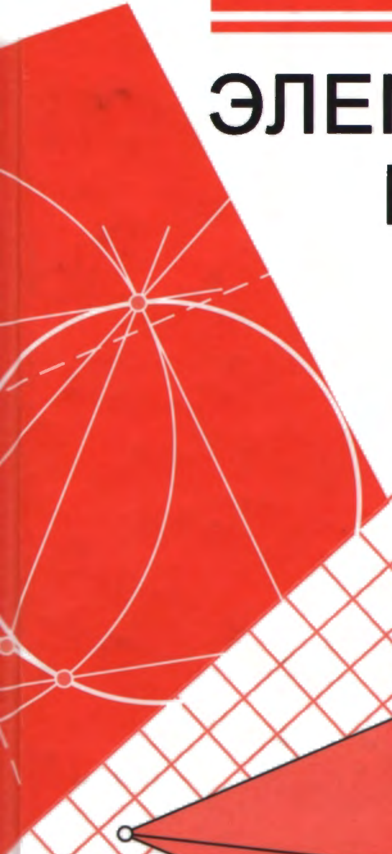
Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



ТОМ 1

ПЛАНИМЕТРИЯ

Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Том 1

ПЛАНИМЕТРИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Москва
Издательство МЦНМО, 2004

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П56

Понарин Я. П.

П56 Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004.— 312 с.: ил.

ISBN 5-94057-170-0

ISBN 5-94057-171-9 (том 1)

Данное пособие призвано возродить интерес к элементарным методам решения геометрических задач. В нем приведены яркие геометрические сведения, не вошедшие в современный школьный учебник. Например, формула Эйлера, окружность девяти точек, теорема Птолемея, геометрические неравенства и многое другое.

Книга адресована всем, кто желает расширить и углубить знания по элементарной геометрии, — от школьников средних классов до учителей математики и студентов педагогических вузов.

ББК 22.151.0

ISBN 5-94057-170-0
ISBN 5-94057-171-9 (том 1)

Оглавление

Часть II. Преобразования плоскости

Глава I. Движения плоскости

Глава II. Подобия и аффинные преобразования

Глава III. Инверсия

Предисловие

Геометрию считают трудным предметом. А трудность ее в том, что по сравнению с алгеброй она мало алгоритмизирована. Почти каждую содержательную задачу можно решить несколькими способами, используя различные методы. Поэтому геометрия содержит в себе огромный потенциал для развития гибкости ума, пластичности мышления и конструктивных способностей учащихся, для воспитания у них чувства прекрасного.

В ходе реформы школьного математического образования, повлекшей за собой перестройку учебных планов и программ на математических факультетах педагогических институтов, допущены существенные просчеты и перегибы. Со страниц школьных учебных пособий по геометрии исчезли многие замечательные геометрические факты, своего рода геометрические «жемчужины», использовавшиеся при доказательствах теорем и решении задач. Новые же методы — векторный, координатный, метод преобразований — не заняли должного места в преподавании геометрии и им все меньше уделяется внимания. В этом, на мой взгляд, заключается одна из основных причин значительного понижения уровня теоретической и практической подготовки по геометрии выпускников средних школ.

В системе школьного математического образования геометрии отводится второе, если не третье, место. «Упрощение» геометрии идет по пути ее алгебраизации и изъятия геометрических жемчужин. Чисто геометрические методы постепенно отходят на второй план. Важнейший из таких методов — метод геометрических преобразований — до сих пор не нашел своего места в школьном курсе геометрии. Его пытались изучать с самого начала, растянув на всю восьмилетнюю школу. Теперь предлагается заняться им в конце изучения планиметрии. Но по-прежнему ученики не владеют им даже на начальном уровне.

Данное пособие призвано возродить интерес к элементарным методам в геометрии. Оно адресовано всем, кто желает расширить и углубить знания по элементарной геометрии, совершенствовать технику решения планиметрических задач элементарными средствами. Такими читателями являются прежде всего учащиеся математических классов и школ, их преподаватели, учителя математики общеобразовательных школ, студенты педагогических вузов.

При отборе материала всегда есть опасность, с одной стороны, утонуть в деталях, а с другой — упустить нечто важное с практической и познавательной точек зрения. Поэтому изложенный здесь материал уязвим для критики. Он не регламентирован какой-либо заданной программой. Автор считал необходимым включить «забытый» материал, расширить материал школьных учебников теоремами и формулами, непосредственно связанными с изучаемыми в школьном курсе, и добавить многие факты из классического арсенала элементарной геометрии. За рамки пособия вынесена теория геометрических построений, метод координат и вопросы теории измерения величин в основном по причине ограниченности объема пособия.

Читатель встретит здесь несколько доказательств одного и того же геометрического факта. Эти доказательства позволяют выявить разносторонние связи данного факта с другими, что весьма существенно. Кроме того, знание различных доказательств обеспечивает преподавателю сравнительную свободу в построении своего курса геометрии в соответствии с принятым порядком изложения.

В этом пособии в систематическом виде изложен теоретический и задачный материал по методу геометрических преобразований плоскости. Он позволяет оригинально и красиво решать многие геометрические задачи. Особенно я хочу пробудить интерес к этому методу у молодых учителей, ибо будущее школы в их руках. Совместно с Р. Г. Хазанкиным проведен длительный эксперимент изучения преобразований в девятых и десятых классах на уроках и внеклассных занятиях. Мы старались показать сущность каждого вида преобразования, решая большое количество задач. Этот эксперимент показал, что целесообразнее и эффективнее всего заниматься геометрическими преобразованиями в первой четверти десятого класса перед изучением стереометрии.

Большую часть пособия составляют задачи. Они взяты из указанной литературы, хотя имеются и задачи автора. Они подобраны по темам параграфов и имеются два списка задач общего содержания, в которые включены несколько серий задач, составленных талантливым педагогом и мастером по составлению задач и их решению профессором З. А. Скопецом. Они были опубликованы ранее в «Математике в школе» за 1966—1993 годы и в пособии [29]. Хотя автор и стремился расположить задачи в порядке возрастающей трудности, однако такое расположение оказалось весьма относительным. Трудность задачи — понятие в большой мере субъективное. Найдется немало таких, которые могут представить интерес и для подготовленного читателя.

К большинству задач даны ответы или краткие указания. Считаю, что издание задачников непременно с полными решениями имеет большие негативные последствия. Учитель, не решающий задачи сам, быстро теряет квалификацию. Время, потраченное на решение трудной задачи, окупится сторицей.

Книга в основном предназначена для учителей, работающих в математических классах, где она может служить и учебным пособием для учащихся. Ее материал можно с успехом использовать и в неспециализированных классах как на уроках, так и на факультативных и кружковых занятиях. Студенты и преподаватели педагогических вузов найдут здесь немало полезного для своей профессиональной подготовки.

Хочу надеяться, что работа с данной книгой будет приятным занятием и послужит ступенькой к серьезной математике.

Я. П. Понарин

Часть I

Планиметрия

§ 1. *Измерение углов, ассоциированных с окружностью*

Вспомним, что с окружностью ассоциированы (связаны) центральные и вписанные в нее углы. Центральный угол измеряется соответствующей ему дугой окружности, а вписанный — половиной дуги, высекаемой на окружности сторонами угла и заключенной внутри угла. Рассмотрим еще три случая взаимного расположения угла и окружности.

1.1. Угол с вершиной внутри окружности. Пусть вершина S угла ASB лежит внутри окружности, а его стороны пересекают окружность в точках A и B (рис. 1). Пусть лучи, дополнительные к лучам SA и SB, пересекают окружность в точках C и D. Найдем зависимость между градусной мерой угла ASB и градусными мерами дуг AB и CD. Угол ASB является внешним углом треугольника SBC. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ASB = \angle ACB + \angle DBC$. А эти углы измеряются соответственно половинами дуг AB и CD. Поэтому $\angle ASB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$.

Таким образом, *угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой двух дуг этой окружности, одна из которых заключена между его сторонами, а другая — между их продолжениями.*

Другое доказательство этой теоремы получим, если проведем хорду BE, параллельную хорде AC (рис. 2). Тогда $\angle ASB = \angle DBE = \frac{1}{2}\smile DE = \frac{1}{2}(\smile DC + \smile CE)$. Дуги AB и CE равны, поскольку они симметричны относительно диаметра окружности, перпендикулярного хордам AC и BE.

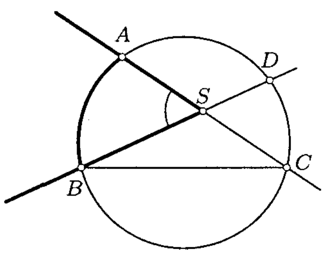


Рис. 1

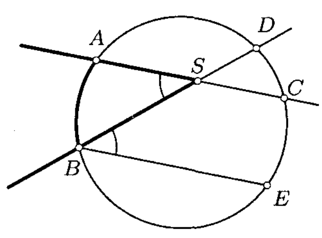


Рис. 2

1.2. Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности. *Если вершина угла лежит вне окружности, а его стороны пересекают эту окружность, то он измеряется полуразностью дуг, отсекаемых сторонами угла и заключенных внутри него.*

Действительно, пусть стороны угла ASB пересекают данную окружность вторично в точках C и D (рис. 3). Тогда для внешнего угла CBD треугольника SBC имеем $\angle CBD = \angle ASB + \angle ACB$, откуда, переходя к дугам CD и AB, на которые опираются вписанные углы CBD и ACB, получаем доказываемое соотношение: $\angle ASB = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile AB)$.

В этом можно убедиться с помощью хорды BE, параллельной хорде AC (рис. 4):

$$\angle ASB = \angle DBE = \frac{1}{2}\smile DE = \frac{1}{2}(\smile DC - \smile CE) = \frac{1}{2}(\smile DC - \smile AB).$$

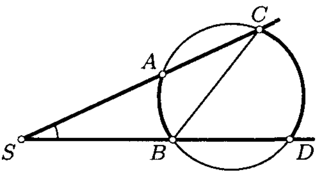


Рис. 3

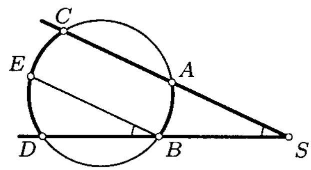


Рис. 4

1.3. Угол между секущей и касательной может иметь вершину на окружности (рис. 5) или же вне ее (рис. 6). В первом случае, если этот угол ASB острый, то он равен разности прямого угла BSD и вписанного угла ASD. Следовательно, $\angle ASB = 90° - \frac{1}{2}\smile DA = \frac{1}{2}\smile SD - \frac{1}{2}\smile DA = \frac{1}{2}\smile SA$. Если угол ASB тупой, то аналогичными рассуждениями получаем тот же результат. Итак, доказано, что *угол с вершиной на окружности между ее хордой и касательной измеряется половиной дуги этой окружности, заключенной внутри данного угла.*

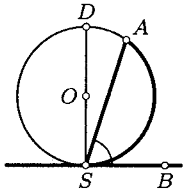


Рис. 5

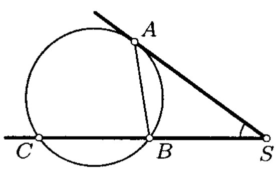


Рис. 6

Используя доказанный факт $\left(\angle SAB = \frac{1}{2}\smile AB\right)$, для второго случая (рис. 6) получаем:

$$\angle ASB = \angle ABC - \angle SAB = \frac{1}{2}\smile AC - \frac{1}{2}\smile AB = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile AB).$$

Итак, *если секущая к окружности не проходит через точку касания другой прямой с этой окружностью, то угол между ними измеряется полуразностью дуг, на которые делится точкой касания дуга, заключенная внутри этого угла.*

Задача 1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол между прямыми AB и CD равен α, а угол между прямыми AD и BC равен β. Найти углы данного четырехугольника.

Решение. Обозначим градусные меры дуг AB, BC, CD и DA через x, y, z и t соответственно. Пусть γ — угол между диагоналями AC и BD (рис. 7). Тогда $x + y + z + t = 360°$. На основании доказанных теорем имеем: $\alpha = \frac{1}{2}(t - y)$, $\beta = \frac{1}{2}(x - z)$, $\gamma = \frac{1}{2}(y + t)$. Сложением либо вычитанием этих равенств находим: $t = \alpha + \gamma$, $y = \gamma - \alpha$, $x = 180° + \beta - \gamma$, $z = 180° - \beta - \gamma$. Далее получаем окончательно:

$$\angle BAD = \frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta),$$
$$\angle ABC = \frac{1}{2}(z + t) = \frac{1}{2}(180° + \alpha - \beta),$$
$$\angle BCD = \frac{1}{2}(x + t) = \frac{1}{2}(180° + \alpha + \beta),$$
$$\angle ADC = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(180° - \alpha + \beta).$$

Задача 2. В треугольнике ABC отрезок A_1B_1, соединяющий основания высот AA_1 и BB_1, виден из середины стороны AB под углом α. Найти величину угла C этого треугольника.

Решение. Так как из точек A_1 и B_1 отрезок AB виден под прямыми углами, то они лежат на окружности с диаметром AB (рис. 8). Поэтому $\angle C = \frac{1}{2}\angle(\smile AB - \smile A_1B_1) = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

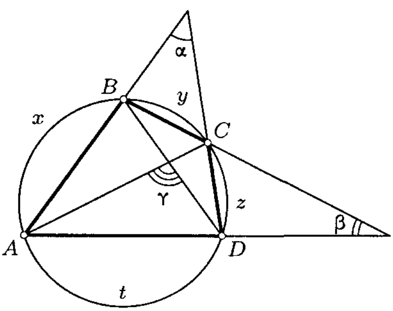


Рис. 7

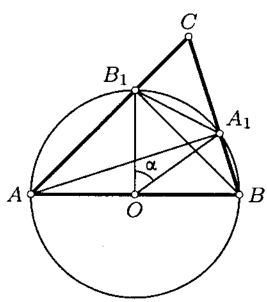


Рис. 8

Упражнения

1.1. Не пользуясь формулами площади треугольника, докажите, что высота треугольника равна произведению не соответственных ей сторон, деленному на диаметр описанной около этого треугольника окружности.

1.2. Две окружности касаются внешне в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается их в точках M и N. Докажите, что угол MAN прямой.

1.3. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что луч SP делит угол ASB пополам.

1.4. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ADE, принадлежит первой окружности.

1.5. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются соответственно серединами дуг AB, BC, CD, DA. Докажите, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны.

1.6. Около треугольника ABC описана окружность. Биссектрисы его углов A, B, C пересекают эту окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

1.7. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что эти прямые содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

1.8. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I. Биссектриса угла C вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Докажите, что $AD = DI$.

§2. *Пропорциональные отрезки*

2.1. Свойство ряда равных отношений. Если имеем ряд равных отношений
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$
то $a_i = kb_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые действительные числа, при которых $t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n \neq 0$. Тогда $t_1a_1 = t_1kb_1$, $t_2a_2 = t_2kb_2$, $\ldots$, $t_na_n = t_nkb_n$. Сложив эти равенства, получим: $t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n = k(t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n)$, откуда
$$\frac{t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n}{t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n} = k = \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Это свойство можно эффективно использовать в задачах. В частности, при $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1$ имеем

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{где } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Например, если a_i и b_i — длины соответственных сторон двух подобных многоугольников, то это равенство означает, что их периметры относятся как соответственные стороны.

2.2. Пропорциональные отрезки на сторонах угла. *Если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отрезки, отсекаемые ими на одной стороне этого угла, пропорциональны соответственным отрезкам, отсекаемым ими на другой его стороне* (рис. 9):

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots$$

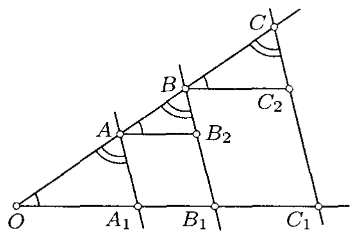


Рис. 9

Для доказательства построим отрезки AB_2, BC_2, ..., параллельные стороне OA_1 данного угла с вершиной O. Треугольники OAA_1, ABB_2, BCC_2, ... подобны в силу равенства соответственных углов при параллельных прямых OA_1, AB_2, BC_2, ... и соответственных углов при параллельных прямых AA_1, BB_1, CC_1, ... Отсюда следует:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{BC_2} = \ldots$$

Поскольку $AB_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$, ..., то сформулированное предложение доказано.

В частности, если $OA = AB = BC = \ldots$, то и $OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \ldots$ Следовательно, *если на одной стороне угла отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону этого угла, то на ней отсекаются также равные отрезки* (теорема Фалеса).

Обратная теорема. *Если на одной стороне угла от его вершины O отложены отрезки OA, AB, BC, ... и на другой его стороне также от вершины O отложены соответственно пропорциональные им отрезки OA_1, A_1B_1, B_1C_1, ...* (рис. 9):

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots,$$

то прямые AA_1, BB_1, CC_1, ... параллельны.

Действительно, на основе предыдущего свойства ряда равных отношений $\frac{OB}{OB_1}=\frac{OA+AB}{OA_1+A_1B_1}=\frac{OA}{OA_1}$, т. е. $\frac{OB}{OB_1}=\frac{OA}{OA_1}$. Следовательно, треугольники OAA_1 и OBB_1 гомотетичны и поэтому $AA_1 \parallel BB_1$. Аналогично $AA_1 \parallel CC_1$.

В частности, *если* $OA=AB=BC=\ldots$ *и* $OA_1=A_1B_1=B_1C_1=\ldots$, *то прямые* AA_1, BB_1, CC_1, *... параллельны.* (Обратная теорема Фалеса.)

2.3. Пропорциональные отрезки на параллельных прямых. *Если две параллельные прямые пересечены прямыми, проходящими через одну точку, то на данных параллельных прямых отсекаются пропорциональные отрезки* (рис. 10):

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$$

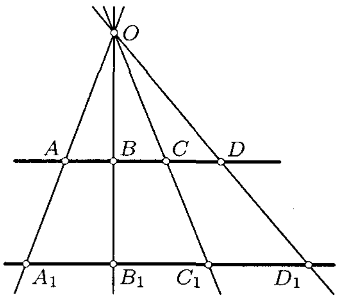


Рис. 10

Действительно, зададим гомотетию с центром в точке O пересечения секущих прямых и парой соответственных точек $A_1 \to A$. Она отображает B_1 на B, C_1 на C, D_1 на D, ... По свойству гомотетии рассматриваемые отношения отрезков равны коэффициенту гомотетии.

Другое доказательство можно получить, рассматривая пары подобных треугольников OAB и OA_1B_1, OBC и OB_1C_1, OCD и OC_1D_1.

2.4. Свойство биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника. *Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Доказательство. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 11). Построим $BE \parallel CD$. Тогда $\angle ACD=\angle AEB$ и $\angle BCD=$ $=\angle CBE$, а так как $\angle ACD=\angle BCD$, то $\angle AEB=$ $=\angle CBE$ и поэтому $BC=CE$. По теореме п. 2.2 $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CE}$, т. е. $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$, что и требовалось доказать.

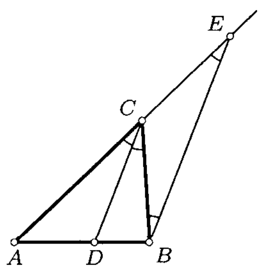


Рис. 11

Обратимся теперь к биссектрисе внешнего угла треугольника. В равнобедренном треугольнике биссектриса внешнего угла при общей вершине равных сторон параллельна третьей стороне (основанию) треугольника. В остальных случаях биссектриса внешнего угла пересекает прямую, содержащую противоположную сторону. Точка пересечения обладает свойством, аналогичным доказанному выше:

Если биссектриса внешнего угла треугольника ABC пересекает прямую, содержащую его противоположную сторону, то расстояния от точки пересечения до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника (рис. 12):

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$

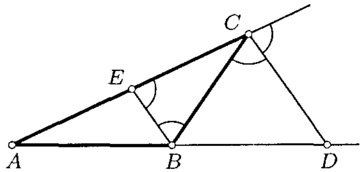


Рис. 12

Доказательство не отличается от доказательства предыдущей теоремы.

2.5. Секущие к окружности. Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей к этой окружности.

Теорема. *Если через данную точку, не принадлежащую данной окружности, проведена к ней произвольная секущая, то произведение отрезков секущей, соединяющих данную точку с точками ее пересечения с окружностью, не зависит от выбора секущей.*

Для доказательства проведем через данную точку M две произвольные секущие AB и CD (рис. 13 и 14). Треугольники MAD и MCB подобны, так как $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C$ по свойству вписанных углов. В случае, когда точка M вне окружности, углы MAD и MBC являются смежными к равным вписанным углам. Из подобия этих треугольников следует $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$, или $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, что и надо было доказать.

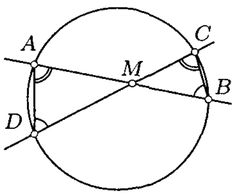


Рис. 13

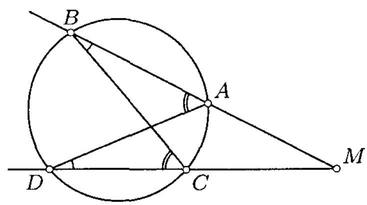


Рис. 14

2.6. Среднее геометрическое. Если имеет место пропорция

$$a : x = x : b,$$

то величина x называется *средним геометрическим* (средним пропорциональным) величин a и b. Тогда

$$x^2 = ab \quad \text{и} \quad x = \sqrt{ab}.$$

Рассмотрим наиболее распространенные случаи, когда один отрезок является средним геометрическим двух других.

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB (рис. 15). Используем общепринятые обозначения: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CD = h$, $AD = b_1$, $BD = a_1$. Прямоугольные треугольники ABC и ACD подобны (имеют общий острый угол A). Аналогично подобны треугольники ABC и BCD. Следовательно, подобны и треугольники ACD и BCD. Из подобия треугольников в этих парах имеем соответственно:

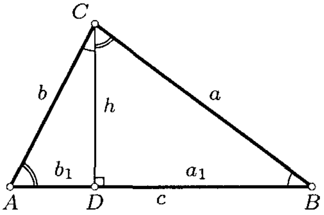


Рис. 15

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b_1}{h} = \frac{h}{a_1},$$

откуда

$$b^2 = cb_1, \quad a^2 = ca_1, \quad h^2 = a_1 b_1.$$

Итак, *в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, есть средняя геометрическая величина проекций катетов на гипотенузу, а каждый из катетов есть средняя геометрическая величина гипотенузы и его проекции на гипотенузу.*

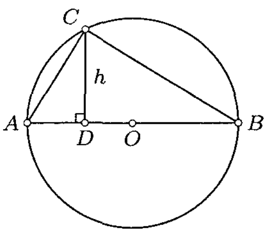


Рис. 16

Вершина C прямого угла лежит на окружности с диаметром AB. Поэтому это же свойство можно сформулировать еще так (рис. 16):

Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на ее диаметр, есть средняя геометрическая величина отрезков, на которые он делит диаметр, а каждая хорда, соединяющая данную точку с концами этого диаметра, есть средняя геометрическая величина диаметра и проекции этой хорды на диаметр.

Следствия. Складывая равенства $a^2 = ca_1$ и $b^2 = cb_1$, получаем: $a^2 + b^2 = (a_1 + b_1)c = c^2$. При почленном делении этих же равенств имеем:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Итак, попутно с предыдущими свойствами получены еще два: 1) *в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы*, 2) *квадраты катетов прямоугольного треугольника относятся как их проекции на гипотенузу.*

Пусть из точки M, лежащей вне окружности, проведены к ней секущая AB и касательная MC (рис. 17). Тогда $MC^2 = MA \cdot MB$. Действительно, треугольники MAC и MBC подобны: они имеют общий угол M и равные углы ACM и ABC (оба измеряются половиной дуги AC). Из их подобия следует доказываемое соотношение.

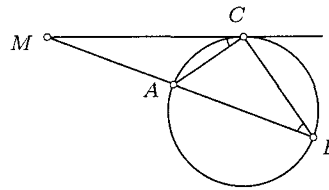


Рис. 17

Таким образом, если из некоторой точки проведены к окружности касательная и секущая, то отрезок, соединяющий данную точку с точкой касания, есть средняя геометрическая величина отрезков, соединяющих эту же точку с точками пересечения секущей и окружности.

2.7. Золотое сечение отрезка. С древности известна такая замечательная задача: разделить данный отрезок a на две части так, чтобы одна из них была средней геометрической величиной между отрезком и другой его частью (задача о золотом сечении отрезка).

Решение ее просто. Если x — одна из искомых частей данного отрезка a, то согласно требованию

$$x^2 = a(a - x), \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0,$$

откуда $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$

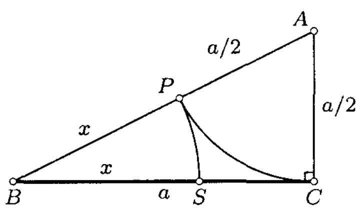


Рис. 18

На основании полученной формулы «золотой отрезок» x строится по заданному отрезку a с помощью циркуля и линейки следующим образом. Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами a и $\frac{a}{2}$ (рис. 18).

Его гипотенуза AB будет равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Если из нее вычесть отрезок $AP = \frac{a}{2}$, то получим искомый отрезок $BP = x$, а затем и точку S, делящую отрезок $BC = a$ в «золотом отношении»

$$\frac{BS}{SC} = \frac{x}{a - x} = \frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Иррациональное число $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}61803398\ldots$ не столь хорошо известно, как, скажем, число π (отношение длины окружности к ее диаметру), но оно выражает фундаментальное отношение, возникающее в самых неожиданных случаях. Любопытно, что $\frac{1}{\tau} = \tau - 1 \approx 0{,}61803398\ldots$ Число τ — единственное положительное число, которое переходит в обратное ему при вычитании единицы.

Много интересного о золотом сечении и числе τ читатель может найти в книгах Г. С. М. Кокстера «Введение в геометрию» и М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения».

Задача 1. Доказать, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен произведению образующих его сторон без произведения отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника.

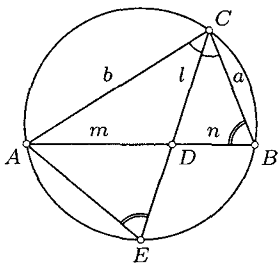


Рис. 19

Решение. Пусть биссектриса угла C треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а описанную около треугольника окружность — в точке E (рис. 19). Если $AD = m$, $DB = n$, $CD = l$, то по теореме о секущих (п. 2.5) $mn = l \cdot DE = l(CE - l) = l \cdot CE - l^2$. Из подобных треугольников ACE и CDB получаем: $l \cdot CE = ab$. Поэтому $mn = ab - l^2$, откуда $l^2 = ab - mn$.

Задача 2. Даны две прямые l и l_1. Четыре прямые, проходящие через одну точку O, пересекают прямую l в точках A, B, C, D, а прямую l_1 — соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{D_1B_1}}.$$

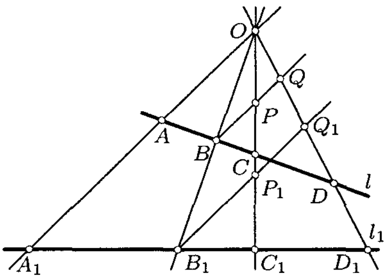


Рис. 20

Решение. Проведем через точки B и B_1 прямые, параллельные прямой OA (рис. 20). Пусть первая пересекает прямые OC и OD в точках P и Q, а вторая — в точках P_1 и Q_1. Тогда $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{PB}}$ и $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{QB}}$. Почленным делением этих равенств получаем: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}$. На тех же основаниях $\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{D_1B_1}} = \frac{\overline{Q_1B_1}}{\overline{P_1B_1}}$. Но по теореме о пропорциональных отрезках на параллельных прямых $\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{Q_1B_1}}{\overline{P_1B_1}}$.

Определение. Отношение $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ называется *двойным* (*сложным*) *отношением* четырех точек A, B, C, D прямой.

Доказанный результат можно сформулировать кратко: *двойное отношение четырех точек прямой не изменяется при центральном проектировании прямой на прямую.*

Сохранение двойного отношения четырех точек прямой при параллельном проектировании прямой на прямую очевидно на основании теоремы пункта 2.2.

Упражнения

2.1. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме п. 2.3.

2.2. В окружности проведен диаметр AB. Через точку A и произвольную точку M этой окружности проведена прямая, пересекающая в точке N касательную к окружности в точке B. Докажите, что произведение $AM \cdot AN$ не зависит от выбора точки M на окружности.

2.3. Две окружности касаются внешним образом. Докажите, что отрезок общей внешней касательной к ним, соединяющий точки ее касания, есть среднее геометрическое диаметров окружностей.

2.4. Докажите, что касательная к окружности, описанной около неравнобедренного треугольника, в его вершине делит противоположную сторону внешним образом в отношении квадратов прилежащих сторон.

2.5. Докажите, что касательная к окружности, описанной около неравнобедренного треугольника, в его вершине пересекает продолжение противоположной стороны в середине отрезка, концы которого совпадают с основаниями биссектрис внутреннего и внешнего углов при этой вершине.

2.6. В треугольнике ABC угол C вдвое больше угла B. Найдите длину стороны AB и длину биссектрисы угла C, если $BC = a$ и $AC = b$.

2.7. Около треугольника ABC описана окружность, и к ней проведена касательная в точке A, пересекающая луч BC в точке D. Найдите длины AD и CD, если известны длины a, b, c сторон треугольника ABC.

2.8. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно BC, пересекает BD в точке M. Прямая, проведенная через вершину B параллельно AD, пересекает AC в точке N. Докажите, что MN и CD параллельны.

2.9. Три окружности имеют две общие точки. Через одну из них проведена секущая, пересекающая эти окружности вторично в трех точках. Докажите, что отношение этих трех точек не зависит от выбора секущей. (Отношением трех точек A, D, C прямой называется число $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.)

2.10. Дана окружность ω и точки P и K вне ее. Через точку P проведена секущая к окружности ω, пересекающая ее в точках A и B.

Докажите, что вторая точка пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B, не зависит от выбора секущей AB.

2.11. В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках M и N, а другая — в точках P и Q. Докажите, что на прямой MQ эти окружности отсекают равные хорды.

2.12. Докажите, что расстояние от точки окружности до хорды этой окружности есть среднее геометрическое расстояний концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

2.13. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника делятся точкой их пересечения в золотом отношении.

2.14. Найдите отношение стороны правильного пятиугольника к радиусу описанной около него окружности.

2.15. В окружности с центром O проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Точка E — середина радиуса OA. На луче EB отложен отрезок EK, равный отрезку CE. Докажите, что отрезок KC равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность.

2.16. Теорема Ван—Обеля. Если прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB, содержащие стороны треугольника ABC, соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} + \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PA_1}}.$$

2.17. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся заданной прямой.

2.18. Постройте прямую, параллельную основаниям трапеции, которая делит эту трапецию на две подобные трапеции.

2.19. Постройте квадрат, одна сторона которого служит хордой данной окружности, а противоположная ей сторона принадлежит касательной к этой окружности. Найдите отношение стороны квадрата к радиусу окружности.

2.20. В прямоугольном треугольнике ABC опущена высота CD на гипотенузу AB. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

2.21. В треугольнике ABC проведена высота BK и медиана BM, причем $AM = BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB = 1$, $BC = 2$.

2.22. Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B, и секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO

пересекаются в точке K. Докажите, что точки M, N, K, O лежат на одной окружности.

2.23. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ такой, что касательные к окружности в вершинах A и C пересекаются на прямой BD. Докажите, что касательные в вершинах B и D пересекаются на прямой AC, биссектрисы углов A и C пересекаются на прямой BD, биссектрисы углов B и D пересекаются на прямой AC. Докажите, что этим же свойством обладают биссектрисы внешних углов при противоположных вершинах четырехугольника.

§3. *Основные метрические соотношения в треугольнике*

3.1. Теорема синусов традиционно выводится из равенства трех выражений площади треугольника. Однако ее можно получить совсем просто и в ее полном содержании без использования формулы площади.

Проведем радиус OD окружности, описанной около данного треугольника ABC, перпендикулярный к стороне BC (рис. 21). Тогда углы BAC и BOD равны, так как оба измеряются половиной дуги BC. Точка E пересечения BC и OD — середина BC. Поэтому из прямоугольного треугольника BOE имеем: $\frac{a}{2} = R\sin A$, или $a = 2R\sin A$, где R — радиус описанной окружности. Аналогично $b = 2R\sin B$ и $c = 2R\sin C$. Отсюда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \qquad (3.1)$$

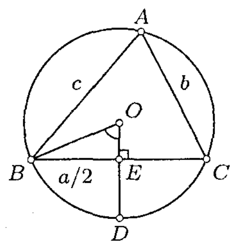


Рис. 21

Нетрудно проверить, что в случае, когда угол A тупой или прямой, результат будет тот же.

Для практического применения теорему синусов полезно знать и в такой формулировке: *каждая сторона треугольника равна диаметру описанной около него окружности, умноженному на синус угла, противолежащего этой стороне.*

В доказательствах некоторых соотношений при выполнении тождественных преобразований теорему синусов можно использовать в виде:

$$a\sin B = b\sin A, \quad b\sin C = c\sin B, \quad c\sin A = a\sin C. \qquad (3.2)$$

Задача. Доказать, что расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных к двум сторонам треугольника из основания высоты, опущенной на третью сторону, не зависит от выбора высоты.

Решение. Пусть CD — высота треугольника ABC, DP и DQ — перпендикуляры к AC и BC (рис. 22). Из точек P и Q отрезок CD виден под прямыми углами. Поэтому эти точки принадлежат окружности с диаметром CD. По теореме синусов $PQ = CD\sin\angle ACB$. Но поскольку $CD = \frac{2S}{AB}$, где S — площадь треугольника ABC, то

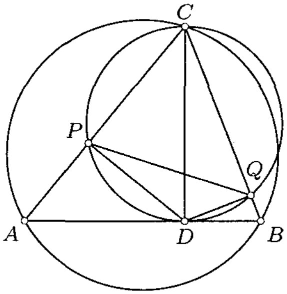


Рис. 22

$$PQ = 2S\cdot\frac{\sin\angle ACB}{AB} = \frac{S}{R},$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Полученное выражение длины PQ действительно не зависит от высоты.

3.2. Формулы проекций и их следствия. Пусть D — ортогональная проекция вершины A треугольника ABC на прямую BC. Для определенности будем считать угол B острым, а для угла C рассмотрим три случая: 1) угол C острый, 2) угол C тупой, 3) угол C прямой (рис. 23). Тогда соответственно 1) $a = BD + DC$, 2) $a = BD - DC$, 3) $a = BD$. Во всех трех случаях $BD = c\cos B$, но в случае 1) $DC = b\cos C$, в случае 2) $DC = -b\cos C$, в случае 3) $DC = 0 = b\cos C$. Поэтому для всех трех случаев формула единa:

$$a = b\cos C + c\cos B. \tag{3.3}$$

Аналогично

$$b = c\cos A + a\cos C, \qquad c = a\cos B + b\cos A$$

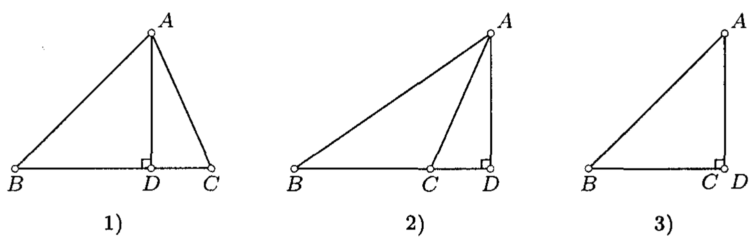


Рис. 23

Эти соотношения носят название *формул проекций* для треугольника. Их векторный вывод не требует отдельного рассмотрения указанных трех случаев. Возьмем векторное равенство $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$ и умножим его скалярно на вектор $\overline{BC}$: $\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BC}$. А это эквивалентно равенству $a^2 = ca\cos B + ba\cos C$, или

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

Из формул (3.3) вытекают важные следствия. Поскольку косинус не больше единицы, то при отбрасывании косинусов в формулах (3.3) получаем неравенства:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b, \tag{3.4}$$

называемые *неравенствами треугольника.*

Далее, умножив соотношения (3.3) соответственно на a, b, c и сложив, находим: $c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos C$ или

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \tag{3.5}$$

т. е. получили *теорему косинусов* для треугольника.

Поскольку $ab\cos C = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$, то теорема косинусов может быть представлена в векторном виде так:

$$2\overline{CA} \cdot \overline{CB} = a^2 + b^2 - c^2. \tag{3.6}$$

Из формул проекций выводится также зависимость между косинусами углов треугольника. Равенства (3.3) будем рассматривать как линейную однородную систему уравнений относительно a, b, c:

$$\begin{cases} -a + b\cos C + c\cos B = 0, \\ a\cos C - b + c\cos A = 0, \\ a\cos B + b\cos A - c = 0. \end{cases}$$

Эта система заведомо имеет ненулевое решение $(a,\ b,\ c)$, что возможно тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Это и есть искомая зависимость. Раскрывая определитель, получим

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1. \tag{3.8}$$

Для читателя, не знакомого с методом решения линейных систем с помощью определителей, приведем другой вывод тождества (3.8) путем прямого исключения длин a, b, c сторон треугольника из системы (3.3). Подставим в первую и вторую формулы (3.3) выражение $c = a\cos B + b\cos A$ и полученные два равенства запишем так:

$$a(1-\cos^2 B) = b(\cos C + \cos A\cos B),$$
$$b(1-\cos^2 A) = a(\cos C + \cos A\cos B).$$

Почленным умножением получаем:

$$(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B) = (\cos C + \cos A\cos B)^2,$$

что эквивалентно (3.8).

3.3. Некоторые формулы площади треугольника. В школьных учебных пособиях доказываются следующие формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin C, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

где r и R — радиусы соответственно его вписанной и описанной окружностей, а $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Для успешного решения задач полезно знать и другие формулы площади треугольника. Докажем еще пять формул.

1) Исходя из формулы $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, выразим площадь треугольника через длины его сторон. По теореме косинусов $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Находим $4S^2 = a^2b^2\sin^2 C = a^2b^2(1-\cos^2 C) = a^2b^2\left(1 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\right)$, откуда

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2) =$$
$$= ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Поскольку, например, $a+b-c = a+b+c-2c = 2(p-c)$, то

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c). \tag{3.9}$$

Эту формулу называют формулой Герона, хотя она была получена гораздо раньше Архимедом.

2) Соединим центр O описанной около треугольника ABC окружности с его вершинами. Если треугольник ABC остроугольный, то точка O лежит внутри него. Очевидно, углы BOC, COA, AOB равны соответственно удвоенным углам треугольника ABC. Тогда

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2\sin 2A + \frac{1}{2}R^2\sin 2B + \frac{1}{2}R^2\sin 2C.$$

Итак,

$$S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C). \tag{3.10}$$

Если же, скажем, угол A треугольника тупой, то площадь треугольника BOC следует вычесть, что и выполняет формула (3.10), так как тогда $\sin 2A < 0$.

3) При том же построении высота треугольника BOC, опущенная на сторону BC, равна $R\cos A$ (рис. 21). Значит, $S = \frac{1}{2}aR\cos A$ и поэтому

$$S = \frac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C). \tag{3.11}$$

Эта формула имеет место для треугольника любого типа.

4) Обозначим длины отрезков сторон треугольника от вершин A, B и C до точек касания с вписанной в треугольник окружностью через x, y и z соответственно. Тогда $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ (рис. 24) и $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$. Отсюда имеем:

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c. \tag{3.12}$$

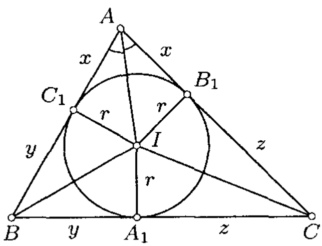


Рис. 24

Соединим центр I вписанной окружности с вершинами треугольника и с точками касания ее со сторонами. Из прямоугольного треугольника AIB_1 получаем: $r = x\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Тогда формула $S = pr$ принимает вид:

$$S = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}. \tag{3.13}$$

5) Далее, замечая, что $p - a = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, на основании формулы (3.9) имеем: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = pr(p-b)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. Поскольку $pr = S$, то при сокращении этого равенства на S получаем:

$$S = (p-b)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}. \tag{3.14}$$

3.4. Зависимость между косинусами углов треугольника и радиусами его вписанной и описанной окружностей. Используя формулы (3.3) проекций, находим:

$$2p = a + b + c = (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C =$$
$$= 2p(\cos A + \cos B + \cos C) - (a\cos A + b\cos B + c\cos C).$$

Согласно (3.11), $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R} = \frac{2pr}{R}$. Таким образом, $2p = 2p(\cos A + \cos B + \cos C) - \frac{2pr}{R}$, откуда

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}. \qquad (3.15)$$

Следствие. *Сумма $d_1 + d_2 + d_3$ ориентированных расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме $R + r$ радиусов его описанной и вписанной окружностей* (теорема Карно).

В самом деле, соотношение (3.15) можно написать так:

$$R\cos A + R\cos B + R\cos C = R + r.$$

Поскольку $R\cos A = d_1$, $R\cos B = d_2$, $R\cos C = d_3$, то

$$d_1 + d_2 + d_3 = R + r.$$

Примечание. Если дан треугольник ABC и точка M, не принадлежащая прямой AB, то ориентированное расстояние от точки M до прямой AB считается *положительным*, если точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB, и *отрицательным*, если эти точки находятся по разные стороны от прямой AB.

3.5. Длина биссектрисы треугольника. Выведем две формулы длины биссектрисы треугольника.

Пусть биссектриса угла C треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D. Так как площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ACD и BCD, то имеем равенство:

$$\frac{1}{2}bl_c\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}al_c\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

откуда

$$l_c = \frac{ab\sin C}{(a+b)\sin\frac{C}{2}} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}. \qquad (3.16)$$

Выражение l_c через длины a, b и c сторон треугольника ABC найдем векторным методом. Напомним, что для любой точки O из того, что $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$, следует $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ (формула деления отрезка AB в данном отношении λ). Для доказательства этой эквивалентности достаточно учесть, что $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$ и $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$.

Пусть CD — биссектриса треугольника ABC. На основании п. 2.4 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{b}{a}$ и поэтому

$$\overline{CD} = \frac{\overline{CA} + (b/a)\overline{CB}}{1 + b/a} = \frac{a\overline{CA} + b\overline{CB}}{a+b}.$$

Находим

$$\overline{CD}^2 = \frac{1}{(a+b)^2}(a^2\overline{CA}^2 + 2ab(\overline{CA}\cdot\overline{CB}) + b^2\overline{CB}^2) = \\ = \frac{1}{(a+b)^2}(2a^2b^2 + 2ab(\overline{CA}\cdot\overline{CB})).$$

По теореме косинусов $2\overline{CA}\cdot\overline{CB} = a^2 + b^2 - c^2$. Следовательно,

$$l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = \\ = \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2 - c^2) = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Итак,

$$l_c^2 = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2} \tag{3.17}$$

или

$$l_c^2 = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}. \tag{3.18}$$

З а д а ч а. Доказать, что если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный (теорема Ш т е й н е р а—Л е м у с а).

Эта задача была послана в 1840 году великому швейцарскому геометру Якобу Штейнеру С. Л. Лемусом с просьбой дать чисто геометрическое ее решение. Доказательство Штейнера было очень сложным и побудило других математиков искать более простое. Задача активно решалась более 20 лет. Некоторые математики обращались к решению этой задачи и в XX веке.

Алгебраическое решение по формуле (3.17) достаточно просто. Так как по условию $l_a = l_b$, то

$$\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2},$$

что эквивалентно равенству

$$b(a+c)^2(b+c-a) = a(b+c)^2(c+a-b).$$

Произведя умножение и надлежащую группировку слагаемых, получим:

$$(a^3b - ab^3) + 3abc(a - b) + c^2(a^2 - b^2) + c^3(a - b) = 0$$

и далее $(a - b)(a^2b + ab^2 + ac^2 + bc^2 + c^3 + 3abc) = 0$.

Числа a, b и c положительны, поэтому сумма во вторых скобках положительна. Следовательно, $a - b = 0$, $a = b$.

Упражнения

3.1. Докажите, что для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c имеет место равенство:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

3.2. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в данный треугольник и в треугольники, на которые его делит эта высота.

3.3. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин отрезков, на которые делит его гипотенузу точка касания вписанной окружности.

3.4. Дан квадрат со стороной a. Через его центр, вершину и середину стороны, не содержащей эту вершину, проведена окружность. Найдите ее радиус.

3.5. Если p и q — радиусы окружностей, проходящих через вершину A треугольника ABC и касающихся прямой BC в точках B и C, то $pq = R^2$. Докажите.

3.6. Докажите, что для любого треугольника имеет место тождество:

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

3.7. Если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов его противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности. Докажите.

3.8. Постройте треугольник по двум сторонам, если медиана, проведенная к третьей стороне, делит угол треугольника в отношении $1 : 2$.

3.9. Через вершину A треугольника ABC внутри него проведены две прямые, образующие равные углы со сторонами AB и AC и пересекающие сторону BC в точках M и N. Докажите, что

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

(теорема Штейнера).

3.10. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из какой-либо вершины вписанного в окружность четырехугольника к двум его сторонам, не зависит от выбора вершины.

Докажите следующие формулы площади треугольника (3.11—3.20).

3.11. $S = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A \sin B}{\sin C}$.

3.12. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

3.13. $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$.

3.14. $S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

3.15. $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

3.16. $S = 4Rr \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$.

3.17. $S^2 = abcp \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$.

3.18. $S = \frac{p^2}{\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2) + \operatorname{ctg}(C/2)}$.

3.19. $4S^2 = \overline{CA}^2 \cdot \overline{CB}^2 - (\overline{CA} \cdot \overline{CB})^2$.

3.20. $16S^2 = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)$.

3.21. Докажите, что в любом треугольнике ABC

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

3.22. На стороне AB треугольника ABC в одной полуплоскости с ним построен правильный треугольник ABC_1. Докажите, что

$$CC_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2S\sqrt{3},$$

где a, b и c — длины сторон треугольника ABC, S — его площадь.

Докажите следующие соотношения для произвольного треугольника ABC (3.23—3.25).

3.23. $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A$.

3.24. $a^2 = (b + c)^2 - 4S \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

3.25. $a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

3.26. Углы треугольника ABC связаны условием:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Определите его вид.

3.27. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

3.28. Докажите, что в треугольнике ABC ортогональная проекция биссектрисы CD на сторону CB имеет длину $\frac{2p(p-c)}{a+b}$.

3.29. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r. Найдите длины сторон треугольника с вершинами в точках касания, если углы треугольника ABC равны α, β и γ. Докажите, что площадь этого треугольника равна $\frac{pr^2}{2R}$.

3.30. Докажите, что для любого треугольника выполняется соотношение:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

3.31. Найдите отношение произведения биссектрис острых углов прямоугольного треугольника к произведению радиусов его описанной и вписанной окружностей.

§4. *Четыре замечательные точки треугольника*

В геометрии треугольника важную роль играют его четыре замечательные точки: точка пересечения медиан — *центроид*, центры вписанной и описанной окружностей, точка пересечения высот — *ортоцентр*. Рассмотрим подробнее их свойства.

4.1. Центроид треугольника. Его существование и основное свойство основано на следующей теореме о пересечении медиан треугольника.

Теорема. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке G, которая делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.*

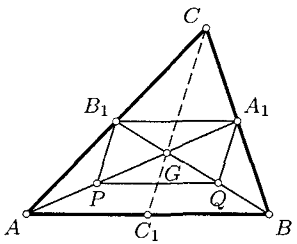


Рис. 25

Из множества имеющихся доказательств этой теоремы приведем четыре.

Доказательство 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно (рис. 25).

Пусть G — точка пересечения двух медиан AA_1 и BB_1. Докажем сначала, что $\overline{AG} : \overline{GA_1} = \overline{BG} : \overline{GB_1} = 2$.

Для этого возьмем середины P и Q отрезков AG и BG. По теореме о средней линии треугольника отрезки B_1A_1 и PQ равны половине стороны AB и параллельны ей. Поэтому четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм. Тогда точка G пересечения его диагоналей PA_1 и QB_1 делит каждую из них пополам. Следовательно, точки P и G делят медиану AA_1 на три равные части, а точки Q и G делят медиану BB_1 также на три равные части. Итак, точка G пересечения двух медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины. Докажем теперь, что третья медиана CC_1 содержит точку G. Согласно доказанному, точка пересечения медиан AA_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении $2:1$. На медиане AA_1 такой точкой является точка G, поэтому она и будет точкой пересечения прямых AA_1 и CC_1. Доказательство закончено.

Доказательство 2 (векторное). Выберем произвольную точку O в качестве общего начала векторов. На медиане AA_1 возьмем точку G, делящую ее в отношении $2:1$, считая от точки A (рис. 26). Тогда на основании формулы деления отрезка в данном отношении (п. 3.5) будем иметь:

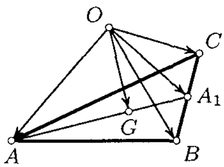


Рис. 26

$$\overline{OA_1} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) \quad \text{и} \quad \overline{OG} = \frac{\overline{OA} + 2\overline{OA_1}}{1+2}.$$

Отсюда

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}). \tag{4.1}$$

В это выражение векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ вершин треугольника ABC входят равноправно (симметрично). Поэтому векторы точек, делящих другие две медианы в отношении $2:1$, будут иметь то же выражение (4.1). Это и означает, что делящие точки совпадают.

Следствие. *Точка O совпадает с центроидом G треугольника ABC тогда и только тогда, когда*

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0},$$

иначе говоря, равенство

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \bar{0} \tag{4.2}$$

есть характеристическое свойство центроида G треугольника ABC.

Третье доказательство теоремы о медианах треугольника основано на таком характеристическом свойстве медианы треугольника.

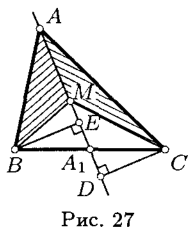


Рис. 27

Лемма. *Для того, чтобы точка M принадлежала прямой, содержащей медиану AA_1 треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы треугольники AMB и AMC были равновелики и противоположно ориентированы.*

Необходимость. Пусть A_1 — середина стороны BC и $M \in (AA_1)$. Проведем высоты BE и CD в треугольниках AMB и AMC (рис. 27). Из равенства прямоугольных треугольников BEA_1 и CDA_1 (по гипотенузе и острому углу) следует равенство $BE = CD$, которое влечет за собой равенство площадей треугольников AMB и AMC. Они ориентированы противоположно.

3*

Достаточность. Пусть треугольники AMB и AMC равновелики и противоположно ориентированы. Тогда $BE = CD$. Если прямая AM пересекает прямую BC в точке A_1, то A_1 — середина стороны BC. Это следует из равенства тех же прямоугольных треугольников BEA_1 и CDA_1 (по катету и острому углу). Если бы AM была параллельна BC, то треугольники AMB и AMC были бы равновелики, но ориентированы одинаково, что противоречит условию.

Доказательство 3 (теоремы о медианах). Пусть G — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Тогда согласно лемме треугольники AGB и AGC равновелики, треугольники AGB и BGC также равновелики. Отсюда следует равновеликость треугольников AGC и BGC, которая по достаточному условию леммы эквивалентна тому, что $G \in (CC_1)$. Тремя медианами треугольник ABC разбился на шесть равновеликих треугольников. Поэтому

$$AG : GA_1 = S_{AGC} : S_{A_1GC} = 2.$$

Аналогично $BG : GB_1 = 2$ и $CG : GC_1 = 2$.

Закончив это доказательство, сделаем одно замечание. В силу равновеликости треугольников ABG, BCG и CAG точка G пересечения медиан треугольника ABC часто носит название *центра тяжести* этого треугольника, поскольку для материального треугольника, представляющего собой однородную пластинку, эта точка совпадает с физическим центром тяжести. Однако если материальный треугольник представляет собой совокупность трех однородных стержней, то его физический центр тяжести уже не совпадает с точкой пересечения медиан, а будет центром окружности, вписанной в серединный треугольник $A_1B_1C_1$.

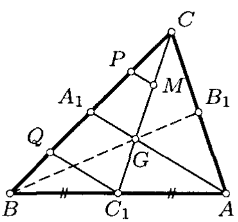


Рис. 28

Доказательство 4 (методом параллельного проектирования). Медиану CC_1 разделим точками M и G на три равные части: $CM = MG = GC_1$, проведем прямую AG и параллельные ей прямые MP и C_1Q, пересекающие сторону BC в точках A_1, P и Q соответственно (рис. 28). На основании теоремы Фалеса (п. 2.2) сторона BC разделилась точками Q, A_1 и P на четыре равные части. Следовательно, A_1 — середина BC. Аналогично прямая BG пересекает AC в ее середине B_1. Так как PM — средняя линия треугольника A_1GC и QC_1 — средняя линия треугольника ABA_1,

$$\frac{AA_1}{GA_1} = \frac{2QC_1}{2PM} = \frac{CC_1}{CM} = 3,$$

откуда $AG : GA_1 = 2$, и аналогично $BG : GB_1 = 2$.

4.2. Центр вписанной в треугольник окружности. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке I, которая равноудалена от трех сторон треугольника и потому является центром вписанной в треугольник окружности. Доказательство имеется в школьных учебниках.

В каких отношениях делятся биссектрисы треугольника точкой I их пересечения? Решим эту задачу.

Пусть биссектрисы треугольника ABC пересекают его стороны AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Тогда $BA_1 : A_1C = \frac{c}{b}$ (п. 2.4) и $BA_1 + A_1C = a$, откуда $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ и $A_1C = \frac{ab}{b+c}$. Так как CI — биссектриса треугольника AA_1C, то

$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{AC}{A_1C} = b : \frac{ab}{b+c} = \frac{b+c}{a}.$$

Итак,

$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{BI}{IB_1} = \frac{c+a}{b}, \quad \frac{CI}{IC_1} = \frac{a+b}{c}. \tag{4.3}$$

Далее, фиксируем некоторую точку O в качестве начала векторов (рис. 29) и выразим вектор $\overline{OI}$ центра вписанной окружности через векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ вершин треугольника и длины его сторон:

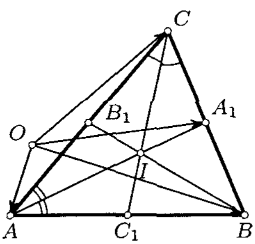


Рис. 29

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \overline{OA_1} = \frac{b\overline{OB} + c\overline{OC}}{b+c},$$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IA_1}} = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \overline{OI} = \frac{\overline{OA} + \frac{b+c}{a}\overline{OC}}{1 + \frac{b+c}{a}}.$$

Итак,

$$\overline{OI} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}}{a+b+c}. \tag{4.4}$$

Следствие. *Точка I является точкой пересечения биссектрис тогда и только тогда, когда*

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \overline{0}. \tag{4.5}$$

4.3. Ортоцентр треугольника. Существование этой замечательной точки утверждается теоремой о пересечении высот треугольника.

Теорема. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке* (она называется *ортоцентром* треугольника).

Рассмотрим три доказательства этой теоремы.

Доказательство 1. Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные его противоположным сторонам. Тогда точки A, B и C будут серединами сторон полученного треугольника $A_2B_2C_2$ (рис. 30). Действительно, четырехугольники ABA_2C и $ABCB_2$ — параллелограммы и поэтому $CA_2 = AB = CB_2$. Аналогично точки A и B — середины отрезков B_2C_2 и C_2A_2. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC суть серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Они, как известно, пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

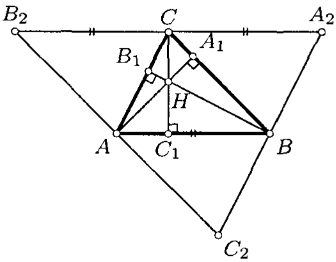


Рис. 30

Следствие. *Центр описанной около треугольника окружности является ортоцентром треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника.*

Доказательство 2 (векторное). Для любых четырех точек A, B, C и D имеет место векторное тождество:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}=0, \tag{4.6}$$

в чем легко убедиться, выполнив подстановки: $\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}$, $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$, $\overline{CA}=-\overline{AC}$. Если, в частности, $\overline{BC}\cdot\overline{AD}=0$ и $\overline{CA}\cdot\overline{BD}=0$, то из тождества (4.6) следует, что и $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$. Геометрически это означает, что если прямые BC и AD перпендикулярны и прямые CA и BD перпендикулярны, то перпендикулярны и прямые AB и CD. Иными словами, если точка D есть точка пересечения двух высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC, то через нее проходит и третья высота CC_1.

Ортоцентр треугольника ABC будем обозначать буквой H, если на то нет других указаний.

Очевидно замечательное свойство ортоцентра H непрямоугольного треугольника ABC: *каждая из четырех точек A, B, C, H является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими точками.*

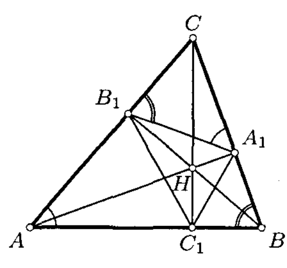


Рис. 31

Доказательство 3. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в основаниях высот остроугольного треугольника ABC (рис. 31). Он называется *ортотреугольником* треугольника ABC. Находим: $\dfrac{CA_1}{CB_1}=\dfrac{CA\cos C}{CB\cos C}=\dfrac{CA}{CB}$.

Поэтому $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$, вследствие чего $\angle CA_1B_1 = \angle BAC$ и, значит, $\angle AA_1B_1 = 90° - \angle A$. Аналогично находим, что $\angle AA_1C_1 = 90° - \angle A$. Следовательно, AA_1 — биссектриса угла $B_1A_1C_1$. На равных правах BB_1 и CC_1 — две другие биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$. Итак, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника.* Они пересекаются в центре вписанной в него окружности. Теорема доказана для остроугольного треугольника. Пусть теперь угол BAC тупой и высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 32). Тогда углы треугольника BCH острые (это непрямые углы прямоугольных треугольников) и CB_1 и BC_1 — его высоты, пересекающиеся в точке A. По доказанному третья высота проходит через A, т. е. $HA \perp BC$. Доказательство закончено.

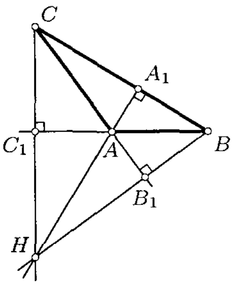


Рис. 32

Следствие. *Ортоцентр остроугольного треугольника служит центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.*

Теорема. *Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — его ортоцентр, то*

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}. \tag{4.7}$$

Доказательство 1. Данный треугольник ABC гомотетичен его серединному треугольнику $A_1B_1C_1$ при гомотетии с центром G и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. При этой гомотетии $A \to A_1$ и $H \to O$ (поскольку O — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$). Поэтому $\overline{OA_1} = -\frac{1}{2}\overline{HA}$, что эквивалентно $\frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) = -\frac{1}{2}(\overline{OA} - \overline{OH})$, откуда и следует (4.7).

Доказательство 2. Для точек H и O запишем векторные условия $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$ и $\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$. Представим их так:

$$(\overline{OH} - \overline{OA})(\overline{OC} - \overline{OB}) = 0, \qquad (\overline{OC} + \overline{OB})(\overline{OC} - \overline{OB}) = 0.$$

Вычитая, получим: $(\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC})\overline{BC} = 0$. Аналогичным образом $(\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC})\overline{CA} = 0$.

Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$ ненулевые и неколлинеарны. Поэтому последние два равенства могут выполняться совместно лишь тогда, когда

$$\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} = \bar{0}.$$

4.4. Связь между четырьмя замечательными точками треугольника. Если O — центр описанной около треугольника ABC окружности, то равенства (4.1) и (4.7) выполняются совместно, а из них следует:

$$\overline{OH} = 3\overline{OG}.$$

Это значит, что *точки O, G, H лежат на одной прямой, причем центроид G делит отрезок OH в отношении* $1:2$. Прямая, содержащая эти точки, называется прямой Эйлера треугольника (рис. 33).

Расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей и радиусы R и r этих окружностей связаны замечательной формулой:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr, \tag{4.8}$$

называемой формулой Эйлера. Вот два доказательства этой формулы.

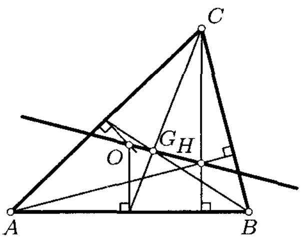


Рис. 33

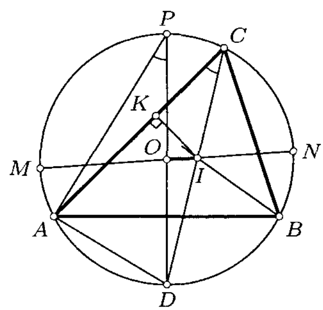


Рис. 34

Доказательство 1. Пусть биссектриса угла C треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (рис. 34). Проведем диаметр DP этой окружности и перпендикуляр IK из центра I вписанной окружности на сторону AC. Тогда $IK = r$, $DP = 2R$. Пусть прямая OI пересекает окружность в точках M и N. По теореме о секущих (п. 2.5)

$$CI \cdot ID = IM \cdot IN = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2,$$

где $d = OI$. Это же произведение $CI \cdot ID$ вычислим иначе. Из подобия прямоугольных треугольников PAD и CKI (по равным острым углам при вершинах P и C) имеем $\frac{CI}{2R} = \frac{r}{AD}$. Но $AD = ID$ (задача 1.8). Поэтому $CI \cdot ID = 2Rr$. Следовательно, $R^2 - d^2 = 2Rr$, что совпадает с (4.8).

Доказательство 2. Обращаясь к равенству (4.4), будем теперь полагать, что точка O — центр описанной окружности. Тогда находим последовательно:

$$\overline{OI}^2 = \frac{1}{4p^2}(a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC})^2 = \frac{1}{4p^2}(a^2\,\overline{OA}^2+b^2\,\overline{OB}^2+c^2\,\overline{OC}^2+ \\ +2ab(\overline{OA}\cdot\overline{OB})+2ac(\overline{OA}\cdot\overline{OC})+2bc(\overline{OB}\cdot\overline{OC})),$$

причем $OA=OB=OC=R$. По теореме косинусов (3.6) $2\overline{OA}\cdot\overline{OB}= =2R^2-c^2$, $2\overline{OA}\cdot\overline{OC}=2R^2-b^2$, $2\overline{OB}\cdot\overline{OC}=2R^2-a^2$. Поэтому, выполняя подстановки и группировку слагаемых, получим:

$$OI^2 = \frac{R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)}{4p^2} = R^2 - \frac{abc}{2p}.$$

Вспоминая, что $S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}=pr$, откуда $\dfrac{abc}{2p}=2Rr$, приходим к доказываемой формуле (4.8).

Задача. Известны углы треугольника. Найти отношения, в которых ортоцентр треугольника делит каждую из высот.

Решение. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H (рис. 35). Тогда треугольники CHA_1 и AHC_1 подобны. Сначала находим:

$$\frac{CH}{AH}=\frac{CA_1}{AC_1}=\frac{CA\cos C}{CA\cos A}=\frac{\cos C}{\cos A}.$$

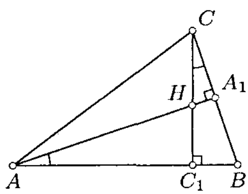


Рис. 35

С другой стороны, так как $AH=\dfrac{HC_1}{\sin HAC_1}= =\dfrac{HC_1}{\cos B}$, то $\dfrac{CH}{AH}=\dfrac{CH}{HC_1}\cos B$. Следовательно,

$$\frac{CH}{HC_1}\cos B = \frac{\cos C}{\cos A},$$

откуда

$$\frac{CH}{HC_1} = \frac{\cos C}{\cos A\cos B}. \tag{4.9}$$

Если отрезки высот считать направленными, то этот результат верен и для тупоугольного треугольника.

Упражнения

4.1. Найдите отношения, в которых делятся медианы, биссектрисы и высоты треугольника соответственно его центроидом, центром вписанной окружности и ортоцентром, пользуясь теоремой Ван-Обеля (задача 2.16).

4.2. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и середин сторон, лежат на описанной около треугольника окружности.

4.3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABH, BCH, CAH, равны.

4.4. Диаметр описанной около треугольника окружности и его высота, выходящие из одной вершины этого треугольника, симметричны относительно биссектрисы, выходящей из той же вершины. Докажите.

4.5. Точка M симметрична центру O описанной около треугольника ABC окружности относительно стороны BC. Докажите, что четырехугольник $AOMH$ — параллелограмм (H — ортоцентр треугольника).

4.6. Докажите, что в правильном треугольнике совпадают четыре замечательные точки O, G, I, H.

4.7. Докажите, что если в треугольнике совпадают какие-либо две из точек O, G, I, H, то треугольник правильный.

4.8. Точки A_1 и B_1 — основания высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC. Докажите, что $A_1B_1 = AB\,|\cos C|$.

4.9. Докажите, что расстояние от вершины C треугольника ABC до его ортоцентра H равно $2R\,|\cos C|$.

4.10. Докажите, что расстояние от вершины C треугольника ABC до его ортоцентра H равно $AB\,|\operatorname{ctg} C|$.

4.11. Докажите соотношение для любого треугольника ABC:

$$a^2 + AH^2 = b^2 + BH^2 = c^2 + CH^2 = 4R^2.$$

4.12. Докажите, что во всяком треугольнике имеет место зависимость:

$$\frac{CH}{R} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}.$$

4.13. Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

4.14. Докажите, что $OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4.15. Точка G — центроид треугольника ABC, P — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$3PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

(формула Лейбница).

4.16. Точка M симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно стороны AB. Докажите, что

$$CM^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2.$$

4.17. Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC

$$AH + BH + CH = 2(R + r).$$

Как изменится это равенство для тупоугольного треугольника? Для прямоугольного треугольника?

4.18. Докажите, что если AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, то $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

4.19. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что

$$AH \cdot AA_1 + BH \cdot BB_1 + CH \cdot CC_1 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Какой вид примет тождество для тупоугольного треугольника?

4.20. Угол треугольника равен 60°. Докажите, что центр вписанной в него окружности равноудален от центра описанной окружности и ортоцентра.

4.21. Через центр вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AB. Докажите, что отрезок этой прямой, отсекаемый сторонами треугольника, равен $\frac{(a+b)c}{a+b+c}$.

4.22. Если внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ существует точка M такая, что треугольники MAB, MBC, MCD, MDA равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам. Докажите.

4.23. Даны четыре прямые, из которых никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что если одна из них параллельна медиане треугольника, образованного тремя другими, то этим же свойством обладает каждая из трех оставшихся прямых.

4.24. Докажите, что диаметр описанной около треугольника ABC окружности, проведенный через вершину A, делит сторону BC в отношении $\sin 2C : \sin 2B$, считая от вершины B.

4.25. Докажите, что основание A_1 высоты AA_1 треугольника ABC делит сторону BC в отношении $\operatorname{tg} C : \operatorname{tg} B$, считая от вершины B.

4.26. Докажите, что для произвольной точки P вектор $\overline{PO}$ центра O описанной около треугольника ABC окружности имеет выражение:

$$\overline{PO} = \frac{\overline{PA}\sin 2A + \overline{PB}\sin 2B + \overline{PC}\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

4.27. Докажите, что для произвольной точки P вектор $\overline{PH}$ ортоцентра треугольника ABC имеет выражение:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA}\operatorname{tg} A + \overline{PB}\operatorname{tg} B + \overline{PC}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Докажите следующие соотношения для треугольника ABC (4.28—4.36).

4.28. $CI^2 = ab - 4Rr$.

4.29. $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$.

4.30. $IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2$.

4.31. $GI^2 = (1/9)(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.

4.32. Если AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, то

$$\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = \bar{0}.$$

4.33. Если AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC, то

$$a(b+c)\overline{AA}_1 + b(c+a)\overline{BB}_1 + c(a+b)\overline{CC}_1 = \bar{0}.$$

4.34. Если AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, то

$$a^2\overline{AA}_1 + b^2\overline{BB}_1 + c^2\overline{CC}_1 = \bar{0}.$$

4.35. Если O — центр описанной окружности, то

$$\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \bar{0}.$$

4.36. Если H — ортоцентр треугольника ABC, то

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \bar{0}.$$

§ 5. *Вневписанные окружности треугольника*

5.1. Существование вневписанных окружностей обусловлено теоремой: *биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла, не смежного с этими двумя внешними, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (вневписанная окружность).*

Доказательство. В любом треугольнике ABC две биссектрисы внешних углов (внешние биссектрисы) всегда пересекаются. В самом деле, сумма трех внешних углов равна 360°, поэтому сумма двух из них меньше 360° и, значит, сумма половин двух внешних углов меньше 180°. Тогда две внешние биссектрисы пересекаются (в той полуплоскости от стороны треугольника, которая этот треугольник не содержит), так как если бы они оказались параллельными, то сумма внутренних односторонних углов была бы равна 180° (рис. 36). Точка I_1 пересечения внешних биссектрис равноудалена от прямых, содержащих стороны AB и BC. Поэтому через нее проходит биссектриса внутреннего угла A. Окружность с центром I_1 и радиусом r_1, равным расстоянию от точки I_1 до стороны касания треугольника ABC, касается стороны BC в ее внутренней точке X_1 и продолжений сторон AC и AB в точках Y_1 и Z_1. Она называется *вневписанной окружностью* треугольника.

Всего существует три вневписанные окружности треугольника, соответствующие трем его сторонам (рис. 37).

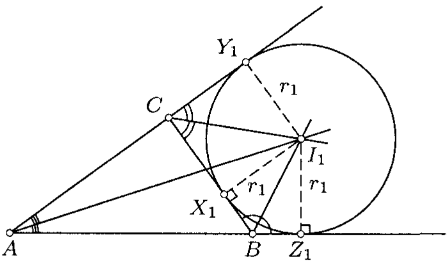


Рис. 36

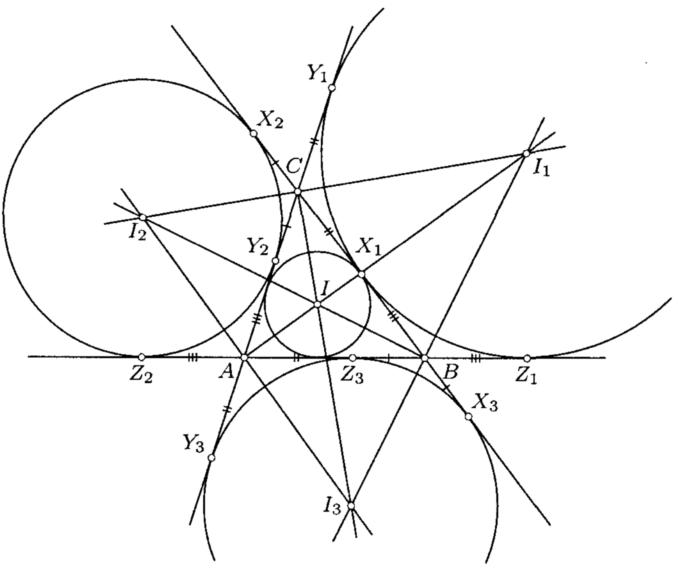


Рис. 37

5.2. Отрезки касательных из вершин треугольника к его вневписанным окружностям. Введем обозначения, указанные на рис. 37. Используя равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем:

$$\begin{aligned} &AY_1 = AZ_1, \quad &&AY_2 = AZ_2, \quad &&AY_3 = AZ_3,\\ &BX_1 = BZ_1, &&BX_2 = BZ_2, &&BX_3 = BZ_3,\\ &CX_1 = CY_1, &&CX_2 = CY_2, &&CX_3 = CY_3. \end{aligned}$$

Тогда находим:

$$\begin{aligned} 2p = AC + CB + BA = (AC + CX_1) + (X_1B + BA) = \\ = (AC + CY_1) + (BZ_1 + BA) = AY_1 + AZ_1 = 2AY_1. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$AY_1 = AZ_1 = BX_2 = BZ_2 = CX_3 = CY_3 = p. \tag{5.1}$$

Далее, $CX_2 = BX_2 - BC = p - a$. Аналогично

$$\begin{aligned} CX_2 = CY_2 = BX_3 = BZ_3 = p - a,\\ CX_1 = CY_1 = AY_3 = AZ_3 = p - b,\\ AZ_2 = AY_2 = BZ_1 = BX_1 = p - c. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3. Зависимость между радиусами вписанной, вневписанных и описанной окружностей треугольника. Сначала докажем такие формулы площади треугольника:

$$S = r_1(p - a) = r_2(p - b) = r_3(p - c), \tag{5.3}$$

где r_1, r_2, r_3 — радиусы вневписанных окружностей с центрами I_1, I_2, I_3 соответственно.

Обращаясь к рис. 36, замечаем, что

$$S_{ABC}=S_{ABI_1}+S_{ACI_1}-S_{BCI_1}=\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1-\frac{1}{2}ar_1=\frac{1}{2}r_1(b+c-a)=r_1(p-a).$$

С равным правом $S = r_2(p - b) = r_3(p - c)$. Теперь с помощью формул (5.3) и формулы $S = pr$ находим:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Итак,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \tag{5.4}$$

Имеет место еще одно замечательное соотношение:

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r. \tag{5.5}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в истинности равенства

$$p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)=abc.$$

Поскольку $abc=4SR$, то

$$p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)=4SR.$$

Используя формулы (5.3) и (3.9), получаем:

$$4SR=\frac{S^2}{p-a}+\frac{S^2}{p-b}+\frac{S^2}{p-c}-\frac{S^2}{p}=S(r_1+r_2+r_3-r),$$

откуда $4R=r_1+r_2+r_3-r$.

Упражнения

Докажите следующие утверждения (5.1—5.5).

5.1. Треугольник ABC является ортотреугольником треугольника $I_1I_2I_3$ (см. п. 4.3).

5.2. Описанная около треугольника ABC окружность делит пополам каждый из трех отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с центрами вневписанных окружностей.

5.3. Две вершины треугольника, центр вписанной окружности и центр вневписанной окружности, соответствующей третьей вершине, лежат на одной окружности.

5.4. В прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, середина катета и точка касания другого катета с вневписанной окружностью лежат на одной прямой. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

5.5. Произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине вневписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

5.6. Докажите, что при произвольном выборе точки P

$$\overline{PI}_1=\frac{b\overline{PB}+c\overline{PC}-a\overline{PA}}{b+c-a}.$$

Докажите следующие соотношения (5.7—5.19).

5.7. $OI_i^2=R^2+2Rr_i$, где $i=1,\ 2,\ 3$ (формула Эйлера для вневписанных окружностей).

5.8. $r_1r_2=p(p-c)$.

5.9. $rr_1=(p-b)(p-c)$.

5.10. $r_1r_2r_3=pS$.

5.11. $rr_1r_2r_3=S^2$.

5.12. $I_1I_2=4R\cos\frac{C}{2}$.

5.13. $AI\cdot AI_1=AI_2\cdot AI_3$.

5.14. $AI \cdot II_1 = 4Rr$.

5.15. $r_1 + r_2 = 4R\cos^2 C$.

5.16. $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$.

5.17. $II_1 \cdot II_2 \cdot II_3 = 4rR^2$.

5.18. $II_1^2 + I_2I_3^2 = II_2^2 + I_3I_1^2 = II_3^2 + I_1I_2^2$.

5.19. $II_1 : II_2 : II_3 = \sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$.

5.20. Через две вершины треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведенной к этой окружности из третьей вершины, есть средняя геометрическая величина между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

§6. *Окружность девяти точек треугольника*

6.1. Существование окружности девяти точек. Имеет место

Теорема. *В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности с центром в середине E отрезка OH и радиусом $\frac{1}{2}R$.*

Доказательство 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 — основания соответствующих высот и A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH соответственно (рис. 38). Тогда четырехугольники $B_1C_1B_2C_2$ и $C_1A_1C_2A_2$ являются прямоугольниками. В самом деле, отрезки B_1C_1 и B_2C_2 как средние линии треугольников ABC и HBC параллельны BC и равны ее половине. Поэтому четырехугольник $B_1C_1B_2C_2$ — параллелограмм. Кроме того, в нем $B_1C_2 \parallel AH$, но $AH \perp BC$, поэтому $B_1C_2 \perp B_2C_2$. Для четырехугольника $C_1A_1C_2A_2$ доказательство аналогично. Эти прямоугольники имеют общую диагональ C_1C_2. Значит, их диагонали равны и пересекаются в одной точке E. Поэтому точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности с центром E. Так как из точек H_1, H_2, H_3 диаметры этой окружности видны под прямыми углами, то эти точки ей принадлежат. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, вследствие чего радиус описанной около него окружности вдвое меньше радиуса R окружности ABC. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки E. Следовательно, их ортоцентры O и H симметричны относительно E (O — центр окружности ABC).

Доказательство 2. Примем во внимание, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника относительно его сторон и середин сторон, принадлежат описанной около треугольника окружности (задача 4.2). Зададим гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии прообразами девяти точек, рассматриваемых в теореме, являются точки описанной окружности (рис. 39). Гомотетия отображает описанную около треугольника ABC окружность $(O; R)$ на окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$, которой принадлежат все девять указанных в теореме точек. Поскольку $O \to E$, то E — середина OH.

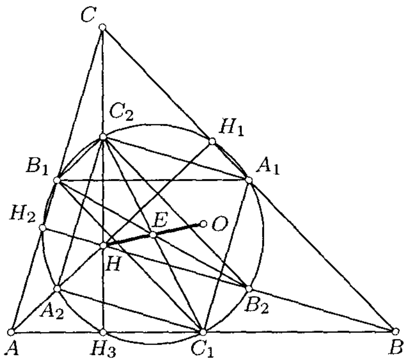


Рис. 38

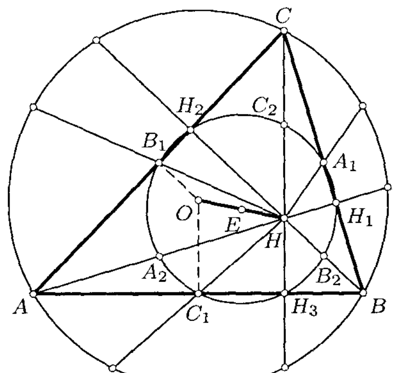


Рис. 39

Окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$ называют *окружностью девяти точек* треугольника. «Эта окружность — первое волнующее, с чем мы встречаемся в курсе элементарной геометрии», — говорил Даниэль Пидо.

Итак, окружность девяти точек треугольника гомотетична его описанной окружности относительно ортоцентра этого треугольника. Окружность девяти точек треугольника ABC описана около его серединного треугольника $A_1B_1C_1$ и около его ортотреугольника $H_1H_2H_3$.

6.2. Теорема Фейербаха. В 1804 г. окружность девяти точек была уже известна. Иногда ее приписывают Л. Эйлеру, который в 1765 г. доказал, что серединный треугольник и ортотреугольник данного треугольника имеют общую описанную окружность. Карл Фейербах (1800—1834), немецкий математик, брат известного философа Людвига Фейербаха, частично переоткрыл результат Эйлера и в 1822 году доказал еще одно удивительное свойство окружности девяти точек.

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек треугольника касается внутренне его вписанной окружности и касается внешне каждой из трех вневписанных окружностей.*

Докажем сначала внутреннее касание окружности $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$ и вписанной окружности $(I; r)$. Очевидно, задача сводится к доказательству равенства

$$EI = \frac{1}{2}R - r. \tag{6.1}$$

Используем разложения (4.7) и (4.4) векторов $\overline{OH}$ и $\overline{OI}$:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}, \qquad \overline{OI} = \frac{1}{2p}(a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}).$$

Учитывая, что $\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OH}$, находим:

$$\overline{EI} = \overline{OI} - \overline{OE} = \frac{1}{2p}((a-p)\overline{OA} + (b-p)\overline{OB} + (c-p)\overline{OC}).$$

Поскольку $2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2R^2 - c^2$, $2\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - b^2$, то

$$EI^2 = \frac{1}{4p^2}((p-a)^2R^2 + (p-b)^2R^2 + (p-c)^2R^2 +$$
$$+(p-a)(p-b)(2R^2-c^2) + (p-a)(p-c)(2R^2-b^2) + (p-b)(p-c)(2R^2-a^2)).$$

Сумма слагаемых, содержащих R^2, равна p^2R^2. Поэтому

$$EI^2 = \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{4p^2}(c^2(p-a)(p-b) + b^2(p-a)(p-c) + a^2(p-b)(p-c)).$$

Докажем, что

$$a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-a)(p-c) + c^2(p-a)(p-b) = 4p^2r(R-r). \tag{6.2}$$

Для этого заметим сначала, что

$$(p-a)(p-b) = \frac{S^2}{p(p-c)} = \frac{pr}{p} \cdot \frac{r_3(p-c)}{p-c} = rr_3$$

и аналогично

$$(p-c)(p-a) = rr_2, \qquad (p-b)(p-c) = rr_1. \tag{6.3}$$

После выполнения этих замен и подстановки $4R = r_1 + r_2 + r_3 - r$ доказываемое равенство (6.2) принимает вид:

$$a^2r_1 + b^2r_2 + c^2r_3 = p^2(r_1 + r_2 + r_3 - 5r). \tag{6.4}$$

Так как $ar_1 = pr_1 - S$, то

$$a^2r_1 + b^2r_2 + c^2r_3 = a(pr_1 - S) + b(pr_2 - S) + c(pr_3 - S) =$$
$$= p(ar_1 + br_2 + cr_3) - (a + b + c)S = p(ar_1 + br_2 + cr_3 - 2S).$$

Этому же выражению равна и правая часть доказываемого равенства (6.4):

$$p(pr_1 + pr_2 + pr_3 - 5pr) =$$
$$= p(ar_1 + S + br_2 + S + cr_3 + S - 5S) = p(ar_1 + br_2 + cr_3 - 2S).$$

Итак, соотношение (6.2) доказано. В силу его

$$EI^2 = \frac{R^2}{4} - r(R - r) = \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2.$$

Таким образом, верно (6.1) и тем самым доказана первая часть теоремы Фейербаха. Доказательство внешнего касания окружности девяти точек с вневписанными окружностями выполняется вполне аналогично. С использованием представления вектора $\overline{OI}_1 = \frac{1}{2(p-a)}(b\overline{OB} + c\overline{OC} - a\overline{OA})$ проверяется условие внешнего касания $EI_1 = \frac{1}{2}R + r_1$. Трудолюбивый читатель сделает это сам.

Другие доказательства теоремы Фейербаха имеются в книгах [10], [13], [33], а также в «Задачнике по геометрии» Б. Делоне и О. Житомирского.

Упражнения

6.1. Докажите, что описанная около треугольника ABC окружность является окружностью девяти точек треугольника $I_1I_2I_3$ с вершинами в центрах вневписанных окружностей треугольника ABC.

6.2. Докажите, что расстояние от центра описанной около треугольника окружности до его стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины.

6.3. Докажите, что расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника есть среднее геометрическое между диаметром описанной окружности и расстоянием между центрами вписанной окружности и окружности девяти точек.

6.4. Докажите, что расстояние между центрами описанной и вневписанной окружностей треугольника есть среднее геометрическое между диаметром описанной окружности и расстоянием между центрами этой вневписанной окружности и окружности девяти точек.

§ 7. *Вписанные и описанные четырехугольники*

Если все вершины четырехугольника принадлежат окружности, то он называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около него. Если окружность касается каждой стороны четырехугольника во внутренней точке этой стороны, то он называется *описанным* около этой окружности, а окружность — *вписанной* в него.

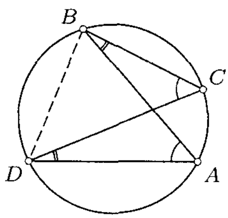


Рис. 40

Следуя традиции, мы исключаем из рассмотрения четырехугольники с самопересечением сторон, пример которого представлен на рис. 40, где в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны AB и CD пересекаются в своих внутренних точках. Четырехугольники без самопересечения сторон называются *простыми* четырехугольниками.

Вписанные и описанные простые четырехугольники являются необходимо *выпуклыми*.

7.1. Критерии вписанного четырехугольника. Так как центр описанной около четырехугольника окружности равноудален от его вершин, то он принадлежит серединным перпендикулярам к его сторонам и диагоналям. Обратно, если серединные перпендикуляры к трем сторонам четырехугольника пересекаются в одной точке, то эта точка будет равноудалена от всех его вершин и поэтому будет центром описанной около него окружности (рис. 41).

