной системы, которой занимались многие именитые ученые. Решая именно эту задачу, Гамильтон разработал свои уравнения движения (см. [88]) и вариационный принцип (см. [89]). К сожалению, мы не можем во всех подробностях рассмотреть в этой книге задачи трех тел и n тел, поэтому заинтересованным читателям советуем обращаться к вышеназванным работам.

В задачах, о которых мы только что говорили, на движение материальных точек не накладывается никаких связей, поэтому довольно часто они формулируются без использования уравнений движения Лагранжа. Однако в простых моделях искусственных спутников, вращающихся вокруг небесного тела, а также в различных маятниковых системах часто приходится решать задачи, в которых материальные точки жестко связаны между собой. Для описания таких моделей идеально подходят уравнения Лагранжа, на основе которых строятся обыкновенные дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакций связей. Задачи на исследование подобного рода систем материальных точек встретятся вам, среди прочих, ниже.

Задачи

5.1. Рассмотрите системы материальных точек, описанные в разделе 5.2. При условии, что на материальную точку массы m_2 действует зависящая от времени сила $P(t)\mathbf{E}_1$ ⁹, получите уравнения движения для каждой из систем.

⁷Также рекомендуем прочесть статью Касслмана [31], размещенную в сети Интернет. В этой статье описывается несколько моделей систем трех тел.

⁸Вряд ли можно согласиться с данным утверждением автора. Аналитическими и численными методами в задаче трех тел найдено и исследовано множество частных решений. См., например, монографию А. Д. Брюно. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. — *Прим. ред.*

⁹Эта сила не является консервативной.

5.2. Снова рассмотрите системы материальных точек, описанные в разделе 5.2. При условии, что, помимо пружин, в системах присутствует вязкое сопротивление¹⁰, получите уравнения движения для каждой системы.

5.3. Наша цель — получить уравнения движения двух несвязанных материальных точек. В следующей задаче вы сможете наложить связи и получить уравнения движения маятниковой системы.

Рассмотрим систему материальных точек, изображенную на рис. 5.7. Материальные точки свободно движутся в пространстве \mathbb{E}^3 под действием суммарных внешних сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 .

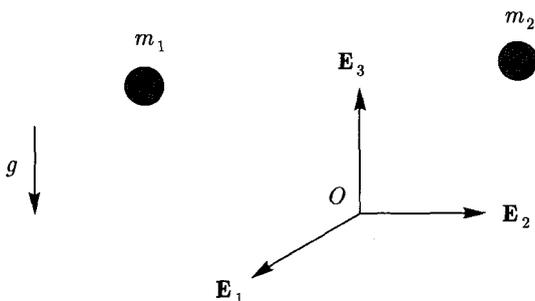


Рис. 5.7. Система двух материальных точек

- (a) Зададим радиус-вектор материальной точки массы m_1 с помощью цилиндрической системы координат $\{r_1, \theta_1, z_1\}$. Движение второй материальной точки удобно описать с помощью относительного радиус-вектора $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, который мы определим в сферической системе координат $\{R_2, \phi_2, \theta_2\}$. Докажите, что радиус-вектор изображающей точки равен

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & r_1 \cos(\theta_1) \mathbf{e}_1 + r_1 \sin(\theta_1) \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3 + \\ & + (r_1 \cos(\theta_1) + R_2 \sin(\phi_2) \cos(\theta_2)) \mathbf{e}_4 + \\ & + (r_1 \sin(\theta_1) + R_2 \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)) \mathbf{e}_5 + (z_1 + R_2 \cos(\phi_2)) \mathbf{e}_6. \end{aligned}$$

- (b) Используя выражение для \mathbf{r} и криволинейные координаты пространства \mathbb{E}^6

$$q^1 = r_1, \quad q^2 = \theta_1, \quad q^3 = z_1, \quad q^4 = R_2, \quad q^5 = \phi_2, \quad q^6 = \theta_2,$$

¹⁰Силы вязкого трения не являются консервативными.

докажите, что шесть ковариантных базисных векторов $\mathbf{a}_J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^J}$ равны

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r_1} = \cos(\theta_1)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta_1)\mathbf{e}_2 + \cos(\theta_1)\mathbf{e}_4 + \sin(\theta_1)\mathbf{e}_5,$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} = -r_1 \sin(\theta_1)\mathbf{e}_1 + r_1 \cos(\theta_1)\mathbf{e}_2 - r_1 \sin(\theta_1)\mathbf{e}_4 + r_1 \cos(\theta_1)\mathbf{e}_5,$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_1} = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6,$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R_2} = \sin(\phi_2) \cos(\theta_2)\mathbf{e}_4 + \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)\mathbf{e}_5 + \cos(\phi_2)\mathbf{e}_6,$$

$$\mathbf{a}_5 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi_2} = R_2 \cos(\phi_2) \cos(\theta_2)\mathbf{e}_4 + R_2 \cos(\phi_2) \sin(\theta_2)\mathbf{e}_5 - R_2 \sin(\phi_2)\mathbf{e}_6,$$

$$\mathbf{a}_6 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} = -R_2 \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)\mathbf{e}_4 + R_2 \sin(\phi_2) \cos(\theta_2)\mathbf{e}_5.$$

(c) Докажите, что шесть контравариантных базисных векторов рассчитываются по формулам:

$$\mathbf{a}^1 = \cos(\theta_1)\mathbf{e}^1 + \sin(\theta_1)\mathbf{e}^2,$$

$$\mathbf{a}^2 = -\frac{\sin(\theta_1)}{r_1}\mathbf{e}^1 + \frac{\cos(\theta_1)}{r_1}\mathbf{e}^2,$$

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{e}^3,$$

$$\mathbf{a}^4 = \sin(\phi_2)(\cos(\theta_2)(\mathbf{e}^4 - \mathbf{e}^1) + \sin(\theta_2)(\mathbf{e}^5 - \mathbf{e}^2)) + \cos(\phi_2)(\mathbf{e}^6 - \mathbf{e}^3),$$

$$\mathbf{a}^5 = \frac{\cos(\phi_2)}{R_2}(\cos(\theta_2)(\mathbf{e}^4 - \mathbf{e}^1) + \sin(\theta_2)(\mathbf{e}^5 - \mathbf{e}^2)) - \frac{\sin(\phi_2)}{R_2}(\mathbf{e}^6 - \mathbf{e}^3),$$

$$\mathbf{a}^6 = -\frac{\sin(\theta_2)}{R_2 \sin(\phi_2)}(\mathbf{e}^4 - \mathbf{e}^1) + \frac{\cos(\theta_2)}{R_2 \sin(\phi_2)}(\mathbf{e}^5 - \mathbf{e}^2).$$

(d) Докажите, что кинетическая энергия T материальной точки массы $m = m_1 + m_2$ равна

$$\begin{aligned} T = & \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \\ & + \frac{m_2}{2} \left(\dot{R}_2^2 + R_2^2 \dot{\phi}_2^2 + R_2^2 \sin^2(\phi_2) \dot{\theta}_2^2 \right) + \\ & + m_2 \cos(\phi_2) \left(\dot{R}_2 \dot{z}_1 + \dot{\phi}_2 \dot{r}_1 R_2 \cos(\theta_2) + \dot{\phi}_2 \dot{\theta}_1 r_1 R_2 \sin(\theta_2) \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_2 \sin(\phi_2) \left(R_2 \dot{\phi}_2 \dot{z}_1 - r_1 R_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_{21}) - \dot{r}_1 \dot{R}_2 \cos(\theta_{21}) \right) - \\
& -m_2 \sin(\phi_2) (-r_1 \dot{R}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_{21}) + \dot{r}_1 \dot{\theta}_2 R_2 \sin(\theta_{21})),
\end{aligned}$$

где θ_{21} есть сокращенное обозначение $\theta_2 - \theta_1$. Это выражение для кинетической энергии вытекает из определения:

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2.$$

- (e) Чему равны сила Φ и соответствующая ей потенциальная энергия U , при условии, что на материальные точки действуют силы $\mathbf{F}_1 = -m_1 g \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{F}_2 = -m_2 g \mathbf{E}_3$?
- (f) Каковы шесть уравнений Лагранжа, описывающие движение материальной точки массы m ?¹¹

5.4. На рис. 5.8 изображены две материальные точки с массами m_1 и m_2 , соединенные жестким невесомым стержнем длины L_0 . С материальной точкой массы m_1 стержень соединяется шарниром. Кроме того, материальная точка массы m_1 соединяется жестким невесомым стержнем длины L_1 с неподвижной точкой O . Между стержнем и точкой O находится шарнир, такой что движение материальной точки m_1 происходит в плоскости $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$.

- (a) Какие три связи накладываются на движение материальной точки массы m ?
- (b) Пользуясь лагранжевым представлением, задайте реакцию связи Φ_c , действующую на материальную точку массы m . По возможности докажите, что составляющие этой силы являются физически реалистичными.
- (c) Опираясь на конечные результаты, полученные в задаче 5.3, найдите уравнения движения Лагранжа для маятниковой системы. Какие из полученных вами уравнений описывают движение материальной точки, а какие — задают составляющие силы Φ_c ?
- (d) Получите некоторые уравнения из пункта (c) альтернативным способом. Наложите на выражение для T связи и найдите таким образом

¹¹По возможности воздержитесь от разложения производной по времени, так как это приведет к громоздким алгебраическим вычислениям.

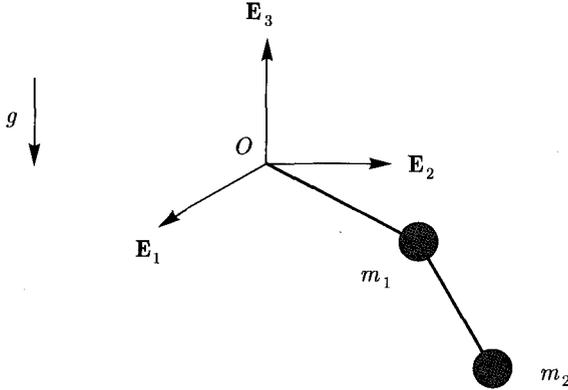


Рис. 5.8. Плоский двойной маятник

связанную кинетическую энергию \tilde{T} . Определите, кроме того, связанную потенциальную энергию \tilde{U} . Убедитесь, что уравнения, полученные в пункте (с), соответствуют следующим¹²:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta_1} &= \Phi \cdot \mathbf{a}_2 = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi_2} &= \Phi \cdot \mathbf{a}_5 = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta_2} &= \Phi \cdot \mathbf{a}_6 = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta_2}. \end{aligned}$$

- (е) Пусть на маятниковую систему из пункта (д) накладывается неинтегрируемая связь вида

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + e = 0.$$

Докажите, что эту связь можно представить в виде

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0.$$

Каковы уравнения, описывающие движение системы с неинтегрируемой связью? Продемонстрируйте справедливость своего решения на примере любой неинтегрируемой связи.

¹²Важно отметить, что $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{r}_1} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{R}_2} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{z}_1} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{r}_1} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{R}_2} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{z}_1} = 0$.

5.5. На рис. 5.9 изображена модель искусственного спутника, состоящего из двух материальных точек с массами m_1 и m_2 . Материальные точки соединены жестким невесомым стержнем длины L_0 . В неподвижной точке O покоится третья материальная точка массы m_3 . Помимо реакции связи, обусловленной стержнем, на систему действуют консервативные силы, функция потенциальной энергии для которых рассчитывается по формуле (5.15).

- (a) Какие четыре связи накладываются на движение системы материальных точек?
- (b) Пользуясь лагранжевым представлением, рассчитайте реакции связей, действующие на материальные точки массами m_1 и m_2 . По возможности докажите, что составляющие этих сил являются физически реалистичными.
- (c) Определите в декартовых координатах радиус-вектор центра масс C спутника, масса которого равна $m_1 + m_2$, и параметризируйте с помощью сферических координат положение материальной точки массы m_2 относительно точки C . Получите выражение для кинетической энергии системы.
- (d) Каковы уравнения движения системы?

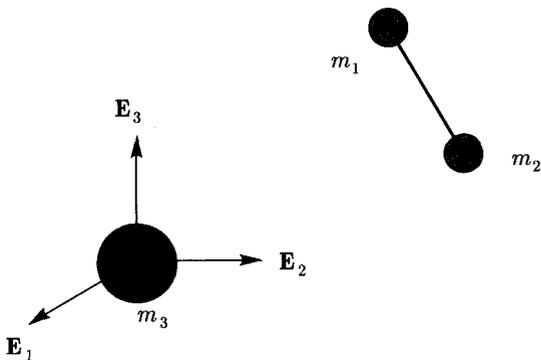


Рис. 5.9. Схематическая модель спутника, вращающегося вокруг неподвижного тела массой m_3

- (e) Докажите, что из уравнений движения следует инвариантность полной энергии системы и кинетического момента системы относительно точки O .

(f) Докажите, что точка C может равномерно вращаться относительно точки O . Как может быть ориентирован жесткий невесомый стержень длины L_0 во время такого движения?

5.6. На рис. 5.10 изображена материальная точка массы m_1 , соединенная пружиной постоянной жесткости K_1 с неподвижной точкой O . Собственная длина пружины равна L_0 . Материальная точка массы m_1 соединена стержнем длины L_2 со второй материальной точкой массы m_2 . Между m_1 и стержнем находится шарнир. Описанная система есть вариант классической системы плоского двойного маятника. Предположим, что материальные точки m_1 и m_2 могут двигаться лишь в плоскости $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$.

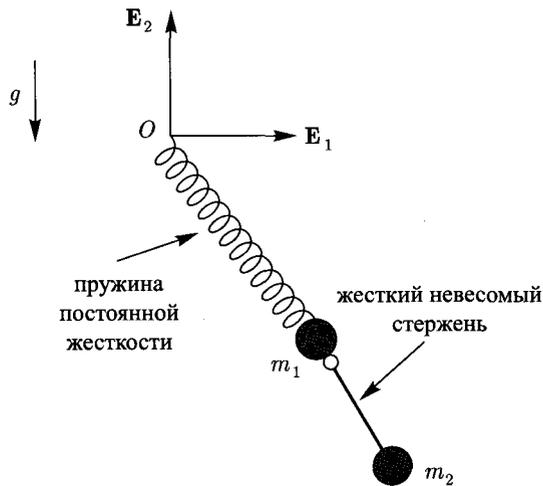


Рис. 5.10. Система двух материальных точек, соединенных жестким невесомым стержнем длины L_2

Для того чтобы описать кинематику этой системы, движение материальной точки массы m_1 параметризуют с помощью цилиндрической системы координат $\{r_1, \theta_1, z_1\}$, а движение материальной точки массы m_2 относительно материальной точки массы m_1 — с помощью другой цилиндрической системы координат $\{r_2, \theta_2, z_2\}$:

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{e}_{r_1} + z_1 \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + r_2 \mathbf{e}_{r_2} + z_2 \mathbf{E}_3.$$

Обозначим шесть координат следующим образом:

$$q^1 = \theta_1, \quad q^2 = \theta_2, \quad q^3 = r_1, \quad q^4 = r_2, \quad q^5 = z_1, \quad q^6 = z_2. \quad (5.16)$$

- (a) Рассчитайте по (5.16) 12 векторов $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^K}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^K}$. Здесь $K = 1, \dots, 6$.
- (b) Какие три связи накладываются на движение системы материальных точек? Докажите, что реакции связей \mathbf{F}_{c1} и \mathbf{F}_{c2} , действующие на каждую из материальных точек, равны

$$\mathbf{F}_{c1} = \mu_1 \mathbf{e}_{r_2} + \mu_2 \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{F}_{c2} = -\mu_1 \mathbf{e}_{r_2} + \mu_3 \mathbf{E}_3. \quad (5.17)$$

Рассчитайте шесть составляющих:

$$\Phi_{cK} = \mathbf{F}_{c1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^K} + \mathbf{F}_{c2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^K}.$$

Что вы можете сказать о значении первых трех составляющих?

- (c) Выразите кинетическую энергию \tilde{T} и потенциальную энергию \tilde{U} системы связанных материальных точек через координаты q^1, \dots, q^3 и их производные по времени.
- (d) Каковы для этой системы уравнения движения Лагранжа относительно обобщенных координат?
- (e) Пусть на систему материальных точек накладывается неинтегрируемая связь

$$r_1 \dot{\theta}_1 + L_2 \dot{\theta}_2 = 0. \quad (5.18)$$

Выразите эту связь в виде $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ и докажите, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{c1} &= \mu_1 \mathbf{e}_{r_2} + \mu_2 \mathbf{E}_3 + \mu_4 (\mathbf{e}_{\theta_1} - \mathbf{e}_{\theta_2}), \\ \mathbf{F}_{c2} &= -\mu_1 \mathbf{e}_{r_2} + \mu_3 \mathbf{E}_3 + \mu_4 \mathbf{e}_{\theta_2}. \end{aligned}$$

Используя результаты из пункта (d), получите уравнения движения для системы материальных точек.

- (f) Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии $\dot{T} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2$, докажите неизменность полной энергии E .
- (g) Заменим пружину жестким стержнем длины L_1 и уберем из системы неинтегрируемую связь (5.18). Получим классический плоский двойной маятник. Докажите, что его движение описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) \frac{d^2 \theta_1}{d\tau^2} + \alpha \beta \cos(\theta_2 - \theta_1) \frac{d^2 \theta_2}{d\tau^2} - \alpha \beta \left(\frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \\ = -(1 + \alpha) \cos(\theta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + \frac{1}{\beta} \cos(\theta_2 - \theta_1) \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{1}{\beta} \left(\frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \\ = -\frac{1}{\beta} \cos(\theta_2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

В этих уравнениях фигурируют безразмерные параметры и переменная времени:

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}, \quad \beta = \frac{L_2}{L_1}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{L_1}} t.$$

Конфигурационным многообразием \mathcal{M} для системы является тор. Чем он равен кинематический линейный элемент для \mathcal{M} ?

- (h) Численно проинтегрируйте уравнения (5.19) для различных начальных условий и изобразите ваше решение на конфигурационном многообразии для плоского двойного маятника. Докажите, что решение предполагает сохранение полной энергии системы.

5.7. Задача взята из раздела 156 книги Уиттекера [228] и предисловия к [30]. Рассмотрите систему N материальных точек и, следуя лекции 4 из работы Якоби [102], определите следующую функцию:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{r}_k\|^2.$$

Величину $2J$ часто называют полярным моментом инерции системы материальных точек.

- (a) При допущении, что центр масс C системы покоится в начале координат, докажите, что J можно рассчитать по эквивалентной формуле

$$J = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_k m_j}{M} \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^2, \quad (5.20)$$

где $M = m_1 + \dots + m_N$.

- (b) Снова допуская, что центр масс C системы является неподвижным, докажите, что кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$T = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_k m_j}{M} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j\|^2. \quad (5.21)$$

- (с) Пусть теперь система материальных точек движется под действием консервативного ньютоновского силового поля:

$$U_n = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{Gm_k m_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|}. \quad (5.22)$$

Обратите внимание на коэффициент $\frac{1}{2}$ в выражении для U_n . Он нужен для гарантии того, что суммирование по k и j обеспечит корректное выражение для U_n . Пользуясь уравнениями (5.20)–(5.22), а также теоремами об изменении количества движения для каждой материальной точки, получите уравнения Якоби

$$\ddot{J} = 2T + U_n. \quad (5.23)$$

Это уравнение также называют уравнением Лагранжа–Якоби (см., например, [220]).

- (d) Для траекторий задачи трех тел, изображенных на рис. 5.6b, докажите, что $T = -\frac{1}{2}U_n$.
- (e) Докажите, что J есть мера квадрата расстояния от начала координат пространства конфигураций \mathbb{E}^{3N} до изображающей точки, рассмотренной в разделе 4.7.

Часть III

Динамика твердого тела

ГЛАВА 6

Тензоры вращения

6.1. Введение

Одной из главных особенностей задач динамики твердого тела является существование подвижной оси вращения. Отчасти по этой причине в динамике твердого тела различают огромное разнообразие явлений. Поэтому изучение динамики твердого тела внушает определенный страх. Как говорил в своей работе [172] математик Луи Пуансо (1777–1859), «... если вы описываете движение тела осмысленной формы, то имейте в виду, что решение может оказаться весьма невразумительным». В настоящей главе рассматривается несколько представлений вращения, с помощью которых можно не только построить четкую картину движений твердого тела, но и доказать ряд важнейших формул. Для этого мы достаточно подробно остановимся на результатах, касающихся двух ключевых кинематических величин твердого тела, а также на тензорах вращения и соответствующих векторах угловой скорости.

Тема вращений в динамике твердого тела отличается богатой историей, широким спектром интересных результатов и впечатляющим перечнем лиц, внесших в ее развитие определенный вклад. В силу ограничений, накладываемых объемом книги, мы остановимся лишь на важнейших результатах, необходимых для наших дальнейших исследований. Сразу скажем, что большая часть материала этой главы основана на результатах, опубликованных в 1750-е гг. Леонардом Эйлером (1707–1783) в работах, посвященных динамике твердого тела. На основе его фундаментальных результатов в начале 19-го века проводили свои исследования такие выдающиеся ученые, как Кэли, Гаусс, Гамильтон и Родриг. Несмотря на огромное количество полученных данных, тема вращений до сих пор открыта для новых исследований (порой дублирующих прежние открытия).

В своих рассуждениях мы будем часто пользоваться понятием тензора; необходимый материал, касающийся тензоров, вы найдете в приложении. Вместе с соответствующими разработками в механике сплошных сред тензоры представляют собой бесценный инструмент для точного объяснения многих важнейших результатов. Тензоры рассматриваются не только

в учебниках по динамике; заинтересованные читатели могут сравнить наше изложение с изложением теорем тензоров в других книгах, перечисленных в библиографии.

В начале главы мы рассмотрим вращение, ось которого остается неподвижной. На примере такого вращения мы определим некоторые ключевые понятия главы и построим множество обобщений на случай более сложных вращений. С этой целью в разделе 6.3 мы поговорим о собственно ортогональных тензорах и раскроем их интересные свойства. Затем мы рассмотрим представление Эйлера для тензора вращения и обсудим важную теорему, которая гласит, что любой собственно ортогональный тензор является тензором вращения. Из этой теоремы следует множество результатов, касающихся динамики твердого тела. Один из интригующих аспектов тензоров вращения состоит в огромном разнообразии возможных представлений. Особое внимание уделим заданию тензоров с помощью углов Эйлера. Тем не менее в этой главе достаточно подробно рассматриваются и другие представления, например представление в терминах симметричных параметров Эйлера–Родрига (синонимичных с кватернионами).

Главным образом будем опираться на авторитетную статью Шустера [196]. Полученные им результаты дополним рассмотрением элегантного метода, основанном на использовании вектора относительной угловой скорости. Этот метод предложили Кейси и Лэм [29]. Кроме того, дадим определение двойственному базису Эйлера [160] и докажем теорему Эйлера методом Гюо [83]. Чтобы изложение материала было единообразным, нам придется использовать систему обозначений, отличную от той, что используется в оригинальных работах. Однако, освоив материал этой главы, вы легко распознаете отличия в системе обозначений.

6.2. Простейшее вращение

Начнем с рассмотрения простейшего случая вращения — поворота вокруг неподвижной оси \mathbf{p}_3 на угол $\theta = \theta(t)$. Этот пример должен быть знаком вам из других курсов. Проанализируем действие этого вращения на правую тройку ортонормированных базисных векторов $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. Предположим, что под действием вращения эти векторы преобразуются в систему $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ (рис. 6.1).

Используя матричное представление, мы можем задать преобразование системы базисных векторов из $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ в $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ уравнением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

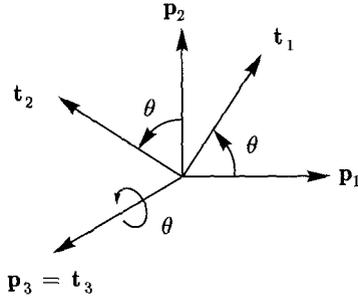


Рис. 6.1. Преобразование различных базисных векторов при повороте на угол θ вокруг оси p_3

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что определитель матрицы \mathbf{R} равен 1 и что обратная матрица равна транспонированной: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. Это значит, что матрица \mathbf{R} является собственной ортогональной.

Дифференцируя (6.1) по времени, находим

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}}_1 \\ \dot{\mathbf{t}}_2 \\ \dot{\mathbf{t}}_3 \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, заменим в этом уравнении \mathbf{p}_i на \mathbf{t}_i :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}}_1 \\ \dot{\mathbf{t}}_2 \\ \dot{\mathbf{t}}_3 \end{bmatrix} &= \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \dot{\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Обратите внимание на сходство с известными нам уравнениями $\dot{\mathbf{t}}_1 = \dot{\theta}\mathbf{t}_2$ и $\dot{\mathbf{t}}_2 = -\dot{\theta}\mathbf{t}_1$. Также из (6.2) должно быть очевидно, что $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ есть

кососимметрическая матрица. Определим вектор $\dot{\theta}\mathbf{p}_3 = \dot{\theta}\mathbf{t}_3$, обладающий одним полезным свойством, а именно:

$$\dot{\mathbf{t}}_k = \dot{\theta}\mathbf{p}_3 \times \mathbf{t}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6.3)$$

Обратите внимание на то, как можно получить вектор $\dot{\theta}\mathbf{p}_3$ из компонентов матрицы $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$.

Описывая вращения, удобно использовать тензорное обозначение. Так, уравнение (6.1) можно записать в виде¹:

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{R}\mathbf{p}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (6.4)$$

где \mathbf{R} — тензор, равный

$$\mathbf{R} = \cos(\theta)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2) - \sin(\theta)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3.$$

В качестве упражнения докажите, что такое представление вращения эквивалентно матричному представлению (6.1)². В самом деле, поскольку

$$\mathbf{I} - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2, \quad \epsilon\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1,$$

мы можем выразить тензор \mathbf{R} через ось вращения \mathbf{p}_3 и угол поворота θ :

$$\mathbf{R} = \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3) - \sin(\theta)\epsilon\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3. \quad (6.5)$$

Позже мы увидим, что такое представление естественным образом позволяет получить тензор в общей форме, который задает вращение вокруг произвольной оси на произвольный угол. В качестве другого упражнения докажите, что $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ и что $\det(\mathbf{R}) = 1$.

Дифференцируя (6.4), находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}_k &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_k + \mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}_k^0 = \\ &= \dot{\mathbf{R}}\underbrace{\mathbf{R}^T\mathbf{t}_k}_{=\mathbf{p}_k} = \\ &= (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)\mathbf{t}_k. \end{aligned}$$

¹О тензорном представлении читайте в приложении.

²Определение тензорного умножения, необходимого для доказательства эквивалентности, дается в формуле (A.1). Определение альтернирующего тензора ϵ приводится в разделе A.7 (см., в частности, уравнение (A.11)).

Осуществляя ряд прямых расчетов, можно доказать, что

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= -\dot{\theta} \sin(\theta)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2) - \dot{\theta} \cos(\theta)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1), \\ \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T &= \dot{\theta}(-\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1).\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}}_k &= (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)\mathbf{t}_k = \\ &= \dot{\theta}\mathbf{p}_3 \times \mathbf{t}_k \quad (k = 1, 2, 3).\end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, этот результат согласуется с (6.3). Вы, должно быть, уже заметили, что $\dot{\theta}\mathbf{p}_3 = \dot{\theta}\mathbf{t}_3$ есть аксиальный вектор тензора $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$.

Итак, мы записали некоторые результаты для известного нам вращения с помощью тензорного обозначения. Далее по ходу книги тензорное представление окажется чрезвычайно полезным при исследовании более сложных вращений. Нам предстоит ответить на несколько вопросов. Во-первых, как задать поворот вокруг произвольной оси? Во-вторых: даст ли производная по времени вектор, аналогичный вектору $\dot{\theta}\mathbf{p}_3$? Первым получил ответы на эти вопросы Эйлер в 1750-е гг. С тех пор, однако, появилось множество альтернативных представлений его решения, некоторые из которых мы рассмотрим позже в этой главе.

6.3. Собственно ортогональные тензоры

Вернемся на несколько шагов назад и поговорим о собственно ортогональных тензорах. Изучение этого материала служит основой для дальнейшего построения трехпараметрических представлений вращений с последующим определением векторов угловой скорости. Кроме того, этот раздел служит отправной точкой для ряда исследований, связанных с экспериментальными измерениями вращений. Напомним, что собственно ортогональный тензор \mathbf{R} второго ранга — это такой тензор, определитель которого равен 1, а обратный ему тензор совпадает с транспонированным:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{R}) = 1. \quad (6.6)$$

Первое из этих уравнений предполагает существование шести ограничений, накладываемых на девять компонентов тензора \mathbf{R} . Следовательно, лишь три компонента тензора \mathbf{R} являются независимыми. Это значит, что любой собственно ортогональный тензор можно задать тремя независимыми параметрами.

Нас интересуют тензоры второго ранга, любой из которых имеет следующее представление:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Рассмотрим теперь преобразование, обусловленное действием тензора \mathbf{R} на базисные векторы \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 . Определим векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \mathbf{R}\mathbf{p}_1 = \sum_{i=1}^3 R_{i1} \mathbf{p}_i, \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{R}\mathbf{p}_2 = \sum_{i=1}^3 R_{i2} \mathbf{p}_i, \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{R}\mathbf{p}_3 = \sum_{i=1}^3 R_{i3} \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Следует заметить, что тензор \mathbf{R} выражается через векторы \mathbf{t}_i следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{p}_3.$$

Доказательство см. на стр. 207. Докажем, что $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ есть правый ортонормированный базис. В первую очередь проверим, выполняется ли условие ортонормированности:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_k &= \mathbf{R}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{R}\mathbf{p}_k = \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k = \\ &= \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k = \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Следовательно, векторы \mathbf{t}_i являются ортонормированными. Чтобы установить, действительно ли базис является правым, воспользуемся определением детерминанта (см. (A.6)):

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3] &= [\mathbf{R}\mathbf{p}_1, \mathbf{R}\mathbf{p}_2, \mathbf{R}\mathbf{p}_3] = \\ &= \det(\mathbf{R})[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \\ &= (1)(1) = 1. \end{aligned}$$

Итак, система векторов $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ задает правый ортонормированный базис³.

Собственно ортогональный тензор может иметь и другое, довольно необычное, представление. Придем к нему, осуществив ряд преобразо-

³В качестве упражнения докажите, что полученный результат справедлив для случая простого вращения (6.1)

ваний:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k \right) \mathbf{R}^T = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{R}(\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k) \mathbf{R}^T = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} (\mathbf{R}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{R}\mathbf{p}_k) = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k.
 \end{aligned}$$

Таким образом, тензор \mathbf{R} равен:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i.$$

Заметим, что компоненты тензора \mathbf{R} идентичны в обоих базисах \mathbf{p}_i и \mathbf{t}_i и что под действием \mathbf{R} правый базис $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ преобразуется в правый базис $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$.

Компоненты R_{ik} тензора \mathbf{R} равны $\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{p}_i$. Поскольку это произведение равно косинусу угла между \mathbf{t}_k и \mathbf{p}_i , каждый компонент R_{ik} часто называют направляющим косинусом. Как следствие, матрицу $[R_{ik}]$ часто называют матрицей направляющих косинусов. Очевидно, что не все девять углов, косинусы которых равны $\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{p}_i$, являются независимыми. Если бы они были независимыми, то матрица $[R_{ik}]$ имела бы девять независимых компонентов, что противоречило бы требованию $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. И действительно, вскоре мы увидим, что тензор \mathbf{R} можно параметризовать тремя независимыми углами, которые, однако, не так просто соотнести с углами между \mathbf{p}_i и \mathbf{t}_k .

6.4. Производные собственно ортогонального тензора

Возьмем собственно ортогональный тензор \mathbf{R} , являющийся функцией времени: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$. Рассчитаем производную от $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T.$$

Но $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{O}$, поэтому правая часть предыдущего уравнения равна нулю. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = -(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T.$$

Иначе говоря, $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ есть кососимметрический тензор второго ранга. Определим тензор

$$\Omega_{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T,$$

который будет нам часто встречаться в дальнейшем. Он называется тензором угловой скорости (для \mathbf{R}).

Кососимметричность тензора $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ позволяет нам определить вектор угловой скорости $\omega_{\mathbf{R}}$:

$$\omega_{\mathbf{R}} = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T].$$

В приложении говорится, что для всех векторов \mathbf{a} справедливо равенство $\omega_{\mathbf{R}} \times \mathbf{a} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)\mathbf{a}$.⁴ Наиболее типичный случай расчета аксиального вектора имеет место при описании движения твердого тела, вращающегося вокруг оси \mathbf{E}_3 . Позже мы увидим, что в этом случае кососимметричный тензор равен

$$\Omega_{\mathbf{R}} = \Omega(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2).$$

Отсюда можно рассчитать

$$\epsilon[\Omega_{\mathbf{R}}] = -2\Omega\mathbf{E}_3.$$

Заключаем, что аксиальный вектор тензора $\Omega_{\mathbf{R}}$ соответствует вектору угловой скорости $\Omega\mathbf{E}_3$. Убедитесь, что для всех векторов \mathbf{a} выполняется тождество

$$(\Omega(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2))\mathbf{a} = \Omega\mathbf{E}_3 \times \mathbf{a}.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}$ также является кососимметрическим тензором, и задать тензор угловой скорости $\Omega_{0\mathbf{R}}$ и другой угловой вектор $\omega_{0\mathbf{R}}$:

$$\Omega_{0\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}, \quad \omega_{0\mathbf{R}} = -\frac{1}{2}\epsilon[\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}]. \quad (6.7)$$

Позже вы сможете удостовериться, что $\mathbf{R}\omega_{0\mathbf{R}} = \omega$ и $\mathbf{R}\Omega_{0\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \Omega_{\mathbf{R}}$. Получение одного из этих результатов основано на тождестве

$$\epsilon[\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T] = \det(\mathbf{Q})\mathbf{Q}(\epsilon[\mathbf{B}]),$$

справедливым для всех ортогональных \mathbf{Q} . Это тождество упрощается в том случае, если \mathbf{Q} — собственно ортогональный тензор.

⁴В разделе А.7 приложения дается несколько примеров расчета аксиального вектора $\omega_{\mathbf{R}}$ для заданного кососимметрического тензора $\Omega_{\mathbf{R}}$.

Коротационные производные

Вспомним, что собственно ортогональный тензор \mathbf{R} рассчитывается по формуле

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i.$$

Положим $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \dot{\mathbf{p}}_i \right) \mathbf{R}^T = \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{p}_i \right) \mathbf{R}^T = \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}_i. \end{aligned}$$

Если теперь взять $\Omega_{\mathbf{R}}\mathbf{t}_k$, то мы придем к хорошо знакомому результату:

$$\dot{\mathbf{t}}_i = \Omega_{\mathbf{R}}\mathbf{t}_i = \omega_{\mathbf{R}} \times \mathbf{t}_i.$$

В качестве упражнения докажите справедливость менее известного выражения:

$$\dot{\mathbf{t}}_i = \mathbf{R}(\omega_{0\mathbf{R}} \times \mathbf{p}_i).$$

Важно отметить, что если \mathbf{t}_i задаются с помощью собственно ортогонального тензора \mathbf{R} и фиксированного базиса \mathbf{p}_i , то их производные по времени можно выразить через вектор угловой скорости для тензора вращения и базисные векторы \mathbf{t}_i .

Произвольный тензор второго ранга \mathbf{A} и произвольный вектор \mathbf{a} имеют следующие представления:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{t}_i, \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k.$$

Если допустить, что \mathbf{a} есть функция времени, то получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \mathbf{t}_i + a_i \dot{\mathbf{t}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \mathbf{t}_i + a_i (\omega_{\mathbf{R}} \times \mathbf{t}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \mathbf{t}_i + \omega_{\mathbf{R}} \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Аналогично если допустить, что \mathbf{A} — функция времени, то получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \dot{\mathbf{t}}_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} (\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}} \mathbf{t}_i) \otimes \mathbf{t}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{t}_i \otimes (\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}} \mathbf{t}_k) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k + \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Производные $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{a}}$ называют коротационными производными (относительно \mathbf{R}) от \mathbf{A} и \mathbf{a} соответственно. Они являются относительными производными от \mathbf{A} и \mathbf{a} при условии, что векторы \mathbf{t}_i постоянны:

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k, \quad \overset{\circ}{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \mathbf{t}_i.$$

С учетом выражения для $\overset{\circ}{\mathbf{a}}$ получаем:

$$\dot{\mathbf{a}} = \overset{\circ}{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} \times \mathbf{a}.$$

Для произвольного тензора второго ранга \mathbf{A} имеем:

$$\dot{\mathbf{A}} = \overset{\circ}{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}}.$$

Присутствие в этих выражениях членов, содержащих векторы и тензоры угловой скорости, обусловлено изменением ортонормированных векторов \mathbf{t}_i со временем.

Впоследствии мы будем использовать некоторые коротационные производные без утомительных пояснений касательно системы обозначения. Там, где возможна путаница, будем уточнять, к какому именно тензору вращения относится коротационная производная.

6.5. Эйлерово представление тензора вращения

Леонард Эйлер определил вращение через угол вращения ϕ и ось вращения \mathbf{r} .⁵ Если использовать систему обозначений, разработанную столе-

⁵ Такое представление используется в разделе 49 одной из самых известных работ Эйлера, посвященной динамике твердого тела и датированной 1775 годом [56]. В этой работе есть

тие спустя Гиббсом⁶, то эйлерово представление тензора вращения запишется в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r}) = \cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \sin(\phi)(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}) + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}, \quad (6.8)$$

где \mathbf{r} — единичный вектор, а ϕ — угол вращения против часовой стрелки. Будем ссылаться на (6.8) как на эйлерово представление тензора вращения и использовать функцию \mathbf{L} для задания тензора вращения, ассоциированного с осью вращения и углом вращения. Три независимых параметра тензора \mathbf{R} являются углом вращения и две независимые составляющие единичного вектора \mathbf{r} . Вектор \mathbf{r} можно назвать осью вращения в силу его инвариантности относительно действия тензора \mathbf{R} : $\mathbf{R}\mathbf{r} = \mathbf{r}$. Чуть позже поговорим о роли угла ϕ .

Рассмотрим некоторые свойства представления (6.8). Определим ортонормированный базис $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, где $\mathbf{p}_3 = \mathbf{r}$. Запишем с его помощью выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} &= \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} &= \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2, \\ -(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}) &= \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Как следствие, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r} = \mathbf{p}_3) &= \cos(\phi)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2) + \\ &+ \sin(\phi)(\mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Пользуясь тождеством $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r} = \mathbf{p}_3) &= \cos(\phi)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2) + \\ &+ \sin(\phi)(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Убедитесь, что $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ есть единичный тензор. Найдите определитель тензора \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R}) &= \det \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 1. \end{aligned}$$

выражения для компонентов тензора \mathbf{R} через угол вращения ϕ и направляющие косинусы p, q, r оси вращения. В используемой нами системе обозначений $\mathbf{r} = p\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 + r\mathbf{E}_3$.

⁶См. раздел 129 в книге [231].

Итак, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, а $\det(\mathbf{R}) = 1$. Следовательно, \mathbf{R} — собственно ортогональный тензор. Чуть позже мы проверим, справедливо ли обратное утверждение.

Композиция вращений

Пусть задан поворот на угол ϕ_1 вокруг оси \mathbf{r}_1 , за которым следует поворот на угол ϕ_2 вокруг оси \mathbf{r}_2 . Тогда тензор

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{L}(\phi_2, \mathbf{r}_2)\mathbf{L}(\phi_1, \mathbf{r}_1)$$

задает композицию вращений. Докажите, что \mathbf{R}_c есть собственно ортогональный тензор. Согласно теореме Эйлера (рассмотрим ее позже) \mathbf{R}_c есть тензор вращения. Таким образом, комбинация двух вращений также является вращением.

Поскольку тензорное произведение некоммутативно, имеет значение порядок вращений. В общем случае справедливо неравенство

$$\mathbf{L}(\phi_2, \mathbf{r}_2)\mathbf{L}(\phi_1, \mathbf{r}_1) \neq \mathbf{L}(\phi_1, \mathbf{r}_1)\mathbf{L}(\phi_2, \mathbf{r}_2).$$

Исключение составляет случай $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$ и случай, когда один из углов вращения равен нулю. Тот факт, что суммарное вращение зависит от последовательности составляющих его вращений, сыграет важнейшую роль при определении последовательности углов Эйлера.

Формула Эйлера

Проанализируем теперь действие тензора \mathbf{R} на вектор \mathbf{a} . Как показано на рис. 6.2, составляющая вектора \mathbf{a} , параллельная вектору \mathbf{r} , остается неизменной, а составляющая вектора \mathbf{a} , перпендикулярная вектору \mathbf{r} , поворачивается на угол ϕ против часовой стрелки вокруг вектора \mathbf{r} . Чтобы увидеть это, разложим вектор \mathbf{a} на составляющие

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel,$$

где

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_\parallel = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a}.$$

С учетом этого находим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{a} &= \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r})\mathbf{a} = \\ &= (\cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \sin(\phi)(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}) + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a} - \sin(\phi)(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})\mathbf{a} + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a} = \\
&= \cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{a} + \sin(\phi)\mathbf{r} \times \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r} = \\
&= \cos(\phi)\mathbf{a}_\perp + \sin(\phi)\mathbf{r} \times \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Принимая во внимание, что $\cos(\phi)\mathbf{a}_\perp + \sin(\phi)\mathbf{r} \times \mathbf{a}_\perp$ соответствует вращению вектора \mathbf{a}_\perp вокруг вектора \mathbf{r} , приходим к искомому результату. Выражение (6.9) называют формулой Эйлера.

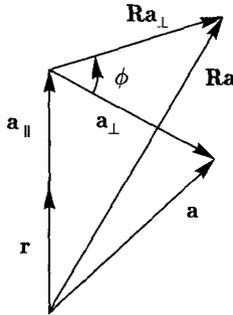


Рис. 6.2. Преобразование вектора \mathbf{a} под действием тензора вращения $\mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r})$

Замечания, касающиеся представления Эйлера

В некотором отношении представление Эйлера (6.8) является необычным. Во-первых, следует заметить, что

$$\mathbf{L}(\phi, \mathbf{r}) = \mathbf{L}(-\phi, -\mathbf{r}),$$

откуда следует, что для одного и того же тензора вращения возможны два разных представления. Во-вторых, для \mathbf{R} как тензора вращения выполняется условие $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, поэтому существуют два простых представления для этих тензоров:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \mathbf{L}(-\phi, \mathbf{r}) = \mathbf{L}(\phi, -\mathbf{r}).$$

Иначе говоря, обратный тензор можно рассчитать, изменяя знак угла вращения или оси вращения на противоположный. Еще одной особенностью эйлера представления является то, что для всех векторов \mathbf{r} выполняется равенство $\mathbf{L}(\phi = 0, \mathbf{r}) = \mathbf{I}$. Наконец, заметим, что в настоящей книге все другие представления тензоров вращения строятся на базе эйлера представления.

6.5.1. Вычисление оси и угла вращения

Для заданного тензора вращения \mathbf{R} традиционно рассчитывают ось вращения \mathbf{r} и угол вращения θ . В первую очередь запишем матричные компоненты тензора \mathbf{R} относительно базиса $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Сравнивая это представление с (6.8), находим:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= ((\cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \sin(\theta)(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}) + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{p}_k) \cdot \mathbf{p}_i = \\ &= \cos(\theta)(\delta_{ik} - r_i r_k) + r_i r_k - \sum_{j=1}^3 \sin(\theta) \varepsilon_{jik} r_j, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{p}_i.$$

Раскладывая выражения для компонентов тензора \mathbf{R} , получаем матричное представление:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} &= \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 - r_1^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_1 r_2 & 1 - r_2^2 & -r_2 r_3 \\ -r_1 r_3 & -r_2 r_3 & 1 - r_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & r_3^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Заметим, что эта матрица может быть представлена суммой симметрической и кососимметрической матриц. При транспонировании тензора преобразуется лишь его кососимметрический компонент.

Чтобы найти угол вращения, необходимо рассчитать след тензора \mathbf{R} :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{R}) - 1) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1). \quad (6.11)$$

Анализируя кососимметрический компонент тензора \mathbf{R} , находим:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Чтобы убедиться в правильности расчета \mathbf{r} , исследуют собственные векторы тензора \mathbf{R} : собственный вектор, соответствующий единичному собственному значению, должен быть параллелен оси вращения \mathbf{r} .

Интересно следующее: если $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i$, то составляющие вектора \mathbf{r} относительно обоих базисов базисных векторов идентичны:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{t}_i.$$

Доказательство основано на наблюдении, что тензор \mathbf{R} имеет одни и те же компоненты относительно базисов $\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k$ и $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k$. То есть $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k$.

Пример. В качестве примера рассмотрим тензор вращения \mathbf{R} , компоненты которого равны:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,835959 & -0,283542 & -0,469869 \\ 0,271321 & 0,957764 & -0,0952472 \\ 0,47703 & -0,0478627 & 0,877583 \end{bmatrix}.$$

По формуле (6.11) рассчитаем угол вращения θ :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(0,835959 + 0,877583 + 0,957764 - 1).$$

Следовательно, $\theta = 33,3161^\circ$. По формуле (6.12) рассчитаем ось вращения \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= 0,043135\mathbf{p}_1 - 0,861981\mathbf{p}_2 + 0,505103\mathbf{p}_3 = \\ &= 0,043135\mathbf{t}_1 - 0,861981\mathbf{t}_2 + 0,505103\mathbf{t}_3. \end{aligned}$$

Еще раз подчеркнем, что составляющие вектора \mathbf{r} относительно базисов $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ и $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ идентичны.

Вектор угловой скорости

Предположим, нам известно эйлерово представление (6.8) тензора $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$. В общем случае $\phi = \phi(t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Найдем выражение для $\omega_{\mathbf{R}}$.

В качестве предварительного результата заметим, что $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ в силу того, что \mathbf{r} — единичный вектор. Кроме того, $\dot{\epsilon} = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$. Исходя из

представления (6.8)

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{r}) = \cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \sin(\phi)(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}) + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r},$$

продифференцируем тензор и найдем:

$$\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\phi} \sin(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \dot{\phi} \cos(\phi)(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}) + (1 - \cos(\phi))(\dot{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \dot{\mathbf{r}}) - \sin(\phi)(\boldsymbol{\epsilon}\dot{\mathbf{r}}).$$

Определим правый ортонормированный базис $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$, такой что в заданный момент времени выполняется равенство $\mathbf{t}_3 = \mathbf{r}$. Тогда в тот же момент времени будем иметь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r} &= (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1), \\ \dot{\mathbf{r}} &= a\mathbf{t}_1 + b\mathbf{t}_2, \\ \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= a\mathbf{t}_2 - b\mathbf{t}_1, \\ \boldsymbol{\epsilon}\dot{\mathbf{r}} &= a(\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_2) + b(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3), \end{aligned} \tag{6.13}$$

где a и b — скалярные составляющие производной $\dot{\mathbf{r}}$. Используя (6.13) и осуществляя ряд преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T &= -\dot{\phi}(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1) + (a(1 - \cos(\phi)) + \\ &\quad + b \sin(\phi))(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1) + (-b(1 - \cos(\phi)) + \\ &\quad + a \sin(\phi))(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3) = \\ &= -\dot{\phi}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{t}_3 - (a(1 - \cos(\phi)) + b \sin(\phi))\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{t}_2 - (-b(1 - \cos(\phi)) + \\ &\quad + a \sin(\phi))\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{t}_1. \end{aligned}$$

Снова пользуясь выражениями (6.13), приходим к конечному результату:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\dot{\phi}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r} - (1 - \cos(\phi))\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) - \sin(\phi)\boldsymbol{\epsilon}\dot{\mathbf{r}}.$$

Соответствующий вектор угловой скорости равен

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = \dot{\phi}\mathbf{r} + \sin(\phi)\dot{\mathbf{r}} + (1 - \cos(\phi))\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \tag{6.14}$$

Если вектор \mathbf{r} постоянен, то выражение для вектора угловой скорости существенно упрощается. Заметим, что условие постоянства $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}$ не обязательно предполагает постоянство \mathbf{r} . Тем не менее, как показано в [161], обычно можно выбрать такой фиксированный базис $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, в котором $\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{t}_k \otimes \mathbf{p}_k$, что из условия постоянства угловой скорости будет следовать постоянство $\dot{\phi}$ и \mathbf{r} .

6.6. Теорема Эйлера: тензоры вращения и собственно ортогональные тензоры

Тензор \mathbf{Q} является собственно ортогональным тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{Q}) = 1.$$

Из наших рассуждений, касающихся тензоров вращения, следует, что тензор вращения является собственно ортогональным. Верно ли обратное утверждение? Каждый ли собственно ортогональный тензор является тензором вращения? Теорема Эйлера дает утвердительный ответ на этот вопрос.

Мы позаимствовали доказательство теоремы Эйлера из замечательной статьи Чжун-хэн Го [83]. Вспомним, что среди инвариантов произвольного тензора \mathbf{A} второго ранга имеется две инвариантные величины $I_{\mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{A})$ и $III_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})$, которые можно выразить, используя смешанное произведение:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] &= I_{\mathbf{A}}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \\ [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] &= III_{\mathbf{A}}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \end{aligned}$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — три произвольных вектора (см. раздел А.6).

Из условия $\det(\mathbf{Q}) = 1$, где \mathbf{Q} — собственно ортогональный тензор, следует, что он имеет собственное значение, равное единице. Есть несколько способов это доказать. Рассмотрим сначала выражение

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^T.$$

Найдем определитель для каждой части этого выражения, учитывая, что $\det(\mathbf{Q}^T) = 1$. Получим:

$$\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = (-1)^3 \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}).$$

Следовательно,

$$\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = 0, \tag{6.15}$$

и, стало быть, собственное значение тензора \mathbf{Q} равно 1.

Поскольку \mathbf{Q} имеет единичное собственное значение, ему соответствует собственный вектор \mathbf{u} , такой что

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Умножая это уравнение на \mathbf{Q}^T , приходим к выводу, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T\mathbf{u}.$$

Таким образом, \mathbf{u} — единичный собственный вектор для тензоров \mathbf{Q} и \mathbf{Q}^T .

Рассмотрим теперь вектор $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$. После ряда алгебраических выкладок получаем:

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathbf{Q}\mathbf{v} \perp \mathbf{u}.$$

Далее допустим, что векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} имеют единичные длины. Определим вектор \mathbf{w} , такой что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 1$. Вычислим $I_{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{Q}} &= [\mathbf{Q}\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{w}] = \\ &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{w}] = \\ &= 1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{w} = \\ &= 1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{u} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}) = \\ &= 1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= 1 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Определим угол ν , такой что

$$\cos(\nu) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Важно отметить, что этот угол является инвариантом тензора \mathbf{Q} и что

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{v} &= \cos(\nu)\mathbf{v} + \sin(\nu)\mathbf{w} = \\ &= \cos(\nu)\mathbf{v} + \sin(\nu)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Ранее говорилось, что любой вектор \mathbf{a} можно разложить на две составляющие: \mathbf{a}_{\parallel} и \mathbf{a}_{\perp} , где $\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$. Тогда

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a}_{\parallel}$$

и, согласно (6.16),

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_{\perp} = \cos(\nu)\mathbf{a}_{\perp} + \sin(\nu)(\mathbf{u} \times \mathbf{a}_{\perp}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \cos(\nu)(\mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{a} + \sin(\nu)\mathbf{u} \times \mathbf{a}.$$

Сравнивая это выражение с (6.9), заключаем, что тензор \mathbf{Q} имеет вид (6.8), характерный для тензора вращения. С другой стороны, предыдущее уравнение справедливо для любого собственно ортогонального тензора \mathbf{Q} , поэтому заключаем, что любой собственно ортогональный тензор является тензором вращения. Итак, эти два термина являются взаимозаменяемыми.

Теорему, утверждающую, что всякий собственно ортогональный тензор является тензором вращения, доказал Эйлер в 1775 году [55]. Итак,

Всякий собственно ортогональный тензор является тензором вращения.

Чуть позже мы снова обратимся к этой теореме и узнаем, почему ее называют *теоремой Эйлера о движении твердого тела*. Если надо доказать, что тензор \mathbf{A} является тензором вращения, то можно сослаться на теорему Эйлера и просто доказать, что \mathbf{A} есть собственно ортогональный тензор: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ и $\det(\mathbf{A}) = 1$.

6.7. Векторы относительной угловой скорости

Рассмотрим два тензора вращения: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(t)$ и $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2(t)$. Можно непосредственно показать, что произведение $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ этих тензоров также является тензором вращения. Рассчитаем для него тензор угловой скорости и вектор угловой скорости, опираясь на весьма полезный метод Кейси и Лэма [29], основанный на использовании вектора относительной угловой скорости.

Чтобы дать определение вектору относительной угловой скорости, зададим три правых ортонормированных базиса: $\{ {}_1\mathbf{t}_{1,1} \ \mathbf{t}_{2,1} \ \mathbf{t}_3 \}$, $\{ {}_2\mathbf{t}_{1,2} \ \mathbf{t}_{2,2} \ \mathbf{t}_3 \}$ и $\{ \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \}$. В настоящем разделе будем предполагать, что $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$. Для заданных тензоров \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 две из трех систем базисных векторов находятся из уравнений:

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{i=1}^3 {}_1\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{R}_2 = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{t}_i \otimes {}_1\mathbf{t}_i.$$

Заметим, что

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i.$$

Иначе говоря, тензор \mathbf{R} преобразует вектор \mathbf{p}_i в вектор ${}_2\mathbf{t}_i$.

Кейси и Лэм [29] определили следующий тензор относительной угловой скорости:

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{R}_2} = \Omega_{\mathbf{R}} - \Omega_{\mathbf{R}_1}.$$

С учетом определения тензоров угловой скорости и того, что $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{R}}_1$, находим:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{\mathbf{R}_2} &= \Omega_{\mathbf{R}} - \Omega_{\mathbf{R}_1} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T = \\ &= \dot{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T + \mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T - \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T = \\ &= \dot{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_2^T + \mathbf{R}_2 \Omega_{\mathbf{R}_1} \mathbf{R}_2^T - \Omega_{\mathbf{R}_1} = \\ &= \dot{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_2^T + \mathbf{R}_2 \Omega_{\mathbf{R}_1} \mathbf{R}_2^T + \Omega_{\mathbf{R}_1}^T = \\ &= (\dot{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{R}_2 \Omega_{\mathbf{R}_1} + \Omega_{\mathbf{R}_1}^T \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_2^T. \end{aligned}$$

Однако

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2 = \dot{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{R}_2 \Omega_{\mathbf{R}_1} + \Omega_{\mathbf{R}_1}^T \mathbf{R}_2,$$

где коротационная производная $\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2$ по определению равна

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{R}_{2ik1} \mathbf{t}_i \otimes {}_1 \mathbf{t}_k,$$

где $R_{2ik} = ((\mathbf{R}_2)_1 \mathbf{t}_k) \cdot {}_1 \mathbf{t}_i$. Короче, $\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2$ есть производная от тензора \mathbf{R}_2 при условии, что векторы ${}_1 \mathbf{t}_i$ постоянны.

Итак, тензор относительной угловой скорости $\hat{\Omega}_{\mathbf{R}_2}$ равен

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{R}_2} = \Omega_{\mathbf{R}} - \Omega_{\mathbf{R}_1} = \overset{\circ}{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_2^T.$$

Если обозначить ось вращения тензора \mathbf{R}_2 через \mathbf{r}_2 , а угол вращения через ϕ_2 , то можно провести аналогию с выражением (6.14) и прийти к заключению, что вектор относительной угловой скорости равен

$$\hat{\omega}_{\mathbf{R}_2} = \omega_{\mathbf{R}} - \omega_{\mathbf{R}_1} = \phi_2 \mathbf{r}_2 + \sin(\phi_2) \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 + (1 - \cos(\phi_2)) \mathbf{r}_2 \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2. \quad (6.17)$$

С другой стороны,

$$\hat{\omega}_{\mathbf{R}_2} = -\frac{1}{2} \epsilon \left[\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_2^T \right]. \quad (6.18)$$

Коротационная производная от $\mathbf{r}_2 = \sum_{i=1}^3 r_i(\mathbf{1}t_i)$, фигурирующая в (6.17), равна

$$\overset{o}{\mathbf{r}}_2 = \dot{r}_1(\mathbf{1}t_1) + \dot{r}_2(\mathbf{1}t_2) + \dot{r}_3(\mathbf{1}t_3).$$

Формула (6.17) окажется нам очень полезной при расчете вектора угловой скорости для разных представлений тензора вращения. В частности, для эйлера представления можно разложить \mathbf{R} в произведение трех тензоров вращения и дважды применить (6.17), чтобы найти вектор угловой скорости, соответствующий тензору \mathbf{R} . Алгоритм схож с тем, что используется в рассматриваемом ниже примере.

6.7.1. Пример

Продемонстрируем на конкретном примере, насколько удобно использовать выражение (6.17) для вектора относительной угловой скорости. Пусть даны два вращения \mathbf{R}_1 и \mathbf{R} , такие что

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \cos(\psi)(\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) - \sin(\psi)\epsilon\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1.\end{aligned}$$

Тензор относительного вращения \mathbf{R}_2 соответствует повороту на угол θ вокруг оси $\mathbf{t}_2 = \cos(\psi)\mathbf{E}_2 - \sin(\psi)\mathbf{E}_1$:

$$\mathbf{R}_2 = \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2) - \sin(\theta)\epsilon\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2.$$

Тензор \mathbf{R}_1 задает поворот на угол ψ вокруг оси \mathbf{E}_3 . При этом \mathbf{E}_i переходят в \mathbf{t}_i , где

$$\mathbf{t}_1 = \cos(\psi)\mathbf{E}_1 + \sin(\psi)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{t}_2 = -\sin(\psi)\mathbf{E}_1 + \cos(\psi)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{E}_3.$$

Вращение \mathbf{R} складывается из вращения \mathbf{R}_1 и последующего поворота на угол θ вокруг оси \mathbf{t}_2 .⁷

Рассчитаем $\omega_{\mathbf{R}_1}$ по формуле (6.14):

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{R}_1} &= \dot{\psi}\mathbf{E}_3 + \sin(\psi)\dot{\mathbf{E}}_3 + (1 - \cos(\psi))\mathbf{E}_3 \times \dot{\mathbf{E}}_3 = \\ &= \dot{\psi}\mathbf{E}_3.\end{aligned}$$

Величину $\omega_{\mathbf{R}}$ нельзя вычислить непосредственно по формуле (6.14), так как мы не знаем ось и угол вращения, соответствующие тензору \mathbf{R} .⁸ Вместо этого воспользуемся выражением для вектора относительной угловой

⁷В этом разделе мы заменили \mathbf{p}_i на \mathbf{E}_i , а $\mathbf{1}t_i$ на \mathbf{t}_i .

⁸Можете попробовать вычислить эти величины с помощью известной формулы Родрига (уравнение (6.49), см. задачи в конце главы), после чего применить формулу (6.14).

скорости. Запишем \mathbf{R}_2 в подходящем базисе. Поскольку

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{E}_3,$$

подходящим базисом является $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_k$:

$$\mathbf{R}_2 = \cos(\theta)(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1) - \sin(\theta)(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3) + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2.$$

Рассчитаем производную от этого тензора при фиксированных значениях \mathbf{t}_i , т. е. коротационную производную от \mathbf{R}_2 :

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2 = -\dot{\theta} \sin(\theta)(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1) - \dot{\theta} \cos(\theta)(\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3).$$

Таким образом,

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{R}_2} = \dot{\theta}(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1),$$

откуда с учетом (6.18) заключаем, что

$$\hat{\omega}_{\mathbf{R}_2} = \dot{\theta} \mathbf{t}_2. \quad (6.19)$$

В качестве альтернативного метода расчета (6.19) можно непосредственно использовать (6.17).

Итак, заменяем в (6.17) \mathbf{r}_2 на \mathbf{t}_2 , а ϕ_2 на θ . Принимая во внимание, что $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}$, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\mathbf{R}_2} &= \dot{\theta} \mathbf{t}_2 + \sin(\theta) \overset{\circ}{\mathbf{t}}_2 + (1 - \cos(\theta)) \mathbf{t}_2 \times \overset{\circ}{\mathbf{t}}_2 = \\ &= \dot{\theta} \mathbf{t}_2. \end{aligned}$$

Этот альтернативный метод эквивалентен методу, основанному на расчете $\overset{\circ}{\mathbf{R}}_2$, и к тому же является более удобным.

Объединяя выражения для $\omega_{\mathbf{R}_1}$ и $\hat{\omega}_{\mathbf{R}_2}$, приходим к выражению для вектора угловой скорости, соответствующего тензору \mathbf{R} :

$$\omega_{\mathbf{R}} = \dot{\theta} \mathbf{t}_2 + \dot{\psi} \mathbf{E}_3.$$

Интуитивный характер этого результата порой просто поражает. С помощью (6.14) легко видеть, что $\omega_{\mathbf{R}_2} \neq \hat{\omega}_{\mathbf{R}_2}$.

6.8. Углы Эйлера

В самом популярном представлении тензора вращения используют ся три угла Эйлера. В работах [38, 230] упоминается, что впервые такое

представление было придумано Эйлером [54, 57] и представлено публике в 1751 году⁹. В своих работах Эйлер показывает, как с помощью трех углов параметризовать вращение. Кроме того, он приводит выражения для коротационных составляющих вектора угловой скорости.

Для интерпретации углов Эйлера разложим тензор вращения в произведение трех достаточно простых вращений:

$$\mathbf{R} = \mathring{\mathbf{R}}(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = \mathbf{L}(\gamma^3, \mathbf{g}_3)\mathbf{L}(\gamma^2, \mathbf{g}_2)\mathbf{L}(\gamma^1, \mathbf{g}_1). \quad (6.20)$$

Здесь $\{\gamma^i\}$ — углы Эйлера, а $\{\mathbf{g}_i\}$ — система единичных векторов, называемая базисом Эйлера. Функция $\mathbf{L}(\theta, \mathbf{b})$ в представлении Эйлера равна:

$$\mathbf{L}(\theta, \mathbf{b}) = \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) - \sin(\theta)(\varepsilon\mathbf{b}) + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b},$$

где \mathbf{b} — единичный вектор, а θ — угол вращения против часовой стрелки. В общем случае \mathbf{g}_3 является функцией от γ^2 и γ^1 , а \mathbf{g}_2 — функцией от γ^1 . Чуть позже мы узнаем, что существует 12 возможных выборов углов Эйлера. На рис. 6.3 показаны, например, углы Эйлера системы 3-2-3. Так как углов Эйлера три, параметризация тензора вращения в этих углах служит примером трехпараметрического представления.

Если положить, что функция \mathbf{g}_1 постоянна, то вектор угловой скорости, соответствующий представлению в углах Эйлера, можно найти исходя из вектора относительной угловой скорости. В нашем случае существуют два вектора относительной угловой скорости (см. (6.17)). Для первого вращения вектор угловой скорости равен $\dot{\gamma}^1\mathbf{g}_1$ (см. (6.14)). Угловая скорость второго вращения относительно первого вращения равна $\dot{\gamma}^2\mathbf{g}_2$, а угловая скорость третьего вращения относительно второго вращения равна $\dot{\gamma}^3\mathbf{g}_3$.¹⁰ Складывая два вектора относительной угловой скорости с $\dot{\gamma}^1\mathbf{g}_1$, приходим к выводу, что

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = \dot{\gamma}^3\mathbf{g}_3 + \dot{\gamma}^2\mathbf{g}_2 + \dot{\gamma}^1\mathbf{g}_1. \quad (6.21)$$

Если тензор вращения \mathbf{R} переводит векторы \mathbf{p}_i в \mathbf{t}_i , то базис Эйлера можно выразить с помощью любой из этих двух систем векторов.

В литературе встречается описание и других методов построения (6.21). В рамках одного такого метода углы Эйлера рассматриваются как бесконечно малые. Применение этого метода хорошо изложено в разделе 2.9

⁹Более подробно об этих работах Эйлера и других интересных исторических фактах, касающихся представления вращений, смотрите в предисловии Бланка к собраниям сочинений Эйлера [59, 60], а также в работах Ченга и Гупта [38], Уилсона [230]. Несмотря на то, что работа [57] датируется 18-м веком, впервые она была опубликована в 1862 году уже после смерти автора.

¹⁰Вычисление этих векторов угловой скорости осуществляется по схеме, описанной в разделе 6.7.1.

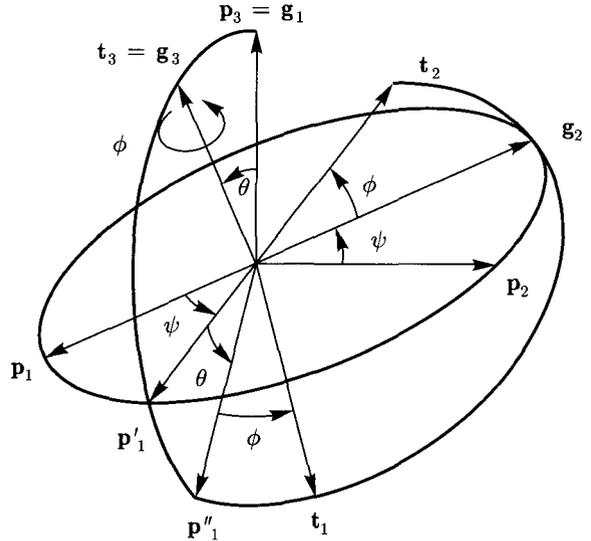


Рис. 6.3. Система 3-2-3 углов Эйлера и соответствующие этим углам вращения. На рисунке углы Эйлера обозначены как $\psi = \gamma^1$, $\theta = \gamma^2$ и $\phi = \gamma^3$, а тензор вращения \mathbf{R} , параметризуемый углами Эйлера, преобразует векторы \mathbf{p}_i в \mathbf{t}_i . Слева изображен портрет Леонарда Эйлера

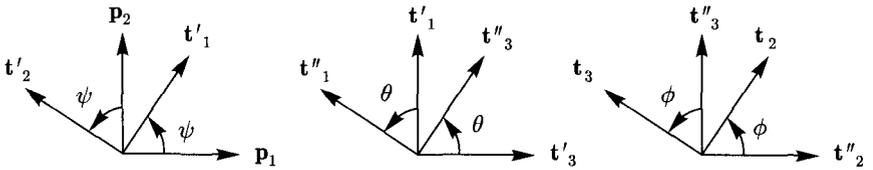


Рис. 6.4. Преобразование различных базисных векторов при повороте на углы Эйлера системы 3-2-1

работы Лурье [131]. Другой подход, разработанный Эйлером и описанный в [109, 185], использует сферическую геометрию. И наконец, существует еще один подход (довольно громоздкий), в котором осуществляется непосредственное дифференцирование (6.20) с последующим расчетом $\Omega_{\mathbf{R}}$ и аксиального вектора.

Чтобы углы Эйлера эффективно параметризовали все вращения, необходимо сделать одно допущение, а именно предположить существование таких γ^k и $\dot{\gamma}^k$, что для любого заданного $\omega_{\mathbf{R}}$ справедливо выраже-

ние (6.21). Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 и \mathbf{g}_3 охватывали пространство \mathbb{E}^3 . Когда эти векторы не являются линейно независимыми, говорят, что углы Эйлера обладают сингулярностью. Эта проблема неизбежна для углов Эйлера и часто именуется «шарнирным замком» (блокировкой оси) [196]. Докажем, что сингулярность возникает лишь при определенных значениях угла γ^2 , и наложим на γ^2 ограничения, чтобы избежать сингулярностей.

С перспективой на будущее определим сопряженный, взаимный базис Эйлера $\{\mathbf{g}^j\}$: $\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i = \delta_i^j$, где δ_i^j — дельта Кронекера¹¹. Заметим, что

$$\omega_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}^i = \dot{\gamma}^i. \quad (6.22)$$

Рассчитаем этот базис, выразив \mathbf{g}_i в терминах правого базиса, скажем $\{\mathbf{t}_i\}$. Далее найдем \mathbf{g}^2 , записав $\mathbf{g}^2 = a\mathbf{t}_1 + b\mathbf{t}_2 + c\mathbf{t}_3$ и решив три уравнения относительно трех неизвестных a , b и c ($\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^2 = 0$, $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^2 = 1$ и $\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}^2 = 0$). Когда углы Эйлера имеют сингулярности, мы не можем определить два вектора сопряженного, взаимного базиса Эйлера: \mathbf{g}^1 и \mathbf{g}^3 . Также обращаем ваше внимание на то, что для всех возможных систем углов Эйлера справедливо равенство $\mathbf{g}^2 = \mathbf{g}_2$.

Далее проанализируем две другие часто используемые системы углов Эйлера: 3-2-1 и 3-1-1. В динамике летательных аппаратов и автомобильного транспорта предпочитают применять систему 3-2-1 углов Эйлера, с помощью которых параметризуют положение по рысканию-тангажу-крену, тогда как при решении задач на вращение твердых тел обычно выбирают систему 3-1-3 углов Эйлера. Рассмотрим примеры с использованием обеих систем. Кроме того, в рамках одной из задач в конце главы мы тщательно исследуем систему углов 3-2-3. Настоятельно рекомендуем выполнить это упражнение после прочтения настоящего раздела книги.

6.8.1. Система 3-2-1 углов Эйлера

Рассмотрим систему 3-2-1 углов Эйлера¹² (рис. 6.4). Иногда эти углы Эйлера называют углами Тейта и/или Брайана (в честь Питера Тейта (1831–1901) и Джорджа Брайана (1864–1928)) или углами Эйлера–Кардана (в честь Эйлера и Джироламо Кардано (1501–1576)).

¹¹Векторы взаимного базиса Эйлера аналогичны контравариантным базисным векторам и имеют такое же применение в динамике. Далее по ходу книги мы будем неоднократно использовать взаимный базис Эйлера. Общую информацию, касающуюся взаимного базиса Эйлера, читайте в книге О’Рейли [160].

¹²Эта система используется, к примеру, в работе Гринвуда [79], Рао [176] и других учебниках по динамике летательных аппаратов и транспортных средств.

Допустим, что тензор вращения имеет следующее представление:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i,$$

где $\{\mathbf{p}_i\}$ — фиксированный базис декартовой системы координат. Первое вращение осуществляется вокруг оси \mathbf{p}_3 на угол ψ . Это вращение переводит векторы \mathbf{p}_i в \mathbf{t}'_i . Второе вращение осуществляется вокруг оси \mathbf{t}'_2 на угол θ . При этом векторы \mathbf{t}'_i переходят в \mathbf{t}''_i . Третье, и последнее, вращение осуществляется вокруг оси $\mathbf{t}''_1 = \mathbf{t}_1$ на угол ϕ . Таким образом,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\gamma^1 = \psi, \gamma^2 = \theta, \gamma^3 = \phi) = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}_1)\mathbf{L}(\theta, \mathbf{t}'_2)\mathbf{L}(\psi, \mathbf{p}_3),$$

где

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}_1)\mathbf{t}''_i, \quad \mathbf{t}''_i = \mathbf{L}(\theta, \mathbf{t}'_2)\mathbf{t}'_i, \quad \mathbf{t}'_i = \mathbf{L}(\psi, \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_i.$$

Различные базисные векторы нетрудно представить линейными комбинациями друг друга:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{t}''_1 \\ \mathbf{t}''_2 \\ \mathbf{t}''_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}'_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}''_1 \\ \mathbf{t}''_2 \\ \mathbf{t}''_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Принимая во внимание, что каждая из трех матриц, фигурирующих в (6.23), является ортогональной, легко построить обратные соотношения. Поскольку матрица, обратная ортогональной, совпадает с транспонированной матрицей, искомыми выражениями будут:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}'_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}''_1 \\ \mathbf{t}''_2 \\ \mathbf{t}''_3 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}''_1 \\ \mathbf{t}''_2 \\ \mathbf{t}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}.$$

Если объединить соотношения (6.23) и (6.24), то можно выразить \mathbf{t}_i через \mathbf{p}_k и наоборот. Позже мы с их помощью получим представления для базиса Эйлера в терминах \mathbf{p}_k и \mathbf{t}_i .

