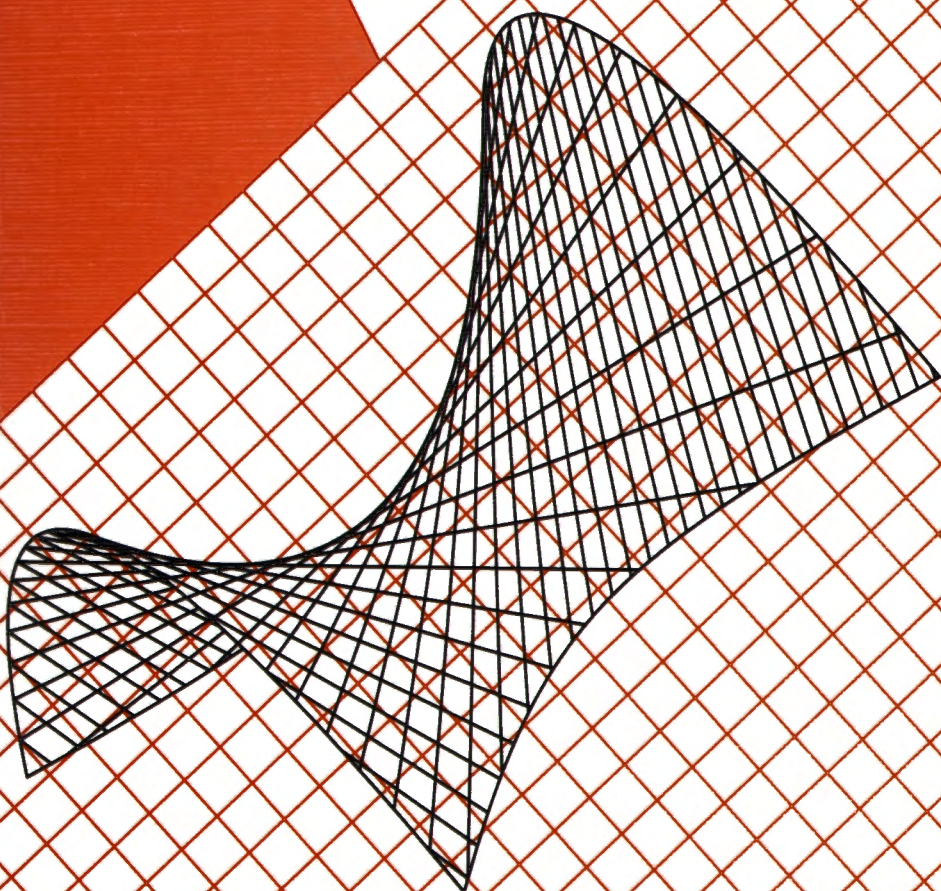


Я. П. ПОНАРИН

АФФИННАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Я. П. Понарин

АФФИННАЯ
И ПРОЕКТИВНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 514.14
ББК 22.151.3
П56

Понарин Я. П.
П56 Аффинная и проективная геометрия. — М.: МЦНМО,
2009. — 288 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-401-9

Книга содержит элементарное систематическое изложение двух классических геометрий как самостоятельных геометрических дисциплин без использования метрических понятий. Она адресуется лицам, желающим самостоятельно заняться изучением основ высшей геометрии. Основное внимание уделяется аффинным и проективным преобразованиям. На базе проективной геометрии представлены модели аффинной, евклидовой геометрий, геометрии Минковского и геометрии Лобачевского.

Предполагается, что читатель имеет хорошие знания элементарной геометрии и определённый уровень общей математической культуры.

Имеется список задач для самостоятельного решения (около 200 задач).

Книга может служить учебным пособием для студентов математических факультетов вузов.

ББК 22.151.3

ISBN 978-5-94057-401-9

© МЦНМО, 2009.

© Понарин Я. П., наследники, 2009.