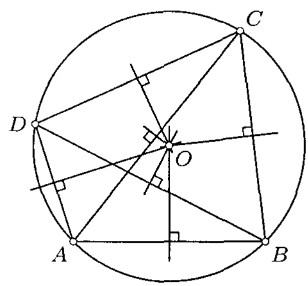


Рис. 41

Итак, *для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы серединные перпендикуляры к трем его сторонам пересекались в одной точке.*

Другой критерий вписанного четырехугольника связан с его углами.

Теорема. *Для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна* $180°$ (*т. е. суммы его противоположных углов были равны*).

Необходимость этого условия очевидна: сумма углов A и C вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 41) измеряется полусуммой дуг BCD и BAD, составляющих полную окружность, и потому равна $180°$.

Достаточность. Пусть $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Тогда эти углы не могут быть оба острыми или оба тупыми. Для определенности будем считать, что $\angle A \geqslant 90^\circ$. Опишем около треугольника ABD окружность и докажем, что точка C ей принадлежит. Для этого необходимо опровергнуть два возможных предположения: 1) точка C находится вне окружности, 2) она лежит внутри окружности. При первом предположении и условии $\angle A \geqslant 90^\circ$ стороны BC и DC пересекают окружность вторично в своих внутренних точках E и F (рис. 42). Тогда для вписанного четырехугольника $ABED$ по необходимому условию будет $\angle A + \angle BED = 180^\circ$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BED > \angle C$ и потому $\angle A + \angle C < 180^\circ$, что противоречит условию. Второе предположение аналогично приводит к противоречию $\angle A + \angle C > 180^\circ$. Доказательство закончено.

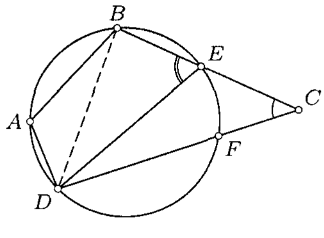


Рис. 42

Если принять во внимание случай, представленный на рис. 40, где точки A и C лежат в одной полуплоскости от прямой BD, то имеем более общий критерий принадлежности четырех точек A, B, C, D одной окружности:

Для того, чтобы точки A, B, C, D лежали на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы углы BAD и BCD (или же углы ABC и ADC) в сумме составляли 180° или же эти углы были равны.

7.2. Критерии описанного четырехугольника. Так как центр окружности, вписанной в четырехугольник, равноудален от его сторон, то он принадлежит биссектрисе каждого из его углов. Следовательно, биссектрисы углов описанного четырехугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной в него окружности. Обратно, если биссектрисы трех углов четырехугольника пересекаются в одной точке, то эта точка будет равноудалена от всех его сторон, т. е. будет центром вписанной в этот четырехугольник окружности (рис. 43).

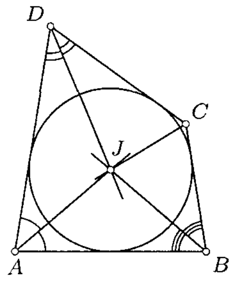


Рис. 43

Итак, *для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы биссектрисы трех его углов пересекались в одной точке.*

Другой критерий описанного четырехугольника связан с его сторонами.

Теорема. *Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.*

Необходимость этого условия следует из равенства отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки: $AB + CD = (x + y) + (z + t) = (y + z) + (x + t) = BC + AD$ (рис. 44).

Обратно, пусть четырехугольник $ABCD$ выпуклый и $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность. Действительно, биссектрисы углов ABC и BAD всегда пересекаются, так как сумма этих углов меньше $360°$, значит, сумма их половин меньше $180°$. Точка I пересечения биссектрис этих углов есть центр окружности, касающейся сторон AB, BC и AD четырехугольника (рис. 45). Покажем, что четвертая сторона CD также касается этой окружности. Возможны два предположения: 1) CD не пересекает окружность, 2) CD пересекает окружность. При первом предположении построим какую-нибудь касательную C_1D_1 к окружности, не пересекающую отрезок CD. Тогда по необходимому условию для описанного четырехугольника ABC_1D_1 имеем: $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. Но так как $BC_1 = BC - CC_1$, $AD_1 = AD - DD_1$, то $AB + C_1D_1 = BC - CC_1 + AD - DD_1$, откуда $C_1D_1 + CC_1 + DD_1 = BC + AD - AB$.

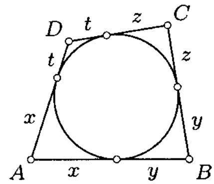


Рис. 44

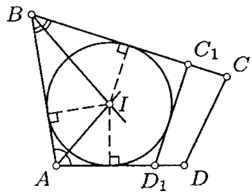


Рис. 45

Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует $BC + AD - AB = CD$. Следовательно, $C_1D_1 + CC_1 + DD_1 = CD$. Оказалось, что в четырехугольнике CC_1D_1D одна сторона равна сумме трех других, что невозможно. Аналогично опровергается второе предположение. Теорема доказана.

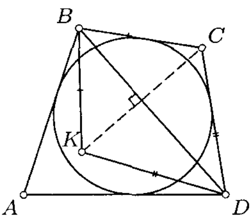


Рис. 46

Отметим, что условие выпуклости четырехугольника существенно, поскольку существуют невыпуклые четырехугольники, у которых суммы противоположных сторон равны. Однако в невыпуклый четырехугольник нельзя вписать окружность (не выполнено необходимое условие). Пример невыпуклого четырехугольника, имеющего равные суммы противоположных сторон, можно получить, если для описанного четырехугольника $ABCD$ построить точку K, симметричную C относительно BD (рис. 46). Тогда $AB + CD = BC + AD$ и $BC = BK$, $CD = DK$.

Поэтому $AB + KD = BK + AD$ и четырехугольник $ABKD$ невыпуклый.

7.3. Невыпуклый четырехугольник, ассоциированный с описанным четырехугольником. Можно получить другие практически полезные критерии описанного четырехугольника через сопутствующий ему невыпуклый четырехугольник.

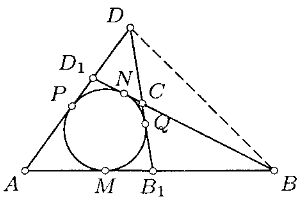


Рис. 47

Теорема. *Пусть BD — внешняя диагональ невыпуклого четырехугольника $ABCD$ и его противоположные стороны пересекаются в точках B_1 и D_1* (рис. 47). *Для того, чтобы в четырехугольник AB_1CD_1 можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:*

1) *суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны,*

2) $BB_1 + DB_1 = DD_1 + BD_1$.

Докажем сначала необходимость этих условий. Пусть в четырехугольник AB_1CD_1 вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, M, Q, N (рис. 47). Тогда получаем: $AB + CD = AM + MB + DQ - CQ$ и $AD + BC = AP + PD + BN - CN$. Так как $AM = AP$, $BM = BN$, $DP = DQ$ и $CQ = CN$, то $AB + CD = AD + BC$. Далее аналогично находим: $BB_1 + DB_1 = BM - MB_1 + B_1Q + QD = BM + QD$ и $DD_1 + BD_1 = DP - D_1P + D_1N + NB = DP + NB$. Поскольку $BM = BN$ и $DP = DQ$, то $BB_1 + DB_1 = DD_1 + BD_1$.

Докажем теперь достаточность каждого из двух условий теоремы.

1) Пусть $AB + CD = BC + AD$ и $AB > AD$. Тогда $BC > CD$ и $AB - AD = BC - CD$. На луче CB отложим $CF = CD$ и на луче AB отложим $AE = AD$ (рис. 48). Тогда $BE = BF$ (так как $AB - AD = BC - CD$). Треугольники ADE, BEF, CDF равнобедренные, поэтому биссектрисы их углов при вершинах A, B, C соответственно совпадают с серединными перпендикулярами к основаниям DE, EF, FD. Точка I пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника DEF равноудалена от всех сторон четырехугольника AB_1CD_1 и, значит, является центром вписанной в него окружности. При $AB = AD$ будет $B_1C = CD_1$, $AB_1 = AD_1$ и поэтому $AB_1 + CD_1 = AD_1 + B_1C$. Это значит, что в четырехугольник AB_1CD_1 можно вписать окружность.

2) Пусть выполнено условие: $BB_1 + DB_1 = DD_1 + BD_1$, что равносильно $DB_1 - DD_1 = BD_1 - BB_1$ (без ограничения общности рассуждений можно полагать, что эти разности положительны). Отложим

$DE = DD_1$ и $BF = BD_1$ (рис. 49). Тогда $EB_1 = FB_1$, треугольники B_1EF, DD_1E, BD_1F являются равнобедренными. Биссектрисы их углов при вершинах B_1, D, B являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ED_1F. Точка I пересечения этих перпендикуляров равноудалена от сторон четырехугольника AB_1CD_1 и потому служит центром вписанной в него окружности.

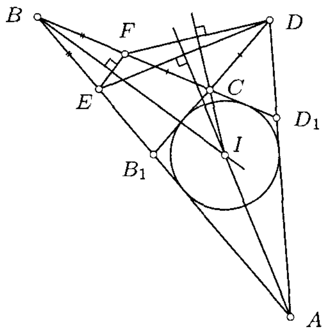


Рис. 48

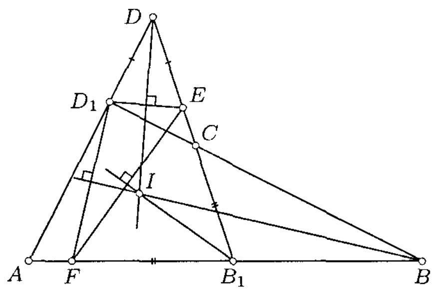


Рис. 49

Задача 1. Через точки A и B пересечения двух окружностей проведены произвольные секущие MAN и PBQ (точки M и P лежат на одной окружности, а N и Q — на другой). Доказать, что прямые MP и NQ параллельны (рис. 50).

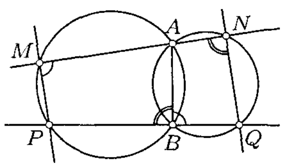


Рис. 50

Решение. Углы M и ABQ равны, так как каждый из них дополняет угол ABP до $180°$. Аналогично $\angle N = \angle ABP$. Но так как $\angle ABP + \angle ABQ = 180°$, то $\angle M + \angle N = 180°$, вследствие чего $MP \parallel NQ$.

Задача 2. Даны четыре прямые, никакие три из которых не проходят через одну точку. Доказать, что окружности, описанные около четырех треугольников, образованных этими прямыми, имеют общую точку.

Решение. Шесть точек попарного пересечения данных четырех прямых обозначены на рис. 51. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей BDF и CDE. Тогда $\angle BAC + \angle BPC = \angle BAC + \angle BPD + \angle DPC$. Сумма этих трех углов равна сумме углов треугольника AEF, т. е. равна $180°$, так как $\angle BPD = \angle BFD$ и $\angle DPC = \angle AEF$ (каждый из них в сумме с углом DEC составляет $180°$). Равенство $\angle BAC + \angle BPC = 180°$ означает, что точка P лежит на окружности

ABC. Аналогично доказывается, что через точку P проходит окружность AEF.

Задача 3. Доказать, что в описанном четырехугольнике середины диагоналей лежат на одной прямой с центром его вписанной окружности (теорема Ньютона).

Решение. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O, точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Тогда MN — медиана треугольника MBD (рис. 52). Согласно лемме п. 4.1 для

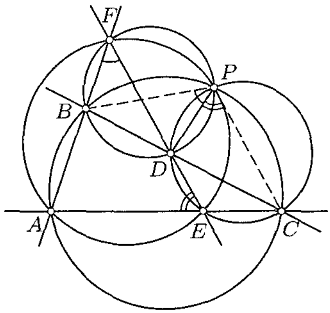


Рис. 51

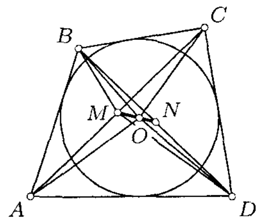


Рис. 52

того, чтобы точка O принадлежала прямой MN, необходимо и достаточно, чтобы треугольники OBM и ODM были равновелики. Докажем это. Имеем:

$$S_{ABO} + S_{CDO} = \frac{1}{2}(AB + CD)r, \qquad S_{BCO} + S_{ADO} = \frac{1}{2}(BC + AD)r,$$

где r — радиус окружности. По необходимому условию описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD$. Следовательно,

$$S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{ADO} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \tag{7.1}$$

Так как $S_{ABM} = S_{BCM}$ и $S_{ADM} = S_{CDM}$, то

$$S_{ABM} + S_{CDM} = S_{BCM} + S_{ADM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \tag{7.2}$$

Вычтем из равенства (7.1) равенство (7.2):

$$S_{ABO} - S_{ABM} = S_{BCM} - S_{CDO},$$

что эквивалентно $S_{MAO} + S_{MBO} = S_{MCO} + S_{MDO}$. Но поскольку $S_{MAO} = S_{MCO}$, то из последнего равенства следует $S_{MBO} = S_{MDO}$, чем и заканчивается доказательство.

Упражнения

7.1. Решите задачу 4.2, пользуясь критерием вписанного четырехугольника.

7.2. В четырехугольнике $ABCD$ сумма углов BAC и ACD равна сумме углов BCA и CAD и равна $90°$. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

7.3. Около окружности описана равнобочная трапеция. Докажите, что ее высота есть среднее геометрическое оснований.

7.4. Докажите, что в описанном четырехугольнике равны суммы углов, под которыми видны из центра вписанной окружности противоположные стороны.

7.5. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются.

7.6. Каждая из четырех окружностей внешне касается двух других. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности.

7.7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E. Докажите, что точки пересечения прямой DE с биссектрисами углов B и C лежат на одной окружности с точками B и C.

7.8. Биссектрисы углов, образованных противоположными сторонами выпуклого четырехугольника, перпендикулярны. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

7.9. В треугольник ABC вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Найдите длину отрезка, отсекаемого на этой касательной сторонами треугольника, если известны длины a, b, c сторон данного треугольника.

7.10. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

7.11. Докажите, что площадь равнобочной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению среднего арифметического и среднего геометрического ее оснований.

7.12. Докажите, что квадраты расстояний центра окружности, вписанной в четырехугольник, до двух его противоположных вершин относятся как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.

7.13. Внутри треугольника ABC взята точка M. Прямые MA, MB, MC пересекают стороны BC, CA, AB треугольника соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что если два из четырехугольников AB_1MC_1, BC_1MA_1, CA_1MB_1 являются описанными, то и третий также является описанным.

7.14. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от трапеции и параллелограмма. Через вершины A и C проведены прямые, параллельные соответственно CD и AB и пересекающие прямые BC и AD соответственно в точках B_1 и D_1. Если четырехугольник $ABCD$ является описанным, то и четырехугольник AB_1CD_1 описанный. Если же четырехугольник $ABCD$ является вписанным, то вписанным будет и четырехугольник AB_1CD_1. Докажите.

7.15. В окружность вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей на стороны, являются вершинами второго четырехугольника. Докажите, что в него можно вписать окружность и около него можно описать окружность.

7.16. Из основания каждой высоты треугольника опущены перпендикуляры на две другие его стороны. Докажите, что основания всех шести перпендикуляров лежат на одной окружности.

7.17. Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что ортогональные проекции точки их пересечения на стороны лежат на одной окружности. Докажите обратное утверждение.

7.18. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что в четырехугольник, вершинами которого служат ортогональные проекции точки пересечения диагоналей на стороны, можно вписать окружность.

7.19. Четырехугольник вписан в одну окружность и описан около другой. Докажите, что точки касания вписанной окружности делят противоположные стороны четырехугольника в равных отношениях.

7.20. Четырехугольник вписан в окружность и описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, перпендикулярны.

7.21. Для того, чтобы в трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнения одного из двух равенств:

$$TB + BP = DP,$$
$$TC + AP = AD + CP,$$

где P — точка пересечения боковых сторон, T — проекция D на BC.

7.22. Трапеция $ABCD$ является описанной тогда и только тогда, когда ее основания BC и AD имеют отношение $\operatorname{tg}\frac{A}{2} : \operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

7.23. В трапецию вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если известны длина a одного основания и длины m и n отрезков, на которые делится точкой касания одна из боковых сторон (отрезок m примыкает к данному основанию).

7.24. Постройте четырехугольник по четырем его сторонам, если около него можно описать окружность.

§ 8. *Теорема Симсона и теорема Птолемея*

В дополнение к основным критериям вписанного четырехугольника (§ 7) докажем еще два других — теорему Симсона и теорему Птолемея.

8.1. Теорема Симсона[1]. *Для того, чтобы четыре точки принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы ортогональные проекции одной из них на три прямые, определяемые тремя остальными точками, были коллинеарны.*

Прямая, на которой лежат эти проекции, называется *прямой Симсона* точки окружности, описанной около треугольника.

Докажем необходимость указанного в теореме условия существования описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности.

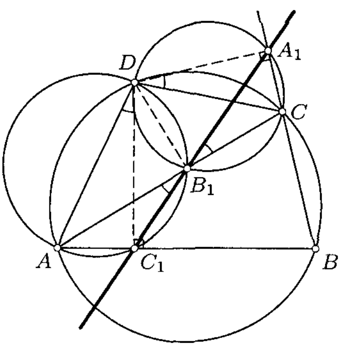


Рис. 53

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции вершины D на прямые BC, CA, AB соответственно (рис. 53). Из точек A_1 и B_1 сторона CD видна под прямыми углами, поэтому четырехугольник A_1CB_1D вписан в окружность с диаметром CD. Точно так же четырехугольник AC_1B_1D вписан в окружность с диаметром AD. Отсюда следуют равенства вписанных в эти окружности углов: $\angle CDA_1 = \angle A_1B_1C$ и $\angle ADC_1 = \angle AB_1C_1$. Кроме того, $\angle DAC_1 = \angle DCA_1$, так как каждый из этих углов в сумме с углом BCD составляет $180°$. Это последнее равенство влечет за собой равенство углов ADC_1 и CDA_1 (в прямоугольных треугольниках ADC_1 и CDA_1). В результате имеем равенство углов A_1B_1C и AB_1C_1, которое означает коллинеарность точек A_1, B_1, C_1, ибо точки A, B_1, C коллинеарны.

[1]Роберт Симсон (1687—1768) — шотландский математик, пропагандист геометрии древних ученых. Историки не нашли данной теоремы в его работах. В действительности она была получена в 1797 году Вильямом Уоллесом.

Достаточность. Пусть точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Построим окружности с диаметрами AD и CD. Первая из них содержит точки B_1 и C_1, вторая — точки A_1 и B_1. Из равенства вертикальных углов AB_1C_1 и A_1B_1C следует равенство углов ADC_1 и CDA_1 и затем равенство углов DAC_1 и DCA_1. Поэтому $\angle DAB + \angle DCB = 180°$ и, значит, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Теорему Симсона можно сформулировать еще так: *ортогональные проекции точки на прямые, содержащие стороны треугольника, коллинеарны тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной около этого треугольника окружности.*

8.2. Теорема Птолемея[1]. *Для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений его противоположных сторон равнялась произведению диагоналей.*

Эта теорема может быть получена как следствие предыдущей теоремы Симсона. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пользуясь теми же обозначениями и окружностью с диаметром CD, по теореме синусов получим: $A_1B_1 = CD\sin\angle A_1CB_1 = CD\sin\angle BCA$ (рис. 53). По теореме синусов из треугольника ABC имеем: $AB = 2R\sin\angle BCA$ (R — радиус окружности ABC). Поэтому

$$A_1B_1 = \frac{AB\cdot CD}{2R}.$$

Аналогично

$$B_1C_1 = \frac{BC\cdot AD}{2R} \quad \text{и} \quad C_1A_1 = \frac{CA\cdot BD}{2R}. \tag{8.1}$$

Так как точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны и

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1, \tag{8.2}$$

то

$$\frac{AB\cdot CD}{2R} + \frac{BC\cdot AD}{2R} = \frac{CA\cdot BD}{2R}$$

или

$$AB\cdot CD + BC\cdot AD = CA\cdot BD. \tag{8.3}$$

Здесь существенно использован тот факт, что точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Это всегда имеет место при расположении точек A, B, C, D на окружности в данной последовательности.

Обратно, если соотношение (8.3) выполнено, то точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. В самом деле, для

[1]Клавдий Птолемей (II в. н. э.) — древнегреческий ученый-астроном, комментатор Евклида, доказывал его Пятый постулат.

любой точки D плоскости и ее ортогональных проекций A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB имеем равенства (8.1), в силу которых (8.3) принимает вид:

$$A_1B_1 \cdot 2R + B_1C_1 \cdot 2R = C_1A_1 \cdot 2R,$$

откуда $A_1B_1 + B_1C_1 = C_1A_1$. Это означает, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. По достаточному условию теоремы Симсона точка D лежит на окружности ABC.

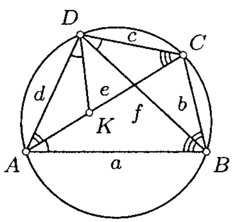


Рис. 54

Второе доказательство соотношения Птолемея. Построим на диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ точку K так, что $\angle ADK = \angle BDC$ (рис. 54). Тогда треугольники ADK и BDC подобны, откуда $AD : BD = AK : BC$. Из подобия треугольников DKC и ABD ($\angle DKC = \angle DAB$ и $\angle DCK = \angle DBA$) имеем: $DC : BD = KC : AB$. Эти пропорции дают равенства $AD \cdot BC = BD \cdot AK$ и $AB \cdot DC = BD \cdot KC$, при сложении которых получим:

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = BD(AK + KC) = BD \cdot AC.$$

Третье доказательство соотношения Птолемея, без использования дополнительных построений, основано на теореме косинусов. Для сокращения записи положим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Из треугольников ABC и ACD по теореме косинусов имеем:

$$\cos\angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} \quad \text{и} \quad \cos\angle ADC = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd}.$$

Поскольку $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\cos\angle ABC + \cos\angle ADC = 0$ и поэтому $\dfrac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} + \dfrac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = 0$, откуда

$$e^2 = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Аналогично

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}. \tag{8.4}$$

Значит,

$$(ef)^2 = (ac + bd)^2, \quad ef = ac + bd.$$

Попутно получены полезные выражения (8.4) квадратов диагоналей вписанного четырехугольника, из которых следует равенство

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \tag{8.5}$$

т. е. диагонали вписанного четырехугольника относятся как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей.

Задача 1. Доказать, что точки, симметричные точке, принадлежащей описанной около треугольника окружности, относительно сторон этого треугольника, лежат на прямой, проходящей через ортоцентр этого треугольника.

Решение. Пусть D — точка на описанной около треугольника ABC окружности и $A_1B_1C_1$ — прямая Симсона этой точки (рис. 55). Гомотетия с центром D и коэффициентом $k=2$ переводит точки A_1, B_1, C_1 соответственно в точки A_2, B_2, C_2, симметричные точке D относительно BC, CA, AB. Следовательно, точки A_2, B_2 и C_2 коллинеарны. Докажем, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на этой прямой. Для этого выполним такие построения: P — вторая точка пересечения прямой CH с окружностью, $(DP)\cap(AB)=E$, $(HE)\cap(DC_1)=K$. Точки H и P симметричны относительно AB (задача 4.2). Тогда прямые DP и KH, а также точки D и K симметричны относительно AB. Значит, точки K и C_2 совпадают. Предстоит доказать, что прямые HC_2 и $A_2B_2C_2$ совпадают. Прямые B_2C_2 и B_1C_1 параллельны, поскольку гомотетичны. Покажем, что $HC_2 \parallel B_1C_1$. В силу подобия треугольников EHP и EDC_2 углы DPH и DC_2H равны. С другой стороны, $\angle DPH = \angle DAC = \angle DC_1B_1$ (точки A, C_1, B_1 и D лежат на одной окружности). Поэтому $\angle DC_2H = \angle DC_1B_1$. Следовательно, $HC_2 \parallel B_1C_1$ и $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, откуда следует, что $H \in (B_2C_2)$.

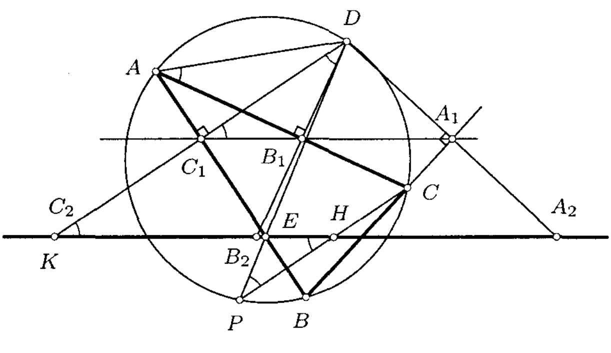


Рис. 55

Задача 2. Доказать, что четыре ортоцентра четырех треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку, принадлежат одной прямой.

Решение. На основании задачи 2 § 7 четыре окружности, описанные около треугольников ABC, AEF, DCE, BDF, имеют общую точку P (рис. 51). Каждые два из этих треугольников имеют по две общих прямых из четырех заданных, вследствие чего четыре прямые Симсона точки P относительно этих треугольников совпадают. Согласно предыдущей задаче, ортоцентры этих треугольников лежат на общей прямой Симсона точки P (рис. 56). Она называется *прямой Обера* четырехсторонника.

Задача 3. Дана полуокружность с диаметром AB. Построить вписанную в нее трапецию $ABCD$, в которую можно вписать окружность.

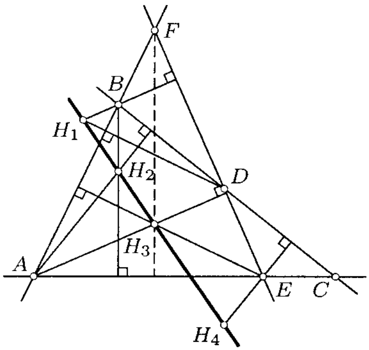


Рис. 56

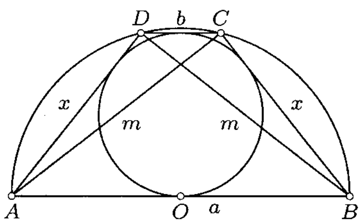


Рис. 57

Решение. Так как искомая трапеция вписана в окружность, то она равнобочная. Она легко строится, если будет найдена боковая сторона $AD = BC = x$. Обозначим $AB = a$, $CD = b$, $AC = BD = m$. Согласно требованиям задачи имеем: $a + b = 2x$ (условие описанного четырехугольника), $x^2 + ab = m^2$ (теорема Птолемея — условие вписанного четырехугольника), $x^2 + m^2 = a^2$ (основание трапеции служит диаметром данной окружности). Подставляя $b = 2x - a$ и $m^2 = a^2 - x^2$ в равенство $x^2 + ab = m^2$, получаем уравнение $x^2 + ax - a^2 = 0$ относительно искомой боковой стороны x. Обращаясь к п. 2.7, вспоминаем, что x есть отрезок золотого сечения данного диаметра $AB = a$. Построение его уже известно (рис. 18). Окружность (A, x) пересекает данную полуокружность в искомой точке D (рис. 57). Трапеция всегда существует и единственна.

Упражнения

8.1. Докажите соотношение Птолемея для вписанного четырехугольника, пользуясь теоремой синусов.

8.2. Если точка M лежит на окружности, описанной около правильного треугольника ABC, то один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других (теорема Помпею). Докажите.

8.3. Если точка P лежит на дуге CD окружности, описанной около квадрата $ABCD$, то $PA(PA+PC)=PB(PB+PD)$. Докажите.

8.4. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная окружность, пересекающая вторично прямые AB, AC, AD соответственно в точках B_1, C_1, D_1. Докажите, что

$$AC \cdot AC_1 = AB \cdot AB_1 + AD \cdot AD_1.$$

8.5. Точки A, B, C, D — последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

8.6. Произведение больших диагоналей вписанного шестиугольника равно сумме произведений его сторон, взятых через одну, и произведений его противоположных сторон на не пересекающую их большую диагональ. Докажите.

8.7. Произвольная окружность, проходящая через вершину данного угла, отсекает на его сторонах и биссектрисе соответственно отрезки a, b, c. Докажите, что отношение $\dfrac{a+b}{c}$ не зависит от положения окружности.

8.8. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если диагональ BD является биссектрисой одного из углов четырехугольника, то $BD^2 = AB \cdot BC + AD \cdot DC$. Докажите обратную теорему.

8.9. Теорема Сальмона. Если через точку окружности проведены три произвольные хорды, на которых как на диаметрах построены окружности, то эти три окружности попарно пересекаются вторично в трех коллинеарных точках. Докажите.

8.10. Прямая Симсона точки P окружности, описанной около правильного треугольника, делит пополам радиус OP. Докажите.

8.11. Прямая Симсона точки P описанной около треугольника ABC окружности параллельна прямой AQ, где Q — точка пересечения окружности с перпендикуляром, проведенным через точку P к стороне BC. Докажите.

8.12. Величина угла между прямыми Симсона двух точек M и N, лежащих на описанной около треугольника окружности, равна угловой мере дуги MN. Докажите.

5 – 5545

§ 9. *Теорема Чевы*

Теорема Чевы[1] является критерием пересечения трех прямых в одной точке и потому находит широкое применение в задачах на доказательство и вычисление.

9.1. Теорема Чевы. *Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны точки C_1, A_1, B_1. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1. \tag{9.1}$$

Необходимость. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке P. Проведем через вершину A треугольника ABC прямую, параллельную прямой BC (рис. 58 и 59). Из подобия треугольников AB_1N и BB_1C следует, что $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{BC}}$. Из подобия треугольников AC_1M и BCC_1 следует, что $\dfrac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MA}}$. По теореме о пропорциональных отрезках на параллельных прямых (§ 2) $\dfrac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{AN}}$.

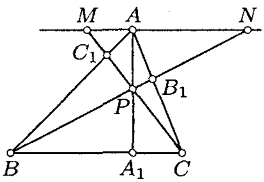


Рис. 58

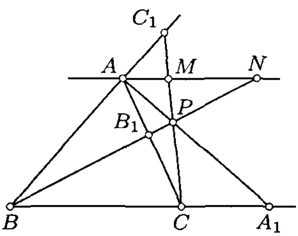


Рис. 59

Перемножим почленно три полученные пропорции. Учитывая, что отношение сонаправленных векторов равно отношению их длин, а отношение противоположно направленных векторов равно числу, противоположному отношению их длин (неколлинеарные векторы делить нельзя!), получаем доказываемое соотношение (9.1).

Прямые AA_1, BB_1, CC_1 называются *чевианами* точки P.

[1]Чева Джованни (1648—1734) — итальянский инженер-гидравлик и геометр. Создал учение о секущих и положил начало новой синтетической геометрии. Данная теорема опубликована в 1678 году.

Пусть теперь прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны (рис. 60). Тогда по теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла (§ 2)

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}}.$$

Поэтому равенство (9.1) также выполняется.

Достаточность. Имеем соотношение (9.1). Предстоит доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны. Для двух прямых AA_1 и BB_1 возможны лишь два случая: а) они пересекаются в некоторой точке P, б) они параллельны. Рассматривая первый случай, докажем, что прямая CC_1 проходит через точку P. Пусть это не так (рис. 61). Проведем прямую CP, которая пересечет AB в точке C_2. Тогда по необходимому условию теоремы Чевы

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}} = 1. \tag{9.2}$$

Из (9.2) и (9.1) следует $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}}$. Это означает, что точки C_1 и C_2 совпадают. Следовательно, точка P лежит на прямой CC_1.

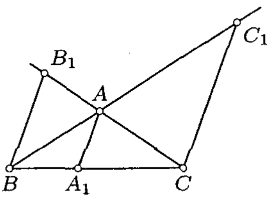


Рис. 60

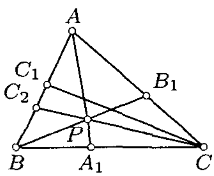


Рис. 61

Если прямые AA_1 и BB_1 параллельны, то прямая CC_1 должна быть им параллельна, так как если бы CC_1 пересекала BB_1, то по доказанному выше через точку их пересечения проходила бы прямая AA_1, что противоречит предположению $AA_1 \parallel BB_1$. Доказательство закончено.

9.2. Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чевы. Если ввести в рассмотрение ориентированные углы $\alpha_1 = \angle BAA_1$, $\alpha_2 = \angle A_1AC$, $\gamma_1 = \angle ACC_1$, $\gamma_2 = \angle C_1CB$, $\beta_1 = \angle CBB_1$, $\beta_2 = \angle B_1BA$ (рис. 62), то соотношение (9.1) теоремы Чевы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов. В самом деле, по теореме синусов

$$\frac{AB_1}{\sin\beta_2} = \frac{AB}{\sin AB_1B}$$

и

$$\frac{B_1C}{\sin\beta_1} = \frac{BC}{\sin CB_1B}.$$

Так как синусы смежных (одинаково ориентированных) углов равны, то имеем равенство (с учетом направлений векторов): $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \dfrac{AB\sin\beta_2}{BC\sin\beta_1}$. Аналогично

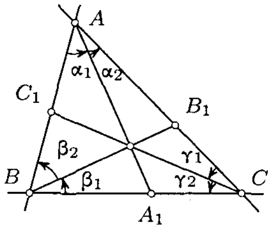


Рис. 62

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{AC\sin\alpha_2}{AB\sin\alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{BC\sin\gamma_2}{AC\sin\gamma_1}.$$

Поэтому

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}.$$

Итак, для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1. \tag{9.3}$$

В частности, если AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, то каждое из отношений в левой части равенства (9.1) равно единице, откуда с очевидностью следует пересечение их в одной точке. Если же эти прямые служат биссектрисами углов треугольника, то $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ и потому очевидно выполнение условия (9.3). Следовательно, биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

9.3. Изотомическое и изогональное соответствия. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через вершины треугольника ABC, пересекаются в точке P и пересекают прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Построим точки A_2, B_2, C_2, симметричные соответственно точкам A_1, B_1, C_1 относительно середин отрезков BC, CA, AB. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке (рис. 63). Докажем это. Если точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины E отрезка AB, то очевидно, что $\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \dfrac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}}$. Аналогично $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \dfrac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}}$ и $\dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \dfrac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C}}$. Поэтому если соотношение (9.1) теоремы Чевы выполнено для точек A_1, B_1, C_1, то оно будет выполнено и для точек A_2, B_2, C_2, и обратно.

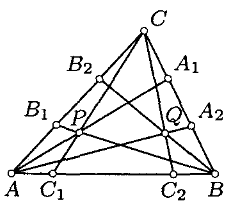


Рис. 63

Точки P и Q пересечения рассматриваемых двух троек прямых называются *изотомически сопряженными* относительно треугольника ABC. Говорят, что они находятся в *изотомическом соответствии*, заданном треугольником ABC.

Пусть, далее, прямые AA_1 и AA_2 симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC, прямые BB_1 и BB_2 симметричны относительно биссектрисы угла B, CC_1 и CC_2 симметричны относительно биссектрисы угла C. Тогда если первая тройка прямых имеет общую точку P, то общую точку M имеет также и вторая тройка прямых. Это с очевидностью следует из угловой формы (9.3) теоремы Чевы. В самом деле, если прямая AA_1 образует с прямыми AB и AC ориентированные углы α_1 и α_2, то прямая AA_2 образует с AB и AC соответственно углы α_2 и α_1. Поэтому если соотношение (9.3) имеет место для одной тройки прямых, то оно будет иметь место и для второй тройки прямых.

Точки P и M называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC. Говорят, что они находятся в *изогональном соответствии*, заданном треугольником ABC.

Убедитесь, что центр O описанной окружности и ортоцентр H треугольника ABC изогонально сопряжены относительно этого треугольника.

Задача 1. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 64).

Решение. Используем обозначения углов, принятые в п. 9.2, и применим теорему Чевы в тригонометрическом виде. Надо доказать соотношение (9.3). Сначала будем полагать, что углы треугольника ABC меньше $120°$. Из треугольников ABA_1 и CAA_1 по теореме синусов имеем:

$$\frac{AA_1}{\sin(60° + B)} = \frac{a}{\sin \alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{AA_1}{\sin(60° + C)} = \frac{a}{\sin \alpha_2},$$

где $a = BC$, B и C — углы треугольника ABC. Отсюда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin(60° + B)}{\sin(60° + C)},$$

и аналогично

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin(60° + C)}{\sin(60° + A)}, \qquad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(60° + A)}{\sin(60° + B)}.$$

Видим, что условие (9.3) выполнено. Значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

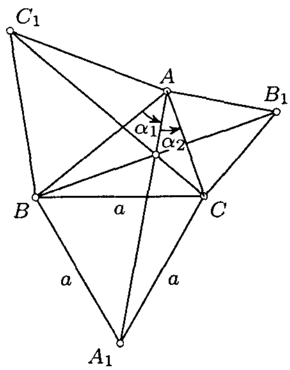


Рис. 64

Если $\angle ACB = 120°$, то точки B, C, B_1 коллинеарны, точки A, C, A_1 коллинеарны. Поэтому рассматриваемые прямые пересекаются в точке C. Если $\angle ACB > 120°$, то в доказательство следует внести небольшие коррективы. Тогда прямые AA_1 и BB_1 будут проходить вне треугольника ABC, и поэтому угол $60^\circ + C$ заменяется углом $360^\circ - (60^\circ + C)$, что не изменит результата.

Задача 2. Через точку M проведены к окружности касательные MA и MB и две произвольные секущие CD и EF (рис. 65). Доказать, что прямые CF и DE пересекаются на прямой AB, соединяющей точки касания.

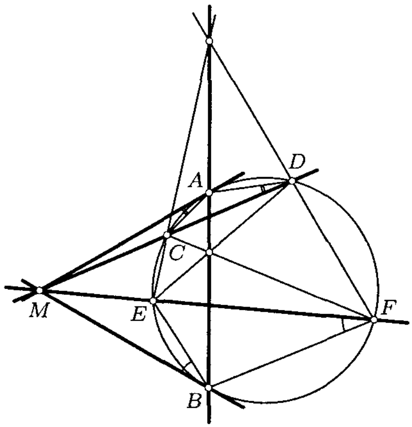


Рис. 65

Решение. Применим теорему Чевы в угловой форме к прямым AB, CF, DE, проходящим через вершины треугольника AEF. На основании теоремы синусов синусы вписанных углов пропорциональны хордам, на которые опираются эти углы. Поэтому задача сводится к доказательству равенства:

$$\frac{BE}{BF} \cdot \frac{DF}{DA} \cdot \frac{CA}{CE} = 1.$$

Из трех пар подобных треугольников MAC и MDA, MCE и MFD, MEB и MBF имеем соответственно:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{MA}{MD}, \quad \frac{DF}{CE} = \frac{MD}{ME}, \quad \frac{BE}{BF} = \frac{ME}{MB}.$$

Поскольку $MA = MB$, то при почленном перемножении этих трех пропорций в правой части получаем единицу, чем и закончено решение. Опущенные подробности этого решения читатель может восполнить самостоятельно.

Задача 3. Дан треугольник ABC и две точки M и N. Прямые AM, BM, CM пересекают прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Прямые AN, BN, CN пересекают прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно в точках A_2, B_2, C_2 (рис. 66). Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. В конце параграфа 2 (задача 2) было доказано, что при центральном проектировании прямой на прямую сохраняется двойное отношение четырех точек прямой. На этом основании имеем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{BN_1}}{\overline{N_1C}} = \frac{\overline{C_1M_1}}{\overline{M_1B_1}} : \frac{\overline{C_1A_2}}{\overline{A_2B_1}},$$

откуда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{C_1A_2}}{\overline{A_2B_1}} = \frac{\overline{BN_1}}{\overline{N_1C}} \cdot \frac{\overline{C_1M_1}}{\overline{M_1B_1}}.$$

Этим же путем получаем еще два аналогичных равенства:

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2C_1}} = \frac{\overline{CN_2}}{\overline{N_2A}} \cdot \frac{\overline{A_1M_2}}{\overline{M_2C_1}},$$
$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{C_2A_1}} = \frac{\overline{AN_3}}{\overline{N_3B}} \cdot \frac{\overline{B_1M_3}}{\overline{M_3A_1}}.$$

Перемножим почленно три последних равенства:

$$\left(\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{C_1A_2}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{C_2A_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2C_1}}\right) =$$
$$= \left(\frac{\overline{BN_1}}{\overline{N_1C}} \cdot \frac{\overline{CN_2}}{\overline{N_2A}} \cdot \frac{\overline{AN_3}}{\overline{N_3B}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{C_1M_1}}{\overline{M_1B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1M_3}}{\overline{M_3A_1}} \cdot \frac{\overline{A_1M_2}}{\overline{M_2C_1}}\right).$$

В силу необходимого условия теоремы Чевы произведения в первых, третьих и четвертых скобках равны единице (прямые соответствующих троек пересекаются в одной точке). Отсюда следует, что и произведение во вторых скобках также равно единице, что и надо было доказать.

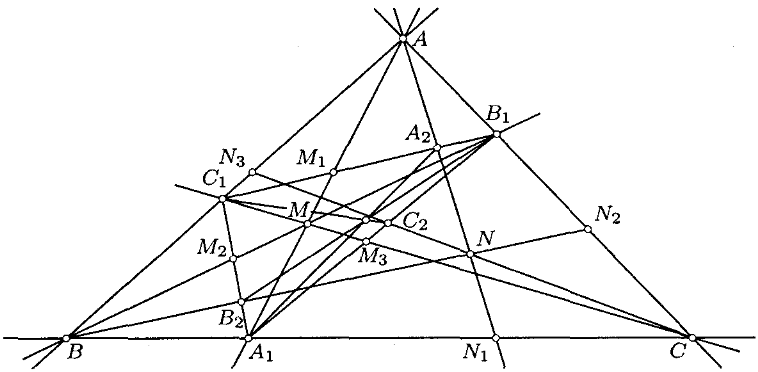


Рис. 66

Упражнения

9.1. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных им сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

9.2. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

9.3. Пользуясь теоремой Чевы, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

9.4. В треугольник ABC вписана полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне BC. Стороны AB и AC касаются полуокружности соответственно в точках C_1 и B_1. Докажите, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника ABC.

9.5. На медиане AA_1 треугольника ABC взята произвольная точка M. Прямые BM и CM пересекают прямые CA и BA соответственно в точках B_1 и C_1. Докажите, что четырехугольник BCB_1C_1 — трапеция.

9.6. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

9.7. Докажите, что ортоцентр треугольника и центр описанной около него окружности находятся в изогональном соответствии относительно этого треугольника.

9.8. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что три прямые, каждая из которых соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны квадрата, построенного на противоположной стороне треугольника, пересекаются в одной точке.

9.9. Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC, CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

9.10. На основании задачи 2 § 9 выведите способ построения касательной к окружности, проходящей через данную точку M, с помощью одной линейки (без использования циркуля).

9.11. В дополнение к задаче 2 § 9 докажите, что прямые AB, CE, DF пересекаются в одной точке (рис. 65).

9.12. Для того, чтобы диагонали AA_1, BB_1, CC_1 вписанного в окружность шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

Докажите.

§10. *Классические теоремы о коллинеарности трех точек*

10.1. Теорема Менелая[1]. *Пусть на прямых BC, CA, AB, содержащих стороны треугольника ABC, даны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:*

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1. \tag{10.1}$$

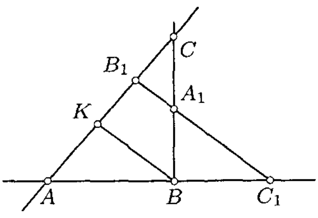


Рис. 67

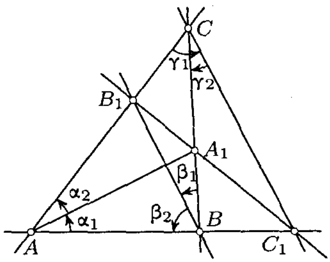


Рис. 68

Необходимость. Пусть точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны (рис. 67). Через вершину B проведем прямую $BK \parallel A_1B_1$, $K \in (AC)$. По теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла (§ 2) имеем: $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1K}}$, $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{KB_1}}{\overline{B_1A}}$. Подстановка этих отношений в доказываемое равенство (10.1) сводит его к очевидному:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1K}} \cdot \frac{\overline{KB_1}}{\overline{B_1A}} = -1.$$

Достаточность. Пусть условие (10.1) выполнено. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Если бы это было не так и прямые AB и A_1B_1 пересекались в точке C_2, то по доказанному $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}} = -1$. Из этого равенства и равенства (10.1) следует, что $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}}$. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают.

Как и условие теоремы Чевы пересечения трех прямых в одной точке (или их параллельности), условие (10.1) теоремы Менелая принадлежности трех точек одной прямой эквивалентно такому:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = -1, \tag{10.2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ — ориентированные углы между прямыми согласно рис. 68. Доказательство из п. 9.2 переносится без изменений.

[1]Менелай Александрийский (I—II в. н. э.) — греческий математик и астроном. Жил в Риме.

10.2. Теорема Гаусса. *Если прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны.*

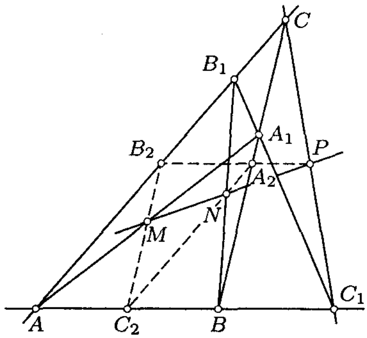


Рис. 69

Действительно, середины M, N, P отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на прямых B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, содержащих стороны треугольника $A_2B_2C_2$ с вершинами в серединах сторон треугольника ABC (п. 2.3) (рис. 69). По теореме о пропорциональных отрезках на параллельных прямых

$$\frac{\overline{A_2P}}{\overline{PB_2}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}, \quad \frac{\overline{B_2M}}{\overline{MC_2}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}},$$
$$\frac{\overline{C_2N}}{\overline{NA_2}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}.$$

Почленным перемножением этих равенств получаем:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{C_2N}}{\overline{NA_2}} \cdot \frac{\overline{A_2P}}{\overline{PB_2}} \cdot \frac{\overline{B_2M}}{\overline{MC_2}}.$$

Поскольку точки AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны, то по необходимому условию теоремы Менелая левая часть равенства равна -1. Тогда по достаточному условию этой теоремы точки M, N, P коллинеарны.

Доказанная теорема Гаусса имеет обратную.

Нетрудно заметить, что четыре прямые AB, BC, CA, A_1B_1, участвующие в теореме Гаусса, равноправны. Четверка прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, называется *четырехсторонником.* Прямая MNP, на которой лежат середины указанных отрезков, называется *прямой Гаусса* четырехсторонника.

10.3. Теорема Дезарга[1]. *Если прямые AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке S или параллельны, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 (если они существуют) лежат на одной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке S (рис. 70). Пусть $(AB) \cap (A_1B_1) = P$, $(BC) \cap (B_1C_1) = Q$, $(CA) \cap (C_1A_1) = R$. По теореме Менелая для

[1]Дезарг Жирар (1591—1661) — французский математик, заложивший основы проективной и начертательной геометрии. Был архитектором и военным инженером.

треугольника SAB и прямой A_1B_1

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1S}} = -1.$$

По той же теореме для треугольника SBC и прямой B_1C_1

$$\frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1S}} = -1.$$

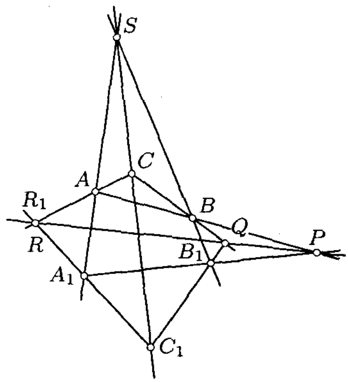


Рис. 70

Еще раз применим теорему Менелая к треугольнику SCA и прямой C_1A_1:

$$\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1S}} = -1.$$

После перемножения последних трех равенств получим:

$$\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}} \cdot \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1S}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1S}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1S}}\right) = -1.$$

Каждое из трех последних произведений в скобках равно 1, поэтому

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = -1.$$

А это значит, что точки P, Q, R коллинеарны.

Пусть теперь прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны (рис. 71). Пусть $(AB)\cap(A_1B_1)=P$, $(BC)\cap(B_1C_1)=Q$, $(PQ)\cap(AC)=R$, $(PQ)\cap(A_1C_1)=R_1$.

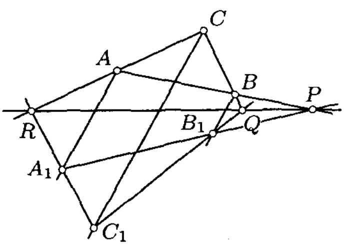


Рис. 71

Предстоит доказать, что точки R и R_1 совпадают. По теореме Менелая для треугольника BPQ и прямой AC

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{CB}} = -1.$$

По этой же теореме для треугольника B_1PQ и прямой A_1C_1

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{A_1P}} \cdot \frac{\overline{PR_1}}{\overline{R_1Q}} \cdot \frac{\overline{QC_1}}{\overline{C_1B_1}} = -1.$$

Так как $\frac{\overline{BA}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{A_1P}}$ и $\frac{\overline{QC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{QC_1}}{\overline{C_1B_1}}$ (п. 2.2), то из двух предыдущих соотношений следует $\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{PR_1}}{\overline{R_1Q}}$, т. е. точки R и R_1 совпадают.

Имеет место *обратная теорема Дезарга.* Для ее доказательства достаточно применить прямую теорему Дезарга к треугольникам AA_1R и BB_1Q.

Фигура на рис. 70, иллюстрирующая теорему Дезарга, содержит 10 точек и десять прямых, причем на каждой прямой лежат по три точки и через каждую точку проходят три прямые. Такую фигуру называют *конфигурацией Дезарга.* Точка S называется дезарговой точкой, а прямая PQR — дезарговой прямой двух дезарговых треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Конфигурация Дезарга обладает интересным свойством: любую из 10 ее точек можно взять за дезаргову точку, тогда однозначно определяются дезарговы треугольники и дезаргова прямая; каждую из 10 прямых можно принять в качестве дезарговой прямой, тогда однозначно определяются дезарговы треугольники и дезаргова точка. Проверку этого свойства оставляем читателю.

10.4. Теорема Паскаля[1] для треугольника. *Касательные в вершинах неравнобедренного треугольника к описанной около него окружности пересекают прямые, содержащие противоположные стороны этого треугольника, в трех точках, лежащих на одной прямой (прямой Паскаля треугольника).*

Для доказательства используем теорему Менелая в тригонометрической форме (10.2). Пусть касательные в точках A, B, C пересекают прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 72). Тогда $|\alpha_1| = \angle BAA_1 = \angle C$, $|\alpha_2| = \angle A_1AC = \angle A + \angle C$, где $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника ABC. Так как углы α_1 и α_2 ориентированы противоположно, то

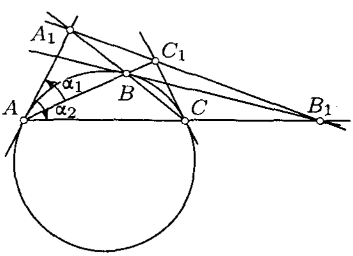


Рис. 72

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = -\frac{\sin C}{\sin(A+C)} = -\frac{\sin C}{\sin B}.$$

Аналогично

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = -\frac{\sin A}{\sin C}, \qquad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = -\frac{\sin B}{\sin C}.$$

(углы β_1, β_2, γ_1, γ_2 изображены на рис. 68). Следовательно, условие (10.2) выполняется и поэтому точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

10.5. Теорема Паскаля для вписанного шестиугольника. *Во вписанном в окружность шестиугольнике точки пересечения (если они су-*

[1] Паскаль Блез (1623—1662) — французский математик, физик и философ. Теорему о вписанном шестиугольнике он вывел в 16-летнем возрасте. Она является одной из первых и важных теорем проективной геометрии.

ществуют) противоположных сторон лежат на одной прямой (прямой Паскаля вписанного шестиугольника).

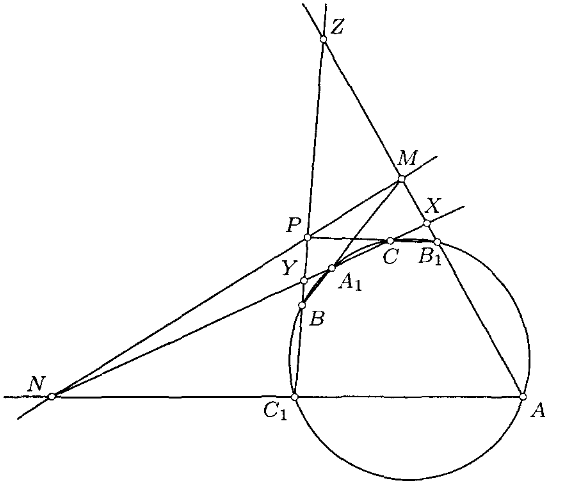


Рис. 73

Доказательство. Пусть в окружность вписав шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ (рис. 73). Докажем, что точки $M=(AB_1)\cap(A_1B)$, $P=(BC_1)\cap(B_1C)$, $N=(CA_1)\cap(C_1A)$ коллинеарны. Введем в рассмотрение точки $X=(AB_1)\cap(CA_1)$, $Y=(BC_1)\cap(CA_1)$, $Z=(AB_1)\cap(BC_1)$, предполагая их существование. По свойству секущих

$$\begin{aligned}\overline{XA}\cdot\overline{XB_1}&=\overline{XC}\cdot\overline{XA_1},\\ \overline{YB}\cdot\overline{YC_1}&=\overline{YC}\cdot\overline{YA_1},\\ \overline{ZB}\cdot\overline{ZC_1}&=\overline{ZA}\cdot\overline{ZB_1}.\end{aligned}\tag{10.3}$$

На основании теоремы Менелая применительно к треугольнику XYZ и прямым AC_1, CB_1, BA_1 имеем соответственно:

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZC_1}}{\overline{C_1Y}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1,\qquad \frac{\overline{XB_1}}{\overline{B_1Z}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}}=-1,\qquad \frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZB}}{\overline{BY}}\cdot\frac{\overline{YA_1}}{\overline{A_1X}}=-1.$$

Перемножим почленно эти равенства. В левой части полученного равенства в силу (10.3) произойдут сокращения дроби. Вследствие этого получим:

$$\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1,$$

откуда следует коллинеарность точек M, P, N.

З а д а ч а 1. Через две данные точки M и N проведены две касательные MP и NQ к окружности, не содержащей эти точки. Доказать, что прямая, проходящая через точки P и Q касания, пересекает прямую MN в такой точке L, для которой (рис. 74)

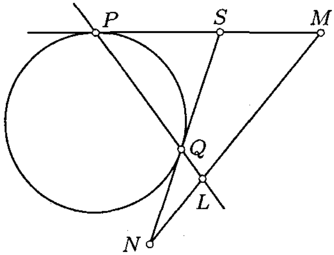


Рис. 74

$$\frac{ML}{LN} = \frac{MP}{NQ}. \tag{10.4}$$

Р е ш е н и е. Пусть $(MP) \cap (NQ) = S$. По теореме Менелая для треугольника SMN и прямой PQL имеем:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{ML}}{\overline{LN}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{QS}} = -1.$$

Поскольку $SP = SQ$, то отсюда следует (10.4)

З а д а ч а 2. Доказать, что во вписанном четырехугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой (теорема Паскаля для вписанного четырехугольника) (рис. 75).

Р е ш е н и е. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, касательные в вершинах A и C пересекаются в точке M, касательные в вершинах B и D пересекаются в точке N и $(AB) \cap (MN) = P$. На основании предыдущей задачи $\frac{MP}{PN} = \frac{MA}{NB}$. Если $(CD) \cap (MN) = Q$, то на том же основании $\frac{MQ}{NQ} = \frac{MC}{ND}$. Поскольку $MC = MA$ и $ND = NB$, то

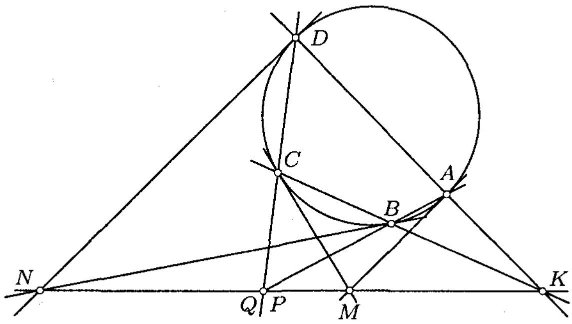


Рис. 75

$\frac{MP}{PN} = \frac{MQ}{QN}$, откуда следует, что точки P и Q совпадают. Итак, доказано, что точка P пересечения противоположных сторон AB и CD лежит на прямой MN, соединяющей точки пересечения касательных в противоположных вершинах. С равным правом на той же прямой лежит точка пересечения прямых BC и AD.

Упражнения

10.1. Биссектрисы двух внутренних углов треугольника и биссектриса внешнего угла, не смежного с ними, пересекают прямые, содержащие соответственные стороны треугольника в трех коллинеарных точках. Докажите.

10.2. Докажите, что биссектрисы внешних углов неравнобедренного треугольника пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в трех точках одной прямой.

10.3. Прямая пересекает прямые BC, CA, AB, содержащие стороны треугольника ABC, соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 соответственно относительно середин сторон BC, CA, AB. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой (прямые $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *изотомически сопряженными* относительно треугольника ABC).

10.4. Докажите теорему Симсона (§ 8), пользуясь теоремой Менелая.

10.5. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

10.6. Серединные перпендикуляры к биссектрисам треугольника пересекают прямые, содержащие его соответственные стороны, в точках, лежащих на прямой. Докажите.

10.7. Вычислите отношения (4.3) и (4.9), пользуясь теоремой Менелая.

10.8. Докажите, что во вписанном шестиугольнике $AB_1CA_1BC_1$ диагонали AC и A_1B_1, BB_1 и C_1C_1, AB и A_1C_1 пересекаются в точках одной прямой.

10.9. Если A, B, C — три произвольные точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 — три произвольные точки другой прямой, $M=(AB_1)\cap(A_1B)$, $N=(AC_1)\cap(A_1C)$, $P=(BC_1)\cap(B_1C)$, то точки M, N, P лежат на одной прямой (теорема Паппа). Докажите.

10.10. Докажите, что прямые, соединяющие основания чевиан точки P в треугольнике, пересекают его соответственные стороны (прямые) в трех коллинеарных точках.

10.11. Теорема Брианшона. В описанном четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, проходят через точку пересечения его диагоналей. Докажите.

10.12. В описанном четырехугольнике $ABCD$ прямые AA_1 и CC_1, соединяющие две противоположные вершины A и C с точками A_1 и C_1 касания сторон BC и AB, пересекаются на диагонали BD.

10.13. Середина основания трапеции соединена с вершинами другого основания. Эти прямые пересекают диагонали трапеции в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям и ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами трапеции, делится точками P и Q на три равные части.

10.14. Даны две параллельные прямые и не принадлежащая им точка. Пользуясь только одной линейкой (без циркуля), проведите через данную точку прямую, параллельную данным прямым.

§11. *Метрические соотношения в четырехугольнике*

11.1. Центроид четырехугольника. Отрезки (а также прямые), соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, называются его *средними линиями.*

Теорема. *Средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*

Доказательство 1. Пусть MN и PQ — средние линии четырехугольника $ABCD$, точки E и F — середины его диагоналей AC и BD (рис. 76). Тогда по свойству средней линии треугольника отрезки MP и NQ параллельны диагонали AC и равны ее половине. Следовательно, четырехугольник $MPNQ$ — параллелограмм. С равным правом четырехугольники $MENF$ и $PEQF$ — параллелограммы. Из этих трех параллелограммов каждые два имеют общую диагональ. Отсюда и следует истинность доказываемого свойства.

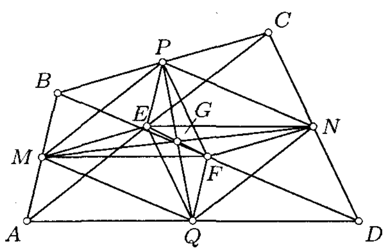


Рис. 76

Доказательство 2. Примем произвольную точку O за начало векторов. Тогда $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ и $\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})$. Пусть G — середина MN. Тогда

$$\overline{OG} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON}) = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

В это выражение векторы вершин четырехугольника входят равноправно. Поэтому точка G будет и серединой отрезков PQ и EF.

Определение. Точка пересечения средних линий четырехугольника называется *центроидом* этого четырехугольника.

Вектор центроида G имеет выражение:

$$\overline{OG} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}). \tag{11.1}$$

При совпадении точек O и G будем иметь:

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{0}.$$

Теорема. *Четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину четырехугольника с центроидом треугольника, образованного оставшимися тремя вершинами, пересекаются в центроиде четырехугольника и делятся им в отношении* $3:1$, *считая от вершин.*

В самом деле, если G_1 — центроид треугольника BCD, то для любой точки O согласно (4.1)

$$\overline{OG_1} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Разделим отрезок AG_1 в отношении $3:1$. Вектор делящей точки равен

$$\frac{\overline{OA} + 3\overline{OG_1}}{1+3} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{OG},$$

чем и заканчивается доказательство.

11.2. Длины средних линий и расстояние между серединами диагоналей четырехугольника. Выведем сперва удобную в применениях формулу для скалярного произведения произвольных векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Пользуясь теоремой косинусов (3.6), находим:

$$2\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2\overline{AB}(\overline{AD} - \overline{AC}) =$$
$$= 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB^2 + AD^2 - BD^2 - AB^2 - AC^2 + BC^2.$$

Итак,

$$2\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AD^2 + BC^2 - BD^2 - AC^2. \tag{11.2}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \perp \overline{CD} \ &\Leftrightarrow\ AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2, \\ \overline{AC} \perp \overline{BD} \ &\Leftrightarrow\ AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Таким образом, *две противоположные стороны четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух* *других противоположных сторон равна сумме квадратов диагоналей. Диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.*

Введем постоянные обозначения: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Запишем два представления вектора $\overline{MN}$: $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$ и $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$. Складывая их и учитывая, что $\overline{MA} + \overline{MB} = \bar{0}$ и $\overline{DN} + \overline{CN} = \bar{0}$ (рис. 77), получим:

$$2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}. \tag{11.4}$$

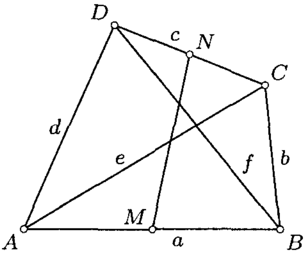


Рис. 77

Аналогично $2\overline{PQ} = \overline{BA} + \overline{CD}$ и $2\overline{EF} = \overline{AD} + \overline{CB}$.

Далее находим, руководствуясь формулой (11.2):

$$4MN^2 = AD^2 + BC^2 + 2AD \cdot BC = \\ = AD^2 + BC^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2 - DC^2.$$

Итак, $MN^2 = \dfrac{1}{4}(b^2 + d^2 + e^2 + f^2 - a^2 - c^2)$. Аналогично

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + e^2 + f^2 - b^2 - d^2),\\ EF^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Последнюю из этих формул называют *формулой Эйлера*.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то середины E и F его диагоналей совпадают. Следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2, \tag{11.6}$$

т. е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

2) Если четырехугольник $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD, то (11.2) принимает вид: $-2ac = d^2 + b^2 - e^2 - f^2$, откуда $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ и поэтому

$$PQ^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2ac), \quad PQ = \frac{1}{2}(a + c),$$
$$EF^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - 2ac), \quad EF = \frac{1}{2}|a - c|.$$

3) Треугольник можно рассматривать как вырожденный четырехугольник с двумя совпавшими вершинами. Скажем, если точки C и D

совпадают, то середина N отрезка CD совпадает с ними (рис. 78). Средняя линия MN четырехугольника становится медианой треугольника ABC, а средняя линия PQ совпадает с EF и будет средней линией треугольника ABC. Тогда $e=d$, $b=f$, $c=0$ поэтому из первой формулы (11.5) получаем формулу длины медианы треугольника

$$MN^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2d^2 - a^2),$$

а вторая и третья формулы дают:

$$PQ = EF = \frac{1}{2}a. \qquad (11.7)$$

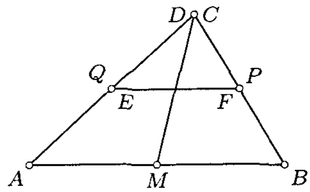


Рис. 78

Из формул (11.5) вытекают еще и такие следствия:

4) Выполнено равенство

$$MN^2 + PQ^2 + EF^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \qquad (11.8)$$

5) Средние линии четырехугольника равны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

6) Расстояние между серединами диагоналей четырехугольника равно длине его средней линии тогда и только тогда, когда сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов противоположных сторон, содержащих концы этой средней линии.

11.3. Зависимость между длинами сторон и диагоналей четырехугольника. Шесть расстояний между четырьмя произвольными точками плоскости, взятыми попарно, связаны соотношением:

$$a^2c^2(b^2+d^2+e^2+f^2-a^2-c^2)+b^2d^2(a^2+c^2+e^2+f^2-b^2-d^2)+$$
$$+e^2f^2(a^2+c^2+b^2+d^2-e^2-f^2) = (abe)^2+(bcf)^2+(cde)^2+(daf)^2. \qquad (11.9)$$

Доказательство этой зависимости выходит за рамки настоящего пособия.

В силу формул (11.5) соотношение (11.9) эквивалентно такому:

$$(2AB\cdot CD\cdot MN)^2 + (2BC\cdot AD\cdot PQ)^2 + (2CA\cdot BD\cdot EF)^2 =$$
$$=(AB\cdot BC\cdot CA)^2+(BC\cdot CD\cdot DB)^2+(CD\cdot DA\cdot AC)^2+(DA\cdot AB\cdot BD)^2.$$

Равенство (11.9) можно представить еще и в таком виде:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & e & d & 1 \\ a & 0 & b & f & 1 \\ e & b & 0 & c & 1 \\ d & f & c & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.10)$$

11.4. Теорема косинусов для четырехугольника. Для любых четырех точек $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$. Возведением в квадрат получаем:

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{BC} + 2\overline{AB}\cdot\overline{CD} + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$

Освобождаясь от скалярных произведений и переходя к принятым обозначениям, имеем:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2ac\cos\omega - 2bc\cos C, \tag{11.11}$$

где ω — угол между прямыми AB и CD (рис. 79), B и C — углы четырехугольника $ABCD$ при вершинах B и C.

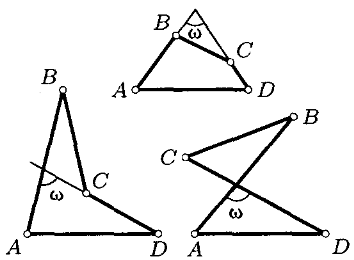


Рис. 79

Таким образом, *квадрат стороны четырехугольника равен сумме квадратов трех других его сторон без удвоенных произведений этих сторон, взятых попарно, и косинусов углов между ними.*

Это соотношение, называемое теоремой косинусов для четырехугольника, имеет место как для выпуклых, так и для невыпуклых четырехугольников, а также для четырехугольников с *самопересечением* сторон (рис. 79). Угол ω во всех случаях равен $\pi - (A + D)$. Поэтому зависимость (11.11) можно записать в эквивалентном ей виде:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C + 2ac\cos(A + D). \tag{11.12}$$

Теорему косинусов для четырехугольника можно получить без использования векторов на основании теоремы косинусов для треугольника и третьей формулы (11.5). В самом деле, стороны ME и MF треугольника EMF (рис. 76) параллельны соответственно DC и AB, поэтому $\angle EMF = \omega$. Так как $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$ и $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$, то

$$EF^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos B - b^2 - c^2 + 2bc\cos C) = \\ = \frac{1}{4}(d^2 - b^2 + 2ab\cos B + 2bc\cos C).$$

С другой стороны, $EF^2 = ME^2 + MF^2 - 2ME\cdot MF\cos\omega = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\omega.$

Приравнивая два полученных выражения для EF^2, приходим к соотношению (11.11).

11.5. Соотношение Бретшнайдера. Другим аналогом теоремы косинусов для треугольника служит интересная зависимость между элементами простого четырехугольника $ABCD$:

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos(A + C). \tag{11.13}$$

Доказательство 1. Выполним следующие построения. Вне данного четырехугольника $ABCD$ построим треугольники ABF и ADE, подобные соответственно треугольникам CAD и CAB (рис. 80). Из их подобия имеем:

$$\frac{AF}{a} = \frac{c}{e}, \quad \frac{BF}{a} = \frac{d}{e}, \quad \frac{AE}{d} = \frac{b}{e}, \quad \frac{DE}{d} = \frac{a}{e},$$

откуда $AF = \dfrac{ac}{e}$, $AE = \dfrac{bd}{e}$, $BF = DE = \dfrac{ad}{e}$.

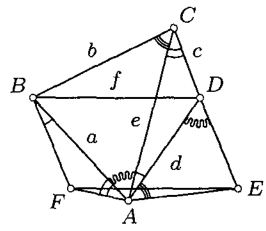


Рис. 80

Сумма углов при вершинах B и D в четырехугольнике $BDEF$ равна сумме углов треугольника ABD, т. е. равна 180°. Следовательно, $BF \parallel DE$. Так как, кроме того, $BF = DE$, то четырехугольник $BDEF$ — параллелограмм и $FE = BD = f$. В треугольнике AEF угол EAF равен $\angle A + \angle C$ по построению. По теореме косинусов из этого треугольника имеем:

$$f^2 = \left(\frac{ac}{e}\right)^2 + \left(\frac{bd}{e}\right)^2 - \frac{2abcd}{e^2}\cos(A + C),$$

что равносильно доказываемому соотношению (11.13).

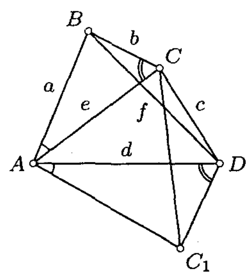


Рис. 81

Доказательство 2. На стороне AD данного четырехугольника $ABCD$ вне его построим треугольник ADC_1, подобный треугольнику ABC: $\angle DAC_1 = \angle BAC$ и $\angle AC_1D = \angle BCA$ (рис. 81). Коэффициент подобия равен $\dfrac{d}{a}$, поэтому $AC_1 = \dfrac{d}{a}e$, $DC_1 = \dfrac{d}{a}b$. Отрезок CC_1 может пересекать прямую AD либо внутри стороны AD, либо в точке D, либо вне отрезка AD. Соответственно этим случаям угол CDC_1 равен либо $\angle B + \angle D$, либо 180°, либо $360° - (\angle B + \angle D)$. В первом и третьем случаях из треугольников ACC_1 и DCC_1 по теореме косинусов получаем ($\angle CAC_1 = \angle BAD$):

$$CC_1^2 = e^2 + \left(\frac{de}{a}\right)^2 - 2\frac{de^2}{a}\cos A, \quad CC_1^2 = c^2 + \left(\frac{bd}{a}\right)^2 - 2\frac{bcd}{a}\cos(B + D).$$

Приравняем правые части этих равенств и заметим, что

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = f^2.$$

В результате будем иметь (11.13), поскольку $\cos(B+D)=\cos(A+C)$. Если точки C, D, C_1 коллинеарны, то $\cos(B+D)=-1$, $CC_1=c+\dfrac{bd}{a}$ и полученный результат остается истинным.

11.6. Следствия из соотношения Бретшнайдера. Если точки A, B, C, D неколлинеарны, то случай, когда $\cos(B+D)=-1$, имеет место тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Тогда (11.13) принимает вид:

$$(ef)^2=(ac)^2+(bd)^2+2abcd,$$

что эквивалентно равенству $ef=ac+bd$. Таким образом, получены *прямая и обратная теоремы Птолемея* (§ 8).

Правая часть равенства (11.13) максимальна при $\cos(A+C)=$ $=\cos(B+D)=-1$. Это значит, что

$$(ef)^2\leqslant(ac)^2+(bd)^2+2abcd,$$

или

$$ef\leqslant ac+bd. \tag{11.14}$$

Если точки A, B, C, D неколлинеарны, то равенство имеет место лишь для вписанного четырехугольника. Однако равенство может иметь место и в случае, когда точки A, B, C, D коллинеарны. Действительно, если $\angle A=0^\circ$ и $\angle C=180^\circ$ или наоборот, то $\cos(A+C)=-1$. Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда пара точек A и C разделяют пару точек B и D (рис. 82).

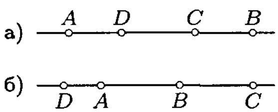


Рис. 82

Подводя итог, имеем следующий результат. *Для любых четырех точек плоскости имеет место неравенство:*

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+BC\cdot AD,$$

причем знак равенства имеет место лишь в случаях, когда эти точки лежат либо на окружности, либо на прямой и пара (A, C) *разделяет пару* (B, D).

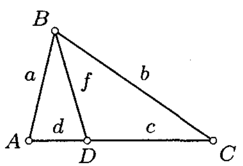


Рис. 83

Рассмотрим случай вырожденного четырехугольника $ABCD$, в котором вершина D принадлежит диагонали AC (рис. 83). В этом случае $\angle D=180^\circ$, $c+d=e$ и поэтому

$$(ef)^2\leqslant(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(180^\circ+B).$$

Так как $\cos(180^\circ + B) = -\cos B = -\dfrac{a^2+b^2-e^2}{2ab}$, то $(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + $ $+ cd(a^2+b^2-e^2) = ca^2(c+d) + db^2(c+d) - cde^2 = ca^2e + db^2e - cde^2$. Итак,

$$ef^2 = ca^2 + db^2 - cde. \tag{11.15}$$

Эта зависимость носит название теоремы Стюарта.

В частности, если BD — *медиана* треугольника ABC, то $\dfrac{c}{e} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{1}{2}$, $cd = \dfrac{1}{4}e^2$ и (11.15) принимает вид:

$$f^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - e^2).$$

Если BD — биссектриса угла ABC, то $\dfrac{d}{c} = \dfrac{a}{b}$. Тогда

$$\frac{1}{e}(ca^2 + db^2) = \frac{1}{e}((e-d)a^2 + db^2) = a^2 + \frac{d}{e}(b^2 - a^2).$$

Поскольку $e = c + d = c + \dfrac{ac}{b} = \dfrac{(a+b)c}{b}$, то $\dfrac{1}{e}(ca^2 + db^2) = ab$ и (11.15) принимает вид:

$$f^2 = ab - cd$$

(см. § 2, задачу 1).

Упражнения

11.1. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в центроидах треугольников BCD, CDA, DAB, ABC гомотетичен четырехугольнику $ABCD$. Найдите центр и коэффициент гомотетии.

11.2. Докажите, что средние линии четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

11.3. Выведите для четырехугольника формулы, аналогичные формулам (3.3) проекций для треугольника.

11.4. Докажите теорему косинусов (11.11), пользуясь результатом предыдущей задачи.

11.5. На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что центры этих треугольников являются вершинами правильного треугольника.

11.6. На стороне BC треугольника ABC вне его построен правильный треугольник BCD. Докажите, что

$$AD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S,$$

где S — площадь треугольника ABC.

11.7. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами A_1, B_1, C_1. Докажите, что $AA_1 = B_1C_1$, $BB_1 = C_1A_1$, $CC_1 = A_1B_1$.

11.8. На сторонах выпуклого четырехугольника вне его построены квадраты. Докажите, что расстояния между центрами квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны.

11.9. Докажите, что для всякого четырехугольника сумма квадратов его сторон не меньше суммы квадратов его диагоналей.

11.10. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, увеличенной на удвоенное произведение оснований.

11.11. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна $90°$ или $270°$, то квадрат произведения его диагоналей равен сумме квадратов произведений противоположных сторон. Докажите.

11.12. Докажите, что в параллелограмме с углом $45°$ квадрат произведения диагоналей равен сумме четвертых степеней его соседних сторон.

11.13. Докажите соотношение (11.15) Стюарта, не пользуясь соотношением Бретшнайдера.

11.14. Докажите, что расстояние от вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC до произвольной точки D его гипотенузы выражается формулой:

$$CD^2 = \frac{1}{c^2}(a^2m^2 + b^2n^2),$$

где a и b — катеты, m и n — отрезки гипотенузы.

11.15. Проверьте, что если точки A, B, C, D лежат на прямой и пара (A, C) разделяет пару (B, D), то

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

§ 12. *Площадь четырехугольника*

12.1. Формулы площади четырехугольника общего вида. Пусть даны длины e и f диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ и угол φ между ними. Проведем через вершины A и C прямые параллельно BD, а через вершины B и D — прямые параллельно AC (рис. 84). Тогда получим параллелограмм $MNPQ$, в котором стороны равны соответственно диагоналям данного четырехугольника, а угол параллелограмма равен углу между диагоналями четырехугольника. Легко видеть, что площадь этого параллелограмма вдвое больше площади данного четырехугольника как для выпуклого, так и для невыпуклого четырехугольников. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ef\sin\varphi. \qquad (12.1)$$

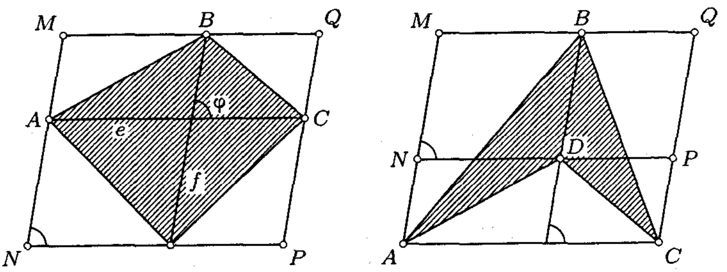


Рис. 84

Эта формула говорит о том, что четырехугольник равновелик треугольнику, две стороны которого равны и параллельны диагоналям этого четырехугольника.

Выразим площадь четырехугольника через длины его сторон и диагоналей. В соответствии с формулой (11.2)

$$2\overline{AC}\cdot\overline{BD} = AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2,$$

откуда

$$|\cos\varphi| = \frac{|b^2+d^2-a^2-c^2|}{2ef}. \qquad (12.2)$$

Находим

$$4S^2 = (ef)^2\sin^2\varphi = (ef)^2(1-\cos^2\varphi) =$$
$$= (ef)^2\cdot\left(1 - \frac{(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}{4(ef)^2}\right) = \frac{1}{4}(4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2).$$

Итак,

$$16S^2 = 4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2 \qquad (12.3)$$

или

$$16S^2 = (2ef+b^2+d^2-a^2-c^2)(2ef+a^2+c^2-b^2-d^2). \qquad (12.4)$$

Докажем еще одну формулу площади S четырехугольника $ABCD$:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}, \qquad (12.5)$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ — полупериметр четырехугольника. Для этого еще раз используем (12.1):

$$4S^2=(ef)^2-(ef)^2\cos^2\varphi.$$

Первое слагаемое $(ef)^2$ заменим его выражением (11.13), а второе — по формуле (12.2). В результате будем иметь:

$$4S^2=(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(A+C)-\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2-d^2)^2.$$

Поскольку $(ac)^2+(bd)^2=(ac+bd)^2-2abcd$, то

$$16S^2=4(ac+bd)^2-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2-8abcd(1+\cos(A+C))=$$
$$=(2ac+2bd+a^2+c^2-b^2-d^2)(2ac+2bd-a^2-c^2+b^2+d^2)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}=$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

Представим $a+b+c-d$ так: $a+b+c-d=(a+b+c+d)-2d=2p-2d=$ $=2(p-d)$. Аналогично $a+b-c+d=2(p-c)$, $a-b+c+d=2(p-b)$, $-a+b+c+d=2(p-a)$.

После подстановки в выражение для $16S^2$ и сокращения на 16 приходим к доказываемому равенству (12.5).

12.2. Следствия из общих формул площади четырехугольника. Применим полученные формулы к четырехугольникам частных видов.

1. Если диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, то $\sin\varphi=1$ и согласно формуле (12.1)

$$S=\frac{1}{2}ef. \tag{12.6}$$

2. Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle A+$ $+\angle C=\angle B+\angle D=180°$ и поэтому $\cos\frac{A+C}{2}=0$. Формула (12.5) принимает вид:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d). \tag{12.7}$$

Она впервые была получена индийским математиком Брахмагуптой в VII веке и носит его имя — формула Брахмагупты для площади вписанного четырехугольника. Эта формула следует также из (12.4), поскольку для вписанного четырехугольника $ef=ac+bd$.

3. Пусть во вписанном четырехугольнике $ABCD$ вершины A и D совпадают. Тогда $d=0$ и формула (12.7) переходит в формулу Герона для площади треугольника ABC:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)p. \tag{12.8}$$

4. Из (12.5) видно, что S^2 максимальна тогда и только тогда, когда $\cos\dfrac{A+C}{2}=0$, т. е. когда $\angle A+\angle C=180°$.

Итак, *четырехугольник с данными сторонами имеет максимальную площадь в том и только в том случае, когда он вписан в окружность.* Такой четырехугольник всегда можно построить (задача 7.24).

5. Если четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то $a+c=b+d$ и поэтому $b^2+d^2-a^2-c^2=2(bd-ac)$. Формула (12.4) принимает вид

$$4S^2=(ef+bd-ac)(ef-bd+ac). \tag{12.9}$$

6. Если четырехугольник является одновременно вписанным и описанным, то каждая из формул (12.7) и (12.9) преобразуется к виду:

$$S^2=abcd. \tag{12.10}$$

Задача 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K. Точки E и F — середины диагоналей AC и BD. Доказать, что площадь треугольника EFK равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

Решение. Если прямые AB и CD пересекаются за стороной BC (рис. 85), то середина P стороны BC лежит внутри треугольника EFK. Действительно, точки P и K лежат в одной полуплоскости от прямой EF. Кроме того, поскольку $EP\parallel AB$, то точки P и B — в разных полуплоскостях от прямой EK (диагонали трапеции $BEPK$ пересекаются внутри нее). Так как $FP\parallel CD$, то точки C и P — в разных полуплоскостях от прямой FK. Для внутренней точки P треугольника EFK

$$S_{EFK}=S_{EFP}+S_{EPK}+S_{FPK}.$$

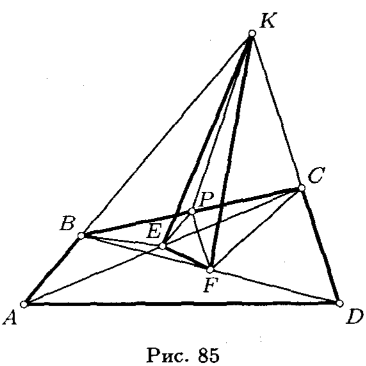


Рис. 85

Так как треугольники EPK и EPB равновелики и треугольники FPK и FPC равновелики, то треугольник EFK равновелик четырехугольнику $EFCB$. Диагонали этого четырехугольника — половины диагоналей данного четырехугольника $ABCD$. На основании формулы (12.1) $S_{EFCB}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ и, значит, $S_{EFK}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Следствие. С равным правом $S_{EFL} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (L — точка пересечения прямых AD и BC). Поэтому треугольники EFK и EFL равновелики, и по лемме §4 прямая EF проходит через середину T отрезка LK (рис. 86). Имеем такой результат: *середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон, лежат на одной прямой.* Это — доказанная ранее теорема Гаусса (§10).

Задача 2. В окружность вписан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Из точки пересечения диагоналей опущены перпендикуляры на стороны. Доказать, что в четырехугольник с вершинами в основаниях этих перпендикуляров можно вписать окружность. Доказать, что отношение площадей четырехугольников равно отношению радиусов окружностей.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — основания указанных перпендикуляров, принадлежащие соответственно сторонам AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ (рис. 87). На основании результата задачи п. 3.1

$$A_1B_1 = \frac{S_{ABC}}{R}, \quad C_1D_1 = \frac{S_{ACD}}{R},$$

где R — радиус данной окружности. Находим сумму $A_1B_1 + C_1D_1 = \frac{S}{R}$, где S — площадь $ABCD$. Точно так же $B_1C_1 + A_1D_1 = \frac{S}{R}$. Следовательно $A_1B_1 + C_1D_1 = B_1C_1 + A_1D_1$, и поэтому четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ описан около некоторой окружности радиуса r. Его площадь S_1 равна $\frac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1)r$. Из равенств $\frac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1)r = S_1$ и $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1 = \frac{2S}{R}$ следует $S : S_1 = R : r$.