Пользуясь соотношениями (6.24), найдем компоненты $R_{ij} = (\mathbf{R}\mathbf{p}_j) \cdot \mathbf{p}_i$. Их легко представить матричным выражением:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Вполне возможно, что выражение (6.25) является транспонированным по отношению к первоначально ожидавшемуся. Однако если вы учтете, что $R_{ik} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{t}_k$, то все сомнения должны благополучно разрешиться. Полезно также заметить, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}.$$

Базис Эйлера. Ранее говорилось, что, анализируя отдельные вращения (см. (6.23)), можно прийти к выражениям для эйлеровых базисных векторов:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

В качестве альтернативы можно выразить базис Эйлера через базисные векторы $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Это выражение особенно полезно при расчете составляющих $\boldsymbol{\omega}_R \cdot \mathbf{p}_k$.

Взаимный базис Эйлера. Найдем векторы \mathbf{g}^k взаимного базиса Эйлера. Вспомним замечания, которые приводились сразу после уравнения (6.22), и выразим каждый из векторов взаимного базиса Эйлера через его компоненты в базисе $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$. В результате получим:

$$\mathbf{g}^k = g^{k1}\mathbf{t}_1 + g^{k2}\mathbf{t}_2 + g^{k3}\mathbf{t}_3.$$

Объединяя эти выражения для векторов взаимного базиса Эйлера, находим:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

После некоторых преобразований соотношения $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k$ могут быть представлены как девять уравнений относительно девяти неизвестных g^{ik} :

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} & g^{31} \\ g^{12} & g^{22} & g^{32} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оставляя в левой части этого уравнения матрицу $[g^{ik}]$, находим:

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & \sin(\phi)\operatorname{tg}(\theta) & \cos(\phi)\operatorname{tg}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, векторы взаимного базиса Эйлера равны:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & \sin(\phi)\operatorname{tg}(\theta) & \cos(\phi)\operatorname{tg}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

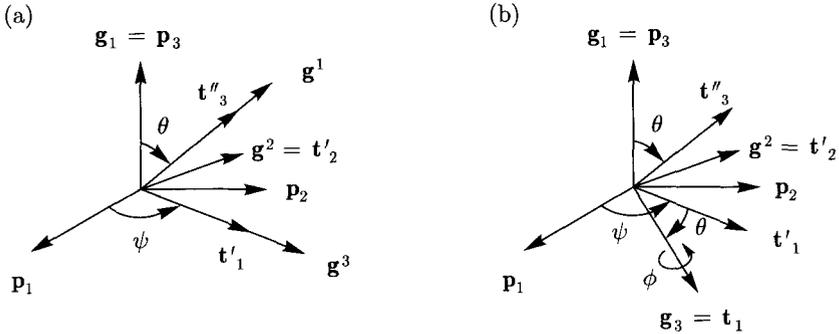


Рис. 6.5. (a) Векторы взаимного базиса Эйлера для системы 3-2-1 углов Эйлера: $\mathbf{g}^1 \parallel \mathbf{t}''_3$, $\mathbf{g}^2 = \mathbf{t}'_2$, $\mathbf{g}^3 \parallel \mathbf{t}'_1$. (b) Углы Эйлера ψ и θ выступают в роли координат для вектора $\mathbf{g}_3 = \mathbf{t}_1$ эйлерова базиса. Аналогичную роль играют сферические координаты при параметризации \mathbf{e}_R и \mathbf{e}_ϕ

Если бы мы рассчитывали векторы взаимного базиса Эйлера не по (6.26), а по (6.27), то мы пришли бы к выражению:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \operatorname{tg}(\theta) & \sin(\psi) \operatorname{tg}(\theta) & 1 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) \operatorname{sec}(\theta) & \sin(\psi) \operatorname{sec}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

На рис. 6.5а показаны векторы взаимного базиса Эйлера, выраженные через \mathbf{t}'_k ; они получаются напрямую из (6.30).

Для полноты решения заметим, что при $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ эйлеровы базисные векторы можно выразить через векторы взаимного базиса Эйлера:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Просто удивительно, насколько простой вид имеет это выражение, соответствующие варианты которого справедливы и для остальных 11 систем углов Эйлера!

Сингулярности. Из (6.26) следует, что базис Эйлера не является базисом пространства \mathbb{E}^3 при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Проще всего это доказать, если рассмотреть ψ и $\theta + \frac{\pi}{2}$ как сферические координаты для \mathbf{t}_1 (рис. 6.5b). Если $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, то $\mathbf{g}_1 = \mathbf{p}_3 = \pm \mathbf{g}_3$, и базис Эйлера не стягивает пространство \mathbb{E}^3 .

Чтобы избежать упомянутой выше сингулярности, на второй угол Эйлера накладывают ограничения: $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Остальные два угла могут принимать любые значения в диапазоне от 0 до 2π .

Векторы угловой скорости. Вектор угловой скорости $\omega_{\mathbf{R}}$, соответствующий системе 3-2-1 углов Эйлера, можно задать по-разному:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{R}} &= -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T] = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{g}_i = \\ &= \dot{\phi} \mathbf{t}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\psi} \mathbf{p}_3 = \\ &= (-\dot{\psi} \sin(\theta) + \dot{\phi}) \mathbf{t}_1 + (\dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) + \dot{\theta} \cos(\phi)) \mathbf{t}_2 + \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi)) \mathbf{t}_3.\end{aligned}$$

К элементарному представлению $\omega = \dot{\phi} \mathbf{t}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\psi} \mathbf{p}_3$ мы придем, если считаем два вектора относительной угловой скорости. Первый из них, $\dot{\theta} \mathbf{t}'_2$, рассчитывается при условии, что \mathbf{t}'_i фиксированы. Более подробно смотрите в подразделе 6.7.1. Второй вектор относительной угловой скорости, $\dot{\phi} \mathbf{t}_1$, рассчитывается исходя из тензора относительного вращения $\mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}'_1)$ при условии, что \mathbf{t}'_i фиксированы.

Заметим также, что вектор угловой скорости $\omega_{0\mathbf{R}}$ равен:

$$\begin{aligned}\omega_{0\mathbf{R}} &= -\frac{1}{2}\epsilon[\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}] = \mathbf{R}^T \omega_{\mathbf{R}} = \\ &= \dot{\phi} \mathbf{R}^T \mathbf{t}_1 + \dot{\theta} \mathbf{R}^T \mathbf{t}'_2 + \dot{\psi} \mathbf{R}^T \mathbf{p}_3 = \\ &= (-\dot{\psi} \sin(\theta) + \dot{\phi}) \mathbf{p}_1 + (\dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) + \dot{\theta} \cos(\phi)) \mathbf{p}_2 + \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi)) \mathbf{p}_3.\end{aligned}$$

При этом мы учли, что $\mathbf{R}^T \mathbf{t}_i = \mathbf{p}_i$.

6.8.2. Система 3-1-3 углов Эйлера

Аналогичные построения можно осуществить и для системы 3-1-3 углов Эйлера (рис. 6.6), которая не менее популярна, чем предыдущая. Именно эту систему углов Эйлера использовал Лагранж¹³, а также Арнольд [9], Ландау и Лифшиц [125], Томсон [214] и многие другие. При исследовании движений вращающегося волчка углы Эйлера определяют прецессию,

¹³См. [118] и раздел IX второй части книги [121]: используемые там ϕ, ω, ψ соответствуют нашим ϕ, θ, ψ .

нутацию и собственное вращение соответственно. Система 3-2-3 углов Эйлера, тесно связанная с системой 3-1-3, рассматривается в упражнении 6.2 в конце главы.

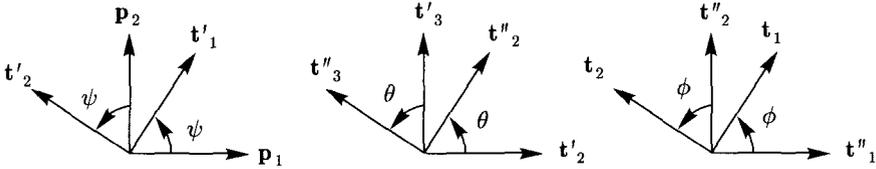


Рис. 6.6. Преобразование различных базисных векторов при повороте на углы Эйлера системы 3-1-3

Повторяя исследование аналогично анализу системы 3-2-1, получим:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}'_3) \mathbf{L}(\theta, \mathbf{t}'_1) \mathbf{L}(\psi, \mathbf{p}_3),$$

где $\{\mathbf{p}_3, \mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_3\}$ – базис Эйлера, а

$$\mathbf{t}'_i = \mathbf{L}(\psi, \mathbf{p}_3) \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{t}''_i = \mathbf{L}(\theta, \mathbf{t}'_1) \mathbf{t}'_i, \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}''_3) \mathbf{t}''_i.$$

Эта система углов Эйлера широко используется при решении задач небесной механики, поэтому прямую, проходящую через начало координат, и параллельную вектору \mathbf{t}'_1 , часто называют линией узлов [214]. Вектор угловой скорости равен

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} [\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T] = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{g}_i = \dot{\phi} \mathbf{t}_3 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_1 + \dot{\psi} \mathbf{p}_3. \quad (6.32)$$

Несмотря на то, что мы используем те же обозначения для углов Эйлера, что и для системы 3-2-1, имейте в виду, что углы θ и ϕ соответствуют разным углам поворота для двух систем углов Эйлера.

Базис Эйлера. Нетрудно доказать, что базис Эйлера $\{\mathbf{g}_i\}$ имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{t}'_1 \\ \mathbf{t}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \sin(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

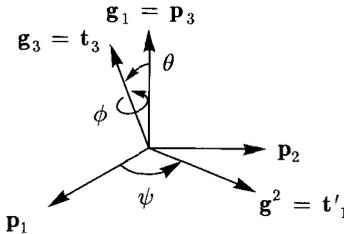
Самостоятельно получите два других выражения для $\omega_{\mathbf{R}}$, опираясь на представления (6.32) и (6.33).

Сингулярности. Как и все другие системы углов Эйлера, система 3-1-3 имеет ограничения. Посмотрим, когда базис Эйлера перестает быть базисом. Как видно из рис. 6.7а, это происходит при $t_3 = \pm p_3$. Следовательно, ограничения накладываются на второй угол:

$$\phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

Утверждение, что ограничение касается именно второго угла, справедливо и для остальных 11 систем углов Эйлера.

(a)



(b)

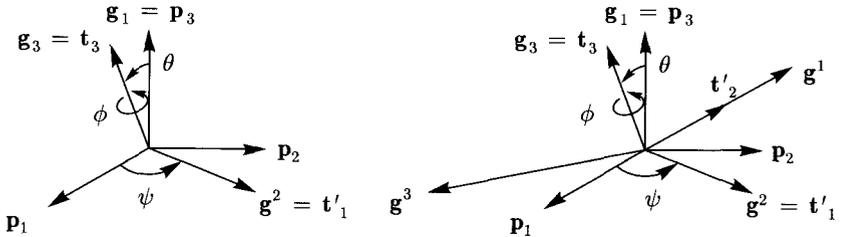


Рис. 6.7. (а) Базис Эйлера и (b) взаимный базис Эйлера для системы 3-1-3 углов Эйлера. Для этой системы $\mathbf{g}^1 \parallel \mathbf{t}'_2$, $\mathbf{g}^2 = \mathbf{t}'_1$, $\mathbf{g}^3 \parallel \mathbf{t}'_3$

Взаимный базис Эйлера. Следуя той же процедуре, что привела нас к (6.29), находим взаимный базис Эйлера¹⁴:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \csc(\theta) & \cos(\phi) \csc(\theta) & 0 \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & -\cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Аналогично

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) \operatorname{ctg}(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) \csc(\theta) & -\cos(\psi) \csc(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}.$$

¹⁴Для этого рассчитывают матрицу, обратную транспонированной матрице 3×3 из (6.33), которая задает \mathbf{g}_i через \mathbf{t}_k .

Векторы взаимного базиса Эйлера изображены на рис. 6.7. Важно отметить, что они являются неопределенными в особых точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Пользуясь (6.34), можно доказать, что

$$\omega_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}^1 = \dot{\psi}, \quad \omega_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}^2 = \dot{\theta}, \quad \omega_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}^3 = \dot{\phi}.$$

Также можно прийти к следующему результату:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Полезно сравнить результаты, полученные для систем 3-1-3 и 3-2-1 углов Эйлера. Из сравнения становится очевидно, что диапазоны значений второго угла Эйлера θ для этих двух систем различны.

Другие системы углов Эйлера

Для базиса Эйлера существует три варианта выбора \mathbf{g}_1 и, в силу $\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{g}_2$, два варианта выбора \mathbf{g}_2 . Наконец, есть два варианта выбора \mathbf{g}_3 . Следовательно, всего для базиса Эйлера можно выбрать $2 \times 2 \times 3 = 12$ систем векторов. Чтобы понять, какую именно систему вы используете, проще всего определить вектор угловой скорости. Ниже приводятся выражения для вектора угловой скорости для каждой из 12 систем углов Эйлера; тензор вращения равен $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i$:

$$\text{Система 1-2-3: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\phi} \mathbf{t}_3,$$

$$\text{Система 3-2-3: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_3 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\phi} \mathbf{t}_3,$$

$$\text{Система 1-2-1: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\phi} \mathbf{t}_1,$$

$$\text{Система 1-3-1: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_3 + \dot{\phi} \mathbf{t}_1,$$

$$\text{Система 1-3-2: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_1 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_3 + \dot{\phi} \mathbf{t}_2,$$

$$\text{Система 2-3-1: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_2 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_3 + \dot{\phi} \mathbf{t}_1,$$

$$\text{Система 2-3-2: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_2 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_3 + \dot{\phi} \mathbf{t}_2,$$

$$\text{Система 2-1-2: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_2 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{t}_2,$$

$$\text{Система 2-1-3: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_2 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{t}_3,$$

$$\text{Система 3-1-3: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi} \mathbf{p}_3 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{t}_3,$$

$$\text{Система 2-3-1: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi}\mathbf{p}_2 + \dot{\theta}\mathbf{t}'_3 + \dot{\phi}\mathbf{t}'_1,$$

$$\text{Система 3-1-2: } \omega_{\mathbf{R}} = \dot{\psi}\mathbf{p}_3 + \dot{\theta}\mathbf{t}'_1 + \dot{\phi}\mathbf{t}'_2.$$

Системы 1-2-1, 1-3-1, 2-3-2, 2-1-2, 3-1-3 и 3-2-3 называются симметричными, а остальные шесть систем — асимметричными. Последние также называются системами углов Кардана, Тейта или Брайана. Оригинальные исследования Тейта (системы углов, обозначенной нами как 1-2-3) описаны в разделе 12 выпущенной им в 1868 году работы [210]. В 1911 году вышла основополагающая работа [24], в которой Брайан исследует устойчивость летательных аппаратов и вводит систему углов, обозначенную нами как система 2-3-1 углов Эйлера (рис. 6.8). Напомним, что свой первый успешный полет братья Райт совершили в 1903 году.

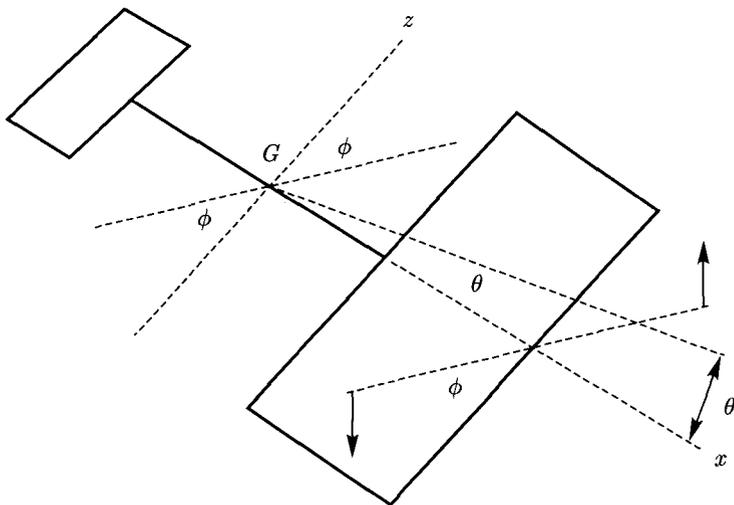


Рис. 6.8. Воспроизведение рис. 3 из основополагающей работы Брайана [24], посвященной исследованию устойчивости летательных аппаратов. Углы θ и ϕ соответствуют углам тангажа и крена самолета соответственно. Точка G обозначает центр масс самолета, а x и z — коротационные оси самолета

Для всех систем углов Эйлера характерна сингулярность при некоторых значениях второго угла θ . В этих случаях $\mathbf{g}_1 = \pm\mathbf{g}_3$ и базис Эйлера перестает быть базисом пространства \mathbb{E}^3 . Во избежание этих сингулярностей часто пользуются не одной, а двумя системами углов Эйлера, между которыми переключаются при приближении к особой точке.

6.9. Другие представления тензора вращения

Помимо эйлерова представления и представления в углах Эйлера, существуют и другие выражения для задания тензора вращения. Почти все из них упоминаются в обзорной статье Шустера [196]. Мы же остановимся лишь на двух: представлении Родрига, разработанном Олиндом Родригом в 1840 году [181], и параметрическом представлении Эйлера.

Вектор Родрига

Представление Родрига основано на определении вектора

$$\lambda = \operatorname{tg} \left(\frac{\phi}{2} \right) \mathbf{r}.$$

Этот вектор иногда называют вектором Гиббса. Очевидно, что вектор Родрига λ не является единичным вектором. Действительно, при $\phi = 0$ $\lambda = \mathbf{0}$, а при $\phi = \pi$ значение λ не определено. Следовательно, если значения ϕ варьируются в диапазоне, содержащем π , представление Родрига не применимо.

С помощью тождеств

$$\sin(\phi) = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\phi}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\phi}{2})}, \quad \cos(\phi) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\phi}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\phi}{2})}$$

читатель может проверить справедливость равенств

$$\cos(\phi) = \frac{1 - \lambda \cdot \lambda}{1 + \lambda \cdot \lambda}, \quad \sin(\phi) = \frac{2\lambda \cdot \mathbf{r}}{1 + \lambda \cdot \lambda}.$$

Подставляя в (6.8) выражения для \mathbf{r} и ϕ , приходим к представлению Родрига:

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda \cdot \lambda} ((1 - \lambda \cdot \lambda)\mathbf{I} + 2\lambda \otimes \lambda - 2(\varepsilon\lambda)).$$

Соответствующий вектор угловой скорости равен

$$\omega_{\mathbf{R}} = \frac{2}{1 + \lambda \cdot \lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\lambda} \times \lambda).$$

Этот вектор можно вычислить непосредственно, используя (6.14).

Симметрические параметры Эйлера – Родрига

Одно из наиболее популярных четырехпараметрических представлений вращения основано на использовании четырех симметрических параметров Эйлера–Родрига e_0 и \mathbf{e} .¹⁵ Эти параметры часто называют параметрами Эйлера; с ними связано много интересных исторических фактов¹⁶. Они равны

$$e_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \mathbf{e} = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{r}.$$

Из определения этих параметров следует, что они удовлетворяют эйлерову ограничению по параметру¹⁷:

$$e_0^2 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1.$$

Заметим также, что

$$\lambda = \frac{\mathbf{e}}{e_0}.$$

Вектор \mathbf{r} и угол ϕ можно выразить через параметры e_0 и \mathbf{e} ; попробуйте сделать это самостоятельно.

Подставляя в (6.8) выражения для \mathbf{r} и ϕ , приходим к представлению тензора вращения в симметрических параметрах Эйлера–Родрига:

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}(e_0, \mathbf{e}) = (e_0^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - 2e_0(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{e}).$$

Положим $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{p}_i$. Тогда нетрудно доказать, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}_k = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_k$. Если записать выражения для компонентов $R_{ik} = \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{p}_i$,¹⁸

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} &= (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e_1^2 & 2e_1e_2 & 2e_1e_3 \\ 2e_1e_2 & 2e_2^2 & 2e_2e_3 \\ 2e_1e_3 & 2e_2e_3 & 2e_3^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -2e_0e_3 & 2e_0e_2 \\ 2e_0e_3 & 0 & -2e_0e_1 \\ -2e_0e_2 & 2e_0e_1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

¹⁵Параметр e_0 и три составляющие вектора \mathbf{e} часто рассматриваются как четыре компонента кватерниона $q = e_0 + e_1i + e_2j + e_3k$, где e_i — составляющие вектора \mathbf{e} относительно правого ортонормированного базиса, а i, j, k — базисные векторы для кватерниона. Как следствие, симметрические параметры Эйлера–Родрига иногда называют единичными кватернионами.

¹⁶Превосходные рассуждения на эту тему есть в работах Альтманна [2, 3] и Грэй [77].

¹⁷В работе О’Рейли и Вареди [166] рассказывается, как ослабить это ограничение. Авторы также показали, как визуализировать ограничение с помощью сферы Хобермана. Этот вопрос тесно связан с вопросом гауссовой мутации пространства [69].

¹⁸Соответствующее матричное представление приводилось ранее; см. (6.10).

то легко видеть, что тензор вращения является квадратичной функцией четырех параметров e_0, e_1, e_2, e_3 . Значит, у рассматриваемого представления есть несколько преимуществ вычислительного характера перед другими представлениями. Обратите, кроме того, внимание, насколько просто получить из (6.36) выражение для компонентов тензора \mathbf{R}^T .

Соответствующий вектор угловой скорости равен

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = 2(e_0 \dot{\mathbf{e}} - \dot{e}_0 \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}).$$

Опять же этот вектор можно вычислить непосредственно из (6.14). Заметим, что вектор угловой скорости задается относительно простой функцией симметрических параметров Эйлера–Родрига и их производных.

В одном из упражнений в конце главы приводятся дальнейшие результаты, касающиеся композиции двух тензоров вращений в представлении Эйлера–Родрига. Эти результаты, полученные Бенджамином Олендом Родригом (1794–1851) в 1840 году, имеют достаточно элегантный вид. В настоящее время параметры Эйлера–Родрига используются для оценки тензора вращения (пространственного положения) летательного аппарата, а также в области машинного распознавания образов и робототехнике. Специалисты названных областей оперируют двумя системами векторов, связанными неизвестным тензором вращения \mathbf{R} и вектором параллельного переноса \mathbf{d} . Оценка величин \mathbf{R} и \mathbf{d} может быть произведена методом наименьших квадратов, что известно как ортогональная прокрустовая задача [95, 192]. В динамике спутников эту задачу называют задачей Вахба (по имени Грэйс Вахба [222]). Задача заключается в следующем: для $N \geq 2$ известных результатов измерений $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N$, связанных тензором \mathbf{R} и вектором \mathbf{d} , определить оптимальные значения \mathbf{R} и \mathbf{d} , такие что функция

$$W = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \|\mathbf{b}_K - \mathbf{R}\mathbf{a}_K - \mathbf{d}\|^2 \quad (6.37)$$

минимальна. Здесь скаляр α_K — скалярный вес K -го измерения. Давенпорт доказал, что если при $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ тензор \mathbf{R} , фигурирующий в (6.37), параметризовать с помощью e_0 и \mathbf{e} , то мы получим элегантное решение задачи Вахба¹⁹. Соответствующее элегантное решение прокрустовой задачи (т. е. при $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$) позже было получено Горном [95]²⁰.

¹⁹Более подробно о решениях Давенпорта и других авторов, а также об их обобщении на случай оригинальной формулировки Вахба читайте в [136, 137, 195, 197].

²⁰Другие ссылки на решения прокрустовой задачи смотрите в [46, 49, 200].

Резюме по векторам угловой скорости

Обобщим информацию, касающуюся представлений вектора угловой скорости при повороте на угол ϕ вокруг оси \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{g}_i = \\ &= \dot{\phi} \mathbf{r} + \sin(\phi) \dot{\mathbf{r}} + (1 - \cos(\phi)) \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \\ &= 2(e_0 \dot{\mathbf{e}} - \dot{e}_0 \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) = \\ &= \frac{2}{1 + \lambda \cdot \lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\lambda} \times \lambda).\end{aligned}\tag{6.38}$$

Осуществляя минимальные преобразования этих уравнений, можно получить выражения для $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{e}}$ и $\dot{\lambda}$

6.10. Производные скалярных функций от тензоров вращений

Рассмотрим функцию $U = U(\mathbf{R})$. Рассчитаем производную от этой функции по времени. Трудность в том, что \mathbf{R} может задаваться по-разному и в каждом случае мы придем к иному представлению производной. Впоследствии станет ясно, что простое выражение для производной функции U получается в терминах вектора $u_{\mathbf{R}}$ и взаимного базиса Эйлера (уравнение (6.41)).

Начнем с простейшего представления для \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k,$$

где $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{0}$. По цепному правилу дифференцирования сложной функции $U = U(\mathbf{R}) = U(R_{ik}, \mathbf{p}_j)$ находим:

$$\dot{U} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial R_{ik}} \dot{R}_{ik}.$$

Этот же результат можно записать, используя оператор следа:

$$\dot{U} = \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}}^T \right),$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial R_{ik}} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Принимая во внимание, что $\Omega_{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ и вводя тензор угловой скорости, находим:

$$\dot{U} = \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{R}^T \Omega_{\mathbf{R}}^T \right).$$

Поскольку $\Omega_{\mathbf{R}}$ — кососимметрический тензор, $\text{tr}(\mathbf{A}\Omega_{\mathbf{R}}^T) = 0$ для всех $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Следовательно, в выражение для \dot{U} входит только кососимметрическая составляющая тензора $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{R}^T$:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{R}^T \Omega_{\mathbf{R}}^T \right) = \\ &= \text{tr}(U_{\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{R}}^T), \end{aligned}$$

где $U_{\mathbf{R}}$ — кососимметрический оператор, равный

$$U_{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{R}^T - \mathbf{R} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \right)^T \right).$$

Поскольку $U_{\mathbf{R}}$ — кососимметрический тензор, можно рассчитать вектор, соответствующий удвоенному аксиальному вектору тензора $U_{\mathbf{R}}$ ²¹:

$$u_{\mathbf{R}} = -\varepsilon[U_{\mathbf{R}}]. \quad (6.39)$$

В силу существования этого вектора производную \dot{U} можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}}^T \right) = \\ &= \text{tr}(U_{\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{R}}^T) = \\ &= u_{\mathbf{R}} \cdot \omega_{\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

На данный момент нам известно много разных представлений вектора $\omega_{\mathbf{R}}$. Теперь запишем еще одно, последнее, выражение для \dot{U} , с помощью которого найдем несколько представлений для $u_{\mathbf{R}}$.

²¹Множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует в (6.39) в силу тождества (A.12), которое приводится в упражнениях в конце приложения А.

В качестве примера предположим, что U задается в углах Эйлера: $U = \hat{U}(\gamma^k)$. Тогда из второй строчки уравнения (6.40) будет следовать, что

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{U}}{\partial \gamma^k} \dot{\gamma}^k = u_{\mathbf{R}} \cdot \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}^j \mathbf{g}_j.$$

Пользуясь взаимным базисом Эйлера, заключаем:

$$u_{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{U}}{\partial \gamma^i} \mathbf{g}^i. \quad (6.41)$$

Это самое простое и полезное выражение для $u_{\mathbf{R}}$. Впервые оно появилось в [163].

Допустим теперь, что \mathbf{R} задается одним из трех других упомянутых нами методов. С учетом (6.38) рассчитаем по второй строке из (6.40) производную \dot{U} . Следуя процедуре, которая ведет к (6.41), получим три других представления для $u_{\mathbf{R}}$. Опустим некоторые детали и запишем сводную формулу для расчета вектора $u_{\mathbf{R}}$:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{U}}{\partial \gamma^i} \mathbf{g}^i = \\ &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} \mathbf{r} + \frac{1}{2} \left(\text{ctg} \left(\frac{\phi}{2} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - \varepsilon \mathbf{r} \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{2} \left((e_0 \mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{e}) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{e}} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial e_0} \mathbf{e} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{\lambda} - \varepsilon \boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial \check{U}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

где $U(\mathbf{R}) = \bar{U}(e_0, \mathbf{e}) = \hat{U}(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = \tilde{U}(\phi, \mathbf{r}) = \check{U}(\boldsymbol{\lambda})$. Четвертое выражение из (6.42) первым получил Симмондс [199]. В работе Антмана [5] используется представление, близкое ко второму выражению из (6.42).

Ряд частных производных, фигурирующих в (6.42), следует рассчитывать с осторожностью. Поскольку \mathbf{r} — единичный вектор, производная $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{r}}$ рассчитывается на поверхности $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$. То же самое касается производных $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{e}}$, $\frac{\partial \bar{U}}{\partial e_0}$ и $\frac{\partial \check{U}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$. Иначе говоря, все они являются тангенциальными или поверхностными производными. Один из способов их рассчитать —

параметризовать \mathbf{R} с помощью углов Эйлера, после чего перейти от интересующих параметров к углам Эйлера. В самом деле, пользуясь выражениями (6.42), цепным правилом дифференцирования сложной функции и тождеством $\varepsilon \mathbf{g}_i = -\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \gamma^i} \mathbf{R}^T$, можно доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial e_0} &= u_{\mathbf{R}} \cdot 2\mathbf{e}, & \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathbf{e}} &= 2(e_0 \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{e}) u_{\mathbf{R}}, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} &= -(\varepsilon u_{\mathbf{R}}) \mathbf{R}, & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} &= u_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{r}} &= \left(\sin(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) + 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \varepsilon \mathbf{r} \right) u_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

В книгах О'Рейли [160] и Симмондса [199] упоминается, что выражения (6.42) помогают найти потенциалы консервативных моментов. В дальнейшем мы будем часто пользоваться первым представлением (6.42).

Задачи

6.1. Пусть тензор \mathbf{R} равен

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \cos(\theta) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + \cos(\theta) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 - \\ &\quad - \sin(\theta) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

(а) Докажите, что \mathbf{R} также равен

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 = \\ &= \cos(\theta) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - \\ &\quad - \sin(\theta) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

(б) Докажите, что

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{R}} &= \dot{\theta}(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2) = \\ &= \dot{\theta}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta), \\ \omega_{\mathbf{R}} &= \dot{\theta} \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

6.2. Напомним, что тензор вращения \mathbf{R} можно параметризовать тремя углами Эйлера. В системе 3-2-3 углов Эйлера тензор вращения задается выражением:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3'') \mathbf{L}(\theta, \mathbf{t}_2') \mathbf{L}(\psi, \mathbf{E}_3).$$

Эта система углов Эйлера (рис. 6.3) используется и в других учебниках, например в работах Гинзберга [71, раздел 4.2], Кельвина и Тэта [109], Пауса [184, 185] и Уиттекера [228]²².

- (а) Покажите на рисунках взаимосвязь между (i) \mathbf{E}_i и \mathbf{t}'_i , (ii) \mathbf{t}'_i и \mathbf{t}''_i , (iii) \mathbf{t}''_i и \mathbf{t}_i .
- (б) Объясните, почему значения второго угла θ необходимо ограничить интервалом $(0, \pi)$.
- (с) Докажите, что для рассматриваемой системы углов Эйлера базис Эйлера равен:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) \sin(\theta) & \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Кроме того, докажите, что углы Эйлера удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

- (д) Исходя из (6.43), получите выражения для компонентов R_{ik} тензора \mathbf{R} . Эти компоненты можно рассчитывать по-разному, например:

$$R_{ik} = (\mathbf{R}\mathbf{t}_k) \cdot \mathbf{t}_i = (\mathbf{R}\mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{E}_i.$$

- (е) Напомним, что для каждого тензора вращения \mathbf{R} существует ось вращения \mathbf{r} и угол вращения. С помощью результатов, полученных в подразделе 6.5.1, определите ось вращения и угол вращения для четырех

²²Уиттекер использует систему обозначений, схожую с нашей, только ψ у него соответствует нашему ϕ , и наоборот. Если сравнить его выражение для составляющих вектора $\omega_{\mathbf{R}}$ с нашим, то мы увидим в выражении для ω_2 , которое приводится в разделе 16 работы Уиттекера [228], типографическую ошибку. Паус также использует систему обозначений, аналогичную нашей, но при этом оперирует левой системой координатных осей.

различных выбранных вами значений системы (ϕ, θ, ψ) . Дайте физическую интерпретацию этим четырем наборам значений углов Эйлера.

- (f) Докажите, что для рассматриваемой системы углов Эйлера взаимный базис Эйлера равен

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \csc(\theta) & \sin(\phi) \csc(\theta) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого проверьте, справедливы ли следующие выражения для сопряженного базиса Эйлера в базисах $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ и $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\psi) \operatorname{ctg}(\theta) & -\sin(\psi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) \csc(\theta) & \sin(\psi) \csc(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \csc^2(\theta) & 0 & -\operatorname{ctg}(\theta) \csc(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{ctg}(\theta) \csc(\theta) & 0 & \csc^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (g) Докажите, что для рассматриваемой системы углов Эйлера вектор угловой скорости равен

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = \dot{\phi} \mathbf{t}_3 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_2 + \dot{\psi} \mathbf{E}_3. \quad (6.44)$$

Для решения вам потребуются две различные коротационные производные: первая рассчитывается при фиксированном \mathbf{t}'_i , а вторая — при фиксированном \mathbf{t}''_i .

- (h) Докажите, что для рассматриваемой системы углов Эйлера составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}$ в базисе $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ равны

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi), \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi), \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}, \end{aligned}$$

где $\Omega_i = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_i$. Эти же выражения приводятся в разделе 257 книги Рауса [185].

- (i) Пусть даны функции $\omega_k(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{t}_k$. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \csc(\theta) & \sin(\phi) \csc(\theta) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

- (j) Для решения этой задачи потребуется численное интегрирование уравнения (6.45). Для заданных

$$\omega_1(t) = 0,2 \sin(0,5t), \quad \omega_2(t) = 0,2 \sin(0,05t), \quad \omega_3(t) = 10\omega_1(t)$$

и выбранных вами начальных значений углов Эйлера определите $\phi(t)$, $\theta(t)$ и $\psi(t)$. Как с помощью полученных результатов найти $t_k(t)$?

6.3. Напомним, что тензор вращения \mathbf{L} , задающий поворот против часовой стрелки вокруг оси \mathbf{p} на угол ν , равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\nu, \mathbf{p}) = \cos(\nu)(\mathbf{I} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) - \sin(\nu)\epsilon\mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p},$$

а соответствующий вектор угловой скорости равен

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{L}} = \dot{\nu}\mathbf{p} + \sin(\nu)\dot{\mathbf{p}} + (1 - \cos(\nu))\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Пусть даны два тензора вращения:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{L}(\theta, \mathbf{E}_3), \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{L}(\phi, \mathbf{e}_1)\mathbf{L}(\theta, \mathbf{E}_3),$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \cos(\theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{e}_2 = \cos(\theta)\mathbf{E}_2 - \sin(\theta)\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3.$$

- (a) Докажите, что выражение для \mathbf{Q}_1 имеет вид:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

- (b) Приведите пример системы двух твердых тел, для которой тензор вращения одного тела равен \mathbf{Q}_1 , а тензор вращения второго тела равен \mathbf{Q}_2 .
- (c) При условии, что тензор относительного вращения равен $\mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^T$, докажите следующую формулу:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}_2} = \dot{\phi}\mathbf{e}_1 + \sin(\phi)\dot{\theta}\mathbf{e}_2 + (1 - \cos(\phi))\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

- (d) Объясните, почему

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}_2} \neq \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{R}_2} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Q}_2} - \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Q}_1}.$$

6.4. Параметризация тензора вращения при помощи параметров Эйлера (единичных кватернионов или симметрических параметров Эйлера–Родрига) замечательна тем, что соответствующая формула для композиции двух вращений является очень элегантной. Аналогичные результаты для двух тензоров, описываемых углами Эйлера, весьма громоздки. В данной

задаче будем пользоваться параметрами Эйлера, чтобы получить некоторые результаты, относящиеся к тензорам вращения.

Рассмотрим два тензора вращения \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (e_0^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - 2e_0(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}), \\ \mathbf{B} &= (f_0^2 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{f})\mathbf{I} + 2\mathbf{f} \otimes \mathbf{f} - 2f_0(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{f}).\end{aligned}\tag{6.46}$$

Здесь $\{e_0, \mathbf{e}\}$ и $\{f_0, \mathbf{f}\}$ — две системы параметров Эйлера:

$$e_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \mathbf{e} = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{a}, \quad f_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \mathbf{f} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{b},\tag{6.47}$$

где \mathbf{a} — ось вращения для тензора \mathbf{A} , \mathbf{b} — ось вращения для тензора \mathbf{B} ; ϕ — угол вращения для тензора \mathbf{A} , а θ — угол вращения для тензора \mathbf{B} . Таким образом, тензор \mathbf{A} задает поворот против часовой стрелки на угол ϕ вокруг оси \mathbf{a} .

- (а) Напомним, что тензор вращения \mathbf{A} , выраженный через угол вращения ϕ и ось вращения \mathbf{a} , равен:

$$\mathbf{A}(\phi, \mathbf{a}) = \cos(\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) - \sin(\phi)\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}.$$

Докажите, что тензор \mathbf{A} действительно имеет представление (6.46)₁.

- (б) Полагая $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^3 e_i \mathbf{E}_i$, найдите $A_{ik} = (\mathbf{A}\mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{E}_i$.
- (в) Докажите, что

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} = (g_0^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g})\mathbf{I} + 2\mathbf{g} \otimes \mathbf{g} - 2g_0(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{g}),\tag{6.48}$$

где

$$g_0 = e_0 f_0 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{g} = e_0 \mathbf{f} + f_0 \mathbf{e} + \mathbf{f} \times \mathbf{e}.\tag{6.49}$$

Этот результат первым получил Родриг [181] в 1840 году. В англоязычной литературе он впервые упоминается в работе Кэли [32], датированной 1845 годом.

- (д) Выразите параметры Эйлера для тензоров вращения $\mathbf{A}\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ через e_0, f_0, \mathbf{f} и \mathbf{e} .
- (е) На основе результатов, полученных в пункте (д), докажите некоммутативность вращений: $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$.

(f) Вектор угловой скорости для тензора \mathbf{A} равен

$$\boldsymbol{\omega}_A = 2(e_0 \dot{e} - \dot{e}_0 e + e \times \dot{e}),$$

где $\boldsymbol{\omega}_A = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T]$.

(i) Чему равны $\boldsymbol{\omega}_B$ и $\boldsymbol{\omega}_C$?

(ii) Как вы объясните неравенство

$$\boldsymbol{\omega}_C \neq \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_A?$$

(g) Какой поворот задает тензор вращения \mathbf{C} , если $e_0 = f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{a} = \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{b} = \mathbf{E}_2$? Проиллюстрируйте свой ответ, показав, как преобразуется базис $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ под действием тензора \mathbf{C} .

6.5. На рис. 6.9 схематично изображены широта (λ) и долгота (θ) точки на поверхности Земли. В навигационных системах эти углы используются для определения направления вниз e_z , северного направления e_x и восточного направления e_y :

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) \sin(\lambda) & -\sin(\theta) \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) \cos(\lambda) & -\sin(\theta) \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Тройка векторов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ задает фиксированный правый базис в декартовой системе координат.

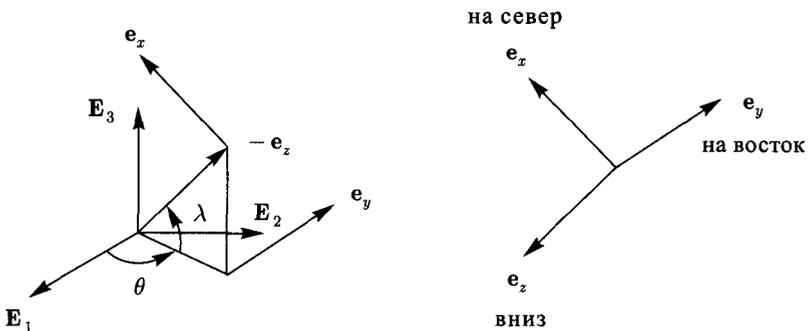


Рис. 6.9. Долготный θ и широтный λ углы

(a) Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_3$. Докажите, что этот тензор вращения может быть представлен композицией двух тензоров вращений \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , где \mathbf{R}_1 задает поворот вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол θ , а \mathbf{R}_2 задает поворот вокруг оси \mathbf{e}_y на угол $-\frac{\pi}{2} - \lambda$.

(b) Для заданного вектора

$$\mathbf{x} = x_x \mathbf{e}_x + x_y \mathbf{e}_y + x_z \mathbf{e}_z = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3$$

докажите, что

$$x_x = \sum_{i=1}^3 R_{i1} X_i, \quad x_y = \sum_{i=1}^3 R_{i2} X_i, \quad x_z = \sum_{i=1}^3 R_{i3} X_i,$$

где

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k.$$

Как связаны компоненты R_{ik} с матрицей, фигурирующей в (6.50)?

6.6. Пусть даны два тензора вращения \mathbf{A} и \mathbf{B} , равные

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{t}_i.$$

Система векторов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ задает фиксированный правый ортонормированный базис пространства \mathbb{E}^3 .

(a) Докажите, что

$$\dot{\mathbf{B}} = \overset{\circ}{\mathbf{B}} + \Omega_{\mathbf{A}} \mathbf{B} - \mathbf{B} \Omega_{\mathbf{A}},$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{B}}$ — коротационная производная от \mathbf{B} , рассчитываемая при фиксированных \mathbf{t}_i , а

$$\Omega_{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T.$$

(b) Рассмотрите тензор вращения $\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{A}$. Используя результаты из пункта (a), докажите, что

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{B}} = \overset{\circ}{\mathbf{B}} \mathbf{B}^T,$$

где тензор относительной угловой скорости $\hat{\Omega}_B$ и тензор угловой скорости Ω_C соответственно равны

$$\hat{\Omega}_B = \Omega_C - \Omega_A, \quad \Omega_C = \dot{C}C^T.$$

Почему тензор $\hat{\Omega}_B$ является кососимметрическим, и что это означает для произведения $\hat{\Omega}_B \mathbf{b}$, где \mathbf{b} — произвольный вектор?

(с) Пусть даны два тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \cos(\psi)(\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) - \sin(\psi)\epsilon\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{B} &= \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1) - \sin(\theta)\epsilon\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{t}_1 = \cos(\psi)\mathbf{E}_1 + \sin(\psi)\mathbf{E}_2.$$

- (i) Чему равны $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$?
- (ii) Используя (6.14), найдите ω_A и $\hat{\omega}_B$.
- (iii) С помощью (6.14) докажите, что

$$\omega_B = \dot{\theta}\mathbf{t}_1 - \dot{\psi}(\cos(\theta)\mathbf{E}_3 - \sin(\theta)\mathbf{t}_2) + \dot{\psi}\mathbf{E}_3,$$

где ω_B — вектор угловой скорости для тензора \mathbf{B} .

6.7. Докажите, что тензор вращения $\mathbf{L}(\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_3)\mathbf{L}(\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_1)$ эквивалентен тензору вращения $\mathbf{L}(\frac{2\pi}{3}, \mathbf{p})$, где

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3).$$

Этот результат особенно полезен при анализе групп симметрий кристаллов.

6.8. Докажите, что²³

$$\mathbf{L}\left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_2\right)\mathbf{L}\left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_3\right)\mathbf{L}\left(-\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_1\right) = \mathbf{L}\left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{E}_3\right).$$

Из этого выражения следует, что последовательные вращения вокруг трех перпендикулярных осей можно заменить одним вращением вокруг одной из этих осей. Отсюда также следует одно из объяснений парадокса Кодмана [40] в биомеханике²⁴.

²³В этой задаче вам придется рассчитать $\epsilon\mathbf{E}_k$. За помощью обращайтесь к уравнению (A.11) в приложении.

²⁴Согласно Политти и др. [174], парадокс Кодмана возникает в следующей ситуации: вы

6.9. Прочитайте разделы 1 и 24–30 в статье Эйлера [54], где рассматриваются углы Эйлера (p, q, r) . Докажите, что там используется система 1-3-1 углов Эйлера, для которой

$$\psi = p, \quad \theta = q, \quad \phi = \pi - r.$$

Возможно, вам потребуется выражение для компонентов $R = e_1 \cdot \omega$, $P = e_2 \cdot \omega$ и $Q = e_3 \cdot \omega$, которое приводится на стр. 205 работы [54]. В [57] приводятся аналогичные результаты, но для другой системы обозначений. В обеих статьях есть материал, касающийся компонентов тензора Эйлера и компонентов тензора инерции.

6.10. Пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и \mathbf{p}_3 — векторы правого ортонормированного базиса. Получите теорему Родрига–Гамильтона

$$\mathbf{L}(\pi, \mathbf{p}_3)\mathbf{L}(\pi, \mathbf{p}_2)\mathbf{L}(\pi, \mathbf{p}_1) = \mathbf{I}. \quad (6.51)$$

Она обсуждается в разделе 3 работы Уиттекера [228]. В качестве ее авторов Уиттекер называет Родрига [181] и Гамильтона [90]. Сам Уиттекер доказал эту теорему с чисто геометрической точки зрения. Сравните свое доказательство с его доказательством, это будет хорошим упражнением. Позже мы воспользуемся теоремой Родрига–Гамильтона, чтобы доказать неконсервативность постоянного момента.

6.11. Пусть тензор вращения \mathbf{R} параметризуется с помощью системы 3-2-1 углов Эйлера. Если обозначить эти углы через α_1, α_2 и α_3 соответственно, то чему будут равны углы Эйлера системы 3-2-1 для обратного тензора \mathbf{R}^T ?

6.12. В разделе 1.7 работы Кэйна и др. [106] задаются две разные системы углов Эйлера. Первая соответствует углам, связанным с телом, а вторая соответствует углам, связанным с неподвижным пространством. Таким

стоит, опустив вниз правую руку, при этом большой палец смотрит вперед, а остальные четыре пальца направлены вниз. Затем вы отводите в сторону руку до горизонтального уровня так, чтобы четыре пальца смотрели вправо, и поворачиваете руку в горизонтальной плоскости, пока пальцы не начнут смотреть вперед (т.е. вытягиваете руку перед собой). Наконец, опускаете руку так, чтобы пальцы смотрели вниз. После этих трех вращений оказывается, что большой палец смотрит влево, т.е. повернулся на 90° . Тот факт, что вы совершили этот поворот, не вращая руку вокруг ее продольной оси, называется парадоксом Кодмана.

Прим. ред. — Описываемый «парадокс» объясняется теоремой о телесном угле (см. В. Ф. Журавлев. Основы теоретической механики): если некоторая ось \mathbf{l} , жестко связанная с телом, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность и при этом проекция угловой скорости тела на эту ось была равна нулю, то после возвращения оси \mathbf{l} в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, равный телесному углу описанного конуса.

образом, Кэйн и др. определяют 24 системы углов Эйлера. Докажите, что система 3-2-1 углов Эйлера, рассмотренная в подразделе 6.8.1, эквивалентна трем углам 3-2-1, связанным с телом, из [106]. Кроме того, покажите, как с помощью углов 3-2-1, связанных с пространством, параметризовать тензор \mathbf{R} . Если обозначить пространственные углы 3-2-1 через β_1, β_2 и β_3 соответственно, то решение будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_3) & -\sin(\beta_3) \\ 0 & \sin(\beta_3) & \cos(\beta_3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\beta_2) & 0 & \sin(\beta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_2) & 0 & \cos(\beta_2) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1) & 0 \\ \sin(\beta_1) & \cos(\beta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сравните этот результат с соответствующим представлением (6.25) для трех углов 3-2-1, связанных с телом. При решении этой задачи вам может помочь материал раздела 3.2 из работы Гинзберга [71], в котором рассматриваются вращения относительно осей, связанных с телом, и вращения относительно осей, связанным с неподвижным пространством. Аналогичные вопросы рассматриваются в разделе 7.14 работы Парса [170].

ГЛАВА 7

Кинематика твердых тел

7.1. Введение

В этой главе мы обсудим вопросы, касающиеся трехмерной кинематики твердых тел. Приведем несколько полезных классических выражений для векторов скорости и ускорения произвольной точки твердого тела. Кроме того, мы поговорим о векторе угловой скорости ω , количестве движения \mathbf{G} , кинетических моментах \mathbf{H} , \mathbf{H}_O и \mathbf{H}_A , кинетической энергии T твердых тел, а также о соответствующих силах инерции. В конце главы речь пойдет о конфигурационном многообразии для твердого тела.

Большая часть материала этой главы базируется на исследованиях динамики твердого тела, которые проводил Эйлер в 1750-х годах. С тех пор разработанная им теория широко использовалась для построения моделей различных механических систем; появилось множество интерпретаций его результатов. Среди недавних работ, в которых используются тензорные обозначения, можно упомянуть работы Битти [15], Кейси [26, 28], Фокса [65], Гринвуда [80] и Гургина [84]. Мы будем опираться на результаты их исследований, поскольку они содержат явные выводы, особенно относительно сил инерции и угловых скоростей.

7.2. Движение твердого тела

При рассмотрении кинематики твердых тел удобно поступить так, как делают в механике сплошных сред, и ввести определения начальной и текущей конфигураций твердого тела. Итак, тело \mathcal{B} рассматривается как совокупность материальных точек. Материальную точку тела \mathcal{B} будем обозначать через X . Положение материальной точки X относительно неподвижного начала координат в момент времени t задается вектором \mathbf{x} (рис. 7.1). Текущая конфигурация κ_t тела задается гладким взаимно-однозначным отображением. Оно переводит материальные точки X тела \mathcal{B} в точки трехмерного евклидова пространства: $\mathbf{x} = \kappa_t(X)$. Поскольку радиус-вектор \mathbf{x}

материальной точки X изменяется со временем, это отображение зависит от времени — отсюда индекс t . Конфигурация κ_t соответствует состоянию тела в момент времени t .

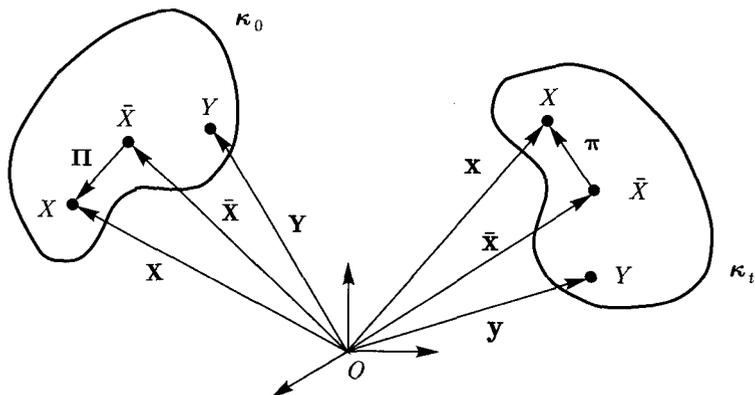


Рис. 7.1. Начальная κ_0 и текущая κ_t конфигурации тела B

Определим также начальную конфигурацию κ_0 тела. Эта конфигурация задается обратимой функцией $\mathbf{X} = \kappa_0(X)$. В силу обратимости этой функции радиус-вектор \mathbf{X} материальной точки X в начальной конфигурации тела однозначно определяет рассматриваемую материальную точку. Впоследствии, зная начальную конфигурацию, мы будем определять некоторые характеристики тела, такие как масса m и тензор инерции \mathbf{J}_0 . Используя начальную конфигурацию, можно описать движение тела функцией от \mathbf{X} и t :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t).$$

Теорема Эйлера

В случае твердых тел функцию $\chi(\mathbf{X}, t)$ можно существенно упростить. Во-первых, расстояние между *любыми* двумя точками твердого тела, скажем между точками X_1 и X_2 , не изменяется при всех возможных движениях. Математически это утверждение записывается в виде равенства

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|. \quad (7.1)$$

Во-вторых, взаимная ориентация радиус-векторов точек твердого тела при его движении также не изменяется. В 1775 году Эйлер [55, 56] доказал, что

если движение твердого тела удовлетворяет условию (7.1), то оно также удовлетворяет равенству

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{Q}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \quad (7.2)$$

где \mathbf{Q} — тензор вращения. Напомним, что для этого тензора вращения существует ось вращения и угол вращения.

Пользуясь (7.2), можно узнать, является ли вращение твердого тела нетривиальным. Если $\mathbf{Q} \neq \mathbf{I}$, то можно выбрать две точки X_1 и X_2 твердого тела и проанализировать, как изменяется со временем относительный радиус-вектор $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Если для любых X_1 и X_2 направление относительного радиус-вектора не изменяется, то $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$; в противном случае твердое тело совершает вращательное движение. Отсюда вытекает наиболее полезное толкование тензора \mathbf{Q} : он переводит относительные радиус-векторы из начального в текущее положение.

Если зафиксировать одну точку тела и выбрать в ней начало координат, то выражение (7.2) упрощается:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}. \quad (7.3)$$

Приходим к *теореме Эйлера о движении твердого тела*:

Всякое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой соответствует повороту вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.

Осью здесь является ось вращения, определяемая тензором $\mathbf{Q}(t)$. Поскольку перемещение рассматриваемого тела есть изменение конфигурации тела от κ_0 до κ_t , эта ось зависит от выбора начальной конфигурации.

Существует альтернативная, более распространенная интерпретация теоремы Эйлера, в которой нет упоминания о начальной конфигурации κ_0 . Чтобы прийти к ней, необходимо рассмотреть движение тела с одной неподвижной точкой на интервале времени $t \in [t_0, t]$. Из (7.3) находим:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

Следовательно, перемещение тела в конце временного интервала характеризуется тензором вращения $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$ ¹. По теореме Эйлера заключаем, что ось вращения, определяемая тензором $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$, является осью поворота твердого тела. Подчеркнем, что в процессе рассматриваемого движения текущая конфигурация тела переходит из κ_{t_0} в κ_t .

¹В общем случае ось и угол вращения для тензора $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$ отличаются от оси и угла вращения для тензора $\mathbf{Q}(t)$.

Представление движения в общем случае

В общем случае твердое тело при своем движении может и не иметь неподвижной точки. Тогда с произвольной точкой X_P твердого тела, имеющей в текущей конфигурации положение $x_P(t)$, можно связать поступательное движение начальной конфигурации. Как следствие, твердое тело повернется вокруг X_P с тем, чтобы занять свою текущую конфигурацию κ_t :

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P).$$

То есть

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{d}(t), \quad (7.4)$$

где $\mathbf{d}(t) = \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}_P$. Итак, согласно (7.4), общее движение твердого тела является композицией переноса и вращения². Таково наиболее общее представление движения твердого тела; в будущем мы будем неоднократно им пользоваться.

Чтобы прийти к альтернативной формулировке (7.4), в которой не участвует начальная конфигурация, рассмотрим движение тела на интервале времени $[t_0, t]$ (рис. 7.2). Из уравнения (7.4) находим:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{Q}(t_0)\mathbf{X} + \mathbf{d}(t_0), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{d}(t).$$

Объединяя эти уравнения, получаем альтернативное представление (7.4):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{z}(t), \quad (7.5)$$

где $\mathbf{z}(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{Q}^T(t_0)\mathbf{d}(t_0)$ ³.

Исходя из (7.5), можно получить третье альтернативное представление движения твердого тела. Речь идет о представлении, синонимичном известной теореме, которую доказал Мишель Шаль (1793–1880) (более подробно об этом вопросе читайте в разделе 5 работы [228] и содержащихся там ссылках). Движение твердого тела представляется винтовым движением (рис. 7.3), которое складывается из поворота на угол ϕ вокруг оси $s(t)$ и последующего параллельного переноса $\sigma(t)s(t)$ вдоль этой оси. Осью винтового движения $s(t)$ является ось вращения для тензора $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$, а $\phi(t)$ — угол вращения для этого тензора. Составляющую поступательного движения $\sigma s(t)$ и радиус-вектор ρ , определяющий точку на винтовой оси,

²Неудивительно, что этот результат был известен еще Эйлеру. Он упоминает о нем во вступительных разделах к [52, 54].

³Вы, должно быть, уже заметили, что если выбрать начальную конфигурацию κ_0 совпадающей с κ_{t_0} , то $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$ и представления (7.4) и (7.5) будут идентичными.

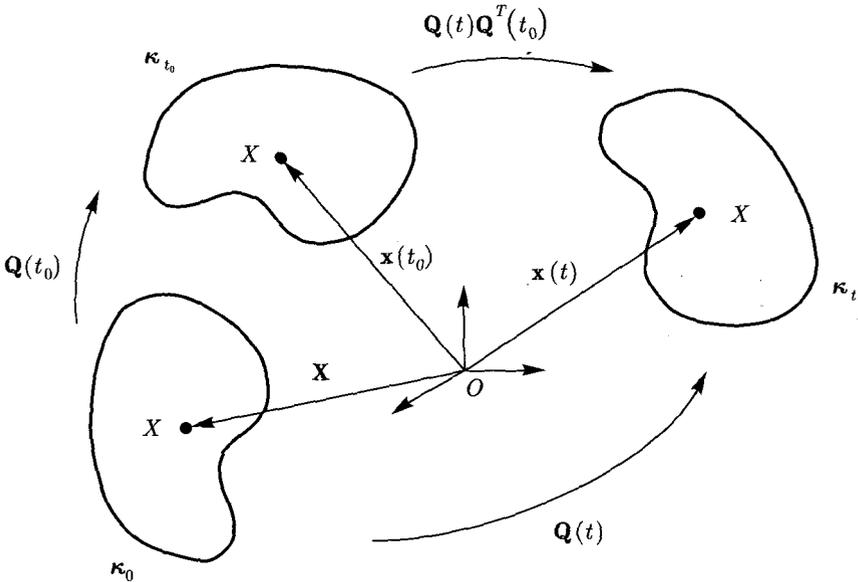


Рис. 7.2. Конфигурации κ_{t_0} и κ_t твердого тела. На рисунке также показана начальная конфигурация κ_0 и обозначена роль некоторых тензоров вращения

можно найти по трем составляющим вектора $\mathbf{z}(t)$ с помощью трех уравнений:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0))\boldsymbol{\rho}(t) + \sigma(t)\mathbf{s}(t) = \mathbf{z}(t). \quad (7.6)$$

Однако тензор $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0))$ не является обратимым⁴, поэтому вектор $\boldsymbol{\rho}(t)$ определяется неоднозначно. В разных книгах встречаются разные значения $\boldsymbol{\rho}$ (два из них показаны на рис. 7.3). Если в качестве $\boldsymbol{\rho}(t)$ взять вектор, перпендикулярный к \mathbf{s} , то мы получим следующие решения для $\sigma(t)$ и $\boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{z}_\perp(t) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\phi(t)}{2} \right) \mathbf{s}(t) \times \mathbf{z}(t) \right), \quad \sigma(t) = \mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{z}(t), \quad (7.7)$$

где

$$\mathbf{z}_\perp(t) = \mathbf{z}(t) - (\mathbf{z}(t) \cdot \mathbf{s}(t))\mathbf{s}(t).$$

⁴Есть несколько способов это доказать. Первый способ — отослать читателя к выводу (6.15). Второй способ — проанализировать эйлерово представление (6.8) тензора вращения и показать, что \mathbf{s} есть нулевой тензор $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0))$.

Убедитесь в справедливости выражений (7.7). Заметим, что в частном случае $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ вектор ρ не определен.

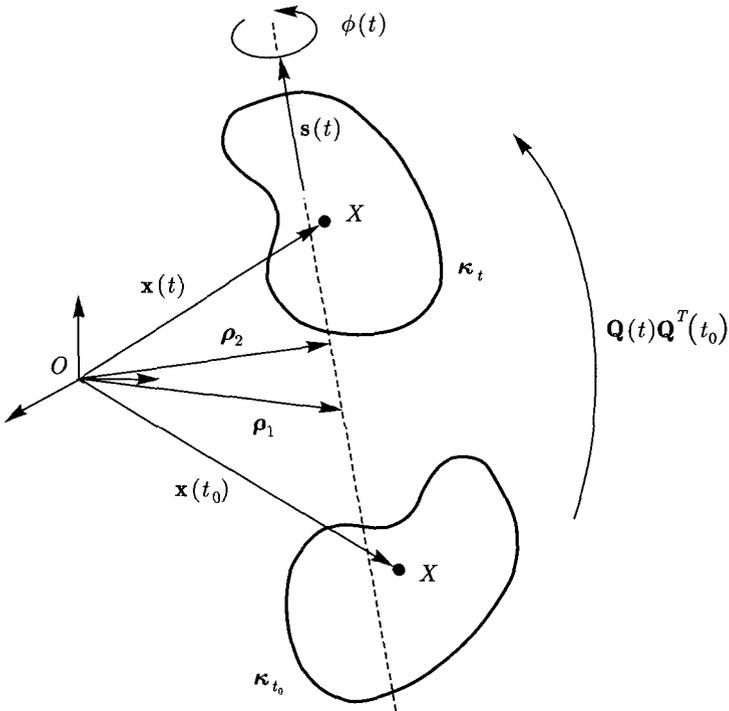


Рис. 7.3. Конфигурации κ_{t_0} и κ_t твердого тела, а также винтовая ось $s(t)$ и угол вращения $\phi(t)$. Твердое тело перемещается вдоль винтовой оси на величину σs и поворачивается вокруг оси $s(t)$ на угол ϕ . На рисунке показаны два возможных радиус-вектора $\rho(t)$: первый $\rho(t) = \rho_1 = \rho_1 \mathbf{E}_1 + \rho_2 \mathbf{E}_2$ соответствует точке пересечения винтовой оси с плоскостью $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, а второй $\rho(t) = \rho_2$ перпендикулярен винтовой оси, т. е. $\rho_2 \cdot s = 0$

7.3. Векторы угловой скорости и углового ускорения

Движение твердого тела описывается уравнением (7.4) или, что эквивалентно, уравнением (7.5). Поскольку \mathbf{Q} — тензор вращения, определим

тензор угловой скорости Ω и вектор угловой скорости ω^5 :

$$\Omega = \dot{Q}Q^T, \quad \omega = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{Q}Q^T].$$

Вектор ω есть вектор угловой скорости, а Ω — тензор угловой скорости твердого тела. Как мы знаем, тензор вращения Q можно задать по-разному, например, с помощью углов Эйлера или эйлерава представления. То же самое справедливо и для вектора угловой скорости, но сейчас мы не будем говорить, о каких представлениях идет речь.

Дифференцируя вектор угловой скорости, находим вектор углового ускорения твердого тела:

$$\alpha = \dot{\omega}.$$

Заметим, что

$$\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon[\ddot{Q}Q^T + \dot{Q}\dot{Q}^T] = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\Omega}],$$

где мы учли, что $\dot{\epsilon} = 0$.

По (7.2) можно рассчитывать векторы относительной скорости и относительного ускорения для любых двух точек X_1 и X_2 твердого тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = \\ &= \dot{Q}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \\ &= \dot{Q}Q^T Q(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \\ &= \Omega Q(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \\ &= \omega \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Еще раз дифференцируя и осуществляя ряд преобразований, получаем векторы относительного ускорения:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 &= \dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2 = \\ &= \dot{\omega} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \omega \times (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) = \\ &= \alpha \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \omega \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

В конечном варианте векторы относительной скорости и относительного ускорения записываются в виде функций от t , \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Кроме того, их можно представить функциями от t , \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 .

⁵Так как $\dot{Q}^T(t_0) = 0$, вектор ω также является вектором угловой скорости для тензора вращения $Q(t)Q^T(t_0)$. Векторы угловой скорости для представлений (7.4) и (7.5) одинаковы.

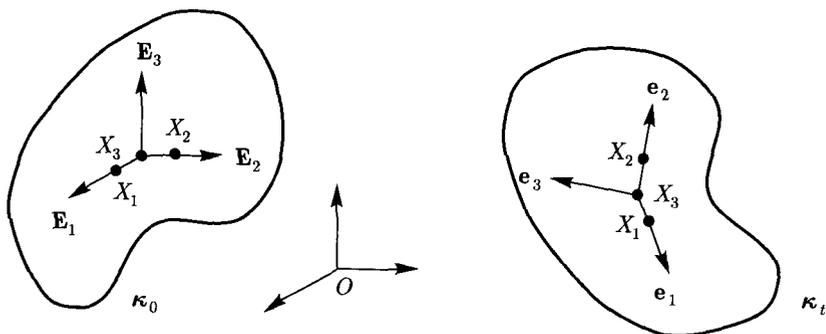


Рис. 7.4. Коротационный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ и неподвижный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ декартовой системы координат

7.4. Коротационный базис

При изучении динамики твердых тел удобно оперировать так называемым коротационным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ ⁶. В настоящем разделе дается определение этому базису и рассказывается о некоторых нюансах его использования. В своих рассуждениях, касающихся коротационного базиса, мы будем опираться на материалы Кейси [26], внося в них лишь незначительные изменения.

Известно, что движение твердого тела можно определить радиус-векторами трех материальных точек. На этом основана работа многих навигационных схем, и на этом же мы построим определение коротационного базиса. Начнем с того, что выберем на теле три материальные точки X_1, X_2, X_3 (рис. 7.4), такие чтобы ортонормированные векторы E_1 и E_2 исходили из X_3 и указывали на X_1 и X_2 соответственно:

$$E_1 \parallel X_1 - X_3, \quad E_2 \parallel X_2 - X_3.$$

Дополним правый базис декартовой системы координат вектором

$$E_3 = E_1 \times E_2.$$

Рассмотрим текущие положения трех материальных точек. Под действием тензора Q относительная ориентация двух векторов $x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$ остается прежней. Следовательно, с помощью (7.2) можно найти два ортонормированных вектора коротационного базиса, один из которых направлен от

⁶Этот базис часто называют базисом, связанной с телом, или встроенным базисом.

\mathbf{x}_3 в сторону \mathbf{x}_1 , а другой — от \mathbf{x}_3 в сторону \mathbf{x}_2 :

$$\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3.$$

Третий вектор равен $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. Выше говорилось, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется коротационным.

Совершенно очевидно, что

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Это выражение следует из (7.2) и наших предыдущих рассуждений, касающихся представлений тензоров вращения. Так как коротационный базис движется вместе с телом, воспользуемся полученными выше формулами для относительных скоростей и ускорений и придем к следующим выражениям:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad \ddot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i),$$

где $i = 1, 2, 3$.

Поскольку коротационный базис является базисом пространства \mathbb{E}^3 , любой вектор \mathbf{r} можно задать формулой

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i.$$

Если компоненты r_i постоянны, вектор \mathbf{r} называют коротационным вектором. Простейшими примерами коротационных векторов являются $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 . Производная по времени $\dot{\mathbf{r}}$ от \mathbf{r} равна

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \dot{\mathbf{e}}_i = \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ — коротационная производная (относительно \mathbf{Q}) вектора \mathbf{r} . Соответствующее выражение для $\ddot{\mathbf{r}}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \ddot{r}_i \mathbf{e}_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \ddot{r}_i \mathbf{e}_i + 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{\circ}{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Кориолисово ускорение $2\boldsymbol{\omega} \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}$ в выражении для \mathbf{a} обусловлено тем, что \mathbf{r} мы определили не через фиксированный базис. Обратите также внимание на то, что если \mathbf{r} — коротационный вектор, то $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = 0$ и, значит, кориолисово ускорение равно нулю.

7.5. Три различные оси вращения

Для твердого тела можно определить три различные оси вращения. К этому методу часто прибегают в механике и навигации. Вспомним, что движение твердого тела описывается представлениями (7.4) и (7.5). Первому из них соответствует тензор вращения $\mathbf{Q}(t)$ с осью вращения $\mathbf{q}(t)$ и углом вращения $\theta(t)$. Винтовая ось $\mathbf{s}(t)$ и угол $\phi(t)$ являются соответственно осью и углом вращения для тензора $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$. Кроме того, можно определить третью ось вращения, называемую мгновенной осью вращения \mathbf{i} . Эта ось задается единичным вектором, параллельным вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ ⁷:

$$\mathbf{i}(t) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|}.$$

Если не считать этого простого случая, в котором угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянна, ось \mathbf{i} не имеет своего угла вращения. Термин «мгновенная ось» объясняется тем, что для любого коротационного вектора $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Следовательно, при постоянном $\boldsymbol{\omega}$ вектор $\mathbf{r}(t)$ будет вращаться вокруг \mathbf{i} (рис. 7.5).

Наше определение мгновенной оси вращения идентично приведенному в классических работах по динамике твердого тела, например в работах Пуансо [172] и Пуассона [173, разделы 405–406]. Такое определение мгновенной оси, однако, не является универсальным. В литературе, посвященной кинематике анатомических суставов, мгновенной осью вращения часто называют ось \mathbf{s} , а не \mathbf{i} ⁸.

В общем случае оси \mathbf{q} , \mathbf{s} и \mathbf{i} не совпадают. Тем не менее по формуле (6.14) можно найти взаимосвязь между осями и двумя углами вращения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \|\boldsymbol{\omega}\|\mathbf{i} = \\ &= \dot{\phi}\mathbf{s} + \sin(\phi)\dot{\mathbf{s}} + (1 - \cos(\phi))\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \\ &= \dot{\theta}\mathbf{q} + \sin(\theta)\dot{\mathbf{q}} + (1 - \cos(\theta))\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

⁷Напомним, что векторы угловой скорости, соответствующие тензорам $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$, идентичны.

⁸Более подробно об этом вопросе читайте в работах Вольфринга [232] и Вольфринга и др. [233].

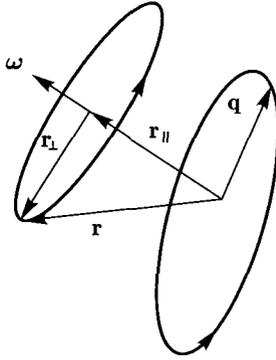


Рис. 7.5. Пример вращения $\mathbf{r}(t)$ при движении твердого тела с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$; \mathbf{r} — коротационный вектор. На рисунке видно, что $\mathbf{r}_\perp \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, а $\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r}$. Также показана эволюция оси вращения $\mathbf{q}(t)$ для $\mathbf{Q}(t)$

В качестве упражнения попробуйте связать между собой величины \mathbf{q} , \mathbf{s} , ϕ и θ по формуле Родрига (6.49).

Из курса решения задач на динамику твердого тела, в которых встречаются тензоры вращения, известны численные методы расчета \mathbf{s} , \mathbf{q} и \mathbf{i} . Среди задач вы легко найдете примеры, в которых эти оси не совпадают. Однако также представляют интерес задачи, в которых некоторые из этих осей совпадают. Рассмотрим два таких примера. Пусть тензор вращения описывает равномерное вращение вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол ν , где $\dot{\nu} = \dot{\nu}_0$ постоянно: $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{L}(\dot{\nu}_0 t, \mathbf{E}_3)$. Путем небольших расчетов приходим к заключению, что $\mathbf{s}(t) = \mathbf{i}(t) = \mathbf{q}(t) = \mathbf{E}_3$ и $\boldsymbol{\omega} = \dot{\nu}_0 \mathbf{E}_3$.