Предисловие	12
-----------------------	----

ЧАСТЬ I. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА I. ОСНОВЫ АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§1. Понятие об аффинной геометрии	17
1.1. Аффинная плоскость (17). 1.2. Аксиоматика аффинной геометрии плоскости (17). 1.3. Аффинная геометрия как самостоятельная наука (19).	
§2. Некоторые аффинные понятия и теоремы	20
2.1. Равенство отрезков прямой и параллельных прямых (20). 2.2. Теорема Фалеса (21). 2.3. Сравнение сонаправленных отрезков. Отношение коллинеарных отрезков (22). 2.4. Аффинная теорема Паппа (23). 2.5. Гомотетичные треугольники (24).	
§3. Аффинные операции над векторами	25
3.1. Сложение и вычитание векторов (25). 3.2. Умножение вектора на действительное число (25). 3.3. Алгебраические свойства аффинных операций над векторами (26).	
§4. Косое произведение векторов	27
4.1. Определение и его следствия (27). 4.2. Геометрический смысл косого произведения (28). 4.3. Следствия (29).	
§5. Косое произведение векторов в доказательствах аффинных теорем планиметрии	30
5.1. Свойство трапеции (30). 5.2. Теорема Гаусса (30). 5.3. Свойство пары аффинно связанных треугольников (31). 5.4. Отношение площадей четырёхугольника и ассоциированного с ним треугольника (32).	
§6. Аффинные преобразования плоскости	32
6.1. Определение и примеры аффинных преобразований (33). 6.2. Сохранение параллельности прямых при аффинных преобразованиях (34). 6.3. Теорема Дарбу (34).	
§7. Числовые инварианты аффинных преобразований	35
7.1. Отношение коллинеарных векторов (35). 7.2. Инва-	

риантность отношения площадей плоских фигур (36).	
7.3. Аффинные преобразования первого и второго родов (37).	
§8. Конструктивное задание и координатные формулы аффинного преобразования	38
8.1. Теорема о задании аффинного преобразования (38).	
8.2. Координатные формулы аффинного преобразования (39).	
§9. Неподвижные точки и неизменяемые направления	40
9.1. Неподвижные точки (40).	
9.2. Неизменяемые направления (41).	
§10. Родственные преобразования	43
10.1. Свойства родства (43).	
10.2. Представление аффинного преобразования композицией двух родственных (45).	
§11. Построение центра аффинного преобразования	46
11.1. Использование композиции двух родственных преобразований (46).	
11.2. Другой способ построения центра аффинного преобразования (46).	
§12. Формулы аффинных преобразований некоторых частных видов	48
12.1. Родство (48).	
12.2. Сдвиг (49).	
12.3. Гомотетия (49).	
12.4. Перенос и переносная симметрия (50).	
§13. Эквиаффинные преобразования как композиции косых симметрий	51
13.1. Примеры (51).	
13.2. Теоремы о разложении эквиаффинных преобразований (51).	
13.3. Критерий эквицентроаффинного преобразования (52).	
§14. Группы преобразований и геометрии	53
14.1. Понятие группы преобразований. Примеры (53).	
14.2. Определение геометрии по Клейну (54).	
14.3. Аффинно эквивалентные фигуры (54).	
Типизация основных видов аффинных преобразований плоскости	55
Задачи и упражнения	56
ГЛАВА II. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ	
§15. Эллипс	60
15.1. Аффинное определение и каноническое уравнение эллипса (60).	
15.2. Исследование аффинных свойств эллипса по его каноническому уравнению (61).	
15.3. Задание эллипса двумя его сопряжёнными диаметрами (63).	
15.4. Пара-	