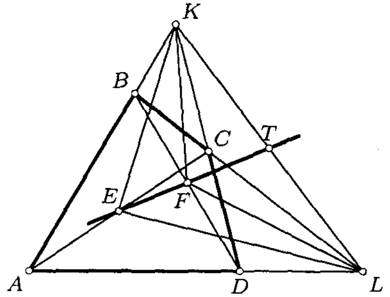


Рис. 86

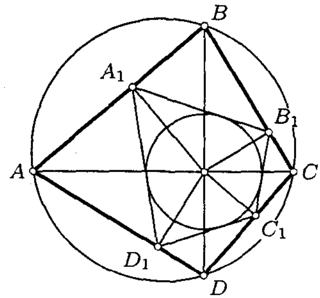


Рис. 87

Упражнения

12.1. Докажите, что площадь четырехугольника равна произведению его средних линий и синуса угла между ними.

12.2. Две противоположные вершины четырехугольника перенесены на некоторый вектор. Докажите, что полученный четырехугольник равновелик данному.

12.3. Внутри выпуклого четырехугольника с данной площадью S взята точка и построены точки, симметричные ей относительно середин всех сторон данного четырехугольника. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в этих точках.

12.4. Средние линии четырехугольника разделяют его на четыре четырехугольника. Докажите, что суммы площадей несмежных четырехугольников равны.

12.5. Если только одна из средних линий четырехугольника делит его на две части равной площади, то этот четырехугольник есть трапеция. Докажите.

12.6. Для любого (простого) четырехугольника $ABCD$

$$4S^2 = AC^2 \cdot BD^2 - (\overline{AC} \cdot \overline{BD})^2.$$

12.7. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что четырехугольники $ABCO$ и $AOCD$ равновелики.

12.8. Прямая, проходящая через середины E и F диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках K и L. Докажите, что треугольники ABL и CDK равновелики.

12.9. Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь четырехугольника, отсекаемого ими от данного четырехугольника, равна третьей части его площади.

12.10. Середины M и N сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены с вершинами отрезками MC, MD, AN, BN. Докажите, что площадь четырехугольника, заключенного между этими отрезками, равна сумме площадей треугольников, прилегающих к сторонам AD и BC.

12.11. Прямая, проходящая через середину диагонали BD четырехугольника $ABCD$ параллельно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке T. Докажите, что прямая CT делит четырехугольник $ABCD$ на две части равной площади.

12.12. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая параллельно другой диагонали. Точка пересечения этих прямых соединена с серединами сторон четырехугольника.

Докажите, что эти четыре отрезка делят четырехугольник на четыре равновеликие части.

12.13. Докажите, что площадь четырехугольника можно вычислить по формуле:

$$4S^2 = (ab)^2 + (cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 2abcd\cos(B + D).$$

12.14. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что

$$16S^2R^2 = (ab + cd)(bc + ad)(ac + bd).$$

12.15. Докажите, что площадь треугольника, две стороны которого равны и параллельны противоположным сторонам выпуклого четырехугольника, равна разности площадей треугольников, которые отсекаются от двух вертикальных углов между диагоналями двумя другими противоположными сторонами. Как изменится эта зависимость для невыпуклого четырехугольника?

12.16. Докажите, что площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины диагоналей и середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равна полуразности площадей двух треугольников, отсекаемых от двух вертикальных углов между диагоналями этими противоположными сторонами.

12.17. Если E и F — середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и точка пересечения диагоналей лежит между E и C и между F и D, то четырехугольники $CDEF$, $ADEF$ и $CBEF$ равновелики, четырехугольники $ABED$ и $CBED$ равновелики. Докажите.

12.18. Докажите неравенства для выпуклого четырехугольника

$$2S \leqslant ab + cd, \qquad 2S \leqslant ac + bd.$$

В каком случае имеет место равенство в каждом из них? Выполняются ли эти неравенства для невыпуклого четырехугольника?

§ 13. *Геометрические неравенства*

Для геометрических величин фигур существует необозримое число неравенств, не поддающихся какой-либо их классификации. Сделаем попытку систематизации методов их доказательств.

13.1. Использование неравенств между сторонами и углами треугольника. В школьном курсе геометрии доказывается, что для любых трех точек A, B и C имеет место неравенство:

$$AB \leqslant AC + CB, \qquad (13.1)$$

называемое *неравенством треугольника*, причем равенство имеет место в том и только в том случае, когда точка C лежит между A и B. Строгое неравенство $AB < AC + CB$ имеет место тогда и только тогда, когда точки A, B, C неколлинеарны.

Отсюда следует, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Неравенство (13.1) часто используется для доказательства (вывода) других геометрических неравенств.

Пример 1. Сумма диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ больше суммы двух противоположных сторон (рис. 88):

$$\begin{aligned} AC + BD &> AB + CD, \\ AC + BD &> BC + AD. \end{aligned} \qquad (13.2)$$

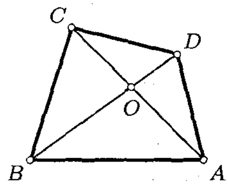


Рис. 88

Действительно, если $(AC) \cap (BD) = O$, то $AB < AO + OB$ и $CD < CO + OD$. Складывая эти неравенства, получаем:

$$AB + CD < (AO + OC) + (BO + OD) = AC + BD.$$

Пример 2. Сумма расстояний от точки O, лежащей внутри треугольника ABC, до его вершин больше его полупериметра:

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA). \qquad (13.3)$$

В самом деле, так как $AB < AO + OB$, $BC < BO + OC$, $CA < CO + OA$, то $AB + BC + CA < 2(OA + OB + OC)$, что эквивалентно (13.3).

Пример 3. Во всяком треугольнике ABC длина m_c медианы CM удовлетворяет неравенствам:

$$\frac{1}{2}(a + b - c) < m_c < \frac{1}{2}(a + b). \qquad (13.4)$$

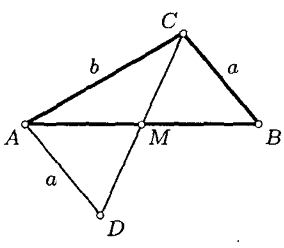


Рис. 89

Для доказательства продолжим медиану CM за точку M на ее длину (рис. 89). Тогда имеем: $CD < AC + AD$, т. е. $2m_c < b + a$, откуда $m_c < \frac{1}{2}(a + b)$. Далее, $BC < CM + BM$ и $CA < CM + AM$, или $a < m_c + \frac{c}{2}$ и $b < m_c + \frac{c}{2}$. Поэтому $a + b < 2m_c + c$, значит, $\frac{1}{2}(a + b - c) < m_c$.

Пример 4. В любом треугольнике ABC сумма синусов двух углов больше синуса его третьего угла:

$$\sin A + \sin B > \sin C. \qquad (13.5)$$

В самом деле, согласно теореме синусов $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Поэтому неравенство $a + b > c$ эквивалентно неравенству (13.5).

Поскольку $\sin C = \sin(A + B)$, то (13.5) эквивалентно неравенству:

$$\sin A + \sin B > \sin(A + B). \tag{13.6}$$

В частности, $\sin 1° + \sin 2° > \sin 177° = \sin 3°$.

Так как $\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{B+C}{2} + \dfrac{C+A}{2} = 180°$, то существует треугольник с этими углами, для которого на основании (13.5) имеем:

$$\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{B+C}{2} > \sin\frac{C+A}{2}. \tag{13.7}$$

Во многих случаях при доказательствах неравенств базовыми служат три следующих неравенства:

1) *во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно*;

2) *внешний угол треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с этим внешним*;

3) *если две стороны одного треугольника равны соответственно двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами не равны, то против большей стороны лежит больший угол, и обратно.*

Пример 5. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой его противоположной стороны, меньше большей из двух других сторон.

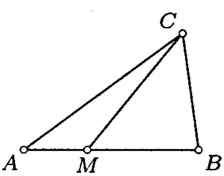


Рис. 90

В самом деле, пусть точка M принадлежит стороне AB треугольника ABC и $AC > CB$ (рис. 90). Убедимся, что $CM < AC$. В силу утверждения (1) из $AC > CB$ следует $\angle B > \angle A$. На основании (2) $\angle AMC > \angle B$. Следовательно $\angle AMC > \angle A$, и поэтому $AC > CM$.

Пример 6. Если диагональ AC четырехугольника $ABCD$ делится диагональю BD пополам и $AB > BC$, то $AD > DC$.

Пусть $AO = OC$ (рис. 88). Стороны OA и OB треугольника AOB равны соответственно сторонам OC и OB треугольника BOC, а третьи стороны этих треугольников не равны $(AB > BC)$, тогда против большей из них лежит больший угол: $\angle AOB > \angle BOC$, что равносильно $\angle COD > \angle AOD$. По этой же теореме для треугольников AOD и COD получается, что $CD > AD$.

13.2. Неравенства как следствия тождественных равенств. В имеющемся тождестве подмечаем, что некоторая величина всегда неотрицательна (или неположительна). Этот факт служит источником неравенств.

Пример 1. Имеем формулу (4.8) Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Так как $OI^2 \geqslant 0$, то $R^2 - 2Rr \geqslant 0$, откуда

$$R \geqslant 2r, \tag{13.8}$$

где равенство имеет место лишь при совпадении точек O и I, т. е. для правильного треугольника. Итак, в любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше диаметра вписанной в него окружности.

Пример 2. Рассмотрим соотношение (3.15) для произвольного треугольника ABC:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Поскольку $0 < r/R \leqslant 1/2$ (13.8), то предыдущее равенство приводит к неравенству:

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}. \tag{13.9}$$

Пример 3. Для любого треугольника ABC имеем соотношение (упр. 4.13):

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Так как $OH^2 \geqslant 0$, то $9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 0$, откуда

$$R^2 \geqslant \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{13.10}$$

причем равенство имеет место лишь для правильного треугольника.

Пример 4. Используя зависимость (упр. 3.22)

$$CC_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2S\sqrt{3},$$

получаем неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S \tag{13.11}$$

между длинами сторон и площадью произвольного треугольника. Равенство имеет место только при совпадении точек C и C_1, т. е. для правильного треугольника ABC.

Пример 5. Третья из формул (11.5) порождает неравенство

$$e^2 + f^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{13.12}$$

для сторон и диагоналей произвольного четырехугольника, где знак равенства имеет место лишь для параллелограмма.

7 – 5545

Пример 6. Квадрат любой стороны четырехугольника меньше утроенной суммы квадратов остальных его сторон:

$$d^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (13.13)$$

Для доказательства привлечем векторное равенство $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ (рис. 91) и запишем его скалярный квадрат:

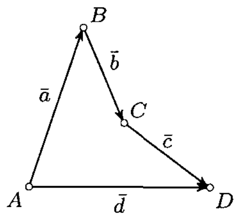


Рис. 91

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c}.$$

Произведя замены $2\bar{a}\bar{b} = a^2 + b^2 - (\bar{a} - \bar{b})^2$, $2\bar{a}\bar{c} = a^2 + c^2 - (\bar{a} - \bar{c})^2$, $2\bar{b}\bar{c} = b^2 + c^2 - (\bar{b} - \bar{c})^2$, получим:

$$d^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (\bar{a} - \bar{b})^2 - (\bar{a} - \bar{c})^2 - (\bar{b} - \bar{c})^2.$$

Поскольку $(\bar{a} - \bar{b})^2 > 0$, $(\bar{a} - \bar{c})^2 > 0$, $(\bar{b} - \bar{c})^2 > 0$, то отбрасывание этих величин приводит к строгому неравенству (13.13).

13.3. Использование ограниченности функций синуса и косинуса. Свойства $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ можно успешно использовать для доказательства неравенств и получения новых неравенств.

Пример 1. Формула (12.1) $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ площади четырехугольника при отбрасывании $\sin\varphi$ приводит к неравенству

$$2S \leqslant ef. \qquad (13.14)$$

Здесь равенство имеет место лишь в случае, когда $\sin\varphi = 1$, т. е. когда диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Пример 2. По теореме косинусов для треугольника $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Следовательно,

$$-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 1.$$

Левое из этих неравенств эквивалентно неравенству $c^2 < (a + b)^2$, или $c < a + b$. Правое же неравенство равносильно неравенству $(a - b)^2 < c^2$, или $|a - b| < c$, откуда либо $a < b + c$, либо $b < a + c$. Этим самым доказано неравенство треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Пример 3. Для любого треугольника

$$S < \frac{1}{6}(ab + bc + ca). \qquad (13.15)$$

В самом деле, так как $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, то $S\leqslant\frac{1}{2}ab$ и аналогично $S\leqslant\frac{1}{2}bc$, $S\leqslant\frac{1}{2}ca$, причем равенство может выполняться лишь в одном из этих трех неравенств. Их сложением получаем строгое неравенство (13.15).

Пример 4. Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле (упр. 3.13)

$$S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A),$$

откуда

$$S\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2). \tag{13.16}$$

Знак равенства имеет место лишь для треугольника, в котором углы при вершинах A и B равны 45°.

13.4. Использование неравенств для скалярного произведения векторов. Из определения скалярного произведения векторов $\bar{a}\bar{b}=ab\cos\varphi$ векторов следует:

$$\bar{a}^2=a^2\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \bar{a}\bar{b}\leqslant ab. \tag{13.17}$$

Последнее неравенство называется *неравенством Коши—Буняковского*. Здесь в первом неравенстве равенство имеет место лишь для $\bar{a}=\bar{0}$, а во втором — лишь для сонаправленных векторов. Используем эти неравенства для доказательства и получения геометрических неравенств.

Пример 1. Докажем, что косинусы углов треугольника удовлетворяют неравенству:

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}. \tag{13.18}$$

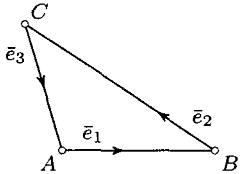


Рис. 92

Возьмем единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, сонаправленные соответственно векторам $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ (рис. 92). Неравенство $(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)^2\geqslant 0$ эквивалентно неравенству (13.18). Действительно, раскрывая скалярный квадрат суммы векторов и учитывая, что $\bar{e}_1^2=\bar{e}_2^2=\bar{e}_3^2=1$ и $\bar{e}_1\bar{e}_2=-\cos B$, $\bar{e}_1\bar{e}_3=-\cos A$, $\bar{e}_2\bar{e}_3=-\cos C$, получаем

$$3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant 0,$$

откуда и следует (13.18). Равенство имеет место лишь в случае, когда $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$, т. е. когда треугольник ABC равносторонний.

Пример 2. Для любого треугольника ABC

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -\frac{3}{2}. \tag{13.19}$$

Возьмем единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ с началом в центре O описанной около треугольника ABC окружности (рис. 93), сонаправленные соответственно векторам $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Так как угол между векторами $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ равен удвоенному углу A, то неравенство $(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)^2 \geqslant 0$ приводит к неравенству $3+2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\geqslant 0$, что равносильно (13.19). Равенство выполняется лишь для правильного треугольника.

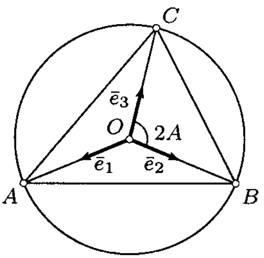


Рис. 93

Пример 3. На основании формулы (11.2) и неравенства Коши—Буняковского имеем для произвольных точек A, B, C, D:

$$2\overline{AC}\cdot\overline{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2\leqslant 2AC\cdot BD,$$

где равенство выполняется только для сонаправленных векторов AC и BD. Следовательно, при принятых ранее обозначениях (§ 11, рис. 77)

$$2ef\geqslant b^2+d^2-a^2-c^2. \tag{13.20}$$

Равенство имеет место для трапеции $ABDC$ с основаниями e и f, а также для четырех коллинеарных точек A, B, C, D при $\overline{AC}\upuparrows\overline{BD}$.

Попутно доказано, что удвоенное произведение оснований трапеции равно разности между суммой квадратов ее диагоналей и суммой квадратов ее боковых сторон.

Равенство $2AC\cdot BD=|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|$ служит метрическим критерием параллельности отрезков AC и BD.

13.5. Применение алгебраических неравенств для средних величин двух положительных чисел. Для двух положительных чисел a и b или отрезков с длинами a и b определяются их средние величины:

$\dfrac{a+b}{2}$ среднее арифметическое,

$\sqrt{ab}$ среднее геометрическое,

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ среднее квадратическое,

$\dfrac{2}{1/a+1/b}=\dfrac{2ab}{a+b}$ среднее гармоническое.

Они связаны между собой такими неравенствами:

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \tag{13.21}$$

причем во всех случаях знак равенства имеет место только при $a=b$.

Эти неравенства доказываются просто. В самом деле,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Далее,

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ \Leftrightarrow \ \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \ \Leftrightarrow \ -(a-b)^2 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно. Наконец,

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \ \Leftrightarrow \ \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab \ \Leftrightarrow \ -\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \leqslant 0,$$

что также очевидно.

Неравенства вида (13.21) имеют место для средних величин $n \geqslant 2$ положительных чисел. При $n=3$ они имеют вид:

$$\frac{3}{1/a+1/b+1/c} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}. \tag{13.22}$$

Неравенства для средних величин можно эффективно использовать для доказательства геометрических неравенств.

Пример 1. Для произвольного треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C \leqslant \frac{1}{2}ab \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Итак,

$$S \leqslant \frac{1}{8}(a+b)^2 \leqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2). \tag{13.23}$$

Равенство выполняется только при $a=b$ и $\sin C=1$, т. е. для прямоугольного равнобедренного треугольника.

Пример 2. Имеем неравенство (11.14) Птолемея $ef \leqslant ac+bd$ для шести расстояний между четырьмя точками, взятыми попарно. Если эти точки не лежат на одной прямой, то равенство имеет место в том и только в том случае, когда эти точки лежат на окружности. Так как

$$ac \leqslant \frac{1}{2}(a^2+c^2) \quad \text{и} \quad bd \leqslant \frac{1}{2}(b^2+d^2),$$

то

$$ef \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2), \tag{13.24}$$

т. е. произведение диагоналей четырехугольника не превосходит полусуммы квадратов всех его сторон и равно ей лишь тогда, когда четырехугольник является прямоугольником.

Пример 3. Докажем, что косинусы углов треугольника удовлетворяют неравенству:

$$\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}. \tag{13.25}$$

Если все косинусы неотрицательны, то в силу второго из неравенств (13.22)

$$\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} \leqslant \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C).$$

На основании (13.18) по свойству транзитивности неравенств получаем:

$$\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} \leqslant \frac{1}{2},$$

что эквивалентно (13.25). Если один из косинусов отрицателен (треугольник тупоугольный), то неравенство (13.25) выполняется с очевидностью.

13.6. Получение неравенств из известных тождеств и неравенств. Применяя тождественные преобразования к имеющимся неравенствам, можно получать эквивалентные им неравенства. Пользуясь транзитивным свойством равенств и неравенств, можно получать из известных тождеств и неравенств новые неравенства.

Пример 1. Используя формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, неравенство (13.19) преобразуем к виду:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqslant \frac{3}{4}, \tag{13.26}$$

а оно эквивалентно также неравенству:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}. \tag{13.27}$$

Пример 2. Из неравенств (13.10) и (13.11) следует:

$$4\sqrt{3}S \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$$

и поэтому

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2. \tag{13.28}$$

Так как $S = \dfrac{abc}{4R}$, то отсюда имеем:

$$abc \leqslant 3\sqrt{3}R^3. \tag{13.29}$$

Привлекая формулу $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ площади треугольника, из неравенства (3.28) получаем:

$$\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}. \tag{13.30}$$

Пример 3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC. Согласно (13.22)

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{2}{3}p, \qquad abc \leqslant \frac{8}{27}p^3.$$

Поскольку $abc = 4SR$ и $p = \dfrac{S}{r}$, то

$$4R \leqslant \frac{8S^2}{27r^3}.$$

Привлекая неравенство $R \geqslant 2r$, см. (13.8), получаем:

$$S \geqslant \sqrt{27}r^2. \tag{13.31}$$

Итак, площадь треугольника заключена в промежутке

$$\sqrt{27}r^2 \leqslant S \leqslant \frac{\sqrt{27}}{8}R^2.$$

Этот процесс получения неравенств можно продолжить.

13.7. Использование чертежа, дополнительных построений нередко представляет собой существо решения задачи на доказательство геометрического неравенства. Тогда важно следить за тем, чтобы не ограничить общность доказательства конкретным чертежом, рассмотреть все возможные случаи. Особенно эффективен метод дополнительных построений (перестроений фигур) в задачах на неравенства, в которых требуется сравнить площади двух фигур.

Задача 1. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ параллельны. Доказать, что площадь треугольника ABC не меньше половины площади этого шестиугольника.

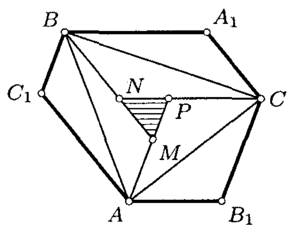


Рис. 94

Решение. Через вершины A, B, C проведем прямые, параллельные соответственно противоположным сторонам данного шестиугольника (рис. 94). Если эти прямые пересекаются в одной точке, то площадь треугольника ABC равняется половине площади S данного шестиугольника. Если же они не имеют общей точки, а своим пересечением образуют треугольник MNP (как представлено на рис. 94), то

$$S = (S_{AB_1CP} + S_{CA_1BN} + S_{BC_1AM}) + S_{MNP}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(S_{AB_1CP} + S_{CA_1BN} + S_{BC_1AM}) + S_{MNP},$$

откуда

$$S_{AB_1CP}+S_{CA_1BN}+S_{BC_1AM}=2S_{ABC}-2S_{MNP}.$$

Значит, $S=2S_{ABC}-S_{MNP}$, откуда $S_{ABC}=\frac{1}{2}(S+S_{MNP})>\frac{1}{2}S$. Объединяя оба случая, имеем: $S_{ABC}\geqslant\frac{1}{2}S$.

Задача 2. Точки M и N — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $S_{ABCD}<4S_{AMN}$.

Решение. Через вершины треугольника AMN проведем прямые, параллельные его противоположным сторонам. Тогда получим треугольник $A_1M_1N_1$ (рис. 95), площадь которого вчетверо больше площади треугольника AMN. Теперь нужно сравнить S_{ABCD} и $S_{A_1M_1N_1}$. Так как треугольники MA_1C и MN_1B симметричны относительно точки M, а треугольники NA_1C и NM_1D симметричны относительно точки N, то $S_{MA_1C}=S_{MN_1B}$ и $S_{NA_1C}=S_{NM_1D}$. Поскольку $M_1N_1\parallel BD$ и четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то отрезок M_1N_1 не пересекает стороны четырехугольника. Возможны два случая: 1) точка C лежит внутри треугольника MA_1N (или же на одной из его сторон MA_1 и NA_1), 2) точка C лежит вне треугольника M_1AN (рис. 96). В первом случае треугольник $A_1M_1N_1$ равновелик пятиугольнику $BCDM_1N_1$, площадь которого очевидно больше площади четырехугольника $ABCD$ (на сумму $S_{ABN_1}+S_{ADM_1}$). Во втором случае вершина B лежит внутри треугольника AMN_1. Поскольку $S_{BMN_1}=S_{CA_1M}$ и $S_{ABN_1}=S_{ADM_1}$ ($AN_1=AM_1$ и $M_1N\parallel BD$), то $S_{A_1M_1N_1}>S_{ABCD}$ (на сумму $S_{CA_1N}+S_{ADM_1}$).

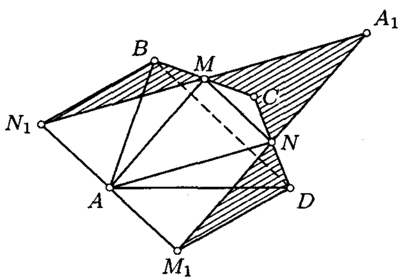


Рис. 95

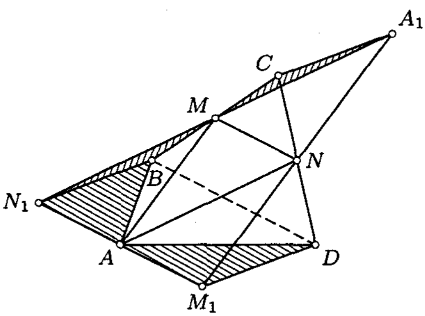


Рис. 96

При доказательстве неоднократно приходилось опираться на выпуклость четырехугольника $ABCD$, хотя это и не везде отмечено. Именно по причине выпуклости не имеет места случай, когда точка C лежит вне треугольника A_1MN и одновременно точка лежит B вне треугольника N_1AM.

Вычислительное решение этой задачи таково. Пусть E — середина AC. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка O пересечения диагоналей лежит внутри него (рис. 97). Так как MN — средняя линия треугольника BCD, то точка T ее пересечения с AC будет серединой OC (теорема Фалеса). Следовательно, $AC > OC \Rightarrow \frac{1}{2}AC > \frac{1}{2}OC \Leftrightarrow EC > TC$. Так как $AT + TC = AE + EC$, то $AT > AE$. Теперь сравним площадь S четырехугольника $ABCD$ с учетверенной площадью треугольника AMN:

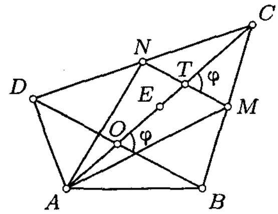


Рис. 97

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi = AE \cdot BD \sin\varphi, \qquad \varphi = \angle BOC;$$

$$4S_{AMN} = 4 \cdot \frac{1}{2}MN \cdot AT \sin\varphi = BD \cdot AT \sin\varphi; \quad AT > AE \Leftrightarrow 4S_{AMN} > S.$$

Упражнения

Докажите неравенства для прямоугольного треугольника (13.1—13.9).

13.1. $h \leqslant \frac{1}{2}c$.

13.2. $c < a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

13.3. $c + h > a + b$.

13.4. $r < \frac{1}{2}a$, $r < \frac{1}{4}c$, $r \leqslant \dfrac{c}{2(1+\sqrt{2})}$.

13.5. $h \leqslant (1+\sqrt{2})r$, $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$.

13.6. $R \geqslant \sqrt{S}$, $R + r \geqslant \sqrt{2S}$.

13.7. $ab + bc + ca < 2c^2$.

13.8. $\dfrac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \leqslant \dfrac{3-\sqrt{8}}{5}$.

13.9. $a^n + b^n < c^n$ при $n > 2$.

Докажите неравенства для остроугольного треугольника (13.10—13.12).

13.10. $a + b + c > 4R$.

13.11. $m_a + m_b + m_c > 4R$.

13.12. $\dfrac{m_a}{h_a} + \dfrac{m_a}{h_a} + \dfrac{m_a}{h_a} \leqslant 1 + \dfrac{R}{r}$.

Докажите неравенства для произвольного треугольника (13.13—13.35).

13.13. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

13.14. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$.

13.15. $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant abc$.

13.16. $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0$.

13.17. $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$.

13.18. $h_a+h_b+h_c < 2p$.

13.19. $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$.

13.20. $a+b+c \leqslant \sqrt{27}R$.

13.21. $m_a+m_b+m_c \leqslant \frac{9}{2}R$.

13.22. $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \leqslant \frac{27}{4}R$.

13.23. $m_a^2+m_b^2 \geqslant \frac{9}{8}c^2$.

13.24. $l_a+l_b+l_c \leqslant \sqrt{3}p$.

13.25. $l_a^2+l_b^2+l_c^2 \leqslant p^2$.

13.26. $\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

13.27. $c \geqslant (a+b)\sin\frac{C}{2}$.

13.28. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

13.29. $\cos A+\cos B+\cos C \geqslant \frac{3r}{R}$.

13.30. $\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13.31. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$.

13.32. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13.33. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{R^2}$.

13.34. $p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S$.

13.35. $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

13.36. Точка D принадлежит стороне BC треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD.

13.37. Треугольники ABC и ABD имеют равные углы при вершинах C и D. Докажите, что если $|AC-CB| < |AD-DB|$, то а) площадь треугольника ABC больше площади треугольника ABD, б) периметр треугольника ABC больше периметра треугольника ABD.

13.38. Докажите, что произведение любых двух сторон треугольника больше $4Rr$.

13.39. Докажите, что сумма радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника не превосходит его наибольшей стороны, если в этом треугольнике нет тупого угла.

13.40. Если b и d — длины боковых сторон трапеции, e и f — длины ее диагоналей, то $|e-f|>|b-d|$ и $e+f>b+d$.

13.41. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right).$$

13.42. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают его описанную окружность вторично в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $S_{ABC}\leqslant S_{A_1B_1C_1}$.

13.43. Дан треугольник ABC. На лучах AB, BC, CA от точек B, C, A отложены соответственно отрезки BB_1, CC_1, AA_1 вне треугольника так, что $BB_1=AC$, $CC_1=AB$, $AA_1=BC$. Докажите, что

$$S_{ABA_1}+S_{BCB_1}+S_{CAC_1}\geqslant 3S_{ABC}.$$

13.44. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники с центрами A_1, B_1, C_1. Докажите, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ не меньше площади данного треугольника ABC.

§ 14. *Геометрические экстремумы*

Наибольшее (максимальное) и наименьшее (минимальное) значения, которые принимает переменная величина при некоторых заданных условиях, называются ее *экстремальными* значениями (экстремумами).

Если имеется нестрогое неравенство вида $x\geqslant a$ $(x\leqslant a)$, в котором одна часть постоянна, а другая переменна, то эта постоянная есть экстремум данной переменной. Возьмем для примера неравенство (13.18) $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$. На множестве всех треугольников сумма косинусов их углов переменна. Число $\frac{3}{2}$ есть максимум этой суммы. Другой пример. Около окружности заданного радиуса r описывается бесконечное множество треугольников. Для их площадей доказано неравенство $S\geqslant\sqrt{27}r^2$ (п. 13.6). Число $\sqrt{27}r^2$ является минимумом величины S.

14.1. Экстремальные свойства суммы и произведения положительных чисел. Рассмотрим наиболее типичные элементарные способы решения задач на доказательство геометрических экстремумов и их отыскание.

Обратимся к нестрогим неравенствам (13.21) и (13.22) для средних величин положительных чисел. В них равенство имеет место тогда и только тогда, когда эти числа равны. Отсюда можно сделать весьма полезные выводы при двух предположениях: 1) сумма чисел переменна, а их произведение постоянно, 2) произведение чисел переменно, а их сумма постоянна. Обращаясь только к неравенству для среднего геометрического и среднего арифметического, имеем такие результаты.

1°. *Если произведение положительных чисел постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение только при равенстве этих чисел.*

2°. *Если сумма положительных чисел постоянна, то их произведение принимает наибольшее значение только при равенстве этих чисел.*

Используем это в задачах.

Задача 1. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

Решение. Обратимся к формуле Герона

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где по условию задачи p постоянно. Так как $(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-2p = p$, то на основании 2° величина S^2 максимальна при $p-a = p-b = p-c$, т.е. при $a=b=c$ и только в этом случае.

Задача 2. Через данную точку, лежащую внутри данного угла, провести прямую, отсекающую от сторон угла отрезки, сумма которых минимальна.

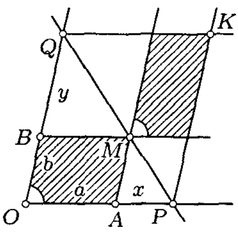


Рис. 98

Решение. Пусть некоторая прямая, содержащая данную точку M, пересекает стороны данного угла с вершиной O в точках P и Q (рис. 98). Проведем через P и Q прямые, параллельные сторонам угла. Пусть $OA=a$, $OB=b$, $AP=x$, $BQ=y$. Тогда $OP+OQ=(a+b)+(x+y)$. Поскольку сумма $a+b$ постоянна, то задача сводится к нахождению условий, при которых минимальна сумма $x+y$. Заметим, что заштрихованные параллелограммы равновелики. Так как они имеют соответственно равные углы, то $xy=ab=\text{const}$. Согласно 1° сумма $x+y$ минимальна при $x=y$. Тогда $x^2=ab$ и $OP+OQ=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ — искомое минимальное значение суммы этих отрезков. По формуле $x=\sqrt{ab}$ отрезок $AP=BQ$ строится известным способом, а затем и искомая прямая PQ. Она единственна.

14.2. Экстремальные значения синуса и косинуса могут быть использованы в геометрических задачах на экстремумы. Эта идея была уже использована в § 12 (п. 12.2), где из формулы (12.5) площади четырехугольника сделан вывод о том, что из всех четырехугольников с данными длинами сторон максимальную площадь имеет тот, около которого можно описать окружность.

Рассмотрим другие примеры.

Задача 1. Доказать, что из всех треугольников с данной стороной a и данным противоположным углом α наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Решение. Так как все такие треугольники вписаны в одну окружность радиуса R, то

$$2p = a + b + c = a + 2R(\sin B + \sin C) =$$
$$= a + 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = a + 4R\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Числа a и $4R\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$ постоянны, поэтому $2p$ максимально при максимальном $\cos\frac{B-C}{2}$, т. е. при $\cos\frac{B-C}{2} = 1$, откуда следует $\angle B = \angle C$, а значит, треугольник равнобедренный.

Задача 2. В данную окружность вписать трапецию с данным острым углом α, которая имела бы наибольшую площадь.

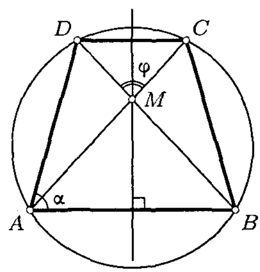


Рис. 99

Решение. Поскольку трапеция вписанная, то она равнобочная, и $S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, где d — длина диагонали, φ — угол между диагоналями. По теореме синусов $d = 2R\sin\alpha$ (R — радиус данной окружности). Поэтому $S = 2R^2\sin^2\alpha\sin\varphi$. Поскольку R и α заданы, то S максимальна при $\sin\varphi = 1$, т. е. когда диагонали трапеции перпендикулярны (рис. 99). В этом случае $\angle MAB = \angle MBA = 45°$. Следовательно, при $\alpha \leqslant 45°$ трапеция превращается в треугольник. Построение искомой трапеции можно выполнить так. В данную окружность вписываем угол величиной α. Хорда, на которую он опирается, равна диагонали трапеции. Под углом 45° к этой хорде проводим диаметр окружности. Вторая диагональ симметрична первой относительно этого диаметра.

14.3. Об эквивалентности задач на экстремумы. Задачу о нахождении одного экстремума можно свести к задаче о другом экстремуме, который уже известен или находится проще первого.

Задача. Даны стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ четырехугольника $ABCD$. Известно, что в него можно вписать окружность. Какое наибольшее значение может принять радиус этой окружности?

Решение. Имеем: $S = pr$, где $p = a + c = b + d$. Так как p постоянно, то максимум S и максимум r достигаются одновременно. А эта задача уже решена: из всех четырехугольников с данными сторонами вписанный в окружность имеет наибольшую площадь, квадрат которой равен $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$. В силу того, что $a + c = b + d = p$, получаем $S^2 = abcd$ и $d = a - b + c$. Итак, максимальное значение r равно

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{abc(a-b+c)}}{a+c}.$$

14.4. Применение геометрических преобразований. Движения плоскости (центральная и осевая симметрии, перенос, поворот) в ряде экстремальных задач находятся вне конкуренции с другими методами по краткости, убедительности и изяществу решений.

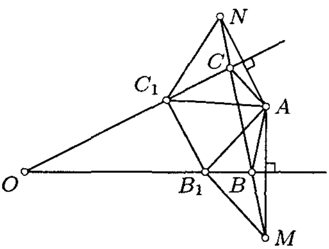


Рис. 100

Задача 1. Внутри острого угла дана точка A. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, вершины B и C которого принадлежат сторонам угла.

Решение. Построим точки M и N, симметричные точке A относительно сторон данного угла. Прямая MN пересекает его стороны в искомых точках B и C (рис. 100). Действительно, если B_1 и C_1 — какие-либо другие точки на сторонах угла, то $AB_1 + B_1C_1 + C_1A = MB_1 + B_1C_1 + C_1N > MN = MB + BC + CN = AB + BC + CA$. Следовательно, треугольник ABC имеет наименьший периметр. Этим доказано и то, что этот треугольник единственный.

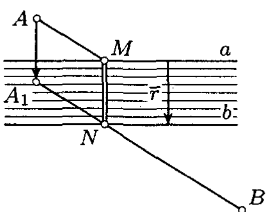


Рис. 101

Задача 2. По разные стороны от реки находятся пункты A и B. Где нужно построить мост, чтобы путь из A в B через него был кратчайшим?

Решение. Пусть параллельные прямые a и b изображают берега реки (рис. 101) и $T_{\bar{r}}$ — перенос в перпендикулярном им направлении, при котором $a \to b$. Если при этом переносе $A \to A_1$ и M — прообраз точки $N = b \cap (BA_1)$, то путь из A в B по ломаной $AMNB$ кратчайший, так как длина MN моста определена шириной реки, а сумма $AM + NB = A_1N + NB$ минимальна.

Задача 3. В данном остроугольном треугольнике ABC найти точку P, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна (задача Ферма).

Решение. Используем поворот около вершины B на $60°$. Пусть при этом повороте $A \to A_1$, $P \to P_1$ (рис. 102). Так как треугольник BPP_1 равносторонний, то $BP = PP_1$ и поэтому $PA + PB + PC = P_1A_1 + P_1P + PC$. Эта сумма минимальна тогда и только тогда, когда точки A_1, P_1, P, C коллинеарны. В этом случае $\angle BPC = 120°$ и $\angle APB = \angle A_1P_1B = 120°$. *Поэтому и $\angle APC = 120°$. Итак, искомой точкой P является точка, из которой каждая сторона треугольника ABC видна под углом $120°$.* Она называется *точкой Торричелли* треугольника. Четырехугольник $APBA_1$ является вписанным в окружность. Поэтому точку Торричелли треугольника ABC можно построить как точку пересечения прямой CA_1 и окружности, описанной около правильного треугольника ABA_1.

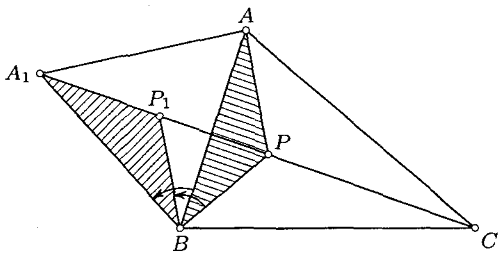


Рис. 102

В этой задаче вершины треугольника ABC равноправны. Поэтому точку Торричелли можно построить еще и как точку пересечения прямых, соединяющих вершины данного треугольника с третьими вершинами правильных треугольников, построенных на его сторонах во внешнюю сторону (рис. 64).

Требование остроугольности треугольника ABC завышено: решение остается в силе, когда углы треугольника не больше $120°$. Если $\angle A = 120°$, то точка P совпадает с вершиной A.

14.5. Экстремальные значения квадратного трехчлена. Если исследуемая функция является квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, то она всегда имеет единственное экстремальное значение — минимальное при $a > 0$, максимальное при $a < 0$, которое достигается при $x = -b/2$. Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то это значение x совпадает с серединой промежутка между корнями трехчлена.

Эти свойства можно использовать в геометрических задачах.

Задача 1. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ (рис. 103). При каком отношении $AA_1 : AB$ площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ наименьшая?

Решение. Пусть $AB=1$, $AA_1=x$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом (поворот около центра данного квадрата на 90°). Его площадь равна $A_1B_1^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Эта функция имеет минимум при $x = \frac{1}{2}$, т. е. когда вершины второго квадрата являются серединами сторон данного квадрата.

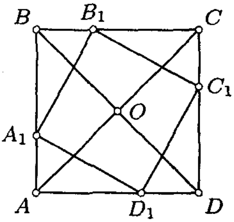


Рис. 103

Задача 2. Из всех трапеций, вписанных в данную окружность и имеющих общим основанием диаметр окружности, найти ту, у которой периметр наибольший.

Решение. Пусть R — радиус окружности, x — боковая сторона, y — меньшее основание трапеции. Тогда по теореме Пифагора каждая диагональ трапеции равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. На основании теоремы Птолемея $4R^2 - x^2 = x^2 + 2R \cdot y$, откуда $y = \frac{2R^2 - x^2}{R}$ и поэтому периметр трапеции равен $2x + y + 2R = \frac{1}{R}(-x^2 + 2Rx)$. Функция $-x^2 + 2Rx$ принимает наибольшее значение при $x = R$. А тогда и $y = R$. Итак, наибольший периметр имеет трапеция, у которой боковые стороны и меньшее основание равны радиусу окружности.

Задача 3. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ даны точки N и P, $BN = n$, $BP = m$. Через произвольную точку M отрезка PN проведены прямые ME и MF, параллельные сторонам прямоугольника (рис. 104). Найти максимальное и минимальное значение площади S прямоугольника $MFDE$, если $BC = a$, $AB = b$.

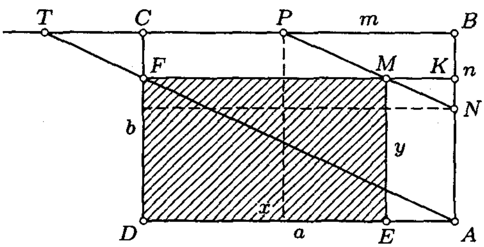


Рис. 104

Решение. Пусть x, y — длины сторон DE и EM прямоугольника $MFDE$. Тогда $MK = EA = a - x$, $KN = AK - AN = y + n - b$. Из подобия треугольников MKN и PBN имеем: $\frac{a-x}{y+n-b} = \frac{m}{n}$, откуда $y = \frac{1}{m}(-nx + an + bm - mn)$. Поэтому

$$S = xy = \frac{1}{m}(-nx^2 + (an + bm - mn)x), \qquad x \geqslant a - m.$$

Так как $a > m$ и $b > n$, то $an + bm - mn = (a-m)n + bm > 0$. Функция $-nx^2 + (an + bm - mn)x$ имеет максимум при $x_0 = \frac{an + bm - mn}{2n}$.

Исследуем, при каком условии $x_0 \leqslant a$. Неравенство

$$\frac{an + bm - mn}{2n} \leqslant a$$

эквивалентно условию $mn \geqslant bm - an$, или $\frac{b}{n} - \frac{a}{m} \leqslant 1$. При этом условии площадь S прямоугольника $MFDE$ максимальна и равна

$$\frac{(an + bm - mn)^2}{4mn}.$$

При $\frac{b}{n} - \frac{a}{m} \geqslant 1$ будет $x_0 \geqslant a$. В этом случае на промежутке $[a - m, a]$ функция S строго возрастает. Поэтому она принимает при $x = a - m$ минимальное значение $b(a - m)$ и при $x = a$ максимальное значение $a(b - n)$. Итак, площадь S прямоугольника $MFDE$ минимальна, когда точка M совпадает с P. Свое максимальное значение она принимает при $mn > bm - an$ во внутренней точке M отрезка PN, а при $mn < bm - an$ — в конечной точке N.

В случае максимума площади S для внутренней точки M отрезка PN эту точку M можно построить с помощью отрезка $DE = x_0$ по полученной формуле, представив ее в виде:

$$x_0 = \frac{1}{2}\left((a - m) + \frac{bm}{n}\right).$$

Искомый отрезок DE равен полусумме отрезков $CP = a - m$ и $BT = \frac{bm}{n}$ при условии $AT \parallel PN$:

$$DE = \frac{1}{2}(CP + BT), \qquad AT \parallel PN.$$

Это значит, что отрезок DE равен средней линии любой трапеции с основаниями, равными CP и BT. Условие $DE \geqslant CP$ $(x \geqslant a - m)$ эквивалентно $BT \geqslant CP$. В случае, когда $BT = CP$, т. е. когда $mn = an - bm$ максимальное значение достигается при $M = P$.

8 – 5545

Упражнения

14.1. Из всех прямоугольных треугольников с данной высотой найдите треугольник наименьшего периметра.

14.2. Дан острый угол и на одной его стороне отрезок AB. Постройте на другой стороне угла такую точку C, чтобы угол ACB был наибольшим.

14.3. Внутри квадрата дана точка M. Проведите через нее прямую, отсекающую от квадрата треугольник а) минимальной площади, б) максимальной площади.

14.4. Из всех прямоугольных треугольников найдите тот, у которого отношение $\frac{R}{r}$ минимально. Найдите это отношение.

14.5. На диагонали AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) найдите точку M (рис. 105), для которой сумма площадей треугольников AMP и CMQ минимальна ($PQ \parallel AB$).

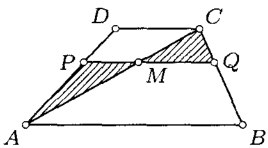


Рис. 105

14.6. Дан треугольник ABC. Найдите точку, сумма квадратов расстояний которой до вершин треугольника минимальна.

14.7. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин минимальна.

14.8. Найдите внутри данного треугольника точку, произведение расстояний от которой до сторон треугольника максимально.

14.9. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые MA, MB, MC, пересекающие соответственно стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что сумма $\frac{AM}{MA_1} + \frac{BM}{MB_1} + \frac{CM}{MC_1}$ и произведение $\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1}$ достигают минимума в центроиде треугольника.

14.10. Через точку M, лежащую внутри остроугольного треугольника ABC, проведены прямые MA, MB, MC, пересекающие стороны BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. При каком положении точки M периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший?

14.11. Проведите через вершину A треугольника ABC прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей. Рассмотрите случаи острого, прямого и тупого углов с данной вершиной треугольника.

14.12. На основании AB трапеции $ABCD$ дана точка M. Постройте на основании CD такую точку N, чтобы площадь четырехугольника, полученного при пересечении прямых AN, BN, CM, DM, была наибольшей.

14.13. Докажите, что минимальная сумма расстояний внутренней точки треугольника до его вершин равна

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}.$$

§ 15. *Экстремальные свойства правильных многоугольников*

15.1. Изопериметрическая задача. В предыдущем параграфе (п. 14.1) было доказано, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник. В § 12 было доказано, что из всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник. Его всегда можно построить (упр. 7.24). Покажем, что из всех прямоугольников данного периметра $2p$ наибольшую площадь имеет квадрат. Действительно, площадь S прямоугольника равна

$$S = x(p - x) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2,$$

откуда видно, что максимальна она тогда и только тогда, когда $p/2 - x = 0$, т. е. когда $x = p - x = p/2$. Следовательно, прямоугольник — квадрат.

Такого рода задачи называют *изопериметрическими задачами.* В общей формулировке изопериметрическая задача такова: *среди плоских фигур заданного множества, имеющих равные периметры (длины граничных кривых), найти ту, которая имеет наибольшую площадь.*

Эта сложная задача решалась для различных множеств фигур в течение XVIII—XIX веков швейцарскими геометрами Г. Крамером, С. Люилье и Я. Штейнером. Основным методом решения изопериметрических задач служит вариационное исчисление.

Я. Штейнер доказал, что из всех плоских фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Доказательство Штейнера кратко и изящно, но содержит существенный пробел: он предположил (но не доказал), что фигура максимальной площади существует. А это представляет собой одну из трудных задач, решение которой далеко не элементарно.

Ниже рассмотрим решение (неполное) изопериметрической задачи для многоугольников. Предположив существование многоугольника заданного периметра и имеющего максимальную площадь, докажем, что таковым является правильный многоугольник и только он.

15.2. Общие свойства изопериметрических фигур максимальной площади рассмотрим для множества многоугольников.

1°. *Многоугольник, имеющий заданный периметр и наибольшую площадь, необходимо выпуклый.* В самом деле, если бы невыпуклый многоугольник $ABCDE$ (рис. 106) данного периметра имел наибольшую площадь, то, отразив вершину A его угла, большего $180°$, от внешней диагонали BE в точку F, мы получили бы многоугольник $BCDEF$ большей площади и того же периметра.

2°. *Всякая прямая, делящая пополам заданный периметр многоугольника максимальной площади, делит пополам и его площадь.*

Это свойство также просто доказывается с помощью осевой симметрии методом от противного. Пусть прямая m делит пополам периметр многоугольника $ABCDE$ (рис. 107), т. е. $PA + AB + BQ = PE + ED + DC + CQ$, но не делит пополам его площадь: $S_{PEDCQ} > S_{PABQ}$. Отразив многоугольник $PEDCQ$ от этой прямой m, получим многоугольник $PEDCQC'D'E'$, имеющий вдвое большую площадь, чем S_{PEDCQ}, т. е. большую, чем площадь данного многоугольника $ABCDE$, и равный с ним периметр. Если полученный многоугольник невыпуклый, то согласно 1° его можно заменить многоугольником того же периметра еще большей площади.

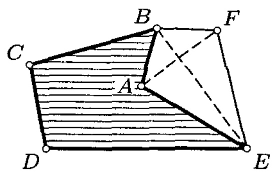


Рис. 106

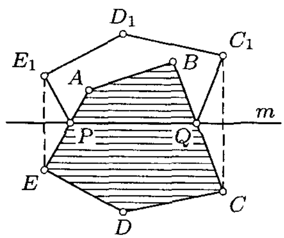


Рис. 107

Для множества произвольных плоских фигур доказательства этих двух свойств по существу ничем не отличаются от изложенных. Они принадлежат Я. Штейнеру.

15.3. Две подготовительные задачи, которые будут нужны для доказательства основного экстремального свойства правильных многоугольников.

Задача 1. Из всех треугольников, имеющих данную сторону c и данный периметр $2p$, найти треугольник наибольшей площади.

Решение. По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, где p и $p-c$ постоянны. Поэтому S максимальна тогда и только тогда, когда максимально произведение $(p-a)(p-b)$. Но поскольку сумма $(p-a)+$ $+(p-b)=c$ постоянна, то произведение $(p-a)(p-b)$ максимально лишь при равенстве сомножителей: $p-a=p-b$, т. е. при $a=b$ (п. 14.1).

Итак, из всех треугольников, имеющих данную сторону и данный периметр, наибольшую площадь имеет треугольник, в котором равны две другие стороны.

Задача 2. В данный угол вписана окружность. На большей (меньшей) из дуг, на которые она делится точками касания со сторонами угла, найти точку, в которой касательная к этой окружности отсекает от данного угла треугольник минимальной (максимальной) площади.

Решение. Пусть PQ — касательная к окружности в произвольной точке M большей из указанных дуг окружности (рис. 108). Когда точка M приближается к одной из точек касания, площадь треугольника PQC неограниченно увеличивается. Поэтому имеет смысл искать минимум этой площади. Проведем касательную AB в середине E этой дуги и сравним площади треугольников PQC и ABC. Очевидно, $S_{PQC}>S_{ABC}$ на разность $S_{BQK}-S_{APK}$. Следовательно, минимум площади S_{PQC} достигается, когда M совпадает с E. Проведя аналогичные рассуждения для произвольной точки N меньшей дуги, приходим к выводу, что максимум площади треугольника P_1Q_1C будет в случае, когда точка совпадает с серединой E этой дуги.

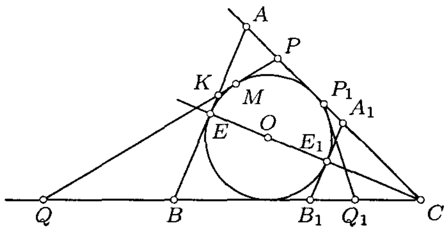


Рис. 108

Итак, если в данный угол вписана окружность, то касательные к этой окружности в точках ее пересечения с биссектрисой угла отсекают от угла треугольник максимальной площади (по сравнению с другими касательными в точках меньшей дуги окружности) и треугольник минимальной площади (по сравнению с другими касательными в точках большей дуги). Оба эти треугольника равнобедренные.

15.4. Изопериметрическая теорема для многоугольников. Из всех многоугольников заданного периметра с данным числом сторон наибольшую площадь имеет правильный многоугольник.

Доказательство. Пусть многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ имеет заданный периметр $2p$ и максимальную площадь (существование его предполагаем, доказательство неэлементарно). На основании свойства 1° (п. 15.2) он выпуклый. Докажем, что он правильный. Зафиксируем все его вершины, кроме одной вершины A_i. Тогда в треугольнике

$A_{i-1}A_iA_{i+1}$ будет постоянна сторона $A_{i-1}A_{i+1}$ и постоянна сумма двух других сторон (периметр многоугольника задан). Этот треугольник имеет максимальную площадь, когда A_i занимает такое положение, что $A_iA_{i-1} = A_iA_{i+1}$ (задача 1 п. 15.3). Так как вершина A_i произвольная из всех вершин данного многоугольника, то все его стороны равны.

Зафиксируем теперь (независимо от предыдущего фиксирования вершин) все прямые, на которых лежат стороны выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, кроме одной прямой A_iA_{i+1}. Докажем, что прилежащие к этой стороне a_i углы многоугольника равны. Отсюда будет следовать в силу произвольности выбора этой стороны, что все углы многоугольника равны.

Рассмотрим три мыслимых случая: 1) прямые, содержащие смежные с a_i стороны, пересекаются в точке O, лежащей в другой полуплоскости от прямой a_i, нежели данный многоугольник, 2) точка O их пересечения лежит в одной полуплоскости с многоугольником от прямой a_i, 3) эти прямые параллельны.

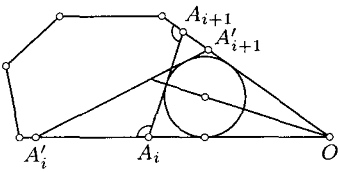


Рис. 109

Первый случай представлен рисунком 109. В треугольник OA_iA_{i+1} впишем окружность. Сумма площади σ этого треугольника и площади S многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ постоянна, так как все прямые фиксированы, кроме прямой A_iA_{i+1}, а она на эту сумму не влияет. Поэтому S максимальна лишь тогда, когда минимальна σ. На основании задачи 2 п. 15.3 треугольник OA_iA_{i+1} должен быть равнобедренным, и значит, углы многоугольника при вершинах A_i и A_{i+1} должны быть равны. Для другой касательной $A'_iA'_{i+1}$ многоугольник $A_1A_2 \ldots A'_iA'_{i+1} \ldots A_n$ имеет меньшую площадь и тот же периметр (теорема п. 7.3).

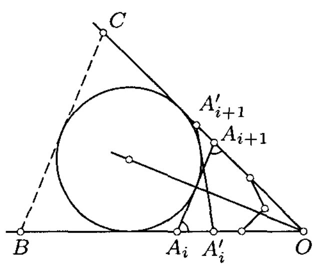


Рис. 110

Во втором случае построим вневписанную окружность треугольника OA_iA_{i+1} (рис. 110). Разность $\sigma - S$ площади треугольника OA_iA_{i+1} и площади многоугольника постоянна (в силу условия фиксирования прямых). Поэтому σ и S достигают максимума одновременно. На основании задачи 2 предыдущего пункта это будет лишь тогда, когда треугольник OA_iA_{i+1} равнобедренный, что влечет равенство углов многоугольника при вершинах A_i и A_{i+1}. Для другой касательной $A'_iA'_{i+1}$ площадь многоугольника $A_1A_2\ldots A'_iA'_{i+1}\ldots A_n$ будет меньше, а периметр останется тем же, так как $A'_iA_i + A_iA_{i+1} = A_{i+1}A'_{i+1} + A'_{i+1}A'_i$ (это следует из описанных четырехугольников A_iBCA_{i+1}, и $A'_iBCA'_{i+1}$).

В третьем случае, когда $A_{i-1}A_i \parallel A_{i+1}A_{i+2}$ (рис. 111), проведем диагональ $A_{i-1}A_{i+2}$. Полученная трапеция имеет заданную высоту h, заданный периметр и заданную боковую сторону $A_{i-1}A_{i+2}$. Следовательно, будет постоянна сумма $l = a + b + x$, $x = A_iA_{i+1}$. Площадь $\frac{1}{2}(a+b)h$ этой трапеции будет максимальна при максимальной сумме $a+b=l-x$, т. е. при минимальной боковой стороне x, что имеет место лишь при условии $A_iA_{i+1} \perp A_iA_{i-1}$. Значит, и в этом случае углы многоугольника при вершинах A_i и A_{i+1} равны. Поскольку прямая A_iA_{i+1} произвольна, то многоугольник максимальной площади должен иметь все равные углы.

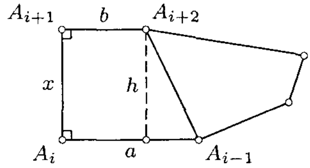


Рис. 111

Итак, многоугольник максимальной площади при заданном периметре должен быть равносторонним и равноугольным одновременно, т. е. правильным.

Следствие. Нетрудно подсчитать, что площадь правильного n-угольника с периметром $2p$ равна $\frac{1}{n}p^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. По доказанной теореме для любого n-угольника с тем же периметром имеет место так называемое *изопериметрическое неравенство*:

$$S \leqslant \frac{1}{n}p^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}, \tag{15.1}$$

в котором равенство достигается лишь для правильного n-угольника.

Из неравенства (15.1) следует, что из всех n-угольников данной площади S (при фиксированном n) наименьший периметр имеет правильный n-угольник.

15.5. Экстремальное свойство правильного многоугольника из множества многоугольников, вписанных в данную окружность. *Из множества всех n-угольников с данным числом сторон, вписанных в одну окружность, правильный многоугольник имеет наибольшую площадь и наибольший периметр.*

Доказательство. Пусть вписанный в данную окружность ω n-угольник M не является правильным. Тогда у него обязательно найдется сторона, *меньшая* стороны a вписанного в эту окружность правильного n-угольника M_0. Не сужая общности доказательства, можно полагать также, что у M имеется сторона, *большая* a. Этого не случится лишь тогда, когда многоугольник M полностью вписан в дугу окружности ω, меньшую $1/n$-й части этой окружности. В этом случае многоугольник M будет целиком лежать внутри меньшего сегмента, стягиваемого хордой длины a. А тогда, очевидно, $S_M < S_{M_0}$. Оставляя теперь этот случай в стороне как не противоречащий доказываемой теореме, будем менять местами стороны многоугольника M, чтобы наибольшая и наименьшая его стороны оказались соседними. Это всегда можно сделать, так как изменение порядка двух смежных сторон AB и BC вписанного многоугольника M сохраняет площадь треугольника ABC (рис. 112) и поэтому сохраняет площадь многоугольника. Повторяя эту операцию нужное число раз, можно сделать соседними любые две стороны вписанного многоугольника.

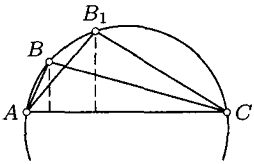


Рис. 112

Пусть AB — наименьшая сторона и BC — наибольшая сторона после этих перестановок (если они были необходимы). На дуге ABC окружности ω построим точку B_1 такую, что хорда AB_1 равна стороне a правильного вписанного многоугольника M_0 ($AB < AB_1 < BC$). Площадь треугольника AB_1C больше площади треугольника ABC, так как они имеют общую сторону AC, а высота первого больше высоты второго. Таким образом, первоначальный вписанный многоугольник M оказался замененным некоторым вписанным многоугольником M_1, имеющим большую площадь, чем M, и одну сторону AB_1, равную a. Если полученный многоугольник M_1 не является правильным, то продолжим описанный процесс, получая новые вписанные многоугольники большей и большей площади. Не более чем через n шагов этот процесс закончится правильным многоугольником M_0, для которого

$$S_{M_0} > S_{M_i} > S_M.$$

Доказательство максимальности периметра по существу не отличается от предыдущего с той лишь разницей, что приходится использовать свойство, доказанное в п. 14.2 (задача 1), согласно которому из двух вписанных треугольников, имеющих общую сторону, больший периметр имеет тот, у которого больше высота, опущенная на эту сторону.

15.6. Экстремальное свойство правильного многоугольника из множества многоугольников, описанных около одной окружности. *Из множества всех n-угольников с данным числом сторон, описанных около одной окружности, правильный n-угольник имеет наименьшую площадь и наименьший периметр.*

Доказательство. Пусть M и M_0 — произвольный и правильный n-угольники, описанные около данной окружности ω. Опишем около M_0 окружность и рассмотрим круг K, для которого эта окружность является границей. Площадь многоугольника M_0 равна разности $S_K - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n)$ между площадью S_K круга K и суммой площадей σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сегментов этого круга, отсекаемых сторонами многоугольника M_0 (рис. 113). Важно заметить, что стороны многоугольника M отсекают от круга K сегменты, равные тем, которые отсекаются сторонами многоугольника M_0, но в отличие от первых они могут иметь непустые пересечения. Поэтому площадь σ, занимаемая объединением вторых сегментов, будет меньше $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ (за счет наложений и непустых пересечений). Пусть $K \cap M = F$ (заштриховано на рис. 113). Имеем:

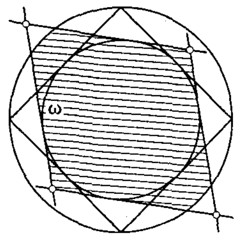


Рис. 113

$$S_M \geqslant S_F = S_K - \sigma > S_K - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n) = S_{M_0}.$$

Так как площадь S и периметр $2p$ многоугольника M, описанного около окружности ω радиуса r, связаны зависимостью $S = pr$, то при заданном r наименьшие значения S и p достигаются одновременно, т. е. по доказанному выше для правильного n-угольника.

Задача. Пусть R_1, R_2, R_3 — расстояния от точки M до вершин треугольника ABC. Доказать, что

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}S} \geqslant 6r, \tag{15.2}$$

где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

Решение. Построим точки, симметричные точке M относительно сторон треугольника ABC. Соединив их последовательно с вершинами данного треугольника, получим шестиугольник с площадью $2S$ и периметром $2(R_1 + R_2 + R_3)$. Используем изопериметрическое неравенство (15.1) при $n = 6$:

$$2S \leqslant \frac{1}{6}(R_1 + R_2 + R_3)^2 \cdot \sqrt{3},$$

откуда

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}S}.$$

Так как $S \geqslant \sqrt{27}r^2$ (13.31), то

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 6r.$$

Равенство достигается только для правильного треугольника и его центра.

§ 16. *Радикальная ось и радикальный центр окружностей*

16.1. Степень точки относительно окружности. Возвратимся к теореме о хордах и секущих (§ 2). Пусть через внешнюю относительно окружности $\omega(O, R)$ точку M проведена произвольная секущая, пересекающая эту окружность в точках A и B (рис. 114), и касательная MT. Тогда $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=MT^2=OM^2-R^2$. Эта величина не зависит от выбора секущей, а зависит от выбора точки M.

Если точка M лежит внутри окружности ω, то проведем через нее две хорды — произвольную хорду AB и хорду CD, перпендикулярную OM (рис. 115). Тогда $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}=-MC^2=-(OC^2-OM^2)=$ $=OM^2-R^2$. Наконец, в случае, когда $M\in\omega$, очевидно, $OM^2-R^2=0$.

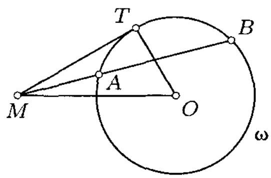


Рис. 114

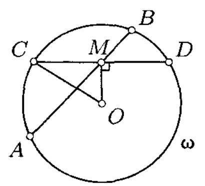


Рис. 115

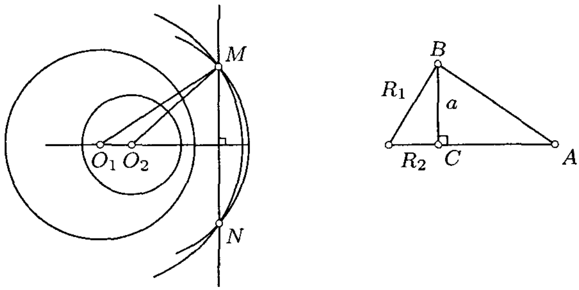
Итак, величина OM^2-R^2 при заданной окружности $\omega(O, R)$ зависит только от положения точки M. Она называется *степенью точки M* относительно окружности ω. Степени точек, лежащих вне окружности ω, положительны. Степени точек, лежащих внутри окружности ω, отрицательны. Степени точек окружности ω равны нулю.

16.2. Радикальная ось двух окружностей определяется как множество точек плоскости, каждая из которых имеет равные степени относительно этих окружностей.

Теорема. *Если две данные окружности (O_1, R_1) и (O_2, R_2) неконцентрические, то их радикальная ось существует и является прямой линией.*

Доказательство. Пусть точка M имеет равные степени относительно данных окружностей: $O_1M^2-R_1^2=O_2M^2-R_2^2$, откуда O_1M^2- $-O_2M^2=R_1^2-R_2^2$. Для определенности полагаем $R_1\geqslant R_2$. Если $R_1=R_2$, то $O_1M=O_2M$ и поэтому искомое множество точек M есть серединный перпендикуляр к отрезку O_1O_2. При $R_1>R_2$ построим отрезок a, для которого $R_1^2-R_2^2=a^2$, и построим произвольный прямоугольный треугольник ABC с катетом $BC=a$, но такой, чтобы $AB+AC>O_1O_2$ (рис. 116, б). Тогда окружности (O_1, AB) и (O_2, AC) пересекаются и их общие точки M и N принадлежат искомому множеству. Действительно,

$$O_1M^2 - O_2M^2 = AB^2 - AC^2 = BC^2 = a^2 = R_1^2 - R_2^2.$$



а) б)

Рис. 116

Итак, искомое множество точек непусто. Докажем теперь, что это множество точек есть прямая линия, перпендикулярная линии O_1O_2 центров данных окружностей. Пусть M — фиксированная точка, а X — произвольная точка этого множества. Тогда $O_1M^2 - O_2M^2 = O_1X^2 - O_2X^2$ и поэтому $O_1M^2 + O_2X^2 - O_1X^2 - O_2M^2 = 0$. С другой стороны, согласно формуле (11.2) $O_1M^2 + O_2X^2 - O_1X^2 - O_2M^2 = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{XM}$.

Следовательно, $\overline{O_1O_2} \cdot \overline{XM} = 0$ и $O_1O_2 \perp XM$ для любой точки X радикальной оси. Поскольку точка M фиксирована, то радикальная ось двух окружностей есть прямая, проходящая через M перпендикулярно линии центров данных окружностей (рис. 116, а). Построение точки M уже рассмотрено.

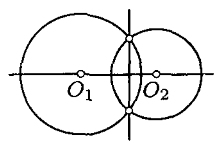


Рис. 117

Если данные окружности пересекаются (рис. 117), то точки пересечения имеют равные (нулевые) степени относительно этих окружностей. Следовательно, их радикальная ось — прямая, содержащая эти точки.

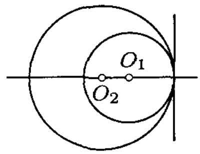


Рис. 118

Если данные окружности касаются внешним или внутренним образом, то их радикальная ось совпадает с общей касательной в точке касания окружностей (рис. 118).

Если окружности лежат одна вне другой, не касаясь, то середина M их общей касательной имеет равные степени относительно их и потому принадлежит радикальной оси (рис. 119).

Понятие радикальной оси двух окружностей остается в силе и в том случае, когда одна из них вырождается в точку — «нулевую окружность». При $R_2 = 0$ степень точки M относительно такой окружности будет равна O_2M^2. Поэтому радикальная ось окружности (O_1, R_1) и точки O_2 есть множество точек, степень каждой из которых относительно этой окружности равна квадрату расстояния ее до точки O_2 (рис. 120).

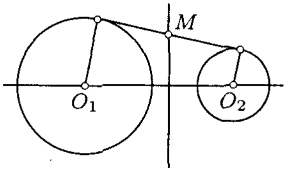


Рис. 119

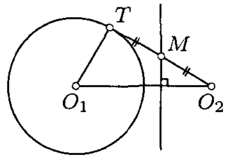


Рис. 120

16.3. Характеристические свойства точек радикальной оси окружностей. Кроме свойства точек радикальной оси, через которое она определена, точки этой оси имеют еще другие замечательные свойства, используемые при решении конструктивных задач.

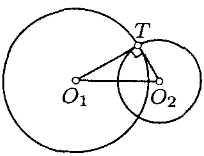


Рис. 121

Напомним сначала понятие ортогональных окружностей. Две пересекающиеся окружности называются *ортогональными*, если касательные к ним в их общей точке перпендикулярны (рис. 121). Центр каждой из двух ортогональных окружностей лежит на касательной к другой в их общей точке.

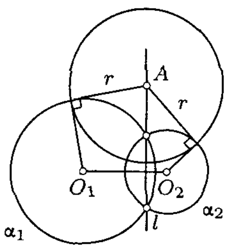


Рис. 122

Свойство 1°. *Внешние относительно каждой из двух данных окружностей точки их радикальной оси являются центрами окружностей, каждая из которых ортогональна обеим данным окружностям. Обратно, если окружность ортогональна двум данным окружностям, то ее центр принадлежит их радикальной оси.*

В самом деле, если точка A принадлежит радикальной оси l окружностей α_1 и α_2 и лежит вне этих окружностей, то касательные, проведенные из точки A к этим окружностям, имеют равные длины r (рис. 122). Тогда окружность (A, r) ортогональна каждой из данных окружностей.

Обратно, если окружность (A, r) ортогональна каждой из окружностей α_1 и α_2, то ее центр A есть точка пересечения касательных к этим окружностям в их точках пересечения с окружностью (A, r). Тогда эти касательные имеют равные длины, поэтому точка A имеет равные степени относительно окружностей и, следовательно, лежит на их радикальной оси.

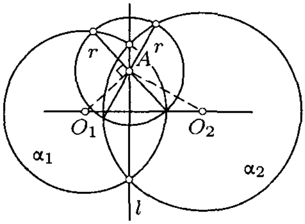


Рис. 123

Свойство 2°. *Внутренние относительно каждой из двух данных окружностей точки их радикальной оси являются центрами окружностей, каждая из которых делится пополам обеими данными окружностями. Обратно, если две данные окружности делят пополам третью окружность, то ее центр лежит на радикальной оси этих окружностей.*

Действительно, пусть точка A принадлежит радикальной оси l окружностей α_1 и α_2 и лежит внутри каждой из них (рис. 123). Равенство степеней точки A относительно окружностей означает равенство полухорд этих окружностей, содержащих точку A и перпендикулярных соответственно O_1A и O_2A (п. 16.1). Поэтому окружность (A, r), где r — длина указанных полухорд, делится пополам каждой из окружностей α_1 и α_2. Доказательство обратного утверждения также просто.

16.4. Радикальный центр трех окружностей. Это понятие основано на следующей теореме.

Теорема. *Если центры трех окружностей неколлинеарны, то три радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, имеют общую точку.*

В самом деле, пусть радикальная ось a окружностей α и γ и радикальная ось b окружностей β и γ пересекаются в точке P (рис. 124). Тогда точка P имеет равные степени относительно каждой из трех окружностей α, β, γ. Поэтому она лежит на радикальной оси окружностей α и β.

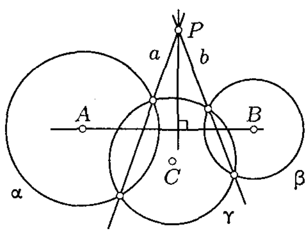


Рис. 124

Определение. Общая точка радикальных осей трех окружностей, взятых попарно, называется *радикальным центром* этих окружностей.

Построение радикальной оси двух окружностей рассмотрено в п. 16.2 вместе с доказательством теоремы о радикальной оси. Введение понятия радикального центра трех окружностей позволяет значительно упростить построение радикальной оси в случае, когда эти окружности не пересекаются, что выполнено на рис. 124 для окружностей α и β. Этот способ остается в силе и в случае, когда одна из окружностей α и β лежит внутри другой.

Упражнения

16.1. Постройте окружность, ортогональную к трем данным окружностям.

16.2. На данной окружности найдите точку, чтобы касательные из нее к другой данной окружности были равны отрезку от искомой точки до данной точки A.

16.3. Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из данных точек A, B, C, были бы равны соответственно трем данным отрезкам a, b, c.

16.4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и ортогональную данной окружности α.

16.5. Постройте окружность данного радиуса, ортогональную двум данным окружностям.

16.6. Через две данные точки A и B проведите окружность, делящуюся данной окружностью α пополам.

16.7. Через две данные точки A и B проведите окружность, которая делила бы данную окружность пополам.

16.8. Постройте окружность, которая делилась бы пополам каждой из трех данных окружностей. При каких условиях она существует?

16.9. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC взяты соответственно три произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

§ 17. *Пучки окружностей*

17.1. Определение пучка окружностей. Виды пучков. Предварительно убедимся в истинности такого утверждения.

Если прямая l является радикальной осью окружностей α и β и является радикальной осью окружностей β и γ, то она есть также и радикальная ось окружностей α и γ и центры этих трех окружностей коллинеарны.

Действительно, по определению радикальной оси и условию доказываемого утверждения произвольная точка P прямой l имеет равные степени относительно окружностей α и β и равные степени относительно окружностей β и γ и, значит, равные степени относительно окружностей α и γ. Поэтому точка P принадлежит радикальной оси окружностей α и γ. Поскольку P — любая точка прямой l, то l — радикальная ось окружностей α и γ. Каждая из трех прямых, содержащих центры двух окружностей, перпендикулярна l. Следовательно, эти три прямые совпадают, т. е. центры окружностей α, β, γ коллинеарны.

Важным примером множества окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось, является множество всех окружностей, имеющих две общие точки A и B. Тогда прямая AB и есть радикальная ось каждых двух окружностей из этого множества (рис. 125). Как увидим далее, этот пример не является единственным.

Определение. Множество всех окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось l, называется *пучком окружностей.* Прямая l называется радикальной осью этого пучка.

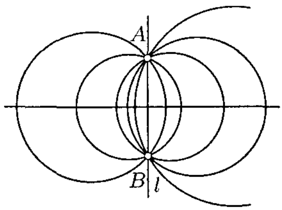


Рис. 125

Центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой, перпендикулярной его радикальной оси.

Рассмотрим три возможных случая, приводящих к классификации пучков окружностей.

1) Пусть какие-либо две окружности пучка пересекаются в точках A и B. Тогда эти точки принадлежат их радикальной оси и должны иметь равные (нулевые) степени относительно каждой окружности пучка. Следовательно, любая окружность пучка проходит через эти точки. Таким образом, пучок состоит из окружностей, имеющих две общие точки. Такой пучок называется пучком пересекающихся окружностей, или *эллиптическим пучком* окружностей (рис. 125).

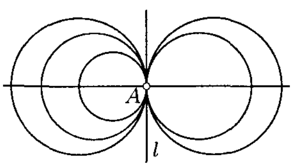


Рис. 126

2) Пусть какие-либо две окружности пучка касаются в точке A (внутренним или внешним образом). Тогда их радикальная ось l есть общая касательная к ним в точке A. Любая третья окружность пучка по определению имеет ту же радикальную ось с первыми двумя и потому касается прямой l в точке A. Итак, пучок состоит из всех окружностей, попарно касающихся в общей точке. Такой пучок называется *параболическим пучком* окружностей (рис. 126).

3) Пусть какие-либо две окружности пучка не имеют общих точек. Тогда и любые две окружности этого пучка не будут иметь общих точек,

так как в противном случае через их общие точки проходили бы все окружности пучка. Но выбранные первоначально две окружности пучка не пересекаются. Пучок непересекающихся окружностей называется *гиперболическим пучком* окружностей. Построение окружностей этого пучка рассмотрим чуть позже.

17.2. Критерии пучка окружностей. Задание пучка. Докажем два необходимых и достаточных условия того, что некоторое множество окружностей есть пучок.

Критерий 1. *Множество всех окружностей, ортогональных одной окружности, центры которых лежат на одной прямой, есть пучок окружностей.*

В самом деле, возьмем две произвольные окружности α_1 и α_2 из заданного множества M окружностей, центры которых лежат на прямой m и которые ортогональны данной окружности ω с центром A (рис. 127). По свойству 1° точек радикальной оси (п. 16.3) точка A принадлежит радикальной оси l окружностей α_1 и α_2. Но эта прямая l не зависит от выбора окружностей α_1 и α_2 из заданного множества M, так как она проходит через постоянную точку A перпендикулярно заданной прямой m. Итак, любые две окружности заданного множества M имеют одну и ту же радикальную ось. Следовательно, это множество M окружностей принадлежит пучку окружностей с радикальной осью l.

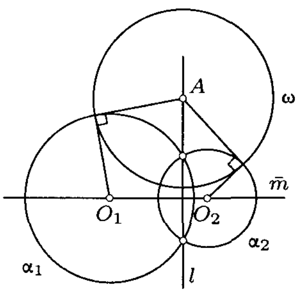


Рис. 127

Обратно, пусть x — произвольная окружность пучка с радикальной осью l, которому принадлежат окружности α_1 и α_2. Тогда ее центр лежит на линии центров окружностей α_1 и α_2, т. е. на прямой m, и окружность x ортогональна ω (свойство 1° точек радикальной оси). Итак, заданное множество M окружностей есть пучок окружностей.

Следствие. *Если некоторая окружность ортогональна двум окружностям пучка, то она ортогональна каждой окружности этого пучка.*

Критерий 2. *Множество всех окружностей, ортогональных двум данным окружностям, есть пучок окружностей.*

Действительно, центры всех окружностей заданного множества принадлежат радикальной оси двух данных окружностей. На основании критерия 1 это множество окружностей есть пучок окружностей.

Из определения пучка окружностей и его критериев вытекают *способы задания пучка* окружностей:

1) двумя принадлежащими ему окружностями,

2) окружностью этого пучка и его радикальной осью,

3) линией центров окружностей пучка и одной ортогональной им окружностью,

4) двумя окружностями, ортогональными окружностям пучка.

17.3. Ортогональные пучки окружностей. Из следствия и критерия 2 предыдущего пункта следует, что существует бесконечное множество окружностей, каждая из которых ортогональна каждой окружности данного пучка окружностей, и это множество есть также пучок окружностей. Такие два пучка окружностей называются *ортогональными* или *сопряженными пучками* окружностей. Радикальная ось одного из них является линией центров другого и наоборот.

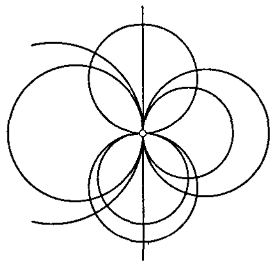


Рис. 128

Ясно, что если один из двух ортогональных пучков окружностей параболический, то и второй также параболический (рис. 128). Если же данный пучок гиперболический, то ортогональный ему пучок является эллиптическим, и наоборот (рис. 129). Однако этот факт требует пояснения. Пусть даны две непересекающиеся окружности α и β. Построим их радикальную ось l и возьмем на ней произвольную точку A (рис. 130). Длина r касательных из точки A к окружностям α и β больше, чем расстояние от точки A до линии O_1O_2 центров окружностей. Поэтому окружность $\omega(A, r)$ пересекает прямую O_1O_2 в двух точках I_1, I_2. Итак, произвольная окружность ω пучка окружностей, ортогонального данному гиперболическому пучку, пересекает радикальную ось O_1O_2 своего пучка. Через точки пересечения проходят все окружности пучка, т. е. он эллиптический.

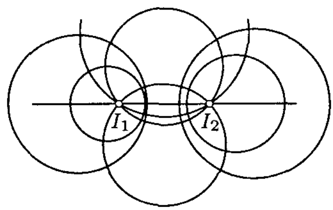


Рис. 129

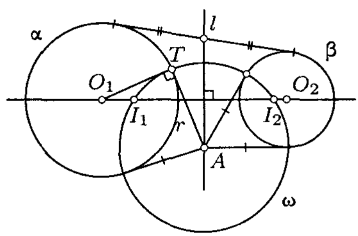


Рис. 130

Общие точки I_1 и I_2 окружностей эллиптического пучка называются *предельными точками* ортогонального ему гиперболического пучка.

9 – 5545

17.4. Задание окружности данного пучка. Если задан пучок окружностей, то некоторую его окружность можно выделить из пучка заданием одной ее точки, так как имеет место теорема.

Теорема. *Через каждую точку плоскости, не принадлежащую радикальной оси пучка окружностей, проходит одна и только одна окружность этого пучка.*

Доказательство. Для эллиптического и параболического пучков теорема очевидна (рис. 125 и 126). В первом пучке эта окружность определяется тремя неколлинеарными точками, а во втором — двумя точками и касательной в одной из них. Рассмотрим гиперболический пучок окружностей.

Пусть он задан непересекающимися окружностями α_1 и α_2 (рис. 131) и дана точка M, не принадлежащая радикальной оси l этих окружностей. Построим произвольную окружность ω, ортогональную окружностям α_1 и α_2. Она принадлежит сопряженному пучку окружностей, который является эллиптическим. Поэтому легко строится окружность β этого пучка, содержащая заданную точку M (она описана около треугольника I_1I_2M). Теперь осталось построить искомую окружность x, которая проходит через M и ортогональна β. Касательная к β в точке M пересекает прямую O_1O_2 в центре X этой окружности.

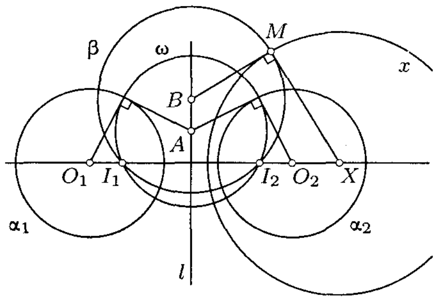


Рис. 131

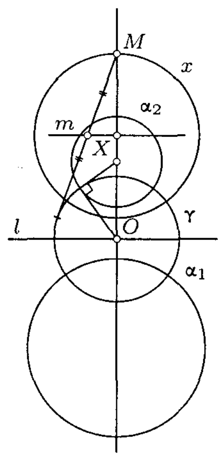


Рис. 132

Остался без внимания один частный случай, когда $M \in (O_1O_2)$. Тогда предыдущий способ бессилен, хотя искомая окружность x существует. В этом случае построим окружность γ с центром в точке O пересечения радикальной оси l и линии центров данного пучка, ортогональную α_1 и α_2 (рис. 132). Построим радикальную ось m окружности γ и точки M. Она пересекает линию центров в центре X искомой окружности (критерий 1).

Единственность окружности пучка, содержащей данную точку M, доказывается рассуждением от противного. Пусть через M проходят две окружности x_1 и x_2 пучка, заданного окружностями α_1 и α_2. Тогда через точку M должны проходить все окружности пучка, что невозможно, поскольку M не принадлежит радикальной оси пучка.

Задача. Построить окружность, содержащую две данные точки A и B и касающуюся данной окружности α.

Решение. Искомая окружность x принадлежит эллиптическому пучку окружностей, пересекающихся в точках A и B. Пусть ω — произвольная окружность этого пучка, пересекающая данную окружность α в точках M и N (рис. 133). Радикальные оси AB, MN и t окружностей α, ω, x, взятых попарно, пересекаются в радикальном центре P, который можно построить, так как прямые AB и MN имеются. Далее строятся точки T и T_1 касания с окружностью α прямых t и t_1, проходящих через точку P, а по ним и центры X и X_1 искомых окружностей. Исследование незатруднительно. Возможны 2, 1, 0 решений.

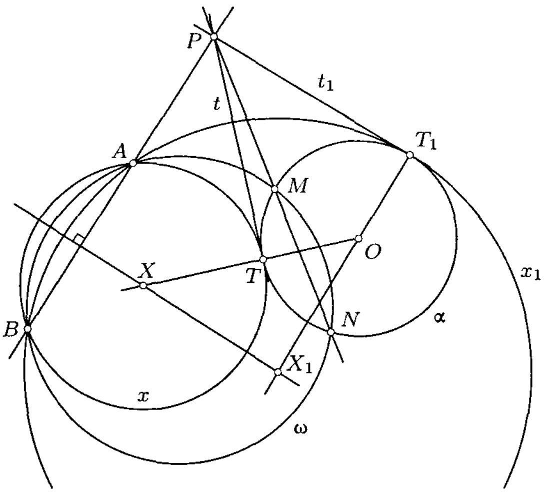


Рис. 133

Упражнения

17.1. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, при этом одной из них в данной точке.

17.2. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной прямой.

17.3. Постройте окружность, касающуюся данной окружности ω и данной прямой в данной ее точке A.

17.4. Докажите, что два центра гомотетий двух окружностей являются концами диаметра окружности, которая принадлежит пучку окружностей, заданному двумя данными окружностями.