Теперь рассмотрим пример, в котором \mathbf{Q} описывает вращение с постоянной скоростью вокруг оси вращения⁹, меняющейся со временем:

$$\mathbf{Q}(t) = 2\mathbf{q}(t) \otimes \mathbf{q}(t) - \mathbf{I}, \quad (7.9)$$

где ось вращения для тензора $\mathbf{Q}(t)$ равна

$$\mathbf{q}(t) = \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) \mathbf{E}_1 + \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \mathbf{E}_2, \quad \nu(t) = \dot{\nu}_0(t - t_0) + \nu_0.$$

Значения $\dot{\nu}_0$ и ν_0 постоянны. Обратите внимание, что с учетом (6.14) мы получаем равенство $\boldsymbol{\omega} = \dot{\nu}_0 \mathbf{E}_3$ и что угол вращения θ для рассматриваемого

⁹Пример взят из [161]. В этой же работе вы найдете другие примеры вращений с постоянными векторами угловой скорости и несовпадающими осями \mathbf{s} и \mathbf{q} .

тензора вращения равен π . Путем стандартных вычислений также находим:

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0) = \mathbf{L}(-\nu(t) + \nu_0, \mathbf{e}_3).$$

Таким образом, тензор вращения $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t_0)$ задает поворот вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол $\nu(t) - \nu_0$, откуда следует, что $s \neq q$. И действительно, тензор (7.9) служит простейшим примером вращения с постоянной угловой скоростью ω , при котором ось q не параллельна вектору ω . На рис. 7.6 показано, как зависят от времени векторы $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}\mathbf{E}_i$, а также оси вращения $\theta(t)$ и $\nu(t)$.

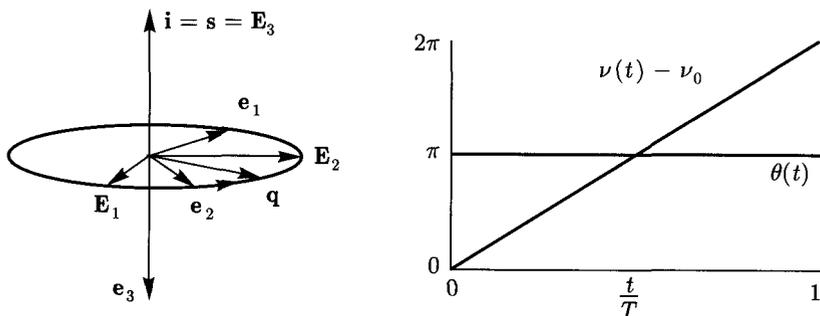


Рис. 7.6. Графики положений концов коротационных векторов $\mathbf{e}_i(t)$ и осей вращения s, q и \mathbf{i} для тензора вращения (7.9). Также изображен график функции $\nu(t)$, в котором $T = \frac{2\pi}{\nu_0}$

7.6. Центр масс и количество движения

Для удобства (и по традиции) в твердом теле задают специальную точку, называемую центром масс $\bar{\mathbf{X}}$. С помощью вектора скорости $\bar{\mathbf{v}}$ этой точки в текущей конфигурации мы получим очень полезное выражение для количества движения \mathbf{G} твердого тела.

Центр масс

Радиус-векторы центра масс тела в начальной и текущей конфигурациях равны

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\int_{\mathcal{R}_0} \mathbf{X} \rho_0 dV}{\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 dV}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{x} \rho dv}{\int_{\mathcal{R}} \rho dv}, \quad (7.10)$$

где $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ и $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ — массовые плотности в конфигурациях κ_0 и κ_t соответственно. \mathcal{R}_0 и \mathcal{R} — области пространства \mathbb{E}^3 , занимаемые телом в конфигурациях κ_0 и κ_t соответственно. Если тело однородно, то значение ρ_0 постоянно и не зависит от \mathbf{X} .

Согласно принципу сохранения массы получаем:

$$dm = \rho_0 dV = \rho dv.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$m = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 dV = \int_{\mathcal{R}} \rho dv.$$

Из (7.10) немедленно следуют равенства

$$m\bar{\mathbf{X}} = \int_{\mathcal{R}_0} \mathbf{X}\rho_0 dV, \quad m\bar{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{x}\rho dv.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{0} = \int_{\mathcal{R}_0} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})\rho_0 dV, \quad \mathbf{0} = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\rho dv.$$

Эти тождества играют ключевую роль в построении выражений для ряда характеристик твердого тела.

Особенностью твердого тела является то, что его центр масс обладает свойствами некоторой материальной точки, которую мы обозначили через $\bar{\mathbf{X}}$. Докажем это утверждение, осуществив, согласно работе [26], следующие преобразования:

$$\begin{aligned} m\bar{\mathbf{x}} &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{x}\rho dv = \\ &= \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{d})\rho dv = \\ &= \int_{\mathcal{R}_0} (\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{d})\rho_0 dV = \\ &= \mathbf{Q} \left(\int_{\mathcal{R}_0} \mathbf{X}\rho_0 dV \right) + \left(\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 dV \right) \mathbf{d} = \\ &= m\mathbf{Q}\bar{\mathbf{X}} + m\mathbf{d}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{d}. \quad (7.11)$$

Из (7.11) и (7.4) следует, что центр масс твердого тела обладает теми же свойствами, что и материальная точка твердого тела. Центр масс многих тел, таких как твердый однородный шар, соответствует геометрическому центру тела, тогда как для других тел, таких как твердое круговое кольцо, центр масс не соответствует материальной точке.

При решении многих задач динамики твердого тела удобно оперировать системой отсчета с началом в центре масс $\bar{\mathbf{X}}$ и с коротационным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Такую систему отсчета называют вращающейся. Далее мы будем часто выражать в этой системе отсчета относительные радиус-векторы материальных точек $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$.

Количество движения

По определению, количество движения \mathbf{G} твердого тела равно

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \rho dv.$$

То есть количество движения твердого тела равно сумме количеств движения его составных частей. Используя понятие центра масс, приходим к другому выражению для \mathbf{G} , которое строится на определениях величин m и $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}},$$

где $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}$ — вектор скорости центра масс. Напомним, что аналогичный результат справедлив и для конечной системы материальных точек.

Относительные радиус-векторы

Зададим для материальной точки X твердого тела относительные радиус-векторы $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}.$$

На рис. 7.1 показаны примеры этих векторов. С учетом (7.2) и (7.11) найдем

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{Q}\mathbf{\Pi}. \quad (7.12)$$

В терминах векторов коротационного базиса получаем

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{E}_i.$$

Следовательно, относительные радиус-векторы равны

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{i=1}^3 \Pi_i \mathbf{E}_i, \quad \boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^3 \Pi_i \mathbf{e}_i. \quad (7.13)$$

Кроме того, коротационная производная (относительно \mathbf{Q}) от $\boldsymbol{\pi}$ равна нулю: $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}$. Значит, $\boldsymbol{\pi}$ — коротационный вектор.

7.7. Кинетические моменты

Кинетические моменты наиболее сильно отличают твердое тело от материальной точки¹⁰. Особое значение имеет, в частности, кинетический момент относительно двух точек: центра масс \bar{X} и неподвижной точки O . Для удобства предположим, что неподвижная точка O находится в начале координат (см. рис. 7.1).

По определению, кинетические моменты твердого тела относительно его центра масс \bar{X} (\mathbf{H}), неподвижной точки O (\mathbf{H}_O) и точки A (\mathbf{H}_A) равны

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{v} \rho dv, \\ \mathbf{H}_O &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dv, \\ \mathbf{H}_A &= \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{v} \rho dv. \end{aligned}$$

Радиус-векторы, фигурирующие в этих выражениях, имеют начало в неподвижной точке O , а \mathbf{x}_A есть радиус-вектор точки A . Заметим, что вектор скорости здесь является вектором абсолютной скорости.

Между рассматриваемыми кинетическими моментами существует взаимосвязь, которая выражается простыми, но очень важными формулами. Преобразуем выражение для \mathbf{H}_O и придем к первой формуле:

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dv =$$

¹⁰Видимо, автор имеет в виду случай, когда радиус-векторы материальных точек тела имеют начала в его центре масс. Если при этом тело состоит из одной материальной точки, то его кинетический момент тождественно равен нулю. — *Прим. ред.*

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\pi} + \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{v} \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{v} \rho dv + \int_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} \rho dv = \\
 &= \mathbf{H} + \bar{\mathbf{x}} \times \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \rho dv.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{G}. \quad (7.14)$$

Из этой формулы следует, что кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки O равен сумме кинетического момента твердого тела относительно его центра масс и кинетического момента центра масс относительно точки O . Аналогично процедуре построения (7.14) получаем другие две формулы:

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{H} + (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{G}, \quad \mathbf{H}_O = \mathbf{H}_A + \mathbf{x}_A \times \mathbf{G}. \quad (7.15)$$

У этих выражений много общего с формулой (7.14).

7.8. Тензоры Эйлера и тензоры инерции

Прежде чем применять к твердому телу законы равновесия, рассмотрим дальнейшие построения для кинетического момента \mathbf{H} с использованием тензоров Эйлера \mathbf{E}_0 и \mathbf{E} и тензоров инерции \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} .

Тензоры Эйлера

Тензоры Эйлера (относительно центра масс твердого тела) определим следующим образом:

$$\mathbf{E}_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi} \rho_0 dV, \quad \mathbf{E} = \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi} \rho dv.$$

Обратите внимание, что тензоры \mathbf{E} и \mathbf{E}_0 являются симметричными.

Из закона сохранения массы (уравнение (7.12)) и тождества $(\mathbf{A}\mathbf{a}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{B}^T$ легко находим

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{E}_0\mathbf{Q}^T.$$

Кроме того,

$$(\mathbf{E}\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{E}_0\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_k.$$

Это значит, что тензор \mathbf{E} равен

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 E_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

где $E_{ik} = (\mathbf{E}_0\mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{E}_i$ — постоянные компоненты тензора \mathbf{E}_0 . Иначе говоря, несмотря на то, что тензор \mathbf{E} является функцией времени, его компоненты относительно коротационного базиса постоянны. Более того, они идентичны компонентам постоянного тензора Эйлера \mathbf{E}_0 .

Тензоры инерции

Определим с помощью тензоров Эйлера тензоры инерции \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}_0 = \text{tr} \mathbf{E}_0 \mathbf{I} - \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{J} = \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} - \mathbf{E}.$$

Преобразуем эти выражения с учетом определений тензоров Эйлера и тождества $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\mathbf{J}_0 = \int_{\mathcal{R}_0} ((\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi}) \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi}) \rho_0 dV, \quad \mathbf{J} = \int_{\mathcal{R}} ((\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} - \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi}) \rho dv. \quad (7.16)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q} \mathbf{J}_0 \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{J}_0^T = \mathbf{J}_0, \quad \mathbf{J}^T = \mathbf{J}.$$

Первое из этих равенств означает следующее:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

где $J_{ik} = (\mathbf{J}_0\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_k$ — постоянные компоненты тензора \mathbf{J}_0 .¹¹ Также отметим симметричность тензоров инерции, т. е. $J_{ki} = J_{ik}$.

Другие соотношения

Если обратить соотношения, связывающие тензоры Эйлера и инерции, получим ряд интересных результатов. Воспользуемся определением тензора инерции через тензор Эйлера и тем, что $\text{tr}(\mathbf{I}) = 3$, и найдем:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}_0) \mathbf{I} - \mathbf{J}_0, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}) \mathbf{I} - \mathbf{J}. \quad (7.17)$$

¹¹ Неудивительно, что полученные выводы аналогичны тем, которые справедливы для тензоров Эйлера \mathbf{E} и \mathbf{E}_0 .

Эти равенства полезны при расчете тензоров Эйлера по таблицам значений тензора инерции, которые встречаются во многих учебниках по динамике.

Подставим (7.13) в (7.16) и увидим, что компоненты тензора \mathbf{J}_0 в базисе $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ являются интегралами по объему, содержащими компоненты вектора $\mathbf{\Pi}$ во второй степени. Например,

$$\begin{aligned} J_{011} &= (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_1 = \int_{\mathcal{R}_0} (y^2 + z^2) \rho_0 dV, \\ J_{012} &= (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1 = - \int_{\mathcal{R}_0} xy \rho_0 dV, \\ J_{013} &= (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{E}_1 = - \int_{\mathcal{R}_0} xz \rho_0 dV, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$x = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{E}_1, \quad y = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{E}_2, \quad z = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{E}_3.$$

Аналогичные действия с компонентами тензора \mathbf{E}_0 дают:

$$\begin{aligned} E_{011} &= (\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_1 = \int_{\mathcal{R}_0} x^2 \rho_0 dV, \\ E_{012} &= (\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1 = \int_{\mathcal{R}_0} xy \rho_0 dV, \\ E_{013} &= (\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{E}_1 = \int_{\mathcal{R}_0} xz \rho_0 dV. \end{aligned}$$

Обратите внимание на простое соотношение между недиагональными компонентами тензоров \mathbf{E}_0 и \mathbf{J}_0 . Компоненты тензоров \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} находятся по таблицам значений тензора инерции, которые есть во многих учебниках.

Оба тензора инерции \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} являются симметричными. Можно доказать, что они положительно определенные. Выберем систему векторов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, таких чтобы они являлись собственными векторами тензора \mathbf{J}_0 . Тогда получим

$$\mathbf{J}_0 = \lambda_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \lambda_3 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3,$$

где λ_i — главные моменты инерции. Поскольку $\mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{J}_0\mathbf{Q}^T$ и $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{E}_i$, имеем:

$$\mathbf{J} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Оси \mathbf{e}_i называют главными осями инерции твердого тела. В силу определения компонентов J_{0ik} тензора инерции главные моменты должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\lambda_1 + \lambda_2 > \lambda_3, \quad \lambda_2 + \lambda_3 > \lambda_1, \quad \lambda_3 + \lambda_1 > \lambda_2. \quad (7.18')$$

К этим неравенствам мы легко придем, если будем исходить из определений (7.18). Неравенства оказываются весьма полезными при выборе показательных примеров тензоров инерции. Например, из (7.18') следует, что твердое тело с $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$ физически нереализуемо.

Можно доказать, что собственные векторы тензора \mathbf{J}_0 являются собственными векторами тензора \mathbf{E}_0 . Тогда если взять векторы $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ в качестве собственных векторов тензора \mathbf{J}_0 , то

$$\mathbf{E}_0 = e_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + e_2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + e_3 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Используя первое тождество из (7.17), можно связать константы e_i с главными моментами инерции:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1), & e_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Так как $\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{E}_0\mathbf{Q}^T$ и $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{E}_i$, имеем:

$$\mathbf{E} = e_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + e_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + e_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Заметим, что главные оси \mathbf{e}_j , соответствующие максимальному значению λ_i , соответствуют минимальному значению e_i .

Несколько примеров

Часто при изучении спутников их удобно моделировать как системы связанных тел, имеющих гантелевидную форму. В этих случаях интегралы в определении тензоров Эйлера и инерции сводятся к суммированию по дискретному числу материальных точек. Пример изображен на рис. 7.7.

Для данного тела легко рассчитать \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{E}_0 = \sum_{k=1}^3 2m_k L_k^2 \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{E}_k.$$

Следовательно, тензор инерции равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0 = & 2(m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + 2(m_1 L_1^2 + m_3 L_3^2) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \\ & + 2(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Напишите самостоятельно выражения для \mathbf{E} и \mathbf{J} .

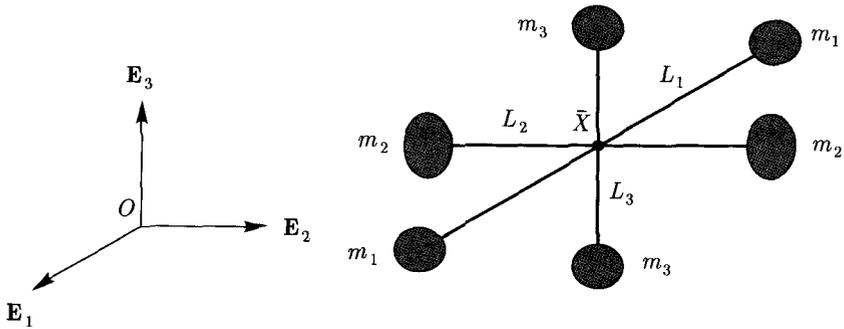


Рис. 7.7. Начальная конфигурация гантелевидного спутника, состоящая из шести материальных точек, соединенных с центром тремя невесомыми жесткими стержнями, длины которых равны $2L_1, 2L_2, 2L_3$

Простейший вид имеет тензор инерции однородной сферы радиуса R или однородного куба с ребром a :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 = \frac{2mR^2}{5} \mathbf{I}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 = \frac{ma^2}{6} \mathbf{I}$$

соответственно. Для этих тел *любая* тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов задает главные оси.

Следующий класс тел — это тела, имеющие ось симметрии. К ним относится, например, однородный цилиндрический стержень с длиной L и радиусом R . Момент тензора инерции для такого стержня равен:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{mR^2}{2} \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3),$$

где \mathbf{E}_3 — ось симметрии цилиндрического стержня в начальной конфигурации.

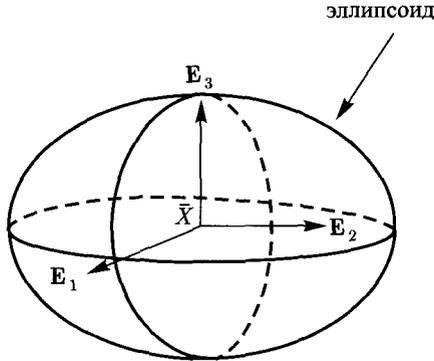


Рис. 7.8. Эллипсоид массой m

Большинство тел, однако, не имеет оси симметрии. Рассмотрим однородный эллипсоид, изображенный на рис. 7.8. Уравнение поверхности эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тензор инерции эллипсоида равен

$$\mathbf{J}_0 = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{m}{5}(a^2 + c^2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{m}{5}(a^2 + b^2)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Напишите самостоятельно выражение для тензора Эйлера \mathbf{E}_0 эллипсоида¹².

Подчеркнем, что во всех рассмотренных выше примерах мы пользовались следующим свойством: любое тело имеет три главные оси. Если записать тензоры инерции и Эйлера относительно главных осей, то мы получим их простейшие представления.

7.9. Кинетический момент и тензор инерции

Получим формулу $\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, которая, возможно, является наиболее важной в динамике твердого тела. В частности, она позволяет рассчитать кинетический момент \mathbf{H} конкретного твердого тела, если известно \mathbf{J}_0 .

¹²Подсказка: см. (7.19).

Возьмем выражение для кинетического момента \mathbf{H} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{v} \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{v} \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times \bar{\mathbf{v}} \rho dv + \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv.
 \end{aligned}$$

Поскольку \bar{X} — центр масс, а его вектор скорости $\bar{\mathbf{v}}$ неизменен для всей области интегрирования, $\bar{\mathbf{v}}$ можно вынести за знак интеграла:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times \bar{\mathbf{v}} \rho dv + \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \rho dv \times \bar{\mathbf{v}} + \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv = \\
 &= \mathbf{0} \times \bar{\mathbf{v}} + \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv.
 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что на предпоследнем шаге мы воспользовались тождеством $\int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \rho dv = \mathbf{0}$. В конечном итоге имеем:

$$\mathbf{H} = \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv = \int_{\mathcal{R}} ((\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\pi}) \rho dv. \quad (7.20)$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. Теперь, используя определение тензора инерции \mathbf{J} , очевидным образом приходим к формуле

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Ранее говорилось, что она относится к важнейшим результатам в динамике твердых тел.

Заметим, что равенство $\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ означает наличие линейного преобразования между угловой скоростью и кинетическим моментом. Кроме того, если вектор $\boldsymbol{\omega}$ не является собственным вектором тензора \mathbf{J} , векторы \mathbf{H} и $\boldsymbol{\omega}$ не параллельны.

7.10. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия твердого тела имеет очень удобное представление, впервые полученное современником Эйлера Иоганном Кенигом (1712–1757) и называемое разложением Кенига:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (7.21)$$

Далее приводится его вывод.

Кинетическая энергия T твердого тела по определению равна

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dv.$$

Упростим эту формулу, выразив вектор скорости \mathbf{v} в виде

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}.$$

Подставляя это выражение в формулу для T , получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \rho dv + \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \rho dv + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv. \end{aligned}$$

С другой стороны, справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \rho dv &= \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \int_{\mathcal{R}} \rho dv = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \\ \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \rho dv &= \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \rho dv \right) \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}) \rho dv &= \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \rho dv = \\
 &= \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\left(\int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} - \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi} \rho dv \right) \boldsymbol{\omega} \right) = \\
 &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}).
 \end{aligned}$$

Подставляя их в предыдущее выражение для T , приходим к искомому разложению:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Оно называется разложением Кенига для кинетической энергии твердого тела и означает, что кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии его центра масс и кинетической энергии вращения $T_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})$ твердого тела.

О кинетической энергии вращения

Из предыдущих построений, касающихся разложения Кенига, следует, что $2T_{\text{вр.}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$. Это выражение используется в большинстве учебников по динамике твердого тела. Существует, однако, альтернативное представление кинетической энергии, в котором используются \mathbf{J}_0 ¹³.

Рассмотрим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}.$$

Если $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i$, то

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{E}_i.$$

Кроме того, можно доказать, что $\boldsymbol{\omega}_0$ есть аксиальный вектор тензора $\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}$:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} [\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}] = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} [\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q}].$$

В качестве упражнения получите представление для $\boldsymbol{\omega}_0$ в системе 3-2-1 или 3-1-3 углов Эйлера.

¹³См., например, [28] и [138, глава 15].

Воспользуемся соотношением между \mathbf{J} и \mathbf{J}_0 и запишем:

$$\begin{aligned} 2T_{\text{вр.}} &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \\ &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{J}\mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}_0) = \\ &= \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{J} \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_0) = \\ &= \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0). \end{aligned}$$

Конечный результат имеет вид:

$$T_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0.$$

Преимущество представления, содержащего $\boldsymbol{\omega}_0$, в том, что \mathbf{J}_0 — константа. Следовательно, когда мы берем производные от $T_{\text{вр.}}$ по параметрам, входящим в \mathbf{Q} , достаточно найти производные от $\boldsymbol{\omega}_0$.

7.11. Заключение

Мы рассмотрели почти все кинематические величины¹⁴, необходимые для описания движения твердого тела. В общем случае точные представления для этих величин зависят от решаемой задачи. Так, например, при решении задачи о вращающемся волчке мы будем использовать систему углов Эйлера, которая отличается от системы, используемой для решения задачи о движении спутника. Приведем еще один пример. Описывая динамику катящейся сферы, мы будем выражать вектор угловой скорости относительно неподвижного базиса ($\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{E}_i$), тогда как в задаче о движении спутника — относительно базиса Эйлера. Конкретный выбор определяется практикой и не всегда очевиден. Надеемся, что задачи, которые приводятся в конце каждой главы, а также рассматриваются внутри самих глав, помогут приобрести необходимый опыт. Заметим, что мы пока не рассмотрели связи, накладываемые на движение твердых тел. Это вопрос следующей главы.

Задачи

7.1. Напомним, что тензор вращения \mathbf{Q} для твердого тела равен:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 Q_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 Q_{ik} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k.$$

¹⁴Здесь, как и ранее, следовало бы использовать термин «динамические величины», но мы сохранили терминологию автора. — *Прим. ред.*

Коротационные производные от вектора \mathbf{a} и тензора \mathbf{A} относительно тензора вращения \mathbf{Q} по определению равны

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$ и $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \epsilon [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T]$.

(а) Докажите, что если $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$ и $A_{ik} = (\mathbf{A} \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i$, то

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \mathbf{e}_i, \quad \overset{\circ}{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k.$$

Каков физический смысл полученных результатов?

- (б) Вектор \mathbf{z} называется коротационным тогда, когда $\mathbf{z} = \mathbf{Q} \mathbf{Z}$, где \mathbf{Z} — константа. Приведите примеры таких векторов из динамики твердого тела и докажите, что коротационная производная от коротационного вектора относительно тензора \mathbf{Q} равна $\mathbf{0}$.
- (с) Дайте определение коротационного тензора и приведите для него два примера из динамики твердого тела.
- (д) Получите следующие тождества:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^T \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}.$$

- (е) Пусть твердое тело движется так, что коротационная производная от $\boldsymbol{\omega}$ равна $\mathbf{0}$. Чему равны угловое ускорение и тензор вращения для твердого тела¹⁵?

7.2. На рис. 7.9 показано, как сдвинуть груз с помощью роботизированной руки. Робот состоит из:

- 1) ведущего вала, поворачивающегося вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол ψ ,
- 2) осевого вала A , поворачивающегося вокруг оси \mathbf{g}_2 на угол θ относительно ведущего вала,
- 3) руки, поворачивающейся вокруг оси \mathbf{g}_3 на угол ϕ относительно вала A .

Груз жестко прикреплен к роботизированной руке. В задаче предполагается, что ведущий вал, вал A , рука и груз являются жесткими.

¹⁵Решение этой задачи есть в работе О'Рейли и Пайена [161].

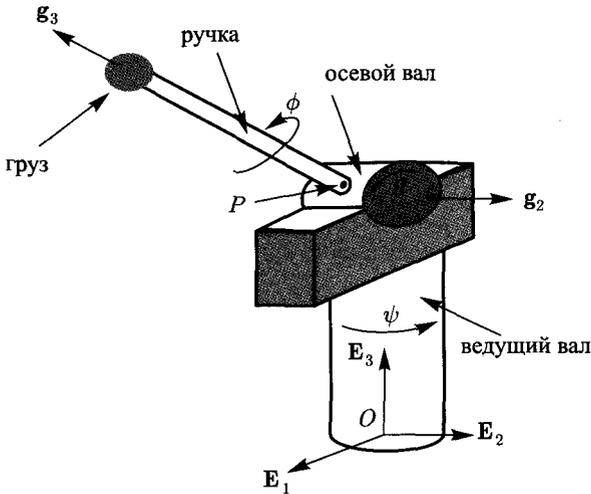


Рис. 7.9. Робот, состоящий из руки, ведущего вала и осевого вала. Двигатели, приводящие робота в движение, не показаны

- (а) Чему равны векторы угловой скорости ведущего вала, вала A , руки и груза?
- (б) Какая система углов Эйлера используется для параметризации тензора вращения Q груза?
- (с) Если радиус-вектор \mathbf{r} точки X на грузе равен

$$\mathbf{r} = H\mathbf{E}_3 + L\mathbf{g}_3,$$

то чему равен вектор скорости \mathbf{v} точки X ?

- (d) Пусть за интервал времени $t_1 - t_0$ точка X возвращается в свое исходное положение:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_0).$$

Докажите, что за этот интервал времени груз повернется на угол $\phi(t_1) - \phi(t_0)$ вокруг оси $\mathbf{g}_3(t_0)$. Иначе говоря, докажите, что тензор вращения $Q(t_1)Q^T(t_0)$ задает поворот на угол $\phi(t_1) - \phi(t_0)$ вокруг оси $\mathbf{g}_3(t_0)$.

7.3. Рассмотрите круговой диск, изображенный на рис. (7.10). Движение диска определяется радиус-вектором \mathbf{u} произвольной материальной точки Y на диске и тензором вращения Q твердого диска.

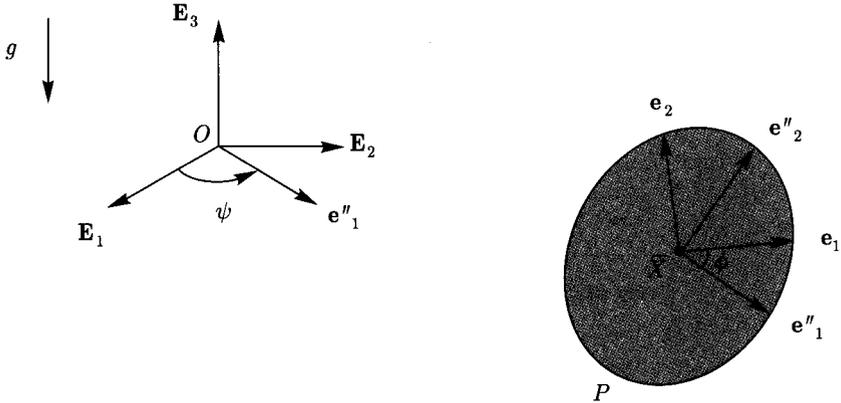


Рис. 7.10. Текущая конфигурация кругового диска, движущегося так, что одна его точка соприкасается с неподвижной горизонтальной плоскостью

- (а) Исходя из того, что движение произвольных точек X и Y на диске описывается уравнениями

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{Y} + \mathbf{d},$$

докажите, что вектор относительной скорости и вектор относительного ускорения для этих точек равны

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{y}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})). \end{aligned}$$

- (б) Для параметризации тензора вращения диска используется система 3-1-3 углов Эйлера. С помощью рис. 7.10 опишите начальную конфигурацию диска. При каких положениях диска в его текущей конфигурации для системы 3-1-3 углов Эйлера возникают сингулярности?
- (в) На диск помещается датчик, ориентированный вдоль оси \mathbf{e}_3 так, что он измеряет величину $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3 = \omega_3(t)$. Докажите, что в общем случае справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega_3(t) dt \neq \phi(t_1) - \phi(t_0). \quad (7.22)$$

Как с физической точки зрения объяснить ситуацию, при которой интеграл от $\omega_3(t)$ действительно равен углу ϕ ?¹⁶

7.4. Пусть тензоры инерции твердого тела с массой m равны

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{J}_0\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{J}_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \left((\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi})\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi} \right) \rho_0 dV.$$

- (a) Почему тензоры \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} являются симметричными?
 (b) Докажите, что $\mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_k) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{J} \mathbf{e}_k)$, где $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$.
 (c) Докажите, что тензор \mathbf{J} равен

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad (7.23)$$

где λ_i — главные значения тензора \mathbf{J}_0 , а $\mathbf{E}_i = \mathbf{Q}^T \mathbf{e}_i$ — главные направления тензора \mathbf{J}_0 .

- (d) Получите следующие тождества:

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J} - \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}), \quad \overline{\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} = 2\dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Как можно упростить эти формулы при условии, что $\mathbf{J}_0 = \mu\mathbf{I}$, где μ — постоянная? Обратите внимание, что для первого из трех тождеств ответ сводится к доказательству того, что коротационная производная от \mathbf{J} относительно тензора \mathbf{Q} равна нулю, т. е. $\overset{\circ}{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$.

- (e) Пусть тензор \mathbf{J} равен

$$\mathbf{J} = \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^3 J_{pn} \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{E}_n.$$

Исходя из представления (7.23), докажите, что

$$J_{pn} = \sum_{i=1}^3 Q_{pi} \lambda_i Q_{ni},$$

где $Q_{pi} = (\mathbf{Q}\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_p$. Почему компоненты J_{pn} тензора \mathbf{J} не постоянны?

¹⁶О применении (7.22) в навигации мотоциклов читайте в работе Коапелена и др. [39].

7.5. Напомним, что с тензором инерции непосредственно связан другой тензор — тензор Эйлера:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{E}_0\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{E}_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi} \rho_0 dV.$$

(a) Докажите, что

$$\mathbf{J}_0 = \text{tr}(\mathbf{E}_0)\mathbf{I} - \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{J} = \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} - \mathbf{E}.$$

(b) Убедитесь, что $\mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{E}_0\mathbf{E}_k) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{E}\mathbf{e}_k)$, где $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$.

(c) Получите следующие результаты:

$$\overset{\circ}{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{E} - \mathbf{E}\boldsymbol{\Omega},$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{E}}$ — коротационная производная от \mathbf{E} относительно тензора \mathbf{Q} .

(d) Чему равны тензоры Эйлера для сферы массой m и радиусом R , а также для цилиндра массой m , радиусом R и длиной L ? Возможно, вы сочтете удобным использовать соотношения вида $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}_0)\mathbf{I} - \mathbf{J}_0$, которые обсуждались в разделе 7.8.

7.6. Напомним, что кинетический момент \mathbf{H} и кинетическая энергия вращения $T_{\text{вр}}$ для твердого тела равны

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega},$$

где \mathbf{J} — момент тензора инерции для твердого тела относительно его центра масс. Если взять в качестве $\{\mathbf{E}_i\}$ главные направления тензора \mathbf{J}_0 , то получим

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{J}_0\mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

где $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$.

(a) Параметризируйте тензор \mathbf{Q} в системе 3-2-3 углов Эйлера¹⁷ и докажите, что

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\phi))\mathbf{e}_1 +$$

¹⁷Эта система углов Эйлера рассматривается в задаче 6.2. Обращаем, в частности, ваше внимание на формулу (6.44) из задачи 6.2(g).

$$\begin{aligned}
 &+ (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \sin(\theta)) \mathbf{e}_2 + \\
 &+ (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi}) \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

- (b) Пользуясь системой 3-2-3 углов Эйлера, получите выражения для \mathbf{H} и $T_{\text{вр}}$ как функции углов Эйлера и их производных по времени.

7.7. Напомним, что кинетические моменты твердого тела относительно его центра масс и точки A по определению равны:

$$\mathbf{H} = \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{v} \rho dv, \quad \mathbf{H}_A = \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\pi}_A \times \mathbf{v} \rho dv, \quad (7.24)$$

где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\pi}_A = \mathbf{x} - \mathbf{x}_A$, \mathbf{x}_A — радиус-вектор точки A , а $\bar{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор центра масс.

- (a) Исходя из второй формулы в (7.24) и применяя первую формулу из (7.24), докажите, что

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{H} + (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{G},$$

где \mathbf{G} — количество движения твердого тела.

- (b) Пусть A — точка твердого тела. Докажите, что

$$\boldsymbol{\pi}_A = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Pi}_A,$$

где $\boldsymbol{\Pi}_A = \mathbf{X} - \mathbf{X}_A$, \mathbf{X}_A — радиус-вектор точки A в начальной конфигурации. Кроме того, докажите, что если $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A).$$

- (c) Пусть A — точка твердого тела, а $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Докажите, что

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{J}^A \boldsymbol{\omega},$$

где \mathbf{J}^A — тензор инерции твердого тела относительно точки A , равный

$$\mathbf{J}^A = \int_{\mathcal{R}} \left((\boldsymbol{\pi}_A \cdot \boldsymbol{\pi}_A) \mathbf{I} - \boldsymbol{\pi}_A \otimes \boldsymbol{\pi}_A \right) \rho dv.$$

Проверьте, что выполняется равенство

$$\mathbf{J}^A = Q\mathbf{J}_0^A Q^T,$$

где

$$\mathbf{J}_0^A = \int_{\mathcal{R}_0} ((\boldsymbol{\Pi}_A \cdot \boldsymbol{\Pi}_A)\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_A \otimes \boldsymbol{\Pi}_A) \rho_0 dV.$$

- (д) На основе полученных выше результатов докажите теорему об изменении момента инерции при переносе оси¹⁸:

$$\mathbf{J}_0^A = \mathbf{J}_0 + m((\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_A) \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_A)\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_A) \otimes (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_A)). \quad (7.25)$$

Из этой формулы понятно, как получить теорему, связывающую два тензора Эйлера при параллельном переносе оси.

- (е) Пусть в качестве твердого тела выступает цилиндр круглого сечения с массой m , длиной L и радиусом основания R . Для него справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{0}, & \mathbf{X}_A &= -x\mathbf{E}_1 - z\mathbf{E}_3, \\ \mathbf{J}_0 &= \frac{mL^2}{12}(\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) + \frac{mR^2}{4}(\mathbf{I} + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3). \end{aligned}$$

Чему в этом случае равен \mathbf{J}_0^A ?

7.8. Пусть твердое тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда с массой m и сторонами a, b, c (рис. 7.11). Тензор инерции этого тела относительно главных осей $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$ равен

$$\mathbf{J}_O = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad \lambda_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad \lambda_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

Правая система базисных векторов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ ориентирована в пространстве так, что вектор \mathbf{E}_3 направлен по диагонали параллелепипеда. Это значит, что вектор \mathbf{E}_3 параллелен отрезку, соединяющему $\bar{\mathbf{X}}$ с точкой P :

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a\mathbf{A}_1 - b\mathbf{A}_2 + c\mathbf{A}_3).$$

¹⁸Данная теорема в формулировке (7.25) встречается в работе Фокса [65].

Кроме того, имеем:

$$\mathbf{E}_1 = \cos(\alpha)\mathbf{A}_1 - \sin(\alpha)\mathbf{A}_3,$$

где

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right).$$

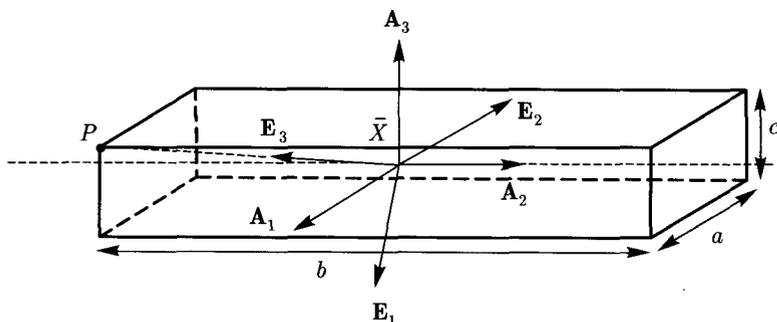


Рис. 7.11. Схематическое изображение параллелепипеда

- (а) Рассчитайте \mathbf{E}_2 и докажите, что преобразование, осуществляющее переход от базиса $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$ к базису $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \sin(\beta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(b) Докажите, что компоненты $J_{0ik} = (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{E}_i$ равны

$$J_{0ik} = \sum_{r=1}^3 R_{ir} \lambda_r R_{kr}.$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} J_{011} & J_{012} & J_{013} \\ J_{012} & J_{022} & J_{023} \\ J_{013} & J_{023} & J_{033} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{R}^T.$$

(c) Найдите выражение для кинетического момента \mathbf{H} тела относительно его центра масс и выражение для кинетической энергии вращения $T_{\text{вр}}$ тела при условии, что угловая скорость тела равна $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \mathbf{E}_i$. Как можно упростить полученные выражения в случае $a = b = c$?

7.9. В этой задаче вы получите ряд уравнений в системе 3-1-2 углов Эйлера. Эта система аналогична системе 3-2-1 углов Эйлера, которая обсуждалась в подразделе 6.8.1. Затем мы применим полученные результаты к решению навигационной задачи.

Разложим тензор вращения \mathbf{Q} в произведение трех тензоров вращения. Первый осуществляет поворот вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол ψ и обозначается через $\mathbf{L}(\psi, \mathbf{E}_3)$. Второй задает поворот на угол θ вокруг оси $\mathbf{e}'_1 = \cos(\psi) \mathbf{E}_1 + \sin(\psi) \mathbf{E}_2$ и обозначается через $\mathbf{L}(\theta, \mathbf{e}'_1)$. Третий осуществляет поворот на угол ϕ вокруг оси

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}''_2 = \cos(\theta) \mathbf{e}'_2 + \sin(\theta) \mathbf{e}'_3.$$

(a) Докажите, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix},$$

где $Q_{ij} = (\mathbf{Q} \mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{E}_i$.

(b) Докажите, что базис Эйлера для системы 3-1-2 углов Эйлера равен

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь соотношениями $\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_i = \delta_i^k$, докажите, что взаимный базис Эйлера для системы 3-1-2 углов Эйлера равен

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\psi) \operatorname{tg}(\theta) & -\cos(\psi) \operatorname{tg}(\theta) & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sec(\theta) \sin(\psi) & \sec(\theta) \cos(\psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Обратите внимание, что на второй угол Эйлера следует наложить ограничение $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- (с) Анализируя три вращения, составляющие тензор \mathbf{Q} , и опираясь на результаты из пункта (а), докажите, что

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{CBA}, \quad (7.27)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Подберите четыре разных набора значений для системы (ϕ, θ, ψ) и найдите ось вращения \mathbf{q} и угол вращения для тензора \mathbf{Q} .
- (е) Вектор угловой скорости, соответствующий системе 3-1-2 углов Эйлера, равен

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{E}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{e}_2 = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3.$$

Докажите, что

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \cos(\theta) & 0 & \cos(\phi) \\ \sin(\theta) & 1 & 0 \\ \cos(\phi) \cos(\theta) & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sec(\theta) \sin(\phi) & 0 & \sec(\theta) \cos(\phi) \\ \operatorname{tg}(\theta) \sin(\phi) & 1 & -\operatorname{tg}(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Эти системы дифференциальных уравнений очень важны для современных бортовых навигационных систем.

(f) Пусть в системе 3-1-2 углов Эйлера описывается вращательное движение самолета: $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$. Вектор \mathbf{e}_1 направлен вдоль оси самолета вперед, а вектор \mathbf{E}_3 — вертикально вниз. Первый угол Эйлера ψ называется углом рыскания, второй угол θ — углом крена, а третий угол ϕ — углом тангажа.

(i) На самолет устанавливается система трех гироскопов, передающих три сигнала $\omega_i(t)$ (см, например, сигналы на рис. 7.12)¹⁹. Докажите, что, зная начальное положение самолета в пространстве, можно определить текущее положение самолета в пространстве, если проинтегрировать (7.28).

(ii) Предположим, что изначально самолет находится в горизонтальном положении. С течением времени гироскопы регистрируют сигналы:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= 0,02 \sin(0,5t), \\ \omega_2(t) &= 0,02 \sin(0,05t), \\ \omega_3(t) &= 2,0 \sin(0,5t). \end{aligned}$$

Рассчитайте $\mathbf{e}_k(t)$.

(iii) Как изменяется ось вращения \mathbf{q} самолета? Параллельна ли эта ось мгновенной оси вращения $\mathbf{i} = \frac{\dot{\omega}}{\|\dot{\omega}\|}$?

7.10. На рис. 7.13 изображен волчок Пуассона, который представляет собой осесимметричное тело с острием. Волчок свободно движется по плоской поверхности. Символом P обозначена точка волчка, соприкасающаяся с поверхностью. Радиус-векторы этой точки относительно неподвижной точки O в текущей и начальной конфигурациях обозначаются через \mathbf{x}_P и \mathbf{X}_P соответственно. Центр масс волчка находится в точке \bar{X} . Радиус-векторы точки \bar{X} относительно неподвижной точки O в текущей и начальной конфигурациях обозначаются через $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{X}}$ соответственно.

¹⁹Принцип работы одного класса гироскопов описывается в разделе 11.4.

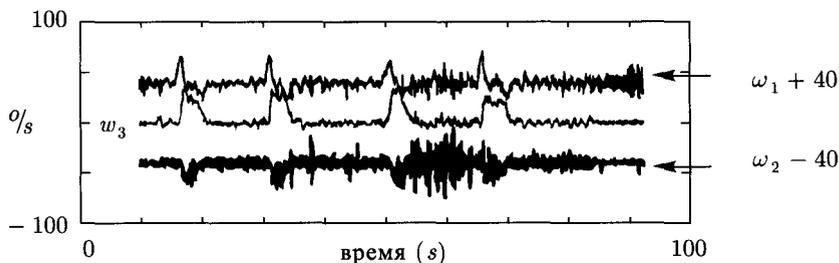


Рис. 7.12. Сигналы $w_3(t)$, $w_2(t) - 40$ и $w_1(t) + 40$, передаваемые гироскопами, закрепленными на мотоцикле. Мотоцикл движется по прямоугольной траектории; смещения ± 40 нужны для того, чтобы различать между собой три сигнала. Обратите внимание на шум в сигналах $w_i(t)$.

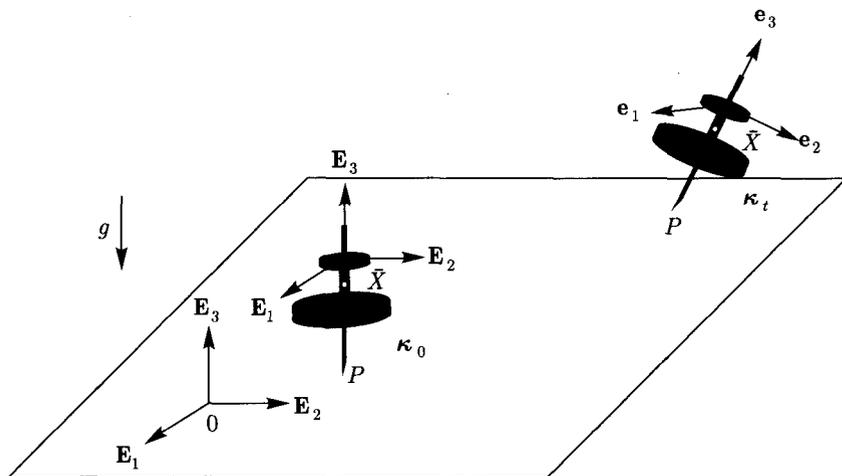


Рис. 7.13. Начальная κ_0 и текущая κ_t конфигурации волчка Пуассона. Поверхность, по которой движется волчок, является плоскостью $E_1 - E_2$

- (а) Положение волчка в пространстве задается в системе 3-2-1 углов Эйлера. Обозначим первый угол через ψ , второй угол через θ , а третий угол через ϕ . Схематично опишите положение волчка в пространстве с помощью этих углов.
- (б) При каких положениях волчка система 3-2-1 углов Эйлера обладает сингулярностью?

- (с) Исходя из того, что для любой точки X на твердом теле справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{d},$$

докажите, что

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_P) + \dot{\mathbf{x}}_P, \quad \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) + \dot{\mathbf{x}}_P.$$

- (d) Тензор инерции волчка в его начальной конфигурации равен

$$\mathbf{J}_O = \lambda_a \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \lambda_t (\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3).$$

При условии, что

$$\mathbf{\Pi}_P = \mathbf{X}_P - \bar{\mathbf{X}} = -L_3 \mathbf{E}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

докажите, что вектор кинетического момента волчка относительно точки P равен

$$\mathbf{H}_P = \lambda_a \omega_3 \mathbf{e}_3 + (\lambda_t + mL_3^2)(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + L_3 \mathbf{e}_3 \times m \dot{\mathbf{x}}_P.$$

ГЛАВА 8

СВЯЗИ И ПОТЕНЦИАЛЫ

8.1. Введение

В этой главе рассматриваются связи, накладываемые на движение твердых тел, а также реализующие эти связи силы и моменты. В частности, исследуются связи для сочлененных твердых тел, катящихся и скользящих твердых тел и соответствующие этим связям реакции и моменты. Кроме того, приводится лагранжева формулировка для реакций и моментов связей и раскрываются накладываемые на них ограничения. В этой главе также рассматриваются потенциальные энергии твердых тел и связанные с ними консервативные силы и моменты. В качестве примеров исследуются пружины и центральные гравитационные поля. Вы увидите, что между этой темой и обсуждением связей, реакций и моментов связей можно провести параллели.

8.2. Связи

В динамике твердых тел связи возникают в одном из двух случаев: когда твердое тело сцеплено с другим твердым телом, так что его относительное движение оказывается связанным, и когда одно твердое тело катится или скользит по поверхности другого. В первом случае соединения тел реализуются, как правило, посредством шарниров.

Как и для материальных точек, связи подразделяются на интегрируемые и неинтегрируемые. Такая классификация очень важна в динамике, поскольку позволяет существенно упростить вывод и вид уравнений движения.

Рассмотрим два твердых тела: \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 (рис. 8.1). В случае взаимодействия твердого тела с поверхностью можно задать вектор скорости центра масс и вектор угловой скорости любого из тел как функции времени. Если связи наложены на большее число тел, то нижеследующие рассуждения будет нетрудно обобщить. Заметим, что наши рассуждения, касающиеся

разных типов контактов и шарнирных соединений, не являются исчерпывающими.

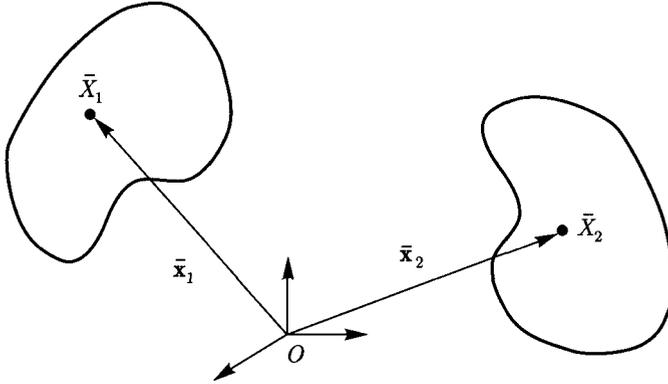


Рис. 8.1. Текущие конфигурации и центры масс двух твердых тел: B_1 и B_2

Связанные твердые тела

Рассмотрим два твердых тела B_1 и B_2 , шарнирно соединенных в точке P . Обозначим радиус-вектор точки P на теле B_α относительно центра масс \bar{X}_α через $\pi_{P\alpha}$. Поскольку положение точки P можно задать двумя способами, получаем три связи¹:

$$\bar{x}_1 + \pi_{P1} = \bar{x}_2 + \pi_{P2}. \quad (8.1)$$

Эти связи предполагают выполнение равенства:

$$\bar{v}_1 + \omega_1 \times \pi_{P1} = \bar{v}_2 + \omega_2 \times \pi_{P2}. \quad (8.2)$$

Обратите внимание, что если проинтегрировать (8.2) по времени и положить константы интегрирования равными нулю, то мы получим (8.1). Значит, связи (8.2) являются интегрируемыми.

Шарнирное соединение в точке P может ограничивать вращение тела B_2 относительно тела B_1 . Существует два типа шарнирных соединений: посредством цилиндрического (болтового) шарнира и посредством шарового шарнира. Цилиндрический шарнир используется в гироскопах для со-

¹Если записать составляющие этого векторного уравнения относительно некоторого базиса, то придем к трем независимым скалярным уравнениям. Следовательно, это векторное уравнение соответствует трем связям.

членения внутреннего и внешнего подвесов. Шаровые шарниры не накладывают никаких ограничений на вектор относительной угловой скорости $\omega_2 - \omega_1$.

Рассмотрим случай цилиндрического шарнирного соединения. Пусть вектор s_3 будет единичным вектором, параллельным оси относительного вращения, разрешенного шарниром, и пусть система векторов $\{s_1, s_2, s_3\}$ задает ортонормированный базис. Цилиндрический шарнир обеспечивает относительное вращение $Q_2 Q_1^T$ именно вокруг оси s_3 . Эти ограничения легче всего выразить через вектор относительной угловой скорости. Цилиндрический шарнир накладывает на движение двух тел следующие ограничения:

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot s_1 = 0, \quad (\omega_1 - \omega_2) \cdot s_2 = 0.$$

Очевидно, что эти две интегрируемые связи дополняются связями (8.2). Для параметризации вращения $Q_2 Q_1^T$ достаточно использовать один единственный угол.

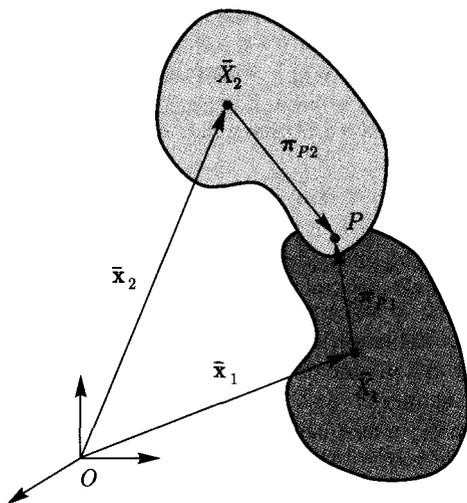


Рис. 8.2. Текущие конфигурации двух твердых тел B_1 и B_2 , шарнирно сочлененных в точке P

Каждую из упомянутых связей можно записать в виде

$$\pi = 0, \tag{8.3}$$

где

$$\pi = \mathbf{f}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{h}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + e.$$

Здесь $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ и e есть функции от $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ и t . Кроме того, уравнение (8.3) можно проинтегрировать по времени и получить функцию Π :

$$\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t),$$

где

$$\dot{\Pi} = \pi.$$

В этом случае говорят, что связь $\pi = 0$ является интегрируемой, или голономной. В общем случае связи, соответствующие соединениям, являются, как правило, интегрируемыми. Ниже мы рассмотрим прямо противоположные ситуации.

Качение и скольжение твердых тел

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 8.3. Два твердых тела в данный момент времени соприкасаются в точке P . Допустим, что в точке P существует вполне определенная единичная нормаль \mathbf{n} к поверхностям обоих тел. Кроме того, вектор \mathbf{n} является вектором ортонормированного базиса $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{n}\}$, где \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 — касательные к поверхностям обоих тел в точке P .

Поскольку точка контакта P совпадает с материальной точкой каждого тела, имеем:

$$\mathbf{x}_{p1} = \bar{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\pi}_{p1}, \quad \mathbf{v}_{p1} = \bar{\mathbf{v}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{p1} \quad (8.4)$$

и

$$\mathbf{x}_{p2} = \bar{\mathbf{x}}_2 + \boldsymbol{\pi}_{p2}, \quad \mathbf{v}_{p2} = \bar{\mathbf{v}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{p2}. \quad (8.5)$$

Важно отметить, что в общем случае нельзя получить второе уравнение (8.4) дифференцированием первого уравнения (8.4), так же как нельзя получить второе уравнение (8.5) дифференцированием первого уравнения (8.5). Это объясняется тем, что вектор $\boldsymbol{\pi}_{p\alpha}$ не соответствует одной и той же точке тела B_α в каждый момент времени. Иными словами, в каждый момент времени точка P_α соответствует новой точке тела B_α .

Среди задач на динамику твердых тел, находящихся в состоянии качения или скольжения, наибольшим вниманием пользуются тела, в которых векторы $\boldsymbol{\pi}_{p\alpha}$ имеют относительно простую форму. Это, например, катящиеся/скользящие сферы, скользящий волчок и катящиеся/скользящие диски. Самой известной задачей, в которой очень трудно выразить вектор $\boldsymbol{\pi}_{p\alpha}$ в удобном для исследования виде, является задача о движении кельтского камня. В 1896 году Г. Т. Уокер [223] первым отметил уникальное свойство

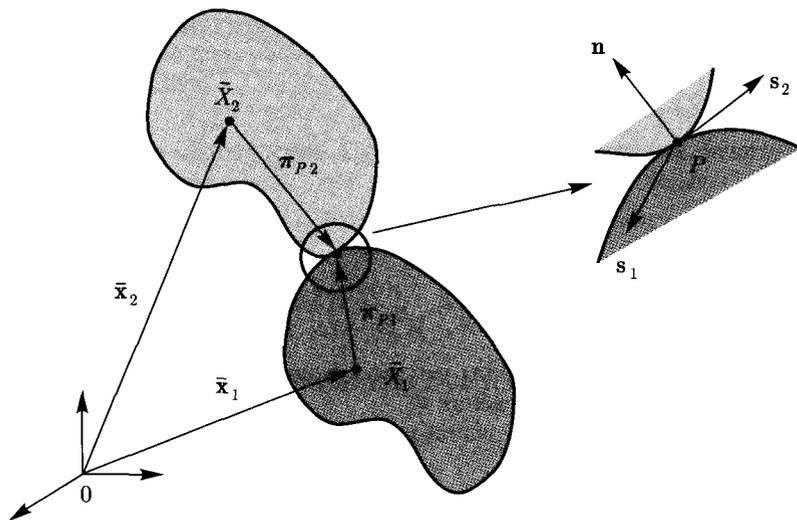


Рис. 8.3. Текущие конфигурации двух твердых тел B_1 и B_2 , шарнирно сочлененных в точке P

этого твердого тела — неожиданным образом изменять направление вращения².

8.2.1. Условие скольжения

Мы предполагаем, что между двумя соприкасающимися телами существует устойчивый контакт, при котором два тела не проникают друг в друга. Из этих допущений вытекает условие скольжения:

$$\mathbf{v}_{p1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{p2} \cdot \mathbf{n}. \quad (8.6)$$

Запишем это условие в другом виде:

$$(\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{p2} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{p1}) \cdot \mathbf{n}.$$

Из условия скольжения следует, что относительная скорость имеет только тангенциальную составляющую:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{p1} - \mathbf{v}_{p2} = v_{s1}\mathbf{s}_1 + v_{s2}\mathbf{s}_2. \quad (8.7)$$

²Более подробно об этой интереснейшей механической системе, а также о более поздних ее исследованиях читайте в [17] и содержащихся там ссылках.

Прим. ред. См. также книгу А. П. Маркеев. Динамика твердого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992; и недавно опубликованную работу В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. Глобальное движение кельтского камня. Известия РАН. МТТ, 2008, № 3, с. 8–16.

Скорость \mathbf{v}_s часто называют скоростью скольжения; она важна при определении сил трения в точке P .

8.2.2. Условие качения

Качение возникает в том случае, когда векторы скорости точки контакта для каждого тела равны друг другу. При этом условие качения имеет вид

$$\mathbf{v}_{p1} = \mathbf{v}_{p2}.$$

Запишем это условие по-другому:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{p1} = \bar{\mathbf{v}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{p2}. \quad (8.8)$$

Эти три уравнения эквивалентны условию скольжения (8.6) и условию равенства нулю скорости скольжения \mathbf{v}_s .

Условие качения (8.8) эквивалентно трем скалярным уравнениям (сравните с (8.3)):

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = 0,$$

где

$$\pi_i = \mathbf{f}_{i1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{f}_{i2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{h}_{i1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_{i2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + e_i$$

для $i = 1, 2, 3$. Однако для двух из этих уравнений, скажем для $\pi_2 = 0$ и $\pi_3 = 0$, нельзя найти функции Π_2 и Π_3 , такие что $\dot{\Pi}_2 = \pi_2$ и $\dot{\Pi}_3 = \pi_3$. Иначе говоря, две из трех связей (8.8) являются неинтегрируемыми, или неголономными. Одна связь из (8.8), интегрируемая, соответствует нормальной составляющей векторного уравнения (8.8). Проиллюстрируем вышесказанное на нескольких примерах.

8.3. Каноническая функция

Рассмотрим два твердых тела \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 . Найдем общую функциональную форму для возможной интегрируемой связи или для функции потенциальной энергии, характеризующей движение обоих тел. Эта функция дается в уравнении (8.9). С перспективой на будущее рассчитаем также ее производную. В своих рассуждениях будем опираться на работу [163].

Как показано на рис. 8.1, радиус-вектор центра масс \bar{X}_α тела \mathcal{B}_α обозначается через $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$, где $\alpha = 1; 2$. Аналогично тензор вращения тела \mathcal{B}_α обозначается через \mathbf{Q}_α . Для каждого твердого тела можно определить кротационный базис:

$$\mathbf{Q}_1 = \sum_{i=1}^3 {}_1\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{Q}_2 = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i.$$

Следует отметить, что мы определяем коротационные базисы с помощью одного и того же фиксированного базиса $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$. Векторы угловой скорости тел равны:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\mathbf{Q}}_1 \mathbf{Q}_1^T], \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}\epsilon[\dot{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{Q}_2^T].$$

Заметим также, что тензор вращения тела \mathcal{B}_2 относительно тела \mathcal{B}_1 равен

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{e}_i \otimes {}_1\mathbf{e}_i.$$

Этот тензор описывает вращение тела \mathcal{B}_2 с точки зрения наблюдателя, связанного с телом \mathcal{B}_1 .

Скалярная функция движений

Рассмотрим теперь скалярную функцию Ψ

$$\Psi = \Psi(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t).$$

Очевидно, что эта функция зависит от движений обоих твердых тел и времени. Функции такого типа получаются при построении выражений для интегрируемых связей, накладываемых на движение твердых тел, и потенциальных энергий твердых тел.

Как и в случае с одной материальной точкой, полезно рассчитать $\dot{\Psi}$. Найдем эту производную по времени, используя цепное правило дифференцирования сложной функции:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 + \text{tr} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_1} \dot{\mathbf{Q}}_1^T \right) + \text{tr} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_2} \dot{\mathbf{Q}}_2^T \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Следуя нашим рассуждениям в разделе 6.10, касающимся производных скалярных функций тензоров вращений, определим кососимметрический тензор

$$\Psi_{\mathbf{Q}_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_\alpha} \mathbf{Q}_\alpha^T - \mathbf{Q}_\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_\alpha} \right)^T \right)$$

и соответствующий ему вектор

$$\psi_{\mathbf{Q}_\alpha} = -\epsilon[\Psi_{\mathbf{Q}_\alpha}].$$

Ранее мы приводили выражения для этих тензоров и векторов, основанные на параметризации тензоров \mathbf{Q}_α . Если, например, в параметризации тензора \mathbf{Q}_1 участвуют углы Эйлера ν^i , то получим:

$$\psi_{\mathbf{Q}_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu^i} \mathbf{g}^i, \quad \psi_{\mathbf{Q}_1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu^i} \dot{\nu}^i, \quad (8.9)$$

где \mathbf{g}^i — векторы взаимного базиса Эйлера, соответствующие углам Эйлера.

Перепишем выражение для $\dot{\Psi}$, используя вышеупомянутые кососимметрические тензоры:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \text{tr}(\Psi_{\mathbf{Q}_1} \boldsymbol{\Omega}_1^T) + \text{tr}(\Psi_{\mathbf{Q}_2} \boldsymbol{\Omega}_2^T) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \psi_{\mathbf{Q}_1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \psi_{\mathbf{Q}_2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \dot{\mathbf{Q}}_\alpha \mathbf{Q}_\alpha^T, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon [\boldsymbol{\Omega}_\alpha] \quad (\alpha = 1, 2)$$

есть тензоры угловой скорости и векторы угловой скорости твердых тел.

Для большей эффективности будем использовать выражение для $\dot{\Psi}$, содержащее векторы:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \psi_{\mathbf{Q}_1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \psi_{\mathbf{Q}_2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (8.10)$$

Проведя незначительные преобразования, мы можем исключить из этого выражения $\bar{\mathbf{v}}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, введя векторы относительной скорости $\bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$. Выражение (8.10), впервые появившееся в работе [163], играет ключевую роль в исследовании потенциальных сил и моментов.

В динамике твердого тела редко пользуются выражением (8.10) ввиду специфической параметризации величин $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ и \mathbf{Q}_α . Допустим, к примеру, что

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{E}_i, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{E}_i.$$

Предположим также, что тензор \mathbf{Q}_1 параметризуется в углах Эйлера ν^i , а тензор относительного вращения $\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T$ — в углах Эйлера γ^i . Получаем:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \sum_{i=1}^3 \dot{\nu}^i \mathbf{g}_i, \quad \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{n}_i,$$

где \mathbf{g}_i и \mathbf{n}_i — векторы базиса Эйлера, соответствующие ν^i и γ^i соответственно. Тогда

$$\Psi = \Psi(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t) = \tilde{\Psi}(x_i, y_j, \nu^i, \gamma^i, t).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \dot{\tilde{\Psi}} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \nu^i} \dot{\nu}^i + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \gamma^i} \dot{\gamma}^i \right) + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}. \end{aligned}$$

В качестве упражнения сравните это выражение с выражением (8.10) и сопоставьте между собой соответствующие члены обоих выражений.

8.4. Критерии интегрируемости

В разделе 1.8 мы исследовали критерии интегрируемости для связей вида $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + e = 0$, накладываемых на движение материальной точки. В настоящем разделе мы проанализируем соответствующие критерии для связи, которая накладывается на движение двух твердых тел. В динамике твердых тел очень сложно избежать задач на исследование систем связей (достаточно вспомнить один только случай катящегося твердого тела). Кроме того, существует вероятность того, что при наложении на катящееся твердое тело достаточного числа связей результирующая система связей окажется интегрируемой. К счастью, Фробениус сформулировал теорему, которая дает нам критерий интегрируемости для системы связей. Чуть позже мы рассмотрим эту теорему. А пока обратимся к ситуации с единственной связью, накладываемой на движение двух твердых тел.

Одиночная связь

Для твердых тел необходимо обобщить критерий (1.21), справедливый для одной материальной точки, на случай связей вида

$$\pi = 0,$$

где

$$\pi = \mathbf{f}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{h}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + e.$$

Ранее упоминалось, что эта связь является интегрируемой, если существуют интегрирующий множитель k и функция $\Pi(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t)$, такие что

$k\bar{\Pi} = \pi$. Несмотря на то, что использование критерия интегрируемости сопряжено с многочисленными алгебраическими вычислениями, для многих задач эти расчеты являются тривиальными, хоть и трудоемкими.

Чтобы связь $\pi = 0$ была интегрируемой, в общем случае необходимо и достаточно выполнения системы 66 независимых условий. Эти условия аналогичны тем, которые мы обсуждали для случая одной материальной точки. Пусть вектор \bar{x}_1 параметризуется в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, вектор \bar{x}_2 — в системе координат $\{q^4, q^5, q^6\}$, тензор \mathbf{Q}_1 — в углах Эйлера $\{\nu^1, \nu^2, \nu^3\}$, а тензор \mathbf{Q}_2 — в углах Эйлера $\{\nu^4, \nu^5, \nu^6\}$. Тогда функция π будет равна

$$\pi = \sum_{i=1}^3 (f_{1i}\dot{q}^i + f_{2i}\dot{q}^{i+3} + h_{1i}\dot{\nu}^i + h_{2i}\dot{\nu}^{i+3}) + e.$$

Определим промежуточные функции

$$W_i = f_{1i}, \quad W_{i+3} = f_{2i}, \quad W_{i+6} = h_{1i}, \quad W_{i+9} = h_{2i}, \quad W_{13} = e$$

и переменные

$$U^i = q^i, \quad U^{i+3} = q^{i+3}, \quad U^{i+6} = \nu^i, \quad U^{i+9} = \nu^{i+3}, \quad U^{13} = t,$$

где $i = 1, 2, 3$. Наконец, определим функции

$$I_{JKL} = W_J S_{LK} + W_K S_{JL} + W_L S_{KJ}, \quad (8.11)$$

где S_{LK} — элементы кососимметрической матрицы, равные

$$S_{LK} = \frac{\partial W_L}{\partial U^K} - \frac{\partial W_K}{\partial U^L}. \quad (8.12)$$

В выражениях (8.11) и (8.12) целочисленные индексы J, K и L пробегают значения от 1 до 13.

С учетом всех предварительных построений приходим к теореме, сформулированной Фробениусом:

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием интегрируемости связи $\pi = 0$ является то, что для всех U^1, \dots, U^{13} удовлетворяется $\frac{13}{6}(13-1)(13-2)$ уравнений:*

$$I_{JKL} = 0 \quad \text{для всех } J, K, L \in \{1, \dots, 13\}, J \neq K \neq L, J \neq L. \quad (8.13)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках по дифференциальным уравнениям (например, в разделе 161 работы Форсайта [64]). Заметим также, что лишь 66 из 286 уравнений $I_{JKL} = 0$ являются независимыми. Критерий (8.13) можно адаптировать к случаю с единственной связью $\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + e = 0$, накладываемой на движение одного твердого тела. В этом случае индексы J, K, L будут принимать значения от 1 до 7, а число независимых условий $I_{JKL} = 0$ сведется к 10.

Системы связей

Когда на движение твердых тел накладывается несколько связей, интегрируемость системы связей можно оценить с помощью критерия, который называется теоремой Фробениуса. Для упрощения ее вывода рассмотрим случай одного твердого тела. Опираясь на материал предыдущего раздела, можно распространить наши изложения на случай двух тел.

Пусть на движение твердого тела накладывается система $R \leq 6$ связей:

$$\pi_1 = 0, \dots, \pi_R = 0, \quad (8.14)$$

где

$$\pi_A = \mathbf{f}_A \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h}_A \cdot \boldsymbol{\omega} + e_A \quad (A = 1, \dots, R).$$

Как и прежде, допустим, что радиус-вектор центра масс тела выражается координатами $\{q^1, q^2, q^3\}$, а тензор вращения твердого тела — через параметры $\{\nu^1, \nu^2, \nu^3\}$. Тогда каждую связь π_A можно переписать в виде:

$$\pi_A = \sum_{i=1}^3 (f_{Ai} \dot{q}^i + h_{Ai} \dot{\nu}^i) + e_A.$$

Далее определим следующие функции и переменные:

$$\begin{aligned} W_{Ai} &= f_{Ai}, & W_{A(i+3)} &= h_{Ai}, & W_{A7} &= e_A, \\ S_{LK}^A &= \frac{\partial W_{AL}}{\partial U^K} - \frac{\partial W_{AK}}{\partial U^L}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

где

$$U^i = \dot{q}^i, \quad U^{i+3} = \dot{\nu}^i, \quad U^7 = t. \quad (8.16)$$

В уравнениях (8.15) и (8.16) индексы $i = 1, 2, 3$ и $L, K = 1, \dots, 7$. С помощью функций W_{AL} и S_{LK}^A можно построить две матрицы, например:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & \dots & W_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{R1} & \dots & W_{R7} \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Пользуясь (8.15), легко видеть, что $\mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^R$ — кососимметрические матрицы: $S_{KL}^A = -S_{LK}^A$. Определим также следующие семимерные векторы:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Теорема Фробениуса об интегрируемости имеет вид:

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием интегрируемости системы $R < 7$ связей $\pi_1 = 0, \dots, \pi_R = 0$, накладываемых на движение одного твердого тела, является выполнимость равенств*

$$\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{S}^A \mathbf{b}) = 0 \quad (A = 1, \dots, R)$$

для всех значений переменных U^1, \dots, U^7 и всех отличных друг от друга решений \mathbf{a} и \mathbf{b} , удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{W}\mathbf{x} = 0.$$

Иначе говоря, семимерные векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} принадлежат ядру линейного оператора \mathbf{W} .

Замечания к теореме Фробениуса. Формулировка замечательной теоремы Фробениуса взята из работы Форсайта [63]. В этой же работе вы найдете классическое доказательство теоремы. В статье Хокинса [91] содержатся дополнительные исторические факты, касающиеся этой теоремы. Более современные доказательства теоремы с применением дифференциальных форм смотрите, например, в [34, 63, 101, 189].

Так как \mathbf{S}^A — кососимметрическая матрица, $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{S}^A \mathbf{a}) = 0$ для всех возможных \mathbf{a} . Нередко этот результат служит ключом к применению теоремы Фробениуса: если \mathbf{W} имеет одномерное ядро, то существует единственный вектор, скажем \mathbf{b} , удовлетворяющий уравнению $\mathbf{W}\mathbf{b} = 0$, и тогда условия теоремы заведомо выполняются.

Примеры. Одна из задач в конце главы иллюстрирует применение теоремы. С ее помощью доказывается, что в общем случае на катящийся диск накладываются неинтегрируемые связи. Если, однако, на диск наложить дополнительные связи, согласно которым он является вертикальным, а его центр масс движется вдоль прямой, то связи окажутся интегрируемыми. В задаче 8.9 говорится, что такого рода ситуации часто встречаются в рамках школьных курсов динамики.