метрические уравнения эллипса (64). 15.5. Теорема Аполлония (64).	
§ 16. Аффинные автоморфизмы эллипса	65
16.1. Координатные формулы автоморфизмов эллипса (65).	
16.2. Конструктивное представление эллиптического поворота (66). 16.3. Геометрический смысл угла эллиптического поворота (67).	
§ 17. Гипербола	68
17.1. Аффинное определение гиперболы и её каноническое уравнение (68). 17.2. Асимптоты гиперболы. Сопряжённые гиперболы (70). 17.3. Уравнение гиперболы относительно её асимптот (71). 17.4. Параметрические уравнения гиперболы (71). 17.5. Построение точек гиперболы (72). 17.6. Гипербола как график дробно-линейной функции (72).	
§ 18. Аффинные автоморфизмы гиперболы. Гиперболический поворот	73
18.1. Справка о гиперболических синусе и косинусе (73). 18.2. Автоморфизмы гиперболы (74). 18.3. Гиперболический поворот (75).	
§ 19. Парабола	76
19.1. Аффинное определение и каноническое уравнение параболы (76). 19.2. Диаметры параболы (78). 19.3. Построение точек параболы (78).	
§ 20. Аффинные автоморфизмы параболы	79
20.1. Формулы автоморфизмов параболы (79). 20.2. Параболический поворот (80).	
§ 21. Диаметры и касательные	81
21.1. Критерии сопряжённости двух диаметров эллипса и гиперболы (81). 21.2. Касательные к кривым второго порядка (81). 21.3. Построение касательных (83).	
§ 22. Общее уравнение линий второго порядка	83
22.1. Определения (83). 22.2. Критерий вырожденности кривой второго порядка (84).	
§ 23. Определение вида невырожденной кривой второго порядка по её общему уравнению	86
23.1. Аффинная эквивалентность эллипсов, гипербол, парабол (86). 23.2. Признаки эллипса (86). 23.3. Критерий гиперболы (87). 23.4. Признаки параболы (87). 23.5. О мнимых кривых второго порядка (88).	
Историческая справка	89
Задачи и упражнения	90

ГЛАВА III. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

§24. Аффинное пространство	93
24.1. Аксиоматика аффинной стереометрии (93). 24.2. Параллельные прямые и плоскости (93).	
§25. Тройное произведение векторов	94
25.1. Определение и свойства тройного произведения (94).	
25.2. Геометрический смысл тройного произведения (96).	
§26. Аффинные преобразования пространства	97
26.1. Определение и его следствия (97). 26.2. Конструктивное задание аффинного преобразования (97). 26.3. Координатные формулы аффинного преобразования пространства (98). 26.4. Отношение объёмов — аффинный инвариант (99).	
§27. Неподвижные точки и неизменяемые направления аффинного преобразования пространства	100
27.1. Неподвижные точки (100). 27.2. Неизменяемые направления (101). 27.3. Плоскости неизменяемых направлений (102).	
§28. Родственные преобразования	103
28.1. Родство пространства (103). 28.2. Частные виды родственных преобразований пространства (104). 28.3. Формулы родственных преобразований (105).	
§29. Некоторые специальные виды аффинных преобразований пространства	106
29.1. Косая осевая симметрия (106). 29.2. Переносная симметрия (106). 29.3. Косой перенос (107). 29.4. Аффинные повороты (107). 29.5. Параболический сдвиг (108).	
§30. Центр аффинного преобразования пространства	109
§31. Аффинные автоморфизмы тетраэдра	109
Задачи и упражнения	111

ГЛАВА IV. КВАДРИКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§32. Определение квадрики. Пересечение квадрики с плоскостью	113
32.1. Определение (113). 32.2. Пара плоскостей как квадрика (113). 32.3. Пересечение квадрики с плоскостью (114).	
§33. Цилиндрические квадрики	115
33.1. Определение и составление уравнения цилиндрической квадрики (115). 33.2. Канонические уравнения цилиндрических квадрик (117). 33.3. Проекция кривой на координатную плоскость (117).	

натную плоскость (118). 33.4. Плоские сечения цилиндрических квадрик (119).	
§ 34. Конические квадрики	120
34.1. Определение конической квадрики, составление её уравнения (120). 34.2. Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат. Каноническое уравнение конуса (121). 34.3. Условие распада конической квадрики на пару плоскостей (122).	
§ 35. Кривые второго порядка как конические сечения	123
§ 36. Эллипсоид	125
36.1. Определение и геометрическая форма эллипсоида (125). 36.2. Сопряжённые диаметры и диаметральные плоскости эллипсоида (126). 36.3. Сопряжённые тройки диаметров и сопряжённые тройки диаметральных плоскостей (128).	
§ 37. Гиперболоиды	129
37.1. Однополостный гиперболоид (129). 37.2. Двуполостный гиперболоид (132).	
§ 38. Однополостный гиперболоид как линейчатая квадрика	134
§ 39. Эллиптический параболоид	140
39.1. Аффинное каноническое уравнение и сечения эллиптического параболоида (140). 39.2. Диаметральные плоскости и диаметры эллиптического параболоида (142).	
§ 40. Гиперболический параболоид	143
40.1. Сечения и форма гиперболического параболоида (143). 40.2. Диаметральные плоскости и диаметры гиперболического параболоида (145). 40.3. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида (146).	
§ 41. Касательные прямые и касательные плоскости к квадрикам	147
41.1. Касательные прямые (147). 41.2. Касательные плоскости (148).	
§ 42. Аффинная классификация квадрик	149
Задачи и упражнения	151