§ 18. *Полярное соответствие*

18.1. Поляра точки относительно окружности. Точки A и B называются сопряженными относительно окружности $\omega(O,\ R)$, если

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2. \tag{18.1}$$

Из условия (18.1) непосредственно следует:

1) угол AOB либо острый, либо нулевой;

2) точка M сопряжена сама себе тогда и только тогда, когда она принадлежит базисной окружности ω, так как

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM} = R^2 \Leftrightarrow M \in \omega;$$

3) центр O окружности ω не имеет сопряженной ему точки, поскольку равенство $\bar{0} \cdot \overline{OB} = R^2$ противоречиво;

4) если точка $A \neq O$ лежит внутри окружности ω, то сопряженная ей точка B лежит вне ее, так как из равенства $OA \cdot OB \cos\angle AOB = R^2$ при $OA < R$ следует $OB > R$.

Из равенства (18.1) легко также усматривается, что для заданной точки A, отличной от O, имеется бесконечное множество сопряженных с нею точек B, удовлетворяющих условию

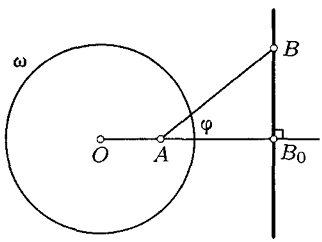


Рис. 134

$$OB\cos\varphi = \frac{R^2}{OA} = OB_0,$$

где OB и $\varphi = \angle AOB$ переменные, а точка B_0 — постоянная точка луча OA (рис. 134). Отрезок OB_0 можно построить как четвертый пропорциональный к отрезкам R, R, OA: $OA : R = R : OB_0$. Точка B_0 — *единственная* точка прямой OA, сопряженная с точкой A относительно ω. Равенство $OB\cos\varphi = OB_0$ (φ — острый угол!) говорит о том, что точка B_0 является ортогональной проекцией точки B на прямую OA.

Следовательно, *множеством всех точек, сопряженных с данной точкой A относительно окружности ω, является прямая BB_0, пер-*

пендикулярная к прямой OA. Она называется **п о л я р о й** точки A относительно данной окружности ω. Точка A по отношению к своей поляре называется *полюсом* этой прямой.

Центр O окружности ω не имеет поляры. Прямые, содержащие O, не имеют полюсов.

Существует несколько способов построения поляры данной точки A относительно данной окружности ω. Пока рассмотрим два из них.

Очевидно, достаточно построить лишь одну точку поляры a точки A — точку ее пересечения с прямой OA. С этой целью проведем диаметр CD окружности ω, перпендикулярный OA (рис. 135). Пусть $(AC) \cap \omega = P$, $(PD) \cap (OA) = B$. Тогда точка B — точка поляры a. Действительно, из подобия прямоугольных треугольников AOC и BOD имеем $OA/OC = OD/OB$, т. е. $OA \cdot OB = R^2$. Поляра a точки A проходит через B перпендикулярно OA.

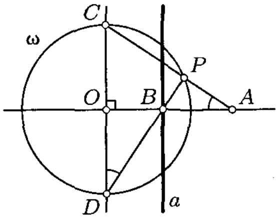


Рис. 135

Если точка A — точка окружности ω, то ее полярой является касательная к ω в этой точке, поскольку каждая точка окружности сопряжена сама себе.

Теорема. *Если точка A лежит вне окружности ω, то ее поляра содержит точки касания двух касательных, проведенных к ω через точку A.*

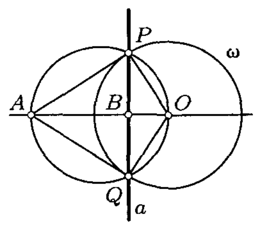


Рис. 136

Действительно, если AP и AQ — касательные к ω и $(PQ) \cap (AO) = B$ (рис. 136), то из прямоугольного треугольника AOP имеем $OA \cdot OB = OP^2 = R^2$, т. е. точка B сопряжена с A относительно ω.

Следствие. *Если точка A лежит вне окружности ω, то ее поляра a содержит общую хорду окружности ω и окружности с диаметром AO.*

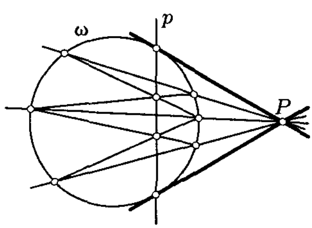


Рис. 137

Другой способ построения поляры точки основан на утверждении задачи 2 § 9: *точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника принадлежит поляре точки пересечения его противоположных сторон.* Отсюда следует способ построения поляры точки P одной линейкой. Через точку P проводим три секущие к базисной окружности ω (рис. 137). Тогда поляра p точки P проходит через точки пересечения диагоналей полученных вписанных четырехугольников. Точки ее пересечения с окружностью суть точки касания двух касательных к окружности, проходящих через P. Поляра позволяет построить касательные к окружности одной линейкой.

Принцип построения поляры точки P остается тем же и в том случае, когда точка P лежит внутри базисной окружности ω.

18.2. Свойство взаимности поляр. Поляры точек относительно окружности обладают замечательным свойством: *если точка B лежит на поляре a точки A, то точка A лежит на поляре b точки B.*

В самом деле, из того, что точка B лежит на поляре a точки A, следует, что точки A и B сопряжены относительно окружности ω. Поэтому точка A лежит на поляре b точки B (рис. 138).

На основании этого свойства взаимности поляр поляра c точки C пересечения прямых a и b проходит через полюсы A и B этих прямых. Из него же следует: *поляры всех точек прямой проходят через полюс этой прямой.*

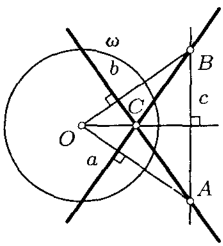


Рис. 138

Отсюда очевиден способ построения полюса данной прямой: надо на этой прямой взять две произвольные точки, построить их поляры, тогда общая точка этих поляр и будет полюсом данной прямой.

18.3. Автополярный треугольник.. Построенный выше треугольник ABC (рис. 138) обладает замечательным свойством: каждая его сторона является полярой противоположной вершины, каждая вершина есть полюс противолежащей стороны. Всякий треугольник, обладающий этим свойством, называется *автополярным треугольником* относительно окружности ω.

Центр O окружности ω является *ортоцентром* автополярного относительно нее треугольника, так как по свойству поляры $OA \perp a$, $OB \perp b$, $OC \perp c$.

Автополярный треугольник ABC всегда тупоугольный, причем вершина тупого угла лежит внутри окружности ω, а две другие вершины — вне ее.

В самом деле, точка и ее поляра всегда лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через центр O окружности ω параллельно этой поляре. Если бы точка O оказалась внутри треугольника ABC, то предыдущее условие не могло быть выполнено. Поэтому ортоцентр треугольника ABC лежит вне этого треугольника и, значит, он тупоугольный.

Если точки A и B внешние относительно ω, то их поляры a и b пересекаются во внутренней относительно ω точке C. Обратно, если точка C внутренняя, то ее поляра состоит только из внешних точек (п. 18.1, свойство 4). Таким образом, одна и только одна из вершин автополярного треугольника лежит внутри окружности ω. Вершина C автополярного треугольника ABC, внутренняя относительно ω, лежит внутри треугольника OAB и является его ортоцентром, поэтому треугольник OAB остроугольный, а угол ACB тупой.

18.4. Полярное соответствие относительно окружности. Принцип двойственности. Если дана окружность с центром O, то между множеством точек плоскости (с исключенной точкой O) и множеством прямых (кроме прямых, содержащих точку O) устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждой точке соответствует ее поляра и каждой прямой соответствует ее полюс. При этом множеству всех точек прямой соответствует множество всех прямых пучка, и обратно. Это соответствие называется *полярным соответствием* относительно окружности.

Полярное соответствие естественным образом приводит к *принципу двойственности* в геометрии, который заключается в следующем. Для любой конфигурации, состоящей из точек и прямых, в которой определенные точки лежат на определенных прямых, существует двойственная ей конфигурация из прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки.

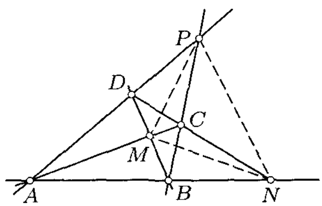


Рис. 139

Например, фигуре, состоящей из четырех точек A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шести прямых, соединяющих эти точки попарно (рис. 139), двойственна фигура, состоящая из четырех прямых a, b, c, d, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, и шести точек, в которых попарно пересекаются эти четыре прямые (рис. 140). Первая фигура называется *полным четырехвершинником* (полным четырехугольником), а вторая — *полным четырехсторонником*. В полном четырехвершиннике $ABCD$ прямые AB, BC, CD, DA, AC, BD называются его сторонами, точки $M=(AC)\cap(BD)$, $N=(AB)\cap(CD)$, $P=(BC)\cap(AD)$ называются его диагональными точками, а прямые MN, MP, PN — его диагоналями.

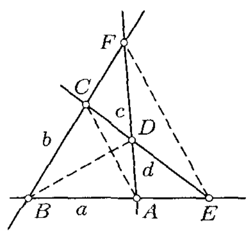


Рис. 140

В полном четырехстороннике $abcd$ прямые a, b, c, d называются его сторонами, точки $A = a \cap d$, $B = a \cap b$, $C = b \cap c$, $D = c \cap d$, $E = a \cap c$, $F = b \cap d$ — вершинами, а прямые AC, BD, EF — диагоналями.

Окружности ω как множеству всех ее точек двойственна фигура, представляющая собой множество всех касательных к ω (поляр точек ω). А это последнее множество прямых определяет ту же самую окружность ω как кривую, касающуюся каждой прямой данного множества.

Каждой теореме о конфигурации прямых и точек соответствует *двойственная теорема* о двойственной конфигурации точек и прямых. Вторую (двойственную) теорему можно получить из первой взаимной заменой слов:

точка	— прямая,
полюс	— поляра,
лежит на	— проходит через,
коллинеарные точки	— прямые, пересекающиеся в одной точке,
трехвершинник (треугольник)	— трехсторонник (треугольник),
четырехвершинник	— четырехсторонник,
касательная	— точка касания

и т. д. Обе теоремы двойственны друг другу, т. е. одна из теорем верна если и только если верна вторая.

Пример 1. Обратимся к теореме Паскаля (§ 10): точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой. В полярном соответствии относительно описанной около него окружности вершинам этого шестиугольника соответствуют касательные в этих вершинах. Следовательно, вписанному шестиугольнику соответствует описанный шестисторонник (шестиугольник). Точкам пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника соответствуют прямые, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника. Итак, теореме Паскаля будет двойственна теорема: *в описанном шестиугольнике прямые, соединяющие его противоположные вершины (т. е. большие диагонали), пересекаются в одной точке* (рис. 141).

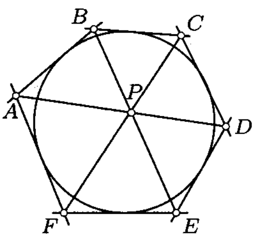


Рис. 141

Французский математик Шарль Брианшон (1785—1864) доказал эту теорему в 1806 г., поэтому она носит его имя — теорема Брианшона. Простых прямых доказательств ее не имеется.

Пример 2. В описанном четырехугольнике прямая, содержащая точки касания двух смежных сторон, и прямая, содержащая точки касания двух остальных сторон, пересекаются на продолжении диагонали этого четырехугольника (рис. 142). Этому предложению двойственно предложение: во вписанном четырехугольнике точка пересечения касательных в двух смежных вершинах и точка пересечения касательных в двух оставшихся вершинах лежат на одной прямой с точкой пересечения двух противоположных сторон (рис. 143). Наблюдательный читатель без труда заметит, что в этих двух разных на первый взгляд предложениях по существу содержится один и тот же факт. Доказательству подлежит только одно из этих предложений. Проще доказывается первое. Сделайте это в качестве несложного упражнения.

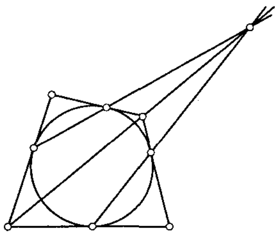


Рис. 142

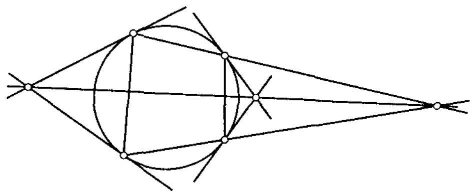


Рис. 143

Пример 3. Пусть A и B — две произвольные точки, a и b — их поляры относительно окружности с центром O, $\angle AOB = \varphi$. Тогда угол между прямыми a и b, в котором лежит точка O, равен $180° - \varphi$. Следствием этого факта является взаимная двойственность двух утверждений: 1) во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна $180°$, 2) если O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, то

$$\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD = 180°.$$

Упражнения

18.1. Докажите, что диаметрально противоположные точки одной окружности только тогда сопряжены относительно другой, когда эти окружности ортогональны.

18.2. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, H — его ортоцентр. Докажите, что

$$\overline{MC} \cdot \overline{MH} = \frac{1}{4}AB^2.$$

18.3. Точки A и B сопряжены относительно окружности тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между ними равен сумме их степеней относительно этой окружности. Докажите.

18.4. Четырехугольник вписан в окружность. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения его противоположных сторон и точке пересечения диагоналей является автополярным относительно этой окружности.

18.5. Точки A и A_1, B и B_1 сопряжены относительно окружности ω. Докажите, что точки $C=(AB)\cap(A_1B_1)$ и $C_1=(AB_1)\cap(A_1B)$ также сопряжены относительно ω. Докажите, что окружности с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одному пучку.

18.6. Дан тупоугольный треугольник. Докажите, что существует единственная окружность, относительно которой этот треугольник является автополярным. Постройте эту окружность.

18.7. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Найдите множество точек, для каждой из которых три сопряженные ей точки относительно данных окружностей совпадают.

18.8. Дана окружность и на ней точка A. С помощью одной линейки постройте касательную к окружности в точке A.

18.9. Дан прямоугольник с центром в центре O окружности ω. Докажите, что его образом в полярном соответствии относительно ω является ромб.

18.10. Постройте конфигурацию, двойственную конфигурации Паппа (упр. 10.9). Сформулируйте теорему, двойственную теореме Паппа.

18.11. Сформулируйте теорему, двойственную теореме Брианшона для описанного четырехугольника (упр. 10.11).

Задачи общего содержания

1. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между диагоналями равен α. Найдите площадь параллелограмма.

2. Площадь ромба равна S, сумма длин его диагоналей равна m. Найдите длину стороны ромба.

3. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, проведенные через вершину прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3\sqrt{39}$ и $BC=\sqrt{39}$, $\angle BAD=30°$, $\angle ADC=60°$. Через точку D проведена прямая, делящая трапецию на равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

5. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Одна сторона квадрата принадлежит гипотенузе.

6. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, угол ABC равен $120°$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади описанного около него круга.

7. Даны углы α, β, γ треугольника ABC и медиана $AM = m$. Вычислите его площадь.

8. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна $\sqrt{7}$. Диагонали ее пересекаются в точке K, $AK = 1$, $KD = 2$, $\angle BAC = \angle DAC$. Найдите площадь треугольника ABC.

9. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении $2:1$ и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

10. Прямая AD делит медиану BM треугольника ABC в отношении $5:1$, считая от точки B. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC?

11. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты соответственно точки K, L, M, N, делящие их соответственно в отношениях $2:1$, $1:3$, $1:1$, $1:5$. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 1. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

12. Найдите площадь трапеции с основаниями a и b $(a > b)$, у которой диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α.

13. В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно a, боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна $2a$. Точка E — середина CD, угол CBE равен α. Найдите площадь данной трапеции.

14. Вычислите площадь трапеции, если даны длины e и f ее диагоналей и длина m отрезка, соединяющего середины ее оснований.

15. Через вершину C прямого угла треугольника ABC проведена прямая l, перпендикулярная медиане CM треугольника ABC. Точки A_1 и B_1 — ортогональные проекции вершин A и B на прямую l. Докажите, что

1) площадь трапеции AA_1B_1B вдвое больше площади треугольника ABC,

2) $4AA_1 \cdot BB_1 = A_1B_1^2$.

16. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 6 и 5. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

17. Точка D лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABD и ABC, если $AD : AC = n$.

18. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

19. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равных отрезка. Найдите отношение сторон треугольника.

20. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b $(a < b)$. Найдите радиус окружности, проходящей через середину меньшего катета и касающейся гипотенузы в ее середине.

21. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD на гипотенузу AB. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники BDC и ADC, если $BC = 4$, $AC = 3$.

22. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке D, а вневписанная окружность касается стороны BC в точке E. Найдите длину DE, если радиусы этих окружностей равны 3 и 4, а угол BCA равен $120°$.

23. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Определите положение центра описанной окружности относительно трапеции. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

24. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

25. Равнобедренные треугольники ABC $(AB = BC)$ и $A_1B_1C_1$ $(A_1B_1 = B_1C_1)$ равны. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на лучах BC, BA, AC вне данного треугольника ABC. Стороны B_1C_1 и BC перпендикулярны. Найдите углы треугольника ABC.

26. Окружность с центром на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает гипотенузу в точках N и L, касается катета AC в точке M и касается катета BC. Найдите AB, если $MN : AN = 1/6$ и $AM = 10/27$.

27. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников OAB, OBC, OCD, ODA, являются вершинами параллелограмма. Докажите, что если угол между диагоналями четырехугольника равен $45°$, то четырехугольник и параллелограмм равновелики.

28. Точки P и Q — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если прямые AP и AQ делят диагональ на три равные части, то четырехугольник — параллелограмм.

29. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а через точку B проведена прямая, перпендикулярная CD. Эта прямая пересекает окружности в точках E и F. Докажите, что точки C, D, E, F являются вершинами ромба.

30. Через точку M диагонали AC четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная AB и пересекающая BC в точке N. Докажите, что если треугольники DAM и DBN равновелики, то $AB \parallel DC$. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

31. В треугольнике ABC угол B тупой, $AC = 6$. Центр окружности, описанной около треугольника ACH (H — ортоцентр треугольника ABC), лежит на окружности ABC. Найдите радиус окружности ABC.

32. В *прямоугольном* треугольнике ABC проведена прямая через вершину A и середину высоты CD, пересекающая катет BC в точке M. Докажите, что

$$\frac{CM}{MB} = \cos^2 A.$$

33. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника IAB, принадлежит биссектрисе угла ACB.

34. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AB = 21$, $BC = 15$ и $\cos BAC = \frac{5}{7}$.

35. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна S, а его диагонали пересекаются в точке M. Докажите, что если площади S_1 и S_2 треугольников MAB и MCD удовлетворяют условию

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S},$$

то данный четырехугольник есть трапеция.

36. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке A_1 и сторону BC в точке B_1. Через вершину C проведена произвольная прямая, пересекающая сторону AB в точке D. Докажите, что площадь четырехугольника CA_1DB_1 есть среднее геометрическое площадей треугольников CAB и CA_1B_1. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

37. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная диаметру BD и пересекающая его в точке N. Докажите, что прямая MD делит отрезок AN пополам.

38. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны AD равна n. Найдите CD, если $CD = CA = CB$.

39. В треугольнике ABC $AB = 20$, $AC = 24$. Известно, что вершина C, центр вписанной окружности и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой принадлежит стороне AC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

40. Для того, чтобы ортоцентр треугольника ABC лежал на прямой, содержащей его среднюю линию, параллельную AB, необходимо и достаточно, чтобы $\cos C = \cos A \cos B$. Докажите.

41. В окружность радиуса R вписан треугольник ABC. Докажите, что

$$IC^2 = ab - 4Rr \quad \text{и} \quad ID^2 = 4R^2 - ab,$$

где I — центр вписанной окружности, а точка D диаметрально противоположна вершине C.

42. В треугольнике ABC построена точка D, симметричная центру I вписанной окружности относительно центра O описанной окружности. Докажите, что $CD^2 = 4R^2 - BC \cdot AC$.

43. В окружности ω с центром O проведены два перпендикулярных радиуса OA и OB. Через вершину A треугольника OAB и центр M вписанной в него окружности проведена хорда AA_1 окружности ω. Вычислите отношение $AM : MA_1$.

44. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник ABC. Через вершину C проведена произвольная прямая, пересекающая прямую AB в точке M, а окружность — вторично в точке N. Вычислите произведение $CM \cdot CN$.

45. Вычислите угол при вершине C равнобедренного треугольника ABC, если центр его описанной окружности принадлежит прямой, проходящей через ортогональные проекции вершин A и B на противоположные стороны.

46. В параллелограмме $ABCD$ $AC = AB\sqrt{2}$. Докажите, что угол между диагоналями равен углу между его сторонами.

47. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}.$$

Докажите, что оно эквивалентно равенству $\cos A + \cos B = 1$.

48. В прямоугольном треугольнике длины медианы и высоты, проведенных к гипотенузе, равны m и h. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

49. Докажите соотношение для произвольного треугольника ABC:

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

50. Докажите соотношение для произвольного треугольника ABC:

$$2S = IA^2 \sin A + IB^2 \sin B + IC^2 \sin C.$$

51. Докажите, что радиусы r_i вневписанных окружностей треугольника удовлетворяют равенству:

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = p^2.$$

52. Найдите зависимость между радиусами вневписанных окружностей прямоугольного треугольника.

53. Докажите соотношение для произвольного треугольника ABC:

$$r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R \cos C.$$

54. В квадрат вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной квадрата. Найдите отношение площади треугольника к площади квадрата.

55. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает его высоту BB_1 в точке K. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает ту же высоту в точке M. Радиус описанной окружности равен R, $BK = a$. Найдите MB.

56. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая, проходящая через B перпендикулярно OA, пересекает AC в точке K. Прямая, проходящая через C перпендикулярно OA, пересекает AB в точке M. Найдите BC, если $BK = a$, $CM = b$.

57. На стороне BC ромба $ABCD$ взята точка P. Окружность, описанная около треугольника ABP, пересекает вторично прямую BD в точке Q. Окружность, описанная около треугольника CPQ, пересекает вторично прямую BD в точке L. Докажите, что точки A, P, L лежат на одной прямой.

58. Две окружности радиусов R и r касаются внутренним образом в точке A. Прямая, перпендикулярная линии центров, пересекает одну окружность в точке B, другую — в точке C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

59. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$. Точка D делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от точки A. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = 2\sqrt{2}$.

60. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Вершина D треугольника DEF лежит между A и B, точка A лежит между D и E. Треугольники ABC и DEF имеют общую среднюю линию LK, параллельную AB. Площадь четырехугольника $DKLB$ равна $5/8$ площади треугольника ABC. Найдите угол DEF.

61. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = DB$, $\angle CAD = 30°$, $\angle ABC = 150°$. Докажите, что диагональ AC делит угол BCD пополам.

62. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Докажите, что вершины острых углов этого треугольника и проекции основания высоты на катеты лежат на одной окружности. Докажите, что эта окружность делит высоту в золотом отношении. Найдите длину хорды этой окружности, отсекаемой на прямой, содержащей высоту.

63. Докажите, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен длине общей внутренней касательной.

64. Две окружности α и β, лежащие вне друг друга, пересекают их линию центров в наиболее удаленных друг от друга точках A и B, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Через точку A проведены две касательные к окружности β, через B — две касательные к α. Построены две окружности, одна из которых касается первых двух касательных и окружности α изнутри, а другая касается вторых двух касательных и окружности β изнутри. Докажите, что эти окружности равны.

65. Каждая диагональ четырехугольника имеет длину a, а сумма его средних линий равна b. Вычислите площадь четырехугольника.

66. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной окружности. Найдите сторону AC, если площадь четырехугольника $OMBN$ равна S, $\angle ABC = \beta$.

67. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На хорде AB взята точка M так, что $AM = AC$, а на хорде CD — точка N такая, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

68. Если одна из сторон четырехугольника является диаметром описанной около него окружности, то проекции сторон, прилежащих к этой стороне, на прямую, содержащую четвертую сторону, равны. Докажите.

69. В окружность вписаны два четырехугольника с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали одного четырехугольника соответственно равны диагоналям другого.

70. Дан четырехугольник $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в точках P и Q.

Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются диагонали BD в точках M и N. Докажите, что $PQ = MN$.

71. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие угол $45°$. Один луч пересекает сторону BC в точке M и диагональ BD в точке N, другой — сторону CD в точке P и диагональ BD в точке Q. Докажите, что точки C, M, N, P, Q лежат на одной окружности.

72. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного четырехугольника, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник имеет пару равных противоположных углов.

73. Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ ни одна из диагоналей не делится другой диагональю пополам, то не существует такой точки O, чтобы треугольники AOB, BOC, COD, DOA были равновелики. Докажите.

74. В равнобочную трапецию вписана окружность и около этой трапеции описана окружность, центр которой принадлежит основанию трапеции. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

75. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что прямые, проходящие через середины его сторон перпендикулярно противоположным сторонам, проходят через точку пересечения диагоналей этого четырехугольника.

76. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ BD проходит через середину диагонали AC. Докажите, что

$$2BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

77. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Докажите, что точка M является серединой BD тогда и только тогда, когда $BA : AD = DC : CB$.

78. Докажите, что в пятиугольнике, вписанном в окружность, сумма любых двух углов, не прилежащих к одной стороне, больше $180°$.

79. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Докажите, что

$$A_1A_4^2 = A_1A_2^2 + A_1A_3 \cdot A_1A_4.$$

80. Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$ можно вычислить по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) + \frac{1}{4}(e^2f^2 - (ac+bd)^2).$$

81. Вычислите площадь четырехугольника по четырем его сторонам, если углы между его противоположными сторонами равны.

10 – 5545

82. Докажите, что квадрат площади описанного около окружности четырехугольника $ABCD$ равен

$$abcd\sin^2\frac{B+D}{2}.$$

83. Через точку M, взятую на высоте BD треугольника ABC, проведены прямые AM и CM, которые пересекают стороны BC и AB соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle PDB = \angle QDB$.

84. В четырехугольнике острый угол между диагоналями равен α. Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

85. Известны углы треугольника ABC, каждый из которых меньше $90°$. Найдите отношение площади треугольника с вершинами в основаниях его высот к площади треугольника ABC.

86. Две окружности касаются сторон прямого угла, одна проходит через центр другой. Найдите отношение их радиусов.

87. Одна из высот треугольника видна из центра описанной около него окружности под прямым углом. Найдите зависимость между углами этого треугольника.

88. Докажите, что если для треугольника ABC имеет место равенство $4S = BC^2 + CA^2$, то этот треугольник является прямоугольным равнобедренным.

89. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1, а вневписанные окружности касаются этих сторон в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, и $A_2B_2C_2$ равновелики.

90. Докажите, что если ортоцентр треугольника лежит на его окружности девяти точек, то треугольник прямоугольный.

91. Три равные попарно пересекающиеся окружности имеют общую точку H. Докажите, что вторые точки пересечения этих окружностей являются вершинами треугольника, для которого точка H — ортоцентр, а описанная окружность равна данным окружностям.

92. Через точки пересечения двух окружностей проведены параллельные секущие. Докажите, что отрезки этих секущих, заключенные внутри окружностей, равны.

93. Докажите, что прямые, соединяющие середины дуг, стягиваемых противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, перпендикулярны.

94. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом. Докажите, что общие касательные к данным окружностям в их точках касания пересекаются в одной точке.

95. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята произвольная точка P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников APC и BPC, ортогональны.

96. В прямоугольном треугольнике ABC проведены перпендикуляр CD к гипотенузе AB и биссектрисы CE и CF углов ACD и BCD. Докажите, что

$$S_{ABC} : S_{CEF} \geqslant 1 + \sqrt{2}.$$

97. Докажите, что для углов любого треугольника ABC имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} > \sqrt[n]{\sin C}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

98. Докажите неравенство для произвольного треугольника ABC

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leqslant \frac{3}{2}.$$

99. Докажите, что в окружности радиуса R сумма длины ее хорды и ее расстояния до центра не больше $R\sqrt{5}$.

100. Дан прямоугольник со сторонами a и b. Две окружности радиусов R_1 и R_2 построены так, что каждая из них проходит через вершины одной из двух смежных сторон и касается противоположной стороны. Доказать, что $R_1 + R_2 \geqslant \frac{5}{8}(a + b)$.

101. Продолжения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leqslant \frac{9}{4}.$$

102. Около окружности радиуса r описан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 4r$.

103. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, у которого $AD \parallel BC$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 2\sqrt{S}$ (S — его площадь).

104. Через центр I вписанной в треугольник окружности проведена прямая, отсекающая от него треугольник с площадью S. Докажите, что $S \geqslant 2r^2$ (r — радиус вписанной окружности).

105. Для произвольного треугольника докажите неравенство

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geqslant 27S^2.$$

106. Докажите, что для любого треугольника ABC

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Когда имеет место равенство?

107. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника не превышает $\frac{1}{8}$ суммы квадратов его сторон и диагоналей.

108. Докажите, что для произвольного треугольника ABC и произвольной точки M выполняется неравенство:

$$AB \cdot MC^2 + BC \cdot MA^2 + CA \cdot MB^2 \geqslant AB \cdot BC \cdot CA.$$

При каком положении точки M имеет место равенство?

Докажите неравенства 109—113 для произвольного треугольника.

109. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

110. $9r \leqslant m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9}{2}R$.

111. $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \geqslant 3\sqrt{3}S$.

112. $5R - r \geqslant p\sqrt{3}$.

113. $r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geqslant 7R^2$.

114. Точка A принадлежит окружности α, точка B — окружности β. Докажите, что отношение степени точки A относительно окружности β к степени точки B относительно окружности α равно отношению, в котором радикальная ось окружностей делит отрезок AB.

115. На прямой AB дана точка M и построена точка N, для которой $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$. Докажите, что окружность с центром MN (окружность Аполлония) ортогональна любой окружности, содержащей данные точки A и B.

116. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его вершин равны R_1, R_2, R_3, а расстояния этой точки до сторон треугольника равны x_1, x_2, x_3. Докажите, что

$$R_1R_2R_3 \geqslant \frac{4R}{r}x_1x_2x_3.$$

При каком положении точки M имеет место равенство?

117. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен α, а боковая сторона равна a. Точка M лежит на стороне BC и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками этой стороны BC сумму квадратов расстояний до прямых AC и AB. Найдите длину отрезка MC.

118. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен α, а боковая сторона равна a. Через точку M, лежащую на боковой стороне, проведены две прямые, параллельные сторонам треугольника и отсекающие от треугольника ABC параллелограмм наибольшей площади. Найдите площадь этого параллелограмма.

119. Дана окружность радиуса R с диаметром AD. Окружность с центром A пересекает первую окружность в точке B, а диаметр AD — в точке C. При каком значении радиуса второй окружности длина отрезка BC будет наибольшей?

120. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABEF$, $BCPQ$, $CAMN$. Какую наибольшую площадь может иметь шестиугольник $EFMNPQ$, если $BC = a$, $CA = b$?

121. Внутри угла расположена окружность. Найдите на этой окружности точки, сумма расстояний одной из которых до сторон угла (или их продолжений) принимает наибольшее значение, а другой — наименьшее значение.

122. Если расстояния от точки, лежащей внутри треугольника, до его сторон пропорциональны этим сторонам соответственно, то сумма квадратов расстояний этой точки до сторон треугольника минимальна и равна $\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$ (точка Лемуана). Докажите.

123. На продолжении диагонали AC за точку C трапеции $ABCD$ взята произвольная точка P и через середины M и N оснований AB и CD проведены прямые PM и PN, пересекающие соответственно боковые стороны BC и AD в точках E и F. Докажите, что прямая EF параллельна основаниям трапеции.

124. Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны AB треугольника ABC и центр вписанной в него окружности, делит пополам отрезок, соединяющий вершину C с точкой касания вписанной окружности со стороной AB.

125. Внутри угла с вершиной O дана точка A и через нее проведены прямые, образующие с прямой OA равные углы и пересекающие стороны угла в точках X и Y. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

126. Докажите, что прямая Гаусса (п. 10.2) и прямая Обера (§ 8, задача 2) полного четырехугольника перпендикулярны.

127. Постройте треугольник по разности двух сторон, радиусу вписанной окружности и радиусу вневписанной окружности, касающейся третьей стороны.

128. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

129. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и биссектрисе этого угла.

130. На линии центров двух непересекающихся окружностей найдите точку, отрезки касательных из которой к данным окружностям равны.

131. Через данные точки A и B проведите окружность, отсекающую от данной прямой хорду заданной длины.

132. Постройте прямую, которая делит пополам периметр и площадь данного треугольника.

133. По трем данным точкам A, B, C постройте точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был вписанным и описанным.

134. В окружность с центром O вписан треугольник ABC, в котором нет равных сторон. Докажите, что точки, в которых прямые, проходящие через O параллельно прямым BC, CA, AB, пересекают соответственно касательные в точках A, B, C, лежат на одной прямой.

135. Дан треугольник AOC. Точка B выбрана на стороне AO так, что $\angle CAO = \angle BCO$. Построена окружность ω с центром O и радиусом OC. Окружность ω_1 проходит через точки B и O и пересекает окружность ω в точках M и K. Докажите, что точки A, M, K лежат на одной прямой.

136. Докажите, что полупериметр p и площадь S четырехугольника удовлетворяют неравенству $p^2 \geqslant 4S$.

137. Среди всех четырехугольников с данными длинами диагоналей и данным углом между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

138. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

Часть II

Преобразования плоскости

Введение. Отображения и преобразования множеств

Под геометрической фигурой понимают некоторое множество точек. Множество точек можно задать его характеристическим (определяющим) свойством или же графически. Множество, заданное характеристическим свойством его точек, по традиции называют также геометрическим местом точек (ГМТ), обладающих данным свойством.

Важным разделом геометрии как науки и темой школьного курса геометрии являются отображения и преобразования фигур. Родовым понятием для отображения является понятие соответствия между множествами. Строгое определение соответствия здесь не приводим, ограничиваясь тем, что о нем сказано в школьных учебниках.

1°. Частным видом соответствия является отображение. *Отображением* f множества X в множество Y называется соответствие, при котором *каждому* элементу $x \in X$ соответствует *единственный* элемент $y \in Y$. Употребляется запись: $f\colon X \to Y$, $y = f(x)$, а также $X \xrightarrow{f} Y$, $x \xrightarrow{f} y$. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x — *прообразом* элемента y при отображении f множества X в множество Y. В геометрии образ элемента x обычно принято обозначать через x': $f(x) = x'$. Множество X' образов x' всех элементов x множества X называется *образом множества* X при отображении f. Пишут: $f(X) = X'$. Ясно, что всегда $X' \subset Y$. Совпадение этих множеств X и Y не исключается.

2°. Если $f(X) = Y$, то говорят, что множество X отображается *на* множество Y. Здесь вместо предлога «в» употребляется предлог «на». Употребление предлога «в», конечно, правомерно и в этом случае, но предлог «на» уточняет информацию: *каждый* элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из множества X.

3°. Отображение f множества X на множество Y называется *обратимым* (взаимно однозначным), если образы любых двух различных элементов различны. В этом случае существует *обратное отображение* f^{-1} множества Y на множество X. Если $f(x) = y$ и $f(X) = Y$, то $f^{-1}(y) = x$ и $f^{-1}(Y) = X$. Очевидно, отображения f и f^{-1} взаимно обратны, т. е. $(f^{-1})^{-1} = f$.

4°. Если $f(X) \subset X$, то говорят, что множество X отображается *в себя*. При $f(X) = X$ говорят, что множество X отображается *на себя*.

5°. Обратимое отображение множества на себя называется *преобразованием* этого множества. В школьном курсе геометрии рассматривают множество всех точек плоскости, множество всех точек пространства и говорят соответственно о преобразованиях плоскости, преобразованиях пространства. Необходимым и достаточным признаком преобразования множества является одновременное выполнение двух условий: 1) каждый элемент множества имеет единственный образ в этом множестве, 2) каждый элемент этого множества имеет единственный прообраз в нем. Второе условие можно заменить двумя условиями: 2 а) образы любых двух различных элементов различны, 2 б) каждый элемент данного множества имеет некоторый прообраз в этом множестве.

6°. Пусть f и g — два преобразования множества X и $f(x)=y$, $g(y)=z$ для произвольного $x \in X$. Конечно, $y \in X$ и $z \in X$. Определим отображение φ законом $\varphi(x)=g(f(x))$, или $\varphi(x)=z$. На основании необходимого и достаточного признака преобразования отображение φ является преобразованием множества X. Преобразование φ называется *композицией* (произведением) преобразования f и преобразования g. Пишут: $\varphi = g \circ f$, или $\varphi = gf$. Обратим внимание на то, что преобразование, выполняемое в композиции первым, записывается справа, так как по определению $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

7°. Два преобразования f_1 и f_2 одного и того же множества X называются равными (совпадающими), если для любого $x \in X$ его образы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при этих преобразованиях совпадают: $f_1(x) = f_2(x)$.

8°. *Композиция преобразований ассоциативна*, т. е. для любых преобразований f, g, h данного множества имеет место соотношение:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказательство. Пусть для любого $x \in X$ $f(x)=y$, $g(y)=z$, $h(z)=t$. Тогда $(g \circ f)(x)=z$, $(h \circ (g \circ f))(x)=t$. С другой стороны, $(h \circ g)(y)=t$, поэтому $((h \circ g) \circ f)(x)=t$. Следовательно, $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ и в силу 7° $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Композиция преобразований некоммутативна. В частных случаях, однако, композиции преобразований могут быть коммутативными. Например, коммутативна композиция любых двух переносов, двух поворотов с общим центром, композиция осевой симметрии и переноса в направлении оси этой симметрии. Однако некоммутативна композиция двух поворотов с разными центрами, композиция осевой симметрии и переноса не параллельно оси симметрии.

9°. Преобразование E множества X называется тождественным преобразованием, если для любого $x \in X$ имеет место $E(x)=x$. Поэтому для любого преобразования f будет $E \circ f = f \circ E = f$ и $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = E$.

10°. *При любом преобразовании f пересечение множеств отображается на пересечение образов этих множеств:*

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in A$ и $x \in B$. Если $f(x)=x'$, то $x' \in f(A)$ и $x' \in f(B)$, поэтому $x' \in f(A) \cap f(B)$. Итак, образ любого элемента x пересечения данных множеств принадлежит пересечению образов этих множеств при преобразовании f. Обратно, пусть $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$. Тогда $f^{-1}(y) \in A$ и $f^{-1}(y) \in B$, значит, $f^{-1}(y) \in A \cap B$. Следовательно, всякий элемент y пересечения образов множеств имеет своим прообразом некоторый элемент пересечения данных множеств.

11°. При любом преобразовании f объединение множеств отображается на объединение их образов:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство аналогично предыдущему.

12°. Преобразование f множества называется *инволютивным*, или *инволюцией*, если оно совпадает со своим обратным, но отлично от тождественного, т. е. $f = f^{-1}$ и $f \neq E$. Инволютивное преобразование меняет местами элемент x множества и его образ x': если $f(x)=x'$, то $f(x')=x$. Инволюция разбивает данное множество на пары соответственных элементов. Порядок элементов в каждой из таких пар несущественен. Примерами инволютивных преобразований служат центральная и осевая симметрии плоскости. Если преобразование f инволютивно, то в силу 9° $f \circ f = f^2 = E$.

В школьном курсе геометрии изучаются преобразования плоскости: центральная симметрия, осевая симметрия, перенос, поворот, гомотетия, преобразование подобия. Рассмотрим один бытовой пример преобразования.

В зале определенное число мест занято играющими так, что никто не остался без места и нет свободных мест. По сигналу играющие встают и хаотически двигаются по залу. Затем по другому сигналу они садятся на первое попавшееся место. В результате множество играющих отобразилось на себя. Каждая пара «элемент множества — его образ» определяется местом: сидевший на нем до первого сигнала — севший на это место по второму сигналу. Это преобразование множества играющих.

Немаловажно заметить, что для преобразования не имеет никакого значения траектория движения, время, скорость и т. п. Важны лишь начальное и конечное положение элемента.

Глава I

Движения плоскости

§1. *Общие свойства движений*

1.1. Определения движения и равных фигур. Рассмотрим отображение f плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками: если $f(A)=A_1$ и $f(B)=B_1$, то $A_1B_1=AB$ (для любых A, B). Это отображение обратимо (см. 3°), так как из $AB>0$ следует $A_1B_1>0$, т. е. образы любых двух различных точек различны. Следовательно, f — преобразование (5°).

Определение. Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется *движением* плоскости. Точнее говоря, преобразование f плоскости называется движением плоскости, если оно всякие две точки A и B отображает на такие две точки A_1 и B_1, что $A_1B_1=AB$.

Следствие 1. *Преобразование, обратное движению, есть движение.*

Следствие 2. *Композиция движений является движением.*

Определение. Фигура F_1 называется *равной* (конгруэнтной) фигуре F ($F_1=F$), если существует движение, отображающее фигуру F на фигуру F_1.

Отношение равенства фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1.2. Инварианты движений. Величины, свойства фигур, остающиеся неизменными при преобразовании, называются *инвариантами* этого преобразования. Основным инвариантом движений является расстояние между точками.

Рассмотрим образы прямой, луча, полуплоскости и угла при движениях плоскости.

Теорема. *Движение отображает прямую на прямую.*

Под такой формулировкой понимается, что множеством образов всех точек данной прямой является некоторая прямая.

Доказательство. Пусть дано движение f плоскости и некоторая прямая a. Если $A\in a$, $B\in b$, $A\neq B$, $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$, то $A_1\neq B_1$. Рассмотрим прямую A_1B_1 и докажем, что $f(a)=(A_1B_1)$. Пусть точка M_1 — образ произвольной точки M прямой a. Если M лежит между A и B, то $AM+MB=AB$. По определению движения $A_1M_1=AM$, $M_1B_1=MB$, $A_1B_1=AB$. Поэтому $A_1M_1+M_1B_1=A_1B_1$. Это означает, что M_1 лежит на прямой A_1B_1 (между A_1 и B_1). В случаях, когда A лежит между M и B или B лежит между A и M, аналогично доказывается, что образ M_1 точки M прямой a принадлежит прямой A_1B_1. Необходимо еще доказать, что всякая точка прямой A_1B_1 имеет своим прообразом при движении f некоторую точку прямой a, т. е. множество образов всех точек прямой a есть прямая A_1B_1. А это действительно так, поскольку образ произвольной точки прямой A_1B_1 при движении f^{-1} принадлежит прямой AB, в чем убеждаемся повторением предыдущего рассуждения.

Следствие 1. *Движение плоскости сохраняет отношение «лежать между» для трех точек прямой.*

Действительно, при доказательстве теоремы показано, что если точка M лежит между A и B, то точка M_1 лежит между A_1 и B_1.

Следствие 2. *Движение плоскости отображает отрезок на отрезок.*

Следствие 3. *Образом луча при движении является луч.*

В самом деле, луч определяется через понятия прямой и «лежать между», которые инвариантны при движении. Поэтому луч прямой a отображается на определенный луч образа этой прямой.

Следствие 4. *Образом полуплоскости при движении является полуплоскость.*

Действительно, полуплоскость α с границей l, содержащая точку $A \notin l$, можно определить как множество точек M плоскости таких, что отрезки AM не пересекают l. В силу доказанной теоремы и следствий 2 и 1 движением f полуплоскость α отображается на полуплоскость α' с границей $l' = f(l)$ и содержащую точку $A' = f(A)$.

Следствие 5. *Движение плоскости отображает угол на (равный ему) угол.*

В самом деле, угол, меньший развернутого, можно определить как пересечение двух полуплоскостей, а угол, больший развернутого, — как объединение двух полуплоскостей. На основании следствия 4 и свойств 11° и 12° (см. введение) образом угла будет угол. Равенство этих углов имеет место по определению равных фигур.

Теорема. *Движение отображает любые две параллельные прямые a и b на две параллельные прямые a' и b'.*

Доказательство. Если бы прямые a' и b' пересекались в некоторой точке M', то ее прообразом была бы такая точка M, которая принадлежала бы как прямой a, так и прямой b, что противоречит условию $a \parallel b$.

Итак, основными инвариантами движений плоскости являются расстояния между точками, свойства фигур быть прямой, отрезком, лучом, полуплоскостью, углом, отношение «лежать между» для трех точек прямой, параллельность прямых.

1.3. Конструктивное задание движения плоскости. Задать преобразование — это значит указать такие начальные условия, при которых можно однозначно построить образ каждой точки при этом преобразовании. Иными словами, существует единственное преобразование, при котором заданные начальные условия имеют место.

Теорема (о задании движения плоскости). *Пусть даны три неколлинеарные точки A, B, C и три точки A_1, B_1, C_1 такие, что $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. Тогда существует и только одно движение плоскости, которое отображает точку A на точку A_1, точку B на точку B_1 и точку C на точку C_1.*

Из условия неколлинеарности точек A, B, C и равенств соответствующих расстояний следует, что точки A_1, B_1, C_1 также неколлинеарны. Пусть α — замкнутая полуплоскость с границей AB, содержащая точку C, и α_1 — замкнутая полуплоскость с границей A_1B_1, содержащая точку C_1. Пусть $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}_1$ — две другие замкнутые полуплоскости соответственно с границами AB и A_1B_1 (рис. 1). Зададим преобразование f плоскости следующими условиями: каждой точке M плоскости поставим в соответствие такую точку M_1, что $A_1M_1 = AM$, $B_1M_1 = BM$ и $M_1 \in \alpha_1$ при $M \in \alpha$, но $M_1 \in \bar{\alpha}_1$ при $M \in \bar{\alpha}$. Отсюда, в частности, следует, что $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$ и образом прямой AB при преобразовании f является прямая A_1B_1. Докажем, что преобразование f — движение. Пусть $f(N) = N_1$. Надо доказать, что $M_1N_1 = MN$. Если точки A, M, N коллинеарны, то равенство этих расстояний очевидно. Если же эти точки неколлинеарны, то из равенства треугольников AMB и $A_1M_1B_1$ и равенства треугольников ANB и $A_1N_1B_1$ следует равенство углов MAN и $M_1A_1N_1$ и затем равенство треугольников MAN и $M_1A_1N_1$, откуда $M_1N_1 = MN$.

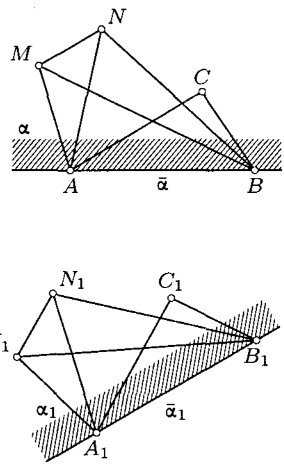


Рис. 1

Докажем единственность движения f с заданными условиями. Если бы кроме f существовало такое движение g, что $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$, $g(C) = C_1$, то нашлась бы такая точка P, что $f(P) = P_1$, $g(P) = P_2$, $P_1 \neq P_2$. Точки P_1 и P_2 должны быть в одной полуплоскости с границей A_1B_1. По определению движения $AP = A_1P_1 = A_1P_2$ и $BP = B_1P_1 =$

$= B_1P_2$. Так как точки A_1 и B_1 равноудалены от точек P_1 и P_2, то они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку P_1P_2. Оказалось, что точки P_1 и P_2 лежат в разных полуплоскостях от прямой A_1B_1. Полученное противоречие опровергает предположение $f \neq g$.

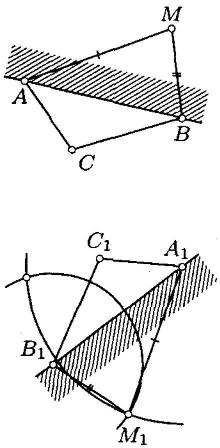


Рис. 2

При доказательстве этой теоремы обнаружился один из способов построения образа точки при движении с помощью одного циркуля (рис. 2).

1.4. Движения первого и второго рода. Говорят, что треугольник ABC ориентирован положительно, если обход по контуру треугольника от вершины A к вершине B и затем к вершине C совершается против движения часовой стрелки. Если же этот обход совершается по движению часовой стрелки, то говорят, что треугольник ABC ориентирован отрицательно. Ориентация треугольника зависит только от порядка записи его вершин: если треугольник ABC ориентирован положительно, то треугольник BAC ориентирован отрицательно.

Возможны два и только два случая: 1) треугольник ABC и его образ $A'B'C'$ при движении плоскости ориентированы одинаково, 2) эти треугольники ориентированы противоположно. Можно доказать, что если треугольник ABC и его образ $A'B'C'$ при движении плоскости имеют одинаковую ориентацию, то одинаковую ориентацию имеют любой другой ориентированный треугольник и его образ при этом движении. Если же треугольники ABC и $A'B'C'$ ориентированы противоположно, то и любой другой ориентированный треугольник противоположно ориентирован со своим образом.

Определение. Движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников, называется *движением первого рода.* Движение, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную, называется *движением второго рода.*

Для задания движения указанного рода достаточно задания двух пар соответственных точек. В самом деле, если заданы образы A' и B' точек A и B ($A'B' = AB$) и известен род движения, то образ C' третьей данной точки C однозначно определяется: для треугольника ABC строится равный ему треугольник нужной ориентации согласно указанному роду движения.

Итак, если точки A и B различны и точки A' и B' выбраны так, что $A'B' = AB$, то существует одно и только одно движение заданного рода, которое отображает A на A' и B на B'.

Композиция любого числа движений первого рода есть движение первого рода. Композиция четного числа движений второго рода есть движение первого рода, а композиция нечетного числа движений второго рода является движением второго рода.

§2. *Центральная симметрия*

2.1. Определение и свойства центральной симметрии плоскости. Точки M и M_1 называются симметричными относительно данной точки O, если точка O является серединой отрезка MM_1. Точка O считается симметричной сама себе. Преобразование плоскости, которое отображает каждую точку M на симметричную ей точку относительно данной точки O, называется *центральной симметрией* с центром O и обозначается Z_O: $Z_O(M) = M_1$.

Очевидно, что если $Z_O(M) = M_1$, то $Z_O(M_1) = M$, т. е. преобразование, обратное центральной симметрии, есть та же центральная симметрия:

$$Z_O^{-1} = Z_O, \qquad Z_O \circ Z_O = E.$$

Иными словами, центральная симметрия является *инволюционным преобразованием* (12°). Точки M и M_1 взаимно симметричны относительно O.

Фигура F и ее образ F_1 при центральной симметрии Z_O называются *симметричными фигурами* относительно точки (рис. 3).

Теорема. *Центральная симметрия есть движение.*

Доказательство. Если $Z_O(A) = A_1$ и $Z_O(B) = B_1$, то для любых точек A и B плоскости $A_1B_1 = AB$, что непосредственно усматривается из равенства треугольников OAB и OA_1B_1 (рис. 4). В случае, когда точки O, A и B коллинеарны, равенство этих расстояний также очевидно.

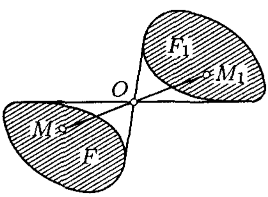


Рис. 3

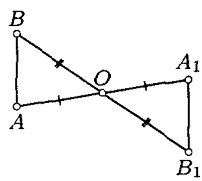


Рис. 4

Центральная симметрия плоскости есть движение первого рода.

Согласно теореме п. 1.2 центральная симметрия отображает каждую прямую на прямую. Соответственные лучи центральносимметричных прямых направлены противоположно. Прямая, содержащая центр симметрии, совпадает со своим образом. Прямая, не содержащая центр симметрии, отображается этой симметрией на параллельную прямую. Это следует из равенства внутренних накрест лежащих углов для прямых AB и A_1B_1 и секущей AA_1 (рис. 4).

Центром симметрии фигуры F называется такая точка O, центральная симметрия относительно которой отображает эту фигуру на себя: $Z_O(F)=F$. Например, центр окружности является центром симметрии этой окружности. Точка пересечения диагоналей параллелограмма служит центром его симметрии. Полоса симметрична относительно любой точки своей средней линии (рис. 5). Однако фигура вовсе не обязана иметь центр симметрии. Скажем, правильный треугольник не имеет центра симметрии.

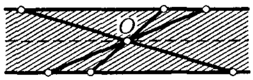


Рис. 5

2.2. Решение задач. Рассмотрим примеры применения центральной симметрии при решении задач на доказательство и построение.

Задача 1. Противоположные вершины параллелограмма $ABCD$ принадлежат прямым, содержащим противоположные стороны другого параллелограмма $MNPQ$. Доказать, что эти параллелограммы имеют общий центр.

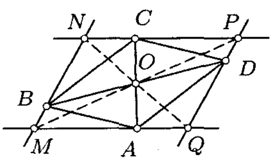


Рис. 6

Решение. Пусть $(AC)\cap(BD)=O$ (рис. 6). Тогда по свойству точки пересечения диагоналей параллелограмма $Z_O(A)=C$. Так как $A\in(MQ)$, $C\in(NP)$ и $(MQ)\parallel(NP)$, то $Z_O(MQ)=(NP)$. Аналогично $Z_O(MN)=(PQ)$. По теореме 10° точка M пересечения прямых MQ и MN отображается на точку P пересечения их образов (NP) и (PQ): $Z_O(M)=P$. Следовательно, точка O — середина отрезка MP.

Задача 2. Через каждую из двух противоположных вершин параллелограмма проведены перпендикуляры к прямым, содержащим его стороны, не проходящие соответственно через эти вершины. Доказать, что основания этих перпендикуляров являются вершинами прямоугольника. При каком условии он будет квадратом?

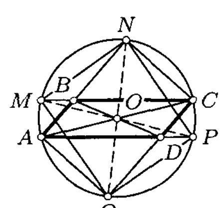


Рис. 7

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и $(AM)\perp(BC)$, $(AQ)\perp(CD)$, $(CN)\perp(AB)$, $(CP)\perp(AD)$ (рис. 7). Если $(AC)\cap(BD)=O$, то из прямоугольников $AMCP$ и $ANCQ$ следует, что точка O служит их общим центром и $MP=AC=NQ$. Так как $Z_O(M)=P$ и $Z_O(N)=Q$, то четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, который имеет равные диагонали, и потому является прямоугольником. Точки A, N, M, C, Q, P лежат на одной окружности с центром O. Поэтому $\angle BAD = 1/2\angle NOP$. Для того, чтобы прямоугольник $MNPQ$ был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы $\angle NOP = 90°$, т. е. чтобы $\angle BAD = 45°$ (при условии, что указанные в задаче перпендикуляры проведены через вершины A и C острых углов данного параллелограмма).

Задача 3. Через данную точку A провести прямую так, чтобы ее отрезок с концами на данных прямой и окружности делился точкой пополам.

Решение. Пусть m и α — данные прямая и окружность, CD — искомый отрезок, $C \in m$, $D \in \alpha$ (рис. 8). Тогда $Z_A(C) = D$. Если $Z_A(m) = m_1$, то $D \in m_1$ и, следовательно, $D \in \alpha \cap m_1$. Отсюда вытекает такое построение: строим образ m_1 прямой m при симметрии Z_A, точки D и E пересечения прямой m_1 с данной окружностью α определяют вместе с точкой A искомые прямые DA и EA. Исследование незатруднительно.

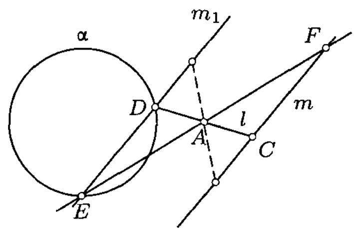


Рис. 8

Задача 4. Через данную внутри угла точку провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник с наименьшей площадью.

Решение. Пусть $\angle ab$ — данный угол и P — точка внутри угла (рис. 9). Проведем через P произвольную прямую MN, $M \in a$, $N \in b$. Для определенности будем полагать, что $MP < PN$. Построим прямую a_1, симметричную a относительно P. Пусть $b \cap a_1 = B$, $a_1 \cap (MN) = K$, $(PB) \cap a = A$. Тогда площадь треугольника OAB меньше площади треугольника OMN. В самом деле, треугольники AMP и BKP равны, так как они симметричны относительно точки P. Но $S_{OAB} = S_{OMPB} + S_{AMP} = S_{OMPB} + S_{BKP} = S_{OBKM} < S_{OMN}$. В случае, когда N лежит между O и B (A между O и M), аналогично получим тот же результат. Поскольку прямая MN произвольная, а прямая AB вполне определенная для данного угла и данной точки P, то треугольник OAB имеет наименьшую возможную площадь из всех треугольников, отсекаемых от угла прямыми, проходящими через P.

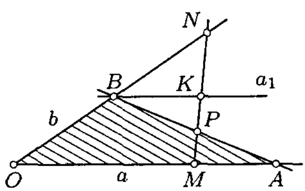


Рис. 9

Из этого анализа следует способ построения искомой прямой AB: нужно построить $a_1 = Z_P(a)$, тогда точка $B = a_1 \cap b$ определяет прямую $(AB) = (BP)$. Искомая прямая всегда существует и единственна.

Задачи на доказательство

1.01. Через диаметрально противоположные точки A и B окружности проведены параллельные хорды AC и BD. Докажите, что отрезок CD — диаметр этой окружности.

1.02. Точки E и F — середины параллельных сторон AD и BC соответственно параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые BE и FD делят диагональ AC на три равные части.

1.03. Дан четырехугольник $ABCD$ с прямыми углами A и C. Докажите, что точки $Z_A(D)$ и $Z_C(D)$ симметричны относительно ортоцентра H треугольника ABC.

1.04. Через точки, делящие медианы треугольника в отношении $1:2$, считая от вершин, проведены прямые, параллельные соответственным сторонам этого треугольника. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения этих прямых равен данному треугольнику.

1.05. В треугольник вписана окружность и проведены касательные к ней параллельно сторонам треугольника. Докажите, что в полученном шестиугольнике противоположные стороны равны.

1.06. В четырехугольнике $ABCD$ угол B равен углу D, а диагональ AC делится другой диагональю пополам. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

1.07. Точка O — центр параллелограмма $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD, DOA, являются вершинами ромба. В каком случае этот ромб будет квадратом?

1.08. На сторонах параллелограмма вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами параллелограмма.

1.09. Дан параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка M. Через вершины A, B, C, D проведены прямые, параллельные соответственно прямым MC, MD, MA, MB. Докажите, что построенные прямые пересекаются в одной точке.

1.10. Даны две параллельные прямые и прямой угол с вершиной O в центре симметрии этих прямых. Докажите, что расстояние от точки O до прямой, соединяющей точки M и N пересечения данных прямых со сторонами угла, не зависит от выбора стороны угла.

1.11. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной около треугольника окружности.

Задачи на построение

1.12. Внутри угла с вершиной O дана точка M. Постройте прямую OM, не используя точку O.

1.13. Постройте центр данного параллелограмма, не используя его вершины.

1.14. Постройте квадрат, если дан его центр и две точки, принадлежащие прямым, которые содержат две противоположные стороны квадрата.

1.15. Через точку пересечения двух данных окружностей проведите прямую, на которой эти окружности отсекают равные хорды.

1.16. Постройте параллелограмм, у которого две противоположные вершины находятся в данных точках, а две другие — на данной окружности.

1.17. Даны четыре попарно непараллельные прямые и не принадлежащая им точка O. Постройте параллелограмм с центром O, вершины которого лежат по одной на данных прямых.

Задачи для внеклассной работы

1.18. Двое игроков кладут на прямоугольный стол пятаки, которые разрешается класть лишь на свободные места. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что игрок, кладущий пятак первым, всегда может выиграть.

1.19. От пункта A к пункту B, находящемуся на острове, требуется провести телефонную связь. Как, не переплывая реку, определить необходимую длину телефонного кабеля?

1.20. Противоположные стороны шестиугольника параллельны и равны. Докажите, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

1.21. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, и отрезок с концами в серединах его диагоналей пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

1.22. На окружности даны четыре точки. Через середину каждого из отрезков с концами в двух данных точках проводятся перпендикуляры к прямой, содержащей две оставшиеся точки. Докажите, что построенные шесть перпендикуляров пересекаются в одной точке.

1.23. В окружности даны две произвольные хорды AB и CD. На хорде CD задана точка P. Найдите на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок, делящийся точкой P пополам.

1.24. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней хорды, разность которых равна данному отрезку a.

1.25. В треугольнике ABC проведены медианы AM и CK. Углы BAM и BCK равны $30°$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

1.26. Дан треугольник ABC и точка P. Точки P_1, P_2, P_3 — ее ортогональные проекции на прямые BC, CA, AB соответственно. Точки Q_1, Q_2, Q_3 симметричны точкам P_1, P_2, P_3 относительно середин отрезков BC, CA, AB. Докажите, что перпендикуляры к прямым BC, CA и AB в точках Q_1, Q_2 и Q_3 соответственно пересекаются в одной точке.

§3. *Осевая симметрия*

3.1. Определение и свойства осевой симметрии плоскости. Точки M и M_1 называются симметричными относительно заданной прямой l, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку MM_1 (рис. 10). Каждая точка прямой l симметрична сама себе. Преобразование плоскости, при котором каждая точка отображается на симметричную ей точку относительно данной прямой l, называется *осевой симметрией с осью* l и обозначается S_l: $S_l(M) = M_1$.

Точки M и M_1 взаимно симметричны относительно l, поэтому $S_l(M_1) = M$. Следовательно, преобразование, обратное осевой симметрии, есть та же осевая симметрия: $S_l^{-1} = S_l$, $S_l \circ S_l = E$. Иначе говоря, осевая симметрия плоскости является *инволютивным* преобразованием (12°).

Образ данной точки при осевой симметрии можно просто построить, пользуясь только одним циркулем. Пусть l — ось симметрии, A и B — произвольные точки этой оси (рис. 11). Если $M \notin l$ и $S_l(M) = M_1$, то по свойству точек серединного перпендикуляра к отрезку имеем: $AM = AM_1$ и $BM = BM_1$. Значит, точка M_1 принадлежит двум окружностям: окружности с центром A радиуса AM и окружности с центром B радиуса BM (M — данная точка).

Фигура F и ее образ F_1 при осевой симметрии называются симметричными фигурами относительно прямой l (рис. 12).

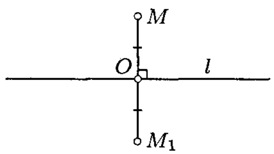


Рис. 10

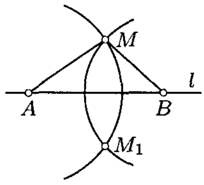


Рис. 11

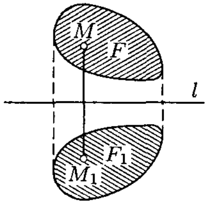


Рис. 12

Теорема. *Осевая симметрия плоскости есть движение.*

Если A и B — любые точки плоскости и $S_l(A)=A_1$, $S_l(B)=B_1$ то надо доказать, что $A_1B_1=AB$. Предлагаем это сделать читателю, руководствуясь рис. 13—17.

Из сравнения ориентаций треугольника и его образа получаем, что осевая симметрия плоскости есть *движение второго рода.*

На основании теоремы п. 1.2 осевая симметрия отображает каждую прямую на прямую. В частности, каждая из прямых, перпендикулярных оси симметрии, отображается этой симметрией на себя.

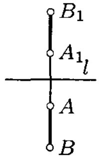


Рис. 13

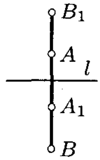


Рис. 14

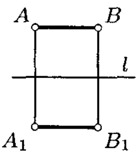


Рис. 15

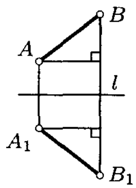


Рис. 16

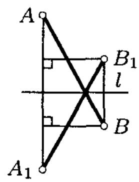


Рис. 17

Теорема. *Прямая, отличная от перпендикуляра к оси симметрии, и ее образ при этой симметрии пересекаются на оси симметрии или ей параллельны.*

Доказательство. Пусть дана прямая, не перпендикулярная оси l симметрии. Если $m \cap l = P$ и $S_l(m)=m_1$, то $m_1 \neq m$ и $S_l(P)=P$, поэтому $P \in m_1$ (рис. 18). Если же $m \parallel l$, то $m_1 \parallel l$, так как в противном случае согласно доказанной первой части этой теоремы прямые m и m_1 пересекались бы в точке прямой l, что противоречит условию $m \parallel l$ (рис. 19).

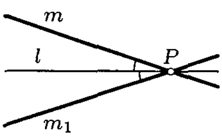


Рис. 18

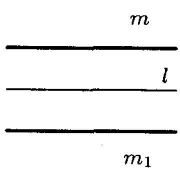


Рис. 19

В силу определения равных фигур, прямые, симметричные относительно прямой l, образуют с прямой l равные углы (рис. 18).

Прямая l называется *осью симметрии фигуры* F, если при симметрии с осью l фигура F отображается на себя: $S_l(F) = F$. Говорят, что фигура F симметрична относительно прямой l.

Например, всякая прямая, содержащая центр окружности, является осью симметрии этой окружности. Действительно, пусть M — произвольная точка окружности ω с центром O, $O \in l$, $S_l(M) = M_1$. Тогда $S_l(O) = O$ и $OM_1 = OM$, т. е. $M_1 \in \omega$. Итак, образ любой точки окружности принадлежит этой окружности. Следовательно, $S_l(\omega) = \omega$.

Осями симметрии пары непараллельных прямых служат две перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов между данными прямыми. Осью симметрии отрезка является содержащая его прямая, а также серединный перпендикуляр к этому отрезку.

3.2. Решение задач с помощью осевой симметрии. Рассмотрим наиболее типичные ситуации применения осевой симметрии в задачах.

Задача 1. Точки M и N симметричны вершине C треугольника ABC относительно прямых, содержащих биссектрисы его углов A и B. Доказать, что точка P касания стороны AB с вписанной в треугольник ABC окружностью является серединой отрезка MN.

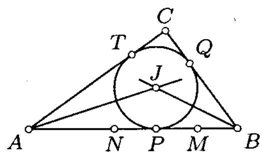


Рис. 20

Решение. Пусть Q и T — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами BC и CA (рис. 20). Так как биссектриса угла принадлежит его оси симметрии и $AT = AP$, $BQ = BP$, то точка P служит образом точек Q и T при указанных осевых симметриях. Поскольку $CQ = CT$, то и $MP = NP$.

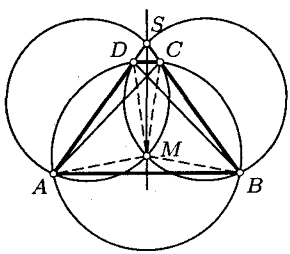


Рис. 21

Задача 2. Продолжения боковых сторон AD и BC равнобочной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ACS и BDS, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

Решение. Пусть M — вторая точка пересечения окружностей ACS и BDS (рис. 21). Прямая SM является осью симметрии этих окружностей и трапеции, поэтому она содержит центр окружности, описанной около трапеции. Далее, $\angle ASM = \angle BSM \Rightarrow \smile AM = \smile MC \Rightarrow AM = MC$. Так как, кроме того, $AM = MB$ и $DM = MC$, то точка M равноудалена от всех вершин трапеции.

Задача 3. Внутри острого угла дана точка A. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, вершины B и C которого принадлежат сторонам угла.

Решение. Построим точки M и N, симметричные точке A относительно сторон данного угла. Прямая MN пересекает стороны угла в искомых точках B и C (рис. 22). Действительно, если B_1 и C_1 — какие-либо другие точки на сторонах угла, то

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = MB_1 + B_1C_1 + C_1N >$$
$$> MN = MB + BC + CN = AB + BC + CA.$$

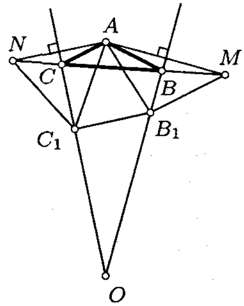


Рис. 22

Следовательно, треугольник ABC имеет наименьший периметр. Вместе с этим доказано, что он единственный.

Задача 4. Дана прямая m и две окружности α и β в полуплоскости с границей m. Найти на прямой m точку, касательные из которой к данным окружностям образуют с прямой m равные углы.

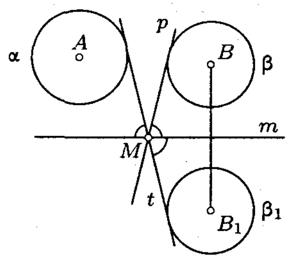


Рис. 23

Решение. Пусть M — искомая точка прямой m, а t и p — касательные к α и β, проходящие через M и образующие с прямой m равные углы (рис. 23). Прямая m — ось симметрии прямых t и p. Поэтому если окружность β_1 симметрична β относительно m, то прямая t *касается* β_1 (см. 10°). Таким образом, для нахождения искомой точки M достаточно построить общую касательную к окружностям α и β_1. При заданном расположении окружностей α и β окружности α и β_1 имеют четыре общих касательных. Следовательно, задача имеет четыре решения. На рис. 23 показано только одно из них.

Задача 5. Три данные прямые a, b, c проходят через центр данной окружности ω. Построить треугольник, описанный около ω, вершины которого лежат на данных прямых.

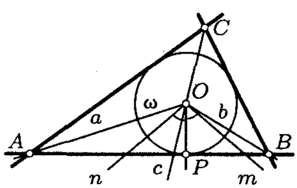


Рис. 24

Решение. Пусть треугольник ABC искомый и $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ (рис. 24). Пусть $m = S_a(c)$ и $n = S_b(c)$, то точка P касания стороны AB с окружностью ω принадлежит оси симметрии прямых m и n (задача 1). Построив точку P, строим прямую AB. Касательная к окружности ω в точке P, пересекаясь с прямыми a и b, дает точки A и B. Касательная в одной из этих точек пересекает прямую c в третьей искомой точке C. Исследование опускаем.

Задачи на доказательство

1.27. Даны две концентрические окружности. Через две точки этих окружностей, лежащие на одной прямой с центром, проведена произвольная окружность. Докажите, что две другие точки пересечения ее с данными окружностями также коллинеарны с центром.

1.28. Окружность, концентричная с вписанной в треугольник окружностью, пересекает прямые, содержащие его стороны, соответственно в парах точек A и B, C и D, E и F. Докажите, что $AB = CD = EF$.

1.29. Если ортоцентр треугольника совпадает с центром вписанной в него окружности, то треугольник правильный. Докажите.

1.30. Если ортоцентр треугольника совпадает с его центроидом, то треугольник правильный. Докажите.

1.31. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Точка M не принадлежит этой прямой. Докажите, что окружности с диаметрами MA, MB, MC имеют еще одну общую точку.

1.32. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной около треугольника окружности.

1.33. Если H — ортоцентр треугольника ABC, то окружности, описанные около треугольников HAB, HBC, HCA, равны. Докажите.

1.34. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно прямых, содержащих его стороны, являются вершинами треугольника, биссектрисы которого лежат на тех же прямых, что и высоты данного треугольника.

1.35. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка $M \neq C$. Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

Задачи на построение

1.36. С помощью построений определите расстояние от данной точки на стороне угла до его вершины, если эта вершина недоступна.

1.37. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

1.38. На плоскости даны непараллельные прямые a и b. Постройте прямую, перпендикулярную третьей данной прямой m и пересекающую прямые a и b в точках, равноудаленных от m.

1.39. Постройте квадрат, две противоположные вершины которого лежали бы на данной прямой, а две другие — на данных окружностях.

1.40. Дана прямая a и точки M и N в полуплоскости с границей a. Найдите на прямой a такую точку P, чтобы сумма $MP + NP$ была наименьшей.

1.41. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC принадлежит биссектрисе угла A, если известны все стороны четырехугольника.

1.42. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

1.43. Постройте треугольник по стороне, разности двух других сторон и углу, заключенному между данной стороной и большей из двух других.

Задачи для внеклассной работы

1.44. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом $45°$. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

1.45. В окружности, центр которой не указан, проведены две параллельные неравные хорды. Разделите эти хорды пополам, пользуясь только одной линейкой.

1.46. Даны две пересекающиеся прямые. Постройте циркулем и линейкой оси симметрии этих прямых, пользуясь циркулем только два раза.

1.47. Через точку, лежащую вне данной прямой, проведите при помощи циркуля и линейки прямую, параллельную данной, пользуясь циркулем только два раза.

1.48. Дана прямая m, не принадлежащая ей точка M и окружность α в одной полуплоскости с границей m. Найдите на данной прямой такую точку P, чтобы сумма расстояния MP и длины отрезка касательной из точки P к окружности была наименьшей.

1.49. Даны прямая m и окружность α. Найдите на прямой m такую точку X, чтобы прямая m и одна из касательных, проведенных к окружности α через точку X, были симметричны относительно другой касательной.

1.50. Дорога AB пересекает под острым углом реку BC. Гонец находится в точке P внутри угла ABC. Его конь хочет пить, а гонец спешит выехать на дорогу AB. В каком месте реки гонец должен напоить коня, чтобы скорее попасть на дорогу?

1.51. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса угла, противолежащего одной из этих двух сторон.

1.52. Постройте треугольник по стороне, соответствующей ей высоте и разности углов, прилежащих к данной стороне.

1.53. Постройте четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная стороны AB и AD и углы при вершинах B и D.

1.54. На прямоугольном бильярде $ABCD$ находятся два шара M и N. Как надо толкнуть шар M, чтобы он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N?

1.55. Дан острый угол с вершиной O и внутри него точки P и Q. Постройте треугольник ABC такой, что $AC=BC$, сторона AB принадлежит одной стороне угла, вершина C — другой, а стороны AC и BC содержат точки P и Q.

§4. *Перенос*

4.1. Определение и свойства переноса. *Переносом* $T_{\bar r}$ плоскости на заданный вектор $\bar r$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $\overline{MM'}=\bar r$.

Это определение оправдано тем, что *отображение*, удовлетворяющее указанным в нем двум требованиям, отображает плоскость на себя и обратно, т. е. является *преобразованием* плоскости (5°).

Перенос $T_{\bar r}$ полностью характеризуется своим вектором $\bar r$. Очевидно, перенос на нулевой вектор является тождественным преобразованием: $T_{\bar 0}=E$. Преобразование, обратное переносу $T_{\bar r}$, есть перенос на противоположный вектор: $(T_{\bar r})^{-1}=T_{-\bar r}$.

Теорема. *Перенос есть движение.*

Доказательство. Если $T_{\bar r}(M)=M'$ и $T_{\bar r}(N)=N'$, то $\overline{MM'}=\overline{NN'}=\bar r$. Следовательно, $\overline{MM'}+\overline{M'N}=\overline{M'N}+\overline{NN'}$, или $\overline{MN}=\overline{M'N'}$ и, значит, $MN=M'N'$.

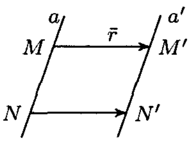


Рис. 25

Сравнение ориентаций двух соответственных при переносе треугольников показывает, что *перенос является движением первого рода.*

Следствие. *Перенос отображает прямую на параллельную ей прямую, луч — на сонаправленный с ним луч.*

Доказательство. Перенос как всякое движение отображает прямую на прямую. Если M и N — две различные точки прямой a и $T_{\bar r}(M)=M'$, $T_{\bar r}(N)=N'$, то $\overline{MN}=\overline{M'N'}$ (рис. 25), откуда следует $T_{\bar r}(a)\parallel a$. Соответственные лучи этих прямых сонаправлены.

Обратно, *если движение отображает каждый луч на сонаправленный с ним луч, то оно является переносом.* Действительно, пусть при движении f фиксированная точка M отображается на точку M', а произвольная точка N — на точку N'. Так как лучи MN и $M'N'$ по условию сонаправлены и $MN = M'N'$, то $\overline{MN} = \overline{M'N'}$, что эквивалентно равенству $\overline{MM'} = \overline{NN'}$, т. е. f — перенос.

Перенос, отличный от тождественного, не имеет неподвижных точек. Каждая прямая, имеющая направление переноса, отображается этим переносом на себя, т. е. является двойной (инвариантной) прямой этого преобразования.

4.2. Решение задач с помощью переноса. Приведем для примера решения нескольких задач, где перенос играет существенную роль.

Задача 1. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ вне его построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены перпендикуляры CM и DN соответственно к прямым AE и BE. Доказать, что точка $P = (CM) \cap (DN)$ принадлежит прямой, содержащей высоту треугольника ABE (рис. 26).

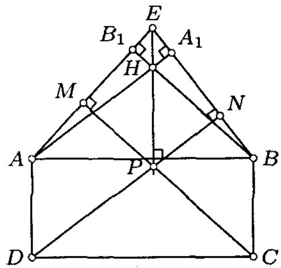


Рис. 26

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABE. Перенос на вектор $\overline{BC}$ отображает прямые AH, BH, EH соответственно на прямые DN, CM, EH. Следовательно, три последние прямые пересекаются в точке P, являющейся образом точки H при указанном переносе.

Задача 2. Две равные окружности пересекаются в точках M и N. Точки P и Q этих окружностей принадлежат их линии центров и находятся в одной полуплоскости от прямой MN (рис. 27). Доказать, что сумма $MN^2 + PQ^2$ не зависит от расстояния между центрами окружностей.

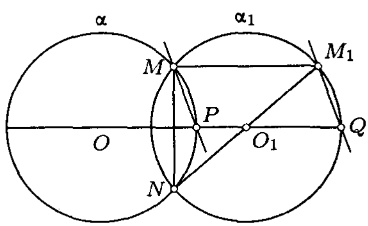


Рис. 27

Решение. Пусть α и α_1 — данные окружности, $P \in \alpha$, $Q \in \alpha_1$. Перенос на вектор PQ отображает α на α_1. Если $M_1 = T_{\overline{PQ}}(M)$, то $M_1 \in \alpha_1$, так как $M \in \alpha$. Угол NMM_1 прямой и поэтому $MN^2 + MM_1^2 = NM_1^2$. Но $\overline{MM_1} = \overline{PQ}$. Значит, $MN^2 + PQ^2 = d^2$, где d — длина диаметра данных окружностей.

Задача 3. Построить параллелограмм $ABCD$ по двум заданным вершинам A и B, если две другие вершины принадлежат данной окружности.

Решение. Пусть ω — данная окружность, $ABCD$ — искомый параллелограмм (рис. 28). Задача сводится к построению одной из точек C или D. Замечаем, что $T_{\overline{AB}}(D) = C$. Если окружность ω_1 есть образ окружности ω при переносе на вектор $\overline{AB}$, то $C \in \omega_1$, поскольку $D \in \omega$. Итак, $C \in \omega \cap \omega_1$, а окружность ω_1 легко строится. Число решений равно числу общих точек окружностей ω и ω_1.

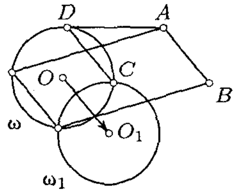


Рис. 28

Задача 4. В окружности даны хорды AB и CD. Найти на окружности такую точку M, чтобы хорды AM и BM отсекали на хорде CD отрезок, равный данному.

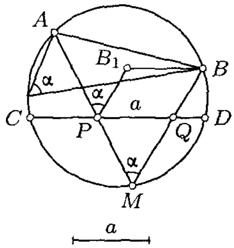


Рис. 29

Решение. Если M — искомая точка и $(MA) \cap \cap (CD) = P$, $(MB) \cap (CD) = Q$, то задачу сведем к построению точки P или точки Q. Перенос на вектор $\bar{r} = \overline{QP}$, длина которого равна длине a данного отрезка, а направление параллельно CD, приводит к желаемой цели. Пусть $T_{\bar{r}}(B) = B_1$ (рис. 29). Величина α угла AMB определяется хордой AB и данной окружностью. Поскольку $(MB) \parallel (PB_1)$, то $\angle APB_1 = \alpha$. Итак, из точки P известный отрезок AB_1 «виден» под известным углом α. Построение выполняем в следующем порядке: строим $B_1 = T_{\bar{r}}(B)$, на отрезке AB_1 строим дуги окружностей, являющиеся множеством точек плоскости, из которых этот отрезок «виден» под углом α. Искомая точка P является точкой пересечения этих дуг с хордой CD. Построение точки M уже очевидно. Исследование проводить не будем.

Задачи на доказательство и вычисление

1.56. Если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный. Докажите.

1.57. Докажите, что сумма боковых сторон трапеции больше разности ее оснований, а сумма диагоналей трапеции больше суммы оснований.

1.58. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, равными AB и BC, и сторонами, равными AM, BM, CM, DM.

1.59. На продолжении основания AB равнобедренного треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что разность расстояний точки M до прямых AC и BC не зависит от выбора этой точки.

1.60. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если известны длины всех ее сторон.

1.61. Две равные окружности касаются внешним образом в точке K. Хорды KA и KB этих окружностей перпендикулярны. Найдите AB, если радиусы окружностей имеют длину r.

1.62. Две равные окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, параллельная их линии центров, пересекает их соответственно в точках A и B, C и D ($\overline{AB}=\overline{CD}$). Докажите, что величина угла APC не зависит от выбора этой прямой.

1.63. Дан четырехугольник $ABCD$ и векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Если $A_1=T_{\bar{u}}(A)$, $C_1=T_{\bar{u}}(C)$, $B_1=T_{\bar{v}}(B)$, $D_1=T_{\bar{v}}(D)$, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ равновелик данному. Докажите.

1.64. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $AB^2+CH^2=4R^2$, где R — радиус описанной около треугольника окружности.

Задачи на построение

1.65. На стороне угла с вершиной O дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM, не используя точку O.

1.66. Постройте трапецию по четырем ее сторонам.

1.67. Постройте трапецию по боковым сторонам, разности оснований и одной диагонали.

1.68. Постройте трапецию по разности оснований, диагонали и двум углам, прилежащим к одному основанию.

1.69. Постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям.

1.70. Постройте отрезок заданной длины с концами на данных окружностях и параллельный данной прямой.

1.71. Даны две окружности и прямая, не параллельная и не перпендикулярная их линии центров. Параллельно данной прямой проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

1.72. Даны три прямые, две из которых параллельны. Постройте правильный треугольник по заданной его стороне так, чтобы его вершины лежали по одной на данных прямых.

1.73. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности.

1.74. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины которого лежат по одной на прямых, содержащих стороны данного четырехугольника, если вершины A и B заданы.

1.75. Постройте треугольник по трем его медианам.

1.76. Постройте четырехугольник $ABCD$, если известны его стороны AB и CD, диагонали и угол между диагоналями.

1.77. По разные стороны от реки находятся пункты A и B. Где надо построить мост через реку, чтобы путь из A в B через этот мост был кратчайшим?

Задачи для внеклассной работы

1.78. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, биссектрисы углов C и D пересекаются в точке N. Докажите, что $|AB + CD - BC - AD| = 2MN$.

1.79. Дан произвольный треугольник ABC, в котором сторона AB наибольшая. На сторонах AC и BC вне треугольника построены произвольные параллелограммы AA_1C_1C и BB_2C_2C. Прямые A_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке D. На стороне AB также вне треугольника построен параллелограмм ABB_3A_3 такой, что $\overline{AA_3} = \overline{DC}$. Докажите, что площадь этого параллелограмма равна сумме площадей первых двух параллелограммов (теорема Паппа).

1.80. Между пунктами A и B текут две реки. Где надо построить мосты через реки, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим?

1.81. Через точку пересечения двух данных окружностей проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри окружностей, был равен данному отрезку a.

1.82. Даны две окружности и точка A. Проведите через точку A прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

1.83. Постройте четырехугольник по четырем его сторонам и углу между прямыми, содержащими две противоположные стороны.

§ 5. *Поворот*

5.1. Определение и свойства поворота. *Поворотом* плоскости около данной точки O на заданный ориентированный угол величины α называется преобразование плоскости, которое точку O отображает на себя, а всякую другую точку M отображает на такую точку M', что $OM' = OM$ и ориентированный угол MOM' имеет величину α (рис. 30). Точка O называется *центром поворота*, а величина α — *углом поворота*.

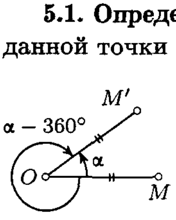


Рис. 30

Число α считается положительным, если угол MOM' ориентирован против движения часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Поворот с центром O на угол α обозначают R_O^α.

Легко видеть, что $R_O^\alpha = R_O^{-(360°-\alpha)} = R_O^{\alpha-360°}$ и $R_O^\alpha = R_O^{\alpha+360°}$. Эти две формулы обобщаются одной формулой

$$R_O^\alpha = R_O^{\alpha+360°k}, \quad \text{где} \quad k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$$

Поэтому без ограничения общности для любого поворота можно полагать $0° \leqslant \alpha < 360°$ или же $-180° < \alpha \leqslant 180°$.