Второй пример применения теоремы Фробениуса упоминался нами при рассмотрении двух склерономных связей (1.23), наложенных на движение одной материальной точки:

$$f_{11}\dot{x} + f_{12}\dot{y} + f_{13}\dot{z} = 0, \quad f_{21}\dot{x} + f_{22}\dot{y} + f_{23}\dot{z} = 0,$$

где $\mathbf{f}_1 = \sum_{k=1}^3 f_{1k}\mathbf{E}_k$ и $\mathbf{f}_2 = \sum_{k=1}^3 f_{2k}\mathbf{E}_k$ есть функции радиус-вектора материальной точки, такие что $\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1 \neq 0$. Прежде чем применять к этому случаю теорему Фробениуса, необходимо преобразовать уравнения (8.15)–(8.18). Во-первых, обозначим

$$U^1 = x, \quad U^2 = y, \quad U^3 = z, \quad U^4 = t.$$

В нашем случае $R = 2$, а индексы L и K принимают значения от 1 до 4. В качестве упражнения убедитесь, что матрица W размерностью 2×4 имеет двумерное ядро, натянутое на векторы

$$\mathbf{a} = [0, 0, 0, 1]^T, \quad \mathbf{b} = [g_1, g_2, g_3, 0]^T,$$

где $g_k = (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{E}_k$. Поскольку

$$\mathbf{S}^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_{A1}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{A2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{A1}}{\partial x_3} - \frac{\partial f_{A3}}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial f_{A2}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{A1}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_{A2}}{\partial x_3} - \frac{\partial f_{A3}}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial f_{A3}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{A1}}{\partial x_3} & \frac{\partial f_{A3}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{A2}}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

имеем $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{S}^1 \mathbf{b}) = 0$ и $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{S}^2 \mathbf{b}) = 0$. Таким образом, предположения теоремы Фробениуса об интегрируемости удовлетворяются, и значит, система связей (1.23) является интегрируемой.

8.5. Силы и моменты, действующие на твердое тело

Прежде чем переходить к обсуждению сил и моментов реакций связей, сделаем некоторые предварительные замечания. Равнодействующая сила \mathbf{F} , приложенная к телу, находится как сумма сил, действующих на тело. Аналогично результирующий момент относительно неподвижной точки O (M_O) есть не что иное как результирующий внешний момент относительно

точки O всех моментов, действующих на тело. Результирующий момент относительно центра масс \bar{X} обозначим через M . Названные моменты можно разложить на две составные части: на момент, обусловленный действием внешних сил, и приложенные внешние моменты, не связанные с внешними силами. Последние называются «чистыми» моментами³.

В качестве примера рассмотрим систему сил и моментов, действующих на твердое тело. Пусть на тело действует система L сил F_K ($K = 1, \dots, L$). Сила F_K приложена к материальной точке X_K , радиус-вектор которой равен x_K . Кроме того, на твердое тело действует чистый момент M_p , обусловленный приложенной к телу парой (рис. 8.4). Равнодействующая сила и результирующие моменты для описанной системы равны:

$$\mathbf{F} = \sum_{K=1}^L \mathbf{F}_K,$$

$$M_O = M_p + \sum_{K=1}^L x_K \times \mathbf{F}_K,$$

$$M = M_p + \sum_{K=1}^L (x_K - \bar{x}) \times \mathbf{F}_K.$$

Обратите внимание на чистый момент M_p , фигурирующий в этих выражениях.

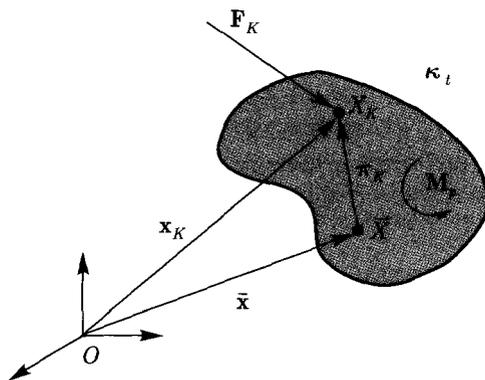


Рис. 8.4. Сила F_K и момент M_p , действующие на твердое тело

³Видимо, имеется в виду выделение в отдельную группу моментов пар сил. — Прим. ред.

Механическая мощность \mathcal{P} силы \mathbf{F}_K , приложенной к материальной точке X_K , по определению равна

$$\mathcal{P} = \mathbf{F}_K \cdot \dot{\mathbf{x}}_K.$$

Запишем другое выражение для этой мощности, используя понятие центра масс. Применим тождество $\dot{\mathbf{x}}_K = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_K$, где $\boldsymbol{\pi}_K = \mathbf{x}_K - \bar{\mathbf{x}}$. В результате получим:

$$\mathcal{P} = \mathbf{F}_K \cdot \dot{\mathbf{x}}_K = \mathbf{F}_K \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi}_K \times \mathbf{F}_K) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

То есть мощность силы \mathbf{F}_K равна сумме мощности той же силы, приложенной к центру масс тела, и мощности момента \mathbf{F}_K относительно центра масс. Механическая мощность чистого момента \mathbf{M}_p по определению равна

$$\mathcal{P} = \mathbf{M}_p \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Обратите внимание, что это выражение согласуется с предыдущим выражением для механической мощности силы \mathbf{F}_K .

С учетом выражений для механической мощности силы \mathbf{F}_K и механической мощности чистого момента \mathbf{M}_p приходим к выводу, что результирующая механическая мощность системы L сил и чистого момента равна

$$\mathcal{P} = \sum_{K=1}^L \mathbf{F}_K \cdot \dot{\mathbf{x}}_K + \mathbf{M}_p \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Полученные результаты сыграют ключевую роль при дальнейшем обсуждении реакций связей, их моментов и потенциальных энергий.

8.6. Реакции связей и их моменты

Пусть задана система связей, накладываемых на движение одного или более твердых тел. Требуется ввести систему сил и моментов реакций связей, которые обеспечат произвольное, совместимое со связями движение тел. Наша цель — научиться задавать силы и моменты.

В настоящей главе мы, как правило, имеем дело с лагранжевой формулировкой связей вида

$$\pi = 0$$

(см. (8.3)), где

$$\pi = \mathbf{f}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{h}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + e.$$

Ранее мы показывали, как записать в этой форме большую часть связей, традиционно используемых в динамике твердого тела.

С методической точки зрения перед рассмотрением лагранжевого представления реакций связей и их моментов следует привести несколько примеров. Однако представление Лагранжа не является универсальным. К примеру, в динамике точки оно не дает реалистичного описания реакций и моментов связей в случае, когда в системе присутствует динамическое трение.

8.6.1. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, изображенное на рис. 8.5. Тело крепится к неподвижной точке O посредством цилиндрического шарнира и может вращаться вокруг неподвижной оси $\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3$. Если мы знаем, как вращается тело, то нам известно и движение его центра масс.

Цилиндрическое шарнирное соединение предполагает, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела подчиняется двум связям, которые можно записать по-разному. Например,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_2 = 0, \quad (8.19)$$

или, что эквивалентно,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Поскольку точка O неподвижна, на движение тела накладываются три дополнительные связи:

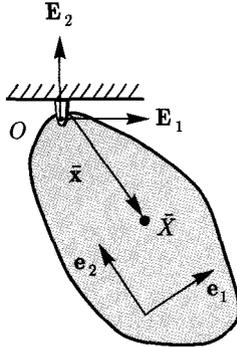
$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (8.20)$$

Иначе говоря, цилиндрический шарнир связывает вращательное движение тела с движением его центра масс.

Для обеспечения связей (8.19) необходимо, чтобы со стороны цилиндрического шарнира на тело действовали два момента связей. Эти моменты имеют составляющие, перпендикулярные оси \mathbf{E}_3 :

$$\mathbf{M}_{c1} = \mu_4 \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{M}_{c2} = \mu_5 \mathbf{E}_2,$$

где μ_4 и μ_5 — функции времени, определяющиеся из уравнений движения. Упомянутые моменты связей являются примерами чистых моментов. Когда мы задаем моменты связей, мы предполагаем, что цилиндрический шарнир является гладким. При наличии трения они будут иметь составляющие по оси \mathbf{E}_3 . Цилиндрический шарнир накладывает ограничение, согласно которому точка O остается неподвижной, поэтому в точке O возникает сила

Рис. 8.5. Твердое тело B , вращающееся вокруг неподвижной оси O

реакции R :

$$R = \sum_{i=1}^3 \mu_i E_i,$$

где μ_1, μ_2 и μ_3 — функции времени, определяющиеся из уравнений движения.

Сила реакции и моменты связей эквивалентны реакции связи F_c , приложенной к центру масс твердого тела, и моменту связи M_c относительно центра масс твердого тела:

$$F_c = \sum_{i=1}^3 \mu_i E_i, \quad M_c = \mu_4 E_1 + \mu_5 E_2 - \bar{x} \times \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i E_i \right).$$

Заметим, что на движение твердого тела накладывается пять связей, обусловленных цилиндрическим шарниром, и при этом в выражениях для реакций связей и моментов связей фигурирует пять неизвестных функций μ_1, \dots, μ_5 .

8.6.2. Сфера, катящаяся или скользящая по наклонной плоскости

Задача о качении или скольжении сферы по плоскости имеет богатую историю отчасти потому, что она лежит в основе теории таких игр, как бильярд и боулинг. В 19-м веке большой вклад в исследование этой задачи внесли Гаспар-Гюстав де Кориолис (1792–1843) (см. [41]) и Эдвард Джон Раус (1831–1907) (см. [184]). Задачу на исследование динамики сфер, катящихся по поверхностям вращения, часто называют задачей Рауса⁴.

⁴Более подробно о деятельности Рауса как учителя и наставника читайте в книге [226].

Рассмотрим твердое тело, изображенное на рис. 8.6. Тело движется по неподвижной наклонной плоскости. На рисунке предполагается, что тело имеет форму сферы. В случае сферы имеем $\pi_P = -R\mathbf{E}_3$, где R — радиус сферы. Кроме того, заметим, что $\{s_1, s_2, \mathbf{n}\} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$.

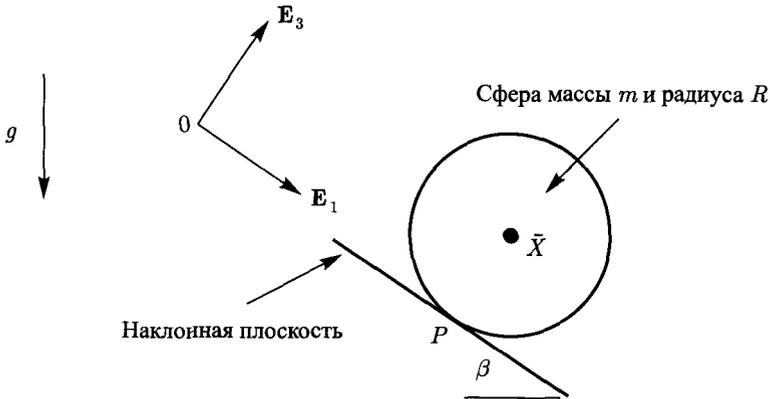


Рис. 8.6. Твердая сфера, движущаяся по наклонной плоскости

Рассмотрим сначала случай скольжения сферы по плоскости. Условие скольжения (8.6) $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{n} = 0$ сводится к виду

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}_3 = 0.$$

Скорость проскальзывания \mathbf{v}_s равна

$$\mathbf{v}_s = v_{s1}\mathbf{E}_1 + v_{s2}\mathbf{E}_2 = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (-R\mathbf{E}_3).$$

К точке P приложена сила \mathbf{F}_c :

$$\mathbf{F}_c = \mu_3\mathbf{E}_3 - \mu_d \|\mu_3\mathbf{E}_3\| \frac{\mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_s\|},$$

где μ_d — коэффициент динамического трения. Как и в предыдущем примере, μ_3 обозначает функцию времени, определяющуюся из уравнений движения.

В случае катящейся сферы на ее движение накладываются три связи:

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_3 = 0.$$

Эти связи можно выразить иначе:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}_i - R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{E}_i = 0,$$

где $i = 1; 2$ или 3 . В точке P действуют нормальная сила и сила статического трения, которые как раз и обуславливают возникновение связей. Сумма этих двух сил равна силе реакции \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i,$$

где μ_i — функции времени, определяющиеся из уравнений движения. Следует отметить, что сила реакции \mathbf{R} эквивалентна силе $\mathbf{F}_c = \mathbf{R}$, действующей на центр масс, и моменту $\mathbf{M}_c = -R\mathbf{E}_3 \times \mathbf{R}$ относительно центра масс. Это утверждение справедливо и для скользящего твердого тела.

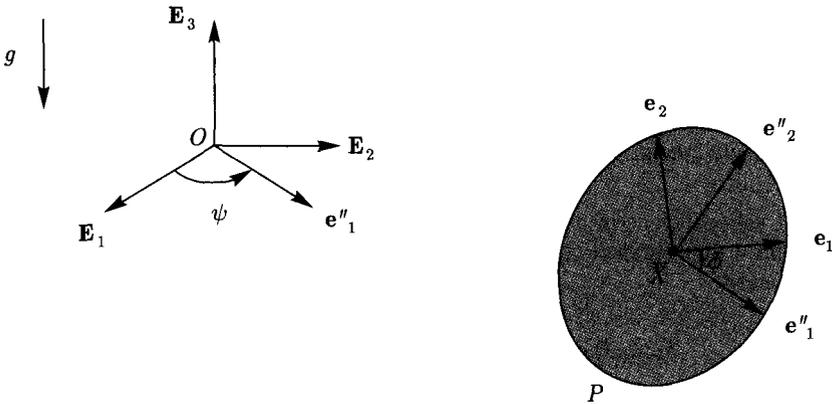


Рис. 8.7. Тонкий круговой диск, движущийся по шероховатой горизонтальной поверхности с контактом в одной точке

8.6.3. Катящийся диск

На рис. 8.7 изображен тонкий жесткий круговой диск массы m и радиуса R , катящийся (без скольжения) по шероховатой горизонтальной плоскости. Запишем тензор вращения диска в системе 3-1-3 углов Эйлера (см. подраздел 6.8.2). У этой системы есть одно преимущество: углы Эйлера принимают вырожденные значения ($\theta = 0, \pi$), когда диск лежит плашмя на горизонтальной плоскости.

Радиус-вектор мгновенной точки контакта P относительно центра масс \bar{X} определяется уравнением:

$$\begin{aligned}\pi_P &= -R\mathbf{e}_2'' = -R\sin(\phi)\mathbf{e}_1 - R\cos(\phi)\mathbf{e}_2 = \\ &= -R(-\cos(\theta)\sin(\psi)\mathbf{E}_1 + \cos(\theta)\cos(\psi)\mathbf{E}_2 + \sin(\theta)\mathbf{E}_3).\end{aligned}$$

Записывая декартовы составляющие условия качения ($\mathbf{v}_P = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \pi_P$), приходим к заключению, что движение диска подчиняется трем связям:

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = 0, \quad (8.21)$$

где

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \dot{x}_1 + R\dot{\phi}\cos(\psi) + R\dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\psi) - R\dot{\theta}\sin(\theta)\sin(\psi), \\ \pi_2 &= \dot{x}_2 + R\dot{\phi}\sin(\psi) + R\dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\psi) + R\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\psi), \\ \pi_3 &= \dot{x}_3 - R\dot{\theta}\cos(\theta),\end{aligned}$$

а $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{E}_i$. Обратите внимание, что если проинтегрировать последнюю из трех связей, то мы получим $x_3 = R\sin(\theta) + \text{const}$. Тем не менее система связей (8.21) не является интегрируемой (см. доказательство в одной из задач в конце главы).

Качение диска возможно из-за действия в точке P силы трения покоя \mathbf{F}_f :

$$\mathbf{F}_f = \mu_1 \mathbf{E}_1 + \mu_2 \mathbf{E}_2.$$

Эта сила и нормальная сила $\mathbf{N} = \mu_3 \mathbf{E}_3$ эквивалентны реакции связи и моменту связи:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_f + \mathbf{N} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{M}_c = \pi_P \times \mathbf{F}_c.$$

Функции μ_1 , μ_2 и μ_3 определяются из уравнений движения.

8.6.4. Представление Лагранжа

Сначала рассмотрим лагранжево представление для реакций связи и их моментов, действующих на одно твердое тело⁵. Затем перейдем к обсуждению связей в системе двух твердых тел. В конце главы продемонстрируем лагранжево представление на примере двух шарнирно-сочлененных твердых тел и обобщим третий закон Ньютона. Лагранжево представление для систем твердых тел также иллюстрируется в разделах 11.3 и 11.4 и в задаче 11.4 о тренажере Dynabee.

⁵В этом разделе мы будем опираться на работу О'Рейли и Шриниваса [163].

Одно твердое тело. Опираясь на примеры, рассмотренные в предыдущих разделах, полагаем что всякую связь, накладываемую на твердое тело, можно задать (см. (8.3)) уравнением

$$\pi = 0,$$

где

$$\pi = \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + e.$$

Здесь \mathbf{f} , \mathbf{h} и e — функции от t , $\bar{\mathbf{x}}$ и \mathbf{Q} . Согласно лагранжеву представлению реакция связи \mathbf{F}_c и момент \mathbf{M}_c равны

$$\mathbf{F}_c = \mu \mathbf{f}, \quad \mathbf{M}_c = \mu \mathbf{h},$$

где μ — неопределенный множитель. Такая форма представления есть очевидное обобщение соответствующего представления для материальной точки и системы материальных точек.

Если на движение твердого тела накладывается система R связей, то эти связи имеют вид

$$\pi_K = 0,$$

где $K = 1, \dots, R$ и

$$\pi_K = \mathbf{f}_K \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h}_K \cdot \boldsymbol{\omega} + e_K.$$

Для описанной системы связей реакция и момент в представлении Лагранжа равны

$$\mathbf{F}_c = \mu_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \mu_R \mathbf{f}_R, \quad \mathbf{M}_c = \mu_1 \mathbf{h}_1 + \dots + \mu_R \mathbf{h}_R,$$

где μ_1, \dots, μ_R — неопределенные множители. Обратите внимание, что для R связей появляется R неизвестных.

Если вы внимательно изучите все примеры в этой главе, то убедитесь, что лагранжево представление почти всегда дает физически реалистичные результаты (исключение составляют случаи, когда в системе присутствует динамическое кулоновское трение)⁶. Кроме того, вы сможете доказать, что реакция связи \mathbf{F}_c и момент связи \mathbf{M}_c совместно совершают работу (исключение составляет случай $e = 0$ для одной связи).

Два твердых тела. Пусть на систему двух твердых тел накладывается R связей (8.3):

$$\pi_K = 0,$$

⁶См., например, обсуждение в подразделе 8.6.3 реакций и моментов связей, действующих на катящийся диск.

где $K = 1, \dots, R$. Предположим, что эти связи имеют вид:

$$\pi_K = \mathbf{f}_{K1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{f}_{K2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{h}_{K1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_{K2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + e_K.$$

Функции \mathbf{f}_{K1} , \mathbf{f}_{K2} , \mathbf{h}_{K1} , \mathbf{h}_{K2} и e_K зависят от $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$, \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 и t . Эти R связей реализуются реакциями связей и моментами, которые в лагранжевом представлении имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{c1} &= \mu_1 \mathbf{f}_{11} + \dots + \mu_R \mathbf{f}_{R1}, \\ \mathbf{F}_{c2} &= \mu_1 \mathbf{f}_{12} + \dots + \mu_R \mathbf{f}_{R2}, \\ \mathbf{M}_{c1} &= \mu_1 \mathbf{h}_{11} + \dots + \mu_R \mathbf{h}_{R1}, \\ \mathbf{M}_{c2} &= \mu_1 \mathbf{h}_{12} + \dots + \mu_R \mathbf{h}_{R2}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Здесь $\mathbf{F}_{c\alpha}$ есть результирующая реакций связей, действующих на тело B_α , $\mathbf{M}_{c\alpha}$ — результирующий момент связей относительно центра масс тела B_α , а μ_1, \dots, μ_R — функции времени, определяющиеся из уравнений движения для системы двух твердых тел.

Следует отметить, что для каждой из R связей лагранжево представление вводит одну неизвестную функцию времени: μ_K . Следовательно, если на движение двух твердых тел накладывается 10 связей, то у нас появится 10 неизвестных μ_1, \dots, μ_{10} .

Два шарнирно-сочлененных тела и третий закон Ньютона. Рассмотрим случай двух твердых тел, соединенных цилиндрическим шарниром (рис. 8.8). Относительное движение тел подчиняется пяти интегрируемым связям:

$$\Psi_1 = 0, \dots, \Psi_5 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{P1}) \cdot \mathbf{E}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{P2}) \cdot \mathbf{E}_1, \\ \dot{\Psi}_2 &= \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{P1}) \cdot \mathbf{E}_2 - \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{E}_2 - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{P2}) \cdot \mathbf{E}_2, \\ \dot{\Psi}_3 &= \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{E}_3 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\pi}_{P1}) \cdot \mathbf{E}_3 - \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{E}_3 - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\pi}_{P2}) \cdot \mathbf{E}_3, \\ \dot{\Psi}_4 &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot {}_1\mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}_1\mathbf{e}_1, \\ \dot{\Psi}_5 &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot {}_1\mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}_1\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что ось цилиндрического шарнира направлена вдоль ${}_1\mathbf{e}_3 = {}_2\mathbf{e}_3$, а радиус-векторы точки шарнирного соединения относительно центров масс обоих тел равны $\boldsymbol{\pi}_{P1}$ и $\boldsymbol{\pi}_{P2}$.

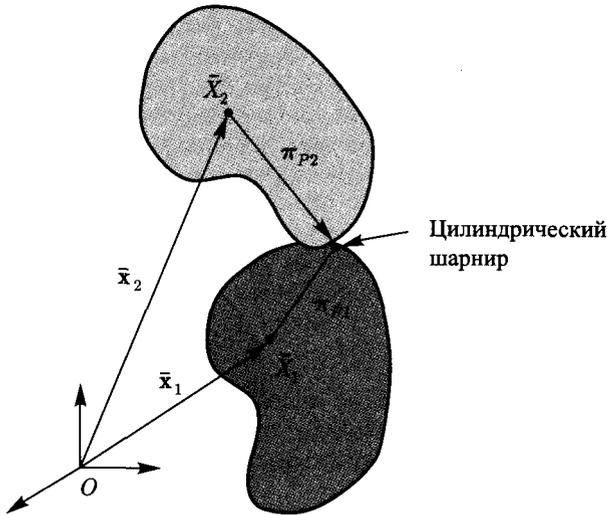


Рис. 8.8. Текущие конфигурации тел B_1 и B_2 , соединенных цилиндрическим шарниром. Ось шарнира направлена вдоль $2e_3 = 1e_3$, а его радиус-векторы относительно центров масс тел равны соответственно π_{P1} и π_{P2}

Пользуясь лагранжевым представлением (8.22), для пяти связей $\Psi_1 = 0, \dots, \Psi_5 = 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{c1} &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i, \\
 \mathbf{F}_{c2} &= - \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i, \\
 \mathbf{M}_{c1} &= \mu_{41} \mathbf{e}_1 + \mu_{51} \mathbf{e}_2 + \pi_{P1} \times \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i, \\
 \mathbf{M}_{c2} &= -\mu_{41} \mathbf{e}_1 - \mu_{51} \mathbf{e}_2 - \pi_{P2} \times \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{E}_i.
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Перепишем эти выражения в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{c1} &= -\mathbf{F}_{c2}, \\
 \mathbf{M}_{c1} &= \mu_{41} \mathbf{e}_1 + \mu_{51} \mathbf{e}_2 + \pi_{P1} \times \mathbf{F}_{c1}, \\
 \mathbf{M}_{c2} &= -\mu_{41} \mathbf{e}_1 - \mu_{51} \mathbf{e}_2 + \pi_{P2} \times \mathbf{F}_{c2}.
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

Как видно на рис. 8.9, \mathbf{F}_{c1} и \mathbf{F}_{c2} являются равными по величине и противоположно направленными силами, приложенными к точке шарнирного сочленения, а $\mathbf{M}_r = \mu_{41}\mathbf{e}_1 + \mu_{51}\mathbf{e}_2$ и $-\mu_{41}\mathbf{e}_1 - \mu_{51}\mathbf{e}_2$ — равные по величине и противоположно направленные моменты реакции. Моменты реакции \mathbf{M}_{c1} и \mathbf{M}_{c2} относительно центров масс двух тел равны по величине и противоположно направлены лишь в случае $\pi_{P2} = \pi_{P1}$.⁷

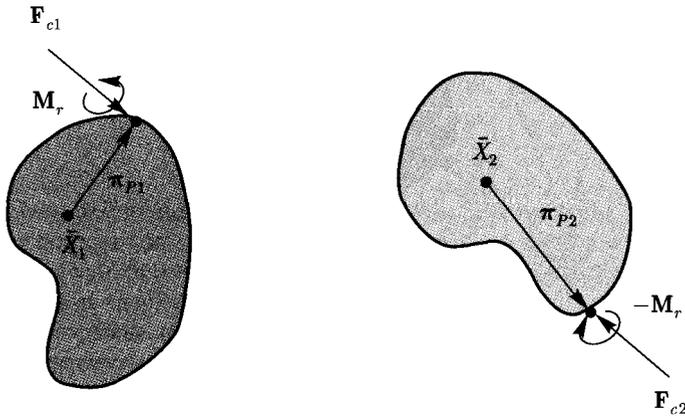


Рис. 8.9. Силовые схемы для двух свободных тел B_1 и B_2 , на которых показаны реакции связей \mathbf{F}_{c1} и \mathbf{F}_{c2} и момент реакции \mathbf{M}_r . Момент реакции равен $\mathbf{M}_r = \mu_{41}\mathbf{e}_1 + \mu_{51}\mathbf{e}_2$, а реакции связей равны по величине и противоположны по направлению (см. (8.24))

Важное замечание. Если два тела соединены гладким шарниром или их контакт сводится к взаимному качанию или скольжению без трения, то представление Лагранжа — очень удобный метод определения реакций связи и моментов реакции связи. Однако если в задаче присутствует трение скольжения, то представление Лагранжа не дает физически реалистичных сил и моментов связи.

8.7. Потенциальные энергии, консервативные силы и моменты

Ключевым пунктом решения многих задач является наличие консервативных сил и моментов, действующих на твердые тела. Определение кон-

⁷Впервые об этом наблюдении, которое можно рассматривать как обобщение третьего закона Ньютона для твердых тел, упоминалось в [163].

сервативной силы было введено в динамике материальной точки и легко поддается осмыслению, тогда как для консервативных моментов аналогичное утверждение не верно (см., например, работы Антмана [5] и О'Рейли и Шриниваса [163]). Действительно, для твердых тел, ось вращения которых не закреплена, постоянный момент не обязательно является консервативным (об этом говорится в работе Циглера [234]). Именно поэтому мы начнем с рассмотрения трех известных примеров сил и соответствующих им моментов. Затем приведем общие выражения для консервативных сил и моментов, с помощью которых вы сможете убедиться, что постоянный момент в примере Циглера не является консервативным.

Постоянные силы

Постоянная сила \mathbf{P} , действующая на твердое тело, консервативна. Если эта сила действует на все точки твердого тела, то она эквивалентна силе $\int_{\mathcal{R}} \mathbf{P} \rho dv$, приложенной к центру масс твердого тела⁸. Потенциальная энергия этой силы равна $-\int_{\mathcal{R}} \mathbf{P} \rho dv \cdot \bar{\mathbf{x}}$. Заметим, что этой силе не соответствует никакой момент относительно центра масс.

Самый распространенный пример постоянной силы — сила тяжести, действующая на все материальные точки. Эта сила эквивалентна силе $m\mathbf{g}$, приложенной к центру масс тела. Здесь единичный вектор \mathbf{g} обозначает направление силы тяжести. Потенциальная энергия этой силы равна $-m\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{x}}$.

Силы упругости

Во многих механических системах два тела при движении связываются пружиной. Рассмотрим систему двух твердых тел, изображенную на рис. 8.10. Пружина постоянной жесткости K и собственной длины L_0 крепится к материальной точке X_{s1} тела \mathcal{B}_1 и к материальной точке X_{s2} тела \mathcal{B}_2 .

Со стороны пружины на точку X_{s1} действует сила \mathbf{F}_{s1} , а на точку X_{s2} — равная ей по величине и противоположная по направлению сила \mathbf{F}_{s2} :

$$\mathbf{F}_{s1} = -K(\|\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}\| - L_0) \frac{\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}}{\|\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}\|},$$

$$\mathbf{F}_{s2} = -K(\|\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}\| - L_0) \frac{\mathbf{x}_{s2} - \mathbf{x}_{s1}}{\|\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}\|}.$$

⁸В данном предложении под \mathbf{P} следует понимать массовую плотность сил, приложенных к телу. — Прим. ред.

Легко видеть, что каждая из этих сил эквивалентна моменту относительно центра масс и силе, приложенной к центру масс. Пружине соответствует потенциальная энергия, равная

$$U_s = \frac{K}{2} (\|\mathbf{x}_{s1} - \mathbf{x}_{s2}\| - L_0)^2.$$

Обратите внимание, что потенциальная энергия зависит от радиус-векторов обеих материальных точек X_{s1} и X_{s2} .

Отметим два полезных тождества:

$$\mathbf{x}_{s1} = \mathbf{Q}_1(\mathbf{X}_{s1} - \bar{\mathbf{X}}_1) + \bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{x}_{s2} = \mathbf{Q}_2(\mathbf{X}_{s2} - \bar{\mathbf{X}}_2) + \bar{\mathbf{x}}_2,$$

где $\mathbf{X}_{s\alpha}$ — радиус-вектор точки $X_{s\alpha}$ тела B_α в его начальной конфигурации. С помощью этих тождеств легко видеть, что силы, моменты и потенциальную энергию пружины можно выразить как функции, зависящие от тензоров вращения обоих тел и радиус-векторов их центров масс.

Центральные гравитационные поля

Задача о движении тела в центральном силовом поле традиционна для небесной механики. Понятие центрального силового поля появилось благодаря Ньютону и его силе, изменяющейся по закону обратных квадратов. Напомним, что речь идет о консервативной силе, с которой на материальную точку массы m действует материальная точка массы M : $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки m относительно точки M , а G — универсальная гравитационная постоянная.

Рассмотрим два тела B_1 и B_2 , плотности которых равны соответственно ρ_1 и ρ_2 . Со стороны каждой материальной точки тела B_2 на каждую материальную точку тела B_1 действует сила притяжения (рис. 8.11). Если проинтегрировать эти силы по всем материальным точкам тел B_1 и B_2 , то мы получим равнодействующую силу, с которой B_2 действует на B_1 . Аналогичные выводы справедливы и для момента и потенциальной энергии этих сил. Равнодействующая гравитационная сила \mathbf{F}_n и момент \mathbf{M}_n , приложенные к телу B_1 со стороны тела B_2 , равны:

$$\mathbf{F}_n = - \int_{\mathcal{R}_1} \int_{\mathcal{R}_2} \frac{G}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2,$$

$$\mathbf{M}_n = - \int_{\mathcal{R}_1} \int_{\mathcal{R}_2} (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1) \times \frac{G}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2.$$

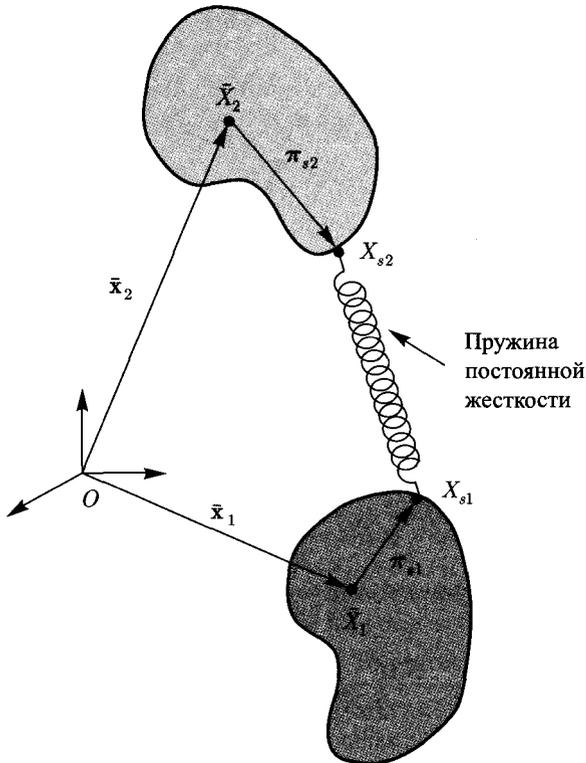


Рис. 8.10. Текущие конфигурации двух твердых тел B_1 и B_2 , соединенных пружиной

Момент M_n рассчитывается относительно центра масс \bar{X}_1 тела B_1 . Данному гравитационному полю соответствует потенциальная энергия

$$U_n = - \int_{\mathcal{R}_1} \int_{\mathcal{R}_2} \frac{G}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2.$$

Пусть тело B_2 имеет форму сферы массы M . Тогда выражения для гравитационной силы, момента и потенциальной энергии упрощаются:

$$\mathbf{F}_n = - \int_{\mathcal{R}_1} \frac{GM}{\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|} \rho_1 dV_1,$$

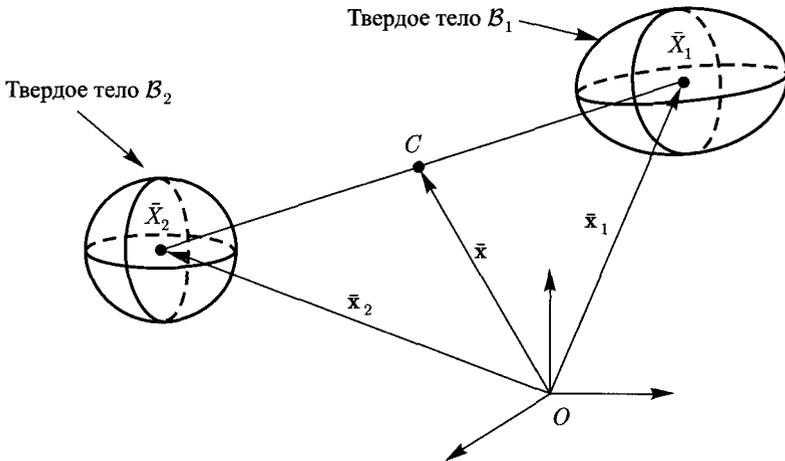


Рис. 8.11. Два твердых тела B_1 и B_2 , между которыми действуют гравитационные силы. Точкой C обозначен центр масс этой системы тел

$$\mathbf{M}_n = - \int_{\mathcal{R}_1} (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1) \times \frac{GM}{\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|} \rho_1 dV_1,$$

$$U_n = - \int_{\mathcal{R}_1} \frac{GM}{\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|} \rho_1 dV_1.$$

Важно отметить, что даже в этом упрощенном случае гравитационная сила может порождать момент, действующий на тело B_1 .

Чтобы максимально упростить эти выражения, используем тот факт, что тело B_1 является твердым. Тогда

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Pi}.$$

Кроме того, предположим, что значение $\|\boldsymbol{\pi}\|$ мало по сравнению со значением $\|\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|$. Сделанные допущения позволяют найти приближенные значения для сил, моментов и потенциальной энергии, соответствующих центральному силовому полю. После многочисленных преобразований находим:

$$\mathbf{F}_n \approx m\mathbf{g},$$

$$\mathbf{M}_n \approx \left(\frac{3GM}{R^3} \right) \mathbf{c} \times (\mathbf{J}\mathbf{c}) = - \left(\frac{3GM}{R^3} \right) \mathbf{c} \times (\mathbf{E}\mathbf{c}), \quad (8.25)$$

$$U_n \approx -\frac{GMm}{R} - \left(\frac{GM}{2R^3}\right) \text{tr}(\mathbf{J}) + \left(\frac{3GM}{2R^3}\right) (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{J}\mathbf{c})),$$

где \mathbf{J} — тензор инерции тела B_1 относительно его центра масс, \mathbf{E} — тензор Эйлера для тела B_1 относительно его центра масс, m — масса тела B_1 ,

$$m\mathbf{g} = -\frac{GMm}{R^2}\mathbf{c} - \frac{3GM}{2R^4}(2\mathbf{J} + (\text{tr}(\mathbf{J}) - 5\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}\mathbf{c})\mathbf{I})\mathbf{c}$$

и

$$R = \|\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|, \quad \mathbf{c} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2}{\|\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\|}.$$

Заметим, что вектор \mathbf{c} направлен от центра масс сферически симметричного тела B_2 к центру масс тела B_1 . В силу того, что в задаче присутствует тензор инерции \mathbf{J} , первое выражение из (8.25) не соответствует гравитационной силе, с которой материальная точка массы M действует на материальную точку массы m . Почти во всех работах, посвященных динамике спутников, используются выражения (8.25) (см., например, работы Белецкого [16], Хьюза [97] и Кейна и др. [106]). Выражение для потенциальной энергии U_n , в той форме, которая приводится в (8.25), было разработано Джеймсом Мак-Куллагом (1809–1847)⁹.

Во многих работах, посвященных динамике спутника, вращающегося вокруг неподвижной точки O , величину \mathbf{F}_n обычно аппроксимируют значением $\mathbf{F}_n = -\frac{GMm}{R^2}\mathbf{c}$. Такое приближение эффективно разделяет движение центра масс \bar{X}_1 тела B_1 и пространственную ориентацию тела, в результате чего \bar{X}_1 движется подобно материальной точке в задаче одного тела. Ориентация спутника рассчитывается как отдельная задача¹⁰. Однако Баркин [12] и Вэнг и др. [224] утверждают, что данное приближение нарушает законы сохранения кинетического момента и энергии. Динамика спутников, подчиняющаяся закону $\mathbf{F}_n = m\mathbf{g}$, исследуется в работах [12, 164, 224, 225]. Авторы перечисленных работ доказывают, что равномерное движение спутника возможно тогда, когда начало координат O лежит вне орбитальной плоскости для \bar{X}_1 . Это утверждение противоречит задаче одного тела, в которой орбитальная плоскость всегда содержит точку O .

Постоянные неконсервативные моменты

Продемонстрируем на примере Циглера [234], что не всякий постоянный момент является консервативным. Циглер рассматривал момент $M\mathbf{E}_3$. Во время движения твердого тела, которое состоит из поворота вокруг

⁹Некоторые замечания, касающиеся построения U_n и \mathbf{F}_n , формулируются в предположениях 4 и 5 работы [1]. Здесь же вы найдете комментарии по поводу построения M_n .

¹⁰Задача одного тела обсуждалась ранее в разделе 2.8.

оси \mathbf{E}_3 на угол $-\pi$ рад, этот момент совершает работу, равную $M\pi$. Однако, та же самая конечная ориентация тела достигается за счет поворота вокруг оси \mathbf{E}_1 на угол π рад с последующим поворотом вокруг оси \mathbf{E}_2 на угол π .¹¹ При этом, однако, постоянный момент не совершает работы! Следовательно, работа, совершаемая моментом $M\mathbf{E}_3$, зависит от «траектории» тела, и значит, момент $M\mathbf{E}_3$ не может быть консервативным.

В рамках многих курсов динамики вращение твердого тела рассматривается как вращение вокруг неподвижной оси, причем вращения вокруг осей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 не допускаются. В этом случае постоянный момент $M\mathbf{E}_3$ будет консервативным. Существует альтернативное доказательство того, что постоянный момент не является в общем случае консервативным (см., например, [160]). Доказательство основано на применении взаимного базиса Эйлера.

Общие построения

На данном этапе удобно перейти к общему рассмотрению консервативных сил и моментов в динамике твердого тела. Свои рассуждения будем строить в контексте двух тел, но их легко упростить до случая одного тела и так же легко обобщить на случай N тел.

Пусть в наиболее общей форме потенциальная энергия задается функцией

$$U = U(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2).$$

Очевидно, что эта функция зависит от движений обоих твердых тел и времени. Рассчитаем производную по времени от этой функции по формуле (8.10):

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 + \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 + u_{\mathbf{Q}_1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + u_{\mathbf{Q}_2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2, \quad (*)$$

где $u_{\mathbf{Q}_\alpha}$ — вектор, обозначающий производную от U по \mathbf{Q}_α . Как говорилось в разделе 6.10, этот вектор можно представить одним из многочисленных способов, самый простой из которых основан на параметризации тензоров \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 в углах Эйлера. Если обозначить эти углы и векторы взаимного базиса Эйлера через $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ и $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$ и $\{\nu^1, \nu^2, \nu^3\}$ и $\{\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3\}$ соответственно, то векторы $u_{\mathbf{Q}_1}$ и $u_{\mathbf{Q}_2}$ будут равны

$$u_{\mathbf{Q}_1} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma^k} \mathbf{g}^k, \quad u_{\mathbf{Q}_2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \nu^k} \mathbf{h}^k.$$

¹¹Этот пример демонстрирует применение теоремы Родрига–Гамильтона (6.51), которая обсуждалась в упражнениях к главе 6.

Рассмотрим консервативные силы $\overline{F_{\text{кон.}\alpha}}$ и моменты $M_{\text{кон.}\alpha}$ (относительно центров масс), соответствующие потенциалу U . Мы считаем, что совершаемая этими силами и моментами работа зависит от начальных и конечных конфигураций твердых тел и не зависит от движений твердых тел. Следовательно,

$$-\dot{U} = \mathbf{F}_{\text{кон.}1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{F}_{\text{кон.}2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + M_{\text{кон.}1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + M_{\text{кон.}2} \cdot \boldsymbol{\omega}_2.$$

Подставляя вместо \dot{U} выражение из (*) и группируя члены, получаем:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{F}_{\text{кон.}1} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \left(\mathbf{F}_{\text{кон.}2} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + (M_{\text{кон.}1} + u_{Q1}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \\ + (M_{\text{кон.}2} + u_{Q2}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Написанное можно интерпретировать как уравнение относительно $F_{\text{кон.}\alpha}$ и $M_{\text{кон.}\alpha}$, которое должно удовлетворяться при всех движениях твердых тел. Если предположить, что $F_{\text{кон.}\alpha}$ и $M_{\text{кон.}\alpha}$ не зависят от векторов линейной и угловой скорости, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы для всех $\bar{\mathbf{v}}_\alpha$ и $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ удовлетворялось уравнение (8.26), будет следующее:

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}_\alpha}, \quad M_{\text{кон.}\alpha} = -u_{Q\alpha}. \quad (8.27)$$

Итак, мы построили выражения для консервативных сил и моментов, соответствующих потенциальной энергии. В качестве упражнения докажите, что они не противоречат выражениям, которые мы приводили ранее для силы упругости и центральной гравитационной силы.

Пример с пружиной кручения

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий действие торсионной пружины на твердое тело. Применим выражения (8.27) и воспользуемся взаимным базисом Эйлера. Даже в этом простом случае пружина обладает необычным консервативным моментом.

Пусть тензор вращения для твердого тела параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера; на твердое тело действует торсионная пружина. Полагаем, что потенциальная энергия пружины равна $U = \frac{K_t}{2} \psi^2$, где K_t — жесткость при кручении. Тогда с учетом (8.27) и представления (8.9) для u_Q в углах Эйлера находим, что консервативный момент равен

$$M_{\text{кон.}} = -u_Q = -\frac{\partial U}{\partial \psi} \mathbf{g}^1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -K_t \psi \mathbf{g}^1 = \\
 &= -K_t \psi (\operatorname{ctg}(\theta) (\cos(\psi) \mathbf{E}_2 - \sin(\psi) \mathbf{E}_1) + \mathbf{E}_3).
 \end{aligned}$$

Этой потенциальной энергии соответствует консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$, равная нулю, поскольку потенциал не зависит от $\bar{\mathbf{x}}$. Интересно заметить, что не все составляющие момента $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$ направлены по оси \mathbf{E}_3 .

8.8. Заключение

Основные результаты, полученные в этой главе, касаются связей и консервативных сил и моментов. Мы показали, что при отсутствии динамического кулоновского трения связи удобно задавать в представлении Лагранжа. К примеру, если на движение одного твердого тела накладывается связь, уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + e = 0,$$

то сила и момент окажутся равными

$$\mathbf{F}_c = \mu \mathbf{f}, \quad \mathbf{M}_c = \mu \mathbf{h}.$$

Если предположить, что функция потенциальной энергии для твердого тела имеет вид

$$U = U(x_1, x_2, x_3, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3),$$

где x_i — декартовы координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$, а γ^i — углы Эйлера, то этому потенциалу будут соответствовать консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$ и консервативный момент $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$, равные

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{M}_{\text{кон.}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma^i} \mathbf{g}^i,$$

где \mathbf{g}^i — векторы взаимного базиса Эйлера, соответствующие углам Эйлера.

Задачи

8.1. Пусть на движение твердого тела накладываются две связи

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^3 = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^2 = 0,$$

где \mathbf{g}^i — взаимный базис Эйлера для выбранных вами углов Эйлера. Каков физический смысл этих связей? Найдите вектор угловой скорости, вектор кинетического момента и кинетическую энергию вращения твердого тела.

8.2. Пусть в точке P твердого тела действует сила \mathbf{P} . Радиус-вектор точки P в текущей конфигурации тела относительно центра масс $\bar{\mathbf{X}}$ тела равен $\boldsymbol{\pi}_P$:

$$\boldsymbol{\pi}_P = \mathbf{x}_P - \bar{\mathbf{x}}.$$

Кроме того, имеем:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_P.$$

- (a) Механическая мощность силы \mathbf{P} равна $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_P$. Докажите, что она также равна

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_P = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi}_P \times \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Дайте физическое толкование этого тождества с помощью силовой схемы свободного тела.

- (b) Сила \mathbf{P} , действующая в точке P , называется консервативной, если существует функция потенциальной энергии $U = U(\mathbf{x}_P)$, такая что

$$\mathbf{P} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_P}.$$

Докажите, что из такого определения силы следует равенство

$$-\dot{U} = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi}_P \times \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

- (c) Докажите, что потенциальная энергия $U = U(\mathbf{x}_P)$ может быть задана функцией от $\bar{\mathbf{x}}$, \mathbf{Q} , $\bar{\mathbf{X}}$ и $\boldsymbol{\Pi}_P$:

$$U = U(\mathbf{x}_P) = \tilde{U}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\Pi}_P, \bar{\mathbf{X}}).$$

Здесь \mathbf{Q} обозначает тензор вращения для твердого тела, а $\boldsymbol{\pi}_P = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Pi}_P$. Пользуясь этой эквивалентностью, докажите, что

$$\mathbf{P} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \quad \boldsymbol{\pi}_P \times \mathbf{P} = -u\mathbf{Q}.$$

- (d) Пусть \mathbf{P} задает силу, обусловленную действием пружины жесткости K , собственная длина которой равна L . Один конец пружины закреплен в неподвижной точке O . Чему равны функции $U(\mathbf{x}_P)$ и $\tilde{U}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\Pi}_P, \bar{\mathbf{X}})$ для этой силы \mathbf{P} ?

8.3. Даны два твердых тела. Тензор вращения для первого тела равен

$$\mathbf{Q}_1 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i.$$

Тензор вращения для второго тела равен

$$\mathbf{Q}_2 = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i.$$

Оси ${}_1\mathbf{e}_i$ вращаются вместе с первым телом, а оси ${}_2\mathbf{e}_i$ вращаются вместе со вторым телом.

- (а) Докажите, что тензор вращения второго тела относительно первого равен

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T = \sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{e}_i \otimes {}_1\mathbf{e}_i.$$

Чему равен тензор вращения первого тела относительно второго?

- (б) Докажите, что вектор угловой скорости второго тела относительно первого равен

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2}\epsilon \left[\sum_{i=1}^3 {}_2\mathbf{e}_i \otimes {}_2\mathbf{e}_i \right].$$

В этом выражении фигурирует коротационная производная относительно тензора \mathbf{Q}_1 , которая по определению равна

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}.$$

- (с) Пусть для параметризации тензора \mathbf{Q}_1 используется система 3-2-1 углов Эйлера, а для параметризации тензора \mathbf{R} — система 1-3-1 углов Эйлера. Докажите, что векторы угловой скорости для двух тел, а также вектор их относительной угловой скорости равны

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \dot{\gamma}^1 \mathbf{E}_3 + \dot{\gamma}^2 {}_1\mathbf{e}'_2 + \dot{\gamma}^3 {}_1\mathbf{e}_1, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \dot{\nu}^1 {}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\nu}^2 {}_2\mathbf{e}'_3 + \dot{\nu}^3 {}_2\mathbf{e}_1 + \dot{\gamma}^1 \mathbf{E}_3 + \dot{\gamma}^2 {}_1\mathbf{e}'_2 + \dot{\gamma}^3 {}_1\mathbf{e}_1, \\ \hat{\omega} &= \dot{\nu}^1 {}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\nu}^2 {}_2\mathbf{e}'_3 + \dot{\nu}^3 {}_2\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

- (д) Пусть на вращение второго тела относительно первого тела накладывается связь, такая что

$$\hat{\omega} = \dot{\nu}^2 {}_2\mathbf{e}'_3.$$

Какое шарнирное соединение реализует эту связь? Напишите выражения для моментов связи, действующих на оба тела.

8.4. На рис. 8.12 изображен китайский волчок, представляющий собой осесимметричное тело. Одна из поверхностей волчка может приближенно рассматриваться как сферическая поверхность с радиусом R , а другая — как цилиндрическая поверхность с радиусом r . Волчок спроектирован таким образом, чтобы его центр масс \bar{X} располагался ниже центра сферы. Как следствие, волчок может поворачиваться на 180° (рис. 8.13)¹².

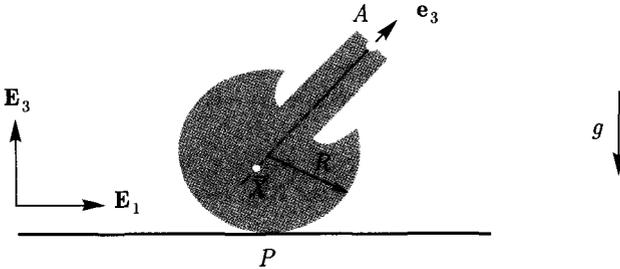


Рис. 8.12. Китайский волчок, движущийся по шероховатой горизонтальной плоскости

Через P обозначена мгновенная точка контакта между сферической частью волчка и горизонтальной плоскостью. Радиусы-векторы точек P и A относительно центра масс \bar{X} равны

$$\mathbf{x}_P - \bar{\mathbf{x}} = -R\mathbf{E}_3 + l\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_A - \bar{\mathbf{x}} = h\mathbf{e}_3.$$

- (а) Пользуясь системой 3-1-3 углов Эйлера, получите выражения для $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ и $\Omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_i$. При каких пространственных положениях волчка углы Эйлера принимают вырожденные значения?
- (б) Докажите, что скорости проскальзывания в точке P китайского волчка равны

$$\begin{aligned} v_{s1} &= \dot{x}_1 - \Omega_2(R - l \cos(\theta)) + \Omega_3(l \sin(\theta) \cos(\psi)), \\ v_{s2} &= \dot{x}_2 + \Omega_1(R - l \cos(\theta)) + \Omega_3(l \sin(\theta) \sin(\psi)), \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_P = v_{s1}\mathbf{E}_1 + v_{s2}\mathbf{E}_2$ и $\bar{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k \mathbf{E}_k$.

- (с) Допустим, что волчок скользит. Напишите выражения для реакции связи \mathbf{F}_c и момента связи \mathbf{M}_c , обуславливающих связь скольжения.

¹²Динамику китайского волчка исследовали многие авторы, например авторы работ [20, 154, 156, 177, 202, 219]. В перечисленных статьях подчеркивается немаловажная роль фрикционных сил, действующих в точке контакта.

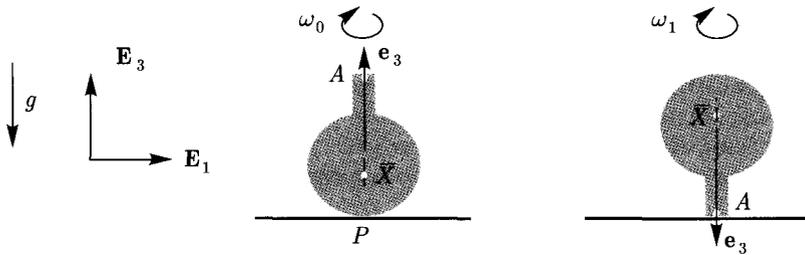


Рис. 8.13. Два устойчивых движения волчка: вертикальное положение, в котором $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$, и обратное положение, в котором $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_3$

- (д) Допустим, что китайский волчок катится. Напишите выражения для реакции связи \mathbf{F}_c и момента связи \mathbf{M}_c , обуславливающих связь качения.
- (е) Пользуясь уравнениями (8.13), докажите, что две из трех связей, которым подчиняется катящийся волчок, являются неинтегрируемыми.

8.5. Рассмотрите механическую систему, изображенную на рис. 8.14. Она состоит из твердого тела массы m , свободно вращающегося вокруг неподвижной точки O . Соединение в точке O таково, что тело не вращается вокруг своей продольной оси. На тело действует вертикальная сила тяжести $m\mathbf{g}\mathbf{E}_1$. Тензор инерции тела относительно его центра масс C равен

$$\mathbf{J}_0 = \lambda_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (\lambda - mL_0^2)(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3).$$

Радиус-вектор центра масс \bar{X} тела относительно точки O равен $L_0\mathbf{e}_1$.

Параметризуем тензор вращения тела в системе 1-3-1 углов Эйлера: $\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_3$ и $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1$. Вектор угловой скорости выражается через эти углы следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\phi}\mathbf{E}_1 + \dot{\theta}\mathbf{e}'_3 + \dot{\psi}\mathbf{e}_1 = \\ &= (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))\mathbf{e}_1 + (\dot{\theta}\sin(\psi) - \dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi))\mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (\dot{\theta}\cos(\psi) + \dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi))\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

- (а) При каких пространственных положениях тела углы Эйлера принимают вырожденные значения?
- (б) Получите выражения для потенциальной U и кинетической T энергий свободного твердого тела.

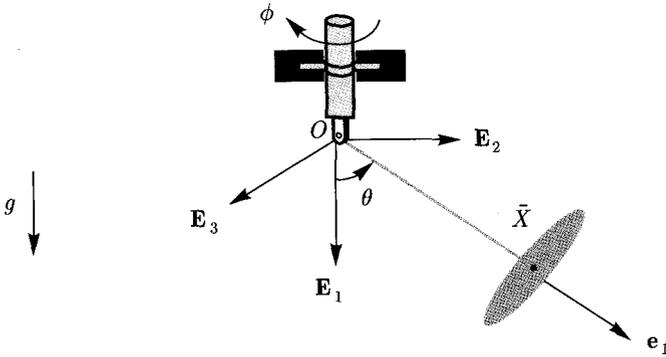


Рис. 8.14. Задача о маятнике

(c) Докажите, что движение твердого тела подчинится четырем связям:

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^3 = 0, \quad \bar{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\omega} \times (L_0 \mathbf{e}_1) = \mathbf{0}.$$

(d) Получите выражения для потенциальной U и кинетической T энергий несвободного твердого тела.

8.6. На рис. 8.15 показано осесимметричное твердое тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной точки O . Тензор инерции тела массы m равен:

$$\mathbf{J} = \lambda_a \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \lambda_t (\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Радиус-вектор центра масс этого тела относительно точки O равен

$$\bar{\mathbf{x}} = L_1 \mathbf{e}_3.$$

(a) Пользуясь системой 3-1-3 углов Эйлера, докажите, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ равен

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_1'' + \dot{\psi} \sin(\theta) \mathbf{e}_2'' + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \mathbf{e}_3''.$$

(b) Докажите, что кинетический момент \mathbf{H} равен

$$\mathbf{H} = \lambda_t \dot{\theta} \mathbf{e}_1'' + \lambda_t \dot{\psi} \sin(\theta) \mathbf{e}_2'' + \lambda_a (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \mathbf{e}_3''.$$

(c) Докажите, что кинетический момент центра масс относительно точки O равен

$$m L_1^2 (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2),$$

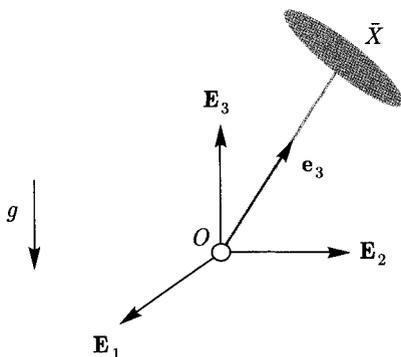


Рис. 8.15. Твердое тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной точки O . Тензор вращения \mathbf{Q} для этого тела параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера

где $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$. Чему равен кинетический момент твердого тела относительно точки O ?

- (d) Докажите, что кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{\lambda_t + mL_1^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{\lambda_a}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))^2.$$

- (e) На твердое тело действует консервативный момент, обусловленный действием пружины кручения. Как следствие, полная потенциальная энергия тела равна:

$$U = mg\bar{x} \cdot \mathbf{E}_3 + \frac{K}{2} \psi^2,$$

где K — жесткость торсионной пружины. Чему равны консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$ и консервативный момент $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$, действующие на тело?

8.7. Вспомните пример Циглера, в котором постоянный момент $M\mathbf{E}_3$ не являлся консервативным. Выберите систему углов Эйлера $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ и докажите, что не существует функции потенциальной энергии U , такой что $M\mathbf{E}_3 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma^i} \mathbf{g}^{i13}$.

8.8. Пусть один конец пружины постоянной жесткости K и собственной длины L_0 крепится к твердому телу в точке A , а другой конец пружины

¹³В [160] есть одно из решений этой задачи.

закреплен в неподвижной точке O . Радиус-вектор точки A относительно центра масс тела равен

$$\pi_A = R\mathbf{e}_3.$$

(а) Пользуясь системой 3-1-3 углов Эйлера, докажите, что

$$\mathbf{x}_A = (x_1 + R \sin(\theta) \sin(\psi))\mathbf{E}_1 + (x_2 - R \sin(\theta) \cos(\psi))\mathbf{E}_2 + \\ + (x_3 + R \cos(\theta))\mathbf{E}_3.$$

В этом уравнении $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{E}_k$.

(б) Пользуясь системой 3-1-3 углов Эйлера, докажите, что потенциальная энергия пружины равна

$$U = U(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}) = \frac{K}{2}(\sqrt{u} - L_0)^2,$$

где

$$u = (x_1 + R \sin(\theta) \sin(\psi))^2 + (x_2 - R \sin(\theta) \cos(\psi))^2 + \\ + (x_3 + R \cos(\theta))^2.$$

(с) Опишите два равнозначных метода расчета консервативной силы $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$ и консервативного момента $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$, обусловленных пружиной.

8.9. Рассмотрим случай катящегося диска, описанный в подразделе 8.6.3, и связи (8.21), накладывающиеся на его движение. Требуется доказать, используя теорему Фробениуса, что эта система связей является неинтегрируемой.

Сперва определим семь переменных:

$$U^1 = x_1, \quad U^2 = x_2, \quad U^3 = x_3, \\ U^4 = \phi, \quad U^5 = \psi, \quad U^6 = \theta, \quad U^7 = t.$$

(а) По формуле (8.15) рассчитайте матрицу \mathbf{W} размерности 3×7 . Найдите векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$, образующие ядро этой матрицы. Вы обнаружите, что один из векторов равен:

$$\mathbf{a}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

- (b) По формуле (8.15) рассчитайте три кососимметрические матрицы S^1, S^2 и S^3 размерностью 7×7 каждая. Эти матрицы соответствуют связям π_1, π_2 и π_3 соответственно. Вы увидите, что они имеют, самое большее, по два ненулевых элемента.
- (c) Пользуясь результатами из пунктов (a) и (b), докажите, что из теоремы Фробениуса следует наложение неинтегрируемых связей на катящийся диск. Поясните, как с помощью этого результата доказать, что скользящий диск подчиняется интегрируемой связи.
- (d) Пусть на катящийся диск накладываются две дополнительные интегрируемые связи:

$$x_2 = 0, \psi = 0.$$

Это значит, что диск катится вертикально вверх по прямой. Рассчитайте матрицу W размерности 5×7 и докажите, что ее ядро натянуто на векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , равные

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{a}_2 &= [-R \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

Кроме того, докажите, что кососимметрические матрицы S^4 и S^5 , соответствующие дополнительным связям, равны нулю. Наконец, по теореме Фробениуса докажите, что семейство связей $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0, \dot{x}_2 = 0$ и $\dot{\psi} = 0$ является интегрируемым.

8.10. На рис. 8.16 схематично изображена размалывающая машина Гриффина¹⁴. Зерно, которое необходимо перемолоть, помещается в бункер. По внутренней стенке бункера катится без скольжения жернов. Он порождает достаточно большую нормальную силу, которая давит на зерно. Жернов приводится в действие двумя карданными валами. Вектор угловой скорости вала I равен $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi} \mathbf{e}_3$. Два вала соединяются друг с другом в точке U посредством карданного шарнира. Жернов крепится к валу II так, что он может вращаться вокруг оси \mathbf{e}_3 второго вала. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вращается вместе с жерновом.

- (a) Пользуясь системой 3-1-3 углов Эйлера $\{\psi, \pi - \gamma, \phi\}$, докажите, что вектор угловой скорости для жернова равен

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi}(\sin(\phi) \sin(\pi - \gamma) \mathbf{e}_1 + \cos(\phi) \sin(\pi - \gamma) \mathbf{e}_2 + \cos(\pi - \gamma) \mathbf{e}_3) - \\ &\quad - \dot{\gamma}(\cos(\phi) \mathbf{e}_1 - \sin(\phi) \mathbf{e}_2) + \dot{\phi} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

¹⁴Рисунок взят из [8] Р. Н. Арнольда и Л. Модера и из [227] Вебстера.

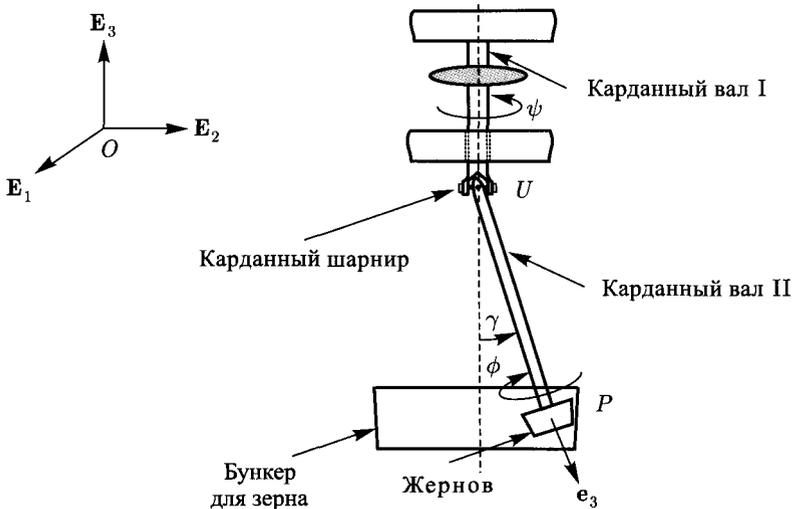


Рис. 8.16. Схема размалывающей машины Гриффина

При каких пространственных положениях жернова углы Эйлера принимают вырожденные значения? Чему равен вектор угловой скорости ω_{II} для карданного вала II и чему равна угловая скорость жернова относительно карданного вала II?

- (b) Радиус-вектор центра масс \bar{X} жернова относительно неподвижной точки U равен

$$\bar{x} = H e_3.$$

Получите выражение для вектора скорости \bar{v} точки \bar{X} .

- (c) Радиус-вектор точки P мгновенного контакта между жерновом и бункером относительно точки \bar{X} равен

$$\pi_P = -r(\cos(\phi)e_2 + \sin(\phi)e_1).$$

С учетом тождества $v_P = \omega \times \pi_P + \bar{v}$ найдите выражения для составляющих $v_P \cdot e_i$.

- (d) Докажите, что если $v_P = 0$, то значение γ постоянно, а скорости вращения $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ связаны соотношением:

$$\dot{\phi} = \left(\cos(\gamma_0) - \frac{H}{r} \sin(\gamma_0) \right) \dot{\psi},$$

где γ_0 — постоянное значение угла γ .

ГЛАВА 9

Кинетика твердого тела

9.1. Введение

В этой главе рассматриваются уравнения движения $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ для твердого тела. Вы узнаете, что, например, компоненты уравнения, выражающего закон изменения кинетического момента, на оси коротационного базиса \mathbf{e}_i , т. е. выражения $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}_i$, дают систему уравнений (9.9), называемых уравнениями Эйлера. В следующей главе мы покажем, что выражения $\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_i = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{g}_i$ дают уравнения Лагранжа.

После того как мы рассмотрим уравнения движения, вкратце остановимся на теореме об изменении кинетической энергии и покажем, как получить формулу сохранения энергии для твердого тела. После этого перейдем к обсуждению конкретных примеров. В частности, изучим динамику тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, безмоментное движение твердого тела, катящиеся и скользящие сферы, а также динамику бейсбольных и футбольных мячей. В задачах в конце главы будет рассмотрено еще несколько примеров. Тем не менее наши рассуждения, касающиеся решения конкретных задач, нельзя назвать исчерпывающими. В конце главы мы поговорим о нюансах решения ряда интересных задач, моделируемых с помощью одного твердого тела.

9.2. Уравнения движения твердого тела

Законы Эйлера для твердого тела можно рассматривать как обобщения второго закона Ньютона для материальной точки. Речь идет о двух законах, или постулатах: о производной количества движения и производной кинетического момента:

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O, \quad (9.1)$$

где \mathbf{H}_O — кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки O , а \mathbf{M}_O — результирующий момент внешних сил относительно

точки O . Трусделл [216, 217] утверждает, что эти законы рассматриваются в нескольких работах Эйлера, посвященных динамике твердого тела, а в статье [56], которую Эйлер написал в 1776 году, эти законы даются в окончательной форме¹.

Во многих случаях производную кинетического момента удобно записывать в альтернативной форме. Получим ее, исходя из тождества

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{G}.$$

Продифференцируем его и, используя теорему об изменении количества движения, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_O &= \dot{\mathbf{H}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}} \times \mathbf{G} + \bar{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{G}} = \\ &= \dot{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

С учетом теоремы об изменении кинетического момента (уравнения $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$) находим:

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{F}.$$

С другой стороны, суммарный момент сил относительно неподвижной точки O (\mathbf{M}_O) и суммарный момент сил относительно центра масс $\bar{\mathbf{x}}$ (\mathbf{M}) связаны соотношением²

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{F}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}.$$

Это выражение называется теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс $\bar{\mathbf{x}}$. В такой форме теорема об изменении используется при решении многих задач, в которых твердое тело не имеет фиксированной точки O .

Уравнения движения твердого тела называются законами Эйлера. Эти законы можно записать в виде одной и двух эквивалентных систем уравнений. В первом случае производная кинетического момента записывается относительно неподвижной точки O :

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O. \quad (9.2)$$

¹В работах [135, 230] есть дополнительные замечания, касающиеся этих законов. Более подробно о предварении равенств, упомянутом в [230], читайте в работе Хестенса [93].

²Это соотношение очевидно из раздела 8.5, в котором речь шла о системе сил и моментов сил, действующих на твердое тело.

Во втором случае производная кинетического момента записывается относительно центра масс \bar{x} :

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}. \quad (9.3)$$

Заметим, что

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{H}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \bar{\mathbf{x}} \times m\bar{\mathbf{v}}.$$

Точка O совпадает с началом системы координат, используемой для задания $\bar{\mathbf{x}}$.

Чтобы описать движение твердого тела, достаточно рассчитать $\bar{\mathbf{x}}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$. Для этого необходимо дополнить уравнения (9.2) и (9.3) данными о координатной системе, в которой параметризуется вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и тензор \mathbf{Q} .

9.3. Работа и сохранение энергии

Теорема об изменении кинетической энергии для твердого тела гласит, что скорость изменения кинетической энергии равна механической мощности внешних сил и моментов сил, действующих на тело. Существуют две эквивалентные формулировки этой теоремы:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \sum_{K=1}^N \mathbf{F}_K \cdot \mathbf{v}_K + \mathbf{M}_p \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Вторая форма особенно полезна тогда, когда надо доказать инвариантность энергии в конкретной задаче. Докажем эту теорему и рассмотрим закон сохранения энергии.

Доказательство теоремы об изменении кинетической энергии

Трудность доказательства этой теоремы кроется в определении кинетического момента $\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$. Чтобы преодолеть трудность, докажем сначала равенство

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) = 0. \quad (9.5)$$

Возьмем более ранний результат $\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J} - \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}$ и с учетом тождества $\boldsymbol{\Omega}^T\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ получим:

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} &= ((\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J} - \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{J}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Далее, поскольку $\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, находим:

$$\dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (9.6)$$

На последнем шаге мы учли симметричность тензора \mathbf{J} . Из (9.6) заключаем:

$$\dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (9.7)$$

чем мы тут же и воспользуемся.

Чтобы доказать теорему об изменении кинетической энергии (9.4), вспомним разложение Кёнига для кинетической энергии T твердого тела:

$$T = \frac{1}{2}m\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Дифференцируя T и применяя формулы (9.5) и (9.7), находим:

$$\begin{aligned}
 \dot{T} &= \dot{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) = \\
 &= \dot{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega}.
 \end{aligned}$$

С учетом теоремы об изменении количества движения и кинетического момента теорема об изменении кинетической энергии в форме (9.4)₁ сводится к виду:

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Чтобы доказать эту же теорему в альтернативной форме (9.4)₂, рассмотрим систему N сил \mathbf{F}_K , действующих на N материальных точек X_K твердого тела, и главный момент сил \mathbf{M}_p , действующий на тело. Для описанной системы сил и моментов справедливы формулы:

$$\mathbf{F} = \sum_{K=1}^N \mathbf{F}_K, \quad \mathbf{M} = \left(\sum_{K=1}^N (\mathbf{x}_K - \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{F}_K \right) + \mathbf{M}_p.$$

Применяя равенство $\mathbf{v}_K = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_K - \bar{\mathbf{x}})$ и осуществляя ряд преобразований, получаем:

$$\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_p \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{K=1}^N \mathbf{F}_K \cdot \mathbf{v}_K.$$

Правая часть этого выражения входит в альтернативную формулировку теоремы об изменении кинетической энергии (9.4)₂.

Сохранение энергии

В рамках большинства задач на динамику твердого тела, в которых не присутствует динамическое трение, полная энергия E тела — величина постоянная. Для доказательства допустим, что к телу приложены равнодействующая консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$ и консервативный момент (относительно центра масс) $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$, которым соответствует потенциальная энергия $U = U(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q})$:

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{M}_{\text{кон.}} = -u_{\mathbf{Q}}.$$

Кроме того, допустим, что на движение тела накладывается R связей вида

$$L\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + L\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + Le = 0 \quad (L = 1, \dots, R).$$

Реакция связи и момент связи в представлении Лагранжа равны:

$$\mathbf{F}_c = \sum_{L=1}^R \mu_L(L\mathbf{f}), \quad \mathbf{M}_c = \sum_{L=1}^R \mu_L(L\mathbf{h}).$$

Наконец, предположим, что все силы и моменты, действующие на тело, являются консервативными.