Часть II. Проективная геометрия

Глава I. Основы геометрии проективной плоскости

§ 1. Определение проективной плоскости	155
--	-----

§24. Полярное соответствие (поляритет)	221
24.1. Определение и координатные формулы (221). 24.2. Пучок прямых второго порядка (222). 24.3. Понятие о корреляции общего вида (223).	
§25. Теорема Бриансона	223
25.1. Теорема Бриансона для описанного шестиугольника (223). 25.2. Теорема Бриансона для вырожденных шестиугольников (224). 25.3. Обратная теорема Бриансона (225).	
§26. Проективные связи точек кривой второго порядка и прямой линии	226
26.1. Перспективное соответствие (226). 26.2. Проективное преобразование кривой второго порядка (227). 26.3. Теорема Штаудта (228). 26.4. Критерий инволюции кривой второго порядка (228).	
§27. Проективная классификация линий второго порядка	229
Задачи и упражнения	231
ГЛАВА IV. ПРОЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ АФФИННОЙ И ТРЁХ МЕТРИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЙ	
§28. Проективно-аффинная плоскость. Проективно-аффинные преобразования	233
§29. Основные понятия проективно-аффинной геометрии	236
29.1. Параллельные прямые (237). 29.2. Проективно-аффинное определение вектора (237). 29.3. Отношение коллинеарных векторов (239).	
§30. Умножение вектора на число	240
30.1. Ассоциативность умножения вектора на число (240). 30.2. Дистрибутивный закон умножения вектора на число (241).	
§31. Аффинное истолкование проективных теорем	241
§32. Линии второго порядка на проективно-аффинной плоскости	243
32.1. Аффинные свойства линий второго порядка (243). 32.2. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в аффинных координатах (245). 32.3. Аффинная классификация линий второго порядка (246).	
§33. Проективно-евклидова плоскость. Преобразования подобия	247
33.1. Формулы преобразования подобия (248).	
§34. Длина отрезка и мера угла на проективно-евклидовой плоскости. Групповой подход к евклидовой геометрии	250

§ 35. Проективно-аффинная модель псевдоевклидовой геометрии	254
35.1. Абсолют псевдоевклидовой плоскости (254). 35.2. Векторы псевдоевклидовой плоскости (255). 35.3. Угол между векторами (256).	
§ 36. Проективные преобразования, сохраняющие абсолют псевдоевклидовой плоскости	257
36.1. Псевдоевклидовы подобию (257). 36.2. Псевдоевклидовы движения (258).	
§ 37. Псевдоевклидова элементарная планиметрия	260
37.1. Сумма углов треугольника (260). 37.2. Площадь треугольника (260). 37.3. Теоремы синусов и косинусов (260). 37.4. Неравенство треугольника (261). 37.5. Окружности псевдоевклидовой плоскости (261).	
§ 38. Проективная модель плоскости Лобачевского	263
38.1. Абсолют (263). 38.2. Взаимное расположение двух прямых гиперболической плоскости (264).	
§ 39. Проективная метрика гиперболической плоскости	266
39.1. Длина отрезка (266). 39.2. Мера угла (267). 39.3. Основное соотношение геометрии Лобачевского (267).	
§ 40. Движения гиперболической плоскости	269
40.1. Определение и общие свойства (269). 40.2. Осевая и центральная симметрии (269). 40.3. Повороты. Скольжение вдоль прямой (270). 40.4. Представление произвольного движения композицией осевых симметрий (271).	
§ 41. Пучки прямых и циклы в гиперболической плоскости	272
41.1. Пучки прямых (272). 41.2. Окружность, орицикл, эквидистанта (273).	
Задачи и упражнения	274
Исторический очерк о проективной геометрии	277
Ответы к некоторым задачам	281
Предметный указатель	284
Список литературы	287

Предисловие

Открытая вами книга содержит основы аффинной и проективной геометрий в систематическом «элементарном» изложении. Даже первоначальное знакомство с «высшими» геометриями предполагает наличие у читателя определённых геометрических знаний и математической культуры в объёме, скажем, первых двух томов «Элементарной геометрии» [12] этого же автора.