Преобразование, обратное повороту R_O^α, есть поворот с тем же центром, но на противоположный угол: $(R_O^\alpha)^{-1} = R_O^{-\alpha}$. В общем случае $R_O^\alpha \neq R_O^{-\alpha}$, но $R_O^{180°} = R_O^{-180°} = Z_O$ (рис. 31), т. е. центральная симметрия есть частный вид поворота. Заметим, что $R_O^{0°} = R_O^{360°} = E$.

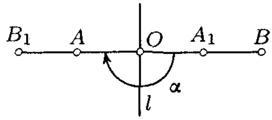


Рис. 31

Теорема. *Поворот плоскости является движением.*

Пусть $R_O^\alpha(A) = A_1$ и $R_O^\alpha(B) = B_1$. Покажем, что для любых двух точек A и B будет выполняться $A_1B_1 = AB$. Это очевидно, когда точки O, A, B коллинеарны. Если они неколлинеарны, то по определению поворота будут неколлинеарны их образы O, A_1, B_1. Из равенства $\measuredangle AOA_1 = \measuredangle BOB_1$ ориентированных углов следует равенство $\angle AOA_1 + \angle A_1OB = \angle A_1OB + \angle BOB_1$ или $\angle AOB = \angle A_1OB_1$. Так как, кроме того, $OA = OA_1$ и $OB = OB_1$, то треугольники OAB и OA_1B_1 равны и поэтому $A_1B_1 = AB$.

Из сравнения ориентаций двух соответственных при повороте треугольников видно, что поворот — *движение первого рода.*

5.2. Угол между лучом и его образом при повороте. Поворот, как любое движение, отображает прямую на прямую, луч на луч, отрезок на отрезок.

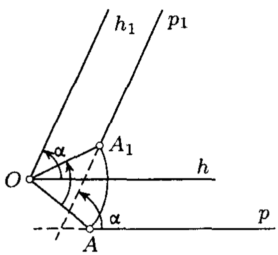


Рис. 32

Теорема. *Ориентированный угол между лучом и его образом при повороте R_O^α равен углу α поворота.*

Доказательство. Если начало данного луча h совпадает с центром O поворота, то это утверждение истинно по определению поворота. Если начало луча p отлично от O, то проведем луч h с началом O, сонаправленный с лучом p. Любое движение плоскости отображает сонаправленные лучи на сонаправленные лучи, поэтому образы h_1 и p_1 лучей h и p также сонаправлены (рис. 32). Угол между двумя направлениями не зависит от выбора лучей этих направлений. Поэтому ориентированный угол между лучами p и p_1 равен ориентированному углу между лучами h и h_1, т. е. равен углу α поворота.

Можно доказать, что *если угол между каждым лучом и его образом при движении постоянен* (не зависит от выбора луча), *то это движение является поворотом.*

5.3. Два способа построения центра поворота. Центр поворота, отличного от тождественного, является единственной его неподвижной точкой. Если угол поворота отличен от $180°$, то не существует двойных прямых поворота. Поворот как движение первого рода можно задать двумя парами $A \to A_1$, $B \to B_1$ соответственных точек с условием $A_1B_1 = AB$. Полагаем, что ни одна из точек A и B не совпадает со своим образом.

При $\overline{A_1B_1} = -\overline{AB}$ имеем центральную симметрию. Если O — искомый центр поворота, то $OA_1 = OA$ и $OB_1 = OB$. Значит, точка O необходимо принадлежит серединному перпендикуляру для каждого из отрезков AA_1 и BB_1. Если общая точка этих перпендикуляров единственна, то она и будет искомым центром заданного поворота (рис. 33). Совпадение указанных серединных перпендикуляров возможно, очевидно, в случае, когда точки A и A_1, B и B_1 соответственно симметричны относительно некоторой прямой l, при этом либо $(AA_1) \neq (BB_1)$ (рис. 34), либо $(AA_1) = (BB_1)$ (рис. 31). В первом случае $O = (AB) \cap (A_1B_1)$, а во втором — $O = l \cap (AB)$.

Рассмотрим другой способ построения центра поворота. Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке K (рис. 35). Искомый центр O поворота является второй общей точкой окружностей AA_1K и BB_1K. Если, в частности, $A_1 = K$, то окружность AA_1K касается прямой A_1B_1 в точке A_1.

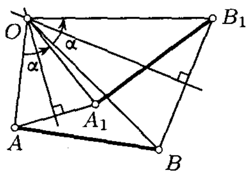


Рис. 33

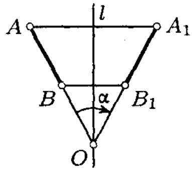


Рис. 34

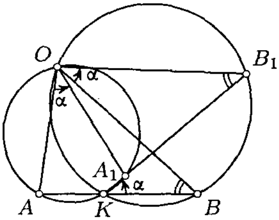


Рис. 35

§6. *Решение задач с помощью поворота*

В приведенных ниже решениях задач на доказательство вычисление и построение демонстрируется использование поворота в различных ситуациях. Как можно заметить, приемы применения поворота аналогичны тем, какие использовались в приложениях центральной симметрии, осевой симметрии и переноса.

Задача 1. В окружность вписаны два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что точки $A_2=(BC)\cap(B_1C_1)$, $B_2=(CA)\cap\cap(C_1A_1)$, $C_2=(AB)\cap(A_1B_1)$ являются вершинами правильного треугольника.

Решение. При повороте около центра O окружности на 120° точки A, B, C отображаются соответственно на точки B, C, A (рис. 36). Следовательно, $(AB)\to(BC)$, $(BC)\to(CA)$, $(CA)\to(AB)$ и аналогично $(A_1B_1)\to(B_1C_1)$, $(B_1C_1)\to(C_1A_1)$, $(C_1A_1)\to(A_1B_1)$. Так как точка пересечения прямых отображается на точку пересечения их образов, то $C_2\to A_2$, $A_2\to B_2$, $B_2\to C_2$. Отсюда следует, что треугольник $A_2B_2C_2$ правильный.

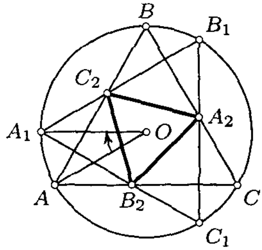


Рис. 36

Задача 2. Точка B лежит между A и C. В полуплоскости с границей AB построены правильные треугольники ABM и BCP. Точки K и E — середины отрезков AP и MC. Доказать, что треугольник BKE правильный (рис. 37).

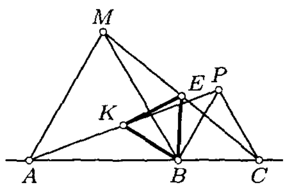


Рис. 37

Решение. Поворотом $R_B^{60^\circ}$ точки A и P отображаются соответственно на точки M и C. Поэтому отрезок AP отображается на отрезок MC. Так как движение сохраняет отношение отрезков, то $R_B^{60^\circ}(K)=E$. Поэтому $BK=BE$ и $\angle KBE=60^\circ$, а это значит, что треугольник BKE правильный.

Задача 3. Треугольник A_1B_1C симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы его прямого угла C. Доказать, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна прямой A_1B_1 (рис. 38).

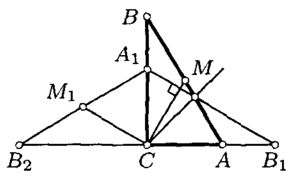


Рис. 38

Решение. Выполним поворот $R_C^{90^\circ}$. Пусть $R_C^{90^\circ}(B)=B_2$, $R_C^{90^\circ}(M)=M_1$. Так как $R_C^{90^\circ}(A)=\\=A_1$ и M — середина отрезка AB, то M_1 — середина отрезка A_1B_2. Тогда $CM_1\parallel A_1B_1$ по свойству средней линии треугольника. По свойству поворота $(CM_1)\perp(CM)$ и, следовательно, $(A_1B_1)\perp(CM)$.

Задача 4. На гипотенузе прямоугольного треугольника вне его построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла тре-

12 – 5545

угольника до центра квадрата, если сумма длин катетов треугольника равна m.

Решение. Пусть O — центр квадрата $ABMN$ (рис. 39). Тогда $R_O^{90°}(B)=A$, $R_O^{90°}(A)=N$. Если $R_O^{90°}(C)=C_1$, то точки C, A, C_1 коллинеарны, поскольку $\angle CAB+\angle BAN+\angle NAC_1=180°$. Треугольник COC_1 прямоугольный равнобедренный и по условию $CC_1=m$. Отсюда $2CO^2=m^2$ и $CO=m/\sqrt{2}$.

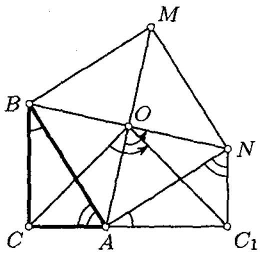


Рис. 39

Задача 5. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая, соединяющая произвольную точку одной окружности с ее образом при повороте около точки A, отображающем эту окружность на другую, проходит через точку B.

Решение. Пусть M — произвольная точка окружности α и прямая MB пересекает вторично другую окружность β в точке M_1. Обозначим $\angle OAO_1=\varphi$, где O и O_1 — центры данных окружностей α и β (рис. 40). Очевидно, $R_A^{\varphi}(\alpha)=\beta$. Необходимо доказать, что $R_A^{\varphi}(M)=M_1$. Но это действительно так, поскольку $\angle AMB=$ $=\angle AM_1B=\angle AOO_1=\angle AO_1O$ (каждый из этих углов измеряется половиной дуги AB) и, следовательно, $MA=M_1A$, а $\angle MAM_1=\varphi$.

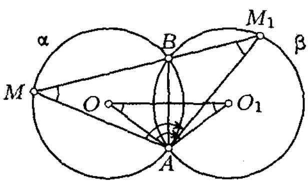


Рис. 40

Задача 6. Построить правильный треугольник ABC, одна вершина которого находится в данной точке A, вершина B — на данной прямой l, а вершина C — на данной окружности α.

Решение. Пусть треугольник ABC удовлетворяет требованиям задачи (рис. 41). Очевидно, $R_A^{60°}(C)=B$. Пусть α_1 — образ окружности α при этом повороте. Так как $C\in\alpha$, то $B\in\alpha_1$.

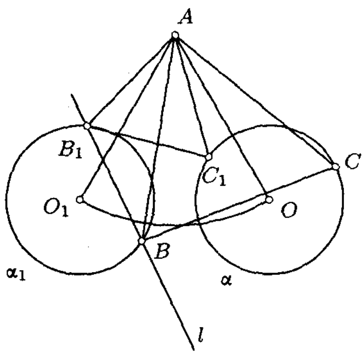


Рис. 41

Кроме того, $B\in l$ и поэтому $B\in\alpha\cap l$. Это и дает ключ к решению задачи. Построение выполняем в следующем порядке: строим $\alpha_1=R_A^{60°}(\alpha)$, $l\cap\alpha_1=\{B,\ B_1\}$, на отрезках AB и AB_1 строим правильные треугольники ABC и AB_1C_1, вершины C и C_1 которых согласно проведенному анализу принадлежат окружности α. Число решений равно числу общих точек прямой l и окружности α_1.

Задача 7. Через данную точку A провести окружность данного радиуса так, чтобы из другой данной точки B она была видна под углом заданной величины φ.

Решение. Пока не будем учитывать требование, чтобы искомая окружность проходила через данную точку A. Построим произвольный угол с вершиной B заданной величины φ и впишем в него окружность ω заданного радиуса r (рис. 42). Искомую окружность можно получить как образ окружности ω при повороте с центром B на некоторый угол, величину которого можно найти, рассмотрев вспомогательную окружность (B, BA). Она пересекает окружность ω в точках P и Q, каждая из которых представляет собой прообраз точки A в требуемом повороте. Следовательно, имеем два поворота с общим центром B на углы $\measuredangle QBA$ и $\measuredangle PBA$. Образы окружности ω при этих поворотах и являются искомыми окружностями. Исследование незатруднительно.

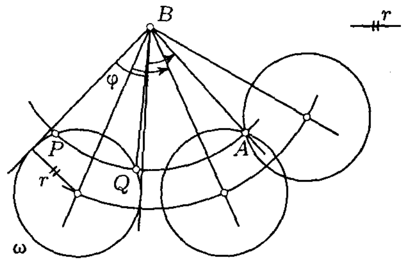


Рис. 42

Задачи на доказательство

1.84. Некоторая фигура F отображается на себя при повороте на $48°$ около точки O. Будет ли она отображаться на себя при повороте с центром O на $72°$? на $90°$?

1.85. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABPQ$ и $BCMN$, причем квадрат $ABPQ$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB, а квадрат $BCMN$ — в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC. Докажите, что отрезки PN и AC равны и перпендикулярны.

1.86. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен $60°$. Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

1.87. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения их со сторонами квадрата являются вершинами некоторого квадрата.

1.88. Точки M, P, N, Q принадлежат последовательно прямым, содержащим стороны квадрата. Докажите, что если отрезки MN и PQ перпендикулярны, то они равны.

1.89. Докажите, что точки пересечения диагоналей правильного пятиугольника служат вершинами также правильного пятиугольника.

1.90. Точки M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых AN, BP, CQ, DM являются вершинами квадрата.

1.91. Дан ромб $ABCD$, в котором $\angle B = 60°$. Прямая a пересекает стороны BC и CD в точках M и N так, что сумма $CM + CN$ равна длине стороны ромба. Докажите, что треугольник AMN правильный.

1.92. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C, D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

1.93. На гипотенузе прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат с центром O. Докажите, что луч CO есть биссектриса прямого угла ACB.

1.94. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки H и K так, что $KA = KB$ и $HC = CB$. Докажите, что треугольник KDH равнобедренный и точки K, A, D, C, H лежат на одной окружности.

1.95. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $ACPQ$. Докажите, что

1) медиана AK треугольника ABC перпендикулярна прямой QE и $AK = \frac{1}{2}QE$;

2) медиана AM треугольника AQE перпендикулярна прямой BC и $AM = \frac{1}{2}BC$.

1.96. На дуге AB описанной около правильного треугольника ABC окружности взята точка M. Докажите, что $MC = MA + MB$.

1.97. Два равных одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A. Докажите, что прямые BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке.

1.98. Даны две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Через точку пересечения окружностей проведена прямая, пересекающая их вторично в точках M и N. Докажите, что угол между касательными к окружностям в точках M и N равен $60°$.

1.99. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков AC и MQ являются вершинами квадрата.

Задачи на построение

1.100. Даны две равные окружности, на одной из которых дана точка A, на другой точка B. Постройте центр поворота, отображающего одну окружность на другую так, чтобы точка A отобразилась на B.

1.101. Даны две равные окружности, одна из которых отображается на другую поворотом на $45°$. Постройте центр этого поворота.

1.102. Постройте окружность с центром в данной точке так, чтобы одна из ее дуг, отсекаемых двумя данными окружностями, имела заданную угловую величину α.

1.103. Постройте окружность с заданным центром, которая касается своего образа при заданном повороте.

1.104. Постройте правильный треугольник, высоты которого пересекаются в данной точке, а две вершины лежат на данной окружности.

1.105. Постройте правильный шестиугольник по его центру и точкам A и B, которые лежат на прямых, содержащих его смежные стороны.

1.106. Даны две концентрические окружности. Постройте квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие — на другой.

1.107. Даны три концентрические окружности. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат по одной на этих окружностях.

1.108. Прямая a касается окружности в данной точке A. Используя поворот, проведите касательную к окружности через данную точку M вне ее.

1.109. Через данную точку проведите прямую, пересечением которой с данным кругом является хорда заданной длины.

Задачи для внеклассной работы

1.110. На стороне CD квадрата $ABCD$ взята точка E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = ED + BF$.

1.111. Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Пусть O — центр поворота, отображающего A на A_1 и B на B_1, а O_1 — центр поворота, отображающего A на B_1 и B на A_1. Докажите, что прямая OO_1 делит пополам отрезок, соединяющий середины данных отрезков. Докажите, что углы этих поворотов отличаются на $180°$.

1.112. Даны два правильных равных и одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Один поворот отображает вершины A, B, C соответственно на вершины A_1, B_1, C_1, другой — на вершины B_1,

C_1, A_1, третий — на вершины C_1, A_1, B_1. Докажите, что центры этих поворотов коллинеарны или совпадают.

1.113. Даны два равных квадрата. Докажите, что в общем случае существует четыре поворота, отображающих один квадрат на другой, и что центры этих поворотов коллинеарны. Убедитесь, что углы этих поворотов образуют прогрессию. Какова разность этой прогрессии? В каких случаях число требуемых поворотов меньше четырех?

1.114. Дан правильный треугольник ABC и точка P. Докажите, что длина большего из отрезков PA, PB, PC не больше суммы длин двух других. При каком положении точки P длина большего из этих отрезков равна сумме длин остальных?

1.115. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны, пересекаются в одной точке под равными углами и $MA_1 = MB + MC$, $MB_1 = MC + MA$, $MC_1 = MA + MB$.

1.116. Постройте квадрат так, чтобы прямые, содержащие его стороны, проходили через заданные точки A, B, C, D по одной на каждой из этих прямых.

1.117. Дана окружность с центром O и не принадлежащие ей точки A и B. Найдите на окружности точки A_1 и B_1 такие, чтобы прямые AA_1 и BB_1 были параллельны, а угол A_1OB_1 имел заданную величину φ.

1.118. Дан квадрат $ABCD$ и точка S, принадлежащая диагонали BD. Через точку S проведены прямые PQ и MN, параллельные сторонам квадрата, причем $M \in (AB)$, $P \in (BC)$, $N \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Докажите, что отрезки SC и MQ перпендикулярны.

1.119. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена медиана AA_1. На стороне AB взята точка D так, что отрезок CD перпендикулярен AA_1. Вычислите отношение $AD:DB$.

1.120. Используя поворот, постройте общие касательные к двум окружностям $\omega_1(M, R)$ и $\omega_2(N, r)$, $R > r$.

1.121. Три равные окружности имеют общую точку H и попарно пересекаются еще в трех точках A, B, C. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, B и C равна данным окружностям.

§7. *Композиции движений*

7.1. Композиция центральных симметрии и переносов. Найдем композицию двух центральных симметрий с центрами A и B. Пусть для произвольной точки M плоскости $Z_A(M) = M_1$ и $Z_B(M_1) = M'$ (рис. 43). Тогда по теореме о средней линии для треугольника MM_1M' имеем:

$\overline{MM'} = 2\overline{AB}$. Вектор $\overline{AB}$ постоянный, так как точки A и B заданы. Поэтому композиция $Z_B \circ Z_A$ есть перенос на вектор $2\overline{AB}$. Итак,

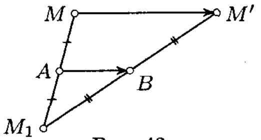


Рис. 43

$$Z_B \circ Z_A = T_{2\overline{AB}}. \tag{7.1}$$

Пусть заданы два переноса $T_{\bar{a}}$ и $T_{\bar{b}}$. Если $T_{\bar{a}}(M) = M_1$ и $T_{\bar{b}}(M_1) = M'$, то $\overline{MM_1} = \bar{a}$ и $\overline{M_1M'} = \bar{b}$, поэтому $\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'} = \bar{a} + \bar{b}$. Так как точка M произвольная, а вектор $\overline{MM'}$ постоянный, то искомая композиция есть перенос на вектор $\bar{a} + \bar{b}$:

$$T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}} = T_{\bar{a}+\bar{b}}. \tag{7.2}$$

Композиция переносов коммутативна, поскольку коммутативно сложение векторов: $T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}} = T_{\bar{a}+\bar{b}} = T_{\bar{b}+\bar{a}} = T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}}$. Аналогичным образом убеждаемся, что композиция любого конечного числа переносов есть перенос на сумму векторов заданных переносов.

Композиция $T_{\bar{r}} \circ Z_A$ центральной симметрии и переноса находится с помощью формулы (7.1): $(Z_B \circ Z_A) \circ Z_A = T_{2\overline{AB}} \circ Z_A$. Поскольку любая композиция преобразований ассоциативна и $Z_A \circ Z_A = E$, то $Z_B = T_{2\overline{AB}} \circ Z_A$. Положим $2\overline{AB} = \bar{r}$, тогда

$$T_{\bar{r}} \circ Z_A = Z_B, \qquad \overline{AB} = \frac{1}{2}\bar{r}. \tag{7.3}$$

Аналогично находим

$$Z_B \circ T_{\bar{r}} = Z_A, \qquad \overline{AB} = \frac{1}{2}\bar{r}. \tag{7.4}$$

Таким образом, композиция центральной симметрии с центром A и переноса на вектор $\bar{r}$ есть центральная симметрия, центр B которой определяется условием $\overline{AB} = \frac{1}{2}\bar{r}$.

Пользуясь ассоциативностью композиций, на основании предыдущих формул получаем такие выводы:

1) композиция четного числа центральных симметрии есть перенос,

2) композиция нечетного числа центральных симметрии есть центральная симметрия.

7.2. Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями. Пусть заданы две осевые симметрии S_u и S_v своими осями, причем $u \parallel v$ $(u \neq v)$, и требуется найти их композицию $f = S_v \circ S_u$. Если M — произвольная точка плоскости и $S_u(M) = M_1$, $S_v(M_1) = M'$, то $f(M) = M'$

(рис. 44). Пусть $(MM_1) \cap u = P$, $(M_1M') \cap v = Q$, при этом частные случаи $M = M_1 = P$ или $M_1 = M' = Q$ не исключаются. Тогда $\overline{MM'} = \overline{MM}_1 + \overline{M_1M'} = 2\overline{PM}_1 + 2\overline{M_1Q} = 2(\overline{PM}_1 + \overline{M_1Q}) = 2\overline{PQ}$. Но вектор $2\overline{PQ}$ не зависит от выбора точки M, а определяется только прямыми u и v: он перпендикулярен этим прямым, направлен от оси u к оси v и имеет длину, равную удвоенному расстоянию между этими прямыми. Следовательно, движение $f = S_v \circ S_u$ является переносом на этот вектор. При $u = v$ имеем тождественный перенос $T_{\bar{0}}$. Результатом проведенных рассуждений является такая теорема.

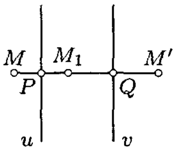


Рис. 44

Теорема. *Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями представляет собой перенос в направлении, перпендикулярном осям, от оси первой симметрии к оси второй симметрии на удвоенное расстояние между осями.*

7.3. Представление переноса композицией осевых симметрий. Решим обратную задачу. Пусть задан перенос $T_{\bar{r}}$ и требуется представить его композицией осевых симметрий. Проведем произвольную прямую $u \perp \bar{r}$. Пусть для произвольной точки $T_{\bar{r}}(M) = M'$ и $S_u(M) = M_1$. Построим серединный перпендикуляр v к отрезку M_1M' (при $M_1 = M'$ прямая v проходит через M_1 параллельно u (рис. 44). Тогда $S_v(M_1) = M'$ и композиция $S_v \circ S_u$ отображает M на M'. Так как $\overline{MM'} = \bar{r} = 2\overline{PQ}$, взаимное расположение осей u и v не зависит от выбора точки M, а зависит только от заданного переноса $T_{\bar{r}}$. Поскольку образы произвольной точки M при переносе $T_{\bar{r}}$ и при композиции $S_v \circ S_u$ совпадают, то (7°)

$$T_{\bar{r}} = S_v \circ S_u, \quad T_{(1/2)\bar{r}}(u) = v, \quad u \perp \bar{r}.$$

Итак, *всякий перенос $T_{\bar{r}}$ можно представить композицией двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными вектору переноса, при этом одна из осей выбирается произвольно, а другая должна удовлетворять условию: переносом $T_{(1/2)\bar{r}}$ ось первой симметрии отображается на ось второй симметрии.*

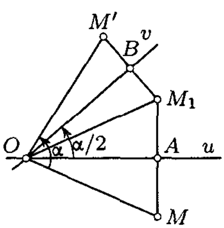


Рис. 45

7.4. Композиция двух осевых симметрий с непараллельными осями. Пусть заданы две осевые симметрии S_u и S_v своими осями u и v, причем $u \nparallel v$, и требуется найти движение $f = S_v \circ S_u$. Если $u \cap v = O$ (рис. 45), то $f(O) = O$, так как точка O неподвижна при каждой из симметрий S_u и S_v. Очевидно, других неподвижных точек движение f не имеет. Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от точки O. Если $S_u(M) = M_1$, $S_v(M_1) = M'$, $(MM_1) \cap u = A$, $(M_1M') \cap v = B$, то $\angle MOA = \angle AOM_1$ и

$\measuredangle M_1OB = \measuredangle BOM'$. Поэтому

$$\measuredangle MOM' = \measuredangle MOA + \measuredangle AOM_1 + \measuredangle M_1OB + \measuredangle BOM' = \\ = 2(\measuredangle AOM_1 + \measuredangle M_1OB) = 2\measuredangle AOB = 2\measuredangle(u, v).$$

А этот угол постоянный, так как u и v заданы. Следовательно, $S_v \circ S_u$ есть поворот с центром O на угол $2\measuredangle(u, v)$. Итак, доказана

Теорема. *Композиция двух осевых симметрий с непараллельными осями представляет собой поворот с центром в точке пересечения осей на удвоенный угол от оси первой симметрии до оси второй симметрии.*

7.5. Представление поворота композицией осевых симметрий. Решим обратную задачу. Пусть задан поворот R_O^α. Проведем через O произвольную прямую u. Пусть $M \neq O$, $R_O^\alpha(M) = M'$ и $S_u(M) = M_1$. Построим серединный перпендикуляр v к отрезку M_1M' (при $M_1 = M'$ обозначим $(OM_1) = v$). Тогда $S_v(M_1) = M'$. Из $OM = OM_1 = OM'$ следует $O \in v$. Если теперь рассмотрим композицию $S_v \circ S_u$, то она совпадает с заданным поворотом, поскольку при R_O^α и при $S_v \circ S_u$ образы произвольной точки M совпадают. Итак,

$$R_O^\alpha = S_v \circ S_u, \quad u \cap v = O, \quad \measuredangle(u, v) = \frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, такое представление поворота композицией двух осевых симметрий неоднозначно, так как одна из осей u и v берется произвольно, а вторая определяется условиями: $u \cap v = O$, $\measuredangle(u, v) = \alpha/2$. Если $u_1 \cap v_1 = O$ и $\measuredangle(u_1, v_1) = \alpha/2$ (рис. 46), то $R_O^\alpha = S_v \circ S_u = S_{v_1} \circ S_{u_1}$.

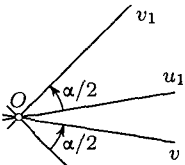


Рис. 46

Таким образом, *всякий поворот можно представить композицией двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в центре поворота, при этом одна из осей произвольна, а другая удовлетворяет условию: ориентированный угол от оси первой симметрии до оси второй симметрии равен половине угла поворота.*

7.6. Композиция двух поворотов. Если центры A и B поворотов R_A^α и R_B^β совпадают, то композиция $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ есть поворот около того же центра на угол $\alpha + \beta$. Вследствие того, что $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, композиция поворотов с общим центром коммутативна. Рассмотрим случай, когда $A \neq B$. Композиция поворотов — движение первого рода. При $\alpha + \beta = 0$ или $\alpha + \beta = 2\pi$ эта композиция есть перенос, отличный от тождественного, так как она отображает каждый луч на сонаправленный с ним луч и $(R_B^\beta \circ R_A^\alpha)(A) \neq A$. Далее будем считать, что $\alpha + \beta \neq 0$ и $\alpha + \beta \neq 2\pi$. Тогда $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ является поворотом на угол $\alpha+\beta$, поскольку угол между каждым лучом и его образом равен $\alpha+\beta$. Найдем центр C этого поворота, полагая $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Так как точка C неподвижна при композиции поворотов, то если $R_A^\alpha(C)=C_1$ то $R_B^\beta(C_1)=C$. Отсюда заключаем, что $AC=AC_1$ и $BC=BC_1$. Эти равенства показывают, что точки C и C_1 симметричны относительно прямой AB (рис. 47.). В силу этой симметрии имеем: $\angle CAB=\alpha/2$ и $\angle ABC=\beta/2$. Эти углы позволяют построить центр C поворота $R_C^{\alpha+\beta}=R_B^\beta\circ R_A^\alpha$: он является точкой пересечения прямых u и v таких, что $R_A^{\alpha/2}(u)=(AB)$ и $R_B^{\beta/2}(AB)=v$.

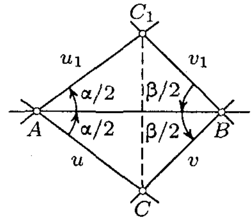


Рис. 47

Сформулируем полученные выводы.

Теорема. *Композиция двух поворотов R_A^α и R_B^β с различными центрами есть перенос, если $\alpha+\beta=0$ или $\alpha+\beta=2\pi$, и поворот, если $\alpha+\beta\neq 0$ и $\alpha+\beta\neq 2\pi$. Центром поворота является точка C пересечения прямых u и v таких, что $R_A^{\alpha/2}(u)=(AB)$ и $R_B^{\beta/2}(AB)=v$.*

Пользуясь этой теоремой, находим:

$$R_A^\alpha\circ R_B^\beta=R_{C_1}^{\alpha+\beta},\qquad C_1=S_{AB}(C).$$

7.7. Композиция поворота и переноса. Пусть требуется найти $T_{\bar r}\circ$ $\circ R_O^\alpha$. Для этого, пользуясь известной свободой выбора осей, положим $R_O^\alpha=S_v\circ S_u$ и $T_{\bar r}=S_t\circ S_v$, где $u\cap v=O$, $\measuredangle(u,v)=\dfrac{\alpha}{2}$ и $t=T_{(1/2)\bar r}(v)$ (рис. 48). Тогда

$$T_{\bar r}\circ R_O^\alpha=(S_t\circ S_v)\circ(S_v\circ S_u)=S_t\circ(S_v\circ S_v)\circ S_u=S_t\circ S_u.$$

Так как $u\nparallel t$ и $\angle(u,t)=\angle(u,v)=\dfrac{\alpha}{2}$, то $S_t\circ S_u=R_A^\alpha$, где $A=u\cap t$. Итак,

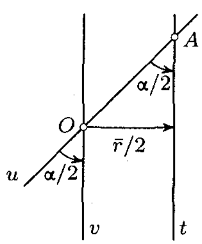


Рис. 48

$$T_{\bar r}\circ R_O^\alpha=R_A^\alpha.$$

В частности, при $\alpha=180^\circ$ имеем:

$$T_{\bar r}\circ Z_o=Z_A,\qquad \text{где}\quad \overline{OA}=\frac{1}{2}\bar r.$$

Нетрудно проверить истинность равенства:

$$T_{\bar r}\circ R_O^\alpha=R_{O_1}^\alpha\circ T_{\bar r},\qquad \text{где}\quad O_1=T_{\bar r}(O).$$

Отсюда видно, что поворот и перенос не перестановочны в композиции, за исключением тривиальных случаев, когда $\bar r=\bar 0$ или $\alpha=0$.

7.8. Переносная симметрия. Рассмотрим композицию осевой симметрии S_l и переноса $T_{\bar r}$ при $\bar r\parallel l$ и $\bar r\neq\bar 0$. Нетрудно видеть, что эта композиция коммутативна:

$$T_{\bar r}\circ S_l = S_l\circ T_{\bar r}, \qquad \bar r\parallel l.$$

В самом деле, если M — произвольная точка и $S_l(M)=M_1$, $T_{\bar r}(M_1)=M'$, $T_{\bar r}(M)=M_0$, то $S_l(M_0)=M'$ (рис. 49). Поэтому $(T_{\bar r}\circ S_l)(M)=M'$ и $(S_l\circ T_{\bar r})(M)=M'$.

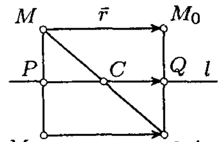


Рис. 49

Определение. Композиция осевой симметрии и нетождественного переноса параллельно оси симметрии называется *переносной* (*скользящей*) *симметрией* плоскости.

Переносную симметрию $T_{\bar r}\circ S_l = S_l\circ T_{\bar r}$ ($\bar r\parallel l$, $\bar r\neq\bar 0$) условимся обозначать $W_l^{\bar r}$. Прямая l называется осью переносной симметрии, вектор $\bar r$ — вектором переносной симметрии.

Непосредственно из этого определения вытекают следующие свойства переносной симметрии.

1) Переносная симметрия есть движение второго рода (как композиция движения второго рода и движения первого рода).

2) Ось переносной симметрии делит пополам всякий отрезок, соединяющий точку с ее образом, если данная точка не принадлежит оси симметрии. Действительно, если $(MM_1)\cap l=P$, $(MM')\cap l=C$ (рис. 49), то P — середина MM_1 и по теореме Фалеса точка C — середина MM'.

3) Вектор $\bar r$ переносной симметрии определяется ортогональными проекциями P и Q данной точки M и ее образа M' на ось l симметрии: $\bar r=\overline{PQ}$.

7.9. Композиция переноса и осевой симметрии. Найдем композицию $S_l\circ T_{\bar r}$ при $\bar r\nparallel l$. Представим вектор $\bar r$ в виде $\bar r=\bar p+\bar q$, где $p\parallel l$, $q\perp l$ (рис. 50). Тогда $T_{\bar r}=T_{\bar q}\circ T_{\bar p}$ и поэтому $S_l\circ T_{\bar r}= S_l\circ(T_{\bar q}\circ T_{\bar p})=(S_l\circ T_{\bar q})\circ T_{\bar p}$. Представляя $T_{\bar q}= S_l\circ S_u$, где u — прообраз прямой l при переносе $T_{(1/2)\bar r}$, имеем: $S_l\circ T_{\bar r}=S_l\circ(S_l\circ S_u)\circ T_{\bar p}= (S_l\circ S_l)\circ(S_u\circ T_{\bar p})=W_u^{\bar p}$, так как $p\parallel u$. Итак,

$$S_l\circ T_{\bar r}=W_u^{\bar p}.$$

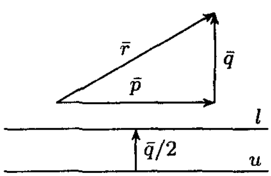


Рис. 50

7.10. Движения плоскости как композиции осевых симметрий. Приведем без доказательств принципиально важные факты теории движений плоскости.

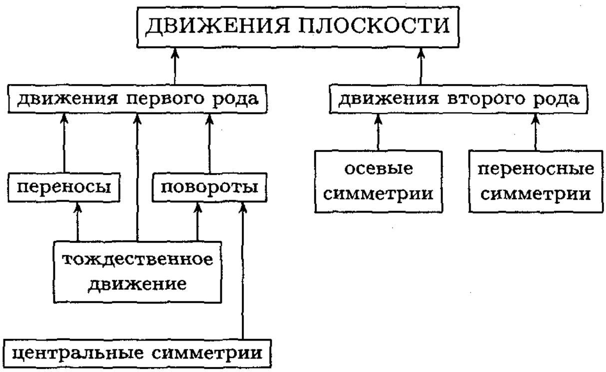
1) Композицией осевых симметрий представимо любое движение плоскости.

2) Всякое движение первого рода представимо композицией двух осевых симметрий.

3) Всякое движение второго рода есть либо осевая симметрия, либо композиция трех осевых симметрий.

4) Композиция трех осевых симметрий есть либо осевая симметрия, либо переносная симметрия.

Классификацию движений плоскости можно иллюстрировать такой схемой.



§8. *Решение задач с помощью композиций движений*

Задача 1. Построить пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$, если известны середины P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 его сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 (рис. 51).

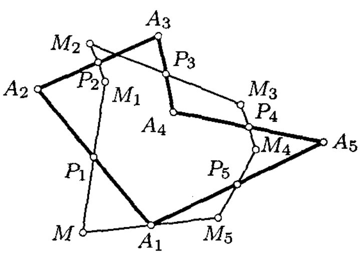


Рис. 51

Решение. Рассмотрим композицию $f = Z_{P_5} \circ Z_{P_4} \circ Z_{P_3} \circ Z_{P_2} \circ Z_{P_1}$ пяти центральных симметрий. Она является центральной симметрией (п. 7.1). Замечаем, что $f(A_1) = A_1$, т. е. точка A_1 — центр этой симметрии. Его можно найти, построив образ M_5 произвольной точки M при композиции f: $M_5 = f(M)$. Тогда A_1 — середина отрезка MM_5. Далее строим $A_2 = Z_{P_1}(A_1)$, $A_3 = Z_{P_2}(A_2)$, $A_4 = Z_{P_3}(A_3)$, $A_5 = Z_{P_4}(A_4)$.

Задача 2. Для произвольной точки M описанной около треугольника ABC окружности построены симметричные ей относительно прямых BC, CA, AB соответственно точки M_1, M_2, M_3. Доказать, что точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC.

Решение. Окружности α_1, α_2, α_3, симметричные описанной окружности α относительно указанных прямых (рис. 52), пересекаются в ортоцентре H треугольника ABC (задача 1.33). По теореме п. 7.4 $S_{CA} \circ S_{BC} = R_C^{2\angle BCA}$. Так как этот поворот отображает окружность α_1 на окружность α_2 и точку M_1 на точку M_2, то в силу результата задачи 5 из § 6 точки M_1, M_2, H коллинеарны. По аналогичной причине коллинеарны и точки M_2, M_3, H. Следовательно, все четыре точки M_1, M_2, M_3, H лежат на одной прямой.

Задача 3. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBPQ$ с центрами O_1 и O_2. Точки D и F — середины отрезков MP и NQ соответственно. Доказать, что треугольники ABD и O_1O_2F прямоугольные равнобедренные (рис. 53).

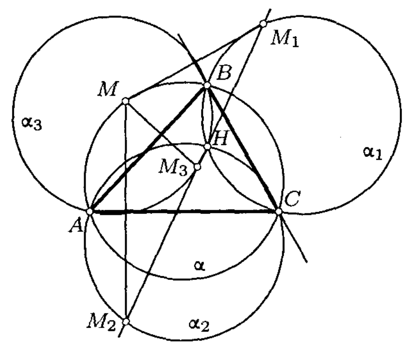


Рис. 52

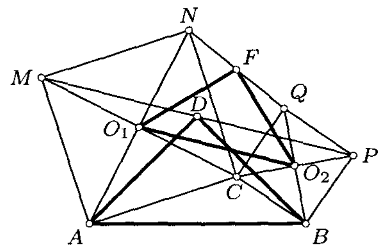


Рис. 53

Решение. Рассмотрим композицию поворотов $R_A^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}$. Она представляет собой поворот на 180°, т. е. является центральной симметрией, и отображает P на M. Значит, центром этой симметрии служит середина D отрезка PM. По теореме о композиции двух поворотов углы DAB и DBA равны половинам углов поворотов, т. е. 45°, чем и заканчивается доказательство для треугольника ABD. Аналогично проводится доказательство для треугольника O_1O_2F с помощью композиции поворотов с центрами O_1 и O_2 на 90°.

Задача 4. Композиция четырех поворотов с центрами A, B, C, D на 90° есть тождественное преобразование. Доказать, что отрезки AC и BD равны и перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим композиции $R_B^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ} = R_O^{180^\circ}$ и $R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} = R_{O_1}^{180^\circ}$. По условию $R_{O_1}^{180^\circ} \circ R_O^{180^\circ}$ — тождественное преобразование, что возможно лишь при $O_1 = O$. По теореме о композиции двух поворотов $\angle OAB = \angle ABO = 45°$ и $\angle OCD = \angle CDO = 45°$. Отсюда следует, что $R_O^{90°}(A) = B$ и $R_O^{90°}(C) = D$. Так как поворотом на $90°$ отрезок AC отображается на отрезок BD, то эти отрезки равны и перпендикулярны.

Задача 5. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC вне (или все внутри) его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Доказать, что центры O_1, O_2, O_3 этих треугольников являются вершинами правильного треугольника (рис. 54).

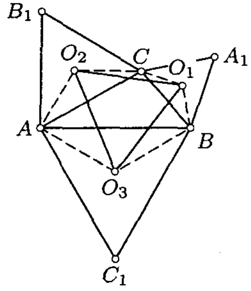


Рис. 54

Решение. Рассмотрим композицию трех поворотов $R_{O_3}^{120°} \circ R_{O_1}^{120°} \circ R_{O_2}^{120°}$. Последовательным применением теоремы о композиции двух поворотов (п. 7.6) получаем, что эта композиция есть перенос, так как сумма углов поворота равна $360°$. Замечаем, что при этой композиции точка A неподвижна. Поэтому полученный перенос — тождественное преобразование (в противном случае перенос не имеет неподвижных точек). Равенство $R_{O_3}^{120°} \circ R_{O_1}^{120°} \circ R_{O_2}^{120°} = E$ можно представить в виде $R_{O_1}^{120°} \circ R_{O_2}^{120°} = R_{O_3}^{-120°}$, или $R_{O_1}^{120°} \circ R_{O_2}^{120°} = R_{O_3}^{240°}$. По построению центра O_3 композиции двух поворотов углы $O_3O_2O_1$ и $O_2O_1O_3$ равны половинам углов поворотов, т. е. $60°$. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ правильный.

Задачи

1.122. Найдите композицию симметрий относительно двух перпендикулярных прямых.

1.123. Докажите, что композицией трех осевых симметрий, оси которых пересекаются в одной точке (или параллельны), является осевая симметрия. Постройте ее ось.

1.124. Найдите композицию четырех симметрий относительно последовательно взятых вершин параллелограмма.

1.125. Дан треугольник ABC. Прямые l, m, p — серединные перпендикуляры к отрезкам BC, CA, AB соответственно. Постройте оси симметрий, являющихся композициями осевых симметрий $S_p \circ S_m \circ S_l$, $S_l \circ S_p \circ S_m$, $S_m \circ S_l \circ S_p$.

1.126. Найдите композицию осевых симметрий относительно прямых, содержащих биссектрисы данного треугольника.

1.127. Докажите, что композиция четырех осевых симметрий, оси которых содержат последовательно биссектрисы углов четырехугольника общего вида, есть перенос.

1.128. Дан четырехугольник такой, что композиция четырех симметрий, оси которых содержат последовательно его стороны, есть перенос. Докажите, что этот четырехугольник является вписанным в некоторую окружность.

1.129. Дан треугольник ABC. Найдите композицию $R_C^{\angle C} \circ R_B^{\angle B} \circ R_A^{\angle A}$, если ориентация углов поворотов противоположна ориентации треугольника ABC.

1.130. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC вне его построены правильные одинаково ориентированные треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Докажите, что композиция поворотов с центрами A_1, B_1, C_1 на углы 60° есть центральная симметрия. Найдите ее центр.

1.131. На сторонах четырехугольника вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

1.132. На сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что расстояние между центрами двух квадратов равно расстоянию от центра третьего квадрата до противоположной ему вершины данного треугольника.

1.133. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Найдите углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB, точкой P и центром O треугольника BCQ.

1.134. Переносная симметрия задана парой соответственных точек и вектором переноса. Постройте образ произвольной точки.

1.135. Представьте переносную симметрию композицией центральной и осевой симметрии.

1.136. Даны две равные окружности. Докажите, что оси всех переносных симметрий, отображающих одну окружность на другую, пересекаются в одной точке.

1.137. Даны две равные окружности α и β и на них соответственно по точке A и B. Какими переносными симметриями можно отобразить α на β, чтобы при этом $A \to B$?

1.138. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и противоположно ориентированы. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны.

1.139. Даны два равных противоположно ориентированных правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что оси трех переносных симметрий, каждая из которых отображает один треугольник на другой, пересекаются в одной точке.

1.140. Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Одна переносная симметрия отображает A на A_1 и B на B_1, другая — A на B_1 и B

на A_1. Докажите, что оси этих переносных симметрий перпендикулярны.

1.141. Каким преобразованием является композиция переносной симметрии и центральной симметрии, если центр симметрии лежит на оси переносной симметрии?

1.142. Каким движением является композиция двух переносных симметрий, каждая из которых отображает отрезок AB на отрезок A_1B_1?

1.143. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $\angle A = 45°$. Найдите движение $W^{\overline{DA}}_{(DA)} \circ W^{\overline{CD}}_{(CD)} \circ W^{\overline{BC}}_{(BC)} \circ W^{\overline{AB}}_{(AB)}$.

1.144. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке M. Точки P и Q — середины сторон AB и CD. Докажите, что композиция $Z_Q \circ Z_M \circ Z_P$ отображает данную окружность на себя.

1.145. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого соответственно параллельны сторонам данного пятиугольника.

§9. *Координатные формулы движений плоскости*

Пусть задано движение f и прямоугольная декартова система координат Oxy с базисными векторами $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$. Если $f(M) = M'$ и точки M и M' имеют в этой системе соответственно координаты (x, y) и (x', y'), то искомые формулы движений должны выражать x', y' через x, y и величины, которыми задано движение f.

9.1. Формулы переноса и центральной симметрии. Пусть $\bar{r}(a, b)$ — вектор переноса. Если $M(x, y) \to M'(x', y')$, то по определению переноса $\overline{MM'} = \bar{r}$, т.е. $x' - x = a$ и $y' - y = b$. Таким образом, формулами

$$x' = x + a, \quad y' = y + b \tag{9.1}$$

записывается перенос плоскости на вектор $\bar{r}(a, b)$.

Если $S(x_0, y_0)$ — центр симметрии Z_S и при этой симметрии $M(x, y) \to M'(x', y')$, то $\frac{1}{2}(x' + x) = x_0$, $\frac{1}{2}(y' + y) = y_0$, откуда получаем искомые формулы для Z_S:

$$x' = 2x_0 - x, \quad y' = 2y_0 - y. \tag{9.2}$$

9.2. Формулы поворота. Если центр поворота совпадает с началом O системы координат, а угол (ориентированный) поворота равен φ, то выразим координаты x', y' образа M' точки $M(x, y)$ через ее координаты x, y и угол φ. Обозначим ориентированный угол между осью Ox и вектором $\overline{OM}$ через α (рис. 55), а длину вектора $\overline{OM}$ — через r. Тогда по определению косинуса и синуса $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Так как длина вектора $\overline{OM'}$ равна r, а угол между осью Ox и этим вектором равен $\alpha + \varphi$, то по этим же формулам имеем:

$$x' = r\cos(\alpha+\varphi), \qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi).$$

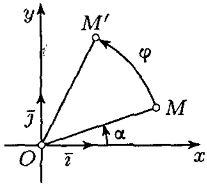


Рис. 55

Используя формулы сложения, получаем:

$$x' = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi,$$
$$y' = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi.$$

Заменив $r\cos\alpha$ и $r\sin\alpha$ соответственно на x и y, получаем окончательные формулы поворота около начала O на угол φ:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{9.3}$$

В частности, при $\varphi = 90^\circ$ имеем $x' = -y$, $y' = x$.

9.3. Формулы осевой симметрии. Пусть при симметрии относительно прямой $ax + by + c = 0$ точка $M(x, y)$ отображается в точку $M'(x', y')$. Выразим x', y' через x, y и a, b, c. Так как середина отрезка MM' имеет координаты $\frac{x+x'}{2}$, $\frac{y+y'}{2}$ и лежит на оси симметрии, то

$$\frac{1}{2}a(x+x') + \frac{1}{2}b(y+y') + c = 0.$$

В силу того, что вектор $\overline{M'M}$ перпендикулярен оси симметрии, т. е. перпендикулярен вектору $\bar{p}(-b, a)$, получаем:

$$-b(x - x') + a(y - y') = 0.$$

Рассмотрим систему полученных уравнений относительно x', y'. Запишем ее так:

$$\begin{cases} ax' + by' = -ax - by - 2c, \\ bx' - ay' = bx - ay. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c), \\ y' = y - \dfrac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c). \end{cases} \tag{9.4}$$

13 – 5545

В частности, если ось симметрии имеет уравнение $y = kx$, то формулы (9.4) становятся такими:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+k^2}((1-k^2)x + 2ky), \\ y' = \dfrac{1}{1+k^2}(2kx - (1-k^2)y). \end{cases} \tag{9.5}$$

При $k = 1$ будет $x' = y$, $y' = x$.

9.4. Формулы движений I и II рода. Легко видеть, что всякое движение первого рода представимо композицией поворота на определенный угол около произвольной точки и некоторого определенного переноса. В самом деле, движение первого рода задается парой равных треугольников одной ориентации: $ABC \to A'B'C'$ (п. 1.3). Сначала треугольник ABC повернем около произвольной точки O на такой угол φ, чтобы соответственные стороны полученного треугольника $A_1B_1C_1$ и треугольника $A'B'C'$ оказались параллельными. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ отобразится на треугольник $A'B'C'$ вполне определенным переносом на вектор $\overline{A_1A'}$.

Поворот запишем формулами:

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

а перенос — формулами:

$$x' = x_1 + a, \quad y' = y_1 + b.$$

Подстановкой получаем искомые формулы движений первого рода:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Переходим к выводу формул движений второго рода. Используя его конструктивное задание парой равных треугольников противоположной ориентации, легко убеждаемся, что всякое движение второго рода представимо композицией осевой симметрии с наперед заданной осью и определенного движения первого рода. В качестве оси симметрии возьмем ось Ox прямоугольной декартовой системы координат. Эта осевая симметрия имеет простые формулы:

$$x_1 = x, \; y_1 = -y \quad (M(x, y) \to M_1(x_1, y_1)).$$

Если при движении первого рода $M_1(x_1, y_1) \to M'(x', y')$, то

$$x' = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi + a,$$
$$y' = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi + b.$$

Подстановкой получаем искомые формулы движений второго рода:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + a, \\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + b. \end{aligned} \tag{9.7}$$

9.5. Решение задач с использованием координатных формул движений.

Задача 1. Через центр правильного треугольника проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

Решение. Систему координат выберем так, чтобы взятая прямая совпала с осью Ox (рис. 56).

Пусть вершина A правильного треугольника ABC имеет координаты α, β. Ординату y_B вершины B найдем по формулам (9.3) при $\varphi = \angle AOB = 120°$: $y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$. Аналогично при $\varphi = -120°$ получаем $y_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$. Тогда требуемая сумма квадратов будет равна $y_A^2 + y_B^2 + y_C^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}(\alpha\sqrt{3} - \beta)^2 + \frac{1}{4}(-\alpha\sqrt{3} - \beta)^2 = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{3}{2}R^2$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Эта сумма не зависит от выбора прямой.

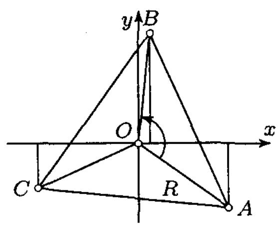


Рис. 56

Задача 2. Написать формулы поворота около точки $C(x_0, y_0)$ на угол φ.

Решение. Поскольку поворот R_C^φ есть движение первого рода, то он должен иметь формулы вида (9.6):

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b.$$

Осталось найти параметры a и b. Так как $C(x_0, y_0) \to C(x_0, y_0)$, то

$$x_0 = x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi + a, \quad y_0 = x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi + b.$$

Выразим отсюда a и b и подставим в предыдущие формулы. В результате имеем:

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi + x_0, \\ y' &= (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi + y_0. \end{aligned}$$

Это и есть искомые формулы поворота R_C^φ.

Задача 3. Найти уравнение образа прямой $Ax + By + C = 0$ при симметрии относительно прямой $ax + by + c = 0$.

Решение. Эта симметрия задается формулами (9.4). Обратное преобразование — это та же симметрия. Поэтому

$$x = x' - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax'+by'+c), \qquad y = y' - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax'+by'+c).$$

Уравнение образа прямой $Ax+By+C=O$ получается подстановкой в это уравнение вместо x, y предыдущих выражений. После упрощений получаем искомое уравнение образа прямой $Ax+By+C=0$ при симметрии с осью $ax+by+c=0$:

$$(a^2+b^2)(Ax+By+C) = 2(aA+bB)(ax+by+c).$$

Штрихи у переменных x', y' отброшены.

Задача 4. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если известны уравнения $x+2y-13=0$ и $x-y-5=0$ прямых l и m, содержащих две его биссектрисы, и координаты вершины $A(7, 8)$.

Решение. Проверяем, что вершина A не принадлежит данным биссектрисам. Пусть вершина B лежит на прямой l, а вершина C — на прямой m. Так как прямая l — ось симметрии прямых AB и BC, то точка A', симметричная A относительно l, принадлежит прямой BC. По аналогичной причине точка A_1, симметричная A относительно m, принадлежит прямой BC. Следовательно, уравнение прямой можно составить по координатам двух ее точек A_1 и A', которые находим по формулам (9.4): $A_1(13, 2)$, $A'(3, 0)$. Находим уравнение прямой BC: $x-5y-3=0$. Далее, на основании результата предыдущей задачи 3 находим уравнения прямых AB и AC: $23x+11y-249=0$ и $5x-y-27=0$.

Задачи

1.146. Докажите, что формулами задана осевая симметрия, и найдите уравнение ее оси: $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$.

1.147. Какие движения заданы формулами?

а) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y), \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y), \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y), \\ y' = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y), \\ y' = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y). \end{cases}$

1.148. Найдите формулы движений первого и второго рода, каждое из которых точки $A(1, 1)$ и $B(3, -2)$ отображает соответственно на точки $A_1(4, 2)$ и $B_1(1, 4)$.

1.149. Докажите, что прямые $Ax+By+C=0$ и $Bx+Ay+C=0$ симметричны относительно прямой $y=x$.

1.150. Найдите формулы переносной симметрии с осью $ax+by+c=0$ и вектором $\bar{r}(-b,\, a)$.

1.151. Найдите уравнение образа прямой $Ax+By+C=0$ при центральной симметрии с центром $S(x_0,\, y_0)$.

1.152. Докажите, что образ прямой $Ax+By+C=0$ при повороте около точки $S(x_0,\, y_0)$ на угол φ имеет уравнение:

$$(x-x_0)(A\cos\varphi-B\sin\varphi)+(y-y_0)(A\sin\varphi+B\cos\varphi)+Ax_0+By_0+C=0.$$

1.153. Около окружности описан квадрат $ABCD$ и проведена произвольная касательная. Из вершин квадрата опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на эту касательную. Докажите, что

$$AA_1\cdot CC_1=BB_1\cdot DD_1.$$

1.154. Через вершину C прямого угла прямоугольного равнобедренного треугольника ABC проведена произвольная прямая l и через вершины A и B проведены параллельные прямые, пересекающие прямую l соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что сумма $CA_1^2+CB_1^2$ зависит только от угла между прямыми l и AA_1 (для данного треугольника ABC).

§ 10. *Комбинирование метода преобразований и векторного метода решения задач*

10.1. Движение вектора. В школьном курсе геометрии вектор определяется упрощенно как направленный отрезок. Поэтому вводится понятие равных векторов как равных и одинаково направленных (сонаправленных) отрезков. Однако в математике под вектором понимают множество всех равных сонаправленных отрезков, каждый из которых и задает этот вектор. Тогда понятие равных векторов становится ненужным, поскольку «равные векторы» — это один и тот же вектор, заданный разными направленными отрезками. Пусть f — некоторое движение и $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$. Движение f отображает отрезок AB на равный ему отрезок A_1B_1, но уже, вообще говоря, другого направления. Говорят, что вектор $\bar{r}_1=\overline{A_1B_1}$ есть *образ вектора* $\bar{r}=\overline{AB}$ *при движении* f. Такое определение понятия *движения вектора* корректно, так как не зависит от выбора направленного отрезка $\overline{AB}$, задающего вектор $\bar{r}$: всякое движение переводит равные сонаправленные отрезки в равные сонаправленные отрезки. Можно говорить о *повороте вектора* (рис. 57), об *осевой симметрии* вектора (рис. 58) и т. д.

Введение понятия движения вектора дает возможность использовать векторный метод и метод преобразований в их взаимной связи, что существенно повышает эффективность каждого из этих методов. В частности, как будет показано ниже, при решении задач очень эффективно используется поворот вектора.

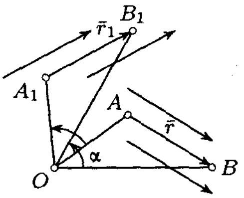


Рис. 57

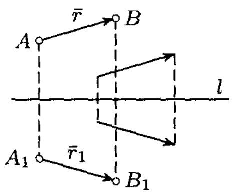


Рис. 58

Рассмотрим два свойства движений вектора.

Свойство 1. *При движении образ вектора, являющегося линейной комбинацией данных векторов, есть вектор, представляющий собой ту же линейную комбинацию образов данных векторов:*

$$f(x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}) = xf(\bar{a}) + yf(\bar{b}) + zf(\bar{c}).$$

Для доказательства достаточно убедиться в истинности двух равенств $f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$ и $f(x\bar{a}) = xf(\bar{a})$. А они очевидны. Действительно, первое из них утверждает, что результат не зависит от порядка выполнения операций сложения векторов и движения векторов. Второе равенство говорит о том, что результат не зависит от порядка выполнения умножения вектора на число и движения вектора.

Свойство 2. *Вектор, являющийся образом данного вектора при повороте, не зависит от центра поворота.*

Пусть дан вектор $\bar{r}$ и $R_A^\alpha(\bar{r}) = \bar{r}_1$, $R_B^\alpha(\bar{r}) = \bar{r}_2$. Так как $|\bar{r}_1| = |\bar{r}|$ и $|\bar{r}_2| = |\bar{r}|$, то $|\bar{r}_1| = |\bar{r}_2|$. Кроме того, $\angle(\bar{r}, \bar{r}_1) = \alpha$ и $\angle(\bar{r}, \bar{r}_2) = \alpha$, поэтому векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ сонаправлены. Значит, $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$.

10.2. Решение задач с помощью поворота вектора.

Задача 1. Даны правильные одинаково ориентированные треугольники OAB, OCD, OEF. Доказать, что середины M, N, P соответственно отрезков BC, DE, AF являются вершинами правильного треугольника.

Решение. Из четырехугольника $BEDC$ находим:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BE}) = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{OE} - \overline{OB})$$

(рис. 59). Выполним поворот этих векторов на $-60°$, помня, что он не зависит от центра поворота: $\overline{CD} \to \overline{OD}$, $\overline{OE} \to \overline{FE}$, $\overline{OB} \to \overline{OA}$. На основании свойства 1 образом вектора MN будет вектор $\frac{1}{2}(\overline{OD} + \overline{FE} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{FE}) = \overline{PN}$. Отсюда и следует, что треугольник MNP правильный.

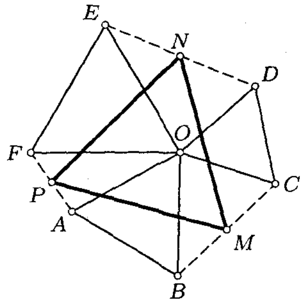


Рис. 59

Задача 2. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Доказать, что центры этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры треугольников BCA_1, CAB_1, ABC_1 соответственно (рис. 54). Пользуясь формулой для вектора центроида треугольника, находим: $\overline{O_1O_2} = \frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{BB_1} + \overline{CC}) = \frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{BB_1})$ и аналогично $\overline{O_3O_1} = \frac{1}{3}(\overline{AA_1} + \overline{C_1C})$. Представим $\overline{A_1A} = \overline{A_1B} + \overline{BA}$. При повороте векторов $\overline{A_1B}$ и $\overline{BA}$ на $120°$ получаем соответственно векторы $\overline{BC}$ и $\overline{C_1B}$. Значит, этим поворотом вектор $\overline{A_1A}$ отображается на вектор $\overline{BC} + \overline{C_1B} = \overline{BC} - \overline{BC_1} = \overline{C_1C}$. Аналогично доказывается, что $BB_1 \to AA_1$ и поэтому вектор $\overline{O_1O_2} = \frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{BB_1})$ отображается на вектор $\frac{1}{3}(\overline{C_1C} + \overline{AA_1}) = \overline{O_3O_1}$, чем и заканчивается решение.

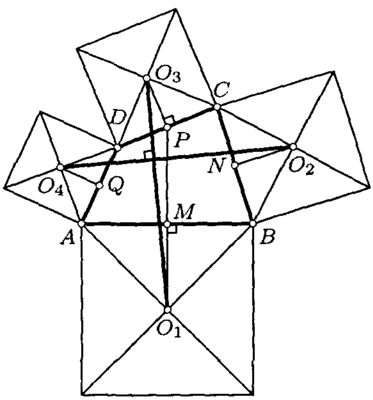


Рис. 60

Задача 3. На сторонах четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов, построенных на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно четырехугольника $ABCD$, ориентированного положительно, и M, N, P, Q — середины этих сторон (рис. 60). Тогда

$$\overline{O_1O_3} = \overline{O_1M} + \overline{MP} + \overline{PO_3} = \overline{O_1M} + \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) + \overline{PO_3}.$$

Выполним поворот векторов на $90°$: $\overline{O_1M} \to \overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{BA}$, $\frac{1}{2}\overline{AD} \to \overline{QO_4}$, $\frac{1}{2}\overline{BC} \to \overline{O_2N}$, $\overline{PO_3} \to \frac{1}{2}\overline{CD}$. Следовательно, вектор $\overline{O_1O_3}$ отображается на вектор

$$\frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{QO_4} + \overline{O_2N} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{CD}) + \overline{QO_4} + \overline{O_2N} = \\ = \overline{NQ} + \overline{QO_4} + \overline{O_2N} = \overline{NO_4} - \overline{NO_2} = \overline{O_2O_4}.$$

Значит, $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ и $|\overline{O_1O_3}| = |\overline{O_2O_4}|$.

Задачи

1.155. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что отрезок MQ вдвое больше медианы BE треугольника ABC и перпендикулярен ей.

1.156. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами квадрата.

1.157. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1 и BCA_1. Точки M, N, P — середины сторон AC, BC_1, BA_1 соответственно. Докажите, что треугольник MNP правильный.

1.158. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACB_1 и BCA_1. Определите углы треугольника OMA_1, где M — середина стороны AB, O — центр треугольника ACB_1.

1.159. Даны квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ одинаковой ориентации. Отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 разделены точками A, B, C, D в одном и том же отношении. Докажите, что $ABCD$ — квадрат (или точки A, B, C, D совпадают). Обобщите этот результат для правильных многоугольников.

1.160. Четырехугольник $ABCD$ повернут около некоторой точки O на $90°$ в положение $A_1B_1C_1D_1$. Точки P, Q, R, S — середины отрезков A_1B, B_1C, C_1D, D_1A соответственно. Докажите, что отрезки PR и QS равны и перпендикулярны.

1.161. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACMN$ и $BCPQ$. Докажите, что прямые AQ и BN пересекаются в точке, лежащей на высоте треугольника, проведенной к стороне AB.

1.162. Дан треугольник ABC и построены точки $D = R_A^{90°}(C)$ и $E = R_B^{-90°}(C)$. Докажите, что расстояние от середины M отрезка DE до прямой AB равно $\frac{1}{2}AB$.

1.163. Около окружности с центром O описан n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Докажите, что

$$\sin\angle A_1 \cdot \overline{OA}_1 + \sin\angle A_2 \cdot \overline{OA}_2 + \ldots + \sin\angle A_n \cdot \overline{OA}_n = \bar{0}.$$

1.164. Если AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC и $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, то $a^2\overline{AA}_1 + b^2\overline{BB}_1 + c^2\overline{CC}_1 = \bar{0}$. Докажите.

§11. *Применение движений к построению графиков функций*

11.1. Перенос графиков. Если дан график функции $y = f(x)$, то графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$ получаются переносами данного графика. Действительно, вспоминая формулы (9.1), рассмотрим три переноса

$$1) \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y + b, \end{cases}$$

каждый из которых отображает произвольную точку $M(x, y)$ графика $y = f(x)$ на некоторую точку $M'(x', y')$. Перепишем эти формулы так:

$$1) \begin{cases} x = x' + a, \\ y = y'; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = x', \\ y = y' - b; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' - b. \end{cases}$$

Этими подстановками получаем, что соответствующими переносами на векторы $(\overline{-a, 0})$, $(\overline{0, b})$, $(\overline{-a, b})$ линия $y = f(x)$ отображается соответственно на линии $y' = f(x' + a)$, $y' - b = f(x')$, $y' - b = f(x' + a)$. Штрихи в обозначениях переменных утратили свое назначение (система координат одна и та же), поэтому их опускаем: $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$.

Итак, график функции $y = f(x + a)$ получается переносом графика $y = f(x)$ на вектор $(\overline{-a, 0})$, т. е. параллельно оси Ox на расстояние $|a|$ в направлении, противоположном знаку числа a (рис. 61). График функции $y = f(x) + b$ получается переносом графика $y = f(x)$ на вектор $(\overline{0, b})$, т. е. параллельно оси Oy на расстояние $|b|$ в направлении, соответствующем знаку числа b (рис. 62). График функции $y = f(x + a) + b$ получается из графика $y = f(x)$ композицией предыдущих переносов, т. е. переносом на вектор $(\overline{-a, b})$ (рис. 63).

В качестве хорошего примера рассмотрим построение графика дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{x + c}, \tag{11.1}$$

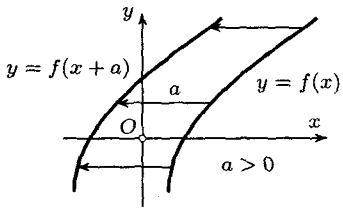


Рис. 61

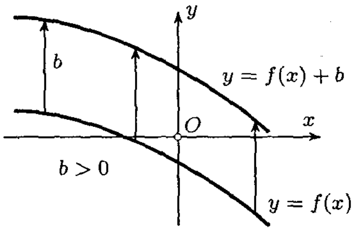


Рис. 62

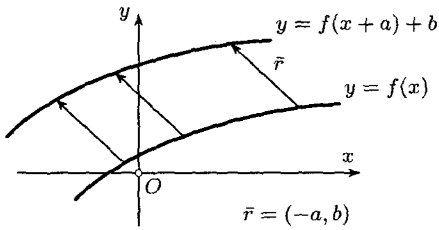


Рис. 63

представив это уравнение так: $y = \dfrac{b - ac}{x + c} + a$. Предполагается, что $b - ac = k \neq 0$. Само собой напрашивается, что за исходный график надо взять график функции $y = \dfrac{k}{x}$, являющийся равнобочной гиперболой. Пользуясь указанным выше способом, выполним перенос на вектор $\bar{r}(-c,\, a)$. Получим график функции $y = \dfrac{k}{x + c} + a$, т. е. график заданной дробно-линейной функции (11.1). На рис. 64 представлен график функции $y = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$, полученный переносом графика $y = -\dfrac{1}{x}$ на вектор $\bar{r}(-2,\, 3)$.

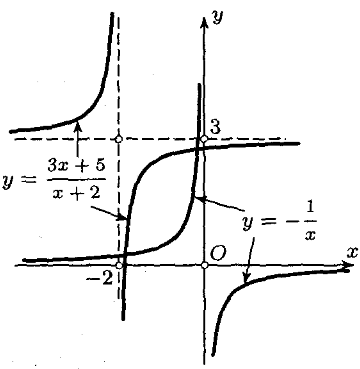


Рис. 64

Итак, *графиком дробно-линейной функции* $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ *служит равнобочная гипербола с центром* $(-c,\, a)$ *и асимптотами, параллельными осям координат.*

11.2. Применение осевой симметрии дает возможность по графику функции $y = f(x)$ построить графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$,

$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$ и график функции, обратной функции $y=f(x)$ (если такая существует).

Формулами $\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y \end{cases}$ и $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=y \end{cases}$ записывается симметрия относительно оси Ox и симметрия относительно оси Oy соответственно. Этими симметриями кривая $y=f(x)$ отображается соответственно на кривые $y=-f(x)$ и $y=f(-x)$. Итак, графики функций $y=f(x)$ и $y=-f(x)$ симметричны относительно оси Ox (рис. 65), а графики $y=f(x)$ и $y=f(-x)$ симметричны относительно оси Oy (рис. 66).

Поскольку композиция двух осевых симметрий с перпендикулярными осями есть центральная симметрия относительно точки пересечения осей, то графики функций $y=f(x)$ и $y=-f(-x)$ симметричны относительно начала координат (рис. 67).

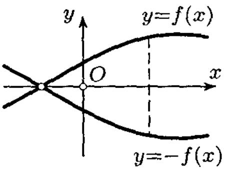


Рис. 65

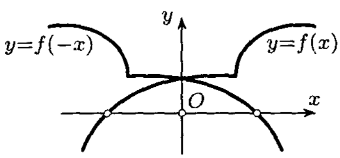


Рис. 66

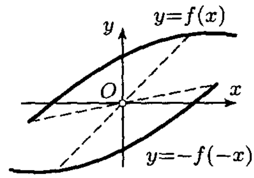


Рис. 67

По определению модуля числа функция $y=|f(x)|$ совпадает с функцией $y=f(x)$ на тех промежутках числовой оси, на которых $f(x)\geqslant 0$, и совпадает с функцией $y=-f(x)$, если $f(x)\leqslant 0$. Поэтому для построения графика $y=|f(x)|$ надо сохранить части графика $y=f(x)$, лежащие выше (не ниже) оси Ox, а те части этого графика, которые находятся ниже (не выше) оси Ox, заменить симметричными им фигурами относительно Ox. На рис. 68 построен график $y=|x^2-4x+3|$ на основании графика $y=x^2-4x+3$.

Аналогичным образом функция $y=f(|x|)$ совпадает с функцией $y=f(x)$ при $x\geqslant 0$ и с функцией $y=f(-x)$ при $x\leqslant 0$. Поэтому для построения графика $y=f(|x|)$ надо сохранить часть графика $y=f(x)$, лежащую правее оси Oy, и отобразить ее относительно оси Oy. Часть графика $y=f(x)$, находящаяся левее оси Oy, отбрасывается. На рис. 69 построен график функции $y=x^2-4|x|+3$.

График функции $y=|f(|x|)|$ получается из графика $y=f(x)$ последовательным применением (в любом порядке) рассмотренных двух преобразований. На рис. 70 построен график функции $y=|x^2-4|x|+3|$.

Если функция $y=f(x)$ на некотором числовом промежутке каждое свое значение принимает только при одном значении x, то она имеет

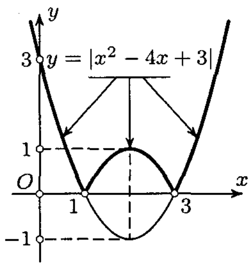


Рис. 68

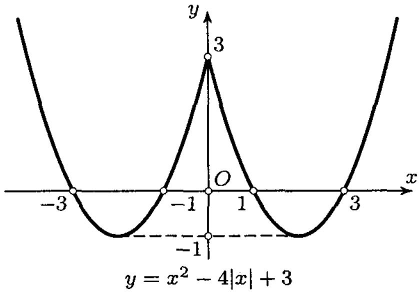


Рис. 69

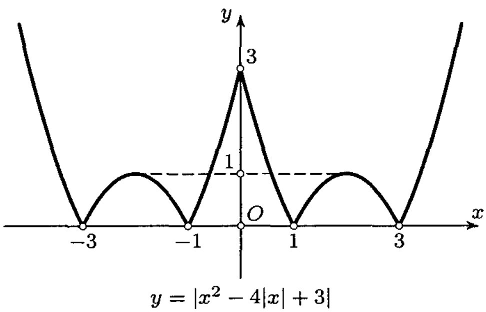


Рис. 70

обратную функцию на этом промежутке. При сохранении обозначений через x и y для значений аргумента и значений функции график обратной функции имеет уравнение $x = f(y)$, из которого выражается y через x: $y = g(x)$.

Формулы (9.5) для осевой симметрии относительно прямой $y = x$ принимают вид: $x' = y$, $y' = x$. Поэтому осевая симметрия относительно прямой $y = x$ переводит кривую $y = f(x)$ в кривую $x = f(y)$. Следовательно, графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Для примера рассмотрим функцию $y = \dfrac{3x+5}{x+2}$, график которой представлен на рис. 64. Каждое свое значение она принимает только один раз, поэтому имеет обратную функцию с областью определения $(-\infty,\ 3) \cup (3,\ +\infty)$ и областью значений $(-\infty,\ -2) \cup (-2,\ +\infty)$. График обратной функции имеет уравнение $x = \dfrac{3y+5}{y+2}$, откуда $y = \dfrac{5-2x}{x-3}$. Линии

$y = \dfrac{3x+5}{x+2}$ и $y = \dfrac{5-2x}{x-3}$ представляют собой графики взаимно обратных функций и потому симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 71).

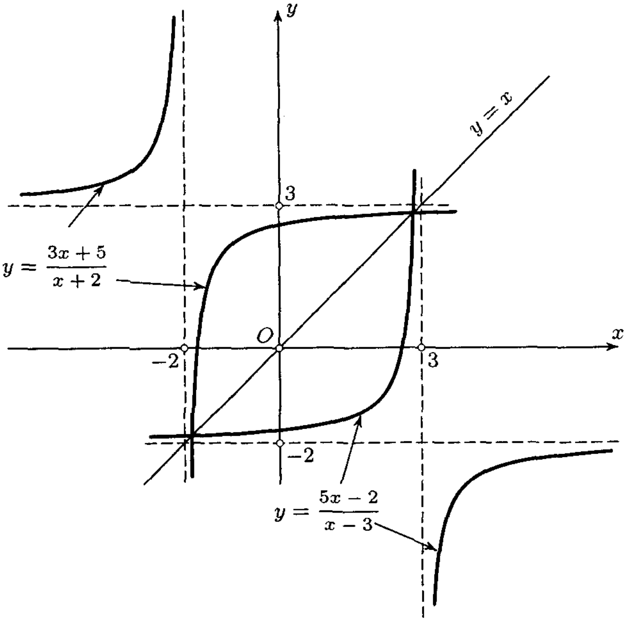


Рис. 71

Упражнения

1.165. Дан график функции $y = \log_3 x$. Постройте графики функций:

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = -\log_3(-x), \quad y = \log_3 |x| + 1,$$
$$y = \log_3(-x), \quad y = \log_3 |x|, \quad y = \log_3(1-x),$$
$$y = -\log_3 x, \quad y = \log_3(|x|+1), \quad y = 3^x.$$

1.166. Постройте график функции $y = \dfrac{4x+3}{2x-5}$ и график обратной ей функции.

1.167. Решите графически уравнения:

$$x^3 - x^2 + 2x = 1, \quad x^2 = \frac{1}{x+2}.$$

1.168. Докажите, что уравнение $3^{x-2} - 3x - 4 = 0$ не имеет корней в промежутке $[1; 2]$.

Глава II

Подобия и аффинные преобразования

§12. *Гомотетия*

12.1. Определение гомотетии и его следствия. Пусть фиксирована некоторая точка O плоскости и задано действительное число $k \neq 0$. Произвольной точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X', что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$. Если $X \neq O$, то по определению произведения вектора на число векторы $\overline{OX}$ и $\overline{OX'}$ сонаправлены при $k > 0$ и направлены противоположно при $k < 0$. Следовательно, при любом $k \neq 0$ точки O, X, X' коллинеарны и потому образ X' точки X плоскости принадлежит плоскости. Кроме того, из закона соответствия ясно, что каждая точка плоскости, включая и точку O, имеет единственный образ, образы любых двух различных точек различны и каждая точка плоскости имеет (единственный) прообраз. Это значит, что установленное формулой $k \cdot \overline{OX} = \overline{OX'}$ соответствие между точками плоскости является *преобразованием* этой плоскости.

Определение. *Гомотетией* с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ плоскости называется преобразование плоскости, которое каждую точку X отображает на такую точку X', что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.

Гомотетия с центром O и коэффициентом k обозначается H_O^k. Итак, по определению

$$H_O^k(X) = X' \Leftrightarrow \overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}.$$

В частности, $H_O^k(O) = O$, так как $k \cdot \overline{OO} = \overline{OO}$. Следовательно, *центр гомотетии является ее неподвижной точкой.*

При $k = 1$ имеем $\overline{OX'} = \overline{OX}$ и, значит $X' = X$ для любой точки X, т. е. гомотетия с коэффициентом 1 есть тождественное преобразование: $H_O^1 = E$. Если $k = -1$, то $\overline{OX'} = -\overline{OX}$ и точка O — середина отрезка XX'. Следовательно, гомотетия с коэффициентом -1 есть центральная симметрия: $H_O^{(-1)} = Z_O$.

Если $k \neq 1$, то *центр O гомотетии H_O^k является единственной ее неподвижной точкой.* В самом деле, если P — неподвижная точка, то $\overline{OP} = k \cdot \overline{OP}$, откуда $(1 - k) \cdot \overline{OP} = \bar{0}$. Поскольку $1 - k \neq 0$, то $\overline{OP} = \bar{0}$ и $P = O$.

Преобразование, обратное гомотетии H_O^k, задается формулой $\overline{OX} = \frac{1}{k}\overline{OX'}$ и потому также является гомотетией с тем же центром O и обратным коэффициентом $\frac{1}{k}$: $(H_O^k)^{-1} = H_O^{1/k}$.

12.2. Образ прямой при гомотетии. Докажем предварительно важную лемму.

Лемма. *Если A' и B' — образы точек A и B при гомотетии H_O^k, то $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.*

Доказательство. По условию $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$ и $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$, поэтому $\overline{OB'} - \overline{OA'} = k \cdot \overline{OB} - k \cdot \overline{OA} = k \cdot (\overline{OB} - \overline{OA})$, или $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

На основании леммы и по определению умножения вектора на число имеем $|A'B'| = |k||AB|$. Значит, гомотетия, у которой $|k| \neq 1$, не сохраняет расстояния между точками, т. е. не является движением. Только при $|k| = 1$ гомотетия будет тождественным преобразованием или центральной симметрией. Отсюда ясно, что теорема об образе прямой при гомотетии требует специального доказательства. Далее, говоря о гомотетии, считаем $k \neq \pm 1$.

Теорема. *Гомотетия отображает каждую прямую на прямую.*

Доказательство. Пусть задана гомотетия H_O^k и некоторая прямая a. Пусть $A \in a$, $B \in a$ $(A \neq B)$ и $H_O^k(A) = A'$, $H_O^k(B) = B'$ (рис. 72). Тогда по лемме $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$. Если X — произвольная точка прямой a, то по критерию коллинеарности векторов $\overline{AX} = t \cdot \overline{AB}$, где t — действительное число (параметр). Множество всех точек прямой a находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех значений параметра t, т. е. с множеством всех действительных чисел. Равенство $\overline{AX} = t \cdot \overline{AB}$ представляет собой *векторное уравнение прямой* a, заданной точками A и B. В частности, при $t = 0$ оно дает точку A, а при $t = 1$ — точку B.

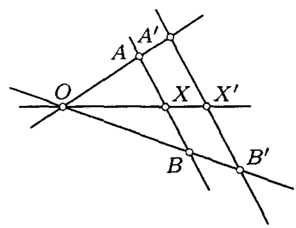


Рис. 72

Если $H_O^k(X) = X'$, то согласно лемме $\overline{A'X'} = k \cdot \overline{AX}$. Подставляя в уравнение $\overline{AX} = t \cdot \overline{AB}$ вместо $\overline{AX}$ и $\overline{AB}$ равные им векторы соответственно $\frac{1}{k}\overline{A'X'}$ и $\frac{1}{k}\overline{A'B'}$, получаем: $\frac{1}{k}\overline{A'X'} = t \cdot \frac{1}{k}\overline{A'B'}$, или $\overline{A'X'} = t \cdot \overline{AB}$. Последнее уравнение определяет собой *образ прямой* a при гомотетии H_O^k. Как уже отмечено, векторное уравнение такого вида определяет прямую a', проходящую через точки A' и B'. Так как соответственные при гомотетии точки X и X' отвечают одному и тому же значению параметра t (в соответствующих уравнениях), то прямая a отображается этой гомотетией на прямую a'.

Если центр O гомотетии не лежит на данной прямой a, то $a' \parallel a$, так как $A'B' \parallel AB$. Если же $O \in a$, то $a' = a$, поскольку точки O, X, X' коллинеарны для любой точки $X \in a$. Итак, имеем два следствия.

Следствие 1. *Прямая, не содержащая центр гомотетии, отображается этой гомотетией на параллельную ей прямую.*

Следствие 2. *Каждая прямая, содержащая центр гомотетии, отображается этой гомотетией на себя.*

12.3. Образы луча, полуплоскости и угла при гомотетии. Так как соответственные при гомотетии точки X и X' соответствуют одному и тому же значению параметра t в соответствующих уравнениях $\overline{AX} = t \cdot \overline{AB}$ и $\overline{A'X'} = t \cdot \overline{A'B'}$ данной прямой a и ее образа a', то гомотетия сохраняет порядок точек прямой: на прямых a и a' он соответствует порядку, установленному во множестве действительных чисел t. Отсюда вытекают последовательно следующие выводы.

1) Гомотетия отображает луч на луч. Эти лучи сонаправлены, если коэффициент гомотетии положителен, и противоположно направлены, если он отрицателен.

2) Гомотетия отображает полуплоскость на полуплоскость.

3) Гомотетия отображает угол на равный ему угол.

12.4. Задание гомотетии. Построение образа точки. Согласно определению *гомотетию можно задать ее центром и коэффициентом.* Однако этот способ иногда неудобен для построений. Вместо коэффициента можно задать образ A' одной точки A: $H_O^k(A) = A'$. Тогда коэффициент k равен $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, хотя для построения образа произвольной точки он и не нужен. Итак, пусть *гомотетия задана центром O и парой соответственных точек $A \to A'$.* Требуется построить образ X' произвольной точки X. Предположим сначала, что $X \notin (OA)$ (рис. 72). Так как $X' \in (OX)$ и $(A'X') \parallel (AX)$ (следствие 1), то искомая точка X' есть точка пересечения прямой OX и прямой, проходящей через точку A' параллельно AX. Если $Y \in (OA)$, то для построения ее образа Y' используем пару $X \to X'$ (рис. 73): $(X'Y') \parallel (XY)$, $Y' \in (OA)$.

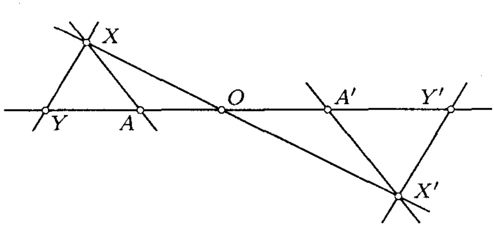


Рис. 73

Гомотетию можно задать и третьим способом — без указания центра и коэффициента — при помощи *задания двух пар соответственных точек* $A \to A'$, $B \to B'$, удовлетворяющих условиям: $A'B' \parallel AB$, $\overline{A'B'} \neq \overline{AB}$ (рис. 74). Тогда $k = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, а центр O гомотетии строится так. Если точки A, A', B, B' неколлинеарны, то $O = (AA') \cap (BB')$. Если же эти точки коллинеарны (рис. 75), то построим сначала образ M' произвольной точки $M \notin (AB)$ как точку пересечения прямых, проходящих через A' и B' параллельно соответственно прямым MA и MB. Тогда $O = (AA') \cap (MM')$.

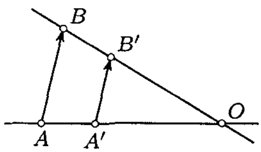


Рис. 74

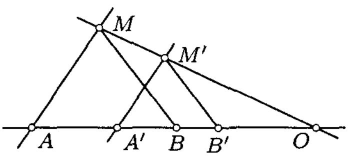


Рис. 75

§ 13. *Гомотетичность окружностей*

13.1. Гомотетичные фигуры. Фигура Φ_1 называется *гомотетичной* фигуре Φ, если существует гомотетия, отображающая Φ на Φ_1.

Например, гомотетичны любые два параллельных неравных отрезка AB и A_1B_1, так как существуют ровно две гомотетии, каждая из которых отображает AB на A_1B_1. Одна из них задается парами точек $A \to A_1$ и $B \to B_1$, а другая — парами $A \to B_1$ и $B \to A_1$. Коэффициенты этих гомотетий — противоположные числа k и $-k$ (рис. 76). Говорят, что отрезки AB и A_1B_1 *гомотетичны дважды*. Если $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то отрезки AB и A_1B_1 также гомотетичны, но уже только при одной гомотетии: $A \to B_1$, $B \to A_1$.

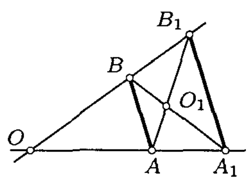


Рис. 76

Всякие два неравных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами гомотетичны. Действительно, задавая гомотетию парами $A \to A_1$, $B \to B_1$, на основании свойства параллельности соответственных при гомотетии прямых получаем, что эта гомотетия отображает C на C_1 (рис. 77).