Проанализируем теорему об изменении кинетической энергии для твердого тела в форме (9.4)₁:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \mathbf{F}_c \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}_{\text{кон.}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_{\text{кон.}} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\omega} &= \sum_{L=1}^R \mu_L(L\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + L\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\sum_{L=1}^R \mu_L(Le), \\ \mathbf{F}_{\text{кон.}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_{\text{кон.}} \cdot \boldsymbol{\omega} &= -\frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - u_{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{U}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{T} = -\dot{U} - \sum_{L=1}^R \mu_L(Le).$$

Это значит, что $\dot{E} = 0$, где $E = T + U$, если $\sum_{L=1}^R \mu_L(Le) = 0$.

Итак, полная энергия E не изменяется тогда, когда $L_e = 0, \dots, R_e = 0$, а реакции и моменты связей задаются в представлении Лагранжа. Такая ситуация характерна для большинства задач на динамику твердого тела, имеющих аналитическое решение. Чуть позже мы рассмотрим несколько конкретных примеров.

9.4. Другие выражения для теоремы об изменении кинетического момента

Уравнение теоремы об изменении кинетического момента $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ является одним из интереснейших в механике. Его можно записать в разных компонентных формах, некоторые из которых мы сейчас и рассмотрим. Сначала докажем, что оно эквивалентно уравнению

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}.$$

Затем продемонстрируем, как получить знаменитые уравнения Эйлера (9.9) при условии, что \mathbf{e}_i — единичные векторы главных осей инерции \mathbf{J} . В качестве промежуточного результата напомним соответствующие компонентные формы для этих уравнений при условии, что \mathbf{e}_i не являются единичными векторами главных осей инерции \mathbf{J} .

Прямая форма

Требуется доказать, что уравнение $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ эквивалентно выражению:

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}.$$

Для доказательства проанализируем производные $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ и $\dot{\mathbf{J}}$.

В первую очередь вспомним, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Возьмем производную от этого выражения и найдем:

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Далее нам понадобится несколько тождеств. В частности,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

и

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J} + \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}^T, \quad \dot{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}.$$

Применяя эти тождества, находим:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \\
 &= \mathbf{J} \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}.
 \end{aligned}$$

Обобщая, приходим к выводу, что $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ эквивалентно уравнению

$$\mathbf{J} \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}.$$

В такой форме теорема об изменении кинетического момента особенно полезна тогда, когда \mathbf{J} — постоянный тензор (например, при решении задач на движение твердых сфер или твердых кубов). Кроме того, на его основе строят выражения при сохранении \mathbf{H} .

Мимоходом заметим, что выражение $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i$ предполагает следующее: чтобы значение $\boldsymbol{\omega}$ было постоянным, достаточно постоянства значений ω_i . Векторы \mathbf{e}_i могут и не быть стационарными.

Компонентная форма

Выберем произвольный базис $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ пространства \mathbb{E}^3 и запишем выражения для тензоров инерций \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

где $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \mathbf{E}_i$. Следовательно,

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \omega_k \mathbf{e}_i.$$

Дифференцируя \mathbf{H} , находим

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \dot{\omega}_k \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_{ik} \omega_k \mathbf{e}_i \right). \quad (9.8)$$

Если приравнять это выражение к \mathbf{M} , то получим уравнение $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ в компонентной форме. Однако, за исключением тех случаев, когда выражение для $\boldsymbol{\omega}$ имеет простой вид, применять эту компонентную форму не удобно. Уравнение (9.8) применяется, к примеру, в задачах на несбалансированные роторы, в рамках которых $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{E}_3$ и $J_{13} \neq 0$ и/или $J_{23} \neq 0^3$. В случаях без неподвижной оси вращения для главных осей инерции \mathbf{J}_0 целесообразно использовать базис $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$.

Случай с главными осями инерции

Если выбрать \mathbf{E}_i в качестве главных осей инерции \mathbf{J}_0 , то выражение для тензора примет знакомый вид:

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_i,$$

где λ_i — осевые моменты инерции. Векторы \mathbf{E}_i называют главными осями тела в его начальной конфигурации.

Определяя $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{E}_i$, приходим к выводу, что тензор инерции $\mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{J}_0\mathbf{Q}^T$ равен $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$. Следовательно,

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega_i \mathbf{e}_i.$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{H}}$, находим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \\ &= \mathbf{J} \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega_i \mathbf{e}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 \mathbf{e}_3 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_1 \omega_3 \mathbf{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_3 \omega_2 \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

³Пример такой системы описывается в [159, глава 9, раздел 7].

Итак, компонентные формы уравнения $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_3 \omega_2 &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1, \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_3 \omega_1 &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2, \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Эти уравнения называются эйлеровыми. Они представляют из себя три обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка относительно ω_i .

Чтобы найти тензор вращения \mathbf{Q} , необходимо дополнить уравнения (9.9) тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, связывающими ω с \mathbf{Q} :

$$\omega = -\frac{1}{2} \epsilon [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T].$$

Если, например, тензор \mathbf{Q} параметризуется в системе 3-2-1 углов Эйлера, то этими дифференциальными уравнениями будут:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi) \sec(\theta) & \cos(\phi) \sec(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & \sin(\phi) \operatorname{tg}(\theta) & \cos(\phi) \operatorname{tg}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.\tag{9.10}$$

Напомним, что система 3-2-1 углов Эйлера рассматривалась нами в подразделе 6.8.1. Дифференциальные уравнения (9.10) можно получить исходя из наших рассуждений в этом подразделе.

9.5. Безмоментное движение твердого тела

Безмоментное движение твердого тела протекает при $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Оно описывается решениями уравнений движения

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$$

для $\bar{\mathbf{x}}$ и \mathbf{Q} . Как правило, исследователи концентрируют внимание исключительно на сохранении кинетического момента и определении \mathbf{Q} . Аналитическое решение для \mathbf{Q} впервые получил Карл Якоби (1804–1851) в 1849 году⁴. Несмотря на это, традиционным считается исследование $\omega(t)$. Еще

⁴Решение Якоби подробно рассматривается в работе Уиттекера [228, раздел 69] и работе Ландау и Лифшица [125, раздел 37].

одно гениальное решение этой задачи было предложено Пуансо в 1834 году [172]⁵.

Выражения для составляющих $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ вектора угловой скорости находятся из трех уравнений $\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ (см. (9.9)):

$$\begin{aligned}\lambda_1 \dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_3 \omega_2 &= 0, \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 &= 0.\end{aligned}\tag{9.11}$$

Легко видеть, что из этих уравнений следует инвариантность кинетической энергии вращения $T_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}$ и вектора кинетического момента \mathbf{H} .

Из нескольких возможных случаев достаточно рассмотреть три:

- симметричное тело: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$;
- осесимметричное тело: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$;
- асимметричное тело: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Осесимметричное тело, для которого $\lambda_1 < \lambda_3$, называется сплюснутым. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ тело называется вытянутым. Для асимметричного тела ось \mathbf{e}_1 называется малой главной осью инерции, ось \mathbf{e}_2 — промежуточной главной осью инерции, а ось \mathbf{e}_3 — большой главной осью инерции. Рассмотрим подробнее каждый из случаев и решения $\omega_i(t)$.

Симметричное тело

Для симметричного тела уравнения (9.11) сводятся к виду $\dot{\omega}_i = 0$. То есть составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ постоянны. Поскольку $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_k \mathbf{e}_k$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ постоянен. Если положить $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$, то ось вращения \mathbf{q} тела будет фиксированной⁶, и значит, мы можем найти

$$\mathbf{Q}(t) = \cos(\nu)(\mathbf{I} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) - \sin(\nu)\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q},$$

где ось вращения и угол вращения равны

$$\mathbf{q} = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|}, \quad \nu = \|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|(t - t_0)$$

и $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t_0)$.

⁵Решение Пуансо анализируется во многих учебниках, например в работах Марседена и Ра-тиу [138] и Пауса [184].

⁶Возможны и другие варианты для $\mathbf{Q}(t_0)$, которые, однако, не гарантируют постоянства оси вращения \mathbf{q} для тензора \mathbf{Q} .

Для симметричного тела все оси являются главными. Следовательно, такое тело можно построить вращением вокруг любой оси с постоянной скоростью. Чуть позже мы придем к аналогичным результатам для осесимметричного и асимметричного тел.

Осесимметричное тело

Для осесимметричного тела удобно определить $\lambda_t = \lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_a = \lambda_3$. Управляющие уравнения для составляющих угловой скорости (9.11) сводятся к виду

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= k_t \Omega \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= -k_t \Omega \omega_1, \\ \omega_3 &= \Omega,\end{aligned}\tag{9.12}$$

где $\Omega = \omega_3(t_0)$ — константа, а

$$k_t = \frac{\lambda_t - \lambda_a}{\lambda_t}.$$

Дифференциальные уравнения (9.12) имеют простое аналитическое решение:

$$\begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_t \Omega(t - t_0)) & \sin(k_t \Omega(t - t_0)) \\ -\sin(k_t \Omega(t - t_0)) & \cos(k_t \Omega(t - t_0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t_0) \\ \omega_2(t_0) \end{bmatrix}.\tag{9.13}$$

Итак, мы рассчитали $\omega_i(t)$.

Остановимся на нескольких частных случаях. Во-первых, заметим, что тело можно вращать с постоянной скоростью либо вокруг оси e_3 , либо вокруг любой оси в плоскости $e_1 - e_2$. Все эти оси являются главными осями тела. Значит, движение тела можно построить в виде вращения с постоянной скоростью вокруг главной оси.

Интересной особенностью осесимметричного тела является то, что составляющая вектора ω по оси симметрии e_3 всегда постоянна. Это утверждение верно даже в том случае, когда функция $e_3(t)$ достаточно сложна. Объяснением служит инвариантность кинетического момента $\mathbf{H} \cdot e_3$. Инвариантность составляющей $\omega_3(t)$ является ключом к решению многих задач динамики твердого тела, а также широко используется в проектировании маховиков.

Асимметричное тело

Если тело асимметрично, то его осевые моменты инерции отличны друг от друга. Если заново проанализировать уравнения (9.11) для этого

случая, то мы увидим, что если все, кроме одной, составляющие ω_i равны нулю, то ненулевая составляющая всегда будет постоянной. К примеру, если $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$, то составляющая ω_1 может иметь любое значение, инвариантное для уравнений движения. Следовательно, тело можно вращать с постоянной скоростью вокруг главной оси при отсутствии приложенного момента сил \mathbf{M} . Как и в двух предыдущих случаях, движение тела можно построить в виде вращения с постоянной скоростью вокруг главной оси.

Импульсная сфера

Чтобы наглядно изобразить решения уравнений (9.11), воспользуемся графическим методом, который был разработан в середине 19-го века. В основе метода лежат два факта: решения $\omega_i(t)$ уравнений (9.11) оставляют неизменными величину вектора \mathbf{H} и кинетическую энергию вращения $T_{\text{вр.}}$. Следовательно, решения

$$h_i(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \omega_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

лежат на пересечении поверхностей $h = h_0$ и $T_{\text{вр.}} = T_E$, где

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2,$$

$$T_{\text{вр.}} = \frac{h_1^2}{2\lambda_1} + \frac{h_2^2}{2\lambda_2} + \frac{h_3^2}{2\lambda_3},$$

а значения h_0 и T_E определяются из начальных условий $\omega_i(t_0)$.

Поверхность $h = h_0$ в трехмерном пространстве $h_1 - h_2 - h_3$ соответствует сфере и называется *импульсной сферой*. Поверхность $T_{\text{вр.}} = T_E$ в трехмерном пространстве $h_1 - h_2 - h_3$ соответствует эллипсоиду и называется *эллипсоидом энергии*. Пересечением эллипсоида со сферой будет либо дискретный набор точек, либо набор кривых⁷. Эти пересечения являются траекториями функций $h_i(t)$. На 9.1а показаны пересечения для осесимметричного тела, а на рис. 9.1б — соответствующие пересечения для асимметричного тела⁸. Эти рисунки весьма популярны в динамике.

На рис. 9.1а видно, что эллипсоид энергии имеет ось вращения (в нашем случае это третья ось). В случае симметричного тела эллипсоид энергии вырождается в сферу, которая совпадает с импульсной сферой, из-за чего применение графического метода для иллюстрации решений $h_i(t)$ (и $\omega_i(t)$) теряет смысл. Однако нам уже известно, что для симметричного

⁷ Более подробно об этих пересечениях читайте в работе Синга и Гриффита [207].

⁸ Рисунки нам любезно предоставил весной 2007 года Патрик Кесслер.

тела $\omega_i(t) = \omega_i(t_0)$. Следовательно, любая точка на поверхности импульсной сферы соответствует равномерному вращательному движению твердого тела.

Устойчивость и неустойчивость равномерных вращений

Проанализируем кривые $\lambda_i \omega_i(t)$ на импульсной сфере и сделаем кое-какие выводы о характере равномерных вращений твердого тела. Наши рассуждения будут носить качественный характер; более детальное исследование этого вопроса можно найти в других учебниках. Устойчивость равномерных вращений анализируется, например, в работах Хана [85], Хьюза [97] и Марсдена и Ратиу [138].

Из анализа траекторий, изображенных на рис. 9.1а, следует, что равномерное вращение вокруг оси e_3 является устойчивым. Под устойчивостью мы понимаем то, что если слегка отклонить вращательное движение тела от невозмущенного состояния, то решения $h_i(t)$ (или, что эквивалентно, решения $\omega_i(t)$) останутся в непосредственной близости от состояния $(h_1(t), h_2(t), h_3(t)) = (0, 0, h_{3s})$, где h_{3s} — значение величины h_3 , соответствующее равномерному вращению⁹. С другой стороны, по рис. 9.1а видно, что равномерные вращения вокруг произвольной оси в плоскости $e_1 - e_2$ не удовлетворяют этому условию. Значит, такие равномерные вращения не устойчивы.

Анализ траекторий на рис. 9.1b, характерных для асимметричного случая, подтверждает сделанные ранее заключения о возможном существовании шести равномерных вращений. Четыре вращения вокруг осей e_1 и e_3 являются устойчивыми, тогда как два вращения вокруг оси e_2 — неустойчивыми. Таким образом, вращение вокруг промежуточной главной оси инерции не устойчиво, а вращения вокруг большой главной (e_3) и малой (e_1) осей инерции устойчивы.

Ориентация вращательных движений

Та информация, которую мы извлекаем из импульсной сферы, не дает полного описания движения твердого тела. Мы до сих пор ничего не можем сказать о свойствах тензора \mathbf{Q} . Чтобы получить необходимую информацию, можно воспользоваться аналитическими решениями Якоби, речь о которых шла ранее, или параметризовать \mathbf{Q} с последующим численным интегрированием уравнений, связывающих ω_i с выбранными параметрами. Если, например, тензор \mathbf{Q} параметризуется в системе 3-2-1 углов Эйлера,

⁹Поскольку $h_i = \lambda_i \omega_i$, результаты, справедливые для h_i , можно отнести и к ω_i .

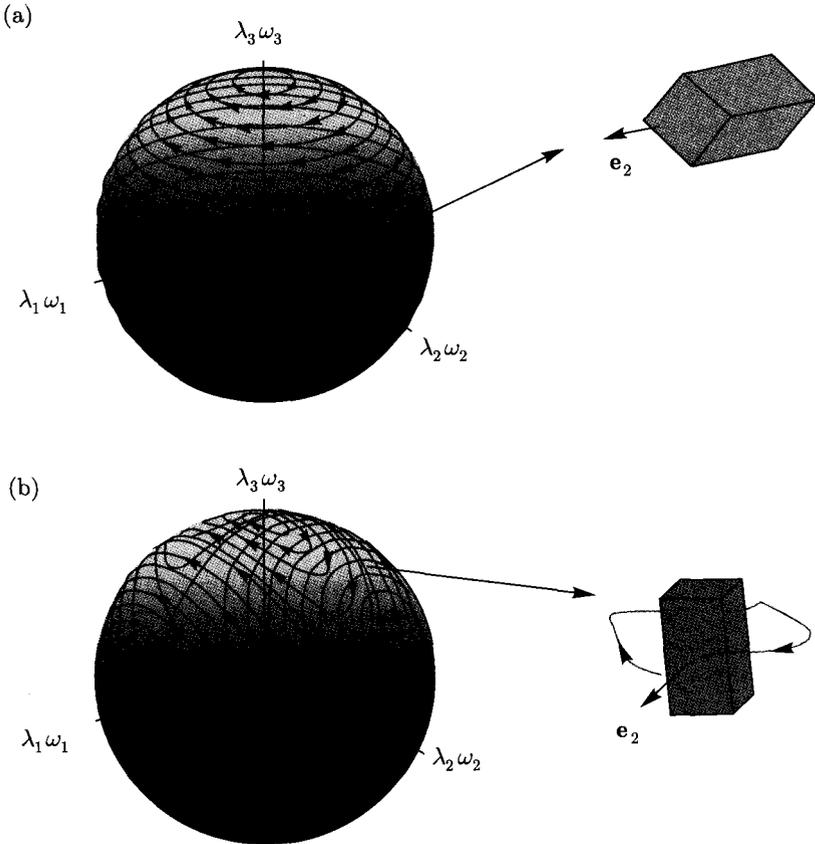


Рис. 9.1. Траектории составляющих $\lambda_i \omega_i$ на импульсной сфере. Кривые и точки на поверхности сферы соответствуют пересечениям импульсной сферы с эллипсоидом энергии. На рисунке изображены два отличных друг от друга тела: (а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 5$ и (б) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 5$. Для каждого рисунка справа показано безмоментное движение вектора e_2 , вращающегося одновременно с движением параллелепипеда, которое соответствует одной из траекторий на сфере. При построении рисунков были численно проинтегрированы уравнения (9.10) и (9.11)

то, помимо интегрирования уравнений (9.11), надо проинтегрировать уравнения (9.10) и найти $\phi(t), \theta(t)$ и $\psi(t)$. После этого мы сможем построить $e_i(t)$ и визуализировать движение тела.

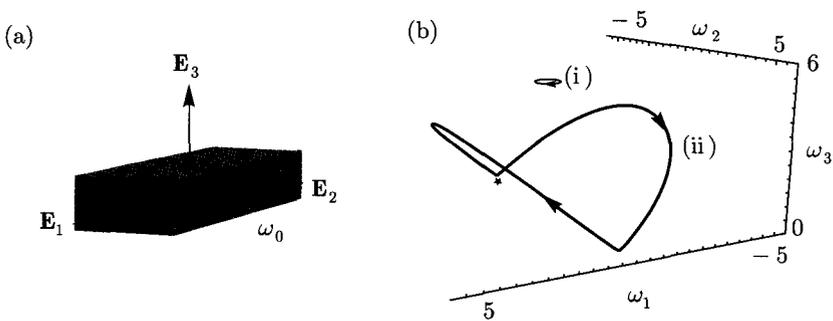


Рис. 9.2. Безмоментное движение твердого тела: (а) твердое тело и его главные оси, (б) составляющие $\omega_i(t) = \omega \cdot e_i$, соответствующие двум разным наборам начальных условий: (i) $\omega(0) = 0,5\mathbf{E}_2 + 5,0\mathbf{E}_3$ и (ii) $\omega(0) = 5,0\mathbf{E}_2 + 0,1\mathbf{E}_3$. Рисунки построены по результатам численного интегрирования уравнений (9.10) и (9.11) при начальных условиях $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ и значениях параметров $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 5$

На рис. 9.2, 9.3 и 9.4 показаны результаты для двух примеров численного интегрирования уравнений (9.10) и (9.11). Первый пример соответствует возмущению равномерного движения твердого тела, вращающегося вокруг главных осей. При таком вращении возникает максимальный момент инерции. Результирующее поведение векторов $\omega_i(t)$ соответствует траектории (i) на рис. 9.2b. Поведение векторов коротационного базиса показано на рис. 9.3. Из первого рисунка должно быть очевидно, что возмущение равномерного вращения не ведет к существенному отклонению векторов $e_i(t)$ от их поведения при равномерном вращении. Проще всего визуализировать полученные результаты следующим образом: подбросьте вверх книгу с начальным вращением вокруг оси e_3 и вы заметите, что, хотя книга будет покачиваться, ее мгновенная ось вращения не отклонится существенно от начального состояния.

На рис. 9.4 показано поведение векторов $e_k(t)$, соответствующее траектории $\omega_i(t)$, проходящей вблизи невозмущенного движения $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, \omega_0, 0)$. Это невозмущенное движение обозначено на рисунке звездочкой. На рис. 9.4b видно, что вектор $e_2(t)$, изначально близкий к вектору E_2 в момент времени $t = 0$, существенно отклоняется от своего начального значения. Такая ситуация противоположна ситуации, изображенной на рис. 9.3, и говорит о неустойчивости равномерного безмоментного движения твердого тела вокруг промежуточной оси инерции. Проще всего продемонстрировать эту неустойчивость следующим образом: возьмите книгу и задайте ей начальную угловую скорость вокруг оси e_2 . Вы увидите, что

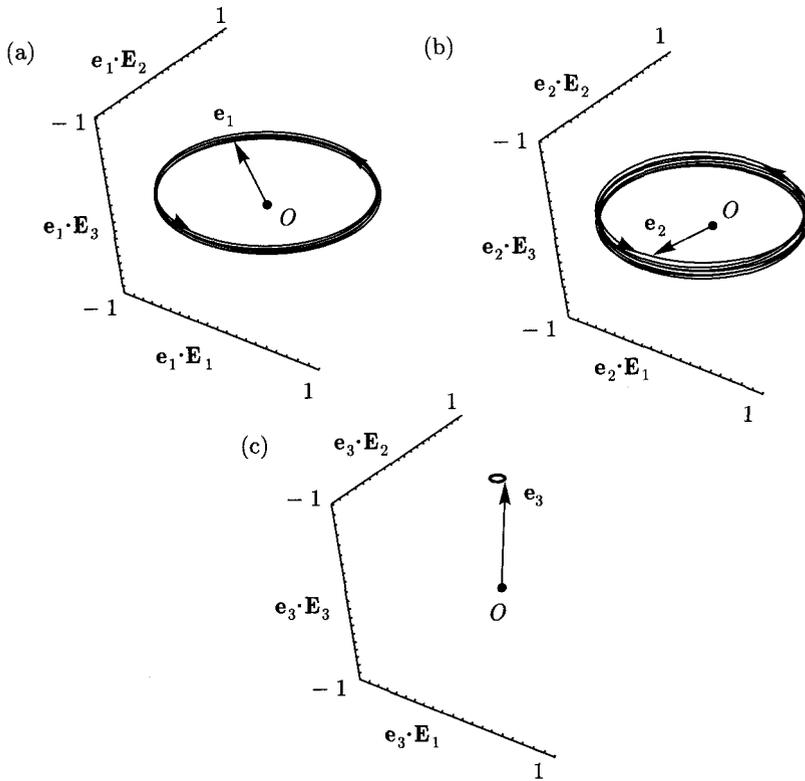


Рис. 9.3. Результаты моделирования, иллюстрирующие устойчивость равномерного вращения твердого тела вокруг главной оси, соответствующей максимальной оси инерции. (а) Составляющие E_i вектора $e_1(t)$, (б) составляющие E_i вектора $e_2(t)$ и (с) составляющие E_i вектора $e_3(t)$. Эти результаты соответствуют траектории (i) на рис. 9.2b

книга будет покачиваться, при этом $\omega \cdot e_2$ будет поочередно принимать то положительные, то отрицательные значения. Вы, действительно, сможете пронаблюдать это движение и сделать так, чтобы книга повернулась на 180° вокруг оси e_1 или e_3 . Это крутящее движение было замечено лишь недавно и проанализировано в работе Эшбауха и др. [11]¹⁰.

¹⁰В работе [11] используются две разные системы углов Эйлера, что позволяет избежать сингулярностей при параметризации тензоров вращения в углах Эйлера. Для примеров, изображенных на рис. 9.3 и 9.4, использование второй системы углов Эйлера не обязательно.

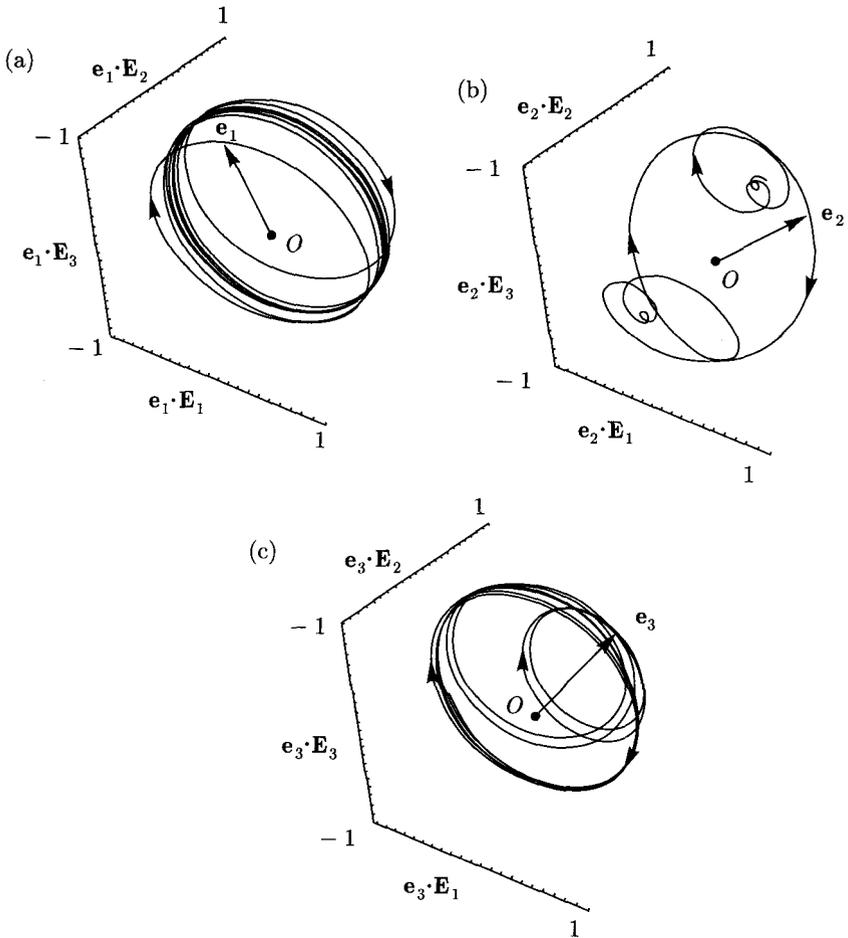


Рис. 9.4. Результаты моделирования, иллюстрирующие неустойчивость равномерного вращения твердого тела вокруг главной оси, соответствующей промежуточной оси инерции. (а) Составляющие E_i вектора $e_1(t)$, (б) составляющие E_i вектора $e_2(t)$ и (с) составляющие E_i вектора $e_3(t)$. Эти результаты соответствуют траектории (ii) на рис. 9.2б

9.6. Бейсбольный и футбольный мячи

Рассмотрим сферу массы m и радиуса R , брошенную в пространство с начальной скоростью $\vec{v}(t_0)$ и угловой скоростью $\omega(t_0)$. Начальная ориентация сферы задается тензором $\mathbf{Q}(t_0)$. Требуется описать движение вектора \vec{x} и рассчитать \mathbf{Q} сферы. Как утверждает в статье Тейта [211], еще Исаак Ньютон знал о том, что в результате вращения сферы при ее движении в атмосферном воздухе траектория центра сферы искривляется. Из-за этого свойства мы наблюдаем необычную динамику во многих видах спорта, таких как гольф, бейсбол и футбол. Наша цель — проанализировать искривление траектории сферы. Будем опираться на материал нескольких классических работ, главным образом, на статью Тейта [211].

Сила Магнуса

Ключевая сила, действующая на сферу, называется подъемной силой или силой Магнуса (рис. 9.5)¹¹:

$$\mathbf{F}_M = mB\omega \times \vec{v},$$

где B — положительная константа. Знак B определяется по уравнению Бернулли¹². Ясно, что эта сила моделирует взаимодействие вращения с линейной скоростью. Недавние исследования, построенные на результатах штрафных ударов в футболе, показали, что поле течения может переходить от турбулентного к ламинарному, из-за чего траектория полета мяча существенно изменяется (см. Карре и др. [25]). Согласно Айресону [100], для нескольких свободных ударов в футболе $\|\vec{v}\| = 25$ м/с и $mB \approx 0,15716$ кг.

Помимо силы тяжести и силы Магнуса, на сферу действует сила сопротивления, равная

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_f AC_d(\vec{v} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

В этом выражении C_d — коэффициент сопротивления, ρ_f — плотность жидкости, в которой движется сфера, а A — фронтальная площадь сферы, соприкасающейся с жидкостью: $A = \pi R^2$.

¹¹Она была названа так в честь немецкого ученого Генриха Густава Магнуса (1802–1870) в 1851 году (см. [133, 134])

¹²Уравнение Бернулли применяется к течению невязкой жидкости и гласит, что сумма давления p и величины $\frac{1}{2}\rho_f U^2$ постоянна. Здесь U обозначает скорость движения жидкости, ρ_f — плотность жидкости.

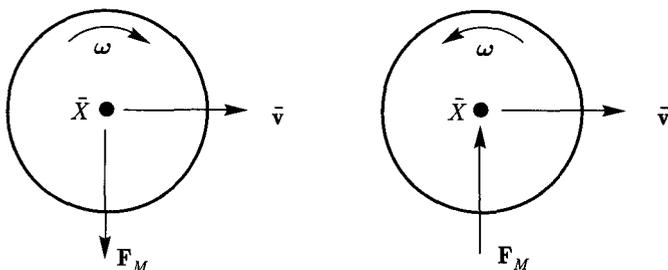


Рис. 9.5. Сфера, центр масс которой движется вправо с вектором скорости \bar{v} . Когда мяч вращается по часовой стрелке, скорость воздуха, движущегося поверх мяча, оказывается меньше скорости воздуха, соприкасающегося с нижней поверхностью мяча. Из уравнения Бернулли следует, что давление на верхушку мяча больше давления на нижнюю часть мяча, в результате чего возникает направленная вниз сила \mathbf{F}_M . Когда мяч вращается против часовой стрелки, сила Магнуса направлена вверх

Уравнения движения

Для рассматриваемой системы $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{H} = \frac{2mR^2}{5}\boldsymbol{\omega}$, откуда заключаем, что $\boldsymbol{\omega}$ постоянна:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t_0).$$

Иначе говоря, угловая скорость сферы не изменяется. Как и в случае симметричного тела, можно легко рассчитать тензор вращения сферы, если положить, что $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{Q}(t) = \cos(\nu)(\mathbf{I} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) - \sin(\nu)\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q},$$

где единичный вектор оси и угол вращения равны

$$\mathbf{q} = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|}, \quad \nu = \|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|(t - t_0).$$

Чуть позже мы увидим, что решение этой задачи о движении центра масс сферы вовсе не тривиально.

Пусть тензор вращения $\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}_k$ для твердого тела параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера (см. подраздел 6.8.2). Векторы базиса Эйлера при этом равны

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \sin(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (9.14)$$

Далее, на углы Эйлера накладываются ограничения: $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ и $\psi \in [0, 2\pi)$. Используя эти углы Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \Omega_1 \mathbf{E}_1 + \Omega_2 \mathbf{E}_2 + \Omega_3 \mathbf{E}_3 = \\ &= (\dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi)) \mathbf{E}_1 + (\dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi)) \mathbf{E}_2 + \\ &\quad + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Если задать радиус-вектор центра масс в декартовых координатах ($\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_i = x_i$), то получим

$$\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}} = (\dot{x}_3 \Omega_2 - \dot{x}_2 \Omega_3) \mathbf{E}_1 + (\dot{x}_1 \Omega_3 - \dot{x}_3 \Omega_1) \mathbf{E}_2 + (\dot{x}_2 \Omega_1 - \dot{x}_1 \Omega_2) \mathbf{E}_3. \quad (9.15)$$

Из предыдущих рассуждений, касающихся теоремы об изменении кинетического момента, мы знаем, что составляющие Ω_i постоянны.

Из теоремы об изменении количества движения для сферы строится уравнение движения центра масс. Рассчитывая в декартовых координатах $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, находим

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= (\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M) \cdot \mathbf{E}_1, \\ m\ddot{x}_2 &= (\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M) \cdot \mathbf{E}_2, \\ m\ddot{x}_3 &= -mg + (\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M) \cdot \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Пренебрегая силой сопротивления и применяя (9.15), получаем три дифференциальных уравнения для $x_i(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mB(\dot{x}_3 \Omega_2 - \dot{x}_2 \Omega_3), \\ m\ddot{x}_2 &= mB(\dot{x}_1 \Omega_3 - \dot{x}_3 \Omega_1), \\ m\ddot{x}_3 &= mB(\dot{x}_2 \Omega_1 - \dot{x}_1 \Omega_2) - mg. \end{aligned} \quad (9.16)$$

В общем случае эти уравнения численно интегрируют и находят $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

Траектория мяча

Рассмотрим простой случай, в котором $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \Omega_{10} \mathbf{E}_1$. Из предыдущих рассуждений известно, что для твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ постоянен. Сле-

довательно, уравнения (9.16) сводятся к виду:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 &= -mB\dot{x}_3\Omega_{10}, \\ m\ddot{x}_3 &= mB\dot{x}_2\Omega_{10} - mg. \end{aligned}$$

Если допустить, что $B\Omega_{10} \neq 0$, то решением этих дифференциальных уравнений будет:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) - x_1(t_0) \\ x_2(t) - x_2(t_0) \\ x_3(t) - x_3(t_0) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0) - \frac{g}{B\Omega_{10}} \\ \dot{x}_3(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t-t_0)}{B\Omega_{10}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.17)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t - t_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(B\Omega_{10}(t-t_0))}{B\Omega_{10}} & -\frac{1 - \cos(B\Omega_{10}(t-t_0))}{B\Omega_{10}} \\ 0 & \frac{1 - \cos(B\Omega_{10}(t-t_0))}{B\Omega_{10}} & \frac{\sin(B\Omega_{10}(t-t_0))}{B\Omega_{10}} \end{bmatrix}.$$

По уравнению (9.17) можно определить траекторию движения центра масс сферы. Обратите внимание на два важных свойства: спин Ω_{10} оказывает влияние на скорость \dot{x}_2 сферы и, кроме того, изменяет положение сферы и скорость по вертикали. Сравним формулу (9.17) с соответствующим выражением, в котором отсутствует сила Магнуса. В последнем случае траектория центра масс является параболической:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) - x_1(t_0) \\ x_2(t) - x_2(t_0) \\ x_3(t) - x_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t - t_0)\dot{x}_1(t_0) \\ (t - t_0)\dot{x}_2(t_0) \\ (t - t_0)\dot{x}_3(t_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \end{bmatrix}.$$

На рис. 9.6 показаны примеры траекторий точки, выпущенной из начала координат. При малых значениях $B\Omega_{10}$ траектория существенно отличается от той, которая рассчитывается при отсутствии силы Магнуса: спин (Ω_{10}) в одном направлении приведет к тому, что мяч «поднимется», а когда направление спина изменится на противоположное, то мяч «опустится». При больших значениях $|B\Omega_{10}|$ траектории начинают носить нефизический характер: либо появляется точка заострения, либо знак производной \dot{x}_3 меняется на противоположный¹³. Таким образом, представления силы Магнуса применимы не ко всем физическим ситуациям.

¹³На рис. 4 в [211] видно, что движения такого типа обнаруживаются и в соответствующем анализе Тейта.

Мы упростили построение уравнений движения в этой задаче за счет того, что момент тензора инерции для сферы имеет простой вид. Интересно сравнить полет мяча в нашей модели с полетом игрушечной летающей тарелки. Уравнения движения летающей тарелки формулируются, к примеру, в работах [95, 97]; подъемная сила и сила сопротивления, действующие на летающую тарелку, найдены по результатам экспериментов.

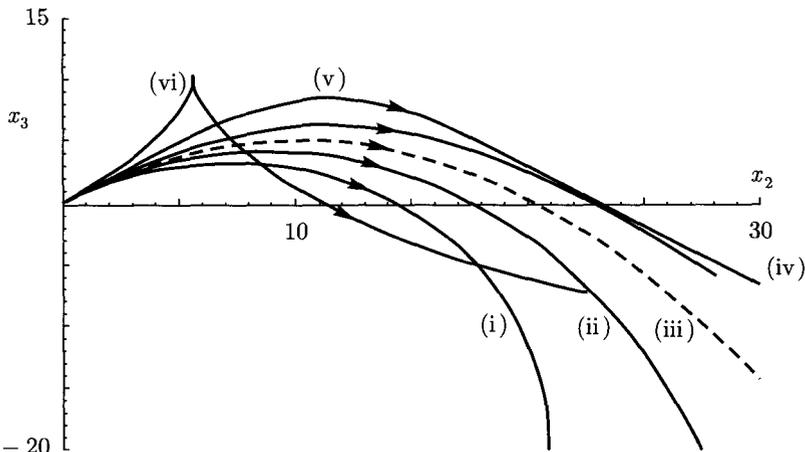


Рис. 9.6. Траектории движения центра масс сферы, выпущенной из начала координат с начальной скоростью $\mathbf{v}(t_0) = 10(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$ и начальной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \Omega_{10}\mathbf{E}_1$. Траектории соответствуют разным значениям $B\Omega_{10}$: (i) $B\Omega_{10} = -0,5$, (ii) $B\Omega_{10} = -0,2$, (iii) $B\Omega_{10} = 0,0$, (iv) $B\Omega_{10} = 0,2$, (v) $B\Omega_{10} = 0,5$ и (vi) $B\Omega_{10} = 1,0$. Все траектории построены для значений периода в 4 с и $g = 9,81$ м/с²

9.7. Движение твердого тела с одной закрепленной точкой

Задача о движении тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки O , которая также является материальной точкой тела, занимает важное место в истории механики. На рис. 9.7 изображен пример такого тела. Аналогичные системы встречаются в маятниках часов и некоторых вращающихся волчках. В этих системах на движение тела накладываются три связи. Эти связи реализуются реакциями, действующими в точке O , и определяются из закона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Еще один закон изменения, $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, имеет необычную форму и позволяет найти тензор вращения \mathbf{Q} для твердого тела.

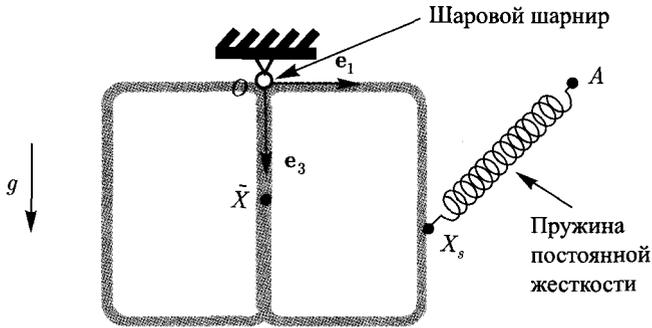


Рис. 9.7. Пример твердого тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки O , которая также является материальной точкой тела. В этом примере $\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_O = h\mathbf{e}_3$, где h — постоянная. Кроме того, на тело действуют консервативные силы со стороны пружины постоянной жесткости и Земли

Кинематика

Материальная точка O рассматриваемого тела совпадает с началом координат: $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$. Пусть радиус-вектор центра масс относительно точки O равен

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_O = L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3,$$

где L_i — постоянные. Дифференцируя это уравнение по времени, получаем

$$\bar{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times (L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3). \quad (9.18)$$

С помощью этого выражения можно выразить кинетический момент \mathbf{H}_O через тензор инерции \mathbf{J}^O тела относительно точки O и построить удобное выражение для кинетической энергии T тела.

Сначала запишем выражение для \mathbf{H}_O , зависящее от \mathbf{H} и \mathbf{G} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \mathbf{H} + \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{G} = \\ &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + m(L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3) \times (\boldsymbol{\omega} \times (L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3)) = \\ &= \mathbf{J}^O\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

На последнем шаге мы воспользовались тождеством $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ¹⁴. Тензор инерции \mathbf{J}^O , фигурирующий в (9.19), равен

$$\mathbf{J}^O = \mathbf{J} + m(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)\mathbf{I} -$$

¹⁴Это тождество мы использовали ранее для того, чтобы получить представление $\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ (см. (7.20)).

$$- m(L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3) \otimes (L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3).$$

Как и следовало ожидать, это выражение согласуется с выражением, которое мы получили бы по теореме об изменении момента инерции при переносе оси (см. (7.25)). Исходя из разложения Кенига (7.21) и осуществляя ряд стандартных преобразований, приходим к удобному выражению для кинетической энергии твердого тела:

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^O \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9.20)$$

Промежуточные шаги проработайте самостоятельно.

Можно доказать, что \mathbf{J}^O — положительно определенный симметричный тензор, для которого существует система главных осей. Пусть этими осями будут \mathbf{e}_i , тогда тензор инерции будет равен

$$\mathbf{J}^O = \lambda_1^O \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^O \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3^O \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Путем непосредственных преобразований можно построить выражение, связывающее λ_i^O с компонентами тензора \mathbf{J} и величинами m, L_1, L_2, L_3 .

Реакции и моменты связей

На движение тела накладываются три (интегрируемые) связи:

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = 0.$$

Эти связи возникают в силу неподвижности точки O :

$$\Psi_i = (\bar{\mathbf{x}} - L_1\mathbf{e}_1 - L_2\mathbf{e}_2 - L_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_i. \quad (9.21)$$

Дифференцируя эти связи, приходим к уравнению (9.18). Если допустить, что шарнир в точке O является гладким, то, пользуясь уравнением (9.18) и представлением Лагранжа, мы докажем справедливость формул:

$$\mathbf{F}_c = \mu_1\mathbf{E}_1 + \mu_2\mathbf{E}_2 + \mu_3\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{M}_c = (-L_1\mathbf{e}_1 - L_2\mathbf{e}_2 - L_3\mathbf{e}_3) \times \mathbf{F}_c.$$

Здесь \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c эквивалентны силе \mathbf{F}_c , действующей в точке шарнирного соединения O . Напомним, что в подразделе 8.6.1 мы рассматривали ситуацию, в которой шарнир в точке O был цилиндрическим. В этом случае момент реакции связи \mathbf{M}_c имел бы две дополнительные составляющие.

Уравнения движения

Для рассматриваемой задачи удобно поступить следующим образом: используя закон $\mathbf{F} = m\mathbf{\ddot{a}}$, найти три неизвестные составляющие силы \mathbf{F}_O , после чего, применяя закон $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, построить уравнения движения тела.

Закон изменения $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ можно записать в компонентной форме, используя базис \mathbf{e}_i . Напомним, что в качестве этого базиса мы выбрали оси, параллельные главным осям тензора инерции \mathbf{J}^O , поэтому искомыми уравнениями будут:

$$\begin{aligned}\lambda_1^O \dot{\omega}_1 + (\lambda_3^O - \lambda_2^O) \omega_3 \omega_2 &= \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_1, \\ \lambda_2^O \dot{\omega}_2 + (\lambda_1^O - \lambda_3^O) \omega_3 \omega_1 &= \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_2, \\ \lambda_3^O \dot{\omega}_3 + (\lambda_2^O - \lambda_1^O) \omega_1 \omega_2 &= \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (9.22)$$

Очевидно, что между этими уравнениями и уравнениями Эйлера (9.9) можно провести параллели. Действительно, при $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ уравнения движения будут слегка модифицированные уравнения безмоментного движения, которые мы рассматривали ранее.

Чтобы рассчитать тензор вращения тела, уравнения (9.22) следует дополнить уравнениями, связывающими $\boldsymbol{\omega}$ с \mathbf{Q}^{15} . Рассчитав тензор вращения, можно определить \mathbf{R} , исходя из уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{\ddot{a}}$, где $\mathbf{\ddot{a}} = \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}})$.

Уравнения Эйлера–Пуассона

В случае, когда на тело действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$, движение тела можно описать уравнениями Эйлера–Пуассона¹⁶. Вместо того, чтобы параметризовать \mathbf{Q} в системе 3-1-2 углов Эйлера и дополнять уравнения (9.22) выражением (7.28), мы поработаем с тремя из девяти компонентов тензора \mathbf{Q} .

На подготовительном этапе запишем в компонентной форме уравнение $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}_0$. Ясно, что относительно базиса $\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k$ искомым уравнением будет

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{13} \\ \dot{Q}_{21} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{31} & \dot{Q}_{32} & \dot{Q}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.23)$$

¹⁵В точной дифференциальной форме эти уравнения приводятся в одном из упражнений в конце главы (см. (9.36)).

¹⁶В главе 10 мы рассмотрим третью альтернативу — уравнения движения Лагранжа.

Первым подобного рода соотношения для производных по времени от компонентов тензора вращения стал использовать Пуассон в начале 19-го века¹⁷, поэтому они называются кинематическими соотношениями Пуассона. Важно отметить, что

$$\mathbf{E}_3 = Q_{31}\mathbf{e}_1 + Q_{32}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3. \quad (9.24)$$

Поскольку сила тяжести порождает момент, в будущем нам потребуются компоненты $\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_i$.

Обратите внимание, что, дифференцируя уравнение (9.24) и используя тождество $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$, мы пришли бы к выражению

$$\dot{Q}_{31}\mathbf{e}_1 + \dot{Q}_{32}\mathbf{e}_2 + \dot{Q}_{33}\mathbf{e}_3 = - \sum_{k=1}^3 Q_{3k}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k.$$

Эти соотношения представляют собой три дифференциальных уравнения относительно Q_{3i} , которые эквивалентны уравнениям (9.23). Коэффициенты $Q_{3i} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_i$ часто называют направляющими косинусами вектора \mathbf{e}_3 .

Уравнениями движения твердого тела являются три уравнения относительно Q_{3i} и уравнение теоремы об изменении кинетического момента относительно точки O . Объединим уравнение теоремы об изменении кинетического момента, полученное Эйлером, с кинематическими соотношениями Пуассона. В компонентной форме уравнения Эйлера – Пуассона имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{31} &= Q_{32} \frac{h_{O3}}{\lambda_3^O} - Q_{33} \frac{h_{O2}}{\lambda_2^O}, \\ \dot{Q}_{32} &= Q_{33} \frac{h_{O1}}{\lambda_1^O} - Q_{31} \frac{h_{O3}}{\lambda_3^O}, \\ \dot{Q}_{33} &= -Q_{32} \frac{h_{O1}}{\lambda_1^O} + Q_{31} \frac{h_{O2}}{\lambda_2^O}, \\ \dot{h}_{O1} &= \frac{(\lambda_2^O - \lambda_3^O)}{\lambda_2^O \lambda_3^O} h_{O2} h_{O3} + (mg\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_1, \\ \dot{h}_{O2} &= \frac{(\lambda_3^O - \lambda_1^O)}{\lambda_1^O \lambda_3^O} h_{O1} h_{O3} + (mg\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_2, \\ \dot{h}_{O3} &= \frac{(\lambda_1^O - \lambda_2^O)}{\lambda_2^O \lambda_1^O} h_{O1} h_{O2} + (mg\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (9.25)$$

¹⁷См. раздел 411 в его трактате [173].

Мы учли, что

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^3 h_{Oi} \mathbf{e}_i, \quad h_{Ok} = \lambda_k^O \omega_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Более подробно об уравнениях Эйлера–Пуассона (9.25) читайте в работах Белецкого [16] и Сударшана и Мукунда [204].

Законы сохранения

В рамках рассматриваемой задачи можно воспользоваться представлением (9.20) для кинетической энергии T и записать теорему об изменении кинетической энергии в следующих формах:

$$\dot{T} = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{K=1}^N \mathbf{F}_K \cdot \mathbf{v}_K + \mathbf{M}_p \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Если на систему действуют консервативные силы и моменты, то полная энергия тела не изменяется в силу того, что реакция связи \mathbf{F}_c действует в точке с нулевой скоростью. Такая ситуация возникает тогда, когда на тело действует сила тяжести.

Если $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, то \mathbf{H}_O не изменяется. В типичных формулировках этой задачи, однако, силу тяжести, действующую на тело, моделируют равной $-mg\mathbf{E}_3$. В этом случае $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$, а момент \mathbf{M}_O не имеет составляющей по оси \mathbf{E}_3 . Легко видеть, что в этом случае инвариантной оказывается величина $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$. Если, помимо всего прочего, тело является осесимметричным и $\lambda_1^O = \lambda_2^O$, то с помощью уравнений (9.22) можно доказать, что величина $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_3$ инвариантна.

Задачу о движении осесимметричного тела, для которого $\mathbf{M}_O = \bar{\mathbf{x}} \times (-mg\mathbf{E}_3)$, часто называют задачей о симметричном волчке Лагранжа¹⁸. При движении такого волчка неизменными остаются величины E , $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$. Симметричный волчок Лагранжа — одна из самых известных механических систем. Лагранж пришел к выводу, что уравнения движения волчка имеют аналитические решения¹⁹. Это заключение чрезвычайно полезно, потому как если убрать допущение о симметричности тела (т. е. исключить из модели равенство $\lambda_1^O = \lambda_2^O$), то аналитические решения будут

¹⁸В разделе 10.8 мы будем рассматривать эту задачу в контексте уравнений движения Лагранжа.

¹⁹См. раздел IX.34 второй части «Аналитической механики» Лагранжа [121]. Одно из аналитических решений получил Уиттекер [228].

существовать лишь в нескольких частных случаях (см. [128, 228]). Попробуйте численно проинтегрировать уравнения движения для случая, когда $\mathbf{M}_O = \bar{\mathbf{x}} \times (-mg\mathbf{E}_3)$ и значения λ_i^O отличны друг от друга.

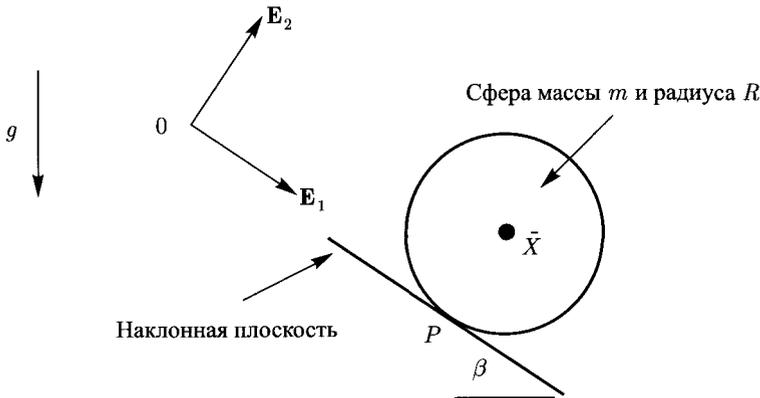


Рис. 9.8. Движение сферы по наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен β , а сила тяжести, действующая на тело, равна $-mg \cos(\beta)\mathbf{E}_3 + mg \sin(\beta)\mathbf{E}_1$

9.8. Движения катящихся и скользящих сфер

Решение и задачи о движении сферы, катящейся по плоскости, применяется в нескольких областях, например, в боулинге и бильярде. Самые известные исследования этой задачи принадлежат Кориолису [41] и Раусу [184]. В современной литературе, посвященной изучению тел, на движение которых накладываются неголономные связи, исследуются обобщения этой задачи²⁰. В этом разделе мы сделаем допущение, что плоскость является шероховатой, коэффициент трения покоя равен μ_s , а коэффициент трения качения равен μ_d . Особый интерес для нас представляет переход от качения к скольжению. Наши рассуждения будут опираться, главным образом, на исследования Рауса [184] и Синга и Гриффита [207].

Рассмотрим сферу, движущуюся по плоскости (рис. 9.8). Радиус сферы равен R , скорость точки контакта сферы с наклонной плоскостью равна

$$\mathbf{v}_P = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (-R\mathbf{E}_3).$$

²⁰См., например, работы Борисова и Мамаева [19], Фрелиха [66], Хьюстона и др. [99]. В последних статьях рассматривается динамика шаров для боулинга.

Обратите внимание, как просто здесь задается π_P . Поскольку точка P — точка мгновенного контакта, то

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_3 = 0.$$

Следовательно, эта скорость равна

$$\mathbf{v}_P = v_{s1} \mathbf{E}_1 + v_{s2} \mathbf{E}_2 = u \mathbf{c},$$

где $u = \sqrt{v_{s1}^2 + v_{s2}^2}$ — скорость проскальзывания, а $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}_P}{u}$ — направление скольжения. Когда сфера катится, на \mathbf{v}_P накладываются две дополнительные связи, в результате чего $v_{s1} = 0$ и $v_{s2} = 0$. Для катящейся сферы направление скольжения не определяют.

Равнодействующая сила и суммарный момент, действующие на сферу, равны

$$\mathbf{F} = -mg \cos(\beta) \mathbf{E}_3 + mg \sin(\beta) \mathbf{E}_1 + N \mathbf{E}_3 + \mathbf{F}_f, \quad \mathbf{M} = -R \mathbf{E}_3 \times \mathbf{F}_f.$$

Для катящейся сферы

$$\mathbf{F}_f = \mu_1 \mathbf{E}_1 + \mu_2 \mathbf{E}_2,$$

где μ_1 и μ_2 — неизвестные. С другой стороны, для скользящей сферы

$$\mathbf{F}_f = -\mu_d |N| \mathbf{c}.$$

Для удобства силы трения для катящейся и скользящей сферы будем обозначать одинаково, но это не должно вводить вас в заблуждение.

Катящаяся сфера

Найдем уравнения качения сферы исходя из уравнений движения и уравнения связи $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$. Определим радиус-вектор $\bar{\mathbf{x}}$ в декартовой системе координат и положим $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{E}_i$, тогда искомыми уравнениями будут

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R \Omega_2, \\ \dot{x}_2 &= -R \Omega_1, \\ \dot{x}_3 &= 0, \\ m \ddot{x}_1 &= mg \sin(\beta) + \mu_1, \\ m \ddot{x}_2 &= \mu_2, \\ 0 &= N - mg \cos(\beta), \end{aligned}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\Omega}_1 = R\mu_2,$$

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\Omega}_2 = -R\mu_1,$$

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\Omega}_3 = 0.$$

Прежде чем решать эти уравнения, получим дифференциальные уравнения относительно Ω_i . Из девяти уравнений, приведенных выше, можно исключить несколько переменных. В результате будем иметь:

$$\left(1 + \frac{2}{5}\right)mR^2\dot{\Omega}_1 = 0,$$

$$\left(1 + \frac{2}{5}\right)mR^2\dot{\Omega}_2 = mgR \sin(\beta),$$

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\Omega}_3 = 0.$$

Решением этих уравнений является:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \frac{g \sin(\beta)(t - t_0)}{R} \left(1 + \frac{2}{5}\right)^{-1} \mathbf{E}_2. \quad (9.26)$$

В качестве упражнения рассчитайте $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Вы увидите, что при $\beta = 0$ сфера катится по прямой с постоянной скоростью.

Скользящая сфера

В случае скользящей сферы удобно начать с дифференциальных уравнений для \mathbf{v}_P . Продифференцируем скорость и найдем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_P &= \dot{v}_{s1} \mathbf{E}_1 + \dot{v}_{s2} \mathbf{E}_2 = \\ &= \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\alpha} \times (-R\mathbf{E}_3). \end{aligned}$$

Пользуясь теоремами об изменении количества движения и кинетического момента, заменяем в предыдущем выражении величины $\dot{\mathbf{v}}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ и находим

$$m\dot{v}_{s1} = \left(1 + \frac{5}{2}\right) \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{E}_1 + mg \sin(\beta), \quad m\dot{v}_{s2} = \left(1 + \frac{5}{2}\right) \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{E}_2. \quad (9.27)$$

Заменяя в этих выражениях силы трения, получаем два дифференциальных уравнения относительно скоростей проскальзывания²¹. Эти уравнения удобно выразить как дифференциальные уравнения относительно u и угла χ , где

$$c = \cos(\chi)\mathbf{E}_1 + \sin(\chi)\mathbf{E}_2, \quad \cos(\chi) = \frac{v_{s1}}{u}, \quad \sin(\chi) = \frac{v_{s2}}{u}.$$

Если значение χ постоянно, то направление скольжения c также постоянно. Преобразуем уравнения (9.27) и построим эквивалентные им выражения²²:

$$\dot{u} = -\mu_d g \left(1 + \frac{5}{2}\right) + g \sin(\beta) \cos(\chi), \quad u \dot{\chi} = -g \sin(\beta) \sin(\chi). \quad (9.28)$$

Эти дифференциальные уравнения имеют аналитические решения для $\chi(t)$ и $u(t)$. Самостоятельно запишите пять дифференциальных уравнений для x_1, x_2 и Ω_i .

Рассмотрим простой случай, в котором плоскость горизонтальна. В этом случае $\beta = 0$ и дифференциальные уравнения для скорости проскальзывания существенно упрощаются до вида:

$$m\dot{v}_{s1} = -\mu_d mg \left(1 + \frac{5}{2}\right) \frac{v_{s1}}{u}, \quad m\dot{v}_{s2} = -\mu_d mg \left(1 + \frac{5}{2}\right) \frac{v_{s2}}{u}.$$

Из этих уравнений следует, что значения скоростей v_{s1} и v_{s2} всегда стремятся к нулю. К этому же выводу мы придем, если возьмем уравнения (9.28) и положим $\beta = 0$:

$$\dot{u} = -\mu_d g \left(1 + \frac{5}{2}\right), \quad \dot{\chi} = 0. \quad (9.29)$$

Решением этих уравнений является

$$u(t) = u(t_0) - \mu_d g \left(1 + \frac{5}{2}\right) (t - t_0), \quad \chi(t) = \chi(t_0).$$

Следовательно, за конечный интервал времени T скорость u достигнет нулевого значения, при этом направление скольжения не изменится:

$$T = \frac{u(t_0)}{\mu_d g} \left(1 + \frac{5}{2}\right)^{-1}.$$

²¹В качестве познавательного упражнения приведите уравнения (9.27) к безразмерному виду и численно проинтегрируйте их. Вы увидите, как изменяются составляющие скорости проскальзывания c с изменением отношения μ_d к $\sin(\beta)$.

²²Чтобы получить эти уравнения, мы продифференцировали выражения $u^2 = v_{s1}^2 + v_{s2}^2$ и $\sin(\chi) = \frac{v_{s2}}{u}$ и применили (9.27)

Можно доказать, что траектория центра скользящей сферы является либо фиксированной, либо прямой, либо параболической дугой. Как только значение u становится равным нулю, сфера начинает катиться. Поскольку $\beta = 0$, сфера будет катиться по прямой с постоянной скоростью (рис. 9.9). Заметим, что сфера, начав катиться, будет продолжать катиться. Переходом от параболической траектории во время скольжения к прямой траектории во время качения объясняются подкрученные броски в боулинге и особые удары (массе) в бильярде²³. Пример такого перехода изображен на рис. 9.9а.

Множитель $\frac{2}{5}$, фигурирующий в уравнениях движения для катящихся и скользящих сфер, связан с тем, что высота «центра колебаний» Q сферы относительно центра масс равна $\frac{2R}{5}$. В работе Кориолиса [41] говорится, что Q есть точка, в которую целится человек, когда ударяет в бильярдный шар, так что он начинает катиться без скольжения сразу после соприкосновения с кием.

9.9. Заключение

Итак, мы затронули несколько вопросов, касающихся динамики твердого тела. Некоторые аспекты мы не раскрыли, поэтому часть из них будет рассмотрена в упражнениях в конце главы, тогда как другая часть раскрывается в статьях и учебниках, содержащихся в списке литературы. В частности, мы рекомендуем прочесть монографии Аппеля [7], Папаставридиса [169], Рауса [184], Уиттекера [228] и прекрасный учебник Крэбтри [42].

Важно отметить, что хотя катящиеся сферы и брошенные бейсбольные мячи исследовались на протяжении столетия, эти задачи богаты для дальнейшего изучения. Действительно, малейшее изменение их кинематических свойств может привести к неожиданным результатам. Один из самых известных примеров такого изменения мы наблюдаем у сферы Чаплыгина, для которой $\mathbf{J} \neq \frac{2}{5}mR^2\mathbf{I}$ и $\boldsymbol{\pi}_P = -R\mathbf{E}_3$. Отчасти из-за асимметричности сферы Чаплыгина траектория точки ее контакта с землей может быть весьма необычной (см. [19, 191] и содержащиеся в этих работах ссылки).

Приведем еще два примера твердых тел, обладающих интересными свойствами движения: диск Эйлера и кельтский камень [42]. Первый состоит из тяжелого кругового цилиндра, который катится и скользит по выпуклому зеркалу. По мере того, как диск принимает все более горизонтальное положение, слышится спелифический звук (жужжание), частота которого усиливается. Затем диск внезапно останавливается, что сопровождается

²³Согласно Фрелиху [66], шары для боулинга обладают смещенным центром масс и моментом тензоров инерции, которые не кратны I . Вот почему некоторые хитрости совершения бросков в боулинге нельзя объяснить нашей простой моделью катящихся и скользящих сфер.

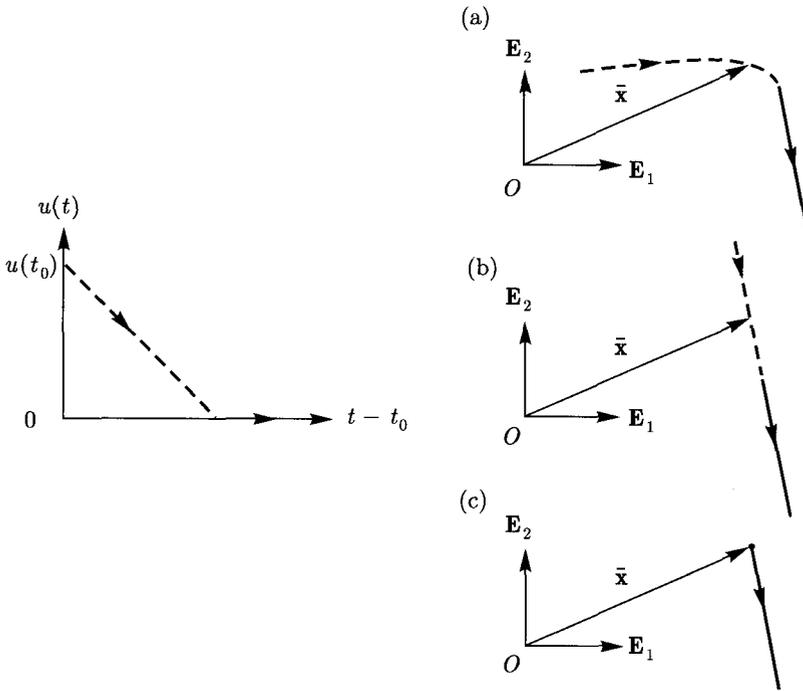


Рис. 9.9. График изменения скорости проскальзывания $u(t)$ от времени для сферы, начинающей скольжение по шероховатой горизонтальной плоскости и затем катящейся по ней. На рисунке показаны три типовых траектории центра масс сферы: (а) траектория скользящего центра масс есть параболическая дуга; (б) траектория скользящего центра масс есть прямая; (с) центр масс покоится, хотя сфера скользит. Когда сфера катится, траектория центра масс есть прямая. Пунктиром показаны траектории скользящей сферы

ся ударом диска о выпуклое зеркало. Первым эту систему исследовал Моффатт [143]. После того, как в свет вышла его спорная статья, было опубликовано еще несколько работ разных авторов, посвященных альтернативному описанию неожиданного движения диска Эйлера (см. [110] и ссылки внутри). Ранее упоминалось, что кельтский камень — это твердое тело, искривленная боковая поверхность которого катится по горизонтальной плоскости. На первый взгляд кажется, что криволинейная поверхность тела симметрична, но это не так, поэтому мы и наблюдаем необычные изменения направления его вращения. Исследованию кельтского камня посвящено

несколько статей (см., например, [129, 171]); разработано несколько моделей его движения. Механизм переориентации спина хорошо объясняется в статье Блэковиак и др. [17].

Последние исследования динамики твердых тел направлены, главным образом, на изучение устойчивости и бифуркации семейств установившихся движений (см., например, [128, 157]). В рамках некоторых исследований анализируются такие движения систем, которые, хоть и не являются установившимися, но приближенно-установившимися или складываются из двух стационарных движений твердого тела. Среди современных работ, посвященных анализу динамики твердого тела, мы рекомендуем следующие: [20, 177, 219], где исследуется движение волчка, [22, 142, 194], где описывается возможное скачкообразное поведение вращающегося яйца, и [11], где моделируются положения брошенной теннисной ракетки. Надеемся, что содержащийся в этой главе материал сподвигнет вас на новые исследования в этой области.

Упражнения

9.1. Пусть твердое тело катится без скольжения по неподвижной поверхности под действием силы тяжести $-mg\mathbf{e}_3$. Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

докажите, что полная энергия E тела не изменяется. Докажите, что она не изменяется и в случае, когда тело скользит по гладкой поверхности.

9.2. Твердое тело массы m движется в пространстве под действием внешней силы $\mathbf{F}_a = F_a \mathbf{e}_3$ и момента $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Опишите алгоритм расчета тензора \mathbf{Q} и алгоритм построения уравнений движения для центра масс тела.

9.3. Ориентация твердого тела относительно его неподвижной начальной конфигурации определяется тензором вращения \mathbf{Q} . В момент времени t_0 тензор вращения равен $\mathbf{Q}(t_0)$, а в момент времени t_1 он равен $\mathbf{Q}(t_1)$. Каков физический смысл тензора вращения $\mathbf{Q}(t_1)\mathbf{Q}^T(t_0)$? При ответе на этот вопрос воспользуйтесь понятием коротационного базиса.

9.4. Пусть тело имеет одну неподвижную точку O . Какие три связи накладываются на движение тела? Почему достаточно решить уравнение $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, чтобы описать движение этого тела?

9.5. Пусть в задаче на динамику твердого тела известны решения $\omega_i(t)$. Как с их помощью найти $\mathbf{Q}(t)$?

9.6. Потенциальная энергия твердого тела равна $U = U(\bar{\mathbf{x}}, \gamma^i)$, где $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ — углы Эйлера, используемые для параметризации тензора \mathbf{Q} . Докажите, что если консервативная сила \mathbf{F} и консервативный момент \mathbf{M} равны

$$-\dot{U} = \mathbf{F} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (9.30)$$

то справедливы формулы

$$\mathbf{F} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{M} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma^i} \mathbf{g}^i,$$

где $x_i = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_i$, а \mathbf{g}^i — векторы двойственного базиса Эйлера. Докажите, что потенциальная энергия U_n твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного сферически симметричного твердого тела, задается функцией $U = U(\bar{\mathbf{x}}, \gamma^i)$.

9.7. На рис. 9.8 изображена сфера массы m и радиуса R , которая катится (без скольжения) по наклонной плоскости. Тензоры инерции сферы равны $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 = \mu \mathbf{I}$, где $\mu = \frac{2mR^2}{5}$.

(а) Какие три связи накладываются на движение сферы? Докажите, что они предполагают выполнение равенств

$$\ddot{x}_1 - R\dot{\Omega}_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + R\dot{\Omega}_1 = 0, \quad \ddot{x}_3 = 0,$$

где $x_i = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_i$, а $\Omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_i$.

(б) Исходя из теоремы об изменении количества движения для сферы, докажите, что

$$\mathbf{F}_c = (mR\dot{\Omega}_2 - mg \sin(\beta))\mathbf{E}_1 - mR\dot{\Omega}_1\mathbf{E}_2 + mg \cos(\beta)\mathbf{E}_3.$$

(с) Докажите, что из теоремы об изменении кинетического момента для сферы и результатов пункта (б) следуют равенства

$$\frac{7}{5}mR^2\dot{\Omega}_1 = 0, \quad \frac{7}{5}mR^2\dot{\Omega}_2 = mgR \sin(\beta), \quad \frac{2}{5}mR^2\dot{\Omega}_3 = 0.$$

(д) Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии для твердого тела, докажите инвариантность полной энергии E катящейся сферы, равной

$$E = \frac{7mR^2}{10}\Omega_1^2 + \frac{7mR^2}{10}\Omega_2^2 + \frac{mR^2}{5}\Omega_3^2 - mgx_1 \sin(\beta) + mgR \cos(\beta).$$

- (e) Почему кинетический момент \mathbf{H} сферы в направлении \mathbf{E}_3 не изменяется?
- (f) Докажите, что если в момент времени $t = 0$ сфере задать начальную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(0) = \sum_{i=1}^3 \Omega_{i0} \mathbf{E}_i$, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ будет рассчитываться по (9.26). Чему равен вектор углового ускорения $\boldsymbol{\alpha}$ для сферы?
- (g) Предположим, что сфера помещается на наклонную плоскость и начинает движение из состояния покоя с тензором $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$. Докажите, что сфера покатится и что результирующий тензор вращения \mathbf{Q} для нее будет соответствовать вращению вокруг неподвижной оси.

9.8. В модели тела, летящего в атмосферном воздухе, действуют четыре основные силы: сила тяжести, подъемная сила, сила сопротивления и сила со стороны двигателя:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{E}_3 + mB\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}} + f\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\rho_f AC_d(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}, \mathbf{M} = \boldsymbol{\pi}_t \times f\mathbf{e}_1.$$

- (a) Докажите, что одна из четырех приложенных к телу сил является консервативной.
- (b) Докажите, что подъемная сила не совершает работы.
- (c) Пользуясь теоремой об изменении кинетической энергии, получите выражение для \dot{E} в случае, когда сила со стороны двигателя приложена к точке, радиус-вектор которой относительно $\bar{\mathbf{x}}$ равен $\boldsymbol{\pi}_t$.

9.9. Решение этой задачи есть почти во всех учебниках по динамике спутников (см., например, работы Белецкого [16] или Хьюза [97]). Ниже обсуждаются 24 решения, полученные Лагранжем [116, 118] в конце 18-го века. В выдающейся работе [118] Лагранжа, посвященной этому вопросу, перечисляются замечательные свойства этих решений и, в частности, то, как использовать их в контексте твердого тела. В этой же работе Лагранж исследует систему углов Эйлера, известную в настоящее время как система 3-1-3 углов Эйлера. На рис. 9.10 изображено твердое тело B массы m , движущееся в центральном гравитационном силовом поле вокруг неподвижного тела большой массы M . Центр этого силового поля берется в неподвижной точке O . Сила, момент и потенциальная энергия поля приближенно рассчитываются по уравнениям (8.25).

- (a) Докажите, что $\mathbf{M}_n = -\bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{F}_n$. Каков физический смысл этого выражения?

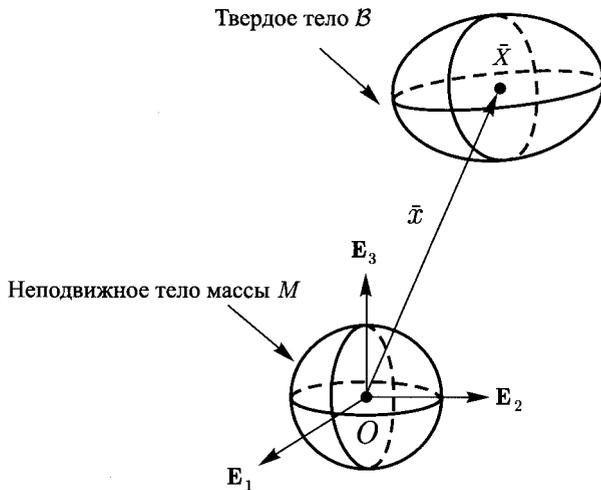


Рис. 9.10. Схема движения твердого тела массы m вокруг неподвижного симметричного тела массы M

- (b) Почему кинетический момент \mathbf{H}_O и полная энергия E спутника не изменяются?
- (c) Основываясь на теореме об изменении количества движения, докажите, что тело может двигаться по круговой орбите $\bar{\mathbf{x}} = R_0 \mathbf{e}_r$ вокруг точки O с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta}_0$, называемой модифицированной частотой Кеплера ω_{Km} :

$$\dot{\theta}_0 = \omega_{Km} = \omega_K \sqrt{1 + \frac{3}{2R_0^2 m} (\text{tr}(\mathbf{J}) - 3\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J} \mathbf{e}_r)}, \quad (9.31)$$

где частота Кеплера равна

$$\omega_K^2 = \frac{GM}{r_0^3}$$

(см. (2.12)). В уравнении (9.31) вектор $\mathbf{e}_r = \cos(\theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta)\mathbf{E}_2$ является собственным вектором тензора \mathbf{J} . Это значит, что он параллелен одной из главных осей инерции тела.