Книга состоит из двух относительно самостоятельных частей (со своей нумерацией параграфов) — аффинной и проективной геометрий. Их содержание определилось в ходе длительной работы автора в педагогических вузах и творческого общения с коллегами и издателями.

Отдельно по аффинной геометрии мне известны только две книги [8] и [16]. Аффинные свойства фигур встречаются на страницах геометрических пособий среди материала другого назначения. В книгах [3], [7], [14] имеются главы полностью с аффинным содержанием, много внимания аффинной геометрии уделено авторами учебников [4] и [10].

О специальных книгах [8] и [16] надо сказать особо. Книга А. М. Комиссарука содержит глубокое и подробное изложение аффинной геометрии на самостоятельном аксиоматическом фундаменте, без связи с евклидовой геометрией. Однако она имеет, на наш взгляд, два недостатка: 1) изложение сильно усложняется обилием второстепенного материала, громоздкостью классификации аффинных преобразований и связанных с ней терминов и обозначений; 2) при доказательстве планиметрических аффинных свойств автор прибегает к использованию стереометрических фактов.

В книге [16] И. М. Яглома и В. Г. Ашкинудзе изложение ведётся на основе евклидовой геометрии, хотя авторы справедливо считают аффинную геометрию самостоятельной наукой. Для начинающего читателя это вполне приемлемо.

Учебная литература по проективной геометрии насчитывает немало книг, изданных в основном в 50–60-е годы прошлого века и рассчитанных на различные вкусы и уровни подготовки читателей. Многократно издавалось учебное пособие [14] Н. Ф. Четверухина. По убеждению его автора, оно сознательно построено на основе евклидовой геометрии, чем закрывается сама сущность проективной геометрии как геометрии, не содержащей метрических понятий. В меньшей мере этим недостатком страдают и другие книги, кроме книги [3] Г. Б. Гуревича, которая содержит изложение проективной геометрии, независимое от евклидовой.

В настоящее время резко сократился выпуск учебных пособий по математике для вузов, в особенности по геометрии. При написании этого пособия я ставил целью изложить доступно в систематическом виде начала аффинной и проективной геометрий на самостоятельной основе, без привлечения метрических понятий и теорем.

В качестве аксиоматического фундамента аффинной геометрии взяты аффинные аксиомы классической аксиоматики Гильберта евклидовой геометрии. Но они не являются самодовлеющими, не обременяют изложение, являясь его научной основой. В первой части книги содержится аффинная элементарная геометрия, аффинные преобразования плоскости и пространства, аффинная теория кривых второго порядка и квадрик.

Аксиоматика проективной плоскости заимствована из работы [13] и состоит из четырёх простых аксиом. Используются как синтетический, так и аналитический методы изложения, которые дополняют друг друга, способствуя доступности доказательств. Введение проективной системы координат значительно облегчено ссылкой на барицентрические координаты [12, т. 3], являющиеся частным видом проективных.

Отдельная глава IV второй части книги посвящена применениям проективной геометрии и построению моделей аффинной, евклидовой, псевдоевклидовой и гиперболической геометрий. Без такого материала невозможно полностью оценить проективные идеи, принадлежащие к величайшим достижениям математики XIX века. Сравнение двух изложений аффинной геометрии с разных позиций имеет для читателя большое принципиальное общеобразовательное значение.

Работая над рукописью этой книги, имеющей в основном педагогические цели, я не стремился давать непременно оригинальные доказательства, а считал возможным и целесообразным в допустимой мере использовать литературные источники, указанные в прилагаемом списке, поскольку неоправданное стремление к оригинальности идёт в ущерб доступности. В целом же получилось пособие, думаю, не похожее на имеющиеся. Тому можно было бы привести немало примеров. Скажем, построена оригинальная проективно-аффинная теория векторов. Проективная модель евклидовой геометрии строится без «абсолютной» инволюции, а задание мнимых циклических точек с помощью кривой второго порядка, не пересекающей прямую абсолюта («единичной окружности»