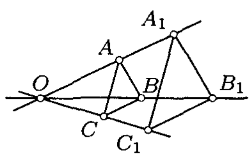


Рис. 77

Отношение гомотетичности фигур рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. В самом деле, $H_O^1(\Phi) = E(\Phi) = \Phi$ (рефлексивность).

14 – 5545

Если $H_O^k(\Phi)=\Phi_1$, то $H_O^{1/k}(\Phi_1)=\Phi$ (симметричность). В том, что транзитивность гомотетичности фигур имеет место не во всех случаях, можно убедиться на простом примере.

Пусть дан треугольник ABC и $H_O^k(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 78). Если $H_{O_1}^{1/k}(\triangle A_1B_1C_1)=\triangle A'B'C'$, то треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Один из них отображается на другой *переносом*. Следовательно, они негомотетичны. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен при нахождении композиции двух гомотетий (§ 15).

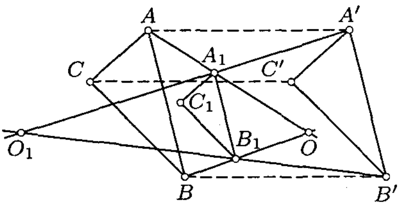


Рис. 78

13.2. Гомотетичность двух окружностей. Всякая гомотетия отображает окружность на окружность, так как при гомотетии все расстояния умножаются на одно и то же число — модуль коэффициента гомотетии. Теперь нас интересует обратный вопрос: если наперед заданы две окружности ω и ω_1, то существует ли гомотетия, отображающая одну из них на другую?

Теорема. *Две неравные окружности гомотетичны дважды.*

Доказательство. Если окружности ω и ω_1 имеют общий центр O и радиусы r и r_1, то гомотетии с общим центром O и коэффициентами $k_1=\frac{r_1}{r}$ и $k_2=-\frac{r_1}{r}$ таковы, что каждая из них отображает ω на ω_1. Рассмотрим случай, когда $O_1\neq O$ и $r_1\neq r$. Пусть AB и A_1B_1 — параллельные диаметры этих окружностей (рис. 79). Зададим гомотетию H

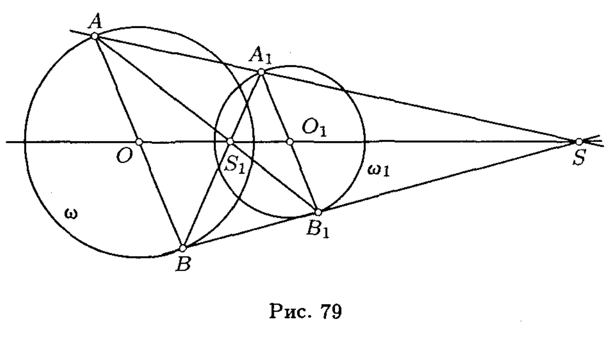


Рис. 79

двумя парами точек $O\to O_1$, $A\to A_1$. Поскольку всякая гомотетия отображает окружность на окружность, а эта гомотетия H центр O и точку A окружности ω отображает на центр O_1 и точку A_1 окружности ω_1, то $H(\omega)=\omega_1$ (центром и одной точкой окружность определяется однозначно). Центром гомотетии H служит точка $S=(OO_1)\cap(AA_1)$, а коэффициент k равен $\dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}}$, причем $H_S^k(B) = B_1$. Если $\overline{O_1A_1} \upuparrows \overline{OA}$, то $k = \dfrac{r_1}{r}$; если же $\overline{O_1A_1} \downarrow\uparrow \overline{OA}$, то $k = -\dfrac{r_1}{r}$.

Аналогичным образом гомотетия, задаваемая парами $O \to O_1$ и $A \to B_1$, также отображает ω на ω_1. Центром этой гомотетии является точка $S_1 = (OO_1) \cap (AB_1)$, а ее коэффициент равен $\dfrac{-\overline{O_1B_1}}{\overline{OB}} = \dfrac{-\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}} = -k$. Заметим, что $H_{S_1}^{-k}(B) = A_1$.

Итак, $H_S^k(\omega) = \omega_1$ и $H_{S_1}^{-k}(\omega) = \omega_1$, где $k = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}}$, $S = (OO_1) \cap (AA_1)$, $S_1 = (OO_1) \cap (AB_1)$. Существенно, что гомотетии H_S^k и $H_{S_1}^{-k}$ не зависят от выбора пары параллельных диаметров AB и A_1B_1 окружностей, так как каждая из них любой диаметр окружности ω отображает на параллельный ему диаметр окружности ω_1. Отсюда следует, что никакой третьей гомотетии, отображающей ω на ω_1, не существует.

Если окружности ω и ω_1 касаются в точке S, то один из центров гомотетий совпадает с точкой S. В самом деле, гомотетия, заданная парами $O \to O_1$, $S \to S_1$, отображает ω на ω_1 и имеет неподвижную точку S, которая и будет центром гомотетии.

Если две данные окружности равны, то одна из двух указанных гомотетий заменяется *переносом*.

§ 14. *Решение задач с помощью гомотетии*

Задача 1. Доказать, что ортогональные проекции точки, принадлежащей описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны (*теорема Симсона*).

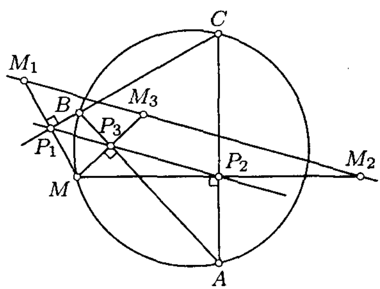


Рис. 80

Решение. Пусть P_1, P_2, P_3 — ортогональные проекции произвольной точки M окружности, описанной около треугольника ABC, на прямые BC, CA, AB соответственно (рис. 80). Построим точки M_1, M_2, M_3, симметричные точке M относительно этих прямых. По доказанному в § 8 (задача 2, рис. 52) точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой. Гомотетия $H_M^{1/2}$ отображает их соответственно на точки P_1, P_2, P_3, которые поэтому принадлежат прямой, являющейся образом прямой M_1M_2 при этой гомотетии.

З а д а ч а 2. Доказать, что в неравностороннем треугольнике ABC центроид G, ортоцентр H и центр O описанной окружности лежат на одной прямой, причем $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.

Р е ш е н и е. По свойству медиан треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с вершинами в серединах его сторон относительно точки G пересечения медиан: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ при гомотетии с центром G и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ (рис. 81). Соответственные стороны этих треугольников параллельны. Прямые OA_1, OB_1, OC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Так как гомотетия сохраняет величину угла, то высоты AH, BH, CH треугольника ABC указанной гомотетией отображаются на высоты OA_1, OB_1, OC_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, точка H пересечения высот треугольника ABC переходит в точку O пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому точки H и O лежат на одной прямой с центром G гомотетии и $\overline{GO} = -\frac{1}{2}\overline{GH}$, откуда $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.

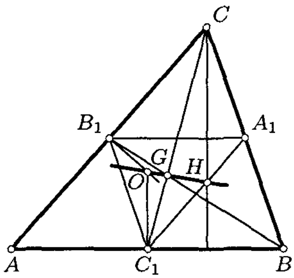


Рис. 81

Прямая, содержащая центроид G, ортоцентр H и центр O описанной около треугольника окружности, называется *прямой Эйлера треугольника.*

З а д а ч а 3. Доказать, что во всяком треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности с центром в середине отрезка OH и радиусом, равным половине радиуса описанной около треугольника окружности.

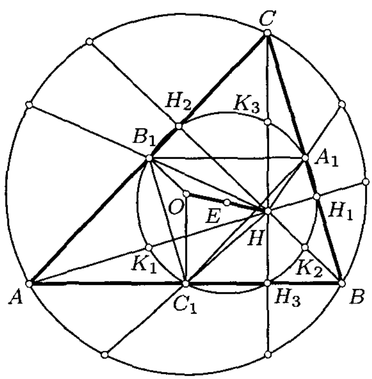


Рис. 82

Р е ш е н и е. Рассмотрим окружность ω, определяемую основаниями H_1, H_2, H_3 высот треугольника ABC (рис. 82). Так как точки, симметричные ортоцентру H этого треугольника относительно его сторон, лежат на описанной окружности (задача 1.32), то окружность ω есть образ описанной окружности при гомотетии с центром H и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Поэтому ее центром является середина отрезка OH, а радиус равен $\frac{R}{2}$. Образы K_1, K_2, K_3 вершин треугольника ABC лежат на окружности ω. Эти точки — середины отрезков, соединяющих ортоцентр H с вершинами A, B, C. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной около него окружности (задача 1.11). Поэтому середины A_1, B_1, C_1 сторон лежат на рассматриваемой окружности ω.

Эта окружность называется *окружностью девяти точек треугольника.* Доказано, что окружность девяти точек треугольника касается его вписанной окружности и трех вневписанных окружностей (*теорема Фейербаха*).

Задача 4. Даны три неколлинеарные точки A, B, C, не лежащие на данной прямой l. Найти на прямой l такие точки M и N, чтобы $(AM) \parallel (BN)$ и $(CM) \perp (CN)$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $(AB) \nparallel l$. Пусть искомые точки M и N построены. Если $(AB) \cap l = O$, то гомотетия с центром O, отображающая A на B, отображает M на N (рис. 83). Если $C_1 = H_O^{A \to B}(C)$, то $(CM) \parallel (C_1N)$ и поэтому $(CN) \perp (C_1N)$. Отсюда следует, что точка N принадлежит окружности γ с диаметром CC_1 и, значит, $N \in (\gamma \cap l)$. Этим найден способ построения искомой точки N. Точка M строится согласно условию $(AM) \parallel (BN)$. Число решений зависит от числа общих точек окружности γ и прямой l. На рис. 83 имеются две пары искомых точек M и N, M_1 и N_1. (Гомотетия, отображающая B на A, приводит к тем же решениям.) При $AB \parallel l$ вместо гомотетии рассматривается параллельный перенос $T_{\overline{AB}}$.

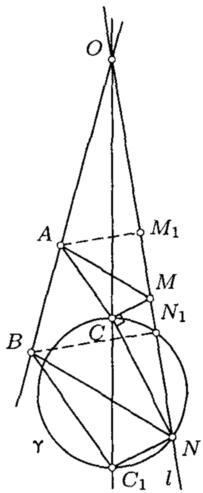


Рис. 83

Традиционно гомотетия используется при решении большого класса конструктивных задач следующим образом. Условия задачи разделяются на две части, одна из которых характеризует форму, а другая — размеры искомой фигуры. Используя первую часть данных, сначала вместо искомой фигуры строят гомотетичную ей, а затем по остальным данным строят искомую фигуру. Примером может служить следующая задача.

Задача 5. Построить треугольник по двум углам и периметру.

Решение. Два данных угла определяют форму искомого треугольника, а периметр — его размеры. Строим некоторый треугольник AB_1C_1 по двум данным углам $\angle A$ и $\angle B$ (рис. 84). Используя заданный периметр, определим гомотетию с центром A, которая отображала бы треугольник AB_1C_1 на искомый треугольник ABC. Для этого на произвольной прямой, содержащей A, отложим отрезок AP длиной p (заданный периметр) и отрезок AP_1 для которого $AP_1 = AB_1 + B_1C + C_1A$.

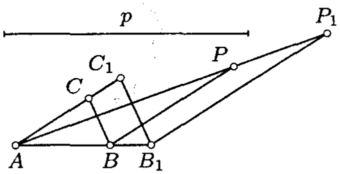


Рис. 84

Точки P и P_1 являются соответственными в требуемой гомотетии с центром A. Используя их, строим вершины B и C искомого треугольника ABC: $B = H_A^{P_1 \to P}(B_1)$, $C = H_A^{P_1 \to P}(C_1)$. Решение единственно.

Иногда к цели приводит гомотетия, центр которой не принадлежит множеству данных точек, а находится построением. Вот пример такой задачи.

Задача 6. Построить окружность, касающуюся данной окружности и двух непараллельных прямых a и b.

Решение. Пусть α — данная окружность с центром O и $a \cap b = A$ (рис. 85). Искомая окружность гомотетична окружности α относительно их точки касания. Этой гомотетией прямые a и b отображаются на параллельные прямые a_1 и b_1, касающиеся α и потому легко строящиеся. Если $a_1 \cap b_1 = A_1$ то прямая AA_1 проходит через центр гомотетии. Значит, точкой касания искомой и данной окружностей является любая из точек S и T пересечения прямой AA_1 с окружностью α (если такие точки существуют). Центр C искомой окружности принадлежит оси симметрии прямых a и b и прямой SO (или TO).

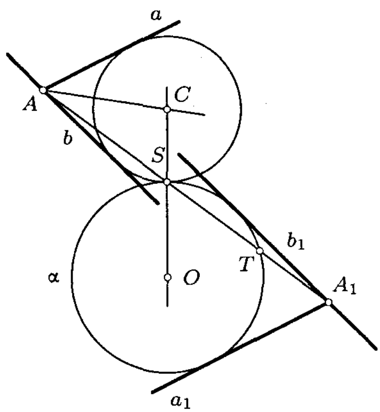


Рис. 85

Так как существуют четыре касательные к α, параллельные данным прямым a и b, и потому четыре прямые, выступающие в роли прямой AA_1, то они дают, вообще говоря, восемь точек касания данной окружности α с искомыми. Следовательно, максимальное число решений равно 8. В зависимости от расположения данных прямых и окружности оно может уменьшиться до 4. На рис. 85 показано одно из четырех решений, имеющих место в этом случае.

Рассмотренный способ решения не дает полного числа решений и даже может быть вовсе непригоден, когда центр O данной окружности α лежит на оси симметрии прямых a и b.

Задачи на доказательство и вычисление

2.01. Докажите, что образы данной точки при симметриях относительно середин сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2.02. Через точку касания двух окружностей проведены две произвольные прямые, пересекающие эти окружности вторично в точках A, B и C, D, причем точки A и B лежат на одной окружности, точки C и D — на другой. Докажите, что $(AB) \parallel (CD)$.

2.03. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Докажите, что касательные к окружностям в точках пересечения их с секущей параллельны.

2.04. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — образы точек A, B, C соответственно при симметрии с центром в произвольной точке P. Докажите, что прямые, проходящие через точки A_1, B_1, C_1 и середины сторон BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.

2.05. Найдите множество центроидов всех треугольников ABC, у которых вершины A и B постоянны, а точка C пробегает данную прямую.

2.06. Все хорды окружности, имеющие общий конец, разделены в равных отношениях. Найдите множество точек деления.

2.07. Докажите, что во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, лежат на одной прямой.

2.08. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, делится точкой пересечения диагоналей пополам.

2.09. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD, касаются.

2.10. Две окружности касаются внешним образом в точке A, а общая касательная к ним касается окружностей в точках B и C. Докажите, что угол BAC прямой.

2.11. Две окружности касаются внешним (соответственно внутренним) образом. Через центр гомотетии с положительным (соответственно отрицательным) коэффициентом, отображающей одну окружность на другую, проведена прямая, пересекающая окружности в гомотетичных точках A и B. Докажите, что из точки касания окружностей отрезок AB виден под прямым углом.

2.12. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда MN большей окружности касается меньшей окружности в точке P.

Докажите, что луч AP есть биссектриса угла MAN. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для случая внешнего касания окружностей.

2.13. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q, расположенных последовательно. Докажите, что углы MAP и NAQ равны.

2.14. Две окружности касаются внешним образом. Прямая пересекает их в точках M, N, P, Q последовательно. Докажите, что из точки касания отрезки MQ и NP видны под углами, сумма которых равна $180°$.

2.15. Докажите, что произведение длин отрезков секущей двух окружностей от центра гомотетии окружностей до двух негомотетичных точек окружностей не зависит от выбора секущей.

2.16. Произвольная точка P соединена с серединами A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что прямые, проведенные через его вершины A, B, C параллельно соответственно прямым PA_1, PB_1, PC_1, пересекаются в одной точке Q и $\overline{QG} = 2\overline{GP}$, где G — центроид треугольника ABC.

Задачи на построение

2.17. Проведите через данные точки M и N параллельные прямые m и n соответственно так, чтобы одна из них отображалась на другую заданной гомотетией.

2.18. Через данную вне заданной окружности точку A проведите прямую, пересекающую эту окружность в точках B и C (B лежит между A и C) так, что $AB = 2BC$.

2.19. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней отрезки, отношение которых равно отношению двух данных отрезков.

2.20. Через данную точку проведите прямую так, чтобы ее отрезок с концами на двух данных прямых делился данной точкой в данном отношении.

2.21. В данный угол впишите окружность, проходящую через данную точку.

2.22. На данной прямой l найдите точку, равноудаленную от данной прямой a и данной точки M.

2.23. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные окружности под равными углами.

2.24. Постройте квадрат, одна сторона которого касалась бы данной окружности, а противоположная сторона служила хордой этой окружности. Найдите отношение стороны квадрата к радиусу окружности.

2.25. В данный круговой сектор впишите окружность, касающуюся боковых радиусов сектора и его дуги.

2.26. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Постройте треугольник $A_2B_2C_2$ такой, что $(A_2B_2) \parallel (A_1B_1)$, $(B_2C_2) \parallel (B_1C_1)$, $(C_2A_2) \parallel (C_1A_1)$ и $A_2 \in BC$, $B_2 \in (AC)$, $C_2 \in (AB)$.

2.27. Постройте параллелограмм по стороне, отношению диагоналей и углу между диагоналями.

2.28. Постройте трапецию по двум углам при одном основании, отношению оснований и высоте.

2.29. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной ее точке.

2.30. Постройте окружность, касающуюся данной окружности в данной ее точке и данной прямой.

Задачи для внеклассной работы

2.31. Даны прямая a и точка A вне ее, а также прямая b и точка B вне ее ($a \neq b$ и $A \neq B$). Найдите условия, при которых гомотетией можно отобразить пару $(a,\ A)$ на пару $(b,\ B)$.

2.32. Точка B лежит на прямой l между точками A и C. На прямой l_1, непараллельной l, взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что B_1 лежит между A_1 и C_1 и $A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC$. Через точки A, B, C проведены параллельные прямые a, b, c соответственно, а через точки A_1, B_1, C_1 — параллельные прямые a_1, b_1, c_1, непараллельные предыдущим прямым. Докажите, что точки $M = a \cap a_1$, $N = b \cap b_1$, $P = c \cap c_1$ коллинеарны.

2.33. В четырехугольнике $ABCD$ построены центроиды A_1, B_1, C_1, D_1 треугольников BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен данному, и найдите коэффициент и центр гомотетии.

2.34. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке M относительно вершин A, B, C треугольника ABC соответственно. Охарактеризуйте преобразование $M \to M_1$, где M_1 — центроид треугольника $A_1B_1C_1$.

2.35. Даны три точки A, B, C. Для каждой точки M построен центроид G четырехугольника $ABCM$ (этот четырехугольник может быть вырожденным). Охарактеризуйте преобразование $M \to G$. (Центроид четырехугольника есть точка пересечения его средних линий.)

2.36. Стороны одного четырехугольника параллельны сторонам другого, а диагонали первого параллельны диагоналям второго. Гомотетичны ли эти четырехугольники?

2.37. Даны два гомотетичных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 разделены точками A_2, B_2, C_2 в одном отношении k.

Вычислите площадь S_2 треугольника $A_2B_2C_2$, если площади данных треугольников равны S и S_1 соответственно.

2.38. Через данную точку S проведите прямую, пересекающую три данные прямые a, b, c, проходящие через точку M, в таких точках A, B, C, что отношение $AB : BC$ равно отношению длин m и n данных отрезков.

2.39. Прямые a, b, c содержат стороны некоторого треугольника. Параллельно данной прямой проведите прямую так, чтобы она пересекала прямые a, b, c соответственно в точках A, B, C, для которых отношение $AB : BC$ было равно отношению длин m и n данных отрезков.

2.40. На сторонах AB и AC треугольника ABC найдите точки M и N такие, что $BM = MN = NC$.

2.41. Дан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке M. Докажите, что центроиды треугольников MAB, MBC, MCD, MDA принадлежат одной окружности.

2.42. Найдите множество точек пересечения высот треугольников, вписанных в данную окружность.

2.43. Найдите множество центроидов треугольников $A_1B_1C_1$, вписанных в данный треугольник ABC.

2.44. Дан треугольник ABC. Найдите множество середин S отрезков MN, если точки M и N принадлежат соответственно сторонам CA и CB.

2.45. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AB в точке M. Через диаметрально противоположную точку M_1 проведена прямая CM_1, пересекающая сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BM$.

§ 15. *Композиция гомотетий*

15.1. Композиция двух гомотетий. Пусть заданы две гомотетии H_A^α и H_A^β с общим центром A и коэффициентами α и β. Для произвольной точки X имеем: $\overline{AX_1} = \alpha\overline{AX}$ и $\overline{AX'} = \beta\overline{AX_1}$. Следовательно, $\overline{AX'} = (\alpha\beta)\overline{AX}$. Это значит, что композицией двух гомотетий с общим центром является гомотетия с тем же центром, коэффициент которой равен произведению коэффициентов данных гомотетий. При $\alpha\beta = 1$ имеем тождественное преобразование. Эта композиция коммутативна.

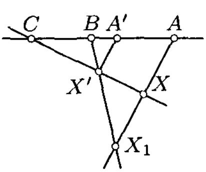


Рис. 86

Найдем теперь композицию двух гомотетий H_A^α и H_B^β с различными центрами A и B. Пусть для произвольной точки X $H_A^\alpha(X) = X_1$ и $H_B^\beta(X_1) = X'$ (рис. 86), т. е. $\overline{AX_1} = \alpha\overline{AX}$ и $\overline{BX'} = \beta\overline{BX_1}$.

Если $H_B^\beta(A) = A'$, то $\overline{BA'} = \beta\overline{BA}$. Отрезок $A'X'$ есть образ отрезка AX при рассматриваемой композиции, причем $A'X' \parallel AX$. Если эти отрезки не равны, то существует точка $C = (AA') \cap (XX')$. Из подобных треугольников AXC и $A'X'C$ имеем: $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CX'}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{A'X'}}{\overline{AX}}$. Кроме того, $\overline{A'X'} = \beta\overline{AX}_1 = (\beta\alpha)\overline{AX}$. Поэтому $\frac{\overline{A'X'}}{\overline{AX}} = \alpha\beta$ и $\overline{CX'} = (\alpha\beta)\overline{CX}$. Так как $\overline{CA'} = (\alpha\beta)\overline{CA}$, то точка C не зависит от переменной точки X. Это значит, что искомая композиция является гомотетией с центром C:

$$H_B^\beta \circ H_A^\alpha = H_C^{\alpha\beta}, \qquad C \in (AB).$$

Если $\overline{A'X'} = \overline{AX}$, то точка C не существует, тогда $\alpha\beta = 1$ и $\overline{XX'} = \overline{AA'}$. В этом случае композиция гомотетий есть перенос.

Композиция $H_B^\beta \circ H_A^\alpha$ некоммутативна, так как она переводит A в A', но образ точки A при композиции $H_A^\alpha \circ H_B^\beta$ не совпадает с A'.

Результатом этих исследований является такая теорема.

Теорема. *Композицией двух гомотетий с центрами A и B и коэффициентами α и β является гомотетия при $\alpha\beta \neq 1$. Если центры данных гомотетий различны, то центр полученной гомотетии принадлежит прямой AB. Если $\alpha\beta = 1$, то композиция гомотетий есть перенос при $A \neq B$ и тождественное преобразование при $A = B$. Композиция гомотетий с общим центром коммутативна. Композиция гомотетий с различными центрами некоммутативна.*

Из теоремы непосредственно следует, что отношение гомотетичности фигур транзитивно при $\alpha\beta \neq 1$ и нетранзитивно при $\alpha\beta = 1$.

15.2. Теорема Паппа. *Если точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 плоскости расположены так, что точки A, B, C коллинеарны, точки A_1, B_1, C_1 также коллинеарны и $(AB_1) \parallel (A_1B)$, $(BC_1) \parallel (B_1C)$, то $(AC_1) \parallel (A_1C)$.*

Доказательство. Пусть $(AB) = m$, $(A_1B_1) = m_1$. По условию $C \in m$ и $C_1 \in m_1$. Пусть $m \nparallel m_1$ и $m \cap m_1 = O$ (рис. 87).

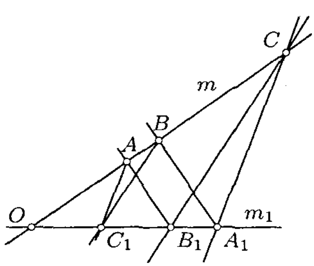


Рис. 87

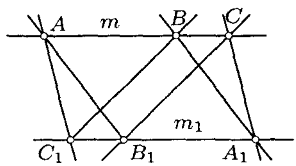


Рис. 88

Зададим две гомотетии: $H_O^\alpha(A) = B$ и $H_O^\beta(C_1) = B_1$. Тогда, как нетрудно видеть, $(H_O^\beta \circ H_O^\alpha)(A) = C$ и $(H_O^\alpha \circ H_O^\beta)(C_1) = A_1$. Поскольку композиция гомотетий с общим центром коммутативна, то пары $A \to C$ и $C_1 \to A_1$ являются парами соответственных точек при одной и той же гомотетии $H_O^{\alpha\beta}$, и потому $(AC_1) \parallel (CA_1)$.

Если $m \parallel m_1$ $(m \neq m_1)$, то из $(AB) \parallel (B_1A_1)$ и $(AB_1) \parallel (BA_1)$ следует $\overline{AB} = \overline{B_1A_1}$ (рис. 88). По аналогичной причине $\overline{BC} = \overline{C_1B_1}$. Тогда из $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ и $\overline{C_1B_1} + \overline{B_1A_1} = \overline{C_1A_1}$ следует $\overline{AC} = \overline{C_1A_1}$, откуда получаем $(AC_1) \parallel (CA_1)$.

15.3. Взаимное расположение центров гомотетий трех окружностей. Любые две неравные окружности гомотетичны дважды (п. 13.2). Если даны три попарно неравные окружности, центры которых неколлинеарны, то, рассматривая их попарно, будем иметь всего шесть центров гомотетий этих окружностей. Они образуют замечательную конфигурацию.

Теорема. *Если центры трех попарно неравных окружностей неколлинеарны, то шесть центров гомотетий этих окружностей, взятых попарно, лежат по три на четырех прямых.*

Доказательство. Пусть даны окружности ω_1, ω_2, ω_3 соответственно с центрами O_1, O_2, O_3 и $O_3 \notin (O_1O_2)$. Центры гомотетий окружностей ω_i и ω_j обозначим через S_{ij} и S'_{ij}, причем штрихами пометим центры гомотетий с отрицательными коэффициентами $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ (рис. 89). Так как $H_{S_{ij}} \circ H_{S_{iu}} = H_{S_{ju}}$ и $H_{S'_{ij}} \circ H_{S'_{iu}} = H_{S'_{ju}}$ $(i, j, u = 1, 2, 3$ и

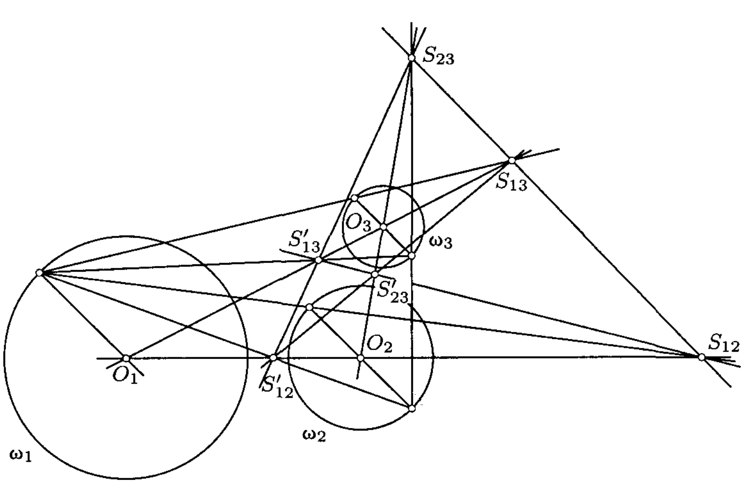


Рис. 89

все различны), то по теореме о композиции двух гомотетий $S_{ju} \in (S_{ij}S_{iu})$ и $S'_{ju} \in (S'_{ij}S'_{iu})$. Следовательно, шесть точек S_{12}, S'_{12}, S_{23}, S'_{23}, S_{13}, S'_{13} группируются в четыре тройки коллинеарных точек: S_{12}, S_{23}, S_{12}; S_{12}, S'_{23}, S'_{13}; S'_{12}, S_{23}, S'_{13}; S'_{12}, S'_{23}, S_{13}, причем через каждую точку проходят две из полученных четырех прямых.

15.4. Теорема Менелая. *Пусть на прямых BC, CA, AB, определяющих треугольник ABC, даны точки A_1, B_1, C_1. Для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны (рис. 90). Обозначим $\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = k_1$, $\dfrac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}} = k_2$, $\dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}} = k_3$. Тогда $H^{k_1}_{A_1}(B) = C$, $H^{k_2}_{B_1}(C) = A$ и поэтому $(H^{k_2}_{B_1} \circ H^{k_1}_{A_1})(B) = A$. Существенно, что $k_1k_2 \neq 1$, так как из $k_1k_2 = 1$ следовало бы $\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$, или $\dfrac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}$, т. е. точки A_1 и B_1 делили бы соответственно отрезки CB и CA в одном отношении, что возможно лишь при условии $(A_1B_1) \parallel (AB)$, противоречащем условию теоремы. Композицией гомотетий $H^{k_1}_{A_1}$ и $H^{k_2}_{B_1}$ является гомотетия с коэффициентом k_1k_2 и центром $(AB) \cap (A_1B_1) = C_1$, причем $H^{k_1k_2}_{C_1}(B) = A$. С другой стороны, $H^{k_3}_{C_1}(B) = A$ в силу принятых обозначений. Так как центром C_1 и парой точек $B \to A$ гомотетия определена, то $H^{k_1k_2}_{C_1} = H^{k_3}_{C_1}$, откуда $k_1k_2 = k_3$ или, с учетом обозначений, $\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} \cdot \dfrac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}} = \dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}}$. А это равенство равносильно доказываемому равенству (1).

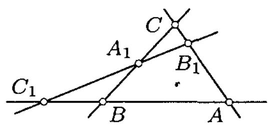


Рис. 90

Обратно, пусть выполняется соотношение (1) и требуется доказать коллинеарность точек A_1, B_1, C_1.

Используя прежние обозначения, имеем: $H^{k_1}_{A_1}(B) = C$, $H^{k_2}_{B_1}(C) = A$ и поэтому $(H^{k_2}_{B_1} \circ H^{k_1}_{A_1})(B) = A$. Существенно, что $k_1k_2 \neq 1$, так как из $k_1k_2 = 1$ и равенства (1), которое эквивалентно $k_1k_2 = k_3$, следовало бы $k_3 = 1$, т. е. $\overline{C_1A} = \overline{C_1B}$, откуда $A = B$, что противоречит условию теоремы. Итак, $H^{k_2}_{B_1} \circ H^{k_1}_{A_1}$ есть гомотетия с коэффициентом $k_1k_2 = k_3$. С другой стороны, $H^{k_3}_{C_1}(B) = A$. Поскольку гомотетия определяется коэффициентом $k_1k_2 = k_3$ и парой точек $B \to A$, то $H^{k_2}_{B_1} \circ H^{k_1}_{A_1} = H^{k_3}_{C_1}$, откуда следует коллинеарность центров A_1, B_1, C_1 этих гомотетий.

§16. *Решение задач с помощью композиций гомотетий*

Задача 1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Произвольная точка P прямой BC, отличная от точек B и C, соединена с вершиной D и с серединой M основания AB. Доказать, что если $(PD)\cap(AB)=X$, $(PM)\cap(AC)=Q$, $(DQ)\cap(AB)=Y$, то точка M является серединой отрезка XY (рис. 91).

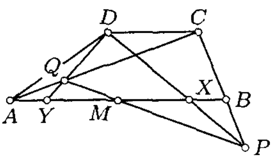


Рис. 91

Решение. Зададим гомотетию H_Q, при которой $A\to C$, и гомотетию H_P, отображающую C в B. Их композиция отображает A в B и имеет центр в точке $(AB)\cap(PQ)=M$. Поскольку точка M — середина AB, то эта композиция является центральной симметрией Z_M с центром M. Замечаем, что $H_Q(Y)=D$ и $H_P(D)=X$. Следовательно, $Z_M(Y)=X$, откуда $MX=MY$.

Задача 2. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей так, чтобы прямая, соединяющая точки касания, проходила через данную точку P.

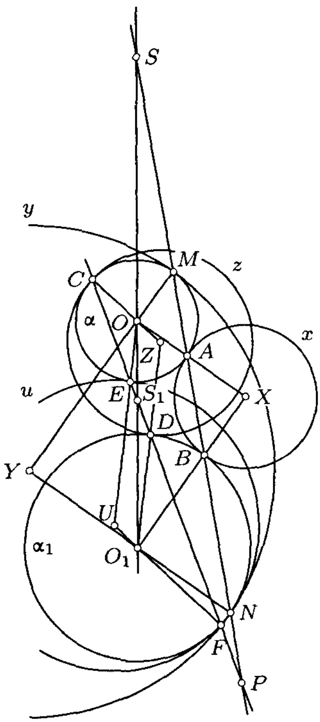


Рис. 92

Решение. Пусть искомая окружность x касается данных окружностей α и α_1 (с центрами O и O_1) соответственно в точках A и B, при этом $P\in(AB)$ (рис. 92). Рассмотрим гомотетию с центром A, которая отображает α на x, и гомотетию с центром B, отображающую x на α_1. Их композиция в данном порядке отображает α на α_1 и потому имеет своим центром точку $S=(AB)\cap(OO_1)$. Значит, прямая AB определяется точками P и S, а точка S строится как центр гомотетии окружностей α и α_1 (п. 13.2). Центр X искомой окружности x находится как точка пересечения прямых OA и O_1B (при условии, что прямая SP не является общей касательной к окружностям α и α_1). Если окружности α и α_1 не равны, то существуют два центра S и S_1 гомотетий, отображающих α на α_1. Решения существуют, когда хотя бы одна из прямых SP и S_1P пересекает данные окружности. Наибольшее число решений равно четырем: две окружности x и y для центра S гомотетии с положительным коэффициентом (соответственно для пар A, B и M, N точек пересечения прямой SP с окружностями) и две окружности z и u для центра S_1 гомотетии с отрицательным коэффициентом (соответственно для пар C, D и E, F точек пересечения прямой S_1P с окружностями).

Когда окружности α и α_1 равны, решение отличается лишь тем, что прямая, соединяющая точки касания одной из искомых окружностей с данными окружностями, параллельна линии центров OO_1.

Задача 3. Дана прямая a и не принадлежащие ей точки A, B, C, D. Найти на прямой a такие точки M и N, чтобы $(AM) \parallel (BN)$ и $(DM) \parallel (CN)$.

Решение. Пусть искомые точки M и N построены и $(AB) \cap a = S$, $(CD) \cap a = T$ (рис. 93), причем $S \neq T$. Зададим гомотетии $H_S^k(A) = B$ и $H_T^l(D) = C$. Тогда $H_S^k(M) = N$ и $H_T^l(M) = N$ и поэтому композиция $H_T^{1/l} \circ H_S^k$ отображает точку M на себя. Если $k \neq l$, то искомая точка M должна быть центром гомотетии, являющейся композицией $H_T^{1/l} \circ H_S^k$. Для ее построения найдем пару соответственных точек при этой композиции. Учитывая, что $H_T^{1/l}(C) = D$, строим $P = H_T^{1/l}(B)$. Тогда $A \to P$ при рассматриваемой композиции и поэтому $M = (AP) \cap (ST)$. Построение точки N уже очевидно.

Если $(AB) \parallel a$ или $(CD) \parallel a$, то гомотетии H_S^k и H_T^l заменяются соответственно переносами на векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$. При $k = l$ композиция $H_T^{1/l} \circ H_S^k$ есть перенос, отличный от тождественного, и поэтому неподвижных точек не существует. Следовательно, при $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{TC}}{\overline{TD}}$ задача не имеет решения. В особом случае, когда $S = T$, задача имеет бесконечное множество решений. Если $\overline{AB} = \overline{DC} = \bar{r}$ и $\bar{r} \parallel a$, то композиция $T_{\overline{AB}} \circ T_{\overline{CD}}$ есть тождественное преобразование и решение существует для любой точки M прямой a. При исключении трех последних частных случаев существуют две пары точек прямой a, удовлетворяющие заданным условиям. Одно из этих решений показано на рис. 93. Второе получается заменой гомотетии H_T^l (или переноса $T_{\overline{DC}}$) обратным преобразованием.

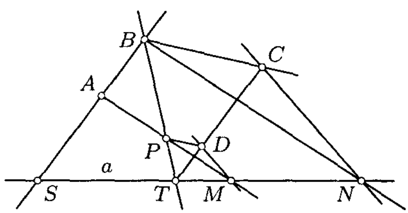


Рис. 93

2.46. Может ли композиция двух гомотетий с одним и тем же коэффициентом и с центрами A и B быть гомотетией с центром в середине отрезка AB?

2.47. Найдите композицию $T_{\bar{r}} \circ H_O^k$; $H_O^k \circ T_{\bar{r}}$.

2.48. Существует ли общий коэффициент трех гомотетий с центрами в вершинах данного треугольника ABC таких, чтобы их композиция была гомотетией с центром в центроиде данного треугольника?

2.49. Даны три параллельных неравных отрезка MN, PQ, RS. Докажите, что три точки пересечения прямых MP и NQ, MR и NS, PR и QS коллинеарны, точки пересечения прямых MQ и NP, QR и PS, MR и NS также коллинеарны.

2.50. Постройте общую пару соответственных точек при двух данных гомотетиях.

2.51. Докажите, что перенос и гомотетия имеют общую пару соответственных точек. Постройте эту пару.

2.52. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$, Q — произвольная точка прямой AC, $(QM) \cap (BC) = P$. Докажите, что прямая MN — ось симметрии прямых NQ и NP.

2.53. Через точку M, лежащую на стороне AB параллелограмма $ABCD$, проведена прямая MP параллельно AC $(P \in (BC))$, а через точку B — прямая BN параллельно MD $(N \in (DC))$. Докажите, что точки D, $Q = (AC) \cap (BN)$, P принадлежат одной прямой.

2.54. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1, C_1 такие, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (или параллельны). Докажите, что композиция трех гомотетий $H_{A_1}(B) = C$, $H_{B_1}(C) = A$. $H_{C_1}(A) = B$ есть центральная симметрия. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2.55. Дан пятиугольник $ABCDE$. Прямая m пересекает прямые AB, BC, CD, DE, EA в точках M, N, P, Q, S соответственно. Докажите, что композиция $H_S^{\varepsilon} \circ H_Q^{\delta} \circ H_P^{\gamma} \circ H_N^{\beta} \circ H_M^{\alpha}$ есть тождественное преобразование, если $\alpha = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $\beta = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$, $\gamma = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$, $\delta = \dfrac{\overline{QE}}{\overline{QD}}$, $\varepsilon = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{SE}}$.

2.56. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются окружности ω в точках A_1 и A_2. Через точку M окружности ω проведены прямые MA_1 и MA_2, пересекающие ω_1 и ω_2 вторично в точках B_1 и B_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, O_1O_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

2.57. Дан треугольник ABC и точка Q. Точки M, N, P — ее ортогональные проекции на прямые BC, CA, AB соответственно. Через середины отрезков QM, QN, QP проведены прямые m, n, p параллельно соответственно прямым BC, CA, AB. Докажите, что треугольник, стороны которого принадлежат прямым m, n, p, равен треугольнику с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

§17. *Преобразование подобия*

17.1. Определение подобия и подобных фигур. Рассмотрим отображение φ плоскости на себя, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число k: если $\varphi(A) = A_1$ и $\varphi(B) = B_1$, то $A_1B_1 = k \cdot AB$ (для любых A, B). Это отображение обратимо, потому что из $AB > 0$ всегда следует $A_1B_1 > 0$. Значит, отображение φ — *преобразование* плоскости.

Определение. Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия*, или *подобием*, если для любых двух точек A и B и их образов A_1 и B_1 при этом преобразовании выполняется равенство $A_1B_1 = k \cdot AB$, где k — постоянное (положительное) число, называемое *коэффициентом подобия*.

В частности, при $k = 1$ подобие является движением. Гомотетия с коэффициентом k ($k \neq 0$) есть подобие с коэффициентом $|k|$, так как по лемме о гомотетии (п. 12.2) $\overline{A_1B_1} = k \cdot \overline{AB}$, откуда $A_1B_1 = |k|AB$.

Композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом k_1k_2. В частности, композиция движения и гомотетии с коэффициентом k будет подобием с коэффициентом $|k|$.

Из определения подобия следует также, что преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$: $AB = \frac{1}{k}A_1B_1$.

Фигура Φ_1 называется подобной фигуре Φ (пишут: $\Phi_1 \sim \Phi$), если существует подобие, отображающее Φ на Φ_1. Отношение фигур «быть подобными» рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Так как движение — частный вид подобия, то равные (конгруэнтные) фигуры подобны. Однако подобные фигуры равны лишь в частных случаях. Поскольку гомотетия есть подобие, то гомотетичные фигуры подобны. Однако подобные фигуры гомотетичными быть не обязаны.

Для треугольников имеются известные признаки подобия. Другие подобные фигуры распознаются на основании определения: подыскивается такое преобразование подобия, которое отображает одну фигуру на другую.

17.2. Представление подобия композицией гомотетии и движения. Инварианты подобий. Представление подобия этой композицией имеет решающее значение для изучения подобий.

Теорема. *Всякое подобие плоскости можно представить композицией гомотетии с произвольным центром и коэффициентом, модуль которого равен коэффициенту подобия, и некоторого движения.*

Доказательство. Если φ^k — подобие с коэффициентом k, то композиция $\varphi^k \circ H_O^{1/(\pm k)}$ гомотетии $H_O^{1/(\pm k)}$ с произвольным центром O и этого подобия есть некоторое движение $f\colon \varphi^k \circ H_O^{1/(\pm k)} = f$, так как эта композиция сохраняет расстояния между точками $\left(k \cdot \dfrac{1}{k} = 1\right)$. Рассмотрим композицию $(\varphi^k \circ H_O^{1/(\pm k)}) \circ H_O^{\pm k} = f \circ H_O^{\pm k}$. Используя ассоциативность композиции преобразований и замечая, что $H_O^{1/(\pm k)} \circ H_O^{\pm k}$ есть тождественное преобразование, получаем:

$$\varphi^k = f \circ H_O^{\pm k}. \tag{17.1}$$

Если начать доказательство с рассмотрения движения $H_O^{1/(\pm k)} \circ \varphi^k = g$, $g \neq f$, то аналогичным образом будем иметь:

$$\varphi^k = H_O^{\pm k} \circ g. \tag{17.2}$$

В частности, при $\varphi^k = H_O^k$ движения f и g являются тождественными, а при $\varphi^k = f = g$ гомотетия H_O^k $(k = 1)$ есть тождественное преобразование.

Из разложений (17.1) и (17.2) явствует, что свойства фигур, сохраняющиеся при гомотетии и при движении, сохраняются и при подобии. Они называются инвариантами подобий. Сравнивая п. 1.2 с п. 12.2 и 12.3, получаем следующие инварианты подобий:

1) подобие отображает прямую на прямую, отрезок на отрезок,

2) подобие отображает параллельные прямые на параллельные прямые (но образ прямой не обязан быть параллельным этой прямой),

3) подобие отображает луч на луч, полуплоскость на полуплоскость,

4) подобие отображает угол на равный ему угол,

5) подобие сохраняет отношение длин любых двух отрезков, т. е. отношение длин отрезков равно отношению длин их образов.

Последнее свойство непосредственно следует и из определения подобия: если AB и CD — произвольные отрезки, A_1B_1 и C_1D_1 — их образы при подобии, то $A_1B_1 = k \cdot AB$ и $C_1D_1 = k \cdot CD$, поэтому $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$.

Таким образом, основными инвариантами подобий являются свойства фигур быть прямой (коллинеарность точек), отрезком, лучом, полуплоскостью, углом, а также параллельность прямых, величина угла, отношение длин двух отрезков.

§18. *Задание подобия плоскости*

18.1. Теорема о задании подобия плоскости. *Если заданы три неколлинеарные точки A, B, C плоскости и три точки A_1, B_1, C_1 такие, что $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $C_1A_1 = k \cdot CA$, то существует одно и только одно преобразование подобия плоскости, при котором точки A, B, C отображаются соответственно на точки A_1, B_1, C_1.*

Доказательство. Рассмотрим гомотетию H_O^k с центром в произвольной точке O. Если $H_O^k(A) = A_0$, $H_O^k(B) = B_0$, $H_O^k(C) = C_0$, то точки A_0, B_0, C_0 неколлинеарны и $A_0B_0 = k \cdot AB$, $B_0C_0 = k \cdot BC$, $C_0A_0 = k \cdot CA$. Отсюда и из условия теоремы следует: $A_0B_0 = A_1B_1$, $B_0C_0 = B_1C_1$, $C_0A_0 = C_1A_1$. По теореме о задании движения (п. 1.3) существует единственное движение f плоскости такое, что $f(A_0) = A_1$, $f(B_0) = B_1$, $f(C_0) = C_1$. Композиция $f \circ H_O^k = \varphi^k$ есть подобие плоскости, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$ $C \to C_1$. Этим существование требуемого подобия доказано.

Докажем его единственность. Пусть имеются два подобия φ и ψ такие, что $\varphi(A) = A_1$, $\varphi(B) = B_1$, $\varphi(C) = C_1$ и $\psi(A) = A_1$, $\psi(B) = B_1$, $\psi(C) = C_1$. Отсюда ясно, что коэффициенты этих подобий должны быть равны. Композиция $\psi^{-1} \circ \varphi$ является движением, при котором точки A, B, C неподвижны. По теореме п. 1.3 движение $\psi^{-1} \circ \varphi$ должно быть тождественным: $\psi^{-1} \circ \varphi = E$, откуда $\psi = \varphi$.

Вместе с этим доказан признак подобия треугольников по трем сторонам: если соответственные стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

Согласно доказанной теореме, *если два подобия имеют три общие пары соответственных точек, то они совпадают.*

18.2. Два рода подобий. Построение образа точки при подобии. Можно доказать, что если треугольник ABC и его образ $A_1B_1C_1$ при подобии плоскости имеют одинаковые ориентации, то одинаковые ориентации имеют любой другой треугольник и его образ при этом подобии. Если же треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы противоположно, то и любой другой треугольник противоположно ориентирован со своим образом. Иначе говоря, существуют две и только две возможности: или подобие сохраняет ориентацию всех треугольников, или же оно меняет ориентацию всех треугольников на противоположную.

Подобие плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников, называется *подобием первого рода.* Подобие, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную, называется *подобием второго рода.* Гомотетия — подобие первого рода.

Если указан род подобия, то для его задания достаточно знать образы лишь двух точек: $A \to A_1$, $B \to B_1$. Тогда для любой выбранной точки M однозначно строится ее образ M_1 при этом подобии. Если $M \notin (AB)$, то на основании признака подобия треугольников по двум углам на отрезке A_1B_1 строится треугольник $A_1B_1M_1$, подобный треугольнику ABM и ориентированный одинаково или противоположно с треугольником ABM в зависимости от указанного рода подобия. Если $M \in (AB)$, то независимо от указанного рода подобия ее образом будет такая точка $M_1 \in (A_1B_1)$, что $\dfrac{\overline{A_1M_1}}{\overline{B_1M_1}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \lambda$. Для ее построения достаточно известным способом разделить отрезок A_1B_1 в данном отношении λ. Можно поступить и иначе: сначала найти образ N_1 точки $N \notin (AB)$ и затем, используя пару $N \to N_1$, построить с помощью подобных треугольников образ M_1 точки $M \in (AB)$.

Поскольку подобие данного рода задается двумя парами соответственных точек, то два подобия одного и того же рода, имеющие две общие пары соответственных точек, совпадают.

Так как композиция двух подобий одного рода есть подобие первого рода и композиция двух подобий различных родов есть подобие второго рода, то из теоремы п. 17.2 вытекают следующие следствия:

1) всякое подобие первого рода представимо композицией гомотетии и движения первого рода,

2) всякое подобие второго рода представимо композицией гомотетии и движения второго рода.

§ 19. *Классификация подобий плоскости*

19.1. Классификация подобий первого рода получается из классификации движений первого рода (на переносы и повороты) путем рассмотрения композиции гомотетии и этих движений. Композиция гомотетии и переноса, а также переноса и гомотетии есть гомотетия с тем же коэффициентом, но с другим центром (задача 2.47). Поэтому остается рассмотреть композиции гомотетий и поворотов.

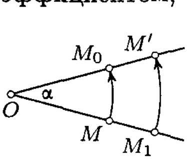


Рис. 94

Композиция гомотетии и поворота с общим центром коммутативна:

$$R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha,$$

что легко усматривается непосредственно. Действительно, если $H_O^k(M) = M_1$ и $R_O^\alpha(M) = M_0$, то каждая из этих композиций отображает произвольную точку M на одну и ту же точку M' (рис. 94).

Композиция гомотетии и поворота с общим центром называется *гомотетическим поворотом* (или *поворотной гомотетией*).

Множество различных видов подобий первого рода очень невелико, так как имеет место следующая теорема.

Теорема. *Всякое подобие первого рода плоскости, отличное от гомотетии и движения, является гомотетическим поворотом.*

Доказательство. Пусть подобие φ первого рода задано композицией $H_B^k \circ R_A^\alpha$, где $k \neq 1$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$, так как в противном случае подобие φ было бы движением или гомотетией, что исключено условием теоремы. При $A = B$ доказывать нечего, и поэтому считаем $A \neq B$. Если $H_B^k(A) = A'$, то $\varphi(A) = A'$. Если B_0 — прообраз точки B при повороте R_A^α, т. е. $R_A^\alpha(B_0) = B$, то $\varphi(B) = B$. Следовательно, подобие φ можно задать двумя парами точек: $A \to A'$, $B_0 \to B$ (рис. 95). Рассмотрим окружность ω, проходящую через точки A и A' и касающуюся прямой AB_0 в точке A. Эта окружность всегда существует, поскольку при указанных ограничениях точки A, A', B_0 неколлинеарны. При этих ограничениях всегда существует и окружность, проходящая через A, B, B_0. Эти две окружности пересекаются в точках A и O. Без сужения общности доказательства можно считать, что $|\alpha| < \pi$. Тогда $\angle AOA_1 = \angle B_0AB = \angle B_0OB = \alpha$. Поскольку $\varphi(AB_0) = A'B$, то, $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{AB_0}} = k$. Рассмотрим композицию $H_O^k \circ R_O^\alpha$. Если $R_O^\alpha(A) = A_1$ и $R_O^\alpha(B_0) = B_1$, то $A_1 \in (OA')$, $B_1 \in (OB)$, $A_1B_1 = AB_0$ и $\angle AB_0O = \angle A_1B_1O$. Но, кроме того, $\angle AB_0O = \angle ABO$ и поэтому $\angle ABO = \angle A_1B_1O$. Значит, $A_1B_1 \parallel A'B$ и $\dfrac{A'B}{A_1B_1} = k$, откуда вытекает, что $H_O^k(A_1) = A'$ и $H_O^k(B_1) = B$. Таким образом, композиция $H_O^k \circ R_O^\alpha$ отображает A_1 в A' и B_0 в B, вследствие чего она совпадает с заданным подобием φ. Итак,

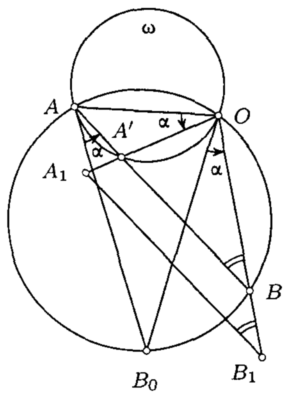


Рис. 95

$$\varphi = H_B^k \circ R_A^\alpha = H_O^k \circ R_O^\alpha,$$

что по определению и есть гомотетический поворот.

Таким образом, всякое подобие первого рода есть либо гомотетия, либо движение (поворот или перенос), либо гомотетический поворот. Гомотетию и поворот можно считать частными случаями гомотетического поворота соответственно при $\alpha = 0$ и $k = 1$.

Представление подобия первого рода коммутативной композицией поворота и гомотетии с общим центром д в у з н а ч н о. Действительно, если $\varphi = H_O^k \circ R_O^\alpha$, то замечая, что $E = H_O^{(-1)} \circ H_O^{(-1)} = H_O^{(-1)} \circ R_O^\pi$ получаем:

$$\varphi = H_O^k \circ E \circ R_O^\alpha = (H_O^k \circ H_O^{(-1)}) \circ (R_O^\pi \circ R_O^\alpha) = H_O^{-k} \circ R_O^{\pi+\alpha}.$$

Итак, $\varphi = H_O^k \circ R_O^\alpha = H_O^{-k} \circ R_O^{\pi+\alpha}$.

Других аналогичных представлений заданного подобия первого рода быть не может, так как подобие, отличное от движения, не может иметь двух неподвижных точек, а для коэффициента гомотетии имеются ровно две возможности: при данном k он может равняться лишь k или $-k$. Поэтому предположение о существовании третьего представления приводит к двум полученным.

19.2. Классификация подобий второго рода. Композиции гомотетии и движений второго рода есть композиции гомотетии и осевой симметрии и композиции гомотетии и переносной симметрии. Поскольку композиция гомотетии и переноса есть некоторая гомотетия, то множество всех подобий второго рода состоит только из композиций гомотетий и осевых симметрий. Рассмотрим сначала частный случай такой композиции.

Композиция осевой симметрии и гомотетии, центр которой принадлежит оси симметрии, коммутативна:

$$S_l \circ H_O^k = H_O^k \circ S_l, \qquad O \in l.$$

В самом деле, если $H_O^k(M) = M_1$ и $S_l(M) = M_0$, то каждая из этих композиций переводит произвольную точку M в одну и ту же точку M' (рис. 96).

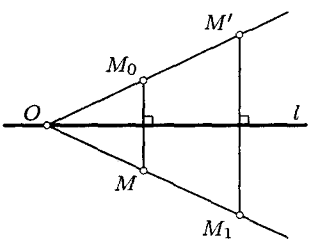


Рис. 96

Композиция осевой симметрии и гомотетии, центр которой лежит на оси симметрии, называется *гомотетической симметрией*.

Подобия второго рода сводятся к гомотетическим симметриям и переносным симметриям.

Теорема. *Всякое подобие второго рода плоскости, отличное от движения, является гомотетической симметрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если φ — подобие второго рода, не являющееся движением, то на основании сказанного выше положим $\varphi = H_O^k \circ S_l$ ($k \neq 1$). При $O \in l$ доказывать нечего. Считаем, что $O \notin l$, и проведем через O прямую m перпендикулярно l. Пусть $m \cap l = A$, $S_l(O) = O_1$,

$H_O^k(O_1) = O'$, $H_O^k(A) = A'$ (рис. 97). Тогда $\varphi(O) = O'$ и $\varphi(A) = A'$. Рассмотрим композицию гомотетий $H_O^k \circ H_A^{(-1)} = H_T^{-k}$. Она отображает A на A', O на O'. Центр T может быть построен по этим парам соответственных точек. Композиция $H_T^{-k} \circ S_m$ есть подобие второго рода и также отображает A на A', O на O' и поэтому совпадает с φ. Итак, $\varphi = H_O^k \circ S_l = H_T^{-k} \circ S_m$, $T \in m$.

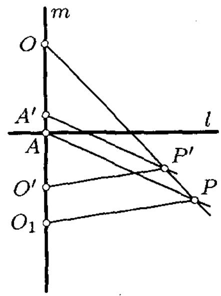


Рис. 97

Такое представление подобия второго рода композицией осевой симметрии и гомотетии с центром на оси симметрии д в у з н а ч н о. Действительно, если $\varphi = H_T^{-k} \circ S_m$, где $T \in m$, то замечая, что $E = H_T^{(-1)} \circ H_T^{(-1)} = H_T^{(-1)} \circ Z_T = H_T^{(-1)} \circ S_t \circ S_m$, где $t \perp m$ и $t \cap m = T$, получаем: $\varphi = H_T^{-k} \circ S_m = H_T^{-k} \circ E \circ S_m = (H_T^{-k} \circ H_T^{(-1)}) \circ (S_t \circ S_m \circ S_m) = H_T^k \circ S_l$. Итак,

$$\varphi = H_T^k \circ S_t = H_T^{-k} \circ S_m, \quad \text{где } t \perp m \text{ и } t \cap m = T.$$

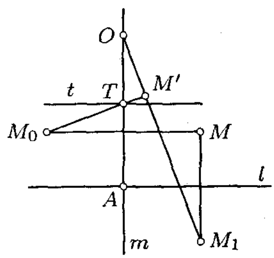
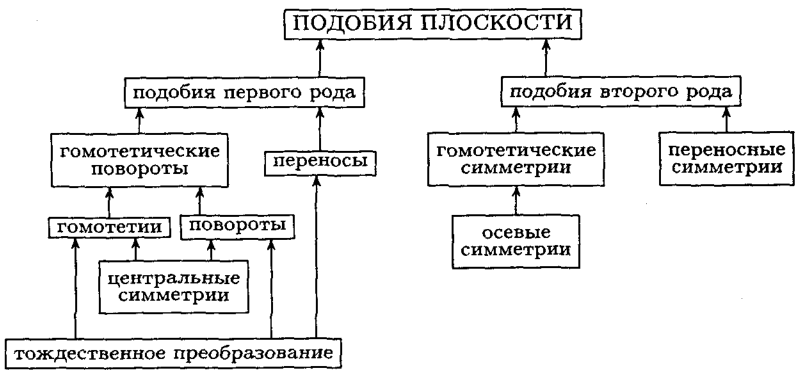


Рис. 98

Существует простой способ построения центра T гомотетической симметрии $\varphi = H_O^k \circ S_l = H_T^{-k} \circ S_m$. Пусть для произвольной точки M $S_l(M) = M_1$, $H_O^k(M_1) = M'$ и $S_m(M) = M_0$. Тогда $(M_0M') \cap m = T$, так как $H_T^{-k}(M_0) = M'$ (рис. 98).

На основании двух последних теорем и классификации движений (п. 7.10) можно дать полную классификацию подобий плоскости. Иллюстрируем ее следующей схемой.



§ 20. *Угол, центр и двойные прямые подобия*

20.1. Угол подобия. Рассмотрим сначала подобие первого рода. Оно представляет собой либо перенос, либо поворот, либо гомотетию, либо композицию гомотетии и поворота. При гомотетии и переносе прямая отображается на параллельную ей прямую, а при повороте угол между лучом и его образом постоянен: он равен углу поворота. Следовательно, при всяком подобии первого рода ориентированный угол между лучом и его образом постоянен для данного подобия. В частности, для гомотетии этот угол равен $0°$ или $180°$.

Перейдем к подобиям второго рода. Представим каждое подобие второго рода композицией осевой симметрии с фиксированной осью и подобия первого рода. Поэтому каждому подобию второго рода будет отвечать также некоторый постоянный угол. Более точно и в удобном для практики виде этот факт можно сформулировать так.

Если φ — подобие второго рода, l — фиксированная прямая и m — произвольная прямая плоскости, то ориентированный угол α между прямой $S_l(m)$ и прямой $\varphi(m)$ не зависит от выбора прямой m и равен углу между прямой l и прямой $\varphi(l)$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \psi \circ S_l$, где ψ — подобие первого рода. Тогда $\varphi(m) = (\psi \circ S_l)(m) = \psi(m_1)$, где $m_1 = S_l(m)$. Как уже было выяснено раньше, угол α между m_1 и $\psi(m_1)$ постоянен для данного подобия ψ первого рода, т. е. угол α между $S_l(m)$ и $\varphi(m)$ постоянен для данного подобия φ второго рода и фиксированной прямой l. В частности, при $m = l$ будет $S_l(l) = l$ и $\alpha = \measuredangle(l, \varphi(l))$.

Таким образом, как подобию первого рода, так и подобию второго рода соответствует определенный постоянный угол α, причем для подобия второго рода он существенно зависит от выбора фиксированной прямой l. Этот угол называется *углом подобия.*

20.2. Центр подобия. При доказательствах теорем § 19 установлено, что всякое подобие, отличное от движения, имеет неподвижную точку — центр гомотетического поворота или центр гомотетической симметрии. При $k \neq 1$ неподвижная точка подобия единственна, так как если бы их было две, скажем, A и B, то необходимо $AB = k \cdot AB$, откуда $k = 1$.

Из движений лишь поворот имеет единственную неподвижную точку. Остальные движения или не имеют неподвижных точек (перенос, переносная симметрия), или же имеют их бесконечное множество (осевая симметрия, тождественное преобразование).

Единственную неподвижную точку подобия называют *центром подобия.*

В п. 19.1 вместе с доказательством теоремы найден способ построения центра подобия первого рода с помощью двух *окружностей* (рис. 95). В п. 19.2 указан способ построения центра подобия второго рода, когда оно задано композицией гомотетии и осевой симметрии. Приведем без доказательства еще один простой способ построения центра подобия при задании подобия двумя парами соответственных точек с указанием рода.

Пусть подобие φ указанного рода задано парами $A \to A_1$ и $B \to B_1$. На отрезках AB и A_1B_1 построим два квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответствующей роду подобия ориентации (рис. 99). Если $(AB) \cap (A_1B_1) = M$, $(CD) \cap (C_1D_1) = N$, $(BC) \cap (B_1C_1) = P$, $(AD) \cap (A_1D_1) = Q$, то точка $O = (MN) \cap (PQ)$ — центр заданного подобия.

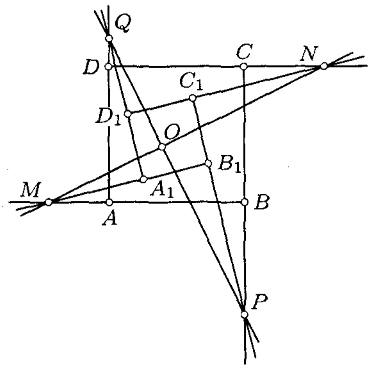


Рис. 99

20.3. Два подобия с общим центром. Пусть подобие первого рода с центром O отображает точки A и B соответственно в точки A_1 и B_1. Тогда $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k$ — коэффициент подобия и $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \varphi$ — угол подобия. Так как треугольники AOB и A_1OB_1 подобны, то $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \psi$ и $\frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OA_1} = k_1$. Это значит, что точки B и B_1 будут образами точек A и A_1 при гомотетическом повороте с центром O, коэффициентом k_1 и углом ψ. Имеем такой результат.

Если при подобии первого рода с центром O $A \to A_1$ и $B \to B_1$, то существует подобие первого рода с центром O, при котором $A \to B$ и $A_1 \to B_1$.

20.4. Двойные прямые подобия. Подобие первого рода, отличное от гомотетии и переноса, не имеет двойных инвариантных прямых. Подобие второго рода, отличное от движения, обладает двумя и только двумя перпендикулярными двойными прямыми. Действительно, в п. 19.2 найдены две перпендикулярные прямые m и t, которые, очевидно, являются двойными. Гомотетическая симметрия при $k \neq 1$ не может иметь других двойных прямых, так как из всех двойных прямых гомотетии H_T^k (или H_T^{-k}) затем при симметрии S_t (или S_m) на себя отображаются только прямые m и t.

Нетрудно видеть, что *двойные прямые m и t подобия второго рода служат осями симметрии каждой пары соответственных при этом* *подобии прямых, проходящих через центр подобия.* Поэтому при известном центре подобия двойные прямые легко строятся.

Движение второго рода имеет либо единственную двойную прямую — ось переносной симметрии, — либо бесконечное множество двойных прямых — ось осевой симметрии и пучок перпендикулярных ей прямых.

§21. *Решение задач методом подобия*

Задача 1. Дан треугольник ABC, в котором угол при вершине C прямой и проведена высота CD. Доказать, что медианы AM и CN в треугольнике ADC и DBC перпендикулярны.

Решение. Треугольник CDB подобен треугольнику ADC ($C \to A$, $D \to D$, $B \to C$), и эти треугольники одинаково ориентированы (рис. 100). Поскольку D — неподвижная точка этого подобия и соответственные стороны треугольников перпендикулярны, то указанное подобие является композицией поворота $R_D^{90°}$ и гомотетии H_D^k, где $k = \dfrac{AC}{CB}$. При этом подобии точки C и N отображаются на точки A и M соответственно. Поэтому отрезки AM и CN перпендикулярны.

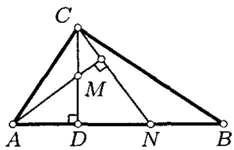


Рис. 100

Задача 2. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Поворот R_O^φ, $\varphi \neq 180°$, отображает его на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что пары прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1 пересекаются в вершинах параллелограмма.

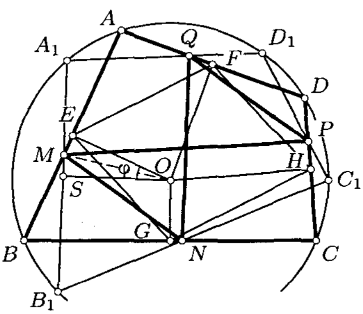


Рис. 101

Решение. Пусть $(AB) \cap (A_1B_1) = M$, $(BC) \cap (B_1C_1) = N$, $(CD) \cap (C_1D_1) = P$, $(DA) \cap (D_1A_1) = Q$ (рис. 101). Ортогональные проекции E, G, H, F точки O на прямые, содержащие стороны четырехугольника $ABCD$, являются серединами сторон и, следовательно, $EGHF$ — параллелограмм. При R_O^φ точка E отображается на точку S. Имеем: $OE = OS$, $\angle OEM = \angle OSM = 90°$, $\angle EOS = \varphi$, откуда следует, что в прямоугольном треугольнике EOM будет $\angle EOM = \dfrac{\varphi}{2}$ и $OM = OE \cdot \dfrac{1}{\cos(\varphi/2)}$. Тогда точка M есть образ точки E при композиции $H_O^k \circ R_O^{\varphi/2}$, где $k = \dfrac{1}{\cos(\varphi/2)}$.

Аналогично можно показать, что точки N, P, Q являются образами точек G, H, F при той же композиции, т.е. при подобии первого рода. Отсюда следует, что четырехугольник $MNPQ$ — образ параллелограмма при подобии и потому является также параллелограммом.

Задача 3. Две окружности α и α_1 пересекаются в точках A и B. Доказать, что одну из них можно отобразить на другую гомотетическим поворотом около точки A. Доказать, что прямая, соединяющая точку одной окружности с ее образом при этом преобразовании, проходит через вторую точку B пересечения окружностей.

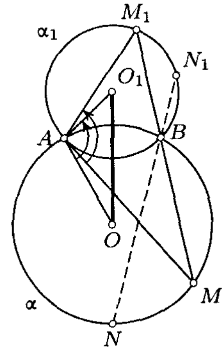


Рис. 102

Решение. Пусть O и O_1 — центры данных окружностей α и α_1 (рис. 102). Композиция $H_A^k \circ R_A^\varphi$, где $\varphi = \angle OAO_1$ и $k = \dfrac{AO_1}{AO}$, отображает O на O_1, A на себя и, следовательно, окружность α на окружность α_1. Пусть M — произвольная точка окружности α, отличная от A и B, и M_1 — ее образ при указанной композиции. Докажем, что точки M, B, M_1 коллинеарны. Для этого достаточно показать, что $\angle ABM + \angle ABM_1 = 180°$. Действительно, $\angle ABM = \frac{1}{2}\smile AM$, $\angle ABM_1 = \frac{1}{2}\smile AM_1$. При указанном подобии дуга AM отображается на дугу ABM_1, и поэтому угловые меры этих дуг равны. Следовательно,
$$\angle ABM + \angle ABM_1 = \frac{1}{2}\smile ABM_1 + \frac{1}{2}\smile AM_1 = \frac{1}{2}(\smile ABM_1 + \smile AM_1) = 180°.$$

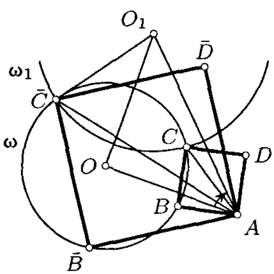


Рис. 103

Таким образом, одну из точек пересечения двух окружностей можно принять за центр подобия первого рода, отображающего одну окружность на другую. Тогда прямые, проходящие через вторую точку пересечения этих окружностей, пересекают эти окружности в парах соответственных при данном подобии точек.

Отсюда следует, что центр подобия первого рода, при котором $M \to M_1$ и $N \to N_1$, совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников MNB и M_1N_1B, где $B = (MM_1) \cap (NN_1)$.

Задача 4. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина A находилась в данной точке, а вершины B и C принадлежали данной окружности.

Решение. Пусть $\omega = (O, R)$ — данная окружность, $ABCD$ — искомый квадрат (рис. 103). Композиция поворота $R_A^{45°}$ и гомотетии $H_A^{\sqrt{2}}$

отображает B на C. Если ω_1 есть образ окружности ω при этой композиции, то $C \in \omega \cap \omega_1$. Отсюда и вытекает способ построения точки C, а затем и квадрата $ABCD$. Строим окружность ω_1. Ее центр O_1 является вершиной квадрата со стороной OA, а ее радиус равен $R\frac{1}{\sqrt{2}}$. Число решений зависит от числа общих точек окружностей ω и ω_1, а оно равно 2, 1 и 0, когда соответственно OA меньше, равен и больше $R(1+\sqrt{2})$.

Задача 5. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть прямые AA_1 и CC_1, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Так как треугольники CHA_1 и ABA_1 подобны (по двум углам) и одинаково ориентированы, то существует подобие первого рода, при котором $A_1 \to A_1$, $H \to B$, $C \to A$. Тогда существует подобие первого рода, при котором $A_1 \to A_1$, $H \to C$, $B \to A$ (п. 20.3). При этом подобии лучи A_1H и HB отображаются соответственно на лучи A_1C и CA. Но так как $(A_1H) \perp (A_1C)$, то и $(HB) \perp (CA)$, т. е. третья высота проходит через точку H.

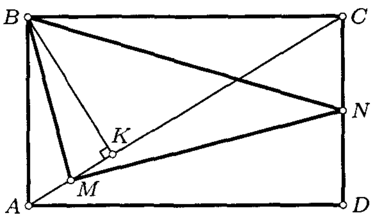


Рис. 104

Задача 6. В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к диагонали AC. Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Доказать, что треугольник BMN прямоугольный (рис. 104).

Решение. Из подобия треугольников BKC и DCA следует: $\frac{BK}{KC} = \frac{DC}{AD} = \lambda$. Представляя $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{KC})$, подвергнем векторы $\overline{AD}$ и $\overline{KC}$ композиции гомотетии с коэффициентом λ и поворота на $90°$, центры которых считаем произвольными. Тогда $\overline{AD} \to \overline{CD} = \overline{BA}$, $\overline{KC} \to \overline{BK}$ и поэтому (§ 10) $\overline{MN} \to \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BK}) = \overline{BM}$. Значит, $\overline{MN} \perp \overline{BM}$.

Задача 7. Стороны BC, CA, AB треугольника ABC перпендикулярны соответственно сторонам B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что окружности с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку.

Решение. Соответственные углы данных треугольников равны, поэтому треугольники подобны. Подобие, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, есть гомотетический поворот на $90°$ около некоторой точки O. Рассматриваемые окружности с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точки $Q = (AC) \cap (A_1C_1)$, $P = (BC) \cap (B_1C_1)$, $L = (AB) \cap (A_1B_1)$

соответственно (рис. 105). На основании результата задачи 3 они пересекаются в центре O подобия.

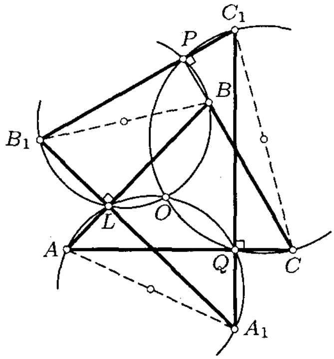


Рис. 105

Задача 8. В треугольнике ABC угол C отличен от прямого. Точки A_1 и B_1 являются основаниями высот AA_1 и BB_1. Доказать, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC, и найти коэффициент подобия.

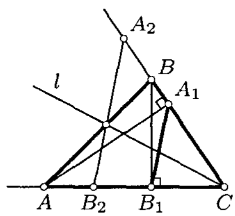


Рис. 106

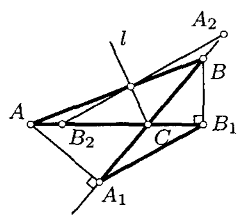


Рис. 107

Решение. Замечаем, что треугольники A_1B_1C и ABC ориентированы противоположно (рис. 106 и 107). Поэтому надо отыскать подобие второго рода, при котором один из них отображается на другой. Если один из углов A или B прямой, то решение задачи общеизвестно. Поэтому считаем, что эти углы непрямые, и рассмотрим два случая: 1) угол C острый, 2) угол C тупой. Симметрией относительно биссектрисы l угла C треугольник ABC отображается на A_2B_2C, причем $A_2 \in (BC)$, $B_2 \in (AC)$. Из треугольников AA_1C и BB_1C имеем: $A_1C = AC|\cos\angle C|$ и $B_1C = BC|\cos\angle C|$. Так как $AC = A_2C$ и $BC = B_2C$, то $A_1C = A_2C|\cos\angle C|$ и $B_1C = B_2C|\cos\angle C|$. Если учесть расположение точек в каждом из рассматриваемых случаев, то можно записать: $\overline{CA}_1 = \overline{CA}_2 \cos\angle C$ и $\overline{CB}_1 = \overline{CB}_2 \cos\angle C$. Это значит, что $H_C^{\cos\angle C}(A_2) = A_1$ и $H_C^{\cos\angle C}(B_2) = B_1$. Таким образом, подобие $H_C^{\cos\angle C} \circ S_l$ отображает треугольник ABC на A_1B_1C и поэтому они подобны с коэффициентом $|\cos\angle C|$.

Задача 9. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали неперпендикулярны. Точки A_1 и C_1 — ортогональные проекции вершин A и C на прямую BC, а точки B_1 и D_1 — ортогональные проекции вершин B и D на прямую AC. Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен четырехугольнику $ABCD$ (рис. 108).

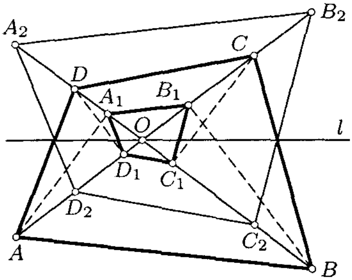


Рис. 108

Решение. Аналогично предыдущему симметрией относительно биссектрисы l острого угла φ между диагоналями отображаем четырехугольник $ABCD$ на четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$. Так как $OA_1 = OA\cos\varphi$, $OB_1 = OB\cos\varphi$, $OC_1 = OC\cos\varphi$, $OD_1 = OD\cos\varphi$ и $OA = OA_2$, $OB = OB_2$, $OC = OC_2$, $OD = OD_2$, то $OA_1 = OA_2\cos\varphi$, $OB_1 = OB_2\cos\varphi$, $OC_1 = OC_2\cos\varphi$, $OD_1 = OD_2\cos\varphi$. Отсюда с учетом взаимного расположения точек заключаем, что гомотетией $H_O^{\cos\varphi}$ четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ отображается на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Следовательно, подобие $H_O^{\cos\varphi} \circ S_l$ отображает четырехугольник $ABCD$ на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось установить.

Задача 10. В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Доказать, что биссектрисы углов HAC_1 и BCC_1 перпендикулярны.

Решение. Прямоугольные треугольники HAC_1 и HCA_1 подобны и ориентированы противоположно (рис. 109). Представим подобие второго рода, заданное парами точек $H \to H$, $A \to C$, $C_1 \to A_1$, композицией осевой симметрии относительно биссектрисы l угла HAC_1 и некоторого подобия f первого рода. Если треугольник AC_0H_0 симметричен треугольнику AC_1H относительно l, то соответственные при подобии f стороны треугольников AC_0H_0 и CA_1H перпендикулярны. Следовательно, угол подобия f равен $90°$. Биссектрисы l и m соответственных при этом подобии углов C_0AH_0 и A_1CH являются парой соответственных прямых и также перпендикулярны.

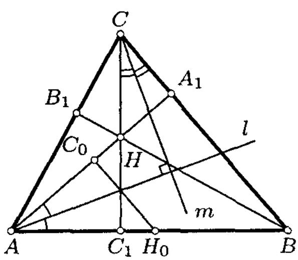


Рис. 109

Задача 11. Построить четырехугольник $ABCD$, диагональ которого является биссектрисой угла A, если известны стороны AB и AD, диагональ AC и разность углов B и D.

Решение. Пусть такой четырехугольник $ABCD$ построен (рис. 110). Рассмотрим гомотетическую симметрию с центром A, осью AC и парой соответственных точек $D \to B$. Тогда коэффициент этого подобия равен $k = \frac{AB}{AD}$. Если C_1 — образ точки C при этом подобии, то $\angle ABC_1 = \angle ADC$ и угол C_1BC равен заданной разности углов ABC и ADC. Так как $AC_1 = k \cdot AC$, то отрезок AC_1 строится на основании пропорции $AD : AB = AC : AC_1$. Задача сводится к построению вершины B, а она обладает двумя свойствами: отрезок AB известен, а отрезок CC_1 виден из B под заданным углом. Следовательно, точку B можно построить как точку пересечения окружности (A, AB) и дуг окружностей, стягиваемых известной хордой и вмещающих заданный угол, равный разности углов B и D. Построение точки D очевидно. Число решений зависит от числа общих точек окружности (A, AB) и указанных дуг, а их может быть не более двух. Полученные два четырехугольника симметричны относительно общей диагонали AC. В соответствии с требованиями к задаче на построение они представляют собой одно ее решение.

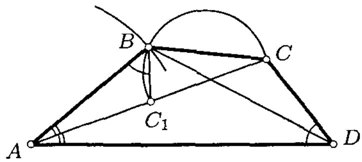


Рис. 110

Задачи

2.58. Если преобразование плоскости отображает каждую прямую на прямую и угол — на равный ему угол, то оно является подобием. Докажите.

2.59. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Каким подобием можно отобразить треугольник ACD на треугольник ABC?

2.60. Через точку M проведены к окружности две секущие, встречающие ее соответственно в точках A и B, C и D. Какими подобиями второго рода отрезок AC отображается на отрезок BD?

2.61. Даны две неравные окружности с различными центрами. Какими подобиями можно отобразить одну из них на другую?

2.62. Подобие первого рода задано двумя парами соответственных точек $A \to B$, $B \to C$ $(AB \to BC)$. Докажите, что $OC : OA = k^2$, где O — центр и k — коэффициент подобия.

2.63. На данной прямой найдите пару соответственных точек при заданном подобии первого рода.

2.64. Постройте окружность с данным центром, касающуюся своего образа при заданном подобии.

2.65. Даны два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Найдите угол между лучами AA_1 и BB_1, AA_1 и CC_1.

2.66. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Построены высота CD и перпендикуляр DE к стороне BC $(E \in (BC))$. Точка M — середина отрезка DE. Докажите, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

2.67. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Проведена высота BK треугольника BPC. Докажите, что $(DK) \perp (QK)$.

2.68. Из произвольной точки M окружности, описанной около треугольника ABC, проведены перпендикуляры MA_1 и MB_1 к сторонам BC и AC. Точки P и Q — середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle PQM = 90°$. Докажите, что угол между прямыми AB и A_1B_1 равен углу OMC, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

2.69. Треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC при повороте около центра описанной окружности на угол $\alpha < 180°$. Докажите, что точки пересечения соответственных сторон этих треугольников являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия.

2.70. Треугольник ABC поворотом около точки P описанной около него окружности отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что точки пересечения соответственных сторон коллинеарны.

2.71. Прямая, проходящая через одну из точек пересечения окружностей ω и ω_1, пересекает их вторично в точках A и A_1. Докажите, что величина угла между касательными к окружности в точках A и A_1 не зависит от выбора секущей.

2.72. Две окружности пересекаются в точках A и B, через которые проведены произвольные секущие MN и PQ, пересекающие вторично одну окружность в точках M и P, а другую — в точках N и Q соответственно. Докажите, что хорды MP и NQ параллельны.

2.73. Прямые m и n пересекаются в точке S под углом φ. Через точку S проведены прямые a и b. Точки A и B — ортогональные проекции точки $M \in m$ на прямые a и b, точки A_1 и B_1 — ортогональные проекции точки $N \in n$ на прямые a и b. Найдите угол между прямыми AB и A_1B_1.

2.74. Точки A, B, M коллинеарны. На отрезках AM и MB построены квадраты в одной полуплоскости с границей AB. Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке N. Найдите множество точек N при различном выборе точки M на прямой AB.

2.75. Через точку пересечения хорд AC и BD окружности проведены прямые m и n, перпендикулярные к прямым AB и CD соответственно. Докажите, что $\angle(m, (AC)) = \angle(n, (BD))$.

2.76. При подобии φ второго рода $\varphi(a) = b$ и $\varphi(b) = c$. Докажите, что прямые a и c параллельны.

2.77. В треугольнике ABC $AC > CB$. Касательная в точке C к описанной около треугольника окружности пересекает прямую AB в точке D. Точки M и N — середины отрезков BD и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла ADC образует равные углы с прямыми AN и CM.

2.78. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите, что углы ACA_1 и BDB_1 равны.

2.79. Даны точки $A(2; 1)$ и $B(-3; 2)$, имеющие указанные координаты относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Постройте ее оси и базисные векторы.

2.80. Постройте правильный треугольник, две вершины которого принадлежат данной окружности, а проекция одной из них на противоположную сторону совпадает с данной точкой.

2.81. Постройте четырехугольник по четырем его сторонам, если около него можно описать окружность.

2.82. Постройте треугольник, подобный данному треугольнику, так, чтобы его вершины лежали по одной на трех данных параллельных прямых.

2.83. Точки M_1, M_2, M_3 являются образами точки M при поворотах R_A^α, R_B^α, R_C^α с различными центрами. Докажите, что точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны тогда и только тогда, когда коллинеарны точки A, B, C.

2.84*. Даны три поворота R_A^α, R_B^β, R_C^γ. Найдите множество всех точек M, для которых точки $M_1 = R_A^\alpha(M)$, $M_2 = R_B^\beta(M)$, $M_3 = R_C^\gamma(M)$ коллинеарны, если $\alpha = \beta = 180°$, $\gamma = -90°$.

2.85. Постройте треугольник, подобный данному треугольнику, так, чтобы одна его вершина находилась в данной точке, а две другие лежали по одной на двух данных окружностях.

2.86. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей и углу между ними так, чтобы его вершины лежали по одной на прямых, содержащих стороны данного параллелограмма $ABCD$.

2.87. Даны две окружности, прямая l и принадлежащая ей точка A. Постройте треугольник ABC такой, что прямая l содержит биссектрису угла A, вершины B и C лежат соответственно на данных окружностях и отношение сторон AB и AC равно отношению двух данных отрезков.

2.88. Подобие первого рода задано парой соответственных точек, коэффициентом и углом. Постройте центр этого подобия.

2.89. Подобие второго рода задано своей осью и парой соответственных точек. Постройте центр подобия и найдите его коэффициент.

2.90. На окружности даны четыре точки. Среди расстояний между ними нет равных. Найдите множество центров подобий второго рода, при которых любые две из данных точек отображаются на две оставшиеся.

2.91. Неравные отрезки AB и A_1B_1 лежат на одной прямой. Постройте двойные прямые подобия второго рода, заданного парами точек $A \to A_1$, $B \to B_1$.

2.92. Докажите, что центры подобий первого и второго рода, при которых один из данных неравных квадратов отображается на другой (8 центров), принадлежат одной окружности.

2.93. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Постройте центр и двойные прямые подобия второго рода, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$.

2.94. Постройте центр подобия, представляющего собой композицию данной гомотетии и данного гомотетического поворота.

2.95. Даны два подобных противоположно ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 можно разделить в таких равных отношениях, чтобы точки деления принадлежали одной прямой.