- (d) Пользуясь результатами из пункта (c), докажите, что равномерное движение твердого тела (то есть когда $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$) описывается уравнением

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = 3\omega_K^2 \mathbf{e}_r \times (\mathbf{J}\mathbf{e}_r). \quad (9.32)$$

- (e) Предположим, что тело асимметрично. Это значит, что главные значения тензора \mathbf{J}_0 не равны друг другу. Найдите решения уравнения (9.32), такие что $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_r = 0$. Докажите, что существует шесть возможных решений для $\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющих уравнению (9.32), и четыре возможных решения для \mathbf{e}_r . Допустим, что нам известен тензор инерции \mathbf{J} и, как следствие, тензор вращения \mathbf{Q} . Тогда приходим к выводу, что существует 6×4 возможных решений уравнения (9.32).
- (f) Предположим, что для тела выполняется равенство $\mathbf{J} = \mu \mathbf{I}$, где μ — постоянная. Докажите, что уравнению (9.32) удовлетворяет любая константа $\boldsymbol{\omega}$, и что в этом случае возможна любая ориентация твердого тела.
- (g) Пользуясь результатами из пункта (e), объясните, почему наблюдатель на Земле может видеть одну и ту же сторону спутника, вращающегося по круговой орбите над Землей?

9.10. Пусть сфера массы m и радиуса R , тензор инерции которой равен $\mathbf{J}_0 = \frac{2mR^2}{5} \mathbf{I}$, движется по вращающемуся диску. Эту задачу решали, среди прочих, Герстен и др. [70], Льюис и Мюррей [127] и Парс [170]. Контакт между сферой и диском является неровным. Центр O диска неподвижен; диск вращается вокруг вертикальной оси \mathbf{E}_3 с угловой скоростью Ω .

- (a) Допустим, что сфера катится по вращающемуся диску. Радиус-вектор точки контакта сферы с диском равен $\boldsymbol{\pi}_P = -R\mathbf{E}_3$. Докажите, что движение сферы подчиняется трем связям:

$$\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (-R\mathbf{E}_3) = \Omega \mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{x}}. \quad (9.33)$$

Пользуясь представлениями $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{E}_i$ и $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{E}_i$, докажите, что эти три связи предполагают выполнение равенств

$$\ddot{x}_1 - R\dot{\Omega}_2 + \Omega \dot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + R\dot{\Omega}_1 - \Omega \dot{x}_1 = 0, \quad \ddot{x}_3 = 0.$$

- (b) Нарисуйте силовую схему свободной сферы при условии, что на нее действует вертикально направленная сила тяжести.
- (c) Основываясь на теореме об изменении количества движения и уравнениях связей, докажите, что на сферу действует реакция связи, равная

$$\mathbf{F}_c = mg\mathbf{E}_3 - m\Omega(\dot{x}_2\mathbf{E}_1 - \dot{x}_1\mathbf{E}_2) + mR(\dot{\Omega}_2\mathbf{E}_1 - \dot{\Omega}_1\mathbf{E}_2).$$

- (d) Основываясь на теореме об изменении кинетического момента и результатах из пунктов (а)–(с), докажите, что уравнениями движения сферы будут

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= R\dot{\Omega}_2 - \Omega\dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 &= -R\dot{\Omega}_1 + \Omega\dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= 0, \\ \dot{\Omega}_1 &= \left(\frac{m\Omega R}{\mu + mR^2} \right) \dot{x}_1, \\ \dot{\Omega}_2 &= \left(\frac{m\Omega R}{\mu + mR^2} \right) \dot{x}_2, \\ \dot{\Omega}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{9.34}$$

Здесь $\mu = \frac{2mR^2}{5}$. Почему уравнений (9.34) достаточно для описания движения $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}(t))$ сферы?

- (e) Докажите, что в частном случае, когда $\Omega = 0$, центр масс сферы движется с постоянной скоростью по прямой и что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ для сферы постоянен.
- (f) Численно проинтегрируйте уравнения (9.34) при разных начальных условиях. Может ли сфера упасть с диска радиуса R_0 ? Выбирая начальные условия $(\bar{\mathbf{x}}(t_0), \bar{\mathbf{v}}(t_0), \boldsymbol{\omega}(t_0))$, будьте уверены в том, что они не противоречат условию качения (9.33).

9.11. Напомним, что кинетическая энергия твердого тела определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dv.$$

- (a) Исходя из определения кинетической энергии, докажите справедливость разложения Кенига

$$T = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

- (b) Получите следующие промежуточные результаты:

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J} - \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\bar{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2\dot{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где кинетический момент равен $\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$.

- (c) Пользуясь промежуточными результатами и законами равновесия, докажите теорему об изменении кинетической энергии:

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

- (d) Докажите, что если

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^K (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{M}_P,$$

то

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Приведите три примера использования этого выражения для решения задач о движении одного тела.

9.12. Докажите следующую теорему (она рассматривается в разделе 44 работы Эйлера [54]): «Для любого заданного (твердого) тела мы всегда можем найти ось, проходящую через центр тяжести тела, вокруг которой тело может свободно вращаться с постоянной скоростью». Как эта теорема связана с более поздним результатом, полученным Эйлером, согласно которому для тела существуют три отличные друг от друга оси, вокруг которых тело может свободно вращаться с постоянной угловой скоростью? Об этом результате говорится в работе [53]; в этой же работе они впервые были названы главными осями инерции.

9.13. На рис. 8.12 изображен китайский волчок, который уже обсуждался в упражнении 8.4.

- (a) Опираясь на рассуждения Ора [156], предположим, что точка P скользит по горизонтальной поверхности так, что на нее действуют сила трения Кулона и сила вязкого трения:

$$\mathbf{F}_f = -(\mu_k + \mu_v \|\mathbf{v}_P\|) \|\mathbf{N}\| \mathbf{s},$$

где μ_k и μ_v — коэффициенты трения, \mathbf{N} — нормальная сила, а \mathbf{s} — направление скольжения. Пользуясь теоремой об изменении количества движения, докажите, что нормальная сила, действующая на китайский волчок, равна

$$\mathbf{N} = m(g + l\ddot{\theta} \sin(\theta) + l\dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \mathbf{E}_3.$$

- (b) По теореме об изменении кинетической энергии докажите, что полная энергия скользящего волчка уменьшается с течением времени, тогда как полная энергия катящегося волчка не изменяется.
- (c) Какой вид имеют дифференциальные уравнения, описывающие движение китайского волчка, при условии, что тензор инерции волчка равен

$$\mathbf{J} = \lambda_t(\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \lambda_a \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

- (d) Докажите, что кинетический момент $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\pi}_P$ катящегося и скользящего волчков не изменяется. Этот интеграл движения был открыт Джеллеттом (1817–1888) в 1870 году и потому называется интегралом Джеллетта²⁴.
- (e) Докажите, что если китайский волчок катится по горизонтальной плоскости, то инвариантной является не только полная энергия, но и следующая кинематическая величина:

$$I_1 = \omega_3^2(\lambda_a \lambda_t + m \lambda_a((\boldsymbol{\pi}_P \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\boldsymbol{\pi}_P \cdot \mathbf{e}_2)^2) + m \lambda_t(\boldsymbol{\pi}_P \cdot \mathbf{e}_3)^2), \quad (9.35)$$

где $\boldsymbol{\pi}_P$ — радиус-вектор точки мгновенного контакта P (относительно центра масс \bar{X}) между волчком и горизонтальной поверхностью. Интеграл движения I_1 был впервые получен Раусом (см. раздел 243 работы [184]) и потому может быть назван интегралом Рауса. Также его называют интегралом Чаплыгина [107, 115].

9.14. Пусть тело свободно движется вокруг одной из своих материальных точек O , которая является неподвижной (см. рис. 9.7). Тензор инерции тела относительно его центра масс равен $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — коротационный базис. Радиус-вектор центра масс \bar{X} относительно точки O равен

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_O = h \mathbf{e}_3,$$

где h — постоянная. К телу в точке X_s крепится пружина постоянной жесткости K , свободная длина которой составляет L_0 . Другой конец пружины закреплен в неподвижной точке A :

$$\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_O = s_1 \mathbf{e}_1 + s_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O = L_A \mathbf{E}_1.$$

Кроме того, на тело действует сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.

²⁴Об истории открытия этого интеграла (и некоторых других) читайте в работе Грэя и Никеля [76].

(а) Докажите, что векторы скорости и ускорения для центра масс равны

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= h\omega_2\mathbf{e}_1 - h\omega_1\mathbf{e}_2, \\ \bar{\mathbf{a}} &= h(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)\mathbf{e}_1 - h(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3)\mathbf{e}_2 - h(\omega_1^2 + \omega_2^2)\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

$$\text{где } \boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega_k \mathbf{e}_k.$$

(б) Докажите, что кинетический момент тела относительно точки O равен

$$\mathbf{H}_O = (\lambda_1 + mh^2)\omega_1\mathbf{e}_1 + (\lambda_2 + mh^2)\omega_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\omega_3\mathbf{e}_3.$$

Докажите, что кинетическая энергия тела рассчитывается по формуле

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

(с) Какие три связи накладываются на движение твердого тела? Чему равны реакция связи \mathbf{F}_c и момент связи \mathbf{M}_c ?

(д) Нарисуйте силовую схему для этого твердого тела.

(е) Опираясь на закон равновесия количества движения, докажите, что реакция связи в точке O равна

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_c &= mh(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)\mathbf{e}_1 - mh(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3)\mathbf{e}_2 - \\ &\quad - mh(\omega_1^2 + \omega_2^2)\mathbf{e}_3 + mg\mathbf{E}_3 - \mathbf{F}_s,\end{aligned}$$

где \mathbf{F}_s — сила сжатия/растяжения пружины.

(ф) Предположим, что тензор $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$ параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера. Докажите, что потенциальную энергию $U = U(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q})$ рассматриваемого твердого тела можно задать функцией этих углов: $U = \hat{U}(\psi, \theta, \phi)$.

(г) Докажите, что консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{кон.}}$ и консервативный момент $\mathbf{M}_{\text{кон.}}$, действующие на тело, удовлетворяют тождеству

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_{\text{кон.}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{O_{\text{кон.}}} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{M}_{O_{\text{кон.}}}$ — суммарный консервативный момент, действующий на тело. С учетом полученного выше результата объясните, почему

$$\mathbf{M}_{O_{\text{кон.}}} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial \psi} \mathbf{g}^1 - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta} \mathbf{g}^2 - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \phi} \mathbf{g}^3.$$

(h) Докажите, что вращательное движение тела описывается уравнениями

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + mh^2)\dot{\omega}_1 &= (\lambda_2 + mh^2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 + \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_1, \\(\lambda_2 + mh^2)\dot{\omega}_2 &= (\lambda_3 - \lambda_1 - mh^2)\omega_1\omega_3 + \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_2, \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 &= (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 + \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{9.36}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \operatorname{cosec}(\theta) & \cos(\phi) \operatorname{cosec}(\theta) & 0 \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & -\cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

ГЛАВА 10

Уравнения движения Лагранжа для твёрдого тела

10.1. Введение

В 1782 году была опубликована известная статья [118], в которой Лагранж исследует динамику Луны, вращающейся вокруг Земли. В этой статье Лагранж записывал уравнения движения в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^K} = - \frac{\partial V}{\partial q^K} \quad (K = 1, \dots, 6), \quad (10.1)$$

где V — потенциальная энергия Луны, а T — кинетическая энергия Луны. Колебания (либрацию) Луны Лагранж изучает с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле. При этом он не пользуется эйлеровыми уравнениями движения, хотя на момент написания статьи они были известны Лагранжу. Что было бы, если бы Лагранж, вместо (10.1), использовал уравнения $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$? В этой главе мы покажем (наряду с прочим), что его уравнения эквивалентны эйлеровым уравнениям движения, поэтому он в любом случае пришел бы к одним и тем же заключениям.

В начале главы мы докажем, что уравнения $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ для твёрдого тела аналогичны уравнениям движения Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial v^i} &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_i. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Воспользуемся этими уравнениями в классической задаче об орбитальном движении спутника вокруг неподвижного тела. На самом деле, эта задача эквивалентна той, что решал Лагранж [118].

Существует и другая форма уравнений движения Лагранжа, которая позволяет использовать более широкий класс координат. Эта форма является более общей и потому весьма полезной при решении задач. Она имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial u^A} = \Phi_A \quad (A = 1, \dots, 6), \quad (10.3)$$

где

$$\Phi_A = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A}. \quad (10.4)$$

После того как мы получим уравнение (10.3), мы покажем, как объединить его с уравнениями связей, и проиллюстрируем это на примерах катящихся дисков, скользящих дисков и вращающихся волчков.

Вы узнаете, что если система связей, накладываемых на движение тела, является интегрируемой, а реакции и моменты связей заданы в представлении Лагранжа, то при проходящем выборе координат уравнение (10.3) можно разложить в систему уравнений, описывающих свободное движение тела, и систему уравнений, задающих реакции и моменты связей. Уравнения первой системы называются инертными. Кроме того, мы рассмотрим еще один подход к построению уравнений Лагранжа (подход II).

Большая часть материала этой главы, касающаяся уравнений Лагранжа, основана на исследованиях Кейси [26, 28]. Материал, касающийся реакций и моментов связей, основан на исследованиях О'Рейли и Шриниваса [163].

10.2. Конфигурационное многообразие свободного твердого тела

Движение твердого тела можно разложить на две составляющие: параллельный перенос $\bar{\mathbf{x}}$ центра масс $\bar{\mathbf{X}}$ и вращение \mathbf{Q} . Система всех векторов $\bar{\mathbf{x}}$ образует трехмерное евклидово пространство \mathbb{E}^3 , а система всех тензоров вращений \mathbf{Q} — трехмерное пространство $SO(3)$ ¹. Таким образом, конфигурационное многообразие \mathcal{M} для твердого тела — это пространство всех векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и тензоров вращения \mathbf{Q} . Это пространство является произведением \mathbb{E}^3 на $SO(3)$:

$$\mathcal{M} = \mathbb{E}^3 \oplus SO(3).$$

Произведение \oplus соответствует топологическому произведению. Например, $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^2 = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}$. Очевидно, что размерность \mathcal{M} равна 6, и что

¹Пространство $O(3)$ — это пространство всех ортогональных тензоров. Буква S в записи $SO(3)$ обозначает «особый», так как определитель тензора вращения равен 1.

конфигурационное многообразие можно рассматривать как подмногообразие пространства конфигураций \mathcal{S} , равного $\mathbb{E}^3 \oplus \mathbb{E}^9$. Под трехмерным пространством здесь понимается пространство, содержащее радиус-вектор \bar{x} , а под девятимерным пространством — пространство, содержащее тензор второго ранга \mathbf{Q} .

Для параметризации \mathcal{M} можно использовать любую криволинейную систему координат. Для одной из форм уравнений Лагранжа, которые рассматриваются ниже, мы используем координаты q^1, q^2, q^3 для параметризации радиус-вектора \bar{x} центра масс и систему углов Эйлера ν^1, ν^2, ν^3 для параметризации тензора вращения \mathbf{Q} . Вектор скорости центра масс в нашем случае равен

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i,$$

где ковариантные базисные векторы равны

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial q^i}.$$

Напомним, что $\{\mathbf{a}_i\}$ — базис пространства \mathbb{E}^3 и что углы Эйлера задают базис Эйлера $\{\mathbf{g}_i\}$, который также является базисом пространства \mathbb{E}^3 . В частности, имеем:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \dot{\nu}^i \mathbf{g}_i.$$

Векторы базиса Эйлера не являются линейно независимыми для некоторых значений второго угла Эйлера. Важно отметить, что

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\nu}^i}, \quad \mathbf{a}_i = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}^i}.$$

Оба эти тождества легко доказываются.

Для конфигурационного многообразия можно вычислить кинематический элемент длины ds . Он находится из кинетической энергии T . В выбранной системе углов Эйлера и криволинейной системе координат он равен

$$\begin{aligned} ds &= \left(\sqrt{\frac{2T}{m}} \right) dt = \\ &= \left(\sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v} + \frac{1}{m} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})} \right) dt. \end{aligned}$$

Чуть позже мы покажем на примере, как получить соответствующее выражение для T .

Поскольку движение твердого тела мы описываем с помощью криволинейной системы координат и углов Эйлера, в некоторых точках конфигурационного многообразия параметры принимают вырожденные значения. В этих точках тело может находиться в состоянии движения, хотя соответствующее значение энергии T равно нулю. Такая ситуация нарушает одно из главных свойств энергии T , согласно которому T равно нулю тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, то есть когда тело в данный момент времени покоится. Кроме того, сингулярности ведут к ошибкам при численном интегрировании уравнений движения. Чтобы этого избежать, во многих компьютерных программах динамика твердого тела описывается с помощью двух или более систем криволинейных координат и двух систем углов Эйлера.

Выражение для кинетической энергии

Рассмотрим конкретный пример. Параметризуем радиус-вектор $\bar{\mathbf{x}}$ с помощью сферических координат R, Θ и Φ , а тензор вращения \mathbf{Q} — с помощью системы 3-1-3 углов Эйлера. Из подраздела 6.8.2 мы знаем, что для этой системы углов Эйлера базис Эйлера равен

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого выражения можно сразу же рассчитать вектор угловой скорости:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi} \mathbf{E}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{e}_3 = \\ &= (\dot{\psi} \sin(\phi) \sin(\theta) + \dot{\theta} \cos(\phi)) \mathbf{e}_1 + (\dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi)) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi}) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Для удобства будем считать, что \mathbf{E}_i являются главными осями инерции тела². Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0 &= \lambda_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \lambda_3 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{Q} \mathbf{J}_0 \mathbf{Q}^T = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

²В противном случае выражение для кинетической энергии вращения будет иметь сложную форму, а именно: $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) = J_{011} \omega_1^2 + J_{022} \omega_2^2 + J_{033} \omega_3^2 + 2J_{012} \omega_1 \omega_2 + 2J_{023} \omega_2 \omega_3 + 2J_{013} \omega_1 \omega_3$, где $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ и $J_{0ik} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{J} \mathbf{e}_k) = \mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{J}_0 \mathbf{E}_k)$.

Объединим эти выражения и получим формулу для кинетической энергии T твердого тела:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\Phi}^2 + R^2 \sin^2(\Phi) \dot{\Theta}^2 \right) + \frac{\lambda_1}{2} (\dot{\psi} \sin(\phi) \sin(\theta) + \dot{\theta} \cos(\phi))^2 + \\ &+ \frac{\lambda_2}{2} (\dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi))^2 + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi})^2. \end{aligned}$$

В качестве упражнения подставьте выражение для T в выражение для кинематического элемента длины ds и найдите меру расстояния, которое проходит тело по конфигурационному многообразию.

При параметризации движения сингулярности появляются при $\theta = 0, \pi$ и $\Phi = 0, \pi$. Чтобы оценить влияние сингулярностей на значения T , рассмотрим пример, в котором $\Phi = 0$ и $\theta = 0$. Предыдущее выражение для T сводится к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\Phi}^2 + 0) + \\ &+ \frac{\lambda_1}{2} (0 + \dot{\theta} \cos(\phi))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (0 - \dot{\theta} \sin(\phi))^2 + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi})^2. \end{aligned}$$

Если, кроме того, $\dot{\psi} = -\dot{\phi}, \dot{\theta} = \dot{R} = \dot{\Phi} = 0$ и $\dot{\Theta} \neq 0$, то предыдущее выражение для T будет равно 0, хотя действительная кинетическая энергия тела не будет нулевой.

10.3. Уравнения движения Лагранжа: первая форма

В этом разделе мы получим уравнения Лагранжа для свободного твердого тела. Наш вывод будет основываться на исследованиях Кейси [28], но будет носить более частный характер. Кейси первым показал, что уравнения (10.6) эквивалентны теоремам об изменении количества движения и кинетического момента для твердого тела³. Об эквивалентности уравнений движения Лагранжа и теоремы об изменении кинетического момента для твердого тела говорится также в разделах 8-2 и 8-6 работы Гринвуда [79]⁴. На уравнения (10.6) мы будем ссылаться как на первую форму уравнений движения Лагранжа.

³См., в частности, теоремы 4.2 и 4.4 в работе Кейси [28].

⁴В построениях Гринвуда отсутствует промежуточный результат $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}^i} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{g}_i$.

Начнем с того, что выберем для параметризации вектора $\bar{\mathbf{x}}$ криволинейную систему координат: $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(q^1, q^2, q^3)$. Для параметризации тензора вращения \mathbf{Q} твердого тела выберем систему углов Эйлера ν^i : $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\nu^1, \nu^2, \nu^3)$. Тогда уравнения Лагранжа для твердого тела будут иметь вид (позже мы это докажем):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \nu^i} &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_i, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где \mathbf{g}_i — векторы базиса Эйлера, а \mathbf{a}_i — базисные векторы для \mathbb{E}^3 , соответствующие криволинейным координатам q^i . Напомним, что

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \mathbf{a}_i, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i} = \mathbf{a}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \dot{\nu}^i \mathbf{g}_i, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\nu}^i} = \mathbf{g}_i.$$

Из уравнений (10.6) очевидно, что уравнения Лагранжа для твердого тела схожи с уравнениями, которые встречались нам в контексте материальных точек. Главное отличие состоит в добавлении уравнения для кинетического момента.

Если некоторые из сил и моментов, действующих на твердое тело, являются консервативными, то эти консервативные силы $\mathbf{F}_{\text{кон}}$ и консервативные моменты $\mathbf{M}_{\text{кон}}$ вычисляются по формулам

$$\mathbf{F}_{\text{кон}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^i} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{M}_{\text{кон}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \nu^i} \mathbf{g}_i, \quad (10.7)$$

где функция потенциальной энергии U имеет вид

$$U = U(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}) = U(q^1, q^2, q^3, \nu^1, \nu^2, \nu^3).$$

Заметим, что $\mathbf{F}_{\text{кон}} \cdot \mathbf{a}_i = - \frac{\partial U}{\partial q^i}$ и $\mathbf{M}_{\text{кон}} \cdot \mathbf{g}_i = - \frac{\partial U}{\partial \nu^i}$. Следовательно, вовсе не обязательно рассчитывать $\mathbf{F}_{\text{кон}}$ и $\mathbf{M}_{\text{кон}}$ в уравнениях Лагранжа; достаточно рассчитать частные производные от U . Заметим, что соотношения, касающиеся потенциальных энергий твердых тел, аналогичны соотношениям, которые справедливы для потенциальных энергий систем материальных точек.

Уравнения движения Лагранжа можно записать в альтернативной форме с использованием лагранжиана $L = T - U$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= (\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{кон.}}) \cdot \mathbf{a}_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \nu^i} &= (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{\text{кон.}}) \cdot \mathbf{g}_i. \end{aligned} \quad (10.8)$$

В качестве (несложного) упражнения получите (10.8) из (10.6).

10.3.1. Вывод уравнений Лагранжа

Чтобы доказать справедливость уравнений Лагранжа, необходимо применить разложение Кенига и формулу для вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}$. Прежде чем переходить непосредственно к доказательству, вспомним некоторые промежуточные результаты.

Доказательство состоит из четырех шагов. На первом шаге мы параметризуем вектор $\bar{\mathbf{x}}$ в системе криволинейных координат и тензор \mathbf{Q} в системе углов Эйлера ν^i . При этом мы будем предполагать, что кинетическая энергия T задается функцией этих величин и их производных по времени:

$$T = T(q^i, \dot{q}^i, \nu^k, \dot{\nu}^k) = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0,$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, а $\mathbf{J}_0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{J} \mathbf{Q}$ — тензор инерции.

Далее рассмотрим частные производные от T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i} = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_i, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}^i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}^i} \left(\frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\nu}^i} = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}^i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}^i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \right) = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \dot{\nu}^i} = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{g}_i), \\ \frac{\partial T}{\partial \nu^i} &= \frac{\partial}{\partial \nu^i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \right) = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \nu^i} = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{g}}_i). \end{aligned} \quad (10.9)$$

При построении этих выражений мы применили тождества

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{\mathbf{a}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\nu}^i}, \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{Q} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \dot{\nu}^i}, \quad \dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{Q} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \nu^i}. \quad (10.10)$$

Чуть позже мы докажем справедливость этих тождеств.

На третьем шаге, используя первое и второе уравнения (10.9) и полагая $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_i) - \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i = \\ &= \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}_i = \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Итак, мы вывели первые три уравнения движения Лагранжа.

На четвертом шаге заметим, что для любого вектора \mathbf{b} выполняется равенство:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{J}\omega \cdot \mathbf{b} = \mathbf{Q}\mathbf{J}_0\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\omega_0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{J}_0\omega_0 \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{b}.$$

Объединяя это выражение с третьим и четвертым уравнениями из (10.9), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \nu^i} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{g}_i) - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{g}}_i = \\ &= \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{g}_i = \\ &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили последние три уравнения движения Лагранжа.

10.3.2. Четыре тождества

При выводе уравнений Лагранжа мы воспользовались тождествами (10.10). Первые два тождества аналогичны тем, с которыми мы имели дело при рассмотрении одной материальной точки. В третьем и четвертом тождествах следует обратить внимание на наличие \mathbf{Q} . К сожалению, $\frac{\partial \omega}{\partial \nu^i} \neq \dot{\mathbf{g}}_i$.

Сначала получим более простые тождества:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \mathbf{a}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_i$$

и

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \mathbf{a}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial q^i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial q^i \partial q^k} = \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial q^i} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^3 \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q^k} = \dot{\mathbf{a}}_i.
\end{aligned}$$

Обратите внимание, что \mathbf{a}_i не зависят как от \dot{q}^k , так и от производных \bar{x} по q^i .
Далее докажем простейшее из двух оставшихся тождеств:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_0}{\partial \dot{\nu}^i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}^i} (\mathbf{Q}^T \omega) = \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \dot{\nu}^i} \omega + \mathbf{Q}^T \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\nu}^i} \right) = \mathbf{O} \omega + \mathbf{Q}^T (\mathbf{g}_i) = \\
&= \mathbf{Q}^T \mathbf{g}_i.
\end{aligned}$$

Преобразовывая, получаем:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{Q} \frac{\partial \omega_0}{\partial \dot{\nu}^i}.$$

Мы учли, что \mathbf{Q} не зависит от $\dot{\nu}^i$.

Чтобы доказать последнее тождество, необходимо также принять во внимание, что \mathbf{Q} зависит от углов Эйлера ν^i , но не зависит от их производных $\dot{\nu}^i$. Сначала запишем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_i &= \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\nu}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}^i} \left(-\frac{1}{2} \epsilon [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T] \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}^i} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\sum_{k=1}^3 \dot{\nu}^k \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \mathbf{Q}^T \right] \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \mathbf{Q}^T \right].
\end{aligned}$$

Дважды продифференцируем выражение $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ относительно углов Эйлера и найдем⁵:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^k} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \mathbf{Q}^T.$$

Учитывая предыдущие результаты, получаем четвертое тождество:

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \mathbf{Q}^T \right] \right) =$$

⁵На самом деле в двукратном дифференцировании нет необходимости. Первое тождество доказывается однократным дифференцированием тождества $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, а второе тождество является простым следствием первого и доказывается цепочкой равенств $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^k} = \left(-\mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i} \right) \left(-\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \mathbf{Q}^T \right) = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \mathbf{Q}^T$. — Прим. ред.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^3 \dot{\nu}^k \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \nu^i \partial \nu^k} \mathbf{Q}^T + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^k} \right] \right) = \\
&= \sum_{k=1}^3 \dot{\nu}^k \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\mathbf{Q} \left(\mathbf{Q}^T \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \nu^i \partial \nu^k} + \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \nu^i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \right) \mathbf{Q}^T \right] \right) = \\
&= \sum_{k=1}^3 \dot{\nu}^k \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \nu^i} \left(\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \right) \mathbf{Q}^T \right] \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon \left[\mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \nu^i} \left(\mathbf{Q}^T \sum_{k=1}^3 \dot{\nu}^k \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu^k} \right) \mathbf{Q}^T \right] = \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon \left[\mathbf{Q} \frac{\partial \Omega_0}{\partial \nu^i} \mathbf{Q}^T \right] = \\
&= \mathbf{Q} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \left[\frac{\partial \Omega_0}{\partial \nu^i} \right] \right) = \\
&= \mathbf{Q} \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu^i}.
\end{aligned}$$

На последнем шаге мы учли, что ω_0 — аксиальный вектор тензора $\Omega_0 = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q}$. Кроме того, мы воспользовались тождеством

$$\epsilon[\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T] = \det(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}(\epsilon[\mathbf{B}]).$$

Это тождество позволяет связать ω_0 с ω . Мы ссылались на него ранее, когда рассматривали векторы угловой скорости (см. (6.7)).

10.4. Задача о движении спутника

В качестве примера задачи динамики твердого тела, в которой отсутствуют связи, рассмотрим вращение спутника массы m вокруг сферически симметричного тела массы M (рис. 10.1). Допустим, что сферически симметричное тело покоится и что относительно его центра масс измеряется радиус-вектор центра масс спутника.

Предварительные расчеты

Движение центра масс твердого тела мы параметризуем в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= R \mathbf{e}_R = \\
&= R \cos(\phi) \mathbf{E}_3 + R \sin(\phi) \mathbf{e}_r =
\end{aligned}$$

$$= R \cos(\phi) \mathbf{E}_3 + R \sin(\phi) (\cos(\theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \mathbf{E}_2)$$

и

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \sin(\phi) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi.$$

Из этого уравнения вам должно быть очевидно, чему равны ковариантные базисные векторы \mathbf{a}_i .

Тензор вращения \mathbf{Q} мы параметризуем в системе 1-2-3 углов Эйлера:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\nu}_1 \mathbf{E}_1 + \dot{\nu}_2 \mathbf{e}'_2 + \dot{\nu}_3 \mathbf{e}_3.$$

Заметим, что $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \mathbf{E}_i$. Вектор угловой скорости тела также равен

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

где

$$\omega_1 = \dot{\nu}_2 \sin(\nu_3) + \dot{\nu}_1 \cos(\nu_2) \cos(\nu_3),$$

$$\omega_2 = \dot{\nu}_2 \cos(\nu_3) - \dot{\nu}_1 \cos(\nu_2) \sin(\nu_3),$$

$$\omega_3 = \dot{\nu}_1 \sin(\nu_2) + \dot{\nu}_3.$$

Попробуйте получить выражения для \mathbf{g}_i из этих уравнений.

В качестве главных осей тела в его начальной конфигурации выберем оси \mathbf{E}_i . Тогда кинетическая энергия тела будет равна

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \sin^2(\phi) \dot{\theta}^2 \right) + \\ & + \frac{\lambda_1}{2} (\dot{\nu}_2 \sin(\nu_3) + \dot{\nu}_1 \cos(\nu_2) \cos(\nu_3))^2 + \\ & + \frac{\lambda_2}{2} (\dot{\nu}_2 \cos(\nu_3) - \dot{\nu}_1 \cos(\nu_2) \sin(\nu_3))^2 + \\ & + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\nu}_1 \sin(\nu_2) + \dot{\nu}_3)^2. \end{aligned}$$

Если тело имеет ось симметрии, такую что $\lambda_1 = \lambda_2$, то выражение для кинетической энергии вращения существенно упрощается.

На твердое тело действуют только сила и момент, обусловленные центральной силой гравитационного воздействия тела массы M на тело массы m . Эти силы и моменты являются консервативными; соответствующая им потенциальная энергия равна

$$U = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3} \text{tr}(\mathbf{J}) + \frac{3GM}{2R^3} (\mathbf{J} \mathbf{e}_R) \cdot \mathbf{e}_R. \quad (10.11)$$

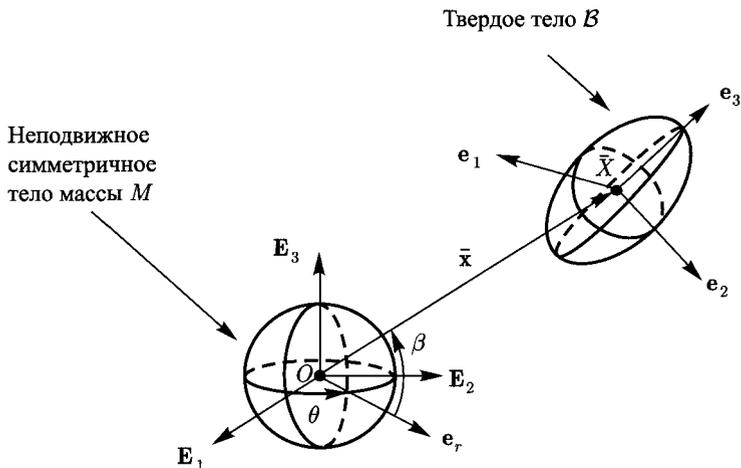


Рис. 10.1. Твердое тело, вращающееся вокруг сферически симметричного тела массы M . Угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \phi$

Чтобы выразить эту потенциальную энергию через углы Эйлера ν_i , необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \cos(\phi)\mathbf{E}_3 + \sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{E}_2, \\ \mathbf{E}_1 &= \cos(\nu_2)\cos(\nu_3)\mathbf{e}_1 - \cos(\nu_2)\sin(\nu_3)\mathbf{e}_2 + \sin(\nu_2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_2 &= -\sin(\nu_2)\cos(\nu_3)\mathbf{e}_1 + \sin(\nu_2)\sin(\nu_3)\mathbf{e}_2 + \cos(\nu_2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_3 &= (\sin(\nu_1)\sin(\nu_3) - \cos(\nu_1)\sin(\nu_2)\cos(\nu_3))\mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (\sin(\nu_1)\cos(\nu_3) + \cos(\nu_1)\sin(\nu_2)\sin(\nu_3))\mathbf{e}_2 + \cos(\nu_1)\cos(\nu_2)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

С помощью этих выражений можно выразить \mathbf{e}_R через векторы коротационного базиса, а затем построить выражение для $(\mathbf{J}\mathbf{e}_R) \cdot \mathbf{e}_R$. После этого, применяя (10.7), можно вывести формулы для силы и момента, которые соответствуют этой потенциальной энергии. Также можно воспользоваться альтернативным методом и применить уравнения (8.25), описанные в главе 8.

Уравнения движения

Уравнения движения для рассматриваемого тела формулируются следующим образом:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} =$$

$$= -\frac{GMm}{R^2}\mathbf{e}_R - \frac{3GM}{2R^4}(2\mathbf{J} + ((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 5\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J}\mathbf{e}_R)\mathbf{I})\mathbf{e}_R,$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M} =$$

$$= \left(\frac{3GM}{R^3}\right)\mathbf{e}_R \times (\mathbf{J}\mathbf{e}_R).$$

Для консервативных сил и их моментов мы использовали представления (8.25). Следует отметить, что если \mathbf{e}_R — собственный вектор тензора \mathbf{J} , то $\mathbf{J}\mathbf{e}_R$ параллелен вектору \mathbf{e}_R . В этом случае так называемый *вращающий момент гравитационного градиента* \mathbf{M} равен $\mathbf{0}$. Кроме того, если $\mathbf{R} = R_0\mathbf{e}_r$ и $\dot{\theta} = \omega_0$, где R_0 и ω_0 — постоянные, то центр масс твердого тела вращается по круговой орбите с постоянной скоростью ω_0 .

Уравнения движения Лагранжа

Уравнениями движения Лагранжа для спутника являются \mathbf{a}_i компонентов уравнения для количества движения и \mathbf{g}_i компонентов уравнения для кинетического момента:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial T}{\partial R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_R =$$

$$= -\frac{GMm}{R^2} - \frac{3GM}{2R^4}((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J}\mathbf{e}_R),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \mathbf{F} \cdot R\mathbf{e}_\phi =$$

$$= -\frac{3GM}{R^3}(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J}\mathbf{e}_\phi),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot R \sin(\phi)\mathbf{e}_\theta =$$

$$= -\frac{3GM \sin(\phi)}{R^3}(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J}\mathbf{e}_\theta),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \nu_i} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_i =$$

$$= \left(\left(\frac{3GM}{R^3} \right) \mathbf{e}_R \times (\mathbf{J}\mathbf{e}_R) \right) \cdot \mathbf{g}_i.$$

В последнем уравнении $i = 1, \dots, 3$. В качестве упражнения рассчитайте частные производные от T по координатам и их скоростям. Либо запишите уравнения Лагранжа по (10.8) в терминах лагранжиана $L = T - U$.

Законы сохранения

Поскольку на твердое тело действуют только консервативные силы и моменты и поскольку на движение тела не накладывается никаких связей, полная энергия $E = T + U$ не изменяется. Кинетический момент \mathbf{H}_O также не изменяется. Чтобы это доказать, заметим, что

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O = \mathbf{R}e_R \times \mathbf{F} + \mathbf{M}.$$

Подставляя вместо \mathbf{F} и \mathbf{M} соответствующие выражения, находим, что $\mathbf{M}_O = 0$.

Обратите внимание, что, хотя значение \mathbf{H} не изменяется при нулевом вращающем моменте гравитационного градиента \mathbf{M} в конкретном частном случае, эта величина не является инвариантной для произвольного движения твердого тела.

10.5. Уравнения движения Лагранжа: вторая форма

Ранее мы сделали допущение, что вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и тензор \mathbf{Q} параметризуются в системе координат q^1, \dots, q^6 :

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(q^1, \dots, q^3), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(q^4 = \nu^1, \dots, q^6 = \nu^3). \quad (10.12)$$

Этим координатам соответствуют ковариантные базисные векторы

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i}, \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^{(i+3)}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Докажем, что в этом случае уравнения движения Лагранжа имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{(i+3)}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^{(i+3)}} &= \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^{(i+3)}}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Нетрудно заметить, что эти уравнения можно записать более компактно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^A} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}^A} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^A} \quad (A = 1, \dots, 6). \quad (10.14)$$

Уравнения Лагранжа в форме (10.14) особенно полезны в ряде случаев:

- 1) когда на движение твердого тела не накладывается никаких связей;
- 2) когда связи (и соответствующие им реакции и моменты), ограничивающие движение твердого тела, не связывают между собой вращательную и поступательную степени свободы.

В других случаях необходимо оперировать уравнениями Лагранжа в более общей форме.

Параметризуем радиус-вектор и тензор в других координатах:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(u^1, \dots, u^6), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(u^1, \dots, u^6). \quad (10.15)$$

Покажем, что и в новых координатах уравнения движения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial u^A} = \Phi_A, \quad (10.16)$$

где обобщенные силы равны

$$\Phi_A = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} \quad (A = 1, \dots, 6).$$

Чуть позже мы применим уравнения Лагранжа в этой форме к решению конкретной задачи.

Чтобы получить уравнения (10.16), необходимо применить следующие тождества⁶:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} \right) = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial u^A}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} \right) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \dot{u}^A} \right) = \mathbf{Q} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial u^A},$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_0.$$

С помощью этих тождеств и разложения кинетической энергии⁷ после ряда преобразований получаем уравнения (10.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial u^A} &= \frac{d}{dt} \left(m \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial \dot{u}^A} \right) \right) - \\ &- \left(\frac{\partial T}{\partial u^A} = m \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial u^A} + \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_0}{\partial u^A} \right) \right) = \end{aligned}$$

⁶Доказательство этих тождеств вытекает из (10.15); оно аналогично тому, как мы доказывали четыре тождества в подразделе 10.3.2.

⁷Напомним, что $\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{G} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \omega_0}{\partial \dot{u}^A} \right) \right) - \\
&\quad - \left(\frac{\partial T}{\partial u^A} = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial u^A} + \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \omega_0}{\partial u^A} \right) \right) = \\
&= \dot{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \omega_0}{\partial \dot{u}^A} \right) = \\
&= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^A}. \tag{10.17}
\end{aligned}$$

В этой форме уравнения Лагранжа служат отправной точкой для решения многих задач. Кроме того, на основе этих уравнений строится подход II.

Далее рассмотрим некоторые аспекты, связанные с применением второй формы уравнений Лагранжа к описанию связанного движения твердого тела при наличии связей.

10.5.1. Изменение координат: одно тождество

Итак, мы используем две координатные системы: u^1, \dots, u^6 и q^1, \dots, q^6 . Мы неявно предположили, что они связаны обратимыми функциями:

$$q^A = q^A(u^1, \dots, u^6).$$

Тогда, поскольку

$$\dot{q}^A = \sum_{B=1}^6 \frac{\partial q^A}{\partial u^B} \dot{u}^B,$$

закключаем, что

$$\frac{\partial q^A}{\partial u^B} = \frac{\partial \dot{q}^A}{\partial \dot{u}^B} \quad (A = 1, \dots, 6, B = 1, \dots, 6). \tag{10.18}$$

Эти тождества часто называют «сокращением точек».

В качестве полезного упражнения докажите, что тождества (10.18) справедливы и тогда, когда преобразования координат зависят от времени:

$$q^A = q^A(u^1, \dots, u^6, t).$$

Результирующие тождества применяются в литературе в рамках подхода II к построению уравнений Лагранжа.

10.5.2. Связи и соответствующие им реакции и моменты

Пусть на движение твердого тела накладывается интегрируемая связь

$$\Psi(q^1, \dots, q^6, t) = 0.$$

Допустим, мы вправе выбрать такие координаты u^1, \dots, u^6 , чтобы уравнение связи получило более простую форму, например такую:

$$u^6 - f(t) = 0.$$

Возникает вопрос: как это отразится на правой части уравнений Лагранжа?

Связь $\Psi = 0$ предполагает, что $\dot{\Psi} = 0$. После некоторых преобразований приходим к выводу, что уравнение $\dot{\Psi} = 0$ можно свести к виду

$$\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + e = 0,$$

где

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i, \quad \mathbf{h} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{(i+3)}} \mathbf{g}^i, \quad e = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Для нас сейчас удобнее иметь выражения для \mathbf{f} и \mathbf{h} в координатах, которые используются для параметризации $\bar{\mathbf{x}}$ и \mathbf{Q} , а не в координатах u^1, \dots, u^6 .

Чтобы ответить на поставленный вопрос, предположим, что реакция и момент связи, которые нам не известны, задаются в формулировке Лагранжа:

$$\mathbf{F}_c = \mu \mathbf{f} = \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i,$$

$$\mathbf{M}_c = \mu \mathbf{h} = \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i.$$

Разложим реакции и моменты связи следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_c \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} &= \sum_{i=1}^3 \mu \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \sum_{i=1}^3 \mu \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} = \\ &= \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial q^k}{\partial \dot{u}^A} \mathbf{a}_k + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial q^{k+3}}{\partial \dot{u}^A} \mathbf{g}_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{u}^A} \delta_i^k + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \frac{\partial \dot{q}^{k+3}}{\partial \dot{u}^A} \delta_i^k = \\
&= \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{u}^A} + \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \frac{\partial \dot{q}^{i+3}}{\partial \dot{u}^A} = \\
&= \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial u^A} + \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \frac{\partial q^{i+3}}{\partial u^A} = \\
&= \mu \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial u^A}. \tag{10.19}
\end{aligned}$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались тождеством (10.18) и выразили Ψ как функцию от u^1, \dots, u^6 и t :

$$\Psi = \Psi(q^1, \dots, q^6, t) = \hat{\Psi}(u^1, \dots, u^6, t).$$

Во избежание путаницы (там, где это возможно) будем употреблять символ Ψ со знаком $\hat{}$, если он обозначает функцию от u^1, \dots, u^6 и t .

Итак, мы готовы сделать ряд важных заключений. Для уравнения связи

$$\Psi = 0, \quad \text{где } \Psi = \Psi(q^1, \dots, q^6, t) = \hat{\Psi}(u^1, \dots, u^6, t),$$

справедливо выражение

$$\mathbf{F}_c \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_c \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} = \mu \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial u^A}, \tag{10.20}$$

при условии что реакции и моменты связи задаются в представлении Лагранжа.

Таким образом, получаем ответ на наш вопрос: связь $\Psi = 0$ и соответствующие ей силы реакции и моменты реакции обуславливают наличие в правой части уравнений Лагранжа члена $\mu \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial u^A}$. Такая ситуация аналогична той, с которой мы встречались ранее в контексте одной материальной точки и систем материальных точек.

10.5.3. Следствия представления Лагранжа и интегрируемых связей

Рассмотрим некоторые следствия уравнения (10.20). Допустим, интегрируемую связь можно представить в виде

$$u^6 - f(t) = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{F}_c \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_c \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} = \mu \delta_A^6.$$

Таким образом, сила реакции связи и момент реакции связи появляются лишь в уравнении Лагранжа, соответствующем u^6 . Аналогичное разделение мы встречали и для материальной точки и систем материальных точек!

10.5.4. Потенциальная энергия и консервативные силы и моменты

Пусть потенциальная энергия тела равна

$$U = U(q^1, \dots, q^6) = \hat{U}(u^1, \dots, u^6).$$

Этой потенциальной энергии соответствуют консервативные силы и моменты, равные

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^i} \mathbf{a}^i,$$

$$\mathbf{M}_{\text{кон.}} = -u_Q = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i.$$

Выберем теперь новую систему координат. Если положить в (10.19) $\Psi = -U$, а $\mu = 1$, то получим

$$\mathbf{F}_{\text{кон.}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_{\text{кон.}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} = - \frac{\partial \hat{U}}{\partial u^A}.$$

Итак, консервативные силы и моменты появляются в правой части уравнений движения Лагранжа в уже знакомой форме.

10.5.5. Механическая мощность и сохранение энергии

Если на движение твердого тела накладывается единственная интегрируемая связь, а потенциальная энергия тела равна U , то суммарная механическая мощность \mathcal{P} этих сил и моментов равна

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbf{F}_c \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\omega} - \dot{U} = \\ &= \mu \left(- \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \dot{U}, \end{aligned} \tag{10.21}$$

где реакция связи и момент связи задаются представлением Лагранжа. Следовательно, если интегрируемая связь не зависит от времени, т.е. $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$, и если все приложенные силы и моменты являются консервативными, то по (10.21) приходим к заключению, что

$$\dot{T} = \mathcal{P} = -\dot{U}.$$

Это значит, что полная энергия $E = T + U$ не изменяется в случае, когда интегрируемая связь не зависит от времени, а все приложенные силы и моменты являются консервативными.

Уравнение (10.21) выводится путем прямых преобразований:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\mathbf{F}_{\text{кон.}} + \mathbf{F}_c) \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\mathbf{M}_{\text{кон.}} + \mathbf{M}_c) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \mu \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i \cdot \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i \cdot \boldsymbol{\omega} \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^i} \mathbf{a}^i \cdot \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = \\ &= \mu \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \dot{q}^{i+3} \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q^{i+3}} \dot{q}^{i+3} \right) = \\ &= \mu \left(\sum_{A=1}^6 \frac{\partial \Psi}{\partial q^A} \dot{q}^A \right) - \left(\sum_{B=1}^6 \frac{\partial U}{\partial q^B} \dot{q}^B \right) = \\ &= \mu \left(\dot{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \dot{U}. \end{aligned}$$

Выражение, полученное на последнем шаге, т.е. $\mathcal{P} = \mu \left(\dot{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \dot{U}$, и соответствует (10.21).

10.5.6. Заключительные выводы

Пусть все силы и моменты, приложенные к телу, являются консервативными:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c - \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_c - u_{\mathbf{Q}}.$$

Кроме того, предположим, что на движение тела накладываются две связи:

$$\Psi = u^6 - f(t) = 0, \quad \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + e = 0.$$

Первая связь является интегрируемой, а вторая — неинтегрируемой. Допустим, что соответствующие им реакции связей и моменты связей задаются представлением Лагранжа:

$$\mathbf{F}_c = \mu_1 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \mathbf{a}^i + \mu_2 \mathbf{f}, \quad \mathbf{M}_c = \mu_1 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial q^{i+3}} \mathbf{g}^i + \mu_2 \mathbf{h}. \quad (10.22)$$

Уравнения движения Лагранжа (10.16) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial u^A} = - \frac{\partial U}{\partial u^A} + Q_A. \quad (10.23)$$

Поскольку все неконсервативные силы, действующие на тело, обусловлены реакциями и моментами связей, член Q_A равен

$$Q_A = \mathbf{F}_c \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_c \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} \quad (A = 1, \dots, 6).$$

Пользуясь лагранжианом $L = T - U$ и представлениями (10.22) для \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c , приходим к выводу, что уравнения (10.23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^B} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^B} &= \mu_2 \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^B} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^B} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^6} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^6} &= \mu_1 + \mu_2 \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^6} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^6} \right). \end{aligned}$$

В этих уравнениях $B = 1, \dots, 5$. Обратите внимание, что правые части этих уравнений Лагранжа аналогичны правым частям уравнений Лагранжа для систем материальных точек; исключения составляют дополнительные члены, обусловленные моментами.

10.6. Уравнения движения Лагранжа: подход II

Рассмотрим подход II к построению уравнений Лагранжа, описывающих движение твердого тела, ограниченное связями. Как и в подразделе 10.5.6, допустим, что на движение тела накладываются одна интегрируемая и одна неинтегрируемая связи. При необходимости наши рассуждения можно будет легко обобщить на случай множественных интегрируемых и неинтегрируемых связей. Результат, который выводится в этом разделе,

первым получил Кейси [28]. В этой форме уравнения Лагранжа часто применяются в физике и инженерно-технических областях.

На первом шаге выберем шесть координат u^1, \dots, u^6 , в которых интегрируемая связь $\Psi = 0$ имеет простой вид

$$\Psi = u^6 - f(t).$$

Накладывая на движение тела эту связь, рассчитываем кинетическую \tilde{T} и связанную потенциальную \tilde{U} энергии системы с учетом связи. Первая задается функцией от $u^1, \dots, u^5, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^5$ и t , а вторая — функцией от u^1, \dots, u^5 и t . Неинтегрируемая связь $\pi_2 = 0$, выраженная через новые координаты и их скорости, имеет вид

$$\pi_2 = \sum_{B=1}^5 p_B \dot{u}^B + e,$$

где p_1, \dots, p_5 и e — функции времени t и координат u^1, \dots, u^5 . Соответствующие реакции связей и моменты реакции связей зададим в представлении Лагранжа (см. (10.22)).

Рассуждая так же, как при построении уравнений Лагранжа для материальной точки, находим уравнения, описывающие движение твердого тела:

$$\begin{aligned} \sum_{B=1}^5 p_B \dot{u}^B + e &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{u}^B} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial u^B} &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^B} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^B} = \\ &= - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^B} + \mathbf{F}_{\text{п.нек.}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^B} + \mathbf{M}_{\text{п.нек.}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^B} + \mu_2 p_B. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Здесь $B = 1, \dots, 5$. Обратите внимание, что в этих уравнениях отсутствуют реакции и моменты реакции интегрируемой связи, а силы и моменты, действующие на тело, мы разложили на составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{п.нек.}} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{\text{кон.}}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{\text{п.нек.}} + \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_{\text{кон.}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_{\text{п.нек.}}$ — приложенные неконсервативные силы. Примером такой силы является сила Магнуса $\mathbf{F}_M = mB\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}$, которая рассчитывается при исследовании траектории полета бейсбольного мяча.

10.7. Катящиеся диски и скользящие диски

В качестве примеров несвободных твердых тел рассмотрим круглый диск массы m и радиуса R , который катится без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 10.2) или скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Пусть тензор инерции \mathbf{J}_0 равен

$$\mathbf{J}_0 = \lambda(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \lambda_3 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \quad (10.25)$$

Это значит, что осью симметрии диска в его начальной конфигурации является ось \mathbf{E}_3 . Главные моменты инерции равны $\lambda_3 = 2\lambda$ и $\lambda = \frac{mR^2}{4}$, но мы не делаем соответствующих подстановок для упрощения алгебраических преобразований.

Предварительные расчеты

Радиус-вектор центра масс диска зададим в системе декартовых координат:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{E}_i.$$

Тензор вращения диска опишем в системе 3-1-3 углов Эйлера:

$$\boldsymbol{\omega} = \psi \mathbf{E}_3 + \theta \mathbf{e}'_1 + \phi \mathbf{e}_3.$$

Согласно выражению (6.33) из подраздела 6.8.2, векторы \mathbf{g}_i базиса Эйлера равны

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (10.26)$$

Кроме того, углы Эйлера удовлетворяют ограничениям: $\psi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ и $\phi \in [0, 2\pi)$.

Угол θ обозначает угол наклона диска. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ диск вертикален. С другой стороны, при $\theta = 0$ или π диск горизонтален. В обоих случаях диск всей своей поверхностью соприкасается с плоскостью, так что уравнения движения, которые мы строим, оказываются не применимыми.

Связи

В подразделе 8.6.3 говорилось, что катящийся диск подчиняется трем связям, поскольку вектор скорости точки контакта P равен нулю:

$$\mathbf{v}_P = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_P = \mathbf{0}. \quad (10.27)$$

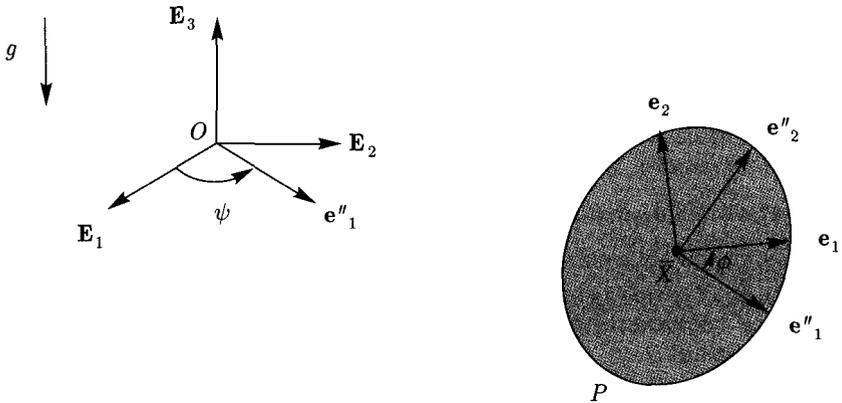


Рис. 10.2. Круглый диск, движущийся по горизонтальной плоскости, соприкасаясь с ней одной своей точкой

Ранее мы доказывали, что эти уравнения соответствуют трем уравнениям связей:

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = 0$$

(см. (8.21)). Кроме того, мы знаем, что третья из этих связей является интегрируемой:

$$\Psi = x_3 - R \sin(\theta) = 0. \quad (10.28)$$

Другие две связи неинтегрируемые⁸. Очевидно, что все три связи, накладываемые на качение диска, можно выразить в виде $\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, что позволяет задать \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c в представлении Лагранжа.

Координаты и энергии

С учетом интегрируемой связи $x_3 = R \sin(\theta)$ определим систему координат:

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1, & u^2 &= x_2, & u^3 &= \psi, \\ u^4 &= \theta, & u^5 &= \phi, & u^6 &= x_3 - R \sin(\theta). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Если известны значения u^1, \dots, u^6 , то с помощью отношений, обратных отношениям (10.29), можно найти x_i и углы Эйлера:

$$\begin{aligned} x_1 &= u^1, & x_2 &= u^2, & x_3 &= u^6 + R \sin(u^4), \\ \psi &= u^3, & \theta &= u^4, & \phi &= u^5. \end{aligned} \quad (10.30)$$

⁸Это утверждение доказывается по теореме Фробениуса в одной из задач в конце главы 8.

Ясно, что координаты u^1, \dots, u^5 являются обобщенными координатами для катящегося и скользящего дисков. С перспективой на будущее рассчитаем:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \dot{u}^1 \mathbf{E}_1 + \dot{u}^2 \mathbf{E}_2 + (\dot{u}^6 + R\dot{u}^4 \cos(u^4)) \mathbf{E}_3, \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{u}^3 \mathbf{E}_3 + \dot{u}^4 \mathbf{e}'_1 + \dot{u}^5 \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (10.31)$$

Заметим также, что $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от координаты u^6 и ее производной по времени.

Нам понадобятся производные от $\bar{\mathbf{v}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ по координатам u^1, \dots, u^9 . Рассчитаем их по (10.31):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^1} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^2} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^3} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^4} &= R \cos(\theta) \mathbf{E}_3, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{E}_3\end{aligned}\quad (10.32)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^2} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^3} &= \mathbf{E}_3, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^4} &= \mathbf{e}'_1, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (10.33)$$

Эти векторы будут фигурировать в будущих уравнениях Лагранжа.

Если задан тензор инерции (10.25), представления (10.31) и выражения (10.5) для $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_k$, то нетрудно найти кинетическую энергию свободного диска:

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + (\dot{u}^6 + R\dot{\theta} \cos(\theta))^2 \right) + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \left(\dot{\psi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))^2.\end{aligned}$$

Кроме того, потенциальная энергия диска равна

$$U = mg(u^6 + R \sin(\theta)).$$

Обратите внимание, как сильно упрощается выражение для кинетической энергии вращения в силу симметричности рассматриваемого тела.

Реакции и моменты связей

Реакции связей и моменты связей, действующие на катящийся диск, можно задать представлением Лагранжа. С помощью выражения для π_i

⁹Видимо, имеется в виду производные по обобщенным скоростям $\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_6$. — Прим. ред.

находим:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_c &= \mu_3 \mathbf{E}_3 + \mu_1 \mathbf{E}_1 + \mu_2 \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{M}_c &= \mu_3 (-R \cos(\theta) \mathbf{g}^2) + \\ &+ \mu_1 (R \cos(\theta) \cos(\psi) \mathbf{g}^1 - R \sin(\theta) \sin(\psi) \mathbf{g}^2 + R \cos(\psi) \mathbf{g}^3) + \\ &+ \mu_2 (R \cos(\theta) \sin(\psi) \mathbf{g}^1 + R \sin(\theta) \cos(\psi) \mathbf{g}^2 + R \sin(\psi) \mathbf{g}^3).\end{aligned}$$

Векторы двойственного базиса Эйлера рассчитываются по (6.34) из раздела 6.8.

Если выразить векторы двойственного базиса Эйлера \mathbf{g}^i через e'_i и разложить выражения для \mathbf{M}_c , то получим $\mathbf{M}_c = \pi_P \times \mathbf{F}_c$. Следовательно, \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c эквивалентны силе $\mathbf{R} = \mathbf{F}_c$, действующей в точке мгновенного контакта P . Составляющая этой силы по оси \mathbf{E}_3 есть нормальная сила, а другие две составляющие образуют силу трения. Таким образом, представление Лагранжа дает физически реалистичное описание реакций и моментов связей.

Наложение интегрируемой связи

Если наложить интегрируемую связь, то $u^6 = 0$, а энергии (потенциальная и кинетическая) несвободного диска будут равны

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= mgR \sin(\theta), \\ \tilde{T} &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{\lambda}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} (\lambda + mR^2 \cos^2(\theta)) \dot{\theta}^2 + \\ &+ \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))^2.\end{aligned}$$

Важно отметить, что $\tilde{T} = \tilde{T}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$. Таким образом, мы исключили координату u^6 .

Уравнения движения катящегося диска

Теперь нетрудно получить уравнения движения Лагранжа для катящегося диска. В первую очередь заметим, что равнодействующая сила \mathbf{F} , приложенная к диску, равна сумме реакции связи и консервативной силы: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c - mg\mathbf{E}_3$. Результирующий момент \mathbf{M} равен моменту связи: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_c$.

Пользуясь формулами (10.6), (10.32) и (10.33), находим:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right) &= \Phi_1, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) &= \Phi_2, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \Phi_3, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \Phi_4, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= \Phi_5, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^6} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial u^6} \right) &= \Phi_6,
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{0} = \mu_1, \\
 \Phi_2 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{0} = \mu_2, \\
 \Phi_3 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_3 = R \cos(\theta)(\mu_1 \cos(\psi) + \mu_2 \sin(\psi)), \\
 \Phi_4 &= \mathbf{F} \cdot R \cos(\theta) \mathbf{E}_3 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}'_1 = \\
 &= -mgR \cos(\theta) + R \sin(\theta)(\mu_2 \cos(\psi) - \mu_1 \sin(\psi)), \\
 \Phi_5 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3 = \mu_1 R \cos(\psi) + \mu_2 R \sin(\psi), \\
 \Phi_6 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}_3 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{0} = \mu_3 - mg.
 \end{aligned}$$

Рассчитывая в (10.34) частные производные от T , накладывая интегрируемую связь $u^6 = 0$ и преобразовывая, получаем:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 &= \mu_1, \\
 m\ddot{x}_2 &= \mu_2, \\
 \frac{d}{dt} (\lambda \sin^2(\theta)\dot{\psi} + \lambda_3(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \cos(\theta)) &= \Phi_3, \\
 (\lambda + mR^2 \cos^2(\theta))\ddot{\theta} - mR^2 \cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \\
 + \lambda_3(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))\dot{\psi} \sin(\theta) - \lambda\dot{\psi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) &= \Phi_4, \\
 \frac{d}{dt} (\lambda_3(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))) &= \Phi_5,
 \end{aligned} \tag{10.35}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (R \sin(\theta)) = \mu_3 - mg.$$

Чтобы построить замкнутую систему уравнений относительно девяти неизвестных x_1, ϕ, θ, ψ и μ_i , эти уравнения необходимо дополнить уравнениями связей:

$$x_3 - R \sin(\theta) = 0, \quad \pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0. \quad (10.36)$$

Важно отметить, что системы уравнений (10.35) и (10.36) не поддаются прямому численному интегрированию. Эти системы нельзя тотчас же записать в виде векторного уравнения $\dot{y} = f(y)$, с которым работают большинство алгоритмов численного интегрирования, например основанные на методе Рунге–Кутты.

Законы сохранения для катящегося диска

Полная энергия E катящегося диска не изменяется. Самый простой способ прийти к этому заключению — применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. На катящийся диск действуют две силы: сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$ и реакция связи \mathbf{F}_c , приложенная к точке P . Следовательно,

$$\dot{T} = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_P - mg\mathbf{E}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Однако $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ и $mg\mathbf{E}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(mgx_3)$, откуда

$$\frac{d}{dt}(T + mgx_3) = 0.$$

Поскольку $E = T + mgx_3$, полная энергия диска не изменяется. Доказательство, которое мы только что привели, применимо ко *всем* твердым телам, катящимся под действием силы тяжести.

Как это ни удивительно, катящийся диск характеризуют еще две инвариантные величины. Их существование было открыто в конце 19-го века Аппелем [6], Чаплыгиным [36] и Кортевегом [113] (см. [19, 43, 107, 157]). К сожалению, вопрос об их физической интерпретации остается открытым, как и вопрос о физическом смысле интеграла Рауса (9.35).

Уравнения движения скользящего диска

Уравнения, описывающие движение скользящего диска по гладкой горизонтальной плоскости, выводятся из (10.35) и (10.36). Следует положить $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и пренебречь связями $\pi_1 = 0$ и $\pi_2 = 0$.

С другой стороны, полезно применить подход II. На скользящий диск не накладывается никаких неинтегрируемых связей. Реакция связи и момент связи задаются в представлении Лагранжа, поэтому уравнения (10.24) сводятся к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial u^A} = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^A} + \mathbf{F}_c \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_c \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A}. \quad (10.37)$$

Здесь $A = 1, \dots, 5$, $\mathbf{F}_c = \mu_3 \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{M}_c = -R \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{F}_c$.

Объединяя (10.29) с (10.37), приходим к искомым уравнениям:

$$m \ddot{x}_1 = 0,$$

$$m \ddot{x}_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\lambda \sin^2(\theta) \dot{\psi} + \lambda_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \cos(\theta)) = 0, \quad (10.38)$$

$$\lambda \ddot{\theta} + \lambda_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin(\theta) + (\lambda_3 - \lambda) \dot{\psi}^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} = -mgR \cos(\theta),$$

$$\frac{d}{dt} (\lambda_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))) = 0.$$

Обратите внимание, что из этих уравнений можно получить уравнения движения для катящегося диска. Для этого необходимо дополнить их уравнениями связей и добавить в правую часть (10.38) реакции и моменты интегрируемых связей.

Очевидно, что уравнения движения для скользящего диска имеют более простой вид, чем уравнения движения для катящегося диска. Эти уравнения можно записать в виде $\dot{y} = f(y)$, где y — вектор-столбец из 10 строк. Следовательно, они поддаются численному интегрированию стандартными методами. В рамках любого численного моделирования этих уравнений сохраняются следующие величины: количество движения \mathbf{G} , проекции кинетического момента $\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}_3$ и полная энергия E скользящего диска.

Конфигурационное многообразие

Конфигурационные многообразия \mathcal{M} для катящегося и скользящего дисков совпадают и равны

$$\mathcal{M} = \mathbb{E}^2 \oplus SO(3).$$

Координатами пространства \mathbb{E}^2 являются x_1 и x_2 , а координатами пространства $SO(3)$ являются углы Эйлера. Таким образом, оба диска имеют пять степеней свободы и пять обобщенных координат. Кинематический

элемент длины ds равен

$$ds = \left(\sqrt{\frac{2\tilde{T}}{m}} \right) dt,$$

где \tilde{T} — связанная кинетическая энергия, определенная ранее.

Заметим, что неинтегрируемые связи, накладывающиеся на катящийся диск, не влияют на конфигурационное многообразие. С аналогичной ситуаций мы встречались при рассмотрении материальной точки, на движение которой накладывались неинтегрируемые связи.

10.8. Волчки Лагранжа и Пуассона

В динамике твердого тела выделяют две классические задачи на вращающиеся волчки. В первой задаче исследуется так называемый волчок Лагранжа — осесимметричное тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной точки O под действием силы тяжести (рис. 10.3). На этой задаче Лагранж иллюстрировал свои уравнения движения в 1789 году¹⁰. Несколько годами позднее Пуассон [173] исследовал ту же задачу за тем исключением, что острое волчка могло свободно двигаться по горизонтальной плоскости (рис. 10.4). Пуассона интересовало решение этой задачи по той причине, что вращающийся волчок может, по идее, использоваться для определения вертикального направления к палубе корабля в море и, стало быть, потенциально полезен для навигации.

В этом разделе мы не сможем провести полного исследования уравнений движения обоих волчков. Мы лишь сконцентрируемся на выборе координат и кратко расскажем, как построить для них уравнения движения.

Волчок Лагранжа: координаты, связи и энергии

Пусть радиус-вектор центра масс волчка Лагранжа относительно точки O равен

$$\bar{x} = x_O + L_1 e_1 + L_2 e_2 + L_3 e_3,$$

где L_k — постоянные. Предположим также, что тензор вращения волчка параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера¹¹. Тогда вектор угловой скорости волчка равен $\omega = \psi E_3 + \theta e'_1 + \phi e_3$. Напоминаем, что углы Эйлера принимают вырожденные значения тогда, когда $E_3 = \pm e_3$, т. е. когда $\theta = 0$ или π , а волчок вертикален.

¹⁰См. раздел IX.34 второй части «Аналитической механики» Лагранжа.

¹¹Эту систему углов Эйлера мы уже неоднократно использовали в этой главе и подразделе 6.8.2.

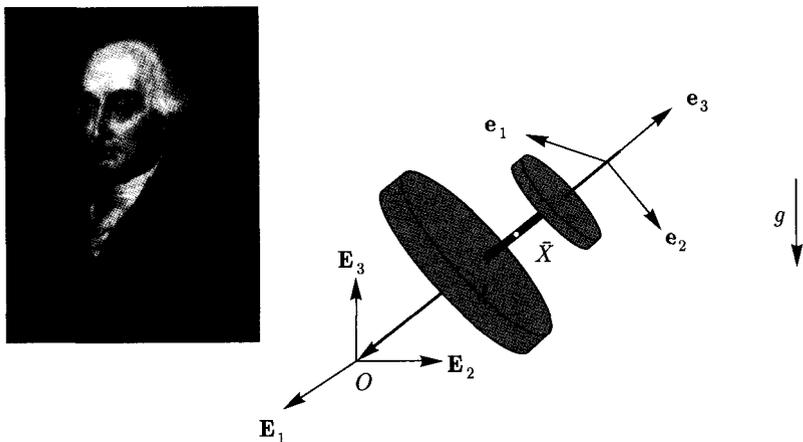


Рис. 10.3. Волчок Лагранжа: осесимметричное тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной точки O . Слева изображен портрет Жозефа-Люиса Лагранжа

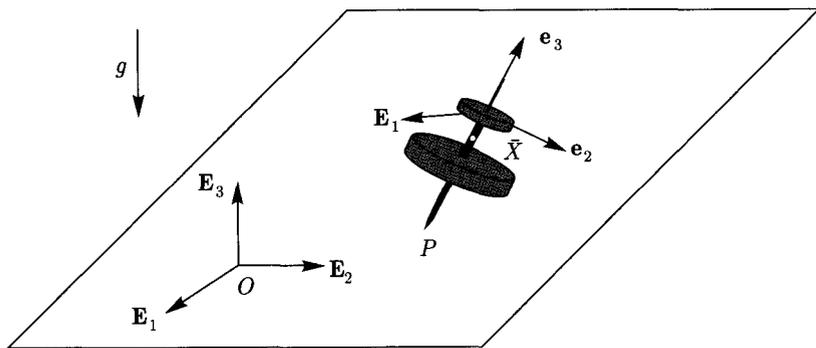


Рис. 10.4. Волчок Пуассона: осесимметричное тело, движущееся по горизонтальной плоскости, соприкасаясь с ней одной точкой P

Учитывая наличие трех интегрируемых связей $x_O = 0$, определяем систему координат:

$$\begin{aligned}
 u^1 &= \psi, & u^2 &= \theta, & u^3 &= \phi, & u^4 &= x_1 - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_1, \\
 u^5 &= x_2 - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_2, & u^6 &= x_3 - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3.
 \end{aligned}
 \tag{10.39}$$

В этих уравнениях \mathbf{e}_k являются функциями углов Эйлера; выражения для них имеют громоздкий вид, поэтому мы их не приводим. Для заданных значений u^1, \dots, u^6 можно определить x_i и углы Эйлера с помощью отношений, обратных к (10.39):

$$\begin{aligned} x_1 &= u^4 + \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_1, & x_2 &= u^5 + \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_2, \\ x_3 &= u^6 + \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3, & \psi &= u^1, \quad \theta = u^2, \quad \phi = u^3. \end{aligned} \quad (10.40)$$

С помощью отношений (10.40) легко найти:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \dot{u}^4 \mathbf{E}_1 + \dot{u}^5 \mathbf{E}_2 + \dot{u}^6 \mathbf{E}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k, \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{u}^1 \mathbf{E}_3 + \dot{u}^2 \mathbf{e}'_1 + \dot{u}^3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Обратите внимание, что $\bar{\mathbf{v}}$ зависит от углов Эйлера и их производных по времени. Эта зависимость объясняется нашим выбором координат. Вместо \bar{x} и трех углов Эйлера в качестве координат мы используем углы Эйлера и три составляющие вектора \mathbf{x}_O .

В дальнейшем нам понадобятся несколько векторов. Вычислим их с учетом того, что $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\psi}} = \mathbf{E}_3$, $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\theta}} = \mathbf{e}'_1$ и $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\phi}} = \mathbf{e}_3$. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\psi}} &= \mathbf{E}_3 \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\theta}} &= \mathbf{e}'_1 \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\phi}} &= \mathbf{e}_3 \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^4} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (10.42)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^1} &= \mathbf{E}_3, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^2} &= \mathbf{e}'_1, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^3} &= \mathbf{e}_3, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^4} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

С помощью этих векторов можно получить правые части уравнений движения Лагранжа.

Пусть волчок имеет ось симметрии и пусть тензор инерции \mathbf{J}_0 волчка равен

$$\mathbf{J}_0 = \lambda_a \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \lambda_t (\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3).$$

По формулам (10.41) вычислим кинетическую энергию волчка:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} ((\dot{u}^4)^2 + (\dot{u}^5)^2 + (\dot{u}^6)^2) + \\ & + m(\dot{u}^4 \mathbf{E}_1 + \dot{u}^5 \mathbf{E}_2 + \dot{u}^6 \mathbf{E}_3) \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) + \\ & + \left(\frac{\lambda_t + mL_2^2 + mL_3^2}{2} \right) \omega_1^2 + \left(\frac{\lambda_t + mL_1^2 + mL_3^2}{2} \right) \omega_2^2 + \\ & + \left(\frac{\lambda_a + mL_1^2 + mL_2^2}{2} \right) \omega_3^2. \end{aligned}$$

Чтобы не загружать это уравнение, мы не подставили вместо $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ соответствующие выражения в углах Эйлера и их производных по времени. Эти выражения даются в разделе 10.2 (уравнения (10.5)). Потенциальная энергия волчка равна

$$U = mg \left(u^6 + \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3 \right).$$

Эта энергия обусловлена действием силы тяжести.

На движение волчка Лагранжа накладываются три связи: $u^4 = 0$, $u^5 = 0$ и $u^6 = 0$. Это значит, что $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$. Эти связи являются интегрируемыми, поэтому обобщенными координатами для волчка Лагранжа будут три угла Эйлера. Конфигурационное многообразие \mathcal{M} для волчка соответствует пространству $SO(3)$. Преобразовывая уравнения связей $\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{E}_k = 0$, где O — неподвижная точка волчка, находим реакцию связи $\mathbf{F}_c = \sum_{k=1}^3 \mu_k \mathbf{E}_k$ и момент связи $\mathbf{M}_c = - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \times \mathbf{F}_c$. Как и следовало ожидать, эта система сил и моментов эквивалентна силе \mathbf{F}_c , действующей в точке O .

С учетом наложенных связей кинетическая и потенциальная энергии волчка Лагранжа равны

$$\tilde{T} = \left(\frac{\lambda_t + mL_2^2 + mL_3^2}{2} \right) \omega_1^2 + \left(\frac{\lambda_t + mL_1^2 + mL_3^2}{2} \right) \omega_2^2 +$$

$$+ \left(\frac{\lambda_a + mL_1^2 + mL_2^2}{2} \right) \omega_3^2,$$

$$\tilde{U} = mg \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3.$$

Легко видеть, что $2\tilde{T} = \mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$. Кинетический момент \mathbf{H}_O можно рассчитать по теореме об изменении момента инерции при параллельном переносе оси. Чтобы сделать некоторые наши кинематические построения более понятными, потребуем, чтобы значения L_k были отличными друг от друга и не равными нулю. Если же наложить стандартное условие $L_1 = 0 = L_2$, то полученные нами выражения для \tilde{T} и $\tilde{U} = mgL \cos(\theta)$ будут соответствовать тем, которые применяются во многих учебниках по динамике.

Волчок Пуассона: координаты, связи и энергии

Для волчка Пуассона удобно выбрать другую систему координат:

$$u^1 = \psi, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = \phi,$$

$$u^4 = x_1, \quad u^5 = x_2, \quad u^6 = x_3 - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3. \quad (10.44)$$

Сравните (10.44) с (10.39) и рассчитайте $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \dot{u}^A}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^A}$.

В отличие от волчка Лагранжа, волчок Пуассона подчиняется одной интегрируемой связи $u^6 = 0$. Преобразовывая уравнение связи $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_3 = 0$, где P — точка контакта между волчком и горизонтальной плоскостью, находим реакцию связи $\mathbf{F}_c = \mu_1 \mathbf{E}_3$ и момент связи $\mathbf{M}_c = - \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \times \mu_1 \mathbf{E}_3$. Как и ожидалось, эта сила и момент эквивалентны силе \mathbf{F}_c , действующей в точке P .

Выражения для T и U строятся так же, как и для волчка Лагранжа, поэтому приведем лишь их конечные варианты:

$$\tilde{T} = \frac{\lambda_t}{2} \omega_1^2 + \frac{\lambda_t}{2} \omega_2^2 + \frac{\lambda_a}{2} \omega_3^2 +$$

$$+ \frac{m}{2} \left(\left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3 \right)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

$$\tilde{U} = mg \left(\sum_{k=1}^3 L_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{E}_3.$$

Из этих выражений очевидно, что обобщенными координатами для волчка Пуассона являются ψ, θ, ϕ, x_1 и x_2 . Следовательно, конфигурационное многообразие \mathcal{M} для этой системы имеет пять измерений. Оно совпадает с конфигурационным многообразием для скользящего диска.

Замечания к уравнениям движения

Уравнения движения для волчков Лагранжа и Пуассона можно построить, применяя подход II и не рассчитывая $\frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{u}^A}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^A}$. Такая возможность объясняется тремя причинами. Во-первых, реакции и моменты реакций связей совместимы с представлением Лагранжа. Во-вторых, мы выбрали такие координаты, что каждая интегрируемая связь выражается через одну из них. Наконец, все приложенные силы, действующие на волчки, являются консервативными. Следовательно, мы можем построить уравнения Лагранжа с использованием лагранжиана $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}$. Эти уравнения аналогичны уравнениям движения для дисков, поэтому мы их не приводим.

Легко видеть, что полная энергия E обоих волчков не изменяется. Для волчка Пуассона инвариантными также являются количества движения $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_2$. Если на волчки наложить условия $L_1 = L_2 = 0$, то мы увидим, что для волчка Лагранжа сохраняются кинетические моменты $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_3$, тогда как для волчка Пуассона неизменными остаются кинетические моменты $\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_3$.

10.9. Заключение

Мы получили уравнения Лагранжа для нескольких систем, состоящих из одного твердого тела. Если на движение тела не накладывается никаких связей или если эти связи «идеальны», то уравнениями движения является система дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать и тем самым описать движение тела. Если, однако, движение тела подчиняется неинтегрируемым связям или если на тело действует сила трения движения, то уравнения Лагранжа имеют громоздкий вид, поэтому в этих случаях порой удобнее просто проанализировать условия сохранения количества движения и кинетического момента. Из примеров, которые мы обсуждали в главе 9, следует, что подходящие уравнения движения можно получить, исходя из законов $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$. Нужно лишь приложить минимум внимания и терпения.

Задачи

10.1. Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис. 10.5. Она состоит из твердого тела массы m , свободно вращающегося вокруг

неподвижной точки O . На тело действует вертикально направленная сила тяжести $mg\mathbf{E}_1$. Тензор инерции тела относительно центра масс C равен

$$\mathbf{J}_0 = \lambda_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (\lambda - mL_0^2)(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3).$$

Радиус-вектор центра масс $\bar{\mathbf{X}}$ тела относительно точки O равен $L_0\mathbf{e}_1$.

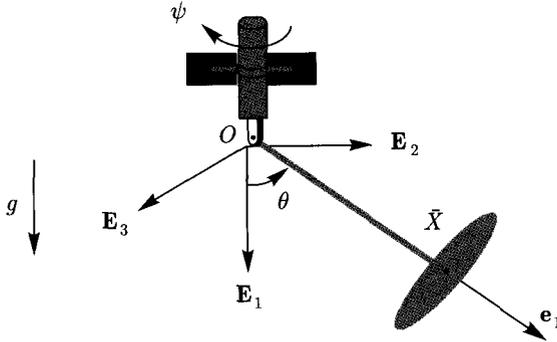


Рис. 10.5. Вращающееся осесимметричное тело

- (a) Параметризуем тензор вращения тела в системе 1-3-1 углов Эйлера: $\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_3$ и $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1$. Докажите, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi}\mathbf{E}_1 + \dot{\theta}\mathbf{e}'_3 + \dot{\phi}\mathbf{e}_1 = \\ &= (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos(\theta))\mathbf{e}_1 + (\dot{\theta}\sin(\phi) - \dot{\psi}\sin(\theta)\cos(\phi))\mathbf{e}_2 + \\ &+ (\dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\sin(\theta)\sin(\phi))\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

- (b) Поскольку точка O неподвижна, выберем в качестве координат точки O координаты u^4, \dots, u^6 :

$$\bar{\mathbf{x}} = u^4\mathbf{E}_1 + u^5\mathbf{E}_2 + u^6\mathbf{E}_3 + L_0\mathbf{e}_1.$$

Пусть $u^1 = \psi$, $u^2 = \theta$ и $u^3 = \phi$. Докажите, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^1} &= \mathbf{E}_1 \times L_0\mathbf{e}_1, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^2} &= \mathbf{e}'_3 \times L_0\mathbf{e}_1, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^3} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^4} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{E}_2, & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (10.45)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^1} &= \mathbf{E}_1, & \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^2} &= \mathbf{e}'_3, & \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^3} &= \mathbf{e}_1, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^4} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^5} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^6} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10.46)$$

При дальнейшем решении эти выражения нам не понадобятся.

- (с) Получите выражения для потенциальной U и кинетической T энергий свободного движения твердого тела. Эти величины должны быть функциями координат u^1, \dots, u^6 и, где уместно, их производных по времени.
- (д) На движение тела накладываются четыре связи:

$$\dot{\phi} = \omega \cdot \mathbf{g}^3 = 0, \quad \bar{\mathbf{v}} - \omega \times (L_0 \mathbf{e}_1) = \mathbf{0}.$$

Получите выражения для реакции связи и момента связи, действующих на тело, при условии что шарнир в точке O является гладким.

- (е) Чему равны обобщенные координаты для системы? Почему конфигурационное многообразие имеет форму сферы?
- (ф) Докажите, что полная энергия тела не изменяется.
- (г) Докажите, что с учетом наложенных связей кинетическая и потенциальная энергии тела равны

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 \dot{\psi}^2 \cos^2(\theta) + \lambda (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta)) \right), \quad \tilde{U} = -mgL_0 \cos(\theta). \quad (10.47)$$

Кроме того, применяя подход II, запишите уравнения движения Лагранжа для твердого тела:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (10.48)$$

где \tilde{L} — лагранжиан.

- (h) Покажите, что решения $\psi(t)$ и $\theta(t)$ уравнений (10.48) полностью задают движение твердого тела. Объясните, почему не обязательно рассчитывать уравнения Лагранжа для всех шести координат?

10.2. Рассмотрим простую модель автомобиля, изображенную на рис. 10.6. Она состоит из единственного твердого тела массы m . Момент тензора инерции для твердого тела равен $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$. Тензор инерции \mathbf{J} и масса m заключают в себе массы и инерции колес, подвески, двигателя и пассажиров. Ограничимся рассмотрением случая, когда передние колеса скользят, а задние — катятся. Такая ситуация возникает после нажатия переднего тормоза. Чтобы смоделировать качение задних колес в этой простой модели, допустим, что

$$\mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (10.49)$$

где $\pi_Q = -L_1 \mathbf{e}_1 - L_2 \mathbf{e}_2$ — радиус-вектор точки Q относительно центра масс \bar{X} твердого тела. Связь (10.49) часто называют связью Чаплыгина (см. [151, 165, 186]).

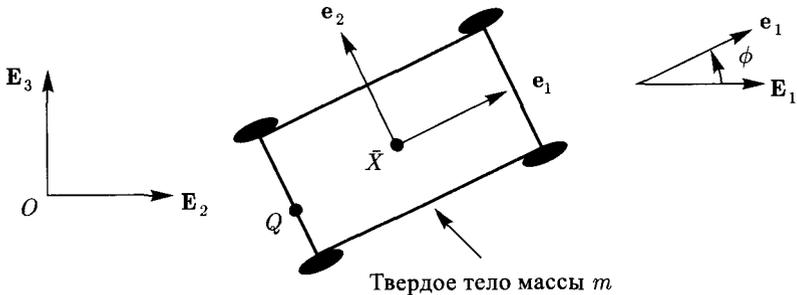


Рис. 10.6. Модель автомобиля, движущегося по горизонтальной плоскости. Автомобиль моделируется как одно твердое тела

- (a) Предполагается, что движение центра масс тела является плоским и удовлетворяет уравнению связи (10.49), при этом твердое тело поворачивается на угол ϕ вокруг неподвижной оси \mathbf{E}_3 . Параметризуйте в любой системе координат радиус-вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и тензор \mathbf{Q} и запишите выражения для четырех связей, накладываемых на движение тела.
- (b) Убедитесь, что одна из связей, полученных в пункте (a), является неинтегрируемой.
- (c) Задайте с помощью лагранжева представления реакции связей \mathbf{F}_c и моменты связей \mathbf{M}_c , действующие на тело.
- (d) Докажите, что движение тела описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\mu_4 \sin(\phi), & m\ddot{x}_2 &= \mu_4 \cos(\phi), & \lambda_3 \ddot{\phi} &= -\mu_4 L_1, \\ \dot{x}_1 \sin(\phi) - \dot{x}_2 \cos(\phi) &= -L_1 \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (10.50)$$

где $x_i = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_i$.

(e) Докажите, что, согласно уравнениям (10.50), тело может двигаться по прямой, не вращаясь, и что полная энергия тела не изменяется.

10.3. На рис. 10.7 изображен стержень круглого сечения, масса которого равна m , длина L , а радиус R . Стержень скользит по горизонтальной плоскости. Пусть тензор инерции \mathbf{J}_0 равен

$$\mathbf{J}_0 = \lambda(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) + \lambda_2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2.$$

На стержень действует единственная внешняя сила — сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.

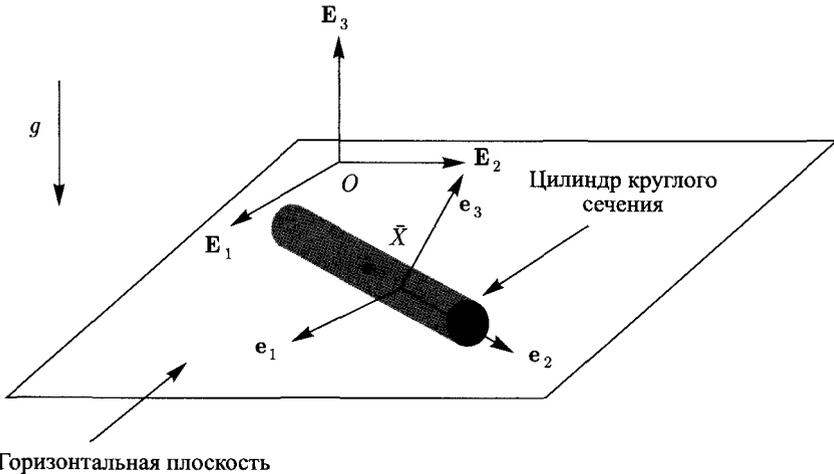


Рис. 10.7. Стержень круглого сечения, движущийся по горизонтальной плоскости

- (a) Пусть тензор вращения стержня параметризуется в системе 3-2-3 углов Эйлера. При каких пространственных положениях стержня углы Эйлера принимают вырожденные значения?
- (b) Пусть радиус-вектор центра масс стержня параметризуется в декартовой системе координат. Тогда $u^1 = x_1, u^2 = x_2, u^3 = x_3, u^4 = \psi, u^5 = \theta$ и $u^6 = \phi$. Рассчитайте для этой системы координат производные $\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A}$. При каких условиях можно не использовать все 12 векторов в записи уравнений движения этого твердого тела?
- (c) Докажите, что кинетическая энергия свободного стержня равна

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{\lambda}{2}(\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\phi))^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda_2}{2} (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + \\
 & + \frac{\lambda}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))^2,
 \end{aligned}$$

где $\bar{\mathbf{x}} = x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3$.

- (d) Докажите, что две связи, ограничивающие движение твердого тела, могут быть заданы уравнениями

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^3 = 0.$$

- (e) Используя лагранжево представление, запишите выражения для реакции связи \mathbf{F}_c и момента реакции связи \mathbf{M}_c , которые реализуют эти две связи. С помощью силовой схемы для свободного скользящего стержня дайте физическое толкование силам \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c .
- (f) Покажите, что шесть уравнений движения Лагранжа для стержня включают в себя следующие дифференциальные уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = 0, \quad m\ddot{x}_2 = 0, \quad \lambda_2 \ddot{\theta} = 0, \quad \lambda \ddot{\psi} = 0. \quad (10.51)$$

- (g) Покажите, что шесть уравнений движения Лагранжа для стержня включают в себя следующие выражения для реакции связи и момента реакции связи:

$$\mathbf{F}_c = mg\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{M}_c = -\lambda_2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \mathbf{g}^3.$$

Выразите \mathbf{g}^3 через \mathbf{e}'_1 и постройте более простое выражение для \mathbf{M}_c .

- (h) Каков физический смысл решений уравнений (10.51)? Докажите, что, согласно этим решениям, цилиндр может двигаться с переменным значением $\boldsymbol{\omega}$.

10.4. На рис. 9.8 изображена сфера массы m и радиуса R , свободно движущаяся по шероховатой наклонной плоскости. В разделе 9.8 мы уже решали эту задачу. Снова решим ее с использованием уравнений движения Лагранжа. Символом P обозначена точка мгновенного контакта сферы с плоскостью. Напомним, что

$$\mathbf{v}_P = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_P, \quad (10.52)$$

где $\bar{\mathbf{v}}$ — вектор скорости центра масс \bar{X} сферы, а $\boldsymbol{\pi}_P$ — радиус-вектор точки P относительно центра масс \bar{X} .

- (a) Применяя систему 3-1-3 углов Эйлера, докажите, что скорости проскальзывания сферы равны

$$v_{s1} = \dot{x}_1 - R\dot{\theta} \sin(\psi) + R\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi),$$

$$v_{s2} = \dot{x}_2 + R\dot{\theta} \cos(\psi) + R\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi),$$

где $\mathbf{v}_P = v_{s1}\mathbf{E}_1 + v_{s2}\mathbf{E}_2$ и $\bar{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k \mathbf{E}_k$.

- (b) Какая связь накладывается на скользящую сферу? Чему равны реакция связи \mathbf{F}_c и момент реакции связи \mathbf{M}_c ?
- (c) Докажите, что по крайней мере одна из трех связей для катящейся сферы является неинтегрируемой. Чему равны соответствующие реакции связей \mathbf{F}_c и моменты реакций связей \mathbf{M}_c ?
- (d) Какой вид имеют уравнения движения Лагранжа для скользящей сферы при условии, что кинетическая энергия свободной сферы равна

$$T = \frac{mR^2}{5}(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos(\theta)) + \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)?$$

- (e) Как следует модифицировать уравнения Лагранжа из пункта (d), чтобы они описывали движение катящейся сферы?
- (f) Исходя из уравнения (10.52) и применяя законы равновесия количества движения и кинетического момента, докажите, что

$$m\dot{v}_{s1} = \left(1 + \frac{5}{2}\right) \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{E}_1 + mg \sin(\beta),$$

$$m\dot{v}_{s2} = \left(1 + \frac{5}{2}\right) \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{E}_2,$$

где \mathbf{F}_f — сила трения, действующая на сферу. Чему равна сила \mathbf{F}_f в случае катящейся сферы?

10.5. Рассмотрим тело массы m , свободно вращающееся относительно неподвижной точки O . Радиус-вектор центра масс \bar{X} тела относительно точки O равен $\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_O = L_0 \mathbf{e}_3$, где L_0 — постоянная. Тензор инерции тела относительно его центра масс равен $\mathbf{J} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k$. На тело действует вертикально направленная сила тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.

- (а) Получите выражение для кинетической энергии вращения $T_{\text{вр}}$ тела, используя систему 3-1-3 углов Эйлера.
- (б) Какие три связи накладываются на движение тела?
- (с) С помощью представления Лагранжа запишите выражения для реакции связи \mathbf{F}_c и момента реакции связи \mathbf{M}_c , действующих на тело.
- (д) Задайте систему шести координат u^1, \dots, u^6 с помощью углов Эйлера и декартовых координат $x_k = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_k$, такую чтобы три интегрируемые связи, накладываемые на движение тела, можно было записать уравнениями

$$\Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$\Psi_1 = u^4, \quad \Psi_2 = u^5, \quad \Psi_3 = u^6.$$

Обратите внимание, что обобщенными координатами для твердого тела являются углы Эйлера.

- (е) Вычислите следующие 12 векторов:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} \quad (A = 1, \dots, 6).$$

Чему равна потенциальная энергия $U = U(u^1, \dots, u^6)$ тела?

- (ф) Какой вид имеют уравнения движения Лагранжа относительно обобщенных координат? Докажите, что сумма членов в правых частях этих уравнений, обусловленных силой \mathbf{F}_c и моментом \mathbf{M}_c , равна нулю.
- (г) На основании основных теорем динамики покажите, что

$$\mathbf{F}_c = mg\mathbf{E}_3 + mL_0\ddot{\mathbf{e}}_3.$$

Запишите соответствующее выражение для \mathbf{M}_c .

- (h) Докажите, что полная энергия E тела не изменяется.

10.6. Рассмотрим задачу о спутнике, которая обсуждалась в разделе 10.4. Применим координатную систему, которая часто используется в динамике спутников (см., например, [164, 187, 203]).

Ссылаясь на рис. 10.1, параметризуем вектор $\bar{\mathbf{x}}$ в сферической системе координат $\{R, \theta, \beta\}$, где β — широта, а θ — долгота. Для этой координатной системы единичными векторами являются:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos(\theta)\mathbf{E}_1 + \sin(\theta)\mathbf{E}_2, & \mathbf{e}_R &= \cos(\beta)\mathbf{e}_r + \sin(\beta)\mathbf{E}_3, \\ \mathbf{e}_\beta &= \cos(\beta)\mathbf{E}_3 - \sin(\beta)\mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_\theta &= \cos(\theta)\mathbf{E}_2 - \sin(\theta)\mathbf{E}_1. \end{aligned}$$

Тензор вращения \mathbf{Q} спутника задает переход от фиксированного базиса $\{\mathbf{E}_i\}$ к коротационному базису $\{\mathbf{e}_i\}$. В динамике спутников тензор \mathbf{Q} принято параметризовать так, чтобы выделить вращение θ вокруг оси \mathbf{E}_3 . С этой целью разложим тензор в произведение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1,$$

где тензор \mathbf{Q}_1 равен

$$\mathbf{Q}_1 = \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) - \sin(\theta)\epsilon \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Тензор вращения \mathbf{Q}_2 мы параметризуем в системе 1-2-3 углов Эйлера. Первый угол Эйлера соответствует повороту против часовой стрелки на угол ν^1 вокруг оси \mathbf{e}_r . Второе вращение соответствует повороту против часовой стрелки на угол ν^2 вокруг вектора $\cos(\nu^1)\mathbf{e}_\theta + \sin(\nu^1)\mathbf{E}_3$. Третье вращение соответствует повороту против часовой стрелки вокруг оси \mathbf{e}_3 на угол ν^3 .

- (a) Исходя из представления $\bar{\mathbf{x}} = R\mathbf{e}_R$, докажите, что вектор скорости $\bar{\mathbf{v}}$ центра масс спутника равен

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R \cos(\beta)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\beta}\mathbf{e}_\beta.$$

- (b) Исходя из представления $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$, докажите, что $\mathbf{e}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}_2\mathbf{E}_3$.

- (c) Используя выражения для трех векторов относительной угловой скорости, докажите, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ спутника равен

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{E}_3 + \dot{\nu}^1\mathbf{e}_r + \dot{\nu}^2(\cos(\nu^1)\mathbf{e}_\theta + \sin(\nu^1)\mathbf{E}_3) + \dot{\nu}^3\mathbf{e}_3. \quad (10.53)$$

- (d) Докажите, что вектор угловой скорости спутника также равен

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}(\sin(\nu^1)\sin(\nu^3) - \cos(\nu^1)\sin(\nu^2)\cos(\nu^3)) + \\ &\quad + \dot{\nu}^2\sin(\nu^3) + \dot{\nu}^1\cos(\nu^2)\cos(\nu^3), \\ \omega_2 &= \dot{\theta}(\sin(\nu^1)\cos(\nu^3) + \cos(\nu^1)\sin(\nu^2)\sin(\nu^3)) + \\ &\quad + \dot{\nu}^2\cos(\nu^3) - \dot{\nu}^1\cos(\nu^2)\sin(\nu^3), \\ \omega_3 &= \dot{\theta}\cos(\nu^1)\cos(\nu^2) + \dot{\nu}^1\sin(\nu^2) + \dot{\nu}^3. \end{aligned}$$

- (е) Пусть движение спутника определяется координатами $u^1 = R, u^2 = \theta, u^3 = \beta, u^4 = \nu^1, u^5 = \nu^2$ и $u^6 = \nu^3$. С помощью этих координат запишите выражения для 12 векторов

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A} \quad (A = 1, \dots, 6).$$

- (f) Потенциальная энергия, соответствующая гравитационным силам и моментам гравитационных сил, рассчитывается по формуле (10.11). С учетом выбранных координат u^1, \dots, u^6 докажите, что $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$. Докажите также, что значение $\frac{\partial T}{\partial \theta}$ не изменяется. Докажите, что сохранение этой величины означает сохранение кинетического момента $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{E}_3$.
- (g) Исходя из уравнений Лагранжа, получите уравнения движения спутника.

10.7. Рассмотрим тело, свободно вращающееся вокруг одной своей неподвижной точки O (рис. 9.7). Эта система рассматривалась в задачах 9.15 и 10.5.

- (a) С учетом наложенной связи вычислите связанный лагранжиан \tilde{L} и решите уравнения движения (см. (10.8))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \gamma^i} = 0, \quad (10.54)$$

где $\gamma^1 = \psi, \gamma^2 = \theta$ и $\gamma^3 = \phi$ — система 3-1-3 углов Эйлера, в которой параметризуется тензор \mathbf{Q} .

- (b) Покажите, что уравнения (10.54) эквивалентны уравнениям $\dot{\mathbf{H}}_O \cdot \mathbf{g}_i = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{g}_i$, где $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ — векторы базиса Эйлера.
- (c) Сравните уравнения движения (10.54) с уравнениями (9.36), полученными в задаче 9.14.

10.8. Напомним, что сила Φ_A по определению равна

$$\Phi_A = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{u}^A}$$

(см. (10.4)). Допустим теперь, что на тело в точке X_P действует сила \mathbf{P} . Докажите, что если радиус-вектор точки X_P равен \mathbf{x}_P , то¹²

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_P}{\partial \dot{\mathbf{i}}^A} = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{\mathbf{i}}^A} + ((\mathbf{x}_P - \bar{\mathbf{x}}) \times \mathbf{P}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{i}}^A}.$$

Как с помощью этого тождества упростить расчет силы Φ_A ?

¹²Это тождество широко используется во многих учебниках аналитической механики (см., например, работы Кейна и Левинсона [105] и Кейна и др. [106]).

Часть IV

Системы твердых тел

ГЛАВА 11

Введение в системы многих тел

11.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим системы твердых тел. Наша цель — понять, как с помощью уже полученных знаний построить уравнения движения для этих систем. Ясно, что уравнения движения могут оказаться очень сложными, поэтому, чтобы их получить, порой необходимо выборочно проводить компонентный анализ общих теорем динамики. Такой подход мы проиллюстрируем на примере гироскопа с двумя степенями свободы.

Объем книги не позволил нам в полной мере раскрыть этот вопрос. У нас не было возможности обсудить многие интересные системы, состоящие из нескольких тел, такие как двухспиновый космический корабль, велосипеды, гироскопы и тренажер Дунabee. Согласно [86], двухспиновый спутник может изменять свое пространственное положение в условиях, когда результирующий момент, действующий на спутник, пренебрежимо мал. Это свойство используется в спутниках связи, а в свое время было реализовано в космическом корабле «Галилей», который был запущен в 1989 году и шестью годами спустя начал вращаться вокруг планеты Юпитер. Трактории этого корабля были спроектированы таким образом, чтобы он мог собирать информацию о самом большом из естественных спутников Юпитера. Миссия Галилея окончилась весьма успешно¹. В начале 1970-х годов Арчи Мишлер [141] изобрел тренажер Дунabee (Роллербол), действие которого направлено на то, чтобы раскрутить ротор до скорости 5 000 оборотов в минуту и выше за счет вращения внешнего корпуса. Об этом новом гироскопическом устройстве рассказывается в конце главы.

11.2. Общие теоремы динамики и уравнения движения Лагранжа

Наша задача — исследовать динамику системы N твердых тел B_1, \dots, B_N . Массу тела B_K обозначим через m_K , его центр масс — че-

¹История запуска космического корабля «Галилей» описывается в недавней работе Мельцера [140].

рез \bar{X}_K , радиус-вектор центра масс — через \bar{x}_K , тензор инерции тела относительно центра масс \bar{X}_K — через \mathbf{J}_K , а угловую скорость тела — через ω_K . С помощью этих величин можно, как обычно, определить кинетическую энергию T_K , кинетический момент \mathbf{H}_K и количество движения \mathbf{G}_K :

$$\mathbf{G}_K = m_K \dot{\bar{x}}_K, \quad \mathbf{H}_K = \mathbf{J}_K \omega_K, \quad T_K = \frac{1}{2} \mathbf{G}_K \cdot \dot{\bar{x}}_K + \frac{1}{2} \mathbf{H}_K \cdot \omega_K.$$

Если положить $K = 1, \dots, N$, то можно найти выражения для кинематических величин, характеризующих каждое из N твердых тел. Алгоритм наложения связей на системы тел и расчета потенциальных энергий аналогичен алгоритму, который описывался в главе 8, поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Для системы тел можно определить центр масс \bar{X} . Радиус-вектор этой точки вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{K=1}^N m_K} \left(\sum_{K=1}^N m_K \bar{x}_K \right).$$

Количество движения \mathbf{G} системы тел равно сумме количеств движения каждого тела, поэтому величину \mathbf{G} можно назвать импульсом центра масс:

$$\mathbf{G} = \left(\sum_{K=1}^N m_K \right) \dot{\bar{x}} = \sum_{K=1}^N m_K \dot{\bar{x}}_K.$$

Во многих задачах, где присутствуют системы тел, приходится рассчитывать кинетический момент системы относительно какой-нибудь точки, скажем точки A (\mathbf{H}_A). В качестве этой точки часто берут центр масс системы или неподвижную точку. Величину \mathbf{H}_A мы найдем, если применим тождество (7.15) к каждому телу:

$$\mathbf{H}_A = \sum_{K=1}^N (\mathbf{H}_K + (\bar{x}_K - x_A) \times m_K \dot{\bar{x}}_K).$$

И наконец, кинетической энергией системы N тел является сумма кинетических энергий каждого тела: $T = T_1 + \dots + T_N$. Результирующее выражение для T может оказаться очень громоздким, поэтому для его расчета часто используют программные пакеты MATHEMATICA или MAPLE.

Уравнения движения для системы N тел строятся, исходя из теорем об изменении количества движения и кинетического момента для каждого

тела:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1, \dots, m_N \ddot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_N, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \mathbf{M}_1, \dots, \dot{\mathbf{H}}_N = \mathbf{M}_N, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где \mathbf{F}_K — равнодействующая сила, приложенная к K -му телу, а \mathbf{M}_K — суммарный момент, вычисленный относительно центра масс \bar{X}_K тела. Уравнения (11.1) включают в себя дифференциальные уравнения, описывающие движение тел, и выражения, задающие реакции и момент реакций связей.

Согласно [30], общие теоремы динамики (11.1) эквивалентны уравнениям движения Лагранжа для системы твердых тел. Обозначим через u^1, \dots, u^{6N} координаты, в которых параметризуются радиус-векторы $\bar{\mathbf{x}}_K$ и тензоры вращения \mathbf{Q}_K . Уравнения движения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial T}{\partial u^A} = \Phi_A \quad (A = 1, \dots, 6N), \quad (11.2)$$

где $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}$ и

$$\Phi_A = \sum_{K=1}^N \mathbf{F}_K \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_K}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_K \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_K}{\partial \dot{u}^A}. \quad (11.3)$$

Еще раз подчеркнем, что мы приходим к одним и тем же уравнениям движения для системы тел, исходя как из (11.1), так и из (11.2).

Если реакции и моменты реакций связей заданы в представлении Лагранжа, если система связей, накладываемая на движение тел, является интегрируемой и если координаты u^1, \dots, u^{6N} выбраны правильно, то, как и в случае с другими системами, уравнения движения Лагранжа для системы твердых тел распадаются в две системы уравнений: одна задает реакции и моменты реакций связей, а другая описывает движение системы. Доказательство рассматривается в [30], здесь оно не приводится. Прежде чем использовать этот результат, сделаем ряд замечаний, касающихся выражений для обобщенных сил, вытекающих из (11.3). Пусть на систему тел накладывается C интегрируемых связей, которые с учетом выбранных координат могут быть записаны в виде:

$$u^{6N-C+1} = f^1(t), \dots, u^{6N} = f^C(t).$$

Кроме того, предположим, что реакции связей \mathbf{F}_{cK} и моменты реакций связей \mathbf{M}_{cK} задаются в представлении Лагранжа. Можно показать, что

$$\sum_{K=1}^N \mathbf{F}_{cK} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_K}{\partial \dot{u}^A} + \sum_{K=1}^N \mathbf{M}_{cK} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_K}{\partial \dot{u}^A} = 0 \quad (A = 1, \dots, 6N - C). \quad (11.4)$$

Это значит, что реакции и моменты реакций связей не участвуют в расчете обобщенных сил $\Phi_1, \dots, \Phi_{6N-C}$. Следовательно, выражения (11.3) для сил Φ_A эквивалентны выражениям, которые используются в других работах, посвященных исследованию уравнений движения Лагранжа для систем тел².

11.3. Два тела, соединенные цилиндрическим шарниром

В качестве первого примера рассмотрим два тела \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , соединенных посредством цилиндрического шарнира. Эту систему мы рассматривали в подразделе 8.6.4 (рис. 8.8). Построим для этой системы уравнения движения Лагранжа.

Начнем с определения кинематических величин. Ранее говорилось, что цилиндрический шарнир накладывает на движение тел \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 пять связей. С учетом этого параметризуем радиус-вектор $\bar{\mathbf{x}}_1$ в декартовых координатах, тензор вращения \mathbf{Q}_1 — в углах Эйлера $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, а относительный тензор вращения $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^T$ — с помощью угла θ . Угол θ — это угол, на который поворачивается тело \mathcal{B}_2 относительно тела \mathcal{B}_1 ; ось вращения здесь является \mathbf{e}_3 . Таким образом, $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}(\theta, \mathbf{e}_3)$. Целесообразно определить следующие семь координат:

$$u^k = \bar{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{E}_k, \quad u^{k+3} = \gamma^k, \quad u^7 = \theta,$$

где $k = 1, 2, 3$. Допустим также, что

$$\pi_{P1} = L_1 \mathbf{e}_1, \quad \pi_{P2} = (L_2)_2 \mathbf{e}_1,$$

где L_1, L_2 — константы. Заметим, что векторами коротационного базиса для \mathcal{B}_1 являются $\{ \mathbf{e}_1 = {}_1\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = {}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = {}_1\mathbf{e}_3 \}$, а для \mathcal{B}_2 — $\{ {}_2\mathbf{e}_1, {}_2\mathbf{e}_2, {}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \}$.

С учетом выбранных координат имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_1 &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{E}_i, \\ \bar{\mathbf{v}}_2 &= \bar{\mathbf{v}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times L_1 \mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\theta} \mathbf{e}_3) \times (L_2)_2 \mathbf{e}_1, \\ \boldsymbol{\omega}_1 &= \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{g}_i, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}^i \mathbf{g}_i + \dot{\theta} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

²См., например, работы Баруха [14], Гринвуда [80] и Кейна [104].

Используя эти выражения, можно вычислить кинетическую энергию \tilde{T} системы с учетом наложения связей. Она равна сумме кинетических энергий тел \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 . В этой главе мы придерживаемся краткости изложения, поэтому не приводим полного выражения для \tilde{T} .

Реакции и моменты связей, действующие на систему и обусловленные цилиндрическим шарниром, рассчитываются по формулам (8.23). Поскольку эти величины задаются в представлении Лагранжа и поскольку мы выбрали подходящие координаты, можно применить подход II и немедленно получить уравнения движения для рассматриваемой системы³:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{u}^A} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial u^A} = \Phi_A \quad (A = 1, \dots, 7), \quad (11.5)$$

где

$$\Phi_A = \sum_{K=1}^2 \mathbf{F}_K \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_K}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_K \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_K}{\partial \dot{u}^A}.$$

Обратите внимание, что \mathbf{F}_{c1} , \mathbf{F}_{c2} , \mathbf{M}_{c1} и \mathbf{M}_{c2} не участвуют в расчете сил Φ_1, \dots, Φ_7 . В качестве упражнения докажите, что

$$\mathbf{F}_{c1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_1}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{F}_{c2} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_2}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_{c1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{u}^A} + \mathbf{M}_{c2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{u}^A} = 0 \quad (A = 1, \dots, 7).$$

Вы, должно быть, заметили, что эти тождества являются частными случаями тождеств (11.4). Если построены выражения для приложенных сил и моментов и рассчитана энергия \tilde{T} , то движение системы двух тел можно описать с помощью семи дифференциальных уравнений (11.5). Результирующая система дифференциальных уравнений может оказаться настолько сложной, что потребуются наложить дополнительные связи и сделать ряд геометрических упрощений.

Альтернативный подход к построению уравнений движения заключается в применении теорем об изменении количества движения и кинетического момента для каждого тела:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}_2, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \mathbf{M}_1, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 &= \mathbf{M}_2. \end{aligned} \quad (11.6)$$

³Ранее мы рассказывали, как применить подход II ко случаям одного тела, одной материальной точки и системы материальных точек. В работе [30] выводится соответствующий результат для системы тел; им-то мы и воспользуемся.

В рамках этого подхода мы получим систему связанных уравнений для реакций связей μ_1, \dots, μ_5 (см. (8.23)) и $\ddot{u}^1, \dots, \ddot{u}^7$. В том, чтобы строить уравнения Лагранжа на основе автоматического выбора линейных комбинаций уравнений (11.6), есть свои преимущества.

11.4. Гироскоп с одной измерительной осью

На рис. 11.1 изображен двухстепенный гироскоп с одной измерительной осью, закрепленный на платформе \mathcal{P} . Гироскоп состоит из подвеса \mathcal{G} , свободно вращающегося относительно платформы \mathcal{P} (подвес поворачивается на угол α вокруг оси e_1), и ротора \mathcal{R} , свободно вращающегося относительно подвеса \mathcal{G} (ротор поворачивается на угол β вокруг оси e_2). Помимо двух опор, соединяющих платформу с подвесом, между \mathcal{G} и \mathcal{P} находится пружина жесткости K и амортизатор с коэффициентом затухания c .

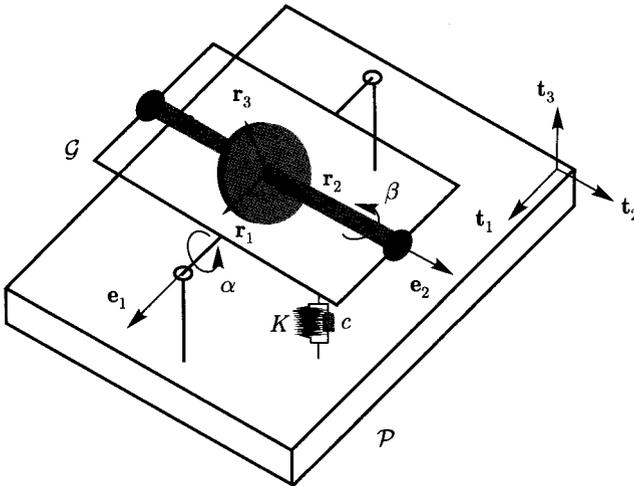


Рис. 11.1. Схема демпфирующего гироскопа с двумя степенями свободы. Гироскоп состоит из ротора \mathcal{R} , закрепленного с помощью подвеса \mathcal{G} над платформой \mathcal{P} . Когда платформа вращается вокруг t_3 , ротор стремится вниз, чему препятствует пружина и амортизатор

Принцип действия гироскопа заключается в следующем: допустим, платформа начинает вращаться вокруг вертикальной оси t_3 с угловой скоростью Ω . Тогда ротор начнет вращаться вокруг горизонтальной оси e_1 .

Это вращение будет компенсироваться действием пружины так, что результирующий угол отклонения составит $\alpha = \alpha_0$. Далее мы увидим, что⁴

$$\alpha_0 \propto \Omega.$$

Следовательно, калибровав гироскоп, можно определить Ω , измеряя угол α_0 . На практике, однако, измерение α_0 чувствительно ко многим другим эффектам, так что Ω определяется порой неправильно. Арнольд и Мондер [8] исследовали этот и другие вопросы, связанные с применением скоростного гироскопа. Далее мы посмотрим, как прийти к формуле (11.7), основываясь на полученных ими результатах. Но перед этим заметим, что если на теле \mathcal{B} установить под определенными углами друг к другу три скоростных гироскопа, то с их помощью можно измерить $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$. Интегрируя $\omega_i(t)$ согласно уравнениям вида (7.28), можно определить тензор вращения \mathbf{Q} для тела \mathcal{B} . Такая система называется инерциальной навигационной системой, жестко связанной с корпусом прибора.

Кинематика

Пусть $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ будут коротационными базисами для \mathcal{P} , \mathcal{G} и \mathcal{R} соответственно. Эти базисы являются правыми. С их помощью и с помощью фиксированного базиса $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ декартовой системы координат можно определить тензор вращения для каждого из трех тел. Допустим, что между ротором и подвесом трение отсутствует, и что радиус-векторы центра масс подвеса и ротора совпадают и равны $\bar{\mathbf{x}}$.

Тензор вращения $\mathbf{Q}_P = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{E}_i$ для платформы параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера. Обозначим вектор угловой скорости платформы через $\boldsymbol{\omega}_p$, вектор угловой скорости подвеса через $\boldsymbol{\omega}_g$, а вектор угловой скорости ротора через $\boldsymbol{\omega}_r$. По формуле (6.32) легко рассчитать эти три вектора угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega}_p = \dot{\phi} \mathbf{t}_3 + \dot{\theta} \mathbf{t}'_1 + \dot{\psi} \mathbf{E}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}_g = \boldsymbol{\omega}_p + \dot{\alpha} \mathbf{e}_1,$$

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_g + \dot{\beta} \mathbf{e}_2.$$

Обозначим тензоры инерции ротора и подвеса относительно их центров масс через

$$\mathbf{J}_r = \lambda_1 (\mathbf{I} - \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_2) + \lambda_2 \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{J}_g = \rho_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \rho_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \rho_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

⁴См., в частности, (11.9).

соответственно. Заметим, что в силу симметричности ротора его тензор инерции можно выразить через векторы коротационного базиса подвеса

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_r &= \lambda_1(\mathbf{I} - \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_2) + \lambda_2 \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_2 = \\ &= \lambda_1(\mathbf{I} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Кинетический момент ротора относительно его центра масс и кинетический момент ротора и подвеса относительно их совпадающих центров масс равны

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_r &= \mathbf{J}_r \boldsymbol{\omega}_r, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_g = \\ &= \mathbf{J}_g \boldsymbol{\omega}_g + \mathbf{J}_r \boldsymbol{\omega}_r = \\ &= ((\rho_1 + \lambda_1) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\rho_2 + \lambda_2) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\rho_3 + \lambda_3) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \boldsymbol{\omega}_g + \\ &\quad + \lambda_2 \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Отчасти из-за симметричности ротора выражение для \mathbf{H} имеет простой вид.

Реакции и моменты связей

На движение подвеса относительно ротора накладывается пять связей:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}_r &= \bar{\mathbf{v}}_g, \\ (\boldsymbol{\omega}_r - \boldsymbol{\omega}_g) \cdot \mathbf{r}_1 &= 0, \\ (\boldsymbol{\omega}_r - \boldsymbol{\omega}_g) \cdot \mathbf{r}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Допустим, что опоры между платформой и подвесом, на котором держится ротор, являются гладкими, тогда реакции и моменты реакций связей можно задать с помощью представления Лагранжа (8.22):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{cr} &= -\mathbf{F}_{cg} = \sum_{K=1}^3 \mu_k \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{M}_{cr} &= -\mathbf{M}_{cg} = \mu_4 \mathbf{e}_1 + \mu_5 \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Докажите, что сила \mathbf{F}_{cr} и момент \mathbf{M}_{cr} эквивалентны двум реактивным силам \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , действующим на противоположных концах ротора. Отсюда следует, что лагранжево представление дает физически реалистичное описание реакций и моментов связей.

Уравнения движения гироскопа

Из теоремы об изменении кинетического момента, применяемой для движения ротора относительно его центра масс следует одно интересное свойство. Во-первых, заметим, что $M_r = M_{cr}$, причем, этот момент не имеет составляющей по оси $e_2 = r_2$. Кроме того, легко видеть, что $\dot{H}_r \cdot e_2 = 0$. Следовательно, величина $h = \dot{H}_r \cdot e_2$ не изменяется, где

$$h = J_r \omega_r \cdot r_2 = \lambda_2 \dot{\beta} + \lambda_2 \omega_p \cdot e_2. \quad (11.7)$$

В силу сохранения этой величины, мы можем изменить относительную скорость $\dot{\beta}$ ротора за счет изменения угловой скорости платформы в направлении $e_2 = r_2$. В общем, мы допускаем, что

$$\dot{\beta} \gg \omega_p \cdot e_2.$$

Считается, что скорость $\dot{\beta}$ не изменяется в течение работы гироскопа.

Глядя на результирующую силу и суммарный момент, действующие в системе подвес–ротор, легко видеть, что моменты связи в точках опоры, где подвес крепится к платформе, не имеют составляющих по оси e_1 . Следовательно, будет разумно, если мы запишем теорему об изменении кинетического момента $\dot{H} = M$ для системы подвес–ротор и проанализируем его составляющую по оси e_1 . Аппроксимируя момент по оси e_1 , обусловленный пружиной и амортизатором, значением $-(K\alpha + c\dot{\alpha})Ae_1$, где A — константа, соизмеримая с квадратом длины, находим дифференциальное уравнение относительно угла α :

$$(\lambda_1 + \rho_1)\ddot{\alpha} + KA\alpha + cA\dot{\alpha} = \lambda_2\dot{\beta}\omega_3 - (\lambda_1 + \rho_1)\dot{\omega}_1 + (\lambda_2 + \rho_2 - (\lambda_3 + \rho_3))\omega_2\omega_3, \quad (11.8)$$

где $\omega_p = \sum_{i=1}^3 \omega_i t_i$.

Действие гироскопа

Дифференциальное уравнение (11.8) характеризует изменение угла α при движении платформы. Ясно, что угол α чувствителен ко всем составляющим вектора ω_p . На практике ротор обычно раскручивается до большой скорости $\dot{\beta}$, так что в правой части уравнения (11.8) доминирует член $\lambda_2\dot{\beta}\omega_3$. Следовательно, уравнение (11.8) можно аппроксимировать уравнением

$$(\lambda_1 + \rho_1)\ddot{\alpha} + KA\alpha + cA\dot{\alpha} = \lambda_2\dot{\beta}\omega_3. \quad (11.9)$$

Предположим, что изначально $\alpha = 0$ (ротор находится в горизонтальном положении), значение $\dot{\beta}$ велико, а $\omega_3 = 0$. Из (11.9) следует, что ротор так и останется в горизонтальном положении. Если теперь придать скорости ω_3 постоянное ненулевое значение ω_{30} , то значение $\alpha(t)$ начнет со временем изменяться. В качестве упражнения проинтегрируйте уравнение (11.9); вы увидите, что если значение $\lambda_2 \dot{\beta} \omega_3$ постоянно, а $cA > 0$, то решение $\alpha(t)$ в конечном итоге примет постоянное значение α_0 . Из уравнения (11.9) можно построить соотношение, связывающее это значение с постоянной угловой скоростью платформы⁵:

$$\omega_{30} = \left(\frac{KA}{2\lambda_2 \dot{\beta}} \right) \alpha_0. \quad (11.10)$$

Это уравнение объясняет принцип работы гироскопа.

В мире существует множество устройств, аналогичных гироскопу: гироскоп, гироскопический горизонт, трехстепенный гироскоп (с тремя измерительными осями). Объем книги не позволяет нам рассмотреть их устройство и действие. Хорошее описание есть в работах Арнольда и Мондера [8], Крэбтри [42] и Гинзберга [71]. Хотя в сравнении с современными микроэлектромеханическими гироскопами эти устройства выглядят устаревшими, практическая реализация многих механических моделей просто поражает своей гениальностью.

11.5. Заключение

В этой главе мы на двух примерах продемонстрировали построение уравнений движения для системы твердых тел. К счастью, в рамках большинства физических задач к реакциям и моментам связей применимо лагранжево представление, поэтому движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа. Эта мысль раскрывается на протяжении всей книги и широко используется при формулировке систем многих тел.

К неголономным системам применимы альтернативные формы уравнений Лагранжа. Самыми известными из них являются уравнения Гиббса–Аппеля и уравнения Больцмана–Гамеля. Они позволяют исключить из модели реакции и моменты неинтегрируемых связей. Эти уравнения не рассматриваются в настоящей книге; они исследуются во многих других учебниках и статьях, например в работах Баруха [14], Гринвуда [80], Гамеля [87], Карапетяна и Румянцева [108], Неймарка и Фуфаева [151], Папас-

⁵Видимо, в формуле (11.10) опечатка. Должно быть: $\omega_{30} = \left(\frac{KA}{\lambda_2 \dot{\beta}} \right) \alpha_0$. — Прим. ред.

тавридиса [167–169] и Удвадия и Калаба [218]. Другие формы уравнений движения выводятся из уравнений Лагранжа (11.2). Если вы примените знания, полученные в этой книге (а также выражения (11.3)), вы сможете связать эти уравнения с теоремами об изменении количества движения и кинетического момента.

Задачи

11.1. На рис. 11.2 изображена пластина массы m , шарнирно сочлененная в точке A с тонким стержнем. Длина стержня равна L . Один его конец (O) является неподвижным. Стержень вращается вокруг оси E_3 с угловой скоростью $\dot{\psi} = \Omega$.

- (а) Используя систему 3-1-3 углов Эйлера, докажите, что на движение пластины накладываются пять связей, уравнения которых имеют вид

$$-L\dot{\psi}\mathbf{e}'_1 = \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_A, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^1 = \Omega, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}^3 = 0, \quad (11.11)$$

где $\bar{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор центра масс пластины, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость пластины, а $\boldsymbol{\pi}_A$ — радиус-вектор точки A относительно центра масс \bar{X} .

- (б) При каких пространственных положениях пластины углы Эйлера принимают вырожденные значения?
- (с) Запишите выражения для сил \mathbf{F}_c и моментов \mathbf{M}_c , соответствующих пяти связям. Нарисуйте силовую схему для свободной пластины.
- (д) Докажите, что механическая мощность реакций и моментов связей не равна нулю при $\Omega \neq 0$.
- (е) Пусть вектор $\boldsymbol{\pi}_A$ и момент тензора инерции \mathbf{J} пластины относительно его центра масс равны

$$\boldsymbol{\pi}_A = -a\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (11.12)$$

Получите выражение для кинетического момента \mathbf{H}_A и покажите, что $\mathbf{H}_A \neq \mathbf{J}^A \boldsymbol{\omega}$ при $\Omega \neq 0$ ⁶.

- (ф) Расскажите, как бы вы строили уравнения движения пластины.

⁶Подсказка: можете воспользоваться тождеством $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

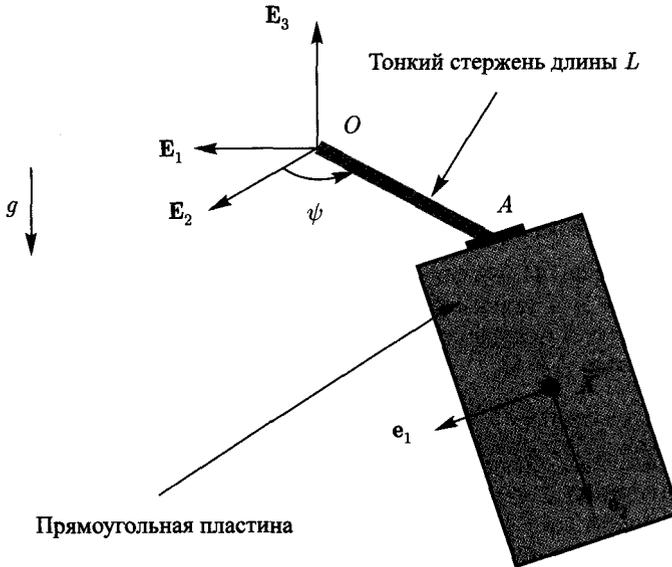


Рис. 11.2. Твердая пластина, соединенная с тонким стержнем цилиндрическим шарниром в точке A . Один конец стержня закреплен в точке O так, что стержень может свободно вращаться вокруг оси E_3 . На пластину действует сила тяжести $-mgE_3$

11.2. Согласно (2.1), теоремы об изменении количества движения и кинетического момента для твердого тела в интегральной форме имеют вид:

$$\mathbf{G}(t_1) - \mathbf{G}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad (11.13)$$

$$\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{M}(\tau) d\tau.$$

Применим эти уравнения в задаче о столкновении твердого тела с гладкой поверхностью. Имеем $t_1 - t_0 \rightarrow 0$; в этом пределе значения $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ могут быть непрерывными. Предположим, что столкновение происходит в момент времени t . Тогда мы должны рассмотреть пределы $t_1 = t + \sigma \searrow t$ и $t_0 = t - \sigma \nearrow t$.

Аналогично тому, как трактуются в механике сплошных сред нарушения непрерывности, мы обозначим изменение (скачок) функции

$f(u(t), \dot{u}(t), t)$ в момент времени t следующим образом:

$$[[f]] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f(u(t + \sigma), \dot{u}(t + \sigma), t + \sigma) - f(u(t - \sigma), \dot{u}(t - \sigma), t - \sigma),$$

где $\sigma > 0$.

- (а) Пусть движение тела параметризуется в системе координат u^1, \dots, u^6 . При каких условиях выполняются равенства

$$\left[\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{u}^K} \right] \right] = 0, \quad \left[\left[\frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^K} \right] \right] = 0, \quad (11.14)$$

где $K = 1, \dots, 6$. Какой физический смысл имеют эти условия?

- (б) При условии, что выполняются равенства (11.14), докажите, что, если взять подходящие пределы, уравнения (11.13) можно переписать в виде

$$\left[\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^K} \right] \right] = \hat{\Phi}_K, \quad (11.15)$$

где $K = 1, \dots, 6$, а обобщенные ударные силы равны

$$\hat{\Phi}_K = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\int_{t-\sigma}^{t+\sigma} F(\tau) d\tau \right) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{u}^K}(t) + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\int_{t-\sigma}^{t+\sigma} M(\tau) d\tau \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \dot{u}^K}(t).$$

При выводе (11.15) полезными могут оказаться вычисления (10.17). В разделе 15.2 работы Синга и Гриффита [207] описывается альтернативный метод построения (11.15) для системы материальных точек.

- (с) Покажите, что шесть уравнений (11.15) описывают столкновение стержня с гладкой горизонтальной поверхностью.

11.3. Рассмотрим еще раз роботизированную руку, изображенную на рис. 7.9. Масса роботизированной руки равна m , а момент тензора инерции относительно ее центра масс равен

$$J_0 = \lambda_1 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \lambda_3 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Вращение роботизированной руки осуществляется двигателями, которые на рис. 7.9 не показаны. Вращение складывается из:

- 1) поворота вокруг оси \mathbf{E}_3 на угол ψ и
- 2) поворота вокруг оси $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_1 = \cos(\psi)\mathbf{E}_1 + \sin(\psi)\mathbf{E}_2$ на угол θ .

Другая система приводов описывает движение точки P роботизированной руки. Радиус-вектор центра масс руки относительно точки P равен

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_P = \frac{L}{2}\mathbf{e}_3.$$

- (a) Рассматривая углы ψ и θ как углы Эйлера системы 3-1-3, для которой $\phi = 0$, докажите, что векторы \mathbf{g}^1 , \mathbf{g}^2 и \mathbf{g}^3 двойственного базиса Эйлера не являются ортонормированными. При каких положениях роботизированной руки эти векторы не определяются?
- (b) Какие шесть связей накладываются на движение руки при условии, что движение точки P описывается функцией $\mathbf{x}_P = \mathbf{u}(t)$, и что вращение руки является predetermined?
- (c) Докажите, что кинетический момент \mathbf{H} (относительно центра масс) руки равен

$$\mathbf{H} = \lambda_1 \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \dot{\psi} \sin(\theta) \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \dot{\psi} \cos(\theta) \mathbf{e}_3.$$

- (d) Нарисуйте силовую схему для свободной роботизированной руки. Покажите на ней силу тяжести $-mg\mathbf{E}_3$.
- (e) Докажите, что сила, приводящая в движение центр масс руки, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{act}} = mg\mathbf{E}_3 + m\ddot{\mathbf{u}} + \frac{mL}{2}(2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\theta) + \ddot{\psi} \sin(\theta))\mathbf{e}_1 + \\ + \frac{mL}{2}(\dot{\psi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \ddot{\theta})\mathbf{e}_2 - \frac{mL}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta))\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

- (f) Докажите, что момент \mathbf{M}_c , поворачивающий роботизированную руку, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{act}} = \frac{mL}{2}\mathbf{e}_3 \times (g\mathbf{E}_3 + \ddot{\mathbf{u}}) + \frac{mL^2}{2}\dot{\psi}_0\dot{\theta}_0 \cos(\theta)\mathbf{e}_2 - \\ - \frac{mL^2}{4}\dot{\psi}_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Во время поворота $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, поэтому угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не изменяется.

- (g) Докажите, что изменение полной энергии E роботизированной руки равно работе, которую совершают сила \mathbf{F}_{act} и момент \mathbf{M}_{act} :

$$\dot{E} = \mathbf{F}_{\text{act}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{\text{act}} \cdot \dot{\psi} \mathbf{E}_3 + \mathbf{M}_{\text{act}} \cdot \dot{\theta} \mathbf{e}_1.$$

11.4. Ранее мы рассказывали о недавно изобретенном кистевом эспандере, который известен как тренажер Динаби (Dunabee), Пауэрбол (Powerball) или Роллербол (Rollerball). Внутри этого тренажера находится тяжелый ротор, который катится без скольжения по круговому треку [82, 94]. Трек является частью корпуса, который человек держит в руке и раскручивает. В работе [82] говорится, что путем эффективного раскручивания корпуса можно заставить вращаться ротор. Чтобы ротор начал вращаться, человек должен постоянно увеличивать момент, в результате чего тренируются мышцы руки и запястья. Посмотрим, какие связи накладываются на движение ротора и корпуса.

На рис. 11.3 видно, что система векторов $\{\mathbf{e}_{t1}, \mathbf{e}_{t2}, \mathbf{e}_{t3}\}$ вращается вместе с треком, а система векторов $\{\mathbf{e}_{r1}, \mathbf{e}_{r2}, \mathbf{e}_{r3}\}$ вращается вместе с ротором. Определим также промежуточную систему векторов

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_{r1}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_{t3} \times \mathbf{e}_{r1}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_{t3}.$$

Заметим, что эти векторы не составляют коротационный базис.

- (a) Тензор вращения $\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{tk} \otimes \mathbf{E}_i$ корпуса параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера (ψ, θ, ϕ) . По рис. 11.3 определите, к чему приведет наложение условий $\psi = -\phi$ и $\theta = \theta_0$, где θ_0 — константа.
- (b) Тензор вращения \mathbf{R} ротора относительно трека (корпуса) параметризуется в системе 3-1-2 углов Эйлера $(\alpha, \gamma, \mu \approx 0)$. Подчеркнем, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_{r1} \otimes \mathbf{e}_{t1} + \mathbf{e}_{r2} \otimes \mathbf{e}_{t2} + \mathbf{e}_{r3} \otimes \mathbf{e}_{t3}. \quad (11.16)$$

Получите выражения для векторов угловой скорости ротора $\boldsymbol{\omega}_r$ и трека $\boldsymbol{\omega}_t$.

- (c) По рис. 11.4 видно, что ротор соприкасается с треком в двух точках. Для удобства определим четвертую систему единичных векторов $\{\mathbf{e}_{\pi1}, \mathbf{e}_{\pi2}, \mathbf{e}_{\pi3}\}$, из которых вектор $\mathbf{e}_{\pi1}$ параллелен отрезку прямой между точками P и Q , а $\mathbf{e}_{\pi2} = \mathbf{a}_2$. Докажите, что угол β между \mathbf{e}_{r1} и $\mathbf{e}_{\pi1}$ равен

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{R_a}{R_t} \right),$$

где R_a — радиус оси ротора, а R_t — радиус трека.

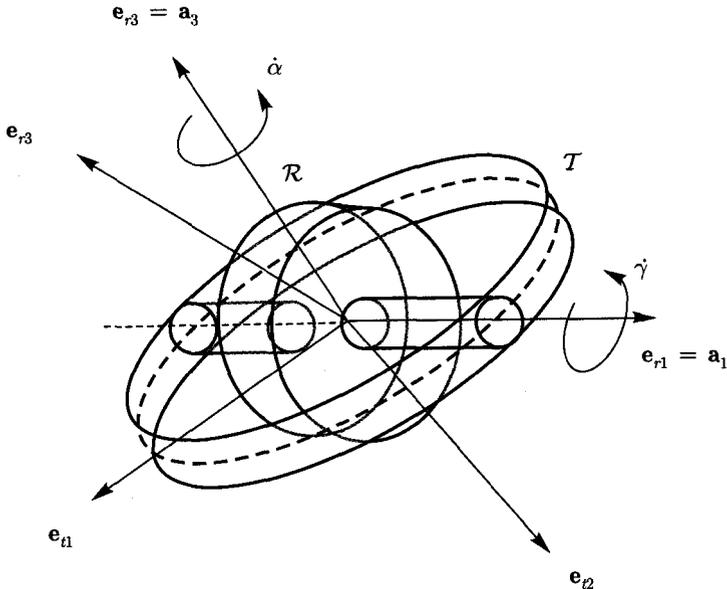


Рис. 11.3. Схема тренажера Динаби, на которой показан трек T и ротор \mathcal{R} . Углы α и γ характеризуют вращение ротора относительно трека. Рисунок взят из [82]

(d) Докажите, что условие качения в точках P и Q накладывает связи:

$$\bar{\mathbf{v}}_r = \bar{\mathbf{v}}_t, \quad (\boldsymbol{\omega}_r - \boldsymbol{\omega}_t) \times \mathbf{e}_{\pi 1} = \mathbf{0},$$

где $\bar{\mathbf{v}}_r$ и $\bar{\mathbf{v}}_t$ — векторы скорости центров масс ротора и корпуса соответственно. Кроме того, докажите, что эти связи предполагают выполнение равенства

$$\dot{\gamma} = - \left(\frac{R_t}{R_a} \right) \dot{\alpha}. \quad (11.17)$$

Как и в [82], мы допускаем, что $\mu \approx 0$.

(e) При условии, что движение корпуса является полностью предопределенным, докажите, что система тел, состоящая из корпуса и ротора, подчиняется 11 независимым связям. С помощью представления Лагранжа задайте реакции и моменты связей, действующие на два тела \mathcal{R} и T .

- (f) Докажите, что $e_{\pi 1}$ -компонент уравнения равновесия кинетического момента ротора относительно центра масс \bar{X} есть дифференциальное уравнение, описывающее движение ротора.
- (g) В условиях равномерного вращения ротора выполняется равенство $\dot{\psi} = \dot{\alpha}$. Объясните, почему из (11.7) следует, что ротор будет вращаться быстрее корпуса.

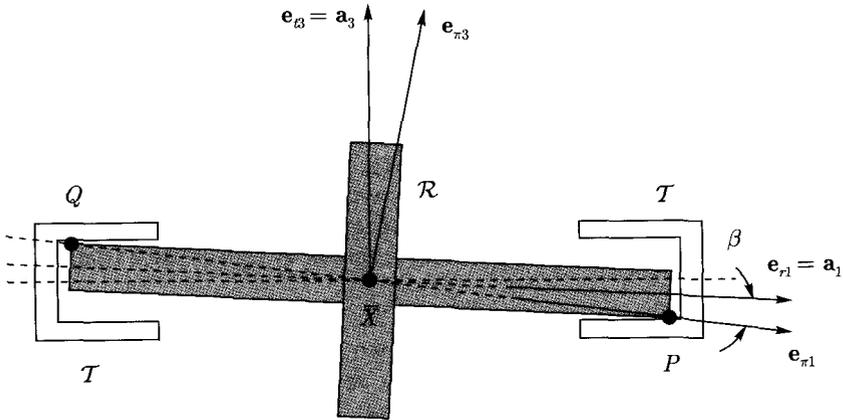


Рис. 11.4. Схематическое изображение того, как ротор соприкасается с треком в двух точках P и Q . Центры масс ротора \mathcal{R} и корпуса \mathcal{T} совпадают и находятся в точке \bar{X} . Радиус R_a оси ротора и угол μ преувеличены

11.5. Пусть тензор вращения \mathbf{Q} твердого тела параметризуется в системе 3-1-3 углов Эйлера (ψ, θ, ϕ) . Допустим, что через интервал времени $t_1 - t_0$ выполняется равенство

$$\mathbf{e}_3(t_1) = \mathbf{e}_3(t_0). \quad (11.18)$$

- (a) Докажите, что вращение тела в интервале времени $t_1 - t_0$ описывается произведением тензоров

$$\mathbf{Q}(t_1)\mathbf{Q}^T(t_0) = \mathbf{L}(\phi(t_1) - \phi(t_0), \mathbf{e}_3(t_0)).$$

- (b) Докажите, что для определения $\phi(t_1) - \phi(t_0)$ недостаточно показаний $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3$ от одного скоростного гироскопа⁷.

⁷Воспользуйтесь выражением (7.22) из задачи 7.4.

- (c) Для какого движения твердого тела выполняется равенство (11.18)⁸.
- (d) Рассмотрите движение из пункта (c). При условии что начало вектора e_3 является неподвижным, постройте график изменения координат для конца этого вектора. Конец вектора лежит на поверхности единичной сферы. С помощью выражения, которое дается в разделе 123 работы Кельвина и Тейта [109] и которое независимо от них получили Гудман и Робинсон [73] и Леви [126], докажите, что площадь, которую описывает конец вектора $e_3(t)$ на единичной сфере, зависит от угла $\phi(t_1) - \phi(t_0)$.
- (e) Докажите, что выводы, полученные в пункте (d), имеют отношение к парадоксу Кодмана, который обсуждался в задаче 6.8.

⁸При ответе на этот вопрос полезными могут оказаться статьи Монтгомери [144] и О'Рейли [158].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основы теории тензоров

А.1. Введение

Тензор — это линейное отображение, преобразующее вектор в вектор. Векторные преобразования принято задавать в матричной форме. В этом приложении мы поговорим о другой величине, тензоре, которая служит для тех же целей. Тензоры обычно обозначаются полужирными символами заглавного регистра (например \mathbf{A}). Преобразование вектора \mathbf{a} в вектор \mathbf{b} под действием тензора \mathbf{A} записывается уравнением

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}.$$

Преимуществом тензорного представления является его компактность, в сравнении с матричным, и то, что тензоры легче дифференцировать, чем матрицы. Кроме того, при изменении базиса составляющие тензора преобразуются очевидным образом. Это свойство особенно полезно в кинематике твердого тела. В разделе 6.2 главы 6 рассматривается пример, в котором сравниваются матричное и тензорное обозначения. В этом примере наглядно демонстрируются все преимущества тензорного представления.

Заметим, что материал настоящего приложения традиционно изучается на курсах механики сплошных сред. Среди работ на эту тему можем назвать статьи Кейси [26, 28] и учебники Чэдвика [35] и Гуртина [84].

А.2. Базисы, альтернаторы и символы Кронекера

Пусть \mathbb{E}^3 обозначает трехмерное евклидово пространство. Правый фиксированный ортонормированный базис этого пространства будем обозначать через $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$. Система векторов $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ задает другой правый ортонормированный базис, который не обязательно является фиксированным¹. Латинские строчные курсивные индексы, например i, j, k , принимают значения от 1 до 3.

¹Он служит для представления коротационных баз, изменяющихся во времени баз, таких как $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{E}_3\}$, и фиксированных баз, таких как $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$.

Напомним, что система векторов $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ является ортонормированной, если при $i \neq k$ выполняется равенство $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = 0$, а при $i = k$ выполняется равенство $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = 1$. Далее считаем, что система векторов $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ является правой, если смешанное произведение векторов

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \mathbf{b}_3 \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)$$

положительно.

Поскольку мы очень часто будем использовать скалярное произведение, удобно определить символ Кронекера δ_{ik} :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k = \delta_{ik}.$$

Определим также альтернирующий символ (Леви-Чивита) ϵ_{ijk} :

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1,$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1,$$

в противном случае $\epsilon_{ijk} = 0$.

Иначе говоря, $\epsilon_{ijk} = 1$, если ijk соответствует четной перестановке чисел 1, 2, 3; $\epsilon_{ijk} = -1$, если ijk соответствует нечетной перестановке чисел 1, 2, 3; $\epsilon_{ijk} = 0$, если $i = j$, или $j = k$, или $k = i$. Заметим также, что

$$[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = \epsilon_{ijk}.$$

Это выражение легко доказать, воспользовавшись определением смешанного произведения векторов.

А.3. Тензорное произведение двух векторов

Тензорное произведение любых двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} в пространстве \mathbb{E}^3 определяется следующим образом:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \quad (\text{A.1})$$

где \mathbf{c} — произвольный вектор пространства \mathbb{E}^3 . Это значит, что произведение $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ проецирует вектор \mathbf{c} на вектор \mathbf{b} и умножает результирующий

скаляр на вектор \mathbf{a} . Очевидно, что $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ преобразует вектор \mathbf{c} в вектор, параллельный вектору \mathbf{a} . Можно дать эквивалентное определение тензорного произведения

$$\mathbf{c}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Оба определения тензорного произведения широко используются в настоящей книге. Обратите внимание, что произведение $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ линейно преобразует любой вектор \mathbf{c} , на который оно действует. К примеру, если $\mathbf{a} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{c} = \mathbf{E}_2$, то

$$(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}.$$

Проанализируйте эти выражения, выбрав в качестве \mathbf{c} другие векторы.