2.96. Квадраты $ABCD$ и $RPBQ$ одинаково ориентированы и расположены так, что точки P и Q принадлежат прямым AB и BC соответственно. Докажите, что окружности, построенные на отрезках AR, BP, CB, DQ как на диаметрах, пересекаются в одной точке.

2.97. Даны два правильных противоположно ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что тройки точек, делящих отрезки AA_1, BB_1 и CC_1; AB_1, BC_1 и CA_1; AC_1, BA_1 и CB_1 в отношении $k = AB : A_1B_1$, принадлежат соответственно трем прямым, которые пересекаются в одной точке.

2.98. На сторонах треугольника ABC построены подобные одинаково ориентированные треугольники ABC_1, CBA_1, ACB_1. Докажите, что $C_1A_1CB_1$ — параллелограмм.

2.99. Даны два подобных (негомотетичных) одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, B, C, P принадлежат одной окружности и точки A_1, B_1, C_1, P также принадлежат одной окружности.

2.100*. Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ подобны и одинаково ориентированы. Тройки точек A, A_1, A_2; B, B_1, B_2; C, C_1, C_2 коллинеарны. Докажите, что центры подобий, отображающих каждый из этих треугольников на другие, совпадают.

2.101. В условиях предыдущей задачи докажите, что точки A, B, C делят соответственно отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в равных отношениях.

2.102. На сторонах AB, BC и CA отрицательно ориентированного треугольника ABC с неравными сторонами построены положительно ориентированные подобные треугольники ABP, BCQ, CAR, в которых $\angle P = \angle Q = \angle R = 120°$. Докажите, что композиция трех гомотетических поворотов с центрами P, Q, R и некоторым коэффициентом k на углы $120°$ есть гомотетия с центром в точке B.

2.103. Стороны правильного треугольника ABC разделены по обходу его границы в отношении k точками A_1, B_1, C_1. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ разделены по обходу его границы в отношении $1/k$ точками A_2, B_2, C_2. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ гомотетичны. Найдите коэффициент гомотетии. Обобщите результат для правильных многоугольников.

2.104. Докажите, что ортогональные проекции точки описанной около треугольника окружности на прямые, содержащие стороны этого треугольника, лежат на одной прямой (*теорема Симсона*).

2.105. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на углы $90°$, после чего они занимают положения A_1D_1 и B_1C_1. Докажите, что $A_1B_1 = C_1D_1$.

2.106. Дано множество всех подобных друг другу треугольников ABC, у которых вершина A фиксирована, а вершина B принадлежит данной прямой. Найдите множество вершин C этих треугольников.

2.107. Найдите множество точек пересечения прямых пучка с центром S со своими образами при заданном подобии первого рода.

2.108. Найдите множество точек пересечения прямых пучка параллельных прямых со своими образами при заданном подобии первого и второго рода.

2.109. Окружность α проходит через вершины A и B треугольника ABC. Найдите множество вершин X треугольников AMX, подобных треугольнику ABC и противоположно ориентированных с ним, если вершина M перемещается по окружности α.

2.110. Даны правильные одинаково ориентированные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках M, N, P соответственно. Докажите, что окружности (MAA_1), (NBB_1), (PCC_1) имеют общую точку.

2.111. Даны два подобных одинаково ориентированных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 разделены точками A,

B, C в одном отношении. Докажите, что треугольник ABC подобен треугольникам $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

2.112. Даны окружность ω и точка M. Найдите множество образов Q точки M при всех поворотах R_P^α плоскости, где $P \in \omega$ и α — фиксированный угол поворота.

2.113. При повороте около центра I вписанной в треугольник ABC окружности этот треугольник отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что углы треугольника $A_2B_2C_2$ с вершинами в точках $A_2 = (BC) \cap (B_1C_1)$, $B_2 = (CA) \cap (C_1A_1)$, $C_2 = (AB) \cap (A_1B_1)$ не зависят от угла поворота.

§22. *Параллельное проектирование плоскости на плоскость*

Зададим две плоскости α и α_1 и не параллельную им прямую l. Каждой точке M плоскости α поставим в соответствие такую точку M_1 плоскости α_1, что прямая MM_1 параллельна l. Этим условием задано взаимно однозначное отображение плоскости α на плоскость α_1, которое называется *параллельным проектированием* плоскости α на плоскость α_1 в направлении прямой l. Прямые и плоскости, параллельные прямой l, называются проектирующими прямыми и проектирующими плоскостями. Рассмотрим свойства этого отображения.

Свойство 1. *Проекция прямой есть прямая.*

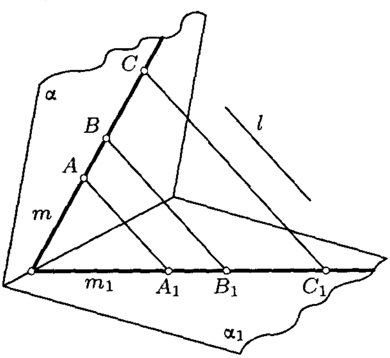


Рис. 111

Действительно, все прямые, проектирующие точки A, B, C, ... прямой m плоскости α, лежат в одной проектирующей плоскости. Прямая m_1 пересечения этой плоскости с плоскостью α_1 является образом (проекцией) прямой m (рис. 111).

Свойство 2. *Проекции параллельных прямых параллельны.*

В самом деле, плоскости, проектирующие заданные параллельные прямые плоскости α, параллельны. Поэтому линии их пересечения с плоскостью α_1 также параллельны.

Свойство 3. *Отношение проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению данных отрезков.*

Рассмотрим сначала случай, когда данные отрезки AB и CD лежат на одной прямой (рис. 112). Проектирующие прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллельны и лежат в одной проектирующей плоскости. По теореме о пропорциональных отрезках имеем: $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$. Пусть теперь данные отрезки AB и MN лежат на параллельных прямых. Построим произвольный параллелограмм $MNDC$, в котором вершины C и D лежат на прямой AB. Согласно свойствам 1 и 2 его проекцией будет параллелограмм $M_1N_1D_1C_1$, вершины C_1 и D_1 которого лежат на прямой A_1B_1. По доказанному выше $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$. Так как $CD = MN$ и $C_1D_1 = M_1N_1$, то $\frac{AB}{MN} = \frac{A_1B_1}{M_1N_1}$.

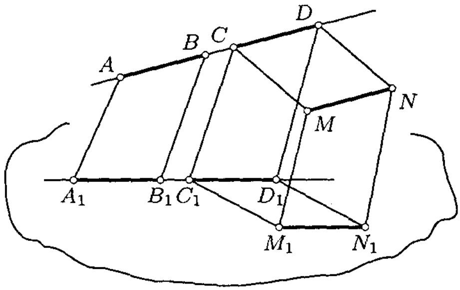


Рис. 112

Свойство 4. *Параллельное проектирование плоскости на плоскость сохраняет отношение площадей фигур.*

Доказательство. Пусть фигура F плоскости α имеет площадь $S(F)$, а ее параллельная проекция F_1 на плоскость α_1 имеет площадь $S(F_1)$. Проведем произвольную плоскость β, перпендикулярную направлению l проектирования. Ортогональные проекции (в направлении l) фигур F и F_1 на плоскость β совпадают. Если S_0 — площадь этой проекции, то по свойству площади ортогональной проекции фигуры

$$S_0 = S(F)\cos\angle(\alpha, \beta) = S(F_1)\cos\angle(\alpha_1, \beta),$$

откуда

$$S(F_1) = S(F)\frac{\cos\angle(\alpha, \beta)}{\cos\angle(\alpha_1, \beta)}.$$

Отношение косинусов не зависит от выбора фигуры F в плоскости α. Для любой фигуры Φ и ее параллельной проекции Φ_1 на плоскость α_1

$$S(\Phi_1) = S(\Phi)\frac{\cos\angle(\alpha, \beta)}{\cos\angle(\alpha_1, \beta)}.$$

Следовательно, $\frac{S(F_1)}{S(\Phi_1)} = \frac{S(F)}{S(\Phi)}$.

§23. *Аффинные отображения*

23.1. Определение и задание аффинного преобразования плоскости. Параллельное проектирование плоскости на плоскость, а также любая композиция таких проектирований называется *аффинным отображением* плоскости на плоскость. В частности, если данная плоскость совпадает со своим образом при аффинном отображении, то оно является аффинным *преобразованием этой плоскости.*

Аффинные отображения плоскости на плоскость обладают свойствами 1—4, доказанными в предыдущем параграфе. Иначе говоря, *аффинные отображения отображают каждую прямую на прямую, сохраняют параллельность прямых, отношение коллинеарных отрезков, отношение площадей фигур.*

Теорема (о задании аффинного преобразования плоскости). *Если A, B, C — три заданные неколлинеарные точки плоскости и A_1, B_1, C_1 — также наперед заданные неколлинеарные точки этой плоскости, то существует единственное аффинное преобразование плоскости, которое отображает A на A_1, B на B_1 и C на C_1.*

Любой треугольник ABC можно отобразить на любой треугольник $A_1B_1C_1$, лежащий в плоскости первого треугольника, композицией не более трех параллельных проектирований плоскости на плоскость (рис. 113). Докажите это сами. Эта композиция и есть требуемое аффинное преобразование данной плоскости. Единственность этого аффинного преобразования вытекает из того, что в силу инвариантности коллинеарности точек и отношения коллинеарных отрезков образ M_1 произвольной точки M строится однозначно при заданных трех парах соответственных точек $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (рис. 114).

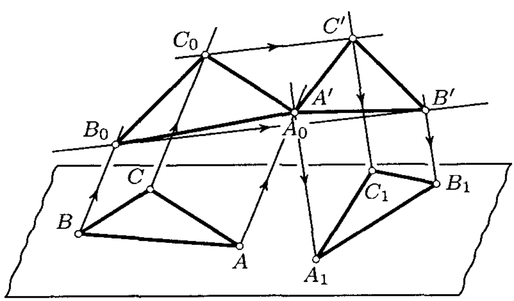


Рис. 113

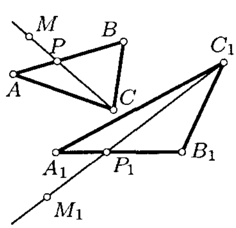


Рис. 114

Пусть $(MC) \cap (AB) = P$. Образом точки P будет точка P_1 прямой A_1B_1

такая, что $A_1P_1 : P_1B_1 = AP : PB$. Образ M_1 точки M строится на основе пропорции $C_1M_1 : M_1P_1 = CM : MP$.

23.2. Частные виды аффинных преобразований плоскости. В условии предыдущей теоремы треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ произвольны. В частности, если они подобны, то задаваемое ими аффинное преобразование есть подобие (п. 18.1).

Пусть эти треугольники имеют общую сторону AB ($A_1 = A$, $B_1 = B$). В силу инвариантности отношения $AM : MB$ для любой точки M прямой AB эта точка совпадает со своим образом: $M_1 = M$ (рис. 115).

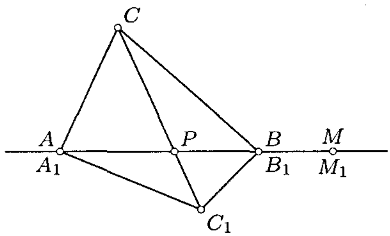


Рис. 115

Аффинное преобразование плоскости, имеющее прямую двойных точек, называется *родственным преобразованием*, или *родством*, а прямая двойных точек называется *осью родства*. В частности, родством является осевая симметрия.

В качестве нетрудных упражнений докажите такие свойства родственного преобразования:

1°. Соответственные при родстве прямые пересекаются на оси родства или ей параллельны.

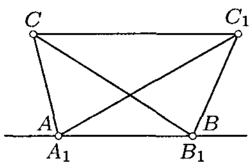


Рис. 116

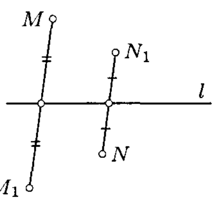


Рис. 117

2°. Каждая прямая, содержащая соответственные при родстве точки, отображается этим родством на себя.

3°. Прямые, каждая из которых содержит соответственные при родстве точки, параллельны. Направление этих прямых называется направлением родства.

Если направление родства совпадает с направлением его оси, то родство называется *сдвигом* (рис. 116). Родство, направление которого не совпадает с направлением его оси, называется *косым сжатием*.

Если при родстве с осью AB точка C переходит в точку C_1 и $(CC_1) \cap (AB) = P$ (рис. 115), то отношение $k = \dfrac{\overline{PC_1}}{\overline{PC}}$ не зависит от выбора точки C (постоянно для данного сжатия) и называется *коэффициентом сжатия*. При $k = -1$ сжатие называется *косой симметрией* (рис. 117).

Родство можно задать осью l и парой соответственных точек $A \to A_1$ (рис. 118). Тогда на основании свойств 1° и 3° легко строится образ X_1 произвольной точки X: $(AX) \cap l = K$, $(XX_1) \parallel (AA_1)$, $(KA_1) \cap (XX_1) = X_1$.

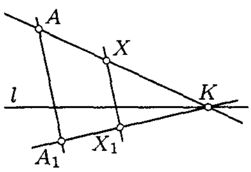


Рис. 118

23.3. Понятие об аффинной геометрии. Основными инвариантами аффинных преобразований являются 1) коллинеарность точек (отображение прямой на прямую), 2) параллельность прямых, 3) *отношение* коллинеарных векторов (отрезков), в частности, отношение $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ трех точек A, B, C прямой, 4) отношение площадей фигур. Из этих инвариантов самым главным является первый: теорию аффинных преобразований можно построить на основе одного его, принимая по определению за аффинные преобразования такие преобразования, которые отображают прямые на прямые. Теорию инвариантов аффинных преобразований называют *аффинной геометрией.*

Поскольку аффинные преобразования не сохраняют длину отрезка и величину угла, то в аффинной геометрии нет этих понятий — нет метрики — и поэтому нет понятий, базирующихся на них. Например, в аффинной геометрии отсутствуют перпендикулярные прямые, окружности, правильные треугольники, прямоугольники и др.

Свойство фигуры называется аффинным (относится к аффинной геометрии), если оно не изменяется при всех аффинных преобразованиях. Фигура называется аффинной, если ее характеристическое (определяющее) свойство является аффинным. Вот примеры. Параллелограмм — фигура аффинная, поскольку его характеристическим свойством служит аффинный инвариант — параллельность прямых. Луч, угол, трапеция, многоугольник — также аффинные фигуры. К аффинной геометрии относятся понятия медианы и средней линии треугольника, так как середина C отрезка AB может быть определена как точка, для которой $\overline{AC}/\overline{CB} = 1$. Поэтому теоремы о средней линии треугольника, о средней линии трапеции, о пересечении медиан треугольника, о точке пересечения диагоналей параллелограмма — аффинные теоремы. К аффинной геометрии относятся теорема Паппа и теорема Менелая, доказанные в § 15.

С движениями связано понятие равных (конгруэнтных) фигур; с подобиями — понятие подобных фигур. Аналогично им в аффинной геометрии определяется понятие аффинно эквивалентных фигур. Две фигуры называются *аффинно эквивалентными,* если существует аффинное преобразование, отображающее одну из них на другую.

Обратимся к примерам. Согласно теореме о задании аффинного преобразования плоскости любые два треугольника аффинно эквивалентны: существует шесть аффинных преобразований, каждое из которых отображает один из них на другой. Поэтому в аффинной геометрии треугольники нельзя классифицировать или хотя бы выделить какие-либо их виды. Правильный треугольник аффинно эквивалентен любому треугольнику. Отсюда следует, что будут аффинно эквивалентны любые два параллелограмма $ABCD$ и $MNPQ$. В самом деле, зададим аффинное преобразование плоскости парами точек $A \to M$, $B \to N$, $C \to P$. Тогда в силу инвариантности параллельности прямых при аффинных преобразованиях $(CD) \to (PQ)$, $(AD) \to (MQ)$ и, значит, $D \to Q$.

Следовательно, в аффинной геометрии из множества параллелограммов нельзя выделить ромбы, прямоугольники, квадраты.

Для произвольных трапеций $ABCD$ и $MNPQ$ (с основаниями AB и MN) дело обстоит иначе. Указанное аффинное преобразование переводит D в Q лишь тогда, когда $AB : CD = MN : PQ$. Это — необходимое и достаточное условие аффинной эквивалентности двух трапеций.

Докажите, что два четырехугольника аффинно эквивалентны лишь тогда, когда точки пересечения их диагоналей делят диагонали в соответственно равных отношениях.

Так как все аффинные инварианты являются также инвариантами движений и подобий, то *аффинная геометрия полностью входит в евклидову геометрию.* Однако аффинную геометрию можно рассматривать и построить независимо от евклидовой геометрии.

§24. *Решение задач с помощью аффинных преобразований*

Метод аффинных преобразований применим лишь к решению аффинных задач, т. е. таких задач, в которых используются аффинные и только аффинные свойства фигур. С помощью аффинных преобразований эти задачи могут решаться или непосредственно, или же путем сведения к другим методам. Сущность второго способа состоит в следующем. Некоторым аффинным преобразованием рассматриваемая фигура Φ отображается на такую фигуру Φ', которая с метрической (евклидовой) точки зрения является более простой, чем данная. Все аффинные свойства полученной фигуры Φ' совпадают с аффинными свойствами ее прообраза Φ. Хотя метрические свойства этих фигур неодинаковы, но это различие не может сказаться на окончательном результате в силу аффинности задачи. Данная задача решается для фигуры Φ' любыми средствами. Полученный результат, являясь аффинным инвариантом, имеет силу и для фигуры Φ.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Задача 1. Доказать, что во всякой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, и середины оснований лежат на одной прямой.

Решение. Задача свободна от метрических понятий и поэтому допускает решение аффинным методом. Рассмотрим равнобочную трапецию, аффинно эквивалентную данной. Прямая, содержащая середины оснований равнобочной трапеции, служит ее осью симметрии и поэтому содержит точку пересечения продолжений боковых сторон.

Можно решить задачу и непосредственно для данной трапеции, применяя косую симметрию относительно прямой, проходящей через середины оснований.

Задача 2. Точки M и N — середины сторон соответственно BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найти отношения, в которых точка P пересечения отрезков AM и BN делит эти отрезки.

Решение. Задача аффинная. Искомые отношения не зависят от вида параллелограмма. Данный параллелограмм $ABCD$ аффинно эквивалентен любому квадрату $A_1B_1C_1D_1$, при этом середины M_1 и N_1 сторон B_1C_1 и C_1D_1 квадрата являются образами точек M и N при аффинном преобразовании, отображающем параллелограмм $ABCD$ на этот квадрат. Поэтому оно отображает точку P на точку P_1 пересечения отрезков A_1M_1 и B_1N_1. По свойству аффинного преобразования $\frac{\overline{AP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1M_1}}$ и $\frac{\overline{BP}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{B_1P_1}}{\overline{P_1N_1}}$. Для квадрата $A_1B_1C_1D_1$ данная задача упрощается, так как $A_1M_1 \perp B_1N_1$ (примените поворот около центра квадрата на 90°). Положим $A_1B_1 = 2$. Тогда из прямоугольного треугольника $A_1B_1M_1$ имеем: $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1M_1}} = \frac{2^2}{1^2} = 4$. Если Q_1 — ортогональная проекция точки C_1 на (B_1N_1), то по доказанному $B_1Q_1 : Q_1N_1 = 4$. Поскольку P_1 — середина B_1Q_1, то $B_1P_1 : P_1N_1 = 2:3$. Итак, $AP : PM = 4$ и $BP : PN = \frac{2}{3}$.

Задача 3. Стороны BC, CA, AB треугольника ABC разделены соответственно точками A_1, B_1, C_1 в отношении $1:3$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Решение. Аффинный характер задачи не вызывает сомнений. Треугольник ABC аффинно эквивалентен правильному треугольнику. Решим задачу для правильного треугольника, обозначая его снова через ABC (рис. 119). Если $(AA_1) \cap (BB_1) = C_0$, $(BB_1) \cap (CC_1) = A_0$,

$(AA_1)\cap(CC_1)=B_0$, то треугольник $A_0B_0C_0$ правильный, в чем убеждаемся поворотом около центра треугольника ABC на $120°$. Замечаем, что $S(A_0B_0C_0)=S(ABC)-3S(ABA_1)+3S(A_1BC_0)$. Поскольку $S(ABC)=3S(ABA_1)$, то $S(A_0B_0C_0)=3S(A_1BC_0)$. Отсюда $\dfrac{S(ABC)}{S(A_0B_0C_0)}=$ $=\dfrac{S(ABA_1)}{S(A_1BC_0)}$. Треугольники ABA_1 и A_1BC_0 подобны. Положим $AB=1$. Пользуясь теоремой косинусов, из треугольника ABA_1 находим $AA_1^2=7/9$. Значит,

$$\frac{S(ABC)}{S(A_0B_0C_0)}=\frac{S(ABA_1)}{S(A_1BC_0)}=\frac{AA_1^2}{BA_1^2}=7.$$

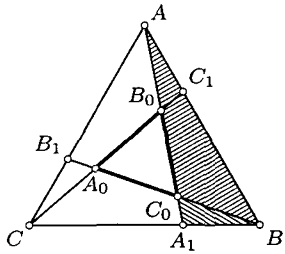


Рис. 119

Задача 4. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Доказать, что совпадают центроиды треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Решение. Зададим аффинное преобразование φ плоскости парами точек $A\to B$, $B\to C$, $C\to A$. Этим преобразованием каждая медиана треугольника ABC отображается последовательно на другую его медиану. Поэтому центроид G треугольника ABC неподвижен при φ. Других неподвижных точек преобразование φ иметь не может, так как иначе оно было бы родством, но прямые AB, BC, CA не параллельны. В силу равенства отношений, в которых точки A_1, B_1, C_1 делят отрезки BC, CA, AB, точки A_1, B_1, C_1 отображаются соответственно на точки B_1, C_1, A_1. Так как треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на себя, то неподвижен его центроид, который поэтому должен совпадать с точкой G. Треугольник $A_0B_0C_0$ с вершинами в точках $A_0=(BB_1)\cap(CC_1)$, $B_0=(CC_1)\cap(AA_1)$, $C_0=(AA_1)\cap(BB_1)$ также отображается на себя: $\varphi(A_0)=B_0$, $\varphi(B_0)=C_0$, $\varphi(C_0)=A_0$. Поэтому его центроид неподвижен и, значит, совпадает с точкой G.

Задачи

2.114. На данной прямой постройте пару соответственных точек при заданном аффинном преобразовании плоскости.

2.115. Через данную точку проведите две прямые, соответственные при заданном аффинном преобразовании.

2.116. Докажите, что всякое аффинное преобразование плоскости, отличное от подобия, есть композиция родства и подобия.

2.117. Если аффинное преобразование отображает каждую окружность на окружность, то оно является подобием. Докажите.

2.118. Докажите, что два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в соответственно равных отношениях.

2.119. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках M и P. Докажите, что точка пересечения прямых MC и AP лежит на медиане треугольника ABC.

2.120. Через точку S пересечения диагоналей трапеции проведена прямая параллельно ее основаниям. Докажите, что отрезок этой прямой, отсекаемый боковыми сторонами трапеции, делится точкой S пополам.

2.121. В параллелограмме $ABCD$ точки P и K делят соответственно стороны BC и CD в отношении $2:1$, считая от вершин B и C. Найдите отношения, в которых делятся отрезки PD и AK точкой их пересечения.

2.122. На стороне AC треугольника ABC взяты точки L и K так, что $AL = KC$ и через них проведены прямые l и k параллельно соответственно AB и BC. Докажите, что прямая, содержащая вершину B и точку пересечения прямых l и k, содержит медиану треугольника ABC.

2.123. Точка M — середина основания AB трапеции $ABCD$. Через точку P пересечения прямых DM и AC проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает диагональ BD в точке K. Докажите, что точки P и K делят отрезок прямой PK, отсекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.

2.124. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Каждая точка деления соединена с противоположной вершиной треугольника. Докажите, что в образованном этими прямыми шестиугольнике диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2.125. Точка G — центроид треугольника ABC. Докажите, что треугольники GAB, GBC, GCA равновелики.

2.126. В параллелограмме $ABCD$ прямая, параллельная AB, пересекает сторону BC и диагональ AC соответственно в точках N и K. Докажите, что треугольники ADK и ABN равновелики.

2.127. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 — параллелограмм и найдите отношение его площади к площади данного параллелограмма.

2.128. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены симметричные им точки M_1, N_1, P_1 относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

2.129. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC даны точки M, N, P. На сторонах CA, AB, BC построены соответственно точки M_1, N_1, P_1 так, что $(MM_1) \parallel (BC)$, $(NN_1) \parallel (CA)$, $(PP_1) \parallel (AB)$. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

2.130. Аффинным образом окружности является эллипс. Докажите, что середины всех параллельных хорд эллипса принадлежат его диаметру.

2.131. Используя аффинную эквивалентность окружности и эллипса, докажите, что площадь области плоскости, ограниченной эллипсом с полуосями a и b, равна πab.

2.132. Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC, AD соответственно в точках P, Q, R. Докажите, что

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}.$$

2.133. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые l, m, n параллельно сторонам AB, BC, CA соответственно. Если $l \cap (BC) = A_1$, $m \cap (AC) = B_1$, $n \cap (AB) = C_1$, то

$$\frac{PA_1}{AB} + \frac{PB_1}{BC} + \frac{PC_1}{CA} = 1.$$

Докажите.

2.134. Дан треугольник с площадью S. Из его медиан построен другой треугольник, затем из медиан полученного треугольника построен третий треугольник и т. д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех треугольников этой последовательности.

Глава III

Инверсия

§ 25. *Инверсия плоскости относительно окружности*

25.1. Определение инверсии. Построение образа точки при инверсии. Зададим в плоскости окружность ω с центром O радиуса R. *Инверсией* плоскости относительно окружности ω называется такое преобразование этой плоскости, при котором каждая точка M, отличная от точки O, отображается на точку M', лежащую на луче OM и удовлетворяющую условию

$$OM \cdot OM' = R^2. \tag{25.1}$$

Окружность ω называется *окружностью инверсии*, ее центр O — *центром инверсии*, а радиус R — *радиусом инверсии.*

Имеется простой способ построения образа M' данной точки M при инверсии. Если точка M лежит вне окружности инверсии, то проведем через нее касательную MT к окружности ω и перпендикуляр из точки T касания на прямую OM (рис. 120). Основание M' этого перпендикуляра и является образом точки M при инверсии относительно окружности ω. Из подобия треугольников OMT и $OM'T$ имеем: $OM : OT = OT : OM'$, откуда $OM \cdot OM' = OT^2 = R^2$.

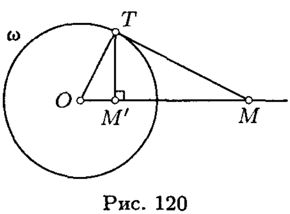


Рис. 120

В определении инверсии точки M и M' равноправны. Поэтому, если $M \to M'$, то $M' \to M$, т. е. *преобразование, обратное данной инверсии, совпадает с той же инверсией.* Следовательно, инверсия — преобразование инволюционное (инволюция). По этой причине образ M точки M' строится в обратном порядке.

Если $M \in \omega$, то $OM \cdot OM = R^2$ и поэтому точка M отображается на себя. Значит, и вся окружность ω инверсии отображается на себя (является множеством неподвижных точек). Других неподвижных точек инверсия не имеет.

Центр O инверсии не имеет образа, так как для него равенство (25.1) выполняться не может. Поэтому точку O считают удаленной из плоскости, а плоскость называют проколотой в точке O.

Из равенства (25.1) следует, что при $OM < R$ будет $OM' > R$ и наоборот. Поэтому внутренняя область круга инверсии отображается этой инверсией на его внешнюю область и обратно.

Другой способ построения образа данной точки при инверсии изложен в условии задачи 3.01. Он графически более точный по сравнению с изложенным выше.

25.2. Координатные формулы инверсии. Зададим прямоугольную декартову систему координат с началом в центре O инверсии. Если $M(x, y) \to M'(x', y')$, то $\overline{OM'} = \lambda \overline{OM}$ при $\lambda > 0$. Равенство $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$ эквивалентно равенству $\lambda \overline{OM}^2 = R^2$, откуда $\lambda = \dfrac{R^2}{\overline{OM}^2}$. Значит,

$$\overline{OM'} = \frac{R^2}{\overline{OM}^2}\,\overline{OM}. \tag{25.2}$$

Это — *векторная формула инверсии*. Она эквивалентна двум координатным

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{25.3}$$

Мы получили искомые координатные формулы инверсии. Так как $M' \to M$ при этой инверсии, то

$$x = \frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{25.4}$$

Как видим, эти формулы нелинейные. Поэтому образом произвольной прямой $Ax + By + C = 0$ при $C \neq 0$ не будет прямая линия, т. е. инверсия не является аффинным преобразованием.

25.3. Образы прямых и окружностей при инверсии. Согласно определению инверсии, каждый луч с началом в центре O инверсии отображается этой инверсией на себя. Поэтому *прямая, проходящая через центр O инверсии (без точки O), отображается на себя.*

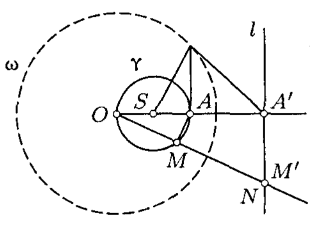


Рис. 121

Очевидно также, что окружность радиуса OM, концентричная окружности ω инверсии, переходит в концентричную ей окружность радиуса OM'.

Найдем образ окружности γ, содержащей центр инверсии (рис. 121). Построим образ A' конца A диаметра OA окружности γ и через A' проведем прямую l перпендикулярно OA. Пусть M — произвольная точка окружности γ ($M \neq O$) и прямая OM пересекает l в точке N. Из подобия прямоугольных треугольников OAM и $OA'N$ имеем: $OA:OM = ON:OA'$, откуда $OM \cdot ON = OA \cdot OA' = R^2$. Следовательно, точка N есть образ точки M и обратно. Это значит, что окружность γ и прямая l соответствуют друг другу при инверсии относительно окружности ω.

Итак, *образом окружности, содержащей центр инверсии, является прямая, перпендикулярная линии центров этой окружности и окружности инверсии. Образом прямой, не содержащей центр инверсии, является окружность, проходящая через центр инверсии. Ее диаметром является отрезок OA, где A — образ основания перпендикуляра, опущенного из центра инверсии на данную прямую.*

Пусть теперь данная окружность γ не проходит через центр инверсии (рис. 122). Возьмем ее диаметр AB, принадлежащий линии центров окружностей ω и γ. Если M' — образ произвольной точки $M \in \gamma$ и A', B' — образы точек A, B, то $OM \cdot OM' = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$ (R — радиус окружности ω). Тогда $\frac{OM}{OA} = \frac{OA'}{OM'}$ и $\frac{OM}{OB} = \frac{OB'}{OM'}$. Следовательно, $\triangle OMA \sim \triangle OM'A'$ и $\triangle OMB \sim \triangle OM'B'$, откуда $\angle OMA = \angle OA'M'$ и $\angle OMB = \angle OB'M'$, и поэтому $\angle BMM' = \angle M'B'A'$. Так как сумма трех углов при вершине M равна сумме углов треугольника $A'B'M'$ и угол AMB прямой (опирается на диаметр AB), то угол $A'M'B'$ также прямой. Отсюда следует, что если точка M пробегает окружность γ, то ее образ M' пробегает окружность γ', построенную на отрезке $A'B'$ как на диаметре.

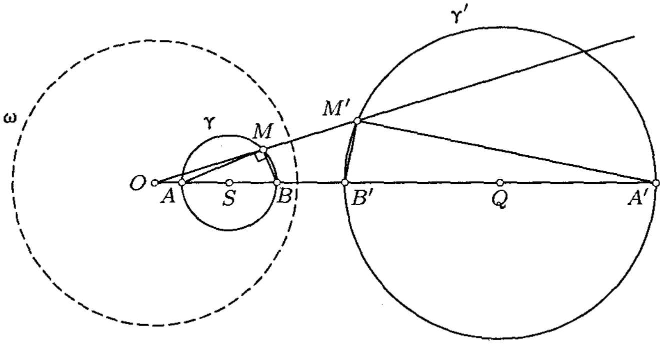


Рис. 122

Итак, *образом окружности γ, не содержащей центр инверсии, является окружность γ', также не содержащая центр инверсии.* Центры окружностей ω, γ, γ' коллинеарны.

Заметим, что центры S и Q окружностей γ и γ' не соответствуют друг другу при этой инверсии.

§ 26. Инвариантные окружности инверсии

26.1. Ортогональные окружности. Углом между двумя кривыми (в частности, между двумя окружностями) называется угол между касательными к этим кривым в их общей точке. Две пересекающиеся окружности называются ортогональными (друг другу), если касательные к ним в точке пересечения перпендикулярны (рис. 123). Согласно свойству касательной к окружности центр каждой из двух ортогональных окружностей лежит на касательной к другой окружности в точке их пересечения.

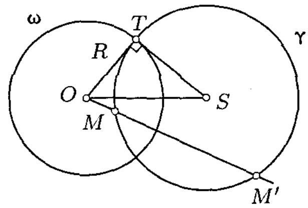


Рис. 123

Теорема. *Окружность γ, ортогональная к окружности инверсии, отображается этой инверсией на себя (инвариантна при инверсии).*

Если M — произвольная точка окружности γ и прямая OM пересекает окружность γ вторично в точке M', то по свойству секущих $OM \cdot OM' = OT^2 = R^2$, т. е. точки M и M' взаимно инверсны относительно окружности ω (рис. 123). Следовательно, окружность γ отображается на себя.

Теорема (обратная). *Если окружность γ, отличная от окружности инверсии, отображается инверсией на себя, то она ортогональна окружности инверсии.*

Доказательство. Соответственные точки M и M' окружности γ лежат на одном луче с началом O, причем одна из них вне, другая — внутри окружности ω инверсии (рис. 123). Поэтому окружность γ пересекает окружность ω. Пусть T — одна из точек их пересечения. Докажем, что OT — касательная к окружности γ. Если бы прямая OT пересекала γ еще в другой точке T_1, то по свойству секущих $OT \cdot OT_1 = R^2$. Но $OT = R$ и поэтому $OT_1 = R$, т. е. точки T и T_1 совпадают, прямая OT касается γ в точке T, окружности ω и γ ортогональны.

26.2. Инверсия как симметрия относительно окружности. Инверсия относительно окружности имеет хорошую аналогию с осевой симметрией.

Теорема. *Окружность, содержащая две инверсные точки, инвариантна при данной инверсии (следовательно, ортогональна окружности инверсии).*

Доказательство. Если окружность γ содержит точки A и A', соответственные при инверсии относительно окружности ω, то центр O инверсии лежит вне отрезка AA', т. е. вне окружности γ (рис. 124). Пусть M — произвольная точка окружности γ и прямая OM пересекает γ вто-

17 – 5545

рично в точке M'. Тогда по свойству секущих $OM \cdot OM' = OA \cdot OA' = R^2$. Поэтому точки M и M' взаимно инверсны, и окружность γ отображается инверсией на себя.

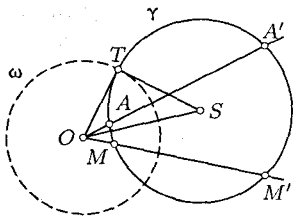


Рис. 124

Следствие. *Если две пересекающиеся окружности ортогональны к окружности инверсии, то точки их пересечения взаимно инверсны.*

Действительно, если A — одна из точек пересечения окружностей α и β, каждая из которых ортогональна к окружности ω инверсии, то прямая OA пересекает как окружность α, так и окружность β в образе A' точки A (рис. 125).

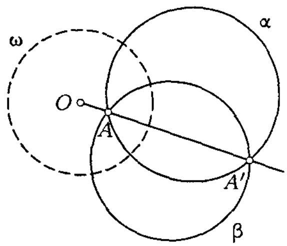


Рис. 125

Иначе говоря, *образом точки A, не лежащей на окружности инверсии, служит вторая точка пересечения любых двух окружностей, проходящих через точку A и ортогональных к окружности инверсии.*

Это свойство может быть положено в основу определения инверсии.

Возьмем теперь вместо окружности ω прямую ω как предельный случай окружности (окружность бесконечно большого радиуса). Центры окружностей α и β, ортогональных прямой ω, лежат на этой прямой. Предыдущее свойство инверсии (второе ее определение) приводит к тому, что точки A и A' пересечения окружностей α и β симметричны относительно прямой ω (рис. 126).

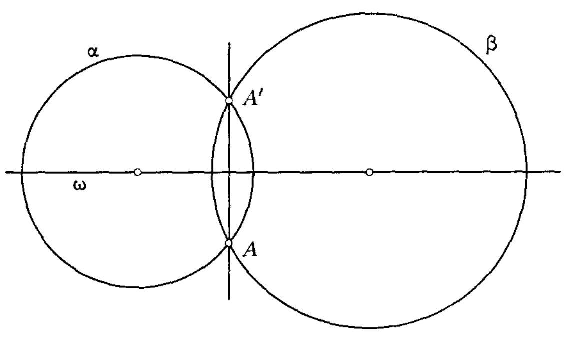


Рис. 126

§27. *Свойства углов и расстояний*

27.1. Сохранение величин углов при инверсии. Инверсия обладает замечательным свойством: она сохраняет величину угла между линиями. *Угол между двумя линиями равен углу между их образами при инверсии.* Это свойство называется *свойством конформности* инверсии.

Так как угол между двумя кривыми по определению равен углу между касательными прямыми к этим кривым в их общей точке, то достаточно доказать сформулированное свойство конформности для двух прямых и их образов при инверсии. Если обе данные прямые проходят через центр инверсии, то доказывать нечего. Если одна из данных прямых a и b содержит центр O инверсии, а другая его не содержит, то первая отображается на себя, а вторая — на окружность, проходящую через точку O (рис. 127). Касательная к окружности в точке O параллельна прообразу окружности, откуда и следует равенство углов $\angle(a, b) = \angle(a', b')$. Когда центр O инверсии не принадлежит ни одной из данных прямых a и b, то их образами будут две окружности a' и b', пересекающиеся в центре O инверсии и некоторой точке P' — образе точки P пересечения данных прямых a и b. Углы между окружностями a' и b' в точках O и P' равны. Поэтому можно рассматривать угол между касательными a' и b' в точке O. А эти касательные параллельны соответственно данным прямым a и b (рис. 128).

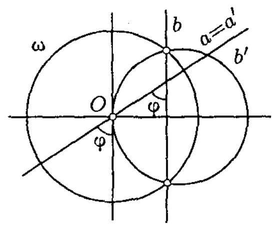


Рис. 127

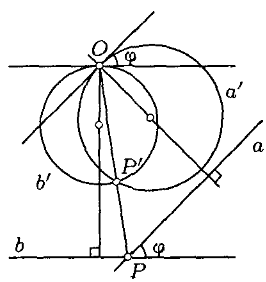


Рис. 128

В частности, если две данные прямые, две окружности, прямая и окружность ортогональны, то их образы при инверсии также ортогональны. Если две данные окружности касаются, то их образами будут или две касающиеся окружности, или касающиеся окружность и прямая, или две параллельные прямые.

27.2. Изменение расстояний при инверсии. Если при инверсии с центром O и радиусом R точки A и B отображаются соответственно на точки A' и B', то $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, откуда $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$. Поэтому когда точки O, A, B неколлинеарны, треугольники OAB и $OA'B'$ подобны. Их подобие дает: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}$, или $A'B' = AB\frac{OA'}{OB}$. Но $OA' = \frac{R^2}{OA}$

и поэтому

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

Эта зависимость остается в силе и в случае, когда точки O, A, B коллинеарны. Проверьте это сами.

§ 28. *Инверсия и гомотетия*

Пусть окружности α и α' инверсны относительно окружности ω. С другой стороны, любые две неравные окружности являются соответственными при двух гомотетиях (п. 13.2). Оказывается, что центр инверсии совпадает с одним из центров этих гомотетий.

Теорема. *Если две окружности инверсны при инверсии с центром O, то они гомотетичны относительно той же точки O.*

Доказательство. Пусть инверсия с центром O отображает окружность α на окружность α' (рис. 129), причем точки M и N окружности α отображаются на точки M' и N' окружности α'. Пусть A и A', B и B' — инверсные точки диаметров этих окружностей. Из подобия треугольников MAO и $M'A'O$ следует равенство углов MAO и $A'M'O$. Так как $\angle A'M'O + \angle N'B'A' = \angle MAO + \angle MAA' = 180°$, то $\angle N'B'A' = \angle MAA'$ и поэтому прямые AM и $B'N'$ параллельны. По аналогичной причине $BM \parallel A'N'$. Следовательно, треугольники AMB и $B'N'A'$ гомотетичны относительно точки O ($A \to B'$, $B \to A'$, $M \to N'$). Значит, гомотетичны и описанные около них окружности α и α'.

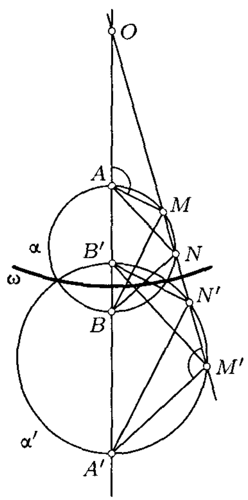


Рис. 129

Однако центр гомотетии двух окружностей не всегда служит и центром инверсии, отображающей одну из этих окружностей на другую.

Теорема. *Если две неравные окружности пересекаются, то оба центра их гомотетий являются центрами инверсий, каждая из которых отображает одну из данных окружностей на другую. Если данные окружности не имеют общих точек или касаются, то только один из центров их гомотетий является центром инверсии, при которой одна из этих окружностей отображается на другую.*

Доказательство. Пусть S — центр одной из гомотетий окружностей α и α', при которой $A \to A'$, $B \to B'$ (рис. 130). Тогда $SA' = |k|SA$

и $SB' = |k|SB$, где k — коэффициент этой гомотетии. Отсюда $SA' \cdot SB = SA \cdot SB' = |k|SA \cdot SB$. Для данной окружности α и данной точки S произведение $SA \cdot SB$ отрезков секущей AB не зависит от выбора этой секущей. Именно, если точка S вне окружности α, то это произведение равно квадрату отрезка касательной, проведенной из S к α, если S внутри α, то оно равно квадрату полухорды, проведенной через S перпендикулярно диаметру, содержащему S. Случай $S \in \alpha$ исключается. Положим $|k|SA \cdot SB = R^2$.

Равенства $SA' \cdot SB = R^2$ и $SA \cdot SB' = R^2$ говорят о том, что точки A' и B, A и B' соответственно инверсны относительно окружности с центром S радиуса R, если только точка S не принадлежит отрезкам $A'B$ и AB'. А это требование определения инверсии выполняется для каждого центра гомотетий *двух пересекающихся окружностей* (рис. 130) и только для одного центра гомотетий двух непересекающихся (рис. 131) или двух касающихся окружностей.

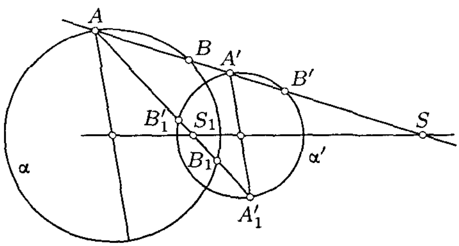


Рис. 130

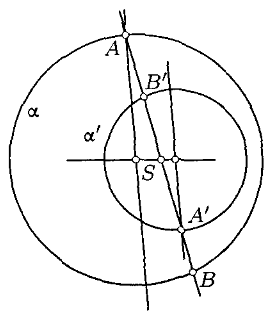


Рис. 131

§ 29. *Применение инверсии к решению задач на построение и доказательство*

Инверсия с эффективностью используется при решении задач на построение и доказательство. В задачах на построение подбирают окружность ω инверсии так, чтобы некоторые из данных или искомых окружностей инверсией относительно ω отобразились на прямые, что упрощает решение задачи. Первоначальная задача переходит в некоторую другую задачу для образов данных и искомых фигур, решение которой этой инверсией переводится на решение данной задачи.

Задача 1. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности α.

Решение. Искомая окружность может существовать, очевидно, лишь тогда, когда данные точки A и B лежат обе либо вне окружности α, либо обе внутри нее. В качестве окружности ω инверсии выберем окружность (B, BA). Тогда данная окружность α переводится инверсией в некоторую окружность α', а искомая окружность x — в прямую x'. Точка A неподвижна. В силу свойства конформности инверсии прямая x' является касательной к окружности α'. Данная задача свелась к задаче: через точку A провести прямую x', касающуюся окружности α'. Выполнив построение этой касательной, отображаем ее заданной инверсией на искомую окружность x. Построение выполнено на рис. 132. Число решений зависит от взаимного расположения точки A и окружности α', т. е. может быть равно 2, 1 или 0. На рис. 132 показаны два решения.

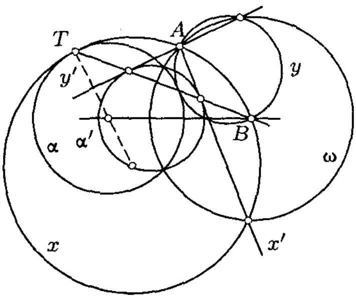


Рис. 132

Задача 2. Каждая из четырех окружностей внешне касается двух других. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности (рис. 133).

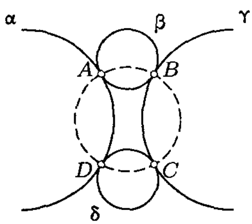


Рис. 133

Решение. Выполним инверсию с центром в точке A касания окружностей α и β. Тогда эти окружности перейдут в пару параллельных прямых α' и β', а окружности γ и δ — в окружности γ' и δ', касающиеся друг друга в точке C' и касающиеся соответственно прямых β' и α' в точках B' и D' (рис. 134). Задача свелась к доказательству того, что точки B', C', D' коллинеарны. Действительно, если это будет доказано, то прообразом прямой, соединяющей точки B', C', D', будет окружность, содержащая прообразы B, C, D этих точек и центр A инверсии. Полученная задача легко решается применением гомотетии с центром C', переводящей δ' в γ'. Эта гомотетия отображает касательную α' к окружности δ' в точке D' в параллельную ей каса-

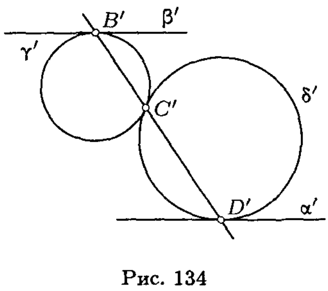


Рис. 134

тельную β' к окружности γ'. Поэтому точки D' и B' касания будут гомотетичны относительно точки C' и, значит, коллинеарны с точкой C'.

Задача 3. Доказать, что во вписанном в окружность четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей (*теорема Птолемея*).

Решение. Выполним инверсию с центром в вершине A вписанного четырехугольника $ABCD$. Описанная около него окружность отображается на прямую, содержащую образы B', C', D' вершин B, C, D, причем C' лежит между B' и D' (рис. 135). Поэтому $B'D' = B'C' + C'D'$. По формуле § 27

$$B'D' = BD\frac{R^2}{AB\cdot AD}, \quad B'C' = BC\frac{R^2}{AB\cdot AC},$$

$$C'D' = CD\frac{R^2}{AC\cdot AD},$$

где R — радиус окружности инверсии. Подстановкой в предыдущее равенство получаем:

$$BD\frac{R^2}{AB\cdot AD} = BC\frac{R^2}{AB\cdot AC} + CD\frac{R^2}{AC\cdot AD}.$$

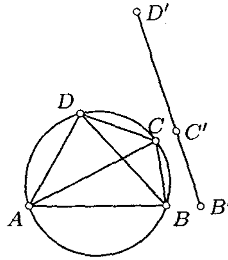


Рис. 135

После умножения обеих частей этого равенства на $\dfrac{AB\cdot AC\cdot AD}{R^2}$ получаем доказываемое соотношение:

$$AC\cdot BD = BC\cdot AD + AB\cdot CD.$$

Задача 4. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, по крайней мере две из которых пересекаются (*задача Аполлония*).

Идея решения. Инверсия с центром в точке пересечения двух из данных окружностей отображает их на две пересекающиеся прямые, а третью окружность — на окружность. Задача свелась к построению окружности, касающейся данной окружности и двух данных непараллельных прямых. Эта задача решается методом гомотетии (задача 6 § 14).

Задачи

3.01. Дана окружность ω с центром O. Произвольная точка M соединена с концом A ее диаметра AB, перпендикулярного OM, а вторая точка P пересечения прямой MA и ω соединена с точкой B. Прямые BP и OM пересекаются в точке M'. Докажите, что точки M и M' инверсны относительно окружности ω.

3.02. Докажите, что отношение расстояний каждой точки окружности до двух инверсных относительно нее точек постоянно.

3.03. В окружность вписан (около окружности описан) правильный треугольник. Постройте его образ при инверсии относительно этой окружности.

3.04. Докажите, что композиция двух инверсий с общим центром есть гомотетия с тем же центром. Найдите коэффициент этой гомотетии.

3.05. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и ортогональную данной окружности.

3.06. Постройте окружность, проходящую через данную точку и ортогональную двум данным окружностям.

3.07. Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку.

3.08. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в заданной точке.

3.09. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной окружности α и данной прямой m.

3.10. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

3.11. Через данную точку проведите окружность, ортогональную данной окружности и касающуюся другой данной окружности.

3.12. Докажите, что через любые две точки, лежащие внутри окружности, можно провести только две касающиеся ее окружности.

3.13. Даны две неравные окружности. Постройте окружность, относительно которой эти окружности инверсны.

3.14. Если две данные неравные окружности пересекаются, то две окружности инверсий, каждая из которых отображает одну из данных окружностей на другую, ортогональны. Докажите.

3.15. Сумма противоположных углов A и C четырехугольника $ABCD$ равна $90°$. Докажите, что $(AB \cdot CD)^2 + (AD \cdot BC)^2 = (AC \cdot BD)^2$.

3.16. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D плоскости имеет место неравенство

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD,$$

причем равенство возможно лишь тогда, когда все точки лежат на одной окружности или прямой и пара точек A, C разделяет пару точек B, D.

3.17. Каждая из четырех окружностей пересекает две другие. Если четыре точки пересечения, взятые по одной из каждой пары точек пересечения двух окружностей, лежат на одной окружности или прямой, то и четыре оставшиеся точки пересечения также лежат на одной окружности или прямой. Докажите.

3.18. Три окружности имеют общую точку O и попарно пересекаются еще в трех точках A, B, C. Докажите, что сумма внутренних углов криволинейного треугольника ABC, образованного дугами этих окружностей, равна $180°$.

3.19. Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, отображающая их либо на две прямые, либо на две концентрические окружности.

3.20. Если инверсия относительно окружности ω отображает окружность α на окружность β, то она переводит любую пару точек, инверсных относительно α, в пару точек, инверсных относительно β. Докажите.

3.21. Докажите, что любые две окружности можно отобразить некоторой инверсией на две равные окружности.

Указания, ответы, решения

Часть I

1.2. Проведите общую касательную к окружностям в точке A. **1.3.** Постройте общую касательную к окружностям в точке S. **1.8.** Докажите равенство углов DAI и DIA.

2.2. Это произведение равно квадрату диаметра окружности. **2.5.** Обратите задачу: возьмите середину указанного отрезка и докажите, что прямая, соединяющая ее с противолежащей вершиной треугольника, является касательной к окружности (п. 2.6). **2.6.** $\sqrt{b(a+b)}$, $\dfrac{ab}{\sqrt{b(a+b)}}$. **2.7.** $\dfrac{abc}{c^2-b^2}$, $\dfrac{ab^2}{c^2-b^2}$. **2.8.** См. упр. 2.1. **2.9.** Это отношение равно отношению отрезков, соединяющих центры окружностей. **2.10.** Проведите через P касательную к окружности ω. **2.12.** Имеются две пары подобных прямоугольных треугольников. **2.13.** Отношение диагонали к стороне равно $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **2.14.** $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **2.15.** Используйте упр. 2.14. **2.16.** Через вершину A проведите прямую, параллельную BC, и рассмотрите точки ее пересечения с прямыми BP и CP. **2.18.** Выразите через основания трапеции отрезок искомой прямой, отсекаемый на ней боковыми сторонами трапеции. **2.19.** $8:5$. **2.20.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **2.21.** $4/5$. **2.22.** Докажите, что из точек O и M отрезок NK виден под равными углами. **2.23.** В таком четырехугольнике произведения противоположных сторон равны.

3.4. $\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. **3.7.** Примените теорему синусов. **3.8.** Используя теорему синусов, выразите косинус меньшего угла между указанной медианой и стороной через длины двух сторон и постройте этот угол. **3.9.** Выразите указанные отношения через синусы углов треугольника ABC или через синусы углов, образованных прямыми AM и AN со сторонами AB и AC. **3.10.** Решение аналогично решению задачи п. 3.1. Это расстояние равно произведению диагоналей четырехугольника, деленному на диаметр описанной окружности. **3.26.** Треугольник прямоугольный. **3.27.** $\dfrac{2R^2\sin^3\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **3.29.** $2r\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $2r\cos\dfrac{\beta}{2}$, $2r\cos\dfrac{\gamma}{2}$. **3.31.** $4\sqrt{2}$.

4.2. Обратите задачу, т. е. докажите, что точки пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, с описанной окружностью симметричны ортоцентру. **4.3.** Используйте предыдущее упражнение. **4.4.** Отрезок, соединяющий второй конец диаметра и точку пересечения высоты с описанной окружностью, параллелен стороне треугольника. **4.5.** $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH} - \overline{OA} = \overline{AH}$. **4.8.** $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$ (п. 4.3). **4.9.** Можно использовать упр. 4.3 и теорему синусов. **4.12.** Примените упр. 4.10 и теоремы синусов и косинусов. **4.17.** Используйте упр. 4.10 и соотношение (3.15). Если угол C треугольника тупой, то $AH + BH - CH = 2(R + r)$. Если $\angle C = 90°$, то соотношение принимает вид: $a + b = 2(R + r)$. **4.18.** См. упр. 4.2 и теорему п. 2.5. **4.19.** Используя подобие треугольников и теорему косинусов, докажите, что $AH \cdot AA_1 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$. **4.21.** Длину искомого отрезка можно подсчитать как сумму длин $\frac{bc}{2p}$ и $\frac{ac}{2p}$ отрезков, на которые он разделяется центром I. **4.22.** Можно использовать лемму п. 4.1. **4.28.** Воспользуйтесь разложением (4.4). **4.29.** Примените теорему косинусов к треугольнику COH, приняв во внимание упр. 4.9 и то, что $\angle OCH = |\angle A - \angle B|$. Без ограничения общности доказательства можно полагать угол C острым. **4.30.** Обратитесь к рис. 34. Из треугольника KCI $CI = \frac{r}{\sin(C/2)}$. Далее воспользуйтесь упр. 3.17. **4.31.** Воспользуйтесь формулой Лейбница (упр. 4.15) и формулами площади треугольника.

5.2. Это упр. лучше выполнять совместно с упр. 5.3, привлекая упр. 1.8. **5.5.** Треугольники BCI и ACI_3 подобны. **5.6.** Аналогия с выводом формулы (4.4). **5.7.** Доказывается аналогично с п. 4.4. **5.12.** Используйте упр. 5.1 и 4.8. **5.13.** I — ортоцентр треугольника $I_1I_2I_3$. **5.14.** Решение можно получить с помощью упр. 5.2 и формулы Эйлера (п. 4.4). **5.15.** Рассмотрите треугольники CI_1Y_1 и CI_2Y_2 (рис. 37) и используйте упр. 5.12. **5.20.** Следует опираться на упр. 5.2 и 5.5.

7.2. Докажите, что около данного четырехугольника можно описать окружность. **7.5.** Докажите, что расстояние между точками касания окружностей с диагональю AC равно нулю. **7.6.** Проведите общие касательные к каждым двум касающимся окружностям в точках их касания. **7.7.** Пусть $(CI) \cap (DE) = M$ и $(BI) \cap (DE) = N$. Из точек B и M отрезок NC виден под равными углами. **7.9.** $\frac{(a + b - c)c}{a + b + c}$. **7.12.** Найдите два выражения отношения площадей треугольников AOB и COD (O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$). **7.13.** Примените критерии п. 7.3. **7.14.** Используйте то, что прямая, соединяющая основания двух высот треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник. **7.15.** Докажите, что точка пересечения диагоналей данного четырехугольника является точкой пересечения биссектрис углов второго четырехугольника. Затем выразите сумму противоположных углов второго четырехугольника через углы данного. **7.16.** Из полученных шести точек можно выделить три четверки точек, лежащих на окружностях. Эти три окружности совпадают. **7.18.** Рассмотрите вписанные четырехугольники, на которые разбивается данный четырехугольник перпендикулярами к сторонам из точки пересечения диагоналей. **7.19.** Если M и N — точки касания сторон AB и CD с вписанной окружностью (I, r), то прямоугольные треугольники AMI и CNI подобны, откуда $AM \cdot NC = IM \cdot IN = r^2$. Аналогично $BM \cdot ND = r^2$. **7.23.** $\dfrac{a^2 + a(n-m)}{a-m}\sqrt{mn}$. **7.24.** Пусть $M = (AD) \cap (BC)$. Треугольники MAB и MCD подобны. Стороны любого из них выражаются через стороны искомого четырехугольника $ABCD$. По этим формулам можно его построить. Задачу можно решить с помощью композиции гомотетии и поворота с центром A, отображающей B на D. Если C_1 — образ точки C при этой композиции, то точки C, D, C_1 коллинеарны.

8.3. Примените теорему Птолемея к четырехугольникам $PABC$ и $PDAB$. **8.4.** Примените теорему Птолемея к четырехугольнику $AB_1C_1D_1$. Докажите и используйте подобие треугольников ACD и $B_1C_1D_1$. **8.5.** Рассмотрите четырехугольник $ACDE$, где E — следующая за D вершина семиугольника. **8.6.** Пусть шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ вписан в окружность. Примените теорему Птолемея к четырехугольникам ACA_1C_1, $A_1BC_1B_1$, AB_1CC_1, AB_1CA_1. **8.7.** Пользуясь теоремой Птолемея, докажите, что отношение $\dfrac{a+b}{c}$ равно отношению основания к боковой стороне равнобедренного треугольника, угол при вершине которого постоянен. **8.9.** Покажите, что вторые точки пересечения окружностей, имеющих диаметры MA, MB, MC, есть основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые AB, BC, CA. **8.10.** Прямая Симсона точки делит пополам отрезок, соединяющий эту точку с ортоцентром, а в равностороннем треугольнике ортоцентр и центр описанной окружности совпадают. **8.11.** Воспользуйтесь рис. 55, сменив обозначения. **8.12.** Используйте упр. 8.11.

9.5. Докажите, что точками B_1 и C_1 соответственно стороны AC и AB делятся в равных отношениях. **9.7.** Докажите равенство углов OAB и HAC. **9.8.** См. решение задачи 1 § 9. **9.11.** Примените теорему Чевы к треугольнику BEF. **9.12.** Аналогия с решением задачи 2 § 9. Рассмотрите треугольник ABC и прямые AA_1, BB_1, CC_1.

10.3. См. п. 9.3. **10.5.** Пусть T — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AB, H_3 — основание высоты, Z_3 — точка касания вневписанной окружности со стороной AB, $L = (CT) \cap (IE)$, где E — середина высоты CH_3. Применяя теорему Менелая к треугольнику CTH_3, докажите, что точки L, E, Z_3 коллинеарны, откуда будет следовать коллинеарность точек I, E, Z_3.

йте формулы (3.12) и (5.2) длин касательных. **10.6.** Примереме Менелая в тригонометрической форме. **10.8.** Примените Паскаля к вписанному «шестиугольнику» (замкнутой ломаной $CC_1A_1B_1B$. **10.9.** Решение аналогично п. 10.5. **10.11.** Примените касательных (§ 10, задача 1). Докажите, что прямые, соедиточки касания противоположных сторон, делят диагональ в тношениях. **10.12.** Используйте предыдущую задачу и теорему **.13.** Примените обратную теорему Дезарга. **10.14.** Воспользуйфигурацией рис. 71.

$l = a\cos A + b\cos\alpha + c\cos D$, α — угол между AD и BC. **11.4.** См. **.5.** Используйте теорему косинусов для четырехугольника, веркоторого являются два указанных центра и середины двух стоого треугольника. Квадрат расстояния между центрами равен $+ c^2 4\sqrt{3}S)$. **11.10.** Используйте формулы (11.5). **11.13.** Можно вать теорему косинусов. **11.14.** Примените соотношение Брета к вырожденному четырехугольнику $ACBD$.

$2S$. **12.4.** Соедините центроид с вершинами четырехугольника трите восемь полученных треугольников. **12.8.** Дважды приемму § 4. **12.9.** В каждом из трех четырехугольников, на котоился данный четырехугольник, проведите по одной диагонали, не имеют общих концов, и рассмотрите образовавшиеся треки. **12.10.** Сначала докажите, что площадь треугольника ABN мме площадей треугольников AMD и MBC. **12.11.** Соединины A и C с серединой F диагонали BD. Четырехугольники $ABCT$, $ADCF$ равновелики. **12.12.** Каждый из этих четырех чеольников равновелик четырехугольнику, вершинами которого я середины диагоналей и две смежные вершины данного четыника. **12.18.** В первом неравенстве равенство имеет место лишь , когда четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаAC. Во втором неравенстве знак равенства будет для вписанырехугольника с перпендикулярными диагоналями. Площадь лого четырехугольника меньше площади выпуклого четырехка с теми же длинами сторон.

Возведите доказываемое неравенство в квадрат. **13.4.** Привнимание, что $r = \dfrac{ab}{a+b+c}$. **13.6.** См. упр. 13.1 и привлеките $\frac{1}{2}(a+b)$. **13.8.** Используйте неравенство упр. 13.2. **13.11.** Пусть центр описанной окружности и центроид остроугольного трека ABC. Для определенности будем считать, что точка O прит треугольнику ABG. Тогда $AO + BO \leqslant AG + BG = \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b$, откуда $m_a + m_b \geqslant 3R$. Осталось доказать, что $m_c \geqslant R$. **13.12.** Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Тогда $AA_1 \leqslant R + OA_1$, $BB_1 \leqslant R + OB_1$, $CC_1 \leqslant R + OC_1$. Докажите, что $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ и $\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1$. **13.17.** Используйте неравенство треугольника и (13.21). **13.19.** Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Далее используйте известное неравенство $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ для положительных чисел x, y. **13.20.** Используйте неравенства (13.10) и (13.22). Равенство достигается только в правильном треугольнике. **13.21.** Неравенство равносильно неравенству упр. 13.22. **13.22.** Для доказательства можно использовать формулу Лейбница (упр. 4.15). **13.23.** Используйте упр. 13.17. **13.24.** Неравенство эквивалентно неравенству упр. 13.25. Примените (13.22). **13.25.** Используйте соотношения (3.18), (5.3), (5.4). **13.26.** $a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A) \geqslant 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$. **13.27.** Представьте площадь треугольника как сумму площадей треугольников, на которые он делится биссектрисой. **13.28.** Привлеките упр. 13.26. **13.29.** Используйте соотношение (3.15). **13.30.** Это неравенство эквивалентно неравенству (13.20). **13.31.** Примените неравенство (13.18) к треугольнику с углами $\frac{\pi - A}{2}$, $\frac{\pi - B}{2}$. **13.32.** Идея решения та же, что и в упр. 13.31. **13.33.** Используйте неравенство (13.22) между средним гармоническим и средним арифметическим трех положительных чисел и неравенство (13.10). **13.37.** Треугольники ABC и ABD вписаны в одну окружность. Пользуясь теоремой синусов, докажите, что $|\angle CAB - \angle CBA| < |\angle DAB - \angle DBA|$. Далее, применяя осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра к AB, докажите, что точка C дальше от AB, чем точка D. **13.39.** Так как $R + r = R(\cos A + \cos B + \cos C)$, то доказываемое неравенство $R + r < c$ (c — наибольшая сторона треугольника) сводится к неравенству $\sin C > \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$. Поскольку $60^\circ \leqslant \angle C \leqslant 90^\circ$, то в силу (13.10) оно истинно. **13.42.** Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$, $90^\circ - \frac{C}{2}$. Поэтому неравенство для площадей этих треугольников сводится к неравенству упр. 13.28. **13.43.** Докажите и используйте неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$. **13.44.** Воспользуйтесь формулой, полученной в упр. 11.5. Доказываемое неравенство сводится к неравенству (13.11).

14.1. Прямоугольный треугольник, в котором $a = b = h\sqrt{2}$. **14.2.** Точка касания стороны угла с окружностью, содержащей точки A и B. **14.4.** Прямоугольный равнобедренный треугольник. $R : r = 1 + \sqrt{2}$. **14.5.** Эта сумма площадей минимальна, когда точка M является точкой пересечения диагоналей. **14.6.** Центроид треугольника. Используйте соотношение Лейбница (упр. 4.15). **14.7.** Центроид треугольника. **14.8.** Центроид треугольника. **14.9.** Используйте то, что

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{MBC}}.$$

Минимум суммы равен 6, минимум произведения равен 8. **14.10.** Когда точка M совпадает с ортоцентром треугольника ABC. См. решение задачи п. 3.1. **14.11.** Если угол A острый, то искомая прямая перпендикулярна медиане AM. Если этот угол тупой, то искомая прямая перпендикулярна BC. В случае, когда угол A прямой, решением служат обе эти прямые. **14.12.** Точка пересечения основания CD с прямой MK, где $K = (AD) \cap (BC)$. **14.13.** См. задачу 3 § 14. Найдите квадрат суммы расстояний.

16.2. Искомая точка принадлежит радикальной оси точки A и другой данной окружности. **16.3.** Центр искомой окружности есть радикальный центр окружностей (A, a), (B, b), (C, c). **16.4.** Центр искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB и радикальной оси данной окружности и одной из данных точек. **16.6.** Постройте радикальный центр P трех окружностей — данной окружности α, искомой окружности x и произвольной окружности ω пучка окружностей, пересекающихся в двух заданных точках. Если O — центр данной окружности α, то из центра искомой окружности отрезок PO виден под прямым углом. **16.9.** Проведите окружность с диаметром AB. Докажите, что эта окружность и любые две из заданных окружностей имеют радикальный центр H — ортоцентр треугольника ABC.

17.1. Решение аналогично решению задачи в конце § 17.

17.2. Искомая окружность принадлежит эллиптическому пучку окружностей с постоянными точками A и B. Постройте радикальный центр данной окружности, искомой окружности и произвольной окружности этого пучка. **17.4.** Если A и B — центры данных окружностей радиусов R и r, то любая точка M указанной окружности обладает свойством $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{R}{r}$ (окружность Аполлония).

1. $\frac{1}{2}|a^2-b^2|\operatorname{tg}\alpha$. **2.** $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$. **3.** 72. **4.** 13. **5.** $\frac{60}{37}$. **6.** $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$. **7.** $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}$. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **9.** $\frac{1}{2}(7+9\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)$. **10.** $5:2$. **11.** $\frac{11}{12}$. **12.** $\frac{ab(a+b)}{2(a-b)}\operatorname{tg}\alpha$. **13.** $8a^2\sin\alpha\cos^3\alpha$. **14.** $\sqrt{p(p-e)(p-f)(p-2m)}$, где $p=\frac{1}{2}(e+f+2m)$. **16.** $\sqrt{\frac{5}{8}}$. **17.** $\sqrt{1-n+n^2}$. **18.** $R:r=3$. **19.** $5:10:13$. **20.** $\frac{b}{4a}\sqrt{a^2+b^2}$. **21.** $\sqrt{2}$. **22.** $3\sqrt{3}$. **23.** Центр описанной окружности находится вне трапеции, $R:r=\frac{3}{5}\sqrt{14}$. **24.** 90°, 60°, 30°. **25.** $\cos ABC=\frac{4}{5}$. **26.** $\frac{80(1+3\sqrt{7})}{1701}$ или $\frac{20+\sqrt{5}}{24\sqrt{5}}$. **31.** $2\sqrt{3}$. См. упр. 4.3. **32.** Проведите $CK \parallel AM$ и докажите, что $\frac{CM}{MB}=\frac{AC^2}{AB^2}$. **34.** $\frac{\sqrt{6}}{8}(21-\sqrt{105})$ или $\frac{\sqrt{6}}{6}(14-\sqrt{70})$. **36.** Площадь четырехугольника CA_1DB_1 равна $\frac{1}{2}A_1B_1\cdot h$, где h — высота треугольника ABC на сторону AB. **37.** Постройте точку $K=(DA)\cap(MB)$ и докажите, что $KM=MB$. **38.** $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$. **39.** В треугольнике ABC $\angle B=2\angle C$, $R=12{,}5$. **42.** Можно применить формулу для квадрата медианы CO треугольника CDI. $OI^2=R^2-2Rr$, $CI^2=r^2-(p-c)^2$. Находим $CD^2=4R^2-ab$. **43.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **44.** $3R^2$. **45.** $\cos C=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **47.** См. соотношение (3.15). **48.** $h\sqrt{\frac{2m}{m+h}}$. **49.** Можно использовать равенство (4.5). **52.** $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=r_3^2$. **54.** $2\sqrt{3}-3$. **55.** $\frac{R^2}{a}$. **56.** $\sqrt{ab}$. **58.** $\sqrt{Rr}$. **59.** $3\sqrt{2}$. **60.** $\sin DEF=\frac{1}{\sqrt{17}}$. **62.** $h\sqrt{5}$. **64.** Радиус каждой окружности равен $\frac{2Rr}{r+R+d}$, где R и r — радиусы данных окружностей, d — расстояние между их центрами. **65.** $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. **66.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. **69.** Если четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ вписаны в одну окружность и их стороны соответственно параллельны, то $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. Возможны два случая: 1) $AC \nparallel A_1C_1$ и тогда $AC=A_1C_1$, 2) $AC \parallel A_1C_1$ и тогда четырехугольники центрально симметричны. **70.** $PQ = |AP-AQ| = \frac{1}{2}|a+c-b-d| = MN$. **71.** Около четырехугольников $ABMQ$ и $ANPD$ можно описать окружности. Из точек C, Q, N отрезок PM виден под прямыми углами. **74.** $\sqrt{2+\sqrt{5}}$. **76.** Дважды выразите

BD^2 по теореме косинусов. **78.** Проведите диагональ пятиугольника и используйте свойство вписанного четырехугольника. **79.** Примените теорему Птолемея к четырехугольнику $A_1A_2A_4A_5$. **80.** См. вывод формулы (12.5). **81.**

$$S = \frac{ad+bc}{4|ad-bc|}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+d-b-c)(b+d-a-c)}.$$

82. Примените формулу (12.5). **83.** Проведите через вершину B прямую, параллельную AC, и рассмотрите треугольники, образованные этой прямой, высотой BD и прямыми AP и CQ. **84.** $2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **85.** $2\cos A\cos B\cos C$. **86.** $2-\sqrt{2}$ или $\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$. **87.** $2\sin A\sin B\times \times\cos(A-B)=1$. Если CC_1 — высота треугольника ABC, то $\angle OCC_1 = =|\angle B-\angle A|$. **96.** Отношение площадей треугольников ABC и CEF равно $\frac{c}{a+b-c}$. Но $a+b\leqslant c\sqrt{2}$. **97.** См. неравенство (13.5). **98.** Доказательство аналогично доказательству неравенства (13.19). Рассмотрите скалярный квадрат вектора $\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3$. **99.** Если хорда длины m удалена от центра O на расстояние h и видна из точки O под углом 2φ, то

$$a+h=R(\sin 2\varphi+\cos 2\varphi)= \\ =R\sqrt{5}\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\varphi+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\varphi\Big)-R\sqrt{5}\sin(\varphi+\alpha)\leqslant R\sqrt{5}.$$

Равенство достигается при $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **100.** $R_1+R_2=\frac{a+b}{8ab}(a^2+b^2+3ab)$, $a^2+b^2\geqslant 2ab$. **101.** Докажите, что $\frac{AA_1}{AA_2}=1-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}$. Далее воспользуйтесь неравенством $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}$. **102.** Пусть $\angle AOB=\varphi$, $\angle COD=\psi$. Тогда $\varphi+\psi=180^\circ$, $AB\geqslant 2r\operatorname{tg}\varphi$, $CD\geqslant 2r\operatorname{tg}\psi$, $\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\psi=1$, $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi\geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=2$. Следовательно, $AB+CD\geqslant 4r$. Равенство выполняется только для квадрата. **105.** Используйте неравенство Чебышева: $n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$, где обе последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ невозрастающие (или неубывающие). **108.** Рассмотрите скалярный квадрат вектора $a\overline{MA}+b\overline{MB}+c\overline{MC}$. Равенство имеет место для центра вписанной окружности. **116.** Докажите сначала, что $2R_1\sin\frac{A}{2}\geqslant x_2+x_3$. Затем используйте упр. 3.21. **117.** $\frac{4a\cos^2\alpha}{1+4\cos^2\alpha}$. **118.** $\frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha$. **119.** $\frac{4}{3}R$. **120.** Площадь четырехугольника наибольшая при $\angle ACB=135^\circ$. Тогда она равна $2(a^2+b^2+ab\sqrt{2})$. **121.** Через центр O данной окружности проведем прямую l параллельно биссектрисе угла. Тогда в одной из

18 – 5545

точек пересечения прямой l с окружностью указанная сумма принимает наибольшее, в другой — наименьшее значения. **124.** Рассмотрите вырожденный описанный четырехугольник AC_1BC (C_1 — середина AB) и примените теорему Ньютона (§ 7, задача 3). **125.** Точка S, в которой пересекаются прямые XY, лежит на прямой, проходящей через A перпендикулярно OA. Докажите, что двойное отношение (§ 2) $\frac{\overline{XS}}{\overline{SY}} : \frac{\overline{XZ}}{\overline{ZY}} = -1$, $Z = (OA) \cap (XY)$. **127.** Расстояние между точками касания стороны AB с вписанной и невписанной окружностями равно $|a - b|$. **133.** Задача сводится к построению треугольника по стороне, противолежащему углу и разности двух сторон. **135.** Пусть C_1 — вторая точка пересечения окружности ω с прямой AC. Точки O, B, C, C_1 лежат на одной окружности. Далее можно сослаться на теорему о радикальном центре трех окружностей (§ 16). **136.** На основании (12.18) $4S \leqslant ab + cd + ad + bc = (a+c)(b+d) \leqslant \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = p^2$.

Часть II

Глава I

1.03. Четырехугольник $ADCH$ — параллелограмм. Если $Z_A(D) = M$ и $Z_C(D) = N$, то прямые AH и CH проходят через середину отрезка MN (теорема Фалеса). Значит, этой серединой является точка H пересечения прямых AH и CH.

1.04. Каждая из построеных прямых симметрична параллельной ей прямой, содержащей сторону данного треугольника, относительно его центроида. Следовательно, полученный треугольник симметричен данному.

1.05. Параллельные касательные к окружности симметричны относительно ее центра O. Поэтому шестиугольник симметричен относительно O. Отсюда следует равенство его противоположных сторон.

1.06. Пусть O — середина отрезка AC. Докажем, что $Z_O(B) = D$. Если $Z_O(B) = B_1$, то $\angle AB_1C = \angle CBA = \angle ADC$. При $B_1 \neq D$ равенство приводит к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника (примените ее дважды).

1.07. Треугольники AOB и COD, BOC и DOA симметричны относительно O соответственно, поэтому симметричны и центры их вписанных окружностей соответственно. Так как, кроме того, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то полученный четырехугольник — ромб.

Он будет квадратом, когда данный параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

1.08. Правильные треугольники, построенные на противоположных сторонах параллелограмма, симметричны относительно его центра. Поэтому симметричны и центры этих треугольников.

1.09. Точка пересечения построенных прямых симметрична точке M относительно центра параллелограмма.

1.10. Четырехугольник с вершинами в точках M, N, $Z_O(M)$, $Z_O(N)$ есть ромб. Указанное расстояние равно половине расстояния между данными параллельными прямыми.

1.11. Докажите, что четырехугольник с вершинами в вершинах данного треугольника и в одной из трех указанных точек вписан в окружность.

1.12. Прямая OM содержит точку пересечения образов сторон угла при симметрии Z_M.

1.13. Постройте прямые, содержащие средние линии параллелограмма.

1.14. Каждая из прямых, содержащих две противоположные стороны квадрата, определяется одной из данных точек и точкой, симметричной данной точке относительно центра O квадрата. Заданный центр позволяет достроить квадрат. Задача имеет единственное решение, если данные точки неколлинеарны с центром. Если они симметричны относительно O, то существует бесконечное множество решений. Решений нет, когда данные точки коллинеарны с центром O, но не симметричны относительно него.

1.15. Постройте окружность, симметричную одной из данных относительно указанной их общей точки.

1.16. Одна из неизвестных вершин параллелограмма является точкой пересечения данной окружности с симметричной ей окружностью относительно середины данного отрезка.

1.18. Начинающий игру кладет первый пятак в центре стола, а все последующие пятаки — симметрично пятакам соперника относительно центра стола.

1.20. Четырехугольник, две противоположные стороны которого служат парой противоположных сторон данного шестиугольника, является параллелограммом. Докажите, что две не принадлежащие ему вершины данного шестиугольника симметричны относительно центра этого параллелограмма.

1.21. Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника есть параллелограмм. Четырехугольник с вершинами в серединах двух противоположных сторон данного четырехугольника и серединах его диагоналей — также параллелограмм. Эти два параллелограмма имеют общую диагональ. Отсюда следует истинность доказываемого утверждения.

1.22. Используем задачу 1.21. Симметрией с центром в точке пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон данного четырехугольника, серединные перпендикуляры к данным шести хордам окружности отображаются на указанные в условии перпендикуляры. Поэтому они пересекаются в образе центра окружности при рассматриваемой симметрии.

1.23. Построим точку $A_1 = Z_P(A)$. Величина φ угла AMB определяется данной окружностью и данной хордой AB. Если $(CD) \cap (MB) = K$, то $(KA_1) \parallel (AM)$ (симметрия) и поэтому $\angle MKA_1 = \varphi$. Искомая точка K принадлежит дуге окружности, стягиваемой известной хордой A_1B и вмещающей угол $\pi - \varphi$. Исследование опускаем.

1.24. Искомая прямая перпендикулярна прямой, проходящей через центр одной из данных окружностей и касающейся окружности радиуса $a/2$ с центром в точке, симметричной центру другой данной окружности относительно рассматриваемой общей точки данных окружностей.

1.25. Точки A, C, M, K лежат на одной окружности ω. Рассмотрите окружности, симметричные окружности ω относительно точек M и K.

1.26. Постройте серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC. Рассмотрите симметрию относительно центра O окружности ABC. Перпендикуляры к сторонам треугольника в точках Q_1, Q_2, Q_3 пересекаются в точке $Q = Z_O(P)$.

1.27. Две другие точки пересечения третьей окружности с двумя данными концентрическими окружностями симметричны соответственно первым двум точкам их пересечения относительно линии центров окружностей.

1.28. Отрезки AB, CD, EF попарно симметричны относительно осей симметрии углов данного треугольника.

1.29. Высоты треугольника принадлежат биссектрисам его углов. Поэтому при каждой из симметрий относительно содержащих их прямых треугольник отображается на себя. Значит, он правильный.

1.30. Высоты треугольника совпадают с его медианами. Каждая из симметрий, оси которых содержат эти отрезки, отображает треугольник на себя.

1.31. Эта точка симметрична точке M относительно линии центров данных окружностей.

1.32. Докажите, что четырехугольник с вершинами в вершинах данного треугольника и в одной из рассматриваемых точек вписан в окружность.

1.33. Из задачи 1.32 следует, что три указанные окружности симметричны описанной около треугольника ABC окружности относительно прямых, содержащих стороны треугольника.

1.36. Через данную точку проведите перпендикуляр к содержащей ее стороне угла и постройте прямую, симметричную прямой, содержащей другую сторону угла, относительно этого перпендикуляра. Можно также начать с построения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно другой стороне угла.

1.37. Если данные прямые пересекаются, то через данную точку необходимо провести две прямые, перпендикулярные осям симметрии данных прямых. Если данные прямые параллельны, то любая прямая, проходящая через данную точку и не параллельная данным прямым, удовлетворяет требованию задачи.

1.38. Если прямая m не содержит точку $a \cap b$, то искомая прямая проходит через точку $a \cap b_1$, где $b_1 = S_m(b)$. В этом случае решение единственно. Когда прямая m является осью симметрии прямых a и b, любая прямая, ей перпендикулярная, удовлетворяет требованию задачи. В остальных случаях решений нет.

1.39. Одна из неизвестных вершин квадрата является точкой пересечения данной окружности α и образа β_1 другой данной окружности β при симметрии относительно данной прямой. Число решений совпадает с числом общих точек окружностей α и β_1, т. е. может быть равно 2, 1, 0.

1.40. $P = a \cap (M_1N)$, где $M_1 = S_A(M)$.

1.41. Если $B_1 = S_{AC}(B)$, то треугольник B_1CD строится по трем сторонам. Затем находятся последовательно точки A и B.

1.42. Если в искомом треугольнике ABC известны стороны AC и BC, то симметрией относительно серединного перпендикуляра h к отрезку AB отобразим треугольник ABC на треугольник ABC_1. Тогда треугольник ACC_1 строится по двум известным сторонам и углу CAC_1, величина которого равна разности углов A и B. Прямая h строится как серединный перпендикуляр к CC_1, а $B = S_h(A)$.

1.43. Пусть в искомом треугольнике ABC дана сторона AB и прямая l содержит биссектрису угла C. Если $A_1 = S_l(A)$, то треугольник AA_1B строится по заданным элементам, а с помощью него строится искомый треугольник.

1.44. Постройте точку C_1, симметричную точке C относительно прямой AB. Треугольник C_1MD прямоугольный. Его гипотенуза C_1D не зависит от выбора точки M.

1.45. Если AB и CD — данные параллельные неравные хорды, то их середины лежат на прямой, проходящей через точки $S = (AC) \cap (BD)$ и $O = (AD) \cap (BC)$.

1.46. Проведите две концентрические окружности с центром в точке пересечения данных прямых. Точки пересечения диагоналей равнобочных трапеций, полученных при пересечении окружностей с прямыми, лежат на искомых осях симметрии.

1.47. С помощью двух окружностей постройте точку, симметричную данной точке относительно данной прямой (рис. 11), а затем точку, диаметрально противоположную полученной.

1.48. Существуют две точки, удовлетворяющие требованиям задачи. Они являются точками пересечения прямой m с касательными, проведенными через точку M к окружности α_1, симметричной α относительно m.

1.49. Если l и t — касательные к данной окружности α (радиуса r), проведенные через искомую точку $X \in m$, и l — ось симметрии прямых t и m, то окружность $\alpha_1 = S_l(\alpha)$ касается α и m. Центр окружности α_1 лежит на окружности β радиуса $2r$, концентричной α, и на прямой, параллельной прямой m и удаленной от нее на расстояние r. Следовательно, искомая точка X является точкой пересечения прямой m и общей касательной l окружностей α и α_1 в их общей точке. Число решений равно 4, 2, 0.

1.50. В точке пересечения прямой BC с перпендикуляром из точки $P_1 = S_{BC}(P)$ на прямую AB.

1.51. По данным серединам двух сторон треугольника с использованием оси симметрии его угла строятся стороны этого угла. Далее используйте центральную симметрию относительно данной середины стороны треугольника.

1.52. Пусть в треугольнике ABC известны AB, $|\angle A - \angle B| = \alpha$, высота h к стороне AB. Проведем через C прямую l параллельно AB. Если $B_1 = S_l(B)$, то $\angle ACB_1 = 180° - \alpha$ (докажите). Построение можно выполнить в следующем порядке: AB, l, AB_1, точка C строится как точка пересечения прямой l и дуги окружности, стягиваемой хордой AB_1 и вмещающей угол $180° - \alpha$. Существуют две такие дуги. Полученные соответственно им треугольники ABC и ABC_1 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB.

1.53. Пусть O — центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности. Эта окружность касается прямых AD и DC и образа прямой BC при симметрии относительно OA. Эти три касательные строятся по заданным условиям. Затем строится вписанная окружность и искомый четырехугольник.

1.54. Пусть $P_1 = S_{OC}(P)$. Отрезок P_1Q виден из точки C под углом P_1CQ, величина которого выражается через величину данного угла.