Тензорное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обладает рядом полезных свойств. Если α и β — два произвольных скаляра, а \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — три произвольных вектора, то

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} &= \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}), \\ \mathbf{c} \otimes (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) &= \alpha(\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{c} \otimes \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Эти свойства вытекают из определения тензорного произведения. Чтобы их доказать, достаточно продемонстрировать, что левые и правые части этих тождеств одинаковым образом преобразуют произвольный вектор \mathbf{d} .

А.4. Тензоры второго ранга

Тензор второго ранга \mathbf{A} есть линейное преобразование пространства \mathbb{E}^3 в себя. Это значит, что для любых двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и любых двух скаляров α и β выполняется равенство

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{a} + \beta\mathbf{A}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}\mathbf{a}$ и $\mathbf{A}\mathbf{b}$ — векторы пространства \mathbb{E}^3 . Чтобы проверить, равны ли друг другу два тензора второго ранга \mathbf{A} и \mathbf{B} , достаточно доказать, что векторы $\mathbf{A}\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}\mathbf{a}$ равны друг другу для всех векторов \mathbf{a} . Тензор $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ — простой пример тензора второго ранга.

Для тензоров второго ранга традиционно определяют следующие правила сложения:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{a}, \quad (\alpha\mathbf{A})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{a}), \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{a}),$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — произвольные тензоры второго ранга, \mathbf{a} — произвольный вектор, а α — произвольный скаляр.

Определим также единичный тензор \mathbf{I} и нулевой тензор \mathbf{O} :

$$\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{O}\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

где \mathbf{a} — произвольный вектор.

А.5. Теорема представления тензоров второго ранга²

На этом этапе удобно получить представление для тензора второго ранга \mathbf{A} . Мы должны прийти к выражению

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j, \quad (\text{A.2})$$

где

$$\mathbf{A}_{ik} = (\mathbf{A}\mathbf{p}_k) \cdot \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{p}_j.$$

Величины A_{ik} называют компонентами тензора \mathbf{A} относительно базиса $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. Удобно интерпретировать тензоры с помощью представления $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{p}_j$. Согласно этой записи, тензор \mathbf{A} преобразует вектор \mathbf{p}_k в вектор \mathbf{a}_k . Следовательно, если мы знаем, как преобразует тензор \mathbf{A} три ортонормированных вектора, то мы можем сразу же записать для него представление.

Приступим к доказательству (А.2). Заметим, что $\mathbf{A}\mathbf{p}_i$ есть вектор. Значит, его можно задать линейной комбинацией базисных векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и \mathbf{p}_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 &= A_{11}\mathbf{p}_1 + A_{21}\mathbf{p}_2 + A_{31}\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_2 &= A_{12}\mathbf{p}_1 + A_{22}\mathbf{p}_2 + A_{32}\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_3 &= A_{13}\mathbf{p}_1 + A_{23}\mathbf{p}_2 + A_{33}\mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Для скаляров A_{ik} имеет значение порядок индексов i и k . Пусть $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{p}_i$ — произвольный заданный вектор, тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}(b_j \mathbf{p}_j) = \sum_{j=1}^3 b_j (\mathbf{A}\mathbf{p}_j) =$$

²В современных учебниках по тензорному анализу для упрощения обозначений принято опускать знак суммы \sum при наличии в выражении повторяющегося индекса. Автор использует несколько устаревшее обозначение, указывая знак суммы \sum явно. — *Прим. ред.*

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^3 b_j \left(\sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_j (A_{kj} \mathbf{p}_k) = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j \right) \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{p}_i = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j \right) \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались определением тензорного произведения двух векторов.

Итак, мы доказали, что

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j) \mathbf{b}.$$

Поскольку это выражение справедливо для всех векторов \mathbf{b} и поскольку \mathbf{A} задает линейное преобразование, мы заключаем, что выражение (А.2) есть верное представление тензора \mathbf{A} .

Представление линейного преобразования

Получим на основе теоремы представления (А.2) выражения, задающие преобразование под действием тензора второго ранга \mathbf{A} . Эти выражения аналогичны матричному умножению. Вспомним, что

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j.$$

Тензор \mathbf{A} преобразует вектор \mathbf{b} следующим образом:

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_j \right) \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{kj} b_j \mathbf{p}_k.$$

Если определить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{b}$, то легко видеть, что компоненты $c_i = \mathbf{c} \cdot \mathbf{p}_i$ вектора \mathbf{c} равны

$$c_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} b_j. \tag{А.3}$$

В матричной форме выражение (А.3) имеет знакомый вид:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{А.4})$$

Из (А.4) следует, что единичный тензор равен $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i$. Выберем в качестве базиса $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ известные нам системы векторов и получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 = \\ &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 = \\ &= \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

По ходу книги встречаются и другие примеры представления $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i$.

Произведение двух тензоров второго ранга

Получим полезное выражение, задающее произведение двух тензоров второго ранга. Произведением \mathbf{AB} является тензор второго ранга \mathbf{C} . Пусть

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 B_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 C_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Решим уравнения

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = (\mathbf{AB})\mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — произвольный вектор. В силу произвольности вектора \mathbf{a} для девяти компонентов тензора \mathbf{C} имеем:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk}.$$

Это выражение аналогично тому, которое используется в матричном умножении. Действительно, если определить три матрицы с компонентами C_{ik} , A_{ik} и B_{ik} , то получим:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}.$$

В этом выражении все компоненты трех тензоров выражаются через векторы одного и того же базиса. Представление произведения \mathbf{BA} получается путем прямого расчета.

Наконец, рассмотрим произведение двух тензоров второго ранга $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$. Используя теорему представления для обоих тензоров и записывая их произведение, находим:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

С помощью этого выражения легче всего запомнить, как перемножаются два тензора второго ранга.

А.6. Функции тензоров второго ранга

Симметричные и кососимметричные составляющие тензора второго ранга

Тензор \mathbf{A}^T , который получается транспонированием тензора второго ранга \mathbf{A} , по определению равен

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{a}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{A.5})$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — произвольные векторы. Применяя к тензору второго ранга $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ операцию транспонирования, получаем:

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^T = \mathbf{d} \otimes \mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{c}.$$

Будет показано, что эти выражения являются весьма полезными.

Для любых двух заданных тензоров второго ранга \mathbf{A} и \mathbf{B} можно доказать равенство $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, то тензор \mathbf{A} называется симметричным. Тензор \mathbf{A} называется кососимметричным, если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Любому тензору второго ранга \mathbf{B} можно представить суммой симметричного тензора второго ранга и кососимметричного тензора второго ранга:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^T).$$

К кососимметричным тензорам, часто встречающимся в настоящей книге, относятся тензоры угловой скорости. Эти тензоры имеют непосредственное отношение к векторам угловой скорости. Примерами симметричных тензоров являются тензоры Эйлера \mathbf{E}_0 и \mathbf{E} и тензоры инерции \mathbf{J}_0 и \mathbf{J} .

Получим представления для симметричной и кососимметричной составляющих тензора второго ранга \mathbf{A} . С учетом определения $(\mathbf{A}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ и произвольности векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно доказать, что

$$\mathbf{A}^T = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ki} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_i,$$

где

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Поскольку тензор второго ранга \mathbf{A} является симметричным при условии, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \text{если } A_{ik} = A_{ki}.$$

Это значит, что симметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых компонентов. Аналогично если $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, то \mathbf{A} — кососимметричный тензор:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \quad \text{если } A_{ik} = -A_{ki}.$$

Обратите внимание, что кососимметричный тензор второго ранга имеет три независимых компонента.

Инварианты, определители и следы

С тензором второго ранга связаны три скалярные величины, которые не зависят от правого ортонормированного базиса пространства \mathbb{E}^3 . Эти величины называются (главными) инвариантами тензора второго ранга. Для тензора второго ранга \mathbf{A} инварианты $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ и $III_{\mathbf{A}}$ по определению равны³

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] &= I_{\mathbf{A}}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \\ [\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] + [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] + [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{c}] &= II_{\mathbf{A}}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \\ [\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{c}] &= III_{\mathbf{A}}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \end{aligned}$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — три произвольных вектора.

Первый инвариант называется следом тензора, а третий инвариант — определителем тензора:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = I_{\mathbf{A}}, \quad \det(\mathbf{A}) = III_{\mathbf{A}}. \quad (\text{A.6})$$

³Наши рассуждения во многом основываются на рассуждениях Чэдвика [35].

Посмотрим, почему они так называются. Во-первых, вспомним, что

$$[\mathbf{Aa}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{Ab}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{Ac}] = \text{tr}(\mathbf{A})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],$$

$$[\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}] = \det(\mathbf{A})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Если положить $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{c} = \mathbf{p}_3$, где $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ — правый ортонормированный базис пространства \mathbb{E}^3 , то получим промежуточные результаты:

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = 1,$$

$$[\mathbf{Ap}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] + [\mathbf{p}_1, \mathbf{Ap}_2, \mathbf{p}_3] + [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{Ap}_3] = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{Ap}_i) \cdot \mathbf{p}_i,$$

$$[\mathbf{Ap}_1, \mathbf{Ap}_2, \mathbf{Ap}_3] = \det(\mathbf{A}).$$

Принимая их во внимание, находим след тензора \mathbf{A} :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{Ap}_i) \cdot \mathbf{p}_i = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

Аналогичное выражение справедливо для следа матрицы. Далее, находим:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= [\mathbf{Ap}_1, \mathbf{Ap}_2, \mathbf{Ap}_3] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{i1} A_{j2} A_{k3} [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Напомним, что определитель матрицы размерностью 3×3 , компоненты которой равны B_{ik} , определяется по формуле

$$\det \left(\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}. \tag{A.8}$$

Сравнивая (A.7) с (A.8), мы видим, что определитель тензора \mathbf{A} можно рассчитать, воспользовавшись представлением тензора в терминах правого

ортонормированного базиса и стандартной формулой для матриц:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \right).$$

Заметим также, что $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Обратные и присоединенные тензоры

Тензор \mathbf{A}^{-1} , обратный для тензора второго ранга \mathbf{A} , есть тензор второго ранга, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Для тензора существует обратный ему тензор тогда, когда $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Если транспонировать это уравнение, то получим, что тензор, обратный к транспонированному тензору, равен транспонированному обратному тензору.

Присоединенный тензор \mathbf{A}^* для тензора второго ранга \mathbf{A} есть тензор второго ранга, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a} \times \mathbf{A}\mathbf{b},$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — произвольные векторы. Если тензор \mathbf{A} имеет обратный тензор, то присоединенный тензор также равен

$$\mathbf{A}^* = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Если определитель тензора \mathbf{A} равен единице, то последнее выражение существенно упрощается.

Собственные значения и собственные векторы

Характеристические значения (по-другому, собственные или главные значения) тензора второго ранга \mathbf{A} называются корнями λ характеристического уравнения для \mathbf{A} :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня λ_1, λ_2 и λ_3 . Раскладывая его, получаем:

$$\lambda^3 - I_{\mathbf{A}}\lambda^2 + II_{\mathbf{A}}\lambda - III_{\mathbf{A}} = 0.$$

Это значит, что

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det(\mathbf{A}) = III_{\mathbf{A}}, \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 &= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)) = II_{\mathbf{A}}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = I_{\mathbf{A}}.\end{aligned}$$

Следует отметить, что если тензор положительно определенный, то все его собственные значения строго положительны.

Собственный вектор (по-другому, характеристическое или главное направление) тензора \mathbf{A} есть вектор \mathbf{u} , удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \tag{A.9}$$

где λ — корень характеристического уравнения. У тензора второго ранга есть три собственных вектора. Чтобы их найти, необходимо преобразовать (A.9) с учетом (A.4) и применить стандартный метод линейной алгебры.

Рассмотрим простой пример:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{ma^2}{12}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{mb^2}{12}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{mc^2}{12}\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Анализируя данное выражение, приходим к выводу, что собственные значения тензора \mathbf{J}_0 равны $\frac{ma^2}{12}$, $\frac{mb^2}{12}$ и $\frac{mc^2}{12}$, а собственные векторы равны $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$. Отметим также, что если a, b и c имеют ненулевые значения, то тензор \mathbf{J}_0 положительно определенный.

А.7. Тензоры третьего ранга

Рассмотрим один пример тензора третьего ранга. Тензор третьего ранга преобразует векторы в тензоры второго ранга или тензоры второго ранга в векторы. Все построения, полученные выше для тензоров второго ранга, можно по аналогии распространить на тензоры третьего ранга. Тем не менее отметим, что произвольный тензор третьего ранга \mathcal{A} выражается через векторы базиса $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ следующим образом:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ijk} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k.$$

Определим также тензорное произведение:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})[\mathbf{d} \otimes \mathbf{e}] = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}), \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}). \quad (\text{A.10})$$

Возможны и другие определения тензорного произведения. Обратите внимание на квадратные скобки [] в (A.10).

Самый часто используемый тензор третьего ранга называется альтернатором ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_k = \\ &= \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1 - \\ &\quad - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1. \end{aligned}$$

У этого тензора есть ряд полезных свойств. Первое: если \mathbf{A} — симметричный тензор, то $\epsilon[\mathbf{A}] = \mathbf{0}$ (попробуйте доказать это свойство самостоятельно). Второе: если $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{p}_k$ — вектор, то тензор

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{c} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j c_k = \\ &= c_3(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1) + c_2(\mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3) + \\ &\quad + c_1(\mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

является кососимметричным.

Тот факт, что ϵ действует на вектор и дает кососимметричный тензор, позволяет нам определить кососимметричный тензор \mathbf{C} для произвольного вектора \mathbf{c} , и наоборот:

$$\mathbf{C} = -\epsilon \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2} \epsilon[\mathbf{C}].$$

Вектор \mathbf{c} называется аксиальным вектором тензора \mathbf{C} . В качестве упражнения полезно доказать, что если \mathbf{C} задается выражением

$$\mathbf{C} = c_{21}(\mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2) + c_{32}(\mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_3) + c_{13}(\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_1),$$

то, согласно первому тождеству из (A.10), имеем

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{2} \epsilon[\mathbf{C}] = c_{21} \mathbf{p}_3 + c_{13} \mathbf{p}_2 + c_{32} \mathbf{p}_1.$$

Другим важным результатом является:

$$\mathbf{Ca} = (-\epsilon\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Он позволяет заменить векторное произведение тензорным и наоборот.

Примеры. Приведем несколько примеров. Пусть задан кососимметричный тензор

$$\Omega = \Omega(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2).$$

Тогда

$$\epsilon[\Omega] = -2\Omega\mathbf{E}_3,$$

откуда заключаем, что $\Omega\mathbf{E}_3$ есть аксиальный вектор тензора Ω . В качестве упражнения докажите, что для всех векторов \mathbf{a} выполняется равенство

$$(\Omega(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2))\mathbf{a} = \Omega\mathbf{E}_3 \times \mathbf{a}.$$

Аналогично для заданного вектора $\gamma\mathbf{E}_1$ можно рассчитать:

$$\epsilon\gamma\mathbf{E}_1 = \gamma\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 - \gamma\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2.$$

С учетом этого получаем:

$$\gamma\mathbf{E}_1 \times \mathbf{b} = (\gamma\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2 - \gamma\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3)\mathbf{b}$$

для всех векторов \mathbf{b} .

А.8. Особые тензоры второго ранга

Выделяют три типа тензоров второго ранга, которые играют важную роль в динамике твердого тела: собственно ортогональные тензоры, симметричные положительно определенные тензоры и кососимметричные тензоры.

Ортогональные тензоры

Тензор второго ранга \mathbf{L} называется ортогональным, если $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I}$. Это значит, что транспонированный ортогональный тензор совпадает с обратным тензором. Из этого определения также следует, что $\det(\mathbf{L}) = \pm 1$. Ортогональный тензор обладает уникальным свойством: $\mathbf{L}\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, то есть длина вектора, который преобразуется под действием ортогонального тензора, остается неизменной.

Вот некоторые примеры ортогональных тензоров:

$$\mathbf{I}, \quad -\mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Последний пример описывает отражение в плоскости $x_3 = 0$.

Собственно ортогональные тензоры

Тензор второго ранга \mathbf{Q} называется собственно ортогональным, если $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ и $\det(\mathbf{Q}) = 1$. Теорема Эйлера гласит, что этот тензор эквивалентен тензору вращения (см. раздел 7.2). Собственно ортогональные тензоры второго ранга относятся к подклассу ортогональных тензоров второго ранга. В самом деле, можно доказать, что любой ортогональный тензор второго ранга либо уже является тензором вращения, либо может быть получен умножением тензора вращения на $-\mathbf{I}$.

Согласно формуле Эйлера, любой тензор вращения можно задать выражением

$$\mathbf{Q} = \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) - \sin(\theta)\epsilon\mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p},$$

где θ — вещественное число, а \mathbf{p} — единичный вектор. Переменная θ называется углом вращения (против часовой стрелки), а \mathbf{p} — осью вращения. В главе 6 рассматривается несколько примеров тензоров вращения.

Симметричные, положительно определенные тензоры второго ранга

Тензор \mathbf{A} называется положительно определенным, если $\mathbf{A}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ для всех $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Из этого определения следует, что кососимметричный тензор второго ранга не может быть положительно определенным. Примерами положительно определенных тензоров в механике являются тензоры Эйлера и тензоры инерции.

Если \mathbf{A} — положительно определенный тензор, то все три его собственные значения являются положительными, а сам тензор может быть задан выражением

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3,$$

где $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$. То есть \mathbf{u}_i есть собственный вектор тензора \mathbf{A} , собственные значения которого равны λ_i . Это представление часто называют спектральным разложением.

А.9. Производные от тензоров

По ходу книги нам часто приходится рассчитывать производные тензоров. Пусть тензор \mathbf{A} равен

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Допустим, что компоненты тензора \mathbf{A} и векторы \mathbf{p}_i являются функциями времени. Производная от \mathbf{A} по времени определяется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \dot{A}_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \dot{\mathbf{p}}_i \otimes \mathbf{p}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{p}_i \otimes \dot{\mathbf{p}}_k.$$

Обратите внимание, что мы дифференцируем как компоненты тензора, так и базисные векторы.

Возьмем, к примеру, тензор

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Если выразить \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ через векторы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и \mathbf{E}_3 и продифференцировать, то получим:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_1 - \dot{\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_2.$$

В качестве упражнения докажите, что \mathbf{A} есть тензор вращения и что $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T$ есть кососимметричный тензор.

Определим цепное правило дифференцирования сложной функции и правила умножения. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q(t))$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Тогда

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \dot{q},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{c}) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{c} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{c}}.$$

Если дана функция $\psi = \psi(\mathbf{A})$, то производная этой функции относительно \mathbf{A} является тензором второго ранга:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial A_{ik}} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_k.$$

Кроме того, если векторы \mathbf{p}_i постоянны, то

$$\dot{\psi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial A_{ik}} \dot{A}_{ik} = \text{tr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}}^T \right).$$

Этот результат мы используем, когда исследуем связи, ограничивающие движение твердых тел.

Задачи

А.1. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{b} = \mathbf{E}_2$. Докажите, что для любого вектора $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{E}_i$ справедливы тождества $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = c_2 \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{c}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = c_1 \mathbf{E}_2$.

А.2. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{b} = \mathbf{E}_2$. Докажите, что для любого вектора $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{E}_i$ справедливо тождество $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{c} = c_2 \mathbf{E}_1 - c_1 \mathbf{E}_2$.

А.3. Пользуясь определением транспонированного тензора (А.5), докажите, что $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

А.4. Докажите, что если $\mathbf{a} = 10\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{E}_2$, то $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} = 50\mathbf{E}_1(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u})$ и $(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{u} = 50\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u})$.

А.5. Докажите, что если $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_\theta$, то $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} = \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{u})$ и $(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{e}_\theta(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u})$.

А.6. Пользуясь определением альтернатора, докажите, что

$$-\epsilon \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2.$$

Где в кинематике твердого тела используется этот результат? Докажите, что для любого вектора \mathbf{a} выполняется равенство $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{a} = (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{a}$.

А.7. Докажите, что следующее уравнение, содержащее умножение матриц,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$$

может быть записано тремя уравнениями

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{P}\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{P}\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{P}\mathbf{E}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \cos(\theta)(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \sin(\theta)(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2) + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 = \\ &= \cos(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) - \sin(\theta)\epsilon \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Чтобы доказать последнюю строчку, сначала полезно доказать, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_3.$$

Проверьте, что тензор \mathbf{P} является собственно ортогональным.

A.8. Докажите, что умножение матриц

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$$

эквивалентно трем уравнениям

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R}\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{e}_\phi = \mathbf{R}\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{R}\mathbf{E}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + \cos(\phi) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \\ & + \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 - \\ & - \sin(\phi) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1 - \sin(\theta) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \cos(\theta) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2. \end{aligned}$$

Чтобы это доказать, полезно сначала получить представление

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_2.$$

A.9. Докажите, что тензор \mathbf{R} из предыдущей задачи является собственнo ортогональным.

A.10. Приведите пример, в котором тензорное умножение является некоммутативным, то есть $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

A.11. Докажите, что если \mathbf{B} — тензор второго ранга, то

$$\epsilon[\mathbf{B}] = \frac{1}{2} \epsilon[\mathbf{B} - \mathbf{B}^T].$$

A.12. Докажите, что

$$-\epsilon[\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}] = -\frac{1}{2} \epsilon[\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{c}] = \mathbf{d} \times \mathbf{c}.$$

A.13. Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — кососимметричные тензоры второго ранга. Докажите, что

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{AB}^T), \quad (\text{A.12})$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — аксиальные векторы тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} соответственно.

A.14. Пусть \mathbf{A} — кососимметричный тензор второго ранга, \mathbf{a} — его аксиальный вектор, \mathbf{C} — симметричный тензор второго ранга. Докажите,

что

$$-\frac{1}{2}\epsilon[\mathbf{AC} + \mathbf{CA}] = (\text{tr}(\mathbf{C})\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{a}.$$

Исходя из этого тождества, можно получить выражение для кинетического момента \mathbf{H} твердого тела, зависящее от тензора Эйлера \mathbf{E} и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{H} = (\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} - \mathbf{E})\boldsymbol{\omega}$.

A.15. Пусть \mathbf{A} — тензор, а \mathbf{b} и \mathbf{c} — два произвольных вектора. Докажите, что

$$(\text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{Ab} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{Ac}.$$

Подсказка: Легче всего это доказать, если сначала положить $\mathbf{b} = \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{c} = c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2$, а затем подставить эти выражения в искомое тождество.

Литература

- [1] G. J. Allman. On the attraction of ellipsoids with a new demonstration of Clairaut's theorem, being an account of the late Professor Mac Cullagh's lectures on those subjects. *Trans. R. Irish Acad.*, 22:379–395, 1855.
- [2] S. L. Altmann. *Rotations, quaternions, and double groups*. Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [3] S. L. Altmann. Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal. *Math. Mag.*, 62(5):291–308, 1989.
- [4] K. G. Andersson. Poincaré's discovery of homoclinic points. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 48(2):133–147, 1994.
- [5] S. S. Antman. Solution to problem 71–24: «Angular velocity and moment potentials for a rigid body» by J. G. Simmonds. *SIAM Rev.*, 14:649–652, 1972.
- [6] P. Appell. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 14:1–6, 1900.
- [7] P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*: Cours de mécanique de la faculté des sciences: In 5 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1919–1926. (См. также: Аппель П. Теоретическая механика: Том 1: Статика. Динамика точки; Том 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Физматлит, 1960. 515 с., 472 с.)
- [8] R. N. Arnold and L. Maunder. *Gyrodynamics and its engineering applications*. Academic, London and New York, 1961.
- [9] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*. 2nd ed. (Graduate Texts in Mathematics, vol. 60.) Springer, New York, 1989. (См. также: Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Москва: Наука, 1989.)

- [10] V. I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin, 2006. (См. также: Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», 2000. 368 с.)
- [11] M. S. Ashbaugh, C. C. Chicone, and R. H. Cushman. The twisting tennis racket. *J. Dynam. Differential Equations*, 3(1):67–85, 1991.
- [12] Ju. V. Barkin. Oblique regular motion of a satellite and some small effects in the motions of the Moon and Phobos. *Cosmic Res.*, 23(1):20–30, 1985. (См. также: Баркин Ю. В. «Косые» регулярные движения спутника и некоторые тонкие эффекты в движении Луны и Фобоса // Космические исследования. 1985. Т. 23. № 1. С. 26–36.)
- [13] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*. (History of Mathematics Series, vol. 11.) AMS, Providence, RI, 1997.
- [14] H. Baruh. *Analytical dynamics*. McGraw-Hill, Boston, 1999.
- [15] M. F. Beatty. *Principles of engineering mechanics*. Plenum, New York, 1985.
- [16] V. V. Beletskii. *Motion of an artificial satellite about its center of mass*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966. (См. также: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва: Наука, 1965. 416 с.)
- [17] A. D. Blackowiak, R. H. Rand, and H. Kaplan. The dynamics of the celt with second-order averaging and computer algebra. In: *Proceedings of DETC'97: 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Paper Number DETC97/VIB-4103.
- [18] P. Blanchard, R. L. Devaney, and G. R. Hall. *Differential Equations*. 3rd ed. Thomson Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2006.
- [19] A. V. Borisov and I. S. Mamaev. Rolling of a rigid body on plane and sphere: Hierarchy of dynamics. *Regul. Chaotic Dyn.*, 7:177–200, 2002. (См. также: Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение твердого тела по плоскости и сфере: Иерархия динамики // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 173–205.)

- [20] N. M. Bou-Rabee, J. E. Marsden, and L. A. Romero. Tippe top inversion as a dissipation-induced instability. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 3:352–377, 2004 (electronic).
- [21] F. P. Bowden and D. Tabor. *The friction and lubrication of solids*. 2nd ed. Oxford University Press, Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [22] M. Branicki and Y. Shimomura. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: IV. Stability of steady spin states and the «rising egg» phenomenon for convex axisymmetric bodies. *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 462:3253–3275, 2006.
- [23] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
- [24] G. H. Bryan. *Stability in aviation: An introduction to dynamical stability as applied to the motion of aeroplanes*. (Macmillan's Science Monographs.) Macmillan, London, 1911.
- [25] M. J. Carré, T. Asai, T. Akatsuka, and S. J. Haake. The curve kick of a football: II. Flight through the air. *Sports Eng.*, 5:193–200, 2002.
- [26] J. Casey. A treatment of rigid body dynamics. *ASME J. Appl. Mech.*, 50:905–907, 51:227, 1983.
- [27] J. Casey. Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles. *Amer. J. Phys.*, 62:836–847, 1994.
- [28] J. Casey. On the advantages of a geometrical viewpoint in the derivation of Lagrange's equations for a rigid continuum. *J. Appl. Math. Phys.*, 46:805–847, 1995.
- [29] J. Casey and V. C. Lam. On the relative angular velocity tensor. *ASME J. Mech. Transmiss. Automation Design*, 108:399–400, 1986.
- [30] J. Casey and O. M. O'Reilly. Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of rigid bodies. *Math. Mech. Solids*, 11:401–422, 2006.
- [31] B. Casselman. *A new solution to the three body problem — and more*. AMS, March 2001.
<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/orbits1.html>

- [32] A. Cayley. On certain results relating to quaternions. *Philos. Mag.*, 26:141–145, 1845. (См. также: с. 123–126 работы [33].)
- [33] A. Cayley. *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, Sc. D. F. R. S.: Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1889.
- [34] H. Cendra, E. A. Lacomba, and A. Verdiell. A new proof of Frobenius theorem and applications. *ZAMP*, 44:266–281, 1993.
- [35] P. Chadwick. *Continuum Mechanics*. Corrected and enlarged edition. Dover, New York, 1999.
- [36] S. A. Chaplygin. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane. *Regul. Chaotic Dyn.*, 7:119–130, 2002. (Английский перевод статьи на русском языке, опубликованной в 1897 году. См. также: Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 5. Вып. 1. с. 10–16.)
- [37] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. Math. (2)*, 152(3):881–901, 2000.
- [38] H. Cheng and K. C. Gupta. An historical note on finite rotations. *ASME J. Appl. Mech.*, 56:139–145, 1989.
- [39] J. P. Coaplen, P. Kessler, O. M. O'Reilly, D. M. Stevens, and J. K. Hedrick. On navigation systems for motorcycles: The influence and estimation of roll angle. *J. Navigat.*, 58:375–388, 2005.
- [40] E. A. Codman. *The shoulder: Rupture of the supraspinatus tendon and other lesions in or about the subacromial bursa*. 2nd ed. T. Todd Company, Boston, 1934.
- [41] G. G. Coriolis. *Théorie mathématique des effets du jeu de billiard*. Carilian-Goeury, Paris, 1835. (См. также: Кориолис Г. Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. Москва: Гостехиздат, 1956. 335 с.)
- [42] H. Crabtree. *An elementary treatment of the theory of spinning tops and gyroscopic motion*. 3rd ed. Chelsea, New York, 1967.

- [43] R. Cushman, J. Hermans, and D. Kemppainen. The rolling disc. In: *Nonlinear dynamical systems and chaos (Groningen, 1995)*. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 19.) P. 21–60. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [44] J. D’Alembert. *Traité de dynamique*. David, Paris, 1743. (См. также: Даламбер Ж. Л. Трактат о динамике. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1950. 315 с.)
- [45] F. Diacu and P. Holmes. *Celestial encounters: The origins of chaos and stability*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. (См. также: Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи: Истоки хаоса и устойчивости. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», 2004. 304 с.)
- [46] L. Dorst. First order error propagation of the Procrustes method for 3D attitude estimation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 27:221–229, 2005.
- [47] В. А. Dubrovkin, А. Т. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern geometry — methods and applications: II. The geometry and topology of manifolds*. Springer, New York, 1984. (См. также: Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения: Часть 2. Москва: Наука, Физматлит, 1986. 760 с.)
- [48] R. Dugas. *A history of mechanics*. Dover, New York, 1988.
- [49] D. W. Eggert, A. Lorusso, and R. B. Fisher. Estimating 3-D rigid body transformations: A comparison of four major algorithms. *Mach. Vis. Appl.*, 9(5–6):272–290, 1997.
- [50] E. Eich-Soellner and C. Führer. *Numerical methods in multibody dynamics*. Eigendruck, Lund and Stuttgart, 2002.
- [51] L. Euler. Découverte d’un nouveau principe de mécanique. *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin*, 6:185–217, 1752. (См. также: с. 81–108 работы [58].)
- [52] L. Euler. Du mouvement de rotation des corps solides autour d’un axe variable. *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin*, 14:154–193, 1758. (См. также: с. 200–235 работы [59].)
- [53] L. Euler. Recherches sur la connaissance mécanique des corps. *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin*, 14:131–153, 1758. (См. также: с. 178–199 работы [59].)

- [54] L. Euler. Du mouvement d'un corps solides quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 16:176–227, 1760. (См. также: с. 313–356 работы [59].)
- [55] L. Euler. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigi-dorum. *Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 20:189–207, 1775. (См. также: с. 85–98 работы [60].)
- [56] L. Euler. Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. *Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 20:208–238, 1775. (См. также: с. 99–125 работы [60].)
- [57] L. Euler. De motum corporum circa punctum fixum mobilum. In: *Leonhardi Euleri Opera Postuma*, Vol. 2, pp. 43–62. Orell Füssli, Zürich, 1862. (См. также: с. 413–441 работы [60].)
- [58] L. Euler. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Vol. 5 of *Ser. II*. Orell Füssli, Zürich, 1957.
- [59] L. Euler. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Vol. 8 of *Ser. II*. Orell Füssli, Zürich, 1965.
- [60] L. Euler. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Vol. 9 of *Ser. II*. Orell Füssli, Zürich, 1968.
- [61] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences*. Dover, New York, 1989.
- [62] J. Foiret, B. Jacomy, and J. Payen. *Le pendule de Foucault au Musée des Arts et Métiers*. Musée des Arts et Métiers, Paris, 1990.
- [63] A. R. Forsyth. *Theory of differential equations*: Vol. 1. Cambridge University Press, London, 1890.
- [64] A. R. Forsyth. *A treatise on differential equations*. 6th ed. Macmillan, New York, 1929.
- [65] E. A. Fox. *Mechanics*. Harper & Row, New York, Evanston, IL, and London, 1967.
- [66] C. Frohlich. Why do bowling balls hook? *Amer. J. Phys.*, 72:1170–1177, 2004.

- [67] F. Gantmacher. *Lectures in analytical mechanics*. Mir, Moscow, 1975. (См. также: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. Москва: Физматгиз, 1960. 296 с.)
- [68] C. F. Gauss. Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. *Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4:232–235, 1829. (См. также: Гаусс К. Об одном новом общем принципе механики // Вариационные принципы механики. Москва: Физматгиз, 1959. С. 170–172.)
- [69] C. F. Gauss. Mutationen des Raums. In: *Carl Friedrich Gauss Werke*: Vol. 8, pp. 357–362. B. G. Teubner, Leipzig, 1900.
- [70] J. Gersten, H. Soodak, and M. S. Tiersten. Ball moving on stationary or rotating horizontal surface. *Amer. J. Phys.*, 60:43–47, 1992.
- [71] J. H. Ginsberg. *Advanced engineering dynamics*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [72] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 5.) Springer, New York, 1980.
- [73] L. E. Goodman and A. R. Robinson. Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices. *ASME J. Appl. Mech.*, 25:210–213, 1952.
- [74] E. Goursat. *Cours d'analyse mathématique*: Vol. II. 2nd ed. Gauthier-Villars, Paris, 1911. (См. также: Гурса Э. Курс математического анализа: Том 2: Часть 1. Теория аналитических функций. Часть 2. Дифференциальные уравнения. Москва–Ленинград: ГГТИ, 1933. 271 с., 287 с.)
- [75] E. Goursat. *Leçons sur le problème de Pfaff*. Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris, 1922.
- [76] C. G. Gray and B. G. Nickel. Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs. *Amer. J. Phys.*, 68:821–828, 2000.
- [77] J. J. Gray. Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 31:375–385, 1980.
- [78] D. T. Greenwood. *Classical dynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

- [79] D. T. Greenwood. *Principles of dynamics*. 2nd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [80] D. T. Greenwood. *Advanced dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [81] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. 2nd ed. (Applied Mathematical Sciences, vol. 42.) Springer, New York, 1990. (См. также: Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.)
- [82] D. W. Gulick and O. M. O'Reilly. On the dynamics of the Dynabee. *ASME J. Appl. Mech.*, 67:321–325, 2000.
- [83] Zh.-H. Guo. Representations of orthogonal tensors. *Solid Mech. Arch.*, 6:451–466, 1981.
- [84] M. E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*. Academic, New York, 1981.
- [85] W. Hahn. *Stability of motion*. Springer, Berlin, Göttingen, and Heidelberg, 1967.
- [86] C. D. Hall and R. H. Rand. Spinup dynamics of axial dual-spin spacecraft. *J. Guidance*, 17:30–37, 1994.
- [87] G. Hamel. *Theoretische Mechanik: Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*. Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg, 1949.
- [88] W. R. Hamilton. On a general method in dynamics by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 124:247–308, 1834. (См. также: Гамильтон У.Р. Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движений всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения, или характеристической функции // Гамильтон У.Р. Избранные труды: оптика, динамика, кватернионы. Москва: Наука, 1994. С. 215–286.)

- [89] W. R. Hamilton. A second essay on a general method in dynamics. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 125:95–144, 1835. (См. также: Гамильтон У. Р. Второй очерк об общем методе в динамике // Гамильтон У. Р. Избранные труды: оптика, динамика, кватернионы. Москва: Наука, 1994. С. 287–344.)
- [90] W. R. Hamilton. *Elements of quaternions*. Chelsea Publishing, New York, 1967.
- [91] T. Hawkins. Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 59:381–436, 2005.
- [92] H. R. Hertz. *The principles of mechanics presented in a new form*. Dover, New York, 1956. (См. также: Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. Москва: АН СССР, 1959. 388 с.)
- [93] D. Hestenes. *New foundations for classical mechanics*. Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1986.
- [94] P. G. Heyda. Roller ball dynamics revisited. *Amer. J. Phys.*, 70:1049–1051, 2002.
- [95] B. K. P. Horn. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 4:629–642, 1987.
- [96] M. Hubbard and S. A. Hummel. Simulation of frisbee flight. In: *Proceedings of the 5th Mathematics and Computers in Sport Conference*. Ed. by G. Cohen and T. Langtry. P. 124–134. University of Technology, Sydney, Australia, 2000.
- [97] P. C. Hughes. *Spacecraft attitude dynamics*. Wiley, New York, 1986.
- [98] S. A. Hummel and M. Hubbard. Identification of frisbee aerodynamic coefficients using flight data. In: *Proceedings of the 4th International Sports Engineering Conference (ISEA'2002)*. Ed. by S. Uijhashi and S. J. Haake. P. 322–329. Blackwell Science, Oxford, 2002.
- [99] R. L. Huston, C. Passerelo, J. M. Winget, and J. Sears. On the dynamics of a weighted bowling ball. *ASME J. Appl. Mech.*, 46:937–943, 1979.
- [100] G. Ireson. Beckham as physicist? *Phys. Educ.*, 36:10–13, 2001.
- [101] A. Isidori. *Nonlinear control systems: An introduction*. 3rd ed. Springer, Berlin, Göttingen, and Heidelberg, 1995.

- [102] C. G. J. Jacobi. *Vorlesungen über analytische Dynamik*, volume supplemental of *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke*. Königliche Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1884. (См. также: Якоби К. Г. Я. Лекции по динамике. Москва: ОНТИ, 1936. 217 с.)
- [103] C. G. J. Jacobi. *Vorlesungen über analytische Mechanik*, Vol. 8 of *Dokumente zur Geschichte der Mathematik*. Deutsche Mathematiker Vereinigung, Freiburg, 1996. (См. также: Якоби К. Г. Я. Лекции по аналитической механике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 416 с.)
- [104] T. R. Kane. Dynamics of nonholonomic systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 83:574–578, 1961.
- [105] T. R. Kane and D. A. Levinson. *Dynamics: Theory and applications*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [106] T. R. Kane, P. W. Likins, and D. A. Levinson. *Spacecraft dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1983.
- [107] A. V. Karapetyan and A. S. Kuleshov. Steady motions of nonholonomic systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 7(1):81–117, 2002. (См. также: Карапетян А. В., Кулешов А. С. Стационарные движения неголономных систем // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 247–295.)
- [108] A. V. Karapetyan and V. V. Rumyantsev. Stability of conservative and dissipative systems. In: *Stability and analytical mechanics*. P. 1–144. (Applied Mechanics: Soviet Reviews, vol. 1.) Hemisphere, Washington, DC, 1990. (См. также: Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. (Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6.) Москва: ВИНТИ, 1983. 132 с.)
- [109] Lord Kelvin and P. G. Tait. *A treatise on natural philosophy*. Cambridge University Press, Cambridge, Reprinted edition, 1912. (См. также: Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П. Г. Трактат по натуральной философии: В 2-х тт. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. 572 с., 592 с.)
- [110] P. Kessler and O. M. O'Reilly. The ringing of Euler's disk. *Regul. Chaotic Dyn.*, 7(1):49–60, 2002.

- [111] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, and P. Papadopoulos. Automotive disk brake squeal. *J. Sound Vib.*, 267:105–166, 2003.
- [112] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, and P. Papadopoulos. On the transient dynamics of a multi-degree-of-freedom friction oscillator: A new mechanism for disc brake noise. *J. Sound Vib.*, 287:901–917, 2005.
- [113] D. J. Korteweg. Extrait d'une lettre à M. Appell. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 14:7–8, 1900.
- [114] E. Kreyszig. *Advanced engineering mathematics*. 8th ed. Wiley, New York, 1999.
- [115] A. S. Kuleshov. On the generalized Chaplygin integral. *Regul. Chaotic Dyn.*, 6(2):227–232, 2001.
- [116] J. L. Lagrange. Recherches sur la libration de la Lune dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences pour le prix de l'année 1764. *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 9, 1764. (См. также: с. 5–61 работы [120].)
- [117] J. L. Lagrange. Essai sur le problème des trois corps. *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 9, 1772. (См. также: с. 229–319 работы [120].)
- [118] J. L. Lagrange. Théorie de la libration de la Lune, et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette Planète. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 30:203–309, 1780 (1782). (См. также: с. 5–122 работы [119].)
- [119] J. L. Lagrange. *Œuvres de Lagrange*: Vol. 5. Gauthier-Villars, Paris, 1870.
- [120] J. L. Lagrange. *Œuvres de Lagrange*: Vol. 6. Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- [121] J. L. Lagrange. *Mécanique analytique*. In: *Joseph Louis de Lagrange Œuvres*: Vol. 11/12. 4th ed. Georg Olms Verlag, Heidelberg, 1973. (См. также: Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика: В 2-х тт. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 594 с., 440 с.)
- [122] J. L. Lagrange. *Analytical mechanics*. (Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 191.) Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1997. (См. также: Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика: В 2-х тт. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 594 с., 440 с.)

- [123] C. Lanczos. *Albert Einstein and the cosmic world order*. Wiley Interscience, New York, 1965. (См. также: Ланцош К. Альберт Эйнштейн и строение космоса. Москва: Наука, 1967. 160 с.)
- [124] C. Lanczos. *The variational principles of mechanics*. 4th ed. University of Toronto Press, Toronto, 1970. (См. также: Ланцош К. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с.)
- [125] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*. 3rd ed. (Course of Theoretical Physics, vol. 1.) Butterworth-Heinemann, Oxford and Boston, 1976. (См. также: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Изд. 3-е, испр. и доп. Москва: Наука, 1973. 208 с.)
- [126] M. Levi. Geometric phases in the motion of rigid bodies. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 122:213–229, 1993.
- [127] A. D. Lewis and R. M. Murray. Variational principles for constrained systems: Theory and experiment. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 30:793–815, 1995.
- [128] D. Lewis, T. Ratiu, J. C. Simó, and J. E. Marsden. The heavy top: A geometric treatment. *Nonlinearity*, 5(1):1–48, 1992.
- [129] R. E. Lindberg Jr. and R. W. Longman. On the dynamical behavior of the wobblestone. *Acta Mech.*, 49(1–2):81–93, 1983.
- [130] H. Lopez and O. M. O'Reilly. *Roller coaster dynamics and the structural instability of a saddle point*. Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, April 2006.
- [131] A. I. Lurie. *Analytical mechanics*. Springer, New York, 2002. (См. также: Лурье А. И. Аналитическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1961. 824 с.)
- [132] J. Lützen. Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 49(1):1–72, 1995.
- [133] G. Magnus. Über die Abweichung der Geschosse. *Berlin: Königl. Akad. d. Wiss.*, pp. 1–24, 1853. (Эта статья была зачитана в Академии 7-го августа 1851 года и 17-го июня 1852 года. Заинтересованный читатель может также прочесть [134].)

- [134] G. Magnus. Über die Abweichung der Geschosse und über eine auffallende Erscheinung bei rotierenden Körper. *Annalen der Physik und Chemie*, 164(1):1–29, 1853.
- [135] G. Maltese. The ancients' inferno: The slow and tortuous development of «Newtonian» principles of motion in the eighteenth century. In: *Essays on the history of mechanics in memory of Clifford Ambrose Truesdell and Edoardo Benvenuto*. P. 199–221. Birkhäuser, Basel, Boston, and Berlin, 2003.
- [136] F. L. Markley. Attitude determination using vector observation and the singular value decomposition. *J. Astronaut. Sci.*, 36:245–258, 1988.
- [137] F. L. Markley. Attitude determination and parameter estimation using vector observation: Theory. *J. Astronaut. Sci.*, 37(1):41–58, 1989.
- [138] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: A basic exposition of classical mechanical systems*. 2nd ed. (Texts in Applied Mathematics, vol. 17.) Springer, New York, 1999.
- [139] A. J. McConnell. *Applications of the absolute differential calculus*. Blackie, London, 1947.
- [140] M. Meltzer. *Mission to Jupiter: A history of the Galileo project*. NASA, Washington, DC, 2007. <http://history.nasa.gov/sp4231.pdf>
- [141] A. L. Mishler. Gyroscopic device. U. S. patent number 3,726,146, 1973.
- [142] T. Mitsui, K. Aihara, C. Terayama, H. Kobayashi, and Y. Shimomura. Can a spinning egg really jump? *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 462(2074):2897–2905, 2006.
- [143] H. K. Moffatt. Euler's disk and its finite-time singularity. *Nature (London)*, 404:833–834, 2002.
- [144] R. Montgomery. How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century. *Amer. J. Phys.*, 59:394–398, 1991.
- [145] R. Montgomery. A new solution to the three-body problem. *Notices AMS*, 48:471–481, 2001.
- [146] F. C. Moon. *Applied dynamics: With applications to multibody and mechatronic systems*. Wiley VCH, Berlin, 1998.

- [147] C. Moore. Braids in classical dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3675–3679, 1993.
- [148] C. Moore and M. Nauenberg. New periodic orbits for the n -body problem. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 1:307–311, 2006.
- [149] F. Morgan. *Riemannian geometry: A beginner's guide*. 2nd ed. A. K. Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998.
- [150] F. R. Moulton. *An introduction to celestial mechanics*. 2nd rev. ed. Macmillan, New York, 1914. (См. также: Мультион Ф. Р. Введение в небесную механику. Москва: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 480 с.)
- [151] Yu. I. Neimark and N. A. Fufaev. *Dynamics of nonholonomic systems*. AMS, Providence, RI, 1972. (См. также: Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 520 с.)
- [152] I. Newton. *Sir Isaac Newton's Principia: Vol. I: The motion of bodies*. University of California Press, Berkeley, 1934. (Английский перевод оригинала *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Лондон, 1686 г.), выполненный в 1729 году Эндрю Мотте, под редакцией Ф. Кайори. См. также: Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Москва: Наука, 1989. 688 с.)
- [153] W. Noll. On material-frame indifference. *Preprint*, Department of Mathematics, Carnegie-Mellon University, 1995.
- [154] S. O'Brien and J. L. Synge. The instability of the tippe-top explained by sliding friction. *Proc. R. Irish Acad. Sect. A*, 56:23–35, 1954.
- [155] J. Oprea. *Differential geometry and its applications*. 2nd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2004.
- [156] A. C. Or. The dynamics of a tippe top. *SIAM J. Appl. Math.*, 54(3):597–609, 1994.
- [157] O. M. O'Reilly. The dynamics of rolling disks and sliding disks. *Nonlinear Dyn.*, 10:287–305, 1996.
- [158] O. M. O'Reilly. On the computation of relative rotations and geometric phases in the motions of rigid bodies. *ASME J. Appl. Mech.*, 64(4):969–974, 1997.

- [159] O. M. O'Reilly. *Engineering dynamics: A primer*. Springer, New York, 2001.
- [160] O. M. O'Reilly. The dual Euler basis: Constraints, potentials and Lagrange's equations in rigid body dynamics. *ASME J. Appl. Mech.*, 74(2):256–258, 2007.
- [161] O. M. O'Reilly and S. Payen. The attitudes of constant angular velocity motions. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 41(7):1–10, 2006.
- [162] O. M. O'Reilly and A. R. Srinivasa. On a decomposition of generalized constraint forces. *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 457:1307–1313, 3052, 2001.
- [163] O. M. O'Reilly and A. R. Srinivasa. On potential energies and constraints in the dynamics of rigid bodies and particles. *Math. Probl. Eng.*, 8(3):169–180, 2002.
- [164] O. M. O'Reilly and M. H. Tan. Steady motions of an axisymmetric satellite: An atlas of their bifurcations. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 39(6):921–940, 2004.
- [165] O. M. O'Reilly and B. H. Tongue. Some comments on vehicle instability due to brake lockup. *J. Sound Vib.*, 194(5):760–764, 1996.
- [166] O. M. O'Reilly and P. C. Varadi. Hoberman's sphere, Euler parameters and Lagrange's equations. *J. Elasticity*, 56(2):171–180, 1999.
- [167] J. G. Papastavridis. Panoramic overview of the principles and equations of motion of advanced engineering dynamics. *ASME Appl. Mech. Rev.*, 51(4):239–265, 1998.
- [168] J. G. Papastavridis. *Tensor calculus and analytical dynamics: A classical introduction to holonomic and nonholonomic tensor calculus, and its principal applications to the Lagrangean dynamics of constrained mechanical systems, for engineers, physicists, and mathematicians*. Library of Engineering Mathematics. CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [169] J. G. Papastavridis. *Analytical mechanics: A comprehensive treatise on the dynamics of constrained systems, for engineers, physicists, and mathematicians*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

- [170] L. A. Pars. *A treatise on analytical dynamics*. Ox Bow Press, Woodbridge, CT, 1979. (См. также: Парс Л. А. Аналитическая динамика. Москва: Наука, 1971. 636 с.)
- [171] M. Pascal. Asymptotic solution of the equations of motion for a Celtic stone. *J. Appl. Math. Mech.*, 47(2):269–276, 1983. (См. также: Паскаль М. Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня // ПИММ. 1983. Т. 46. Вып. 2. С. 321–329.)
- [172] L. Poinsoot. *Outlines of a new theory of rotatory motion, translated from the french of Poinsoot with explanatory notes*. Cambridge University Press, London, 1834.
- [173] S. D. Poisson. *A treatise of mechanics*. Longmans, London, 1842.
- [174] J. C. Politti, G. Goroso, M. E. Valentinuzzi, and O. Bravo. Codman's paradox of the arm's rotation is not a paradox: Mathematical validation. *Med. Eng. Phys.*, 20:257–260, 1998.
- [175] J. Prussing and B. A. Conway. *Orbital mechanics*. Oxford University Press, Oxford and New York, 1993.
- [176] A. V. Rao. *Dynamics of particles and rigid bodies: A systematic approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [177] S. Rauch-Wojciechowski, M. Sköldstam, and T. Glad. Mathematical analysis of the tippe top. *Regul. Chaotic Dyn.*, 10(4):333–362, 2005.
- [178] M. M. G. Ricci and T. Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Math. Ann.*, 54(1/2):125–201, 1900.
- [179] B. Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13:133–152, 1868. (См. также: Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. Москва: Мир, 1979. С. 18–33.)
- [180] B. Riemann. The hypotheses on which geometry is based. In: *Collected Papers of Bernhard Riemann*. P. 257–272. Kendrick Press, Heber City, UT, 2004. (См. также: Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. Москва: Мир, 1979, с. 18–33.)

- [181] O. Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 5:380–440, 1840.
- [182] R. M. Rosenberg. *Analytical dynamics of discrete systems*. Plenum, New York, 1977.
- [183] E. J. Routh. *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion: Being the essay to which the Adams Prize was adjudged in 1877, in the University of Cambridge*. Macmillan, London, 1877. (См. также: Раус Э. Дж. Об устойчивости заданного состояния движения, в частности, установившегося движения. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 200 с.)
- [184] E. J. Routh. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*. 6th ed. Macmillan, London, 1905. (См. также: Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт. Москва: Наука, 1983. 464 с., 544 с.)
- [185] E. J. Routh. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*. 7th ed. Macmillan, London, 1905. (См. также: Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт. Москва: Наука, 1983. 464 с., 544 с.)
- [186] A. Ruina. Nonholonomic stability aspects of piecewise holonomic systems. *Rep. Math. Phys.*, 42(1–2):91–100, 1998. From presentation at the Pacific Institute of Mathematical Sciences Workshop on Nonholonomic Constraints in Dynamics (Calgary, AB, 1997).
- [187] V. V. Rumyantsev. Stability of steady-state satellite motion. *Cosmic Res.*, 6:135–138, 1968. (См. также: Румянцев В. В. К задаче об устойчивости стационарных движений спутника // Космические исследования. 1968. Т. 6. № 2. С. 163–167.)
- [188] Y. Ryabov. *An elementary survey of celestial mechanics*. Dover, New York, 1961. (См. также: Рябов Ю. А. Движения небесных тел. Москва: Наука, 1988. 238 с.)
- [189] S. S. Sastry. *Nonlinear systems: Analysis, stability, control*. Springer, Berlin, Göttingen, and Heidelberg, 1999.

- [190] F. A. Scheck. *Mechanics: From Newton's laws to deterministic chaos*. 3rd ed. Springer, Berlin, 1999.
- [191] D. Schneider. Non-holonomic Euler–Poincaré equations and stability in Chaplygin's sphere. *Dyn. Syst.*, 17(2):87–130, 2002.
- [192] P. H. Schönemann. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, 31(1):1–10, 1966.
- [193] S. W. Shaw and A. G. Haddow. On «roller-coaster» experiments for nonlinear oscillators. *Nonlinear Dyn.*, 3:374–384, 1992.
- [194] Y. Shimomura, M. Branicki, and H. K. Moffatt. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: II. Self-induced jumping. *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 461:1753–1774, 2005.
- [195] M. D. Shuster. A comment on fast three-axis attitude determination. *J. Astronaut. Sci.*, 31:579–584, 1983.
- [196] M. D. Shuster. A survey of attitude representations. *J. Astronaut. Sci.*, 41:439–517, 1993.
- [197] M. D. Shuster and S. D. Oh. Three-axis attitude determination from vector observations. *J. Guidance*, 4(1):70–77, 1981.
- [198] J. G. Simmonds. *A brief on tensor analysis*. Springer, New York, 1982.
- [199] J. G. Simmonds. Moment potentials. *Amer. J. Phys.*, 52:851–852, 1984. (Errata: on p. 277 of Vol. 53.)
- [200] I. Söderkvist and P.-A. Wedin. Determining the movements of the skeleton using well-configured markers. *J. Biomech.*, 26:1473–1477, 1993.
- [201] I. S. Sokolnikoff. *Tensor analysis: Theory and applications*. Wiley, London, 1951. (См. также: Сокольников И. С. Тензорный анализ. Москва: Наука, 1971. 374 с.)
- [202] H. Soodak. A geometric theory of rapidly spinning tops, tippe tops, and footballs. *Amer. J. Phys.*, 70:815–828, 2002.
- [203] S. Ia. Stepanov. On the steady motions of a gyrostat satellite. *J. Appl. Math. Mech.*, 33:121–126, 1969. (См. также: Степанов С. Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном

- НЬЮТОНОВОМ поле сил и их устойчивость // ПИММ. 1969. Т. 33. № 4. С. 737–744.)
- [204] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda. *Classical mechanics: A modern perspective*. 2nd ed. Krieger, Malabar, FL, 1983.
- [205] J. L. Synge. *Tensorial methods in dynamics*. (University of Toronto Studies, Applied Mathematics Series, vol. 2.) University of Toronto Press, Toronto, 1936. (См. также: Синг Д. Л. Тензорные методы в динамике. Москва: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1947. 44 с.)
- [206] J. L. Synge. Classical dynamics. In: *Handbuch der Physik*: Vol. III/1, pp. 1–225. Springer, Berlin, 1960. (См. также: Синг Дж. Л. Классическая динамика. Москва: ГИФМЛ, 1963. 448 с.)
- [207] J. L. Synge and B. A. Griffith. *Principles of mechanics*. 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [208] J. L. Synge and A. Schild. *Tensor calculus*. University of Toronto Press, Toronto, 1949.
- [209] I. Szabo. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. 3rd ed. (Wissenschaft und Kultur, vol. 32.) Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.
- [210] P. G. Tait. On the rotation of a rigid body about a fixed point. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 25, 1868. (См. также: с. 86–127 работы [212].)
- [211] P. G. Tait. On path of a rotating spherical projectile. *Trans. R. Soc. Edinburgh*, 37, 1893. (См. также: с. 356–370 работы [213].)
- [212] P. G. Tait. *Scientific papers*: Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1898.
- [213] P. G. Tait. *Scientific papers*: Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1900.
- [214] W. T. Thomson. *Introduction to space dynamics*. Dover, New York, 1986.
- [215] W. Tobin. *The life and science of Léon Foucault: The man who proved the Earth rotates*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [216] C. A. Truesdell. A program toward rediscovering the rational mechanics of the Age of Reason. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 1(1):1–36, 1960.

- [217] C. A. Truesdell. *Essays on the history of mechanics*. Springer, New York, 1968. (См. также: Трудселл К. Очерки по истории механики. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», 2002. 316 с.)
- [218] F. E. Udewadia and R. E. Kalaba. *Analytical dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [219] T. Ueda, K. Sasaki, and S. Watanabe. Motion of the tippe top: Gyroscopic balance condition and stability. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(4):1159–1194, 2005 (electronic).
- [220] M. Valtonen and H. Karttunen. *The three-body problem*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [221] A. Voss. Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik. *Math. Ann.*, 25(2):258–286, 1885.
- [222] G. Wahba. Problem 65–1: A least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Rev.*, 8:384–386, 1966.
- [223] G. T. Walker. On a dynamical top. *Q. J. Pure Appl. Math.*, 28:175–184, 1896.
- [224] L. S. Wang, P. S. Krishnaprasad, and J. H. Maddocks. Hamiltonian dynamics of a rigid body in a central gravitational field. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 50:349–386, 1991.
- [225] L. S. Wang, J. H. Maddocks, and P. S. Krishnaprasad. Steady rigid-body motions in a central gravitational field. *J. Astronaut. Sci.*, 40:449–478, 1992.
- [226] A. Warwick. *Masters of theory: Cambridge and the rise of mathematical physics*. University of Chicago Press, Chicago and London, 2003.
- [227] A. G. Webster. *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies: Being lectures on mathematical physics*. 2nd ed. Dover, New York, 1959. (См. также: Вебстер А. Г. Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел. Москва: ГТТИ, 1933. 633 с.)
- [228] E. T. Whittaker. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. 4th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1937. (См. также: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1937. 586 с.)

- [229] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. 2nd ed. (Texts in Applied Mathematics, vol. 2.) Springer, New York, 2003.
- [230] C. Wilson. D'Alembert versus Euler on the precession of the equinoxes and the mechanics of rigid bodies. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 37:233–273, 1987.
- [231] E. B. Wilson. *Vector analysis: A textbook for the use of students of mathematics and physics: Founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*. 7th printing. Yale University Press, New Haven, CT, 1931.
- [232] H. J. Woltring. 3-D attitude representation of human joints: A standardization proposal. *J. Biomech.*, 27:1399–1414, 1994.
- [233] H. J. Woltring, R. Huiskes, A. de Lange, and F. E. Veldpaus. Finite centroid and helical axis estimation from noisy landmark measurements in the study of human joint kinematics. *J. Biomech.*, 18:379–389, 1985.
- [234] H. Ziegler. *Principles of structural stability*. Blaisdell, Waltham, MA, 1968. (См. также: Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. Москва: Мир, 1971. 192 с.)

Предметный указатель

- $SO(3)$, 374
- Аксиальный вектор, 450
- Алгоритм приведения Лагранжа, 91, 147
- Алгоритм приведения Рауса, 59
- Альтернатор, 440, 449
- Альтернирующий символ, 440
- Американские горки, 74
- Аппель П., 400
- Атлас, 99
- Базис Эйлера, 222
- Барицентрическая система координат, 164
- Безмоментное движение твердого тела, 338
- Бернулли Я., 158
- Больцман Л., 25
- Брайан Дж. Х., 225
- Вектор Гиббса, 235
- Вектор Родригеса, 235
- Вектор относительной угловой скорости, 219, 223
- Вектор углового ускорения, 256
- Вектор угловой скорости, 207, 236, 238, 244, 256
- Винтовая ось вращения, 260
- Винтовое движение, 254
- Волчок Лагранжа, 402
- Волчок Пуассона, 286, 402
- Восс А., 88
- Вращающиеся яйца, 362
- Вращение
- в матричном представлении, 212, 227, 236
 - вокруг неподвижной оси, 202
 - относительное, 294, 321
- Гамильтон У.Р., 88, 160, 188, 236
- Гантелевидный спутник, 173
- Гармонический осциллятор, 166
- Гаусс К. Ф., 158, 236
- Геликоид, 120
- Герц Г., 25, 101
- Гиббс Дж. У., 210
- Гироскоп, 426
- Главные моменты инерции, 267
- Главные оси, 267, 336, 369
- Даламбер Ж. Л., 88, 158
- Движение с постоянной угловой скоростью, 276
- Движение твердого тела, 251
- Движение твердого тела с одной закрепленной точкой, 351, 370, 416
- Двойственный базис Эйлера, 224, 228, 232, 242, 318, 320, 398
- Двухспиновый космический корабль, 421
- Джеллетт Дж. Х., 369
- Динамика летательных аппаратов, 134, 409
- Динамика спутников, 192, 365, 382, 415
- Диск Эйлера, 362
- Задача N тел, 196
- Задача Вахба, 237
- Задача двух тел, 58, 164
- Задача трех тел, 188
- Закон равновесия кинетического момента

- твердого тела, 330
- Закон равновесия количества движения
 - материальной точки, 40, 104
 - твердого тела, 330
- Законы Кеплера, 58

- Изменение координат, 388
- Изображающая точка, 141, 153
- Импульсная сфера, 341
- Инварианты тензора, 446
- Инерциальная навигационная система, жестко связанная с корпусом прибора, 426
- Инерции тензоры, 266, 451
 - главные оси инерции, 267, 369
 - изменение базисов, 281
 - теорема об изменении момента инерции при переносе оси, 281, 352
- Интеграл Джеллетта, 369
- Интеграл Рауса, 370
- Интеграл Чаплыгина, 370
- Интеграл Якоби, 196
- Интегральная форма, 40, 431
- Интегрируемость связей, 297

- Карданный шарнир, 326
- Кардано Дж., 225
- Карта, 99
- Катящаяся сфера, 305, 357, 364, 412
 - на вращающемся диске, 366
- Катящийся диск, 277, 306, 326, 395
- Катящийся стержень, 411
- Кватернионы, 236
- Кельтский камень, 292, 362
- Кениг Дж. С., 273
- Кеплер И., 58
- Кинематические соотношения Пуассона, 354
- Кинематический элемент длины, 150, 175, 178, 188, 374, 402
- Кинетическая энергия, 167
 - в разложении Кенига, 273, 378
 - материальной точки, 5
 - системы материальных точек, 130
 - твердого тела, 273
- Кинетический момент
 - материальной точки, 5
 - системы материальных точек, 130
 - твердого тела
 - относительно неподвижной точки O , 265
 - относительно точки A , 265
 - относительно центра масс, 265, 271
- Китайский волчок, 322, 369
- Ковариантные базисные векторы, 11, 143
- Количество движения
 - материальной точки, 5
 - системы материальных точек, 132
 - твердого тела, 264
- Композиция вращений, 211, 256
 - формула Родригеса, 244
- Компоненты
 - ковариантные, 12
 - контравариантные, 12
- Контравариантные базисные векторы, 12, 143
- Конфигурации твердого тела, 251
- Конфигурационное многообразие, 101, 175, 188, 374, 402
- Координатная кривая, 10
- Координатная поверхность, 10
- Координаты
 - геликоидные, 35, 108, 120
 - декартовы, 7, 132
 - криволинейные, 10, 143
 - обобщенные, 103, 175–178, 374, 402
 - сферические, 8, 34, 119, 132, 382, 415
 - цилиндрические, 7, 35
 - эллипсоидальные, 124
- Кориолис Г. Г., 305, 357
- Коротационная производная, 208, 219, 275
- Коротационный
 - базис, 258
 - вектор, 260, 264, 275

- тензор, 275
- Кортевег Д. Дж., 400
- Космический корабль «Галилей», 421
- Криволинейные координаты, 99, 143
- Критерий Якоби, 30
- Критерий интегрируемости связей, 28, 38
- Критерий статического трения, 111
- Кэли А., 244

- Лагранж Ж.-Л., 48, 58, 88, 129, 188, 231, 365, 373, 403
- Лагранжиан, 91, 147
- Левы-Чивита Т., 101, 116
- Летающая тарелка, 351
- Линия узлов, 231
- Лорд Кельвин, 437

- Магнус Г. Г., 348
- Мак-Куллаг Дж., 317
- Маятник и тележка, 177
- Мгновенная ось вращения, 260
- Многообразие
 - риманово, 101
- Множители Лагранжа, 158
- Моменты
 - гравитационные, 313, 383
 - консервативные, 312, 390
 - постоянные, 317
 - связей, 303, 353, 388, 398
 - торсионной пружины, 325

- Навигация, 237
- Направляющие косинусы, 207
- Независимость связей, 31
- Ньютон И., 41, 58, 347

- Определитель тензора, 446
- Ось вращения, 212, 260

- Парадокс Кодмана, 248, 437
- Параметры Эйлера, 236
- Плоский двойной маятник, 194
- Потенциал момента, 240, 312, 320, 325

- Представление Лагранжа, 49, 134, 135, 144, 158, 308, 388
- Представление Эйлера, 210
 - для вектора угловой скорости, 215
- Прерывистое движение, 78, 170
- Приведение к безразмерному виду, 63, 69
- Принцип Даламбера, 129, 158
- Принцип Лагранжа, 49
- Принцип Лагранжа – Даламбера, 49
- Принцип виртуальной работы, 158
- Принцип наименьшего принуждения Гаусса, 129, 159
- Производные тензора, 452
- Прокрустова задача, 237
- Пространство конфигураций, 142
- Пуанкаре А., 188
- Пуансо Л., 201, 260, 338
- Пуассон С. Д., 260, 402

- Равномерные вращения, 366, 384
- Размалывающая машина Гриффина, 326
- Раус Э. Дж., 88, 305, 357
- Реакции связей, 48, 135, 144, 303, 353, 388, 398
- Риман Г. Ф. Б., 101
- Риччи М. М. Г., 101, 116
- Роботизированная рука, 432
- Роллербол (Пауэрбол), 421, 433

- Связи, 92
 - Чаплыгина, 409
 - в системе материальных точек, 144
 - голономные, 25
 - идеальные, 115
 - интегрируемые, 18, 48, 93, 134, 290, 352, 398, 404
 - — реономные, 25
 - — склерономные, 25
 - качение твердых тел, 291, 433
 - кусочно-интегрируемые, 28
 - между твердыми телами, 289
 - множественные, 31, 136, 299, 326

- неголономные, 26
- неинтегрируемые, 26, 48, 94, 134, 136, 297, 307
- скольжение твердых тел, 291
- статическое кулоновское трение, 52, 70, 78, 119
- ударные, 72
- цилиндрические шарниры, 290
- шаровые шарниры, 290
- Секторная скорость, 5, 33, 58, 81
- Силы
 - Магнуса, 348, 395
 - гравитационные, 45, 164, 173, 313, 383
 - консервативные, 44, 138, 145, 312, 321, 390
 - обобщенные, 105, 139, 155, 387, 417, 424
 - обобщенные ударные, 432
 - растяжения/сжатия пружины, 45
 - сопротивления, 347
 - центральные, 81
- Символ Кронекера, 439
- Символы Кристоффеля, 117, 153
- Симметричные параметры Эйлера – Родригеса, 236, 244
- Система отсчета, 3
 - вращающаяся, 264
 - инерциальная, 3
- Системы связей, 31, 136, 299, 326
- Скачки, 362
- Скользящая сфера, 305, 357, 412
- Скользящий диск, 277, 395
- Скорость проскальзывания, 361
- След тензора, 446
- Собственные векторы тензора, 449
- Собственные значения тензора, 449
- Сохранение
 - кинетического момента, 56, 60, 188, 355, 386, 406, 416
 - количества движения, 55
 - энергии, 55, 56, 188, 333, 355, 386, 390, 400, 406, 416
- Степени свободы, 104, 402
- Столкновение твердого тела, 431
- Сфера Хобермана, 236
- Сфера Чаплыгина, 362
- Тейт П. Г., 225, 347, 437
- Тензор относительной угловой скорости, 219
- Тензор угловой скорости, 207
- Тензорное произведение
 - двух векторов, 440
 - двух тензоров второго ранга, 441, 443
 - тензора второго ранга и вектора, 443
 - тензора третьего ранга и вектора, 449
 - тензора третьего ранга и тензора второго ранга, 449
- Тензоры
 - вращения, 201, 210
 - второго ранга, 441
 - кососимметричные, 208, 445
 - обратные, 447
 - ортогональные, 451
 - присоединенные, 447
 - симметричные, 445
 - симметричные положительно определенные, 451
 - собственно ортогональные, 205, 217, 451
 - третьего ранга, 449
 - угловой скорости, 207
- Теорема Родригеса – Гамильтона о вращении, 248, 317
- Теорема Фробениуса об интегрируемости, 31, 300, 326
- Теорема Шаля о вращении, 254
- Теорема Эйлера о вращении, 217, 252
- Теорема о спектральном разложении, 451
- Теорема об изменении кинетической энергии
 - для материальной точки, 56
 - для системы материальных точек, 130

- для твердого тела, 332
- Теорема представления для тензоров, 441
- Тренажер Динаби (Dunabee), 421, 433
- Третий закон Ньютона, 136, 138, 309
- Тройка Френе, 74, 108

- Углы Брайана, 233, 235
- Углы Кардана, 233, 235
- Углы Тейта, 233, 235
- Углы Эйлера
 - асимметричная система, 235
 - вектор угловой скорости, 222
 - двенадцать систем, 233
 - переключения между системами, 344
 - связанные с телом, 248
 - симметричная система, 235
 - система 1-3-1, 248, 321, 324
 - система 3-1-2, 283
 - система 3-1-3, 231, 306, 322, 324–326, 395, 403, 412, 413, 432, 433
 - система 3-2-1, 225, 248, 286, 321
 - система 3-2-3, 241, 280, 411
- Угол поворота/вращения, 212
- Уокер Г. Т., 292
- Уравнение Бернулли, 348
- Уравнения Больцмана – Хамеля, 430
- Уравнения Гиббса – Аппеля, 430
- Уравнения Эйлера, 337
- Уравнения Эйлера – Лагранжа, 160
- Уравнения Эйлера – Пуассона, 354
- Уравнения движения Лагранжа
 - материальной точки, 88
 - — в ковариантной форме, 89, 116
 - — в контравариантной форме, 117
- системы материальных точек, 141, 148
- — в ковариантной форме, 155
- — в контравариантной форме, 155
- твердого тела, 378, 386, 393
- Уравнения движения Рауса – Воссса, 88, 96
- Устойчивость движения, 341
- Устойчивость летательного аппарата, 233

- Фазовая картина, 63
- Формула Эйлера для вращения, 211
- Фробениус Ф. Г., 29, 31, 299
- Фуко Ж. Б. Л., 4

- Хаос, 188

- Центр колебаний, 361
- Центр масс
 - системы материальных точек, 132
 - твердого тела, 262
- Циглер Х., 312, 317

- Чаплыгин С. А., 362, 400, 409
- Частота Кеплера, 63, 365

- Шаль М., 254

- Эйлер Л., 41, 201, 210, 248, 252, 369
- Эйлера тензоры, 266, 451

- Якоби К. Г. Я., 29, 101, 160, 338

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 415,

тел.: (499) 135-54-37, (495) 641-69-38

2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)

3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,

Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Оливер М. О'Рейли

**КУРС ДИНАМИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ:
ЕДИНЫЙ ПОДХОД
К МЕХАНИКЕ НЬЮТОНА – ЭЙЛЕРА
И МЕХАНИКЕ ЛАГРАНЖА**

Дизайнер В. А. Толстолуцкая

Технический редактор А. В. Широбоков

Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин

Корректор А. А. Чукарева

Подписано в печать 13.09.2011. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,29. Уч. изд. л. 31,5.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № Р-1531.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 500-295

Отпечатано в полном соответствии с качеством

предоставленного электронного оригинал-макета

в типографии филиала ОАО «ТАТМЕДИА» «ПКИК «Идел-Пресс».

420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.

E-mail: idelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4344-0017-6



9 785434 400176