1.56. Пусть AB и BN — равные медианы треугольника ABC и $T_{\overline{NM}}(A) = A_1$, $T_{\overline{NM}}(B) = B_1$. Тогда треугольник AMB_1 равнобедренный и $AA_1 = A_1B = BB_1$. Поэтому ось симметрии треугольника AMB_1 является и осью симметрии треугольника A_1MB, откуда следует $A_1M = MB$ и затем $AC = CB$.

1.58. *Постройте образ точки M при переносе на вектор $\overline{BA}$.*

1.59. Указанная разность расстояний равна высоте треугольника ABC, опущенной на боковую сторону.

1.60. $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2d^2 - (a-b)^2}$, где a и b — длины оснований трапеции, c и d — длины ее боковых сторон.

1.61. Пусть KC — диаметр окружности, содержащей точку B. Тогда $(BC) \parallel (AK)$ и $T_{\overline{KC}}(A) = B$. Поэтому $AB = KC = 2r$.

1.62. Перенос $T_{\overline{AC}}$ отображает одну окружность на другую, которой поэтому принадлежит точка $P_1 = T_{\overline{AC}}(P)$. Следовательно, $\angle APC = \angle PCP_1$. Вписанный угол PCP_1 опирается на *постоянную* дугу PP_1.

1.63. Площадь четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей и синуса угла между ними. Но $A_1C_1 = AC$, $B_1D_1 = BD$ и $(A_1C_1) \parallel (AC)$, $(B_1D_1) \parallel (BD)$. Отсюда следует равновеликость четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

1.64. Окружности ABC и ABH равны (задача 1.33). Прямая CH параллельна их линии центров. Перенос $T_{\overline{CH}}$ отображает окружность ABC на окружность ABH. Доказываемое утверждение эквивалентно утверждению задачи 2 п. 4.2.

1.65. Постройте образ прямой OM при переносе $T_{\overline{MN}}$, где N — произвольная точка другой стороны данного угла, отличная от точки O.

1.66. Если $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD и $T_{\overline{DC}}(A) = A_1$, то треугольник A_1BC строится по трем сторонам. Его нетрудно достроить до трапеции.

1.67. См. указание к задаче 1.66.

1.69. Если $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD и $T_{\overline{DC}}(B) = B_1$, то треугольник AB_1C строится по трем сторонам. Построение точки D очевидно.

1.70. Один из концов искомого отрезка является точкой пересечения одной из данных окружностей с образом другой окружности при переносе параллельно данной прямой на заданную длину.

1.71. Пусть A и B — центры данных окружностей α и β и m — данная прямая. Если A_1 и B_1 — ортогональные проекции точек A и B на m, то искомая прямая должна содержать общую хорду окружностей β и $\alpha_1 = T_{\overline{A_1B_1}}(\alpha)$.

1.72. Сначала постройте правильный треугольник, две вершины которого лежат на заданных параллельных прямых, а содержащая их сторона равна данному отрезку. Потом переносом отобразите его на искомый треугольник. Если данная длина a стороны треугольника больше расстояния h между данными параллельными прямыми, то имеется четыре решения, при $a = h$ — два решения, а при $a < h$ решений нет.

1.73. Перенесите данную прямую в перпендикулярном ей направлении на заданный радиус искомой окружности и постройте окружность, концентричную данной, радиус которой равен сумме радиусов данной и искомой окружностей.

1.74. Пусть a, b, c, d — прямые, которым принадлежат стороны данного четырехугольника, и $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$. Так как $T_{\overline{AB}}(D) = C$, то $C = c \cap d_1$, где $d_1 = T_{\overline{AB}}(d)$.

1.75. Если медианы искомого треугольника ABC пересекаются в точке M и $T_{\overline{AM}}(M) = N$, то треугольник MNC строится по трем сторонам. *Другое решение.* Пусть A_1 и B_1 — середины сторон BC и CA соответственно, тогда стороны треугольника AA_1K, где $K = T_{\overline{BA_1}}(B_1)$, равны медианам искомого треугольника.

1.76. Если $B_1 = T_{\overline{DC}}(B)$, то треугольник AB_1C строится по двум сторонам, равным заданным диагоналям, и углу между ними. Треугольник ABB_1 строится по трем сторонам, а $D = T_{\overline{B_1B}}(C)$. Условиям задачи удовлетворяют два четырехугольника, поскольку на AB_1 можно построить два треугольника с заданными сторонами.

1.78. Постройте окружность, касающуюся оснований и одной боковой стороны трапеции. Проведите касательную к этой окружности параллельно другой боковой стороне.

1.79. Решение задачи имеется в главе 4.

1.81. Можно использовать прямоугольный треугольник, гипотенуза которого соединяет центры данных окружностей, а катет равен отрезку $a/2$. Этот катет параллелен искомой прямой.

1.82. Если одну из данных окружностей перенести параллельно искомой прямой l так, чтобы равные хорды этих окружностей совпали, то можно построить центр ее образа, используя касательную из точки A к другой данной окружности.

1.83. Пусть в искомом четырехугольнике $ABCD$ известен угол между прямыми AB и CD. Если $D_1 = T_{\overline{CB}}(D)$, то треугольник ABD_1 строится по двум сторонам и углу между ними. Затем можно построить треугольник ADD_1 (по трем сторонам), а $C = T_{\overline{D_1D}}(B)$. Имеется два решения.

1.84. Равенство $48° \cdot n = 72° + 360° \cdot k$, где n и k — целые числа, верно при $n = 9$ и $k = 1$. Поэтому фигура Φ, отображаясь на себя поворотом на $48°$, а значит, и на $48° \cdot 9 = 432°$, будет отображаться на себя и при повороте на $72°$. Но равенство $48° \cdot n = 90° + 360° \cdot k$ не имеет решений в целых числах (докажите). Следовательно, ответ на второй вопрос отрицательный.

1.85. Поворотом $R_B^{90^\circ}$ отрезок PN *отображается на* AC.

1.86. Один из указанных отрезков отображается на другой поворотом около центра треугольника на 120°.

1.87. Отрезки данных прямых, являющиеся их пересечением с квадратом, равны, так как один из них отображается на другой поворотом около центра квадрата на 90°. Поскольку, кроме того, они имеют общую середину, то являются диагоналями квадрата.

1.88. Решение существенно опирается на предыдущую задачу. Если провести через центр квадрата две прямые, соответственно параллельные прямым MN и PQ, то их пересечением с квадратом будут два равных отрезка. Им соответственно равны отрезки MN и PQ.

1.89. Поворотом около центра данного пятиугольника на $360^\circ : 5 = 72^\circ$ он отображается на себя, а каждая из его диагоналей — на соседнюю (в направлении поворота). Поэтому каждая из вершин полученного пятиугольника переходит в следующую. В силу этого пятиугольник правильный.

1.90. Решение аналогично решению задачи 1.89.

1.91. Треугольники ABC и ACD правильные и $BM = CN$. Поэтому поворотом $R_A^{60^\circ}$ точки B, C, M отображаются соответственно на точки C, D, N. Так как $R_A^{60^\circ}(M) = N$, то треугольник AMN правильный.

1.92. Эти перпендикуляры являются образами данных прямых при повороте около центра квадрата на 90° и поэтому пересекаются в образе точки P при этом повороте.

1.93. Если $C_1 = R_O^{90^\circ}(C)$, то $B \in (CC_1)$ и треугольник COC_1 прямоугольный равнобедренный.

1.94. Композицией осевых симметрий относительно серединных перпендикуляров к отрезкам CD и DA отрезок DN отображается на отрезок KD.

1.95. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно и $B_1 = R_A^{90^\circ}(B)$. Тогда K_1 — середина B_1Q и $AK_1 \perp AK$, поэтому $AK_1 \parallel QE$ и $AK = AK_1 = (1/2)QE$. Так как отрезок BC этим поворотом отображается на B_1Q, то они равны и перпендикулярны. Поскольку $AM \parallel QB_1$ и $AM = (1/2)QB_1$, *то* $AM \perp BC$ *и* $AM = (1/2)BC$.

1.96. Докажите, что точка $M_1 = R_B^{60^\circ}(M)$ лежит на отрезке MC.

1.97. Согласно задаче 5 § 6 прямые BB_1, CC_1, DD_1 проходят через вторую точку пересечения окружностей, описанных около квадратов.

1.98. Окружности равны и отображаются одна на другую поворотом около второй точки их пересечения на 60°, при этом $M \to N$

19 - 5545

(задача 5 § 6). Так как указанные касательные являются соответственными при рассматриваемом повороте, то угол между ними равен 60°.

1.99. Стороны рассматриваемого четырехугольника параллельны соответственно MC и AQ и имеют длины $(1/2)MC$ и $(1/2)AQ$. Но эти отрезки равны и перпендикулярны, так как один их них отображается на другой поворотом около точки B на $90°$.

1.100. Центр поворота строится по двум парам соответственных точек (п. 5.3): $A \to B$ и $O_1 \to O_2$ (центры данных окружностей).

1.101. Искомый центр поворота лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему центры A и B данных окружностей. С другой стороны, он принадлежит дуге окружности, стягиваемой хордой AB и вмещающей угол $45°$. Всегда существуют две и только две такие точки.

1.102. Если искомая окружность с заданным центром O пересекает данные окружности γ и ω в точках A и B, то требуется, чтобы $\angle AOB = \alpha$. Точка A (или B) является общей точкой окружностей γ и $\omega_1 = R_O^{\alpha}(\omega)$.

1.103. Постройте образ A_1 данного центра A искомой окружности при заданном повороте. Точка касания окружностей является серединой отрезка AA_1.

1.105. Если O — заданный центр искомого шестиугольника и $R_O^{60°}(A) = A_1$, $R_O^{60°}(B) = B_1$, то прямые A_1B и AB_1 содержат соседние стороны шестиугольника.

1.106. Одну из вершин, скажем A, искомого квадрата $ABCD$ можно выбрать произвольно на одной из данных концентрических окружностей α и β. Если $A \in \alpha$ и $B \in \beta$, то поворот $R_A^{90°}$ отображает точку B на $D \in \beta$. Поэтому вершина D находится как точка пересечения окружности β и образа α_1 окружности α при этом повороте.

1.108. Пусть O — центр данной окружности ω и окружность (O, OM) пересекает прямую a в точках P и Q. Тогда поворотами около O на углы POM и QOM прямая a отображается на касательные к окружности ω, проходящие через точку M. Точки касания служат образами точки A при указанных поворотах.

1.109. Сначала постройте какую-нибудь хорду окружности, имеющую заданную длину, а затем поворотом отобразите содержащую ее прямую на искомую прямую. Сравните с решением задачи 1.108.

1.110. Пусть квадрат $ABCD$ ориентирован отрицательно и $E_1 = R_A^{90°}(E)$. Тогда $E_1 \in (BC)$ и $BE_1 = DE$. Замечаем, что $\angle FAE_1 = \angle AFE_1$, откуда $AE_1 = FE_1$ и поэтому $AE = AE_1 = FE_1 = FB + BE_1 = FB + DE$.

1.111. Каждый из указанных поворотов отображает середину отрезка AB на середину отрезка A_1B_1, поэтому прямая OO_1 является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему середины отрезков AB и A_1B_1. При первом повороте луч AB отображается на луч A_1B_1, поэтому угол поворота равен углу между этими лучами. При втором повороте луч AB переходит в луч B_1A_1. Значит, его угол равен углу между этими лучами. Следовательно, разность углов поворотов равна углу между лучами A_1B_1 и B_1A_1, т. е. равна $180°$.

1.112. Каждый из трех указанных поворотов отображает центр O окружности ABC на центр O_1, окружности $A_1B_1C_1$. Поэтому центры этих поворотов принадлежат серединному перпендикуляру к отрезку OO_1, а при $O = O_1$ совпадают.

1.113. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два равных одинаково ориентированных квадрата. Если в парах сторон этих квадратов нет параллельных, то существуют четыре поворота, каждый из которых отображает первый квадрат на второй: 1) $A \to A_1$ и $B \to B_1$, 2) $A \to B_1$ и $B \to C_1$, 3) $A \to C_1$ и $B \to D_1$, 4) $A \to D_1$ и $B \to A_1$. Каждый из этих поворотов отображает центр первого квадрата на центр второго. Поэтому центры указанных четырех поворотов лежат на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему центры квадратов. Углы поворотов равны α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \pi$, $\alpha + \frac{3\pi}{2}$. Если стороны квадратов соответственно параллельны, то имеются только три поворота на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

1.114. Пусть $PA \geqslant PB$ и $PA \geqslant PC$, треугольник ACP_1 — образ треугольника ABP при повороте $R_A^{60°}$. Треугольник APP_1 правильный. Так как $PP_1 \leqslant PC + CP_1$, то $PA \leqslant PB + PC$. Равенство будет иметь место тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками P и P_1, т. е. в том и только в том случае, когда $\angle ACP + \angle ACP_1 = 180°$, или $\angle ACP + \angle ABP = 180°$. А это выполняется лишь при условии, что точка P принадлежит описанной около треугольника ABC окружности.

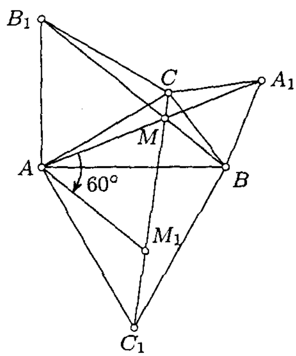


Рис. 136

1.115. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно. Тогда $R_C^{60°}(B) = A_1$ и $R_C^{60°}(B_1) = A$ (рис. 136). Отсюда следует, что отрезки AA_1 и BB_1 равны и пересекаются под углом $60°$. Аналогичный факт доказывается для отрезков CC_1 и BB_1 поворотом $R_A^{60°}$. Если $(AA_1) \cap (BB_1) = M$, то $M \in (CC_1)$. В самом деле, если $R_A^{-60°}(M) = M_1$, то $M_1 \in (CC_1)$ (так как $(BB_1) \to (CC_1)$), треугольник AMM_1 правильный, $\angle AM_1C_1 = \angle AMB = 120°$. Следовательно, $\angle AM_1M + \angle AM_1C_1 = 60° + 120° = 180°$ и поэтому

$M \in (M_1C_1)$, т. е. точки M, M_1, C, C_1 коллинеарны. Наконец, из равенства $MC_1 = MM_1 + M_1C_1$ следует $MC_1 = MA + MB$.

1.116. Пусть точки A, B, C, D лежат на прямых, содержащих последовательно стороны квадрата. Построим точку P такую, что $AP \perp BD$ и $AP = BD$. Согласно задаче 1.88 точка P принадлежит прямой, содержащей сторону квадрата и проходящей через точку C. Проведя через точки B и D перпендикуляры к PC, находим сторону искомого квадрата. Используя ее и точку A, строим квадрат. Существуют два квадрата, отвечающие условию задачи.

1.117. Если M — образ точки A при повороте около центра O на заданный угол φ, то угол между лучами A_1A и B_1M равен φ. Поэтому величина угла BB_1M (или ему смежного) равна φ. Отсюда вытекает способ построения точки B_1: помимо данной окружности она принадлежит множеству точек, из каждой из которых отрезок MB виден под углом φ (или $\pi - \varphi$).

1.118. Поворот $R_O^{90^\circ}$ около центра O квадрата $MBPS$ отображает отрезок MQ на отрезок SC.

1.119. Решение 1. При повороте $R_C^{90^\circ}$ $A \to B$ и $A_1 \to B_1$. Поэтому $(AA_1) \perp (BB_1)$ и, следовательно, $(CD) \parallel (B_1B)$. Но в таком случае $AC : CB_1 = AD : DB = 2 : 1$.

Решение 2. При повороте $R_M^{90^\circ}$ около середины M гипотенузы $C \to B$, $B \to K$, причем $(CB) \perp (BK)$, $A_1 \to N$, где N — середина BK, $A \to C$. Поскольку $(AA_1) \to (CN)$ и $(AA_1) \perp (CN)$, то $N \in (CD)$. Но $CA : BN = 2 : 1$, поэтому $AD : DN = 2 : 1$.

1.120. Проведем касательную l_1 к окружности $\omega_1(M, R)$ в произвольной точке A. Затем найдем поворот R_M^α, которым касательная l_1 отображается на касательную l_2 к $\omega_2(N, r)$. Для этого на отрезке MA отложим отрезок MP такой, что $MP = R - r$. Через точку P проведем прямую l_0, параллельную l_1. Остается найти угол α поворота R_M^α, при котором l_0 отображается на прямую l, проходящую через N (задача 1.108).

1.121. Пусть даны окружности α, β, γ и $\beta \cap \gamma = \{A, H\}$, $\gamma \cap \alpha = \{B, H\}$, $\alpha \cap \beta = \{C, H\}$. Если принять во внимание задачу 1.33, то достаточно сказать, что H — ортоцентр треугольника ABC. В самом деле, если D — вторая общая точка прямой AH и окружности α, то поворот около точки C, отображающей β на α, переводит A в D (задача 5 § 6). Следовательно, $CA = CD$. Поворот с центром B, отображающий γ на α, также переводит A в D, откуда $BA = BD$. Из полученных равенств вытекает симметричность точек A и D относительно (BC). Значит, $(AH) \perp (BC)$. Аналогично $(BH) \perp (AC)$ и $(CH) \perp (AB)$.

1.122. Центральная симметрия относительно точки пересечения осей данных симметрий.

1.123. Если $a \cap b \cap c = O$, то через точку O проведем прямую l так, чтобы $\angle(a, b) = \angle(l, c)$ (углы ориентированные). Тогда $S_b \circ S_a = S_c \circ S_l$, откуда $S_c \circ S_b \circ S_a = S_l$. В случае параллельности прямых a, b, c решение аналогично.

1.124. Тождественное преобразование.

1.125. Прямые l, m, p пересекаются в центре O окружности (ABC), поэтому каждая из указанных композиций есть осевая симметрия (задача 1.123), ось которой проходит через O. Кроме того, при композиции $S_p \circ S_m \circ S_l$ точка B неподвижна. Значит, $S_p \circ S_m \circ S_l = S_{OB}$. Аналогично $S_l \circ S_p \circ S_m = S_{OC}$ и $S_m \circ S_l \circ S_p = S_{OA}$.

1.126. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Композиция $S_{IC} \circ S_{IB} \circ S_{IA}$ есть осевая симметрия, ось которой содержит точку I (задача 1.123). Так как эта композиция отображает прямую AC на себя, то ее ось перпендикулярна AC. Таким образом, искомой осью является перпендикуляр к AC, проведенный через центр I вписанной в треугольник окружности.

1.127. Точки пересечения биссектрис углов четырехугольника служат вершинами четырехугольника, у которого сумма противоположных углов равна 180°. Поэтому, если a, b, c, d — прямые, которым принадлежат последовательно биссектрисы, то $(S_d \circ S_c) \circ (S_b \circ S_a) = R_B^{2(180^\circ - \alpha)} \circ R_A^{2\alpha} = T_{\bar{r}}$, где $A = a \cap b$, $B = c \cap d$, $\alpha = \angle(a, b)$, $\angle(c, d) = 180^\circ - \alpha$.

1.128. Если a, b, c, d — прямые, содержащие последовательно стороны четырехугольника, то по условию $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = T_{\bar{r}}$, откуда $S_b \circ S_a = (S_c \circ S_d) \circ T_{\bar{r}}$. Поэтому углы поворотов $S_b \circ S_a$ и $S_c \circ S_d$ равны: $2\angle(a, b) = 2\angle(d, c)$. Если $\angle(a, b)$ — величина внутреннего угла четырехугольника, то с учетом выбранной последовательности прямых и ориентации углов величина $\angle(d, c)$ будет величиной *внешнего* угла, противоположного первому. Следовательно, сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°.

1.129. Так как $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то заданная композиция трех поворотов представляет собой центральную симметрию. Найдем ее центр M. Руководствуясь теоремой о композиции двух поворотов (п. 7.6), находим, что $R_B^{\angle B} \circ R_A^{\angle A} = R_I^{\angle A + \angle B} = R_I^{180^\circ - \angle C}$, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Применяя еще раз ту же теорему к композиции $R_C^{\angle C} \circ R_I^{180^\circ - \angle C}$, получаем, что точка M является ортогональной проекцией точки I на AC, поскольку тогда $\angle MIC = 90^\circ - (1/2)\angle C$ и $\angle MCI = (1/2)\angle C$.

1.130. Сумма углов поворотов равна 180°, поэтому их композицией будет центральная симметрия. Если треугольник ABC *ориентирован* отрицательно, то точка B указанной композицией отображается на себя и поэтому является центром этой симметрии.

1.131. Композиция четырех поворотов на 90° каждый около центров квадратов есть тождественное преобразование. На основании задачи 4 § 8 отсюда следует доказываемое утверждение.

1.132. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно и O_1, O_2, O_3 — центры квадратов, построенных на его сторонах BC, CA, AB соответственно. Композиция $R_{O_3}^{90^\circ} \circ R_{O_1}^{90^\circ}$ есть центральная симметрия с центром в середине K стороны AC, так как сумма углов поворотов равна 180° и $C \to A$. Следовательно, треугольник O_1KO_3 прямоугольный равнобедренный, $\angle K = 90^\circ$ (п. 7.6). Далее, $R_K^{90^\circ}(C) = O_2$ и $R_K^{90^\circ}(O_3) = O_1$ поэтому отрезки CO_3 и O_1O_2 равны и перпендикулярны.

1.133. Композиция $R_P^{60^\circ} \circ R_{O_1}^{120^\circ} \circ R_M^{180^\circ}$ есть тождественное преобразование, так как сумма углов поворотов равна 360° и точка A неподвижна при этой композиции. Углы треугольника MOP равны 90°, 60°, 30°.

1.134. Очевидно, достаточно построить ось переносной симметрии. А она проходит через середину отрезка AA_1, соединяющего данные соответственные точки, параллельно заданному вектору $\bar{r} \neq \bar{0}$. При $\overline{AA_1} \parallel \bar{r}$ $(\overline{AA_1} \neq \bar{r})$ или $\overline{AA_1} \perp \bar{r}$ задача решения не имеет.

1.135. $W_l^{\bar{r}} = Z_O \circ S_u = S_v \circ Z_P$, причем $u \perp l$, $v \perp l$, $u \cap l = P$, $v \cap l = O$, $\overline{PO} = (1/2)\bar{r}$.

1.136. При каждой переносной симметрии, отображающей одну из данных окружностей на другую, центры окружностей являются соответственными точками. Вследствие этого оси всех этих симметрий проходят через середину отрезка, соединяющего центры окружностей.

1.137. Существует единственная переносная симметрия, удовлетворяющая требованиям задачи. Она задается парами точек $A \to B$ и $O \to O_1$ (центры данных окружностей).

1.138. Середины указанных отрезков принадлежат оси переносной или осевой симметрии, задаваемой парами точек $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

1.139. Оси указанных трех переносных симметрий проходят через середину отрезка, соединяющего центры данных правильных треугольников.

1.140. Середины сторон четырехугольника AB_1BA_1 являются вершинами ромба. Оси указанных переносных симметрий содержат его диагонали.

1.141. Пусть $W_l^{\bar{r}} = S_l \circ S_v \circ S_u$, $Z_A = S_t \circ S_l$, причем $u \parallel v$, $u \perp l$, $t \perp l$. Тогда $Z_A \circ W_l^{\bar{r}} = (S_t \circ S_l) \circ (S_l \circ S_v \circ S_u) = S_t \circ S_v \circ S_u$. Так как прямые u, v, t параллельны, то эта композиция будет осевой симметрией, ось p которой им параллельна и является прообразом прямой t при переносе, отображающем u на v (задача 1.123).

1.142. Если переносная симметрия отображает A на A_1 и B на B_1 то ее ось проходит через середины отрезков AA_1 и BB_1. Равным образом ось переносной симметрии, при которой $A \to B_1$ и $B \to A_1$, содержит середины отрезков AB_1 и BA_1. Середины сторон четырехугольника AB_1BA_1 являются вершинами ромба, диагонали которого принадлежат осям указанных переносных симметрий. Поэтому их композиция есть центральная симметрия.

1.143. Заданная композиция четырех переносных симметрий есть движение первого рода. Непосредственной проверкой убеждаемся, что A — неподвижная точка и AB — двойная прямая этого движения. Так как оно, очевидно, отлично от тождественного, то является симметрией относительно точки A.

1.144. Композиция трех центральных симметрий есть центральная симметрия. Если при центральной симметрии окружность отображается на себя, то центр симметрии совпадает с центром O окружности, причем $PMQO$ — параллелограмм. Остается доказать, что $\overline{OQ} = \overline{PM}$. В самом деле,

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD}), \quad \overline{OP} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}), \quad \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Отсюда получаем: $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{OQ}$.

1.145. Проведем через центр O окружности прямые a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, перпендикулярные сторонам AB, BC, CD, DE, EA данного пятиугольника. Композиция симметрии относительно построенных прямых (в указанном порядке) отображает вершину A_0 искомого пятиугольника на себя. Надо построить ось l симметрии, являющейся указанной композицией. Тогда точки пересечения прямой l с окружностью дают два решения задачи.

1.146. Множество неподвижных точек (для каждой из них $x' = x$, $y' = y$) имеет уравнение $x - \sqrt{3}y = 0$ (ось симметрии).

1.147. а) $R_O^{60^\circ}$, б) $R_O^{120^\circ}$, в) $R_O^{240^\circ}$, г) осевая симметрия относительно прямой $\sqrt{3}x + y = 0$.

1.148. Движение первого рода:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(-12x + 5y + 59), \\ y' = \frac{1}{13}(-5x - 12y + 43). \end{cases}$$

Движение второго рода:

$$\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 1. \end{cases}$$

1.150.
$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c) - b, \\ y' = y - \dfrac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c) + a. \end{cases}$$

1.151. $Ax + By - (2Ax_0 + 2By_0 + C) = 0$.

1.153. Систему координат можно выбрать так, чтобы касательная к окружности имела уравнение $y=1$. Пусть вершина A имеет координаты α, β. По условию выбора системы координат $OA=\sqrt{2}$, т. е. $\alpha^2+\beta^2=2$ (условие того, что квадрат описан около окружности $x^2+y^2=1$). Далее напишите формулы поворота $R_O^{90^\circ}$ и найдите координаты вершин B, C, D.

1.154. Выберем систему координат так, чтобы ось Oy была параллельна прямым AA_1 и BB_1, а начало координат совпадало с вершиной C прямого угла. Пусть прямая l имеет уравнение $y=kx$. Если точка A имеет координаты α, β, то $A_1(\alpha,\ k\alpha)$, $B_1(-\beta,\ -k\beta)$. Находим $CA_1^2+CB_1^2=CA^2(1+k^2)$. Так как $k=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{ctg}\varphi$, то $1+k^2=\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$ и поэтому $CA_1^2+CB_1^2=CA^2\cdot\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$.

1.155. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно. При повороте вектора $\overline{BE}=\frac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{BC})$ на 90° получаем вектор $\frac{1}{2}(\overline{BM}+\overline{QB})=\frac{1}{2}\overline{QM}$, чем и заканчивается решение.

1.156. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов, построенных соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ (его считаем ориентированным отрицательно). Тогда $\overline{O_1O_4}=\overline{O_1A}+\overline{AO_4}$. При повороте на 90° $\overline{O_1A}\to\overline{O_1B}$ и $\overline{AO_4}\to\overline{BO_2}$, поэтому $\overline{O_1O_4}\to\overline{O_1B}+\overline{BO_2}=\overline{O_1O_2}$. Следовательно, векторы $\overline{O_1O_4}$ и $\overline{O_1O_2}$ перпендикулярны и имеют равные длины. В силу симметрии относительно центра параллелограмма $ABCD$ четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ является параллелограммом, и вследствие доказанного он — квадрат.

1.157. Вектор $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC_1}+\overline{CB})$ поворотом на 60° отображается на вектор $\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CA_1})=\overline{MP}$. Отсюда следует, что треугольник MNP правильный.

1.158. Поворотом на 60° вектор $\overline{A_1O}=\overline{A_1C}+\overline{CO}$ отображается на вектор $\overline{A_1B}+\overline{OA}=(\overline{MB}-\overline{MA_1})+(\overline{MA}-\overline{MO})=-(\overline{MA_1}+\overline{MO})=-2\overline{MD}$, где D — середина OA_1. Это значит, что треугольник MOD правильный, $\angle MOA_1=60^\circ$. Далее находим $\angle OA_1M=30^\circ$, $\angle OMA_1=90^\circ$.

1.160. Вектор $\overline{PR}=\frac{1}{2}(\overline{A_1C_1}+\overline{BD})$ отображается на вектор $\overline{QS}=\frac{1}{2}(\overline{B_1D_1}+\overline{CA})$ поворотом на 90°.

1.161. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно и $R^{90^\circ}(\overline{AB}) = \overline{CD}$. Тогда вектор $\overline{AQ} = \overline{AB} + \overline{BQ}$ поворотом на 90° отображается на вектор $\overline{CD} + \overline{BC} = \overline{BD}$ и $\overline{NB} = \overline{NA} + \overline{AB} \to \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Следовательно, прямые CD, AQ, NB содержат высоты треугольника ABD, а это совпадает с доказываемым утверждением.

1.162. Выполните поворот вектора $\overline{SM} = \dfrac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BE})$ на 90°.

1.163. Рассмотрим многоугольник $B_1B_1 \ldots B_n$ с вершинами в точках касания. Очевидно, $\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \ldots + \overline{B_{n-1}B_n} + \overline{B_nB_1} = \bar{0}$. При повороте $R_O^{90^\circ}$ отрезки B_1B_2, B_2B_3, $\ldots$, B_nB_1 отображаются на отрезки C_1C_2, C_2C_3, $\ldots$, C_nC_1, параллельные соответственно отрезкам $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$. Но $\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \ldots + \overline{C_{n-1}C_n} + \overline{C_nC_1} = \bar{0}$, причем $\overline{C_1C_2} = \sin\angle A_1 \cdot \overline{OA_1}$, $\overline{C_2C_3} = \sin\angle A_2 \cdot \overline{OA_2}$, $\ldots$, $\overline{C_nC_1} = \sin\angle A_n \cdot \overline{OA_n}$. Следовательно,

$$\sin\angle A_1 \cdot \overline{OA_1} + \sin\angle A_2 \cdot \overline{OA_2} + \ldots + \sin\angle A_n \cdot \overline{OA_n} = \bar{0}.$$

1.164. Поворотом около произвольной плоскости на 90° треугольник ABC отображается на некоторый треугольник $A_0B_0C_0$. Очевидно, $\overline{B_0C_0} = x\overline{AA_1}$, $\overline{C_0A_0} = y\overline{BB_1}$, $\overline{A_0B_0} = z\overline{CC_1}$, где числа x, y, z положительны (или же все отрицательны):

$$x = \frac{B_0C_0}{AA_1} = \frac{BC}{AA_1} = \frac{BC^2}{2S} = \frac{a^2}{2S}, \quad y = \frac{b^2}{2S}, \quad z = \frac{c^2}{2S}$$

(S — площадь треугольника ABC). Так как $\overline{B_0C_0} + \overline{C_0A_0} + \overline{A_0B_0} = \bar{0}$, то $x\overline{AA_1} + y\overline{BB_1} + z\overline{CC_1} = \bar{0}$ и поэтому $a^2\overline{AA_1} + b^2\overline{BB_1} + c^2\overline{CC_1} = \bar{0}$.

Глава II

2.01. Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является параллелограммом. Образы данной точки при указанных симметриях служат вершинами четырехугольника, гомотетичного этому параллелограмму.

2.02. Окружности гомотетичны относительно точки касания. Прямые AB и CD — соответственные при этой гомотетии.

2.04. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

2.05. Пусть D — середина AB и M — центроид треугольника ABC. Тогда $H_D^{1/3}(C) = M$. Поэтому если точка C пробегает прямую, то точка M пробегает прямую, ей параллельную, которую легко построить.

2.06. Окружность, касающаяся данной окружности в общем конце хорд.

2.07. Используйте две гомотетии: 1) гомотетию с центром в точке O пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, при которой $A \to C$, 2) гомотетию с центром в точке пересечения продолжений боковых сторон AD и BC, при которой $A \to D$.

2.09. Эти окружности гомотетичны относительно их общей точки O, поскольку они описаны около гомотетичных относительно нее треугольников. Точка O принадлежит линии центров окружностей, что доказывает их касание в точке O.

2.10. Пусть данные неравные окружности ω и ω_1 имеют центры O и O_1, $B \in \omega$, $C \in \omega_1$ и $(BC) \cap (OO_1) = S$. Тогда $H_S^{B \to C}(\omega) = \omega_1$. Если AD — диаметр окружности ω_1, то при указанной гомотетии $A \to D$ и, значит, $(AB) \parallel (DC)$, $\angle BAC = \angle ACD = 90°$. Когда окружности ω и ω_1 равны, утверждение очевидно.

2.12. Если при гомотетии, отображающей большую окружность на меньшую, $M \to M_1$ и $N \to N_1$, то $(M_1N_1) \parallel (MN)$, откуда $\smile MP = \smile PN$ и $\angle MAP = \angle PAN$.

2.13. Рассматривая образ секущей при гомотетии с центром A, отображающей одну окружность на другую, обнаруживаем, что $\angle PAQ = \angle MAN$, откуда следует $\angle MAP = \angle NAQ$.

2.14. Рассмотрим гомотетию с центром A, при которой окружность, проходящая через точки M и N, отображается на окружность, содержащую точки P и Q. Пусть при этой гомотетии $M \to M_1$ и $N \to N_1$. Проведя общую касательную к окружностям в точке A, находим:

$$\angle MAQ + \angle NAP = \angle MAN + \angle PAQ + 2\angle NAP =$$
$$= \frac{1}{2}\smile MN + \frac{1}{2}\smile PQ + 2\left(\frac{1}{2}\smile AN + \frac{1}{2}\smile AP\right) = \frac{1}{2}\smile M_1N_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\smile PQ + \smile AN_1 + \smile AP = \frac{1}{2}(\smile M_1N_1 + \smile PQ + 2\smile N_1AP).$$

Поскольку $(M_1N_1) \parallel (PQ)$, то $\smile N_1AP = \smile M_1Q$. Поэтому полученная сумма угловых величин дуг равна угловой величине окружности и, значит, $\angle MAQ + \angle NAP = (1/2) \cdot 360° = 180°$.

2.15. Пусть через центр S гомотетии двух окружностей проведены две произвольные секущие, одна из которых пересекает окружности в соответственных при гомотетии с этим центром точках A и A_1, B и B_1, а другая — в точках C и C_1, D и D_1. Доказываемое равенство $SA \cdot SB_1 = SC \cdot SD_1$ следует из подобия треугольников ACS и D_1B_1S.

2.17. Пусть при заданной гомотетии $M \to M_1$ и $N \to N_1$. Прямая M_1N и параллельная ей прямая, проходящая через точку M, составляют нужную пару прямых. Другой такой парой является прямая MN_1 и параллельная ей прямая, проходящая через точку N.

2.18. Пусть α — данная окружность с центром O и радиусом r. По условию задачи $H_A^{2/3}(C)=B$. Поэтому точка B принадлежит образу α_1 окружности α при этой гомотетии и, следовательно, является общей точкой этих окружностей. При $OA<5r$ существует два решения, при $OA=5r$ — одно, а при $OA>5r$ решений нет.

2.19. Пусть требуется провести через общую точку A двух данных окружностей α и β прямую MN ($M\in\alpha$, $N\in\beta$) так, что $MA:AN=m:n$, где m и n — данные отрезки. Гомотетия H_A^k при $k=-n/m$ отображает M на N и окружность α на окружность α_1, проходящую через N. Поэтому точка N есть общая точка окружностей α_1 и β. Если данные окружности пересекаются, то задача имеет два решения; если же они касаются, то задача или не имеет решения или же решений бесконечно много.

2.20. Задача решается аналогично предыдущей. Она имеет два решения, соответствующих коэффициентам k и $1/k$ гомотетий.

2.21. Постройте какую-нибудь окружность ω, вписанную в данный угол с вершиной O, а затем гомотетией с центром O отобразите ее на искомую окружность. Если $\omega\cap(OA)=\{P,Q\}$, то нужными гомотетиями будут гомотетии $H_O^{P\to A}$ и $H_O^{Q\to A}$. Существуют два решения, если точка A принадлежит внутренней области угла.

2.22. Искомая точка является центром окружности, содержащей точку M и касающейся прямой a. Далее решение аналогично решению предыдущей задачи.

2.23. Угол между прямой и окружностью есть по определению угол между этой прямой и касательной к окружности в точке их пересечения. Если прямая пересекает две окружности под равными углами, то касательные к окружностям в соответственных точках параллельны, что возможно лишь при условии, если прямая проходит через центр гомотетии окружностей. Если данная точка A не совпадает ни с одним из центров S_1 и S_2 гомотетий окружностей, то прямые AS_1 и AS_2 — два решения задачи при условии, что они пересекают обе окружности. Задача может иметь два решения, одно решение, бесконечно много решений или не иметь решений в зависимости от взаимного расположения окружностей и точки A.

2.24. Проведем касательную t к окружности в выбранной на ней точке S. Построим некоторый квадрат в одной полуплоскости с окружностью от прямой t, сторона которого принадлежит t, а середина этой стороны совпадает с S. Гомотетия с центром S отображает этот квадрат на искомый. Решение всегда существует и единственно (с точностью до положения). Если a — длина стороны полученного квадрата и R — радиус окружности, то по теореме о среднем пропорциональном $(2R-a)a=(a/2)^2$, откуда $a/R=8/5$.

2.27. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм с центром O и $AC : BD = m : n$, где m и n — данные отрезки. На лучах OA и OB построим соответственно точки A_1 и B_1, для которых $OA_1 = m$ и $OB_1 = n$. Тогда $(A_1B_1) \parallel (AB)$ (гомотетия). Треугольник OA_1B_1 строится по двум сторонам и углу между ними. По заданной стороне AB строится треугольник AOB и затем параллелограмм $ABCD$.

2.28. Сначала постройте трапецию по двум углам и двум основаниям, равным отрезкам, задающим отношение оснований искомой трапеции. Искомая трапеция является образом построенной при гомотетии, за центр которой удобно принять вершину трапеции, а пару соответственных точек легко получить с помощью высот построенной и искомой трапеций.

2.29. Пусть искомая окружность ω касается данной окружности α в точке S и данной прямой m в данной точке A. Гомотетия с центром S, отображающая ω на α, переводит прямую m в касательную t к α. Так как $t \parallel m$, то точка T касания прямой t и окружности α легко строится. Прямая TA пересекает α вторично в искомой точке S. Дальнейшее построение ясно. Задача имеет два решения, если $A \notin \alpha$. При $A \in \alpha$ решений нет или же их бесконечно много.

2.30. Для построения точки касания и данной прямой используйте ту же гомотетию, что и в задаче 2.29. В общем случае задача имеет два решения. В частных случаях их может быть одно, бесконечно много или же не существовать совсем.

2.31. Очевидно, условие $a \parallel b$ необходимо. Пусть $(AB) \nparallel a$ и $(AB) \cap a = A_0$, $(AB) \cap b = B_0$. Если $\overline{AA_0} \neq \overline{BB_0}$, то существует единственная гомотетия, при которой $A \to B$ и $a \to b$ $(A_0 \to B_0)$. Если $\overline{AA_0} = \overline{BB_0}$, то гомотетии не существует, а существует перенос. Когда $(AB) \parallel a \parallel b$, то на прямой AB имеется единственная точка, служащая центром искомой гомотетии. Для ее построения достаточно провести через A и B пару параллельных прямых, точки пересечения которых с a и b соответственно составляют вторую пару соответственных точек при искомой гомотетии. Центр этой гомотетии не зависит от выбора вспомогательной пары параллельных прямых.

2.32. Проведите через точку M две прямые, параллельные прямым l и l_1, и докажите, что точки N и P являются соответственными при гомотетии с центром M.

2.33. Для любой точки O имеем: $\overline{OA_1} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$, $\overline{OB_1} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD})$. Поэтому $\overline{A_1B_1} = \overline{OB_1} - \overline{OA_1} = -\frac{1}{3}\overline{AB}$. Имеется еще пять аналогичных равенств. Отсюда заключаем, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом

$k=-\frac{1}{3}$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в центре гомотетии, которым является центроид G четырехугольника $ABCD$ — точка пересечения его средних линий (задача 1.21). $\overline{OG}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

2.34. Гомотетия H_M^2 отображает треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ и, значит, центроид G первого треугольника на центроид M_1 второго. Точка G постоянна и является серединой отрезка MM_1. Следовательно, преобразование $M \to M_1$ есть симметрия с центром G.

2.35. Для любой точки O имеем: $\overline{OG}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$ и $\overline{OG_0}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$, где G_0 — центроид треугольника ABC. Отсюда $\overline{OG}=\frac{3}{4}\overline{OG_0}+\frac{1}{4}\overline{OM}$ и поэтому $\overline{G_0G}=\overline{OG}-\overline{OG_0}=\frac{1}{4}\overline{G_0M}$. Следовательно, преобразование $M\to G$ есть гомотетия с центром G_0 и коэффициентом $\frac{1}{4}$.

2.36. Если $(AB)\parallel(A_1B_1)$, $(BC)\parallel(B_1C_1)$, $(CD)\parallel(C_1D_1)$, $(AD)\parallel(A_1D_1)$, $(AC)\parallel(A_1C_1)$, $(BD)\parallel(B_1D_1)$, то четырехугольник $ABCD$ можно отобразить на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетией или переносом. Однако можно предположить, что $(AB)\parallel(C_1D_1)$, $(BC)\parallel(A_1D_1)$, $(CA)\parallel(B_1D_1)$, $(CD)\parallel(A_1B_1)$, $(AD)\parallel(B_1C_1)$, $(BD)\parallel(C_1A_1)$. В этом случае не существует отображения плоскости на себя, при котором прямые отображаются на прямые и одновременно вершины первого четырехугольника на вершины второго. Приведем пример таких двух четырехугольников, для которых выполняются все шесть последних условий параллельности. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, не имеющий описанной окружности. Построим серединные перпендикуляры к его сторонам и диагоналям. Если их повернуть на 90° около произвольного центра, то получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 137). Он негомотетичен четырехугольнику $ABCD$, хотя его стороны и диагонали параллельны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$.

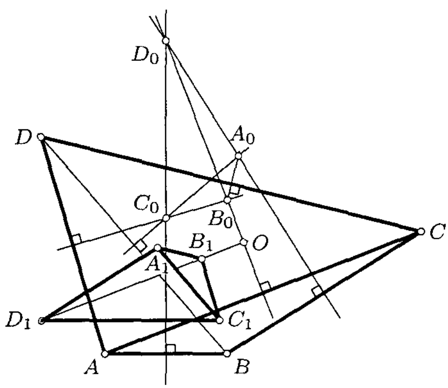


Рис. 137

2.37. Если O и k_1 — центр и коэффициент гомотетии, то $\overline{OA_1}=k_1\overline{OA}$. По условию $\overline{OA_2}=\frac{\overline{OA}+k\overline{OA_1}}{1+k}$. Отсюда $\overline{OA_2}=\frac{1+kk_1}{1+k}\overline{OA}$. Так как $\frac{S_1}{S}=k_1^2$

и $\dfrac{S_2}{S}=\left(\dfrac{1+kk_1}{1+k}\right)^2$, то $k_1=\sqrt{S_1/S}$ и поэтому $S_2=S\left(\dfrac{1+k\sqrt{S_1/S}}{1+k}\right)^2=$
$=\left(\dfrac{\sqrt{S}+k\sqrt{S_1}}{1+k}\right)^2$.

2.38. На прямой a возьмите точку A_0 и постройте проходящую через нее прямую g, которая пересекает b и c в точках B_0 и C_0 так, что $A_0B_0:B_0C_0=m:n$. Это построение выполняется с помощью гомотетии с центром A_0. Существуют две прямые, обладающие требуемым свойством. Искомая прямая l проходит через S параллельно g. Задача не имеет решения только в случае $M\in l$.

2.39. Проведите произвольную прямую g, параллельную данной прямой p и не проходящую через точку $S=a\cap b$. Пусть $g\cap a=A_0$, $g\cap b=B_0$. Постройте на g точку C_0, для которой $A_0B_0:B_0C_0=m:n$ (имеется две такие точки). Если $(SC_0)\cap c=C$, то прямая l, проходящая через C параллельно g, будет искомой. При $(SC_0)\parallel c$ задача не имеет решения.

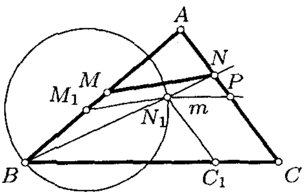


Рис. 138

2.40. Рассмотрим гомотетию H_B^k $(k>0)$. Она отображает искомый четырехугольник $BMNC$ на четырехугольник $BM_1N_1C_1$, в котором $BM_1=M_1N_1=N_1C_1$, $M_1\in[BA)$, $C_1\in[BC)$, $N_1C_1\parallel AC$ (рис. 138). Четырехугольник $BM_1N_1C_1$ можно построить. Для этого выбираем произвольно $M_1\in[BA)$. Точка N_1 принадлежит окружности $(M_1,\ BM_1)$ и прямой m, параллельной BC и проходящей через точку $P\in[CA)$, для которой $CP=BM_1$. Гомотетией $H_B^{1/k}$ полученный четырехугольник $BM_1N_1C_1$ отображается на искомый — $BMNC$. Задача имеет решение при $\frac{1}{2}AB<AC<2AB$.

2.41. Середины сторон данного четырехугольника являются вершинами прямоугольника, около которого можно описать окружность. Гомотетия $H_M^{2/3}$ отображает эту окружность на окружность, содержащую указанные центроиды.

2.42. Множество точек пересечения медиан треугольников, вписанных в данную окружность $\omega(O,\ R)$, представляет собой открытый круг, ограниченный этой окружностью. Ортоцентр H, центроид G и центр O описанной окружности принадлежат одной прямой, причем $\overline{OH}=3\overline{OG}$ (задача 2 § 14). Следовательно, искомое множество есть открытый круг, гомотетичный данному при гомотетии H_O^3.

2.43. Если A_1 и B_1 совпадают с C, а C_1 — произвольная точка стороны AB, то центроиды вырожденных треугольников $A_1B_1C_1$ принадлежат отрезку MN, соответственному AB при гомотетии $H_C^{1/3}$. Очевидно, искомые центроиды принадлежат трапеции $ABMN$. Пересечение таких трапеций есть шестиугольник $MNPQRS$, длины сторон которого равны $(1/3)BC$, $(1/3)CA$, $(1/3)AB$ и стороны параллельны сторонам данного треугольника.

2.44. Проведем через M и N прямые, параллельные соответственно CB и CA. Если эти прямые пересекаются в точке P, то множество точек P есть открытый параллелограмм $ACBD$, а искомое множество точек есть открытый параллелограмм $A_0CB_0D_0$, гомотетичный открытому параллелограмму $ACBD$ при гомотетии $H_C^{1/2}$ (A_0, B_0, D_0 — середины отрезков CA, CB, AB соответственно).

2.45. Построим к окружности в точке M_1 касательную, пересекающую отрезок CA в точке A_1, а отрезок CB — в точке B_1. Гомотетия с коэффициентом $k = CA : CA_1$ отображает M_1 на N. Но $A_1M_1 = p_1 - CA_1$, где p_1 — полупериметр треугольника A_1B_1C. В силу гомотетии имеем: $AN = p - CA$, где p — полупериметр треугольника ABC. Поскольку $BM = p - CA$, то $AN = BM$.

2.46. Не может. Действительно, если $H_B^{\beta} \circ H_A^{\alpha} = H_C^{\alpha\beta}$, то $\overline{AC} = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\overline{AB}$ (докажите). При $\alpha = \beta = k$ и $\overline{AC} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$ имеем $\dfrac{1-k}{1-k^2} = \dfrac{1}{2}$. Очевидно, $k \neq \pm 1$, так как иначе композиция гомотетий не была бы гомотетией (п. 15.1). Однако предыдущее равенство выполняется лишь при $k = 1$.

2.47. $T_{\bar r} \circ H_O^k = H_A^k$, где $\overline{OA} = \dfrac{1}{1-k}\bar r$. $H_O^k \circ T_{\bar r} = H_B^k$, где $\overline{OB} = \dfrac{k}{1-k}\bar r$.

2.48. Пусть H_A^k, H_B^k, H_C^k — искомые гомотетии ($k \neq 1$). Если $H_B^k \circ H_A^k = H_M^{k^2}$, то $M \in (AB)$. Для того, чтобы центр гомотетии $H_C^k \circ H_M^{k^2}$ совпал с центроидом G треугольника ABC, необходимо, чтобы точки M, C, G были коллинеарны. Но тогда M — середина AB, что невозможно (задача 2.46).

2.49. Имеем: $H^{M\to P}(N) = Q$, $H^{P\to R}(Q) = S$. Композицией этих гомотетий является гомотетия $H^{M\to R}$, при которой $N \to S$. Центры ($(MP)\cap(NQ)$, $(PR)\cap(QS)$, $(MR)\cap(NS)$) этих гомотетий коллинеарны. Аналогично доказывается коллинеарность трех других точек.

2.50. Пусть $H_A^{k_1}$ и $H_B^{k_2}$ — данные гомотетии. Если $H_A^{k_1}(M) = N$ и $H_{B_1}^{k_2}(M) = N$, то $H_B^{1/k_2}(H_A^{k_1}(M)) = M$. Если $k_1 \neq k_2$ то $H_B^{1/k_2} \circ H_A^{k_1}$ есть гомотетия и точка M является ее центром. Если же $k_1 = k_2$, то $H_B^{1/k_2} \circ H_A^{k_1}$ есть перенос и точки M не существует.

2.51. Общая пара соответственных точек при гомотетии и переносе всегда существует и единственна. Для ее построения воспользуйтесь методом, рассмотренным при решении задачи 2.50, и результатами задачи 2.47.

2.52. Если $(NP)\cap(AB)=X$ и $(NQ)\cap(AB)=Y$, то по аналогии с решением задачи 1 § 16 доказывается, что M — середина XY. Отсюда следует, что (MN) — ось симметрии прямых NX и NY.

2.53. Рассмотрим композицию гомотетий $H_P^{B\to C}$ и $H_D^{C\to N}$, при которой, очевидно, $B\to N$. Произведение коэффициентов k_1 и k_2 этих гомотетий равно (рис. 139):

$$k_1k_2=\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{DN}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{QN}}{\overline{QB}}.$$

Поэтому указанная композиция является гомотетией с центром Q и, значит, $Q\in(PD)$.

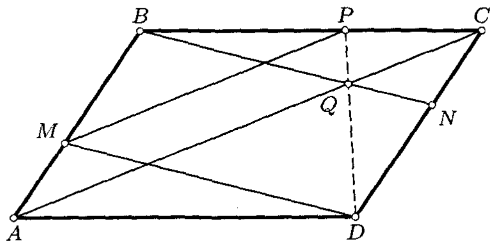


Рис. 139

2.54. Точка B неподвижна при композиции указанных гомотетий. Произведение их коэффициентов равно (теорема Чевы):

$$\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}}=-\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}\cdot\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\right)=-1.$$

Поэтому эта композиция является симметрией с центром B.

2.56. Рассмотрим случай, когда окружности ω_1 и ω_2 имеют с ω внешнее касание. При гомотетии $H_{A_1}^{k_1}$, где $k_1=-\dfrac{A_1O}{A_1O_1}$, имеем: $\omega_1\to\omega$, $O_1\to O$, $B_1\to M$. При гомотетии $H_{A_2}^{k_2}$, где $k_2=-\dfrac{A_2O}{A_2O}$, получаем: $\omega\to\omega_2$, $O\to O_2$, $M\to B_2$. Композиция этих гомотетий (в рассмотренном порядке) есть либо гомотетия H_S^k, где $k=k_1k_2$, либо перенос. При $k\neq 1$ центр S принадлежит прямой A_1A_2. Так как $H_S^k(O_1)=O_2$ и $H_S^k(B_1)=B_2$, то прямые O_1O_2 и B_1B_2 проходят через точку S прямой A_1A_2. Если $k=1$, то композиция гомотетий есть перенос. Тогда $(A_1A_2)\parallel(O_1O_2)\parallel(B_1B_2)$. Для остальных случаев взаимного расположения данных окружностей доказательство аналогично.

2.57. Треугольник, стороны которого принадлежат прямым m, n, p, отображается гомотетией H_Q^2 на треугольник ABC, который гомотетичен (с коэффициентом $-1/2$) треугольнику с вершинами в серединах его сторон. Так как произведение коэффициентов этих гомотетий равно -1, то рассматриваемые треугольники центрально симметричны.

2.58. В силу указанных свойств отображения образ произвольной точки при нем будет строиться так же, как и при подобии (п. 18.2), и потому оно является подобием.

2.59. Двумя гомотетическими симметриями с общим центром A, осями симметрии прямых AC и AB и коэффициентами $k = AB : AC$ и $-k$, причем коэффициент $-k$ имеет гомотетическая симметрия, ось которой перпендикулярна биссектрисе угла CAB.

2.60. Отрезок AC отображается на отрезок BD четырьмя гомотетическими симметриями. Их осями являются две оси симметрии прямых AB и CD и две оси симметрии прямых AD и BC, центрами служат точки пересечения указанных прямых соответственно.

2.61. Если r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей ω_1 и ω_2, а O_1 и O_2 — их центры, то множество центров подобий, каждое из которых отображает ω_1 на ω_2, есть окружность Аполлония, для каждой точки M которой $MO_1 : MO_2 = r_1 : r_2$.

2.62. По условию задачи имеем: $OB : OA = k$, $OC : OB = k$. Отсюда $OC : OA = k^2$.

2.63. Пусть m — данная прямая и φ — заданное подобие первого рода, отличное от гомотетии. Если $\varphi(m_0) = m$ и $\varphi(m) = m_1$, то точки $m_0 \cap m$ и $m \cap m_1$ являются соответственными при φ.

2.64. Если φ — заданное подобие с коэффициентом k, O — центр данной окружности и $\varphi(O) = O_1$, то точка касания окружностей делит отрезок OO_1 в отношении $1 : k$.

2.65. Гомотетическим поворотом с центром O, углом 45° и коэффициентом $\sqrt{2}$ точка A отображается на B и A_1 на B_1, следовательно, луч AA_1 на луч BB_1. Поэтому угол между этими лучами равен 45°. Очевидно, $R_O^{90^\circ}(A) = C$ и $R_O^{90^\circ}(A_1) = C_1$. Поэтому лучи AA_1 и CC_1 перпендикулярны.

2.66. Если N — середина DE, то на основании задачи 1 § 21 $(CM) \perp$ $\perp (DN)$. Так как $(AE) \parallel (DN)$, то $(CM) \perp (AE)$.

2.67. При гомотетическом повороте около точки K на 90°, отображающем B на P и C на B, точка D переходит в Q, так как образом квадрата $ABCD$ является квадрат, двумя сторонами которого служат отрезки PB и BQ. Поэтому $(DK) \perp (QK)$.

2.68. Точки M, A_1, C, B_1 принадлежат окружности γ с диаметром MC. Рассмотрим гомотетический поворот f с центром M, отображающий окружность ABC на окружность γ (задача 3 § 21). При этом преобразовании $A \to B_1$, $B \to A_1$ и, значит, $P \to Q$. Отсюда $\angle PMQ = \angle BMA =$

20 – 5545

$=\angle OMC=\alpha$ (угол поворота) и $\dfrac{MQ}{MP}=\dfrac{MA_1}{MB}=k$ (коэффициент подобия). Следовательно, треугольник PMQ подобен треугольнику MBA_1, откуда $\angle PQM=\angle BA_1M=90°$. Ориентированный угол между прямыми AB и B_1A_1 равен углу α поворота, а $\alpha=\angle OMC$.

2.69. Рассмотрите дополнительно треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC. Решение аналогично решению задачи 2 § 21. Коэффициент подобия равен $\dfrac{1}{2\cos(\alpha/2)}$.

2.70. Ортогональные проекции A_0, B_0, C_0 точки P на прямые BC, CA, AB коллинеарны (задача 1 § 14). Точки $A_2=(BC)\cap(B_1C_1)$, $B_2=(CA)\cap(C_1A_1)$, $C_2=(AB)\cap(A_1B_1)$ являются образами точек A_0, B_0, C_0 соответственно при гомотетическом повороте около центра O окружности на угол $\dfrac{\alpha}{2}$ с коэффициентом $\dfrac{1}{|\cos(\alpha/2)|}$. Отсюда следует коллинеарность точек A_2, B_2, C_2.

2.71. Гомотетический поворот с центром во второй точке пересечения окружностей ω и ω_1, отображающий ω на ω_1, переводит A в A_1 (задача 3 § 21) и поэтому касательную к ω в точке A — в касательную к ω_1 в точке A_1. Следовательно, угол между этими касательными равен углу поворота.

2.72. Если α и β — данные окружности и $M\in\alpha$, $P\in\alpha$, $N\in\beta$, $Q\in\beta$, то гомотетический поворот с центром в точке A, переводящий α в β, отображает P на Q (задача 3 § 21) и, значит, дугу ABP на дугу ANQ. Находим: $\angle PMA+\angle ANQ=\frac{1}{2}\smile ABP+\frac{1}{2}\smile ABQ=\frac{1}{2}\smile ANQ+\frac{1}{2}\smile ABQ=180°$. Поэтому $(MP)\parallel(NQ)$.

2.73. Точки S, B, A, M принадлежат окружности ω с диаметром SM. Точки S, B_1, A_1, N лежат на окружности ω_1 с диаметром SN. Если O — вторая общая точка этих окружностей, то при гомотетическом повороте около точки O, отображающем ω на ω_1, точки A и B отображаются на точки A_1 и B_1 соответственно (задача 3 § 21). Следовательно, угол между прямыми AB и A_1B_1 равен углу φ поворота.

2.74. Один из квадратов отображается на другой гомотетическим поворотом на $90°$ около точки N или же гомотетией. В первом случае точка N принадлежит множеству точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Во втором случае $N=M$.

2.75. Пусть $(AC)\cap(BD)=M$. Парами точек $A\to D$, $B\to C$, $M\to M$ задается подобие второго рода, при котором $m\to n$ и $(AB)\to(CD)$. Поэтому прямые m и n образуют соответственно с прямыми AM и BM равные углы (инвариантность величины угла при подобии).

2.76. Подобие второго рода, сохраняя величину угла между прямыми, меняет его ориентацию. Поэтому угол между прямыми a и b равен по абсолютной величине углу между их образами b и c, но противоположно с ним ориентирован. Следовательно, $\angle(a, b) + \angle(b, c) = 0$. С другой стороны, $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$. Таким образом, $\angle(a, c) = 0$ и, значит, $a \parallel c$.

2.77. Треугольники ACD и CBD являются соответственными при гомотетической симметрии с центром D и осью, содержащей биссектрису угла ADC. Прямые AN и CM также соответственные при этом преобразовании и потому они образуют равные углы с осью гомотетической симметрии.

2.78. Гомотетической симметрией относительно биссектрисы угла AOB с центром O и коэффициентом $k = OB : OA = OD : OC$ угол ACA_1 отображается на угол BDB_1.

2.79. Выберем произвольно прямоугольную декартову систему координат и относительно нее построим точки $A_0(2; 1)$ и $B_0(3; 2)$. Подобие, при котором $A_0 \to A$, $B_0 \to B$, отображает эту систему координат на искомую. Задача имеет два решения.

2.80. Пусть $\alpha(O, R)$ — данная окружность, правильный треугольник ABC искомый, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ и D — заданная проекция вершины B на AC. Так как $BD : AD = \sqrt{3}$, то гомотетический поворот f с центром D на $90°$ и коэффициентом $\sqrt{3}$ отображает A на B. Поэтому B является общей точкой окружностей α и $f(\alpha) = \alpha_1$. При $DO < \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})R$ существуют два решения, при $DO = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})R$ — одно, а при $DO > \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})R$ решений нет.

2.81. Пусть четырехугольник $ABCD$ искомый. Выполним гомотетический поворот f с центром A, отображающий B на D. Если $f(C) = C_1$, то точки C, D, C_1 коллинеарны (рис. 140), так как по условию $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ и поэтому $\angle ADC_1 + \angle ADC = 180°$. Отрезок DC_1 строится на основании пропорции $AD : AB = DC_1 : BC$. Отношение расстояний точки A до точек C_1 и C равно коэффициенту $k = AD : AB$ подобия f, а DA дано. Следовательно, построив точки C, D, C_1, можно найти точку A как общую точку окружности (D, DA) и окружности Аполлония, построенной для отрезка CC_1 и отношения k. Далее треугольник ACB строится по трем сторонам.

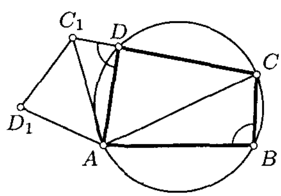


Рис. 140

2.82. Пусть даны треугольник $A_1B_1C_1$ и три параллельные прямые a, b, c. Требуется построить треугольник ABC, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, чтобы $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Гомотетический поворот f с центром в произвольной точке $A \in a$ на угол $\angle A_1$ с коэффициентом $k = A_1C_1 : A_1B_1$

отображает B на C и b на b_1. Следовательно, $C = c \cap b_1$. Затем строим $B = f^{-1}(C)$. Если точка A фиксирована, то задача имеет два решения: одно соответствует повороту на угол $\varphi = \angle B_1A_1C_1$, другое — повороту на угол $-\varphi$.

2.83. Точка M_1 является образом точки A при гомотетическом повороте с центром M на угол $\frac{\alpha}{2} - 90^\circ$ и коэффициентом $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично точки M_2 и M_3 есть образы точек B и C соответственно при этом же подобии. Поэтому точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны тогда и только тогда, когда коллинеарны точки A, B, C.

2.84. Если точка M принадлежит искомому множеству, то точки A и B являются серединами отрезков MM_1 и MM_2, $(AB) \parallel (M_1M_2)$. По условию $M_3 \in (M_1M_2)$. Пусть $(MM_3) \cap (AB) = D$. Так как $\gamma = 90^\circ$, то $CD = MD = DM_3$. Отсюда вытекает способ построения точки M (рис. 141): через произвольную точку $D \in (AB)$ проводим прямую DC и перпендикуляр к DC, строим прямоугольный равнобедренный треугольник CDM, в котором $\angle CDM = -90^\circ$. Так как точка M есть образ точки D при гомотетическом повороте около точки C на 45° с коэффициентом $\sqrt{2}$, то множество точек M, удовлетворяющих условию, есть прямая, являющаяся образом прямой AB при этом преобразовании.

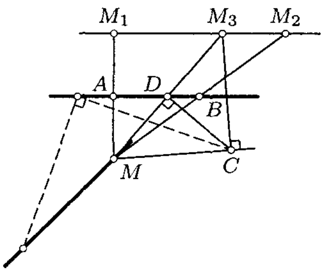


Рис. 141

2.85. Задача решается аналогично задаче 2.82.

2.86. Данный параллелограмм $ABCD$ и искомый параллелограмм $MNPQ$ ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$) имеют общий центр O (задача 1 п. 2.2). По условию $\angle MON = \alpha$ и $ON : OM = k$ известны. Гомотетический поворот f с центром O на угол α и коэффициентом k отображает M на N, где $N = (BC) \cap f(AB)$. Если $\alpha \neq \angle A$ и $\alpha \neq 90^\circ$, то существуют четыре решения, соответствующие углам поворотов α, $-\alpha$, $180^\circ - \alpha$ и $\alpha - 180^\circ$. При $\alpha = 90^\circ \neq \angle A$ имеются только два решения. При $\alpha = \angle A \neq 90^\circ$ и $k \neq AB : BC$ число решений равно трем. Когда $\alpha = \angle A$ и $k = AB : BC$, их бесконечно много, а при $\alpha = \angle A = 90^\circ$ и $k \neq AB : BC$ решений нет.

2.87. Точка B отображается на C гомотетической симметрией f с центром A, осью l и известным коэффициентом $k = AC : AB = m : n$, где m и n — данные отрезки. Если α и β — данные окружности и $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $f(\alpha) = \alpha_1$, то $C \in (\alpha_1 \cap \beta)$. Число решений равно числу общих точек окружностей α_1 и β.

2.88. Если $A \to A_1$ при подобии первого рода с углом α и коэффициентом k, а O — искомый центр этого подобия, то $\angle AOA_1 = \alpha$ и $OA_1 : OA = k$. Поэтому точка O является общей точкой окружности Аполлония, построенной для отрезка A_1A и отношения k, и дуги окружности, вмещающей угол α (ориентированный) и стягиваемой хордой AA_1.

2.89. Пусть m — данная ось подобия φ и $\varphi(A) = A_1$. Если M и M_1 — ортогональные проекции на m точек A и A_1 соответственно, то $\varphi(M) = M_1$. Поэтому центр O подобия можно построить по двум парам соответственных точек (п. 20.2). Однако задача решается значительно проще непосредственно. Так как $OA_1 : OA = AM_1 : AM = k$, то искомый центр O есть общая точка прямой m и окружности Аполлония ω для отрезка A_1A и отношения k. Если $(A_1A) \cap m = M_0$, то $m \cap \omega = \{M_0, O\}$, $M_0 \to O$.

2.90. Если A, B, C, D — данные точки окружности, то центрами 12 подобий второго рода, определяемых парами этих точек, являются точки $(AB) \cap (CD)$, $(AC) \cap (BD)$, $(AD) \cap (BC)$ и только они.

2.91. Данная прямая $a = (AB)$ является двойной. Вторая двойная прямая проходит через центр O подобия перпендикулярно a. Для построения центра O подобия замечаем, что на множестве точек прямой a это подобие является гомотетией с центром O, который просто строится по заданным парам соответственных точек.

2.92. При каждом из восьми подобий центр одного квадрата отображается на центр другого квадрата. Центры подобий удалены от центров квадратов на расстояния, отношение которых равно отношению сторон квадратов. Это значит, что центры квадратов лежат на окружности Аполлония.

2.93. Точка C — центр, оси симметрии прямых CA и CB — двойные прямые данного подобия.

2.94. Пусть A — центр данной гомотетии σ, B — центр данного гомотетического поворота γ. Рассмотрим образы точек A и B при подобии $\varphi = \gamma \circ \sigma$: $\varphi(A) = \gamma(\sigma(A)) = \gamma(A) = A_1$, $\varphi(B) = \gamma(\sigma(B)) = \gamma(B_0) = B_1$. Так как $B_0 \in (AB)$, то $B_1 \in (A_1B)$. Применяя способ окружностей построения центра подобия первого рода (следствие из решения задачи 3 § 21), получаем, что таковым является вторая общая точка Q окружности ABA_1 и окружности, содержащей точки A_1 и B_1 и касающейся прямой AA_1 в точке A_1.

2.95. Если $A_1B_1 : AB = k$, то точки деления отрезков AA_1, BB_1, CC_1 в отношении $\frac{1}{k}$ лежат на оси подобия, отображающего A на A_1, B на B_1, C на C_1. Коллинеарны также точки, делящие эти отрезки в отношении $-\frac{1}{k}$. Аналогичное предположение истинно для подобных многоугольников.

2.96. Один квадрат отображается на другой гомотетическим поворотом около некоторой точки O на $90°$. Точки A и R, B и P, C и B, D и Q являются соответственными при этом подобии. Каждая из указанных окружностей проходит через точку пересечения соответственных при подобии прямых и поэтому содержит центр O подобия.

2.97. Указанные тройки точек принадлежат соответственно осям трех подобий, каждое из которых отображает треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$. Эти подобия имеют общую пару соответственных точек — центры O и O_1 треугольников — и потому их оси проходят через точку, делящую отрезок O_1O в отношении $A_1B_1 : AB$ (п. 20.4).

2.98. Отрезки C_1B_1 и A_1C равны и параллельны, так как служат образами отрезка BC при гомотетических поворотах с центрами A и C на одинаковые углы и с равными коэффициентами.

2.99. Согласно способу построения центра подобия первого рода окружности ABP и A_1B_1P, BCP и B_1C_1P проходят через центр Q подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Тогда окружности ABP и BCP имеют три общие точки B, P, Q и потому совпадают. По той же причине совпадают и окружности A_1B_1P и B_1C_1P.

2.100. Пусть $(AA_1)\cap(BB_1)=P$, $(BB_1)\cap(CC_1)=Q$ (рис. 142). Тогда центр подобия, отображающего треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$, есть вторая точка пересечения окружностей (ABP) и (BCQ). С ним совпадает и вторая точка пересечения окружностей (A_1B_1P) и (B_1C_1Q). Центром подобия, отображающего треугольник ABC на треугольник $A_2B_2C_2$, является вторая общая точка окружностей (ABP) и (BCQ). Центр подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ есть общая точка окружностей (A_1B_1P) и (B_1C_1Q). Значит, центры этих трех подобий совпадают.

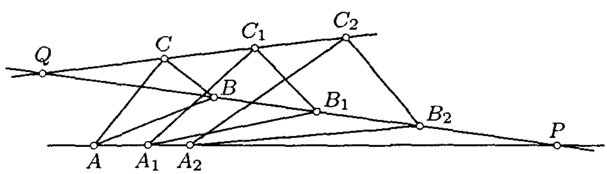


Рис. 142

2.101. На основании п. 20.3 существует подобие, при котором $A\to B$ и $A_1\to B_1$, с тем же центром S, что и в предыдущей задаче. Отсюда $AA_1 : BB_1 = SA : SB$. Существует также подобие с центром S, при котором $A\to B$ и $A_2\to B_2$. Следовательно, $AA_2 : BB_2 = SA : SB$ и, значит, $AA_1 : BB_1 = AA_2 : BB_2$, откуда $AA_1 : AA_2 = BB_1 : BB_2$. Равным образом $BB_1 : BB_2 = CC_1 : CC_2$.

2.102. Композиция заданных *гомотетических поворотов имеет неподвижную точку* B и отлична от движения. Сумма углов поворотов равна $360°$. Следовательно, эта композиция есть гомотетия с центром B и коэффициентом k^3.

2.103. При повороте около центра O треугольника ABC на $120°$ точки A, B, C отображаются соответственно на точки B, C, A, и поэтому в силу равенства отношений точки A_1, B_1, C_1 отображаются соответственно на точки B_1, C_1, A_1, $A_2 \to B_2$, $B_2 \to C_2$, $C_2 \to A_2$, т. е. треугольники равносторонние и имеют общий центр O. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ есть образ треугольника ABC при подобии Π_O^φ, а треугольник $A_2B_2C_2$ — образ треугольника $A_1B_1C_1$ при подобии Π_O^ψ. Имеем $\triangle A_2B_2C_2 = \Pi_O^\psi(\Pi_O^\varphi(\triangle ABC))$. Очевидно, композиция $\Pi_O^\psi \circ \Pi_O^\varphi$ отлична от движения. Если учесть, что $\psi = -\varphi$, то приходим к выводу, что эта композиция есть гомотетия с центром O.

2.104. Пусть P — произвольная точка окружности ω, описанной около треугольника ABC, и A_1, B_1, C_1 — ее ортогональные проекции на прямые BC, CA, AB соответственно. Точки A, B_1, C_1, P лежат на окружности α с диаметром PA (рис. 143). Точки A_1, B_1, C, P также принадлежат окружности γ с диаметром PC. Гомотетический поворот с центром P, отображающий γ на ω, переводит A_1 в B. Гомотетический поворот с центром P, отображающий ω на α, переводит B в C_1. Поэтому композиция этих преобразований отображает γ на α и A_1 на C_1. Так как $\gamma \cap \alpha = \{P, B_1\}$, то $B_1 \in (A_1C_1)$ (задача 3 §21).

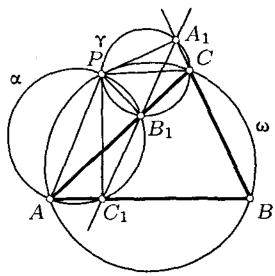


Рис. 143

2.105. Если $(AD) \cap (BC) = O$, то $\angle B_1OC_1 = \angle A_1OD_1$ (подобие). Поэтому поворот, отображающий луч OB_1 на луч OC_1, отображает A_1 на D_1 и, значит, отрезок B_1A_1 на отрезок C_1D_1.

2.106. Точка B переходит в C при гомотетическом повороте с центром A, углом BAC и коэффициентом $k = AC : AB$. Поэтому если B пробегает некоторую прямую m, то C пробегает также прямую, являющуюся образом m при указанном подобии.

2.107. Если S_1 — образ точки S при заданном подобии первого рода и α — угол этого подобия (п. 20.1), то из точек пересечения соответственных прямых пучков с центрами S и S_1 отрезок SS_1 виден под углом α или $180° - \alpha$. Следовательно, искомым множеством точек является окружность, содержащая точки S и S_1.

2.108. Пусть O — центр данного подобия f первого рода. Данный пучок отображается на пучок параллельных прямых. Прямые h и h_1, проходящие через O перпендикулярно прямым данного пучка и их образам, пересекают соответственные прямые этих пучков в соответственных точках. На основании задачи 2.72 множеством точек пересечения соответственных прямых пучков является прямая, проходящая через центр O подобия f.

2.109. Окружность, являющаяся образом окружности α при гомотетическом повороте $(M \to X)$ около точки A на угол CAB с коэффициентом $k = AC : AB$.

2.110. Эти окружности проходят через центр подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

2.111. Из подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеем: $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$ и $A_1C_1 : A_1B_1 = A_2C_2 : A_2B_2 = k$. Если $\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{\overline{C_1C}}{\overline{CC_2}} = \lambda$, то $\overline{AB} = \frac{\overline{A_1B_1} + \lambda\overline{A_2B_2}}{1+\lambda}$ и $\overline{AC} = \frac{\overline{A_1C_1} + \lambda\overline{A_2C_2}}{1+\lambda}$. Подвергнем векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ гомотетическому повороту f на угол α с коэффициентом k (центр произволен): $\overline{A_1B_1} \to \overline{A_1C_1}$ и $\overline{A_2B_2} \to \overline{A_2C_2}$. Значит, $\overline{AB} \to \overline{AC}$ при указанном подобии f. Поэтому треугольник ABC подобен треугольникам $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

2.112. Пусть $R_P^{\alpha}(M) = Q$. Заметим, что $\angle PMQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $MQ : MP = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Точка Q — образ точки P при композиции $H_M^{2\sin(\alpha/2)} \circ R_M^{90^\circ-\alpha/2}$. Следовательно, искомое множество есть образ окружности ω при этой композиции, т. е. окружность.

2.113. Пусть A_0, B_0, C_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB. Если φ — угол поворота, то отображение, при котором $A_0 \to A_2$, $B_0 \to B_2$, $C_0 \to C_2$, есть подобие первого рода с центром I, углом $\frac{\varphi}{2}$ и коэффициентом $\frac{1}{\cos(\varphi/2)}$. Следовательно, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_0B_0C_0$, углы которого равны соответственно $\angle A_0 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$, $\angle B_0 = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A)$, $\angle C_0 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

2.114. Точки пересечения данной прямой с ее прообразом и образом при заданном аффинном преобразовании.

2.115. Прямая, содержащая данную точку и ее прообраз, и прямая, содержащая данную точку и ее образ при заданном преобразовании.

2.117. Достаточно доказать, что это преобразование сохраняет величины углов. Сначала докажите, что оно сохраняет перпендикулярность прямых.

2.119. Треугольник аффинно эквивалентен равнобедренному треугольнику. Используйте свойство прямых, соответственных при осевой симметрии.

2.120. Трапеция аффинно эквивалентна равнобочной трапеции с тем же отношением оснований.

2.121. Задача аналогична задаче 2 § 24.

2.126. Параллелограмм аффинно эквивалентен квадрату, а для него доказываемое утверждение очевидно.

2.127. 1/5.

2.128. В силу аффинности задачи ее достаточно решить для правильного треугольника ABC. Если положить $AM = BM_1 = x$, $AP = CP_1 = y$, $BN = CN_1 = z$, то площади треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ легко выражаются через x, y, z.

2.131. Используйте инвариантность отношения площади круга к площади квадрата, построенного на радиусе этого круга.

2.132. Данный параллелограмм аффинно эквивалентен квадрату $ABCD$. Для него доказываемое равенство принимает вид: $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AR} = \frac{\sqrt{2}}{AQ}$. Отрезок AQ — биссектриса прямого угла A треугольника APR. Докажите, что $AQ = \frac{\sqrt{2}AP \cdot AR}{AP + AR}$.

2.133. Для правильного треугольника ABC сумма $PA_1 + PB_1 + PC_1$ равна его стороне.

2.134. $4S$.

Глава III

3.01. Равенство $OM \cdot OM' = R^2$ следует из подобия треугольников AOM и BOM'.

3.02. Если (O, R) — данная окружность, M и M' — фиксированная пара инверсных относительно нее точек, то рассматриваемое отношение равно $OM : R$.

3.04. Коэффициент гомотетии равен отношению квадратов радиусов окружностей инверсий.

3.05. *Искомая окружность содержит образы данных точек при инверсии относительно данной окружности.*

3.07. Инверсия с центром в общей точке окружностей отображает их на три прямые. Задача сводится к построению окружности, касающейся этих трех прямых.

3.08. Инверсия с центром в данной точке приводит к задаче о построении касательной к окружности параллельно данной прямой.

3.09. Используйте инверсию с центром A.

3.10. К цели приводит инверсия с центром в данной точке.

3.11. Задача эквивалентна задаче 1 § 29.

3.12. Пусть точки A и B лежат внутри окружности α. Инверсия с центром A переводит окружность α в окружность α' и точку B в точку B', причем B' лежит вне α'. Через B' можно провести к α' две и только две касательные прямые.

3.13. Примените вторую теорему § 28 и ее доказательство.

3.14. Если α и β — данные окружности, а ω и ω_1 — окружности инверсий, при каждой из которых $\alpha \to \beta$, то в силу свойства конформности инверсии как ω, так и ω_1 делят углы между α и β пополам. Отсюда следует, что ω и ω_1 ортогональны.

3.15. Докажите, что окружности ABD и BDC ортогональны. При инверсии с центром B они перейдут в перпендикулярные прямые. Доказываемое равенство следует по теореме Пифагора для треугольника $A'C'D'$.

3.16. См. решение задачи 3 § 29.

3.17. Пусть даны окружности σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{A_1, B_1\}$, $\sigma_2 \cap \sigma_3 = \{A_2, B_2\}$, $\sigma_3 \cap \sigma_4 = \{A_3, B_3\}$, $\sigma_4 \cap \sigma_1 = \{A_4, B_4\}$. По условию точки A_1, A_2, A_3, A_4 принадлежат окружности γ (или прямой). Инверсия с центром A_4 отображает окружности γ, σ_1, σ_4 на прямые, а окружности σ_2 и σ_3 — на окружности. Докажите, что в четырехугольнике $B_1'B_2'B_3'B_4'$ сумма противоположных углов равна 180°. Инверсия устанавливает эквивалентность утверждения 3.17 с таким утверждением: если на прямых AB, BC, CA, содержащих стороны треугольника ABC, даны соответственно точки B_1, C_1, A_1, то окружности AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, имеют общую точку.

3.18. Инверсия с центром O отображает окружности на прямые с сохранением величин углов.

3.19. Если окружности имеют общую точку, то инверсия с центром в этой точке отображает их на прямые. Если данные окружности не пересекаются, то построим какие-либо две пересекающиеся окружности, ортогональные каждой из данных окружностей (задача 3.06). Инверсия с центром в точке пересечения построенных окружностей переводит их в две пересекающиеся прямые, а две данные окружности — в окружности, ортогональные каждой из этих прямых. Поэтому они имеют центр в точке пересечения прямых.

3.20. Примените построение инверсных точек с помощью пары окружностей, ортогональных окружности инверсии (второе определение инверсии, п. 26.2).

3.21. Если даны окружности α и β, то существует окружность ω, инверсия относительно которой отображает α на β. Инверсия относительно любой окружности с центром A на ω отображает ω на прямую, а инверсию относительно ω — в осевую симметрию (задача 3.20). Поэтому образы окружностей α и β при инверсии с центром A равны.

Литература

[1] Адамар Ж. Элементарная геометрия. — М.: Учпедгиз, 1957.

[2] Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. — М.: Учпедгиз, 1955.

[3] Атанасян Л. С. и др. Геометрия 7—9. — М.: Просвещение, 1990.

[4] Болтянский В. Г., Яглом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4. — М.: Наука, 1966. С. 307—348.

[5] Болтянский В. Г., Яглом И. М. Преобразования. Векторы. — М.: Просвещение, 1964.

[6] Готман Э. Г. Уравнения, тождества, неравенства при решении геометрических задач. — М.: Просвещение, 1965.

[7] Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.

[8] Готман Э. Г., Скопец З. А. Задача одна — решения разные. — Киев: Радянська школа, 1988.

[9] Жаров В. А., Марголите П. С., Скопец З. А. Вопросы и задачи по геометрии. — М.: Просвещение, 1965.

[10] Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962.

[11] Кантор П. Р., Раббот Ж. М. Площади многоугольников // Квант. 1972. №2. С. 36—41.

[12] Киселев А. П. Геометрия. — М.: Учпедгиз, 1962.

[13] Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.

[14] Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.

[15] Кузнецова Л. И., Скопец З. А. Метод подобия при решении планиметрических задач // Математика в школе. 1977. №6. С. 58—63.

[16] Кузнецова Л. И. Сборник упражнений и задач на перемещения и подобия плоскости и пространства. — Ярославль: Ярославский пед. ин-т, 1977.

[17] Кушнир И. А. Применение гомотетии при решении некоторых задач планиметрии // Математика в школе. 1978. №5. С. 82—84.

[18] Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. — М.: Изд-во МГУ, 1961.

[19] Перепелкин Д. А. Курс элементарной геометрии. Ч. 1. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

[20] Понарин Я. П., Скопец З. А. Перемещения и подобия плоскости. — Киев: Радянська школа, 1981.

[21] Понарин Я. П. Преобразования подобия плоскости // Математика в школе. 1979. №3. С. 62—67.

[22] Понарин Я. П. Гармонический четырехугольник // Квант. 1991. №10. С. 48—52.

[23] Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. Н. Яковлева — М.: Наука, 1982.

[24] Прасолов В. В. Задачи по геометрии, в 2-х ч. — М.: Наука, 1986.

[25] Саранцев Г. И. Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1975.

[26] Сборник задач по математике для факультативных занятий в 9—10 классах / Под ред. З. А. Скопеца. — М.: Просвещение, 1971.

[27] Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии. — М.: Учпедгиз, 1962.

[28] Скопец З. А. Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990.

[29] Скопец З. А., Понарин Я. П. Геометрия тетраэдра и его элементов. — Ярославль: Волго-Вятское книжное издательство, 1974.

[30] Фалькенштейн Э. М. Признаки перемещений // Математика в школе. 1973. №6.

[31] Фишман В. М. Решение задач с помощью геометрических преобразований // Квант. 1975. №7.

[32] Хан Д. И. О решении геометрических задач с помощью векторов // Математика в школе. 1974. №1.

[33] Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1982.

[34] Шарыгин И. Ф. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. 1976. №11. С. 22—30.

[35] Шарыгин И. Ф. Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей // Квант. 1990. №8. С. 66—69.

[36] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.

[37] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.

[38] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. — М.: Наука, 1967.

[39] Шоластер Н. Н. Задачи на геометрические преобразования // Математика в школе. 1976. №3.

[40] Яглом И. М. Геометрические преобразования, в 2-х т. — М.: ГИТТЛ. 1955. 1956.

[41] Яглом И. М., Атанасян Л. С. Геометрические преобразования // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4. — М.: Физматгиз, 1963.

[42] Янченко А. М. Применение композиций симметрии при решении задач // Математика в школе. 1975. №5.

Предметный указатель

Яков Петрович Понарин

Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия, преобразования плоскости.
Редактор Семенов А. В.
Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 07.09.2004 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 19,5. Тираж 2000 экз. Заказ № 5545.

МЦНМО
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, д. 93.

Данное пособие призвано возродить интерес к элементарным методам решения геометрических задач. В нем приведены яркие геометрические сведения, не вошедшие в современный школьный учебник. Например, формула Эйлера, окружность девяти точек, теорема Птолемея, геометрические неравенства и многое другое.

Книга адресована всем, кто желает расширить и углубить знания по элементарной геометрии — от школьников средних классов до учителей математики и студентов педагогических вузов.

ISBN 5-94057-171-9

9 785940 571711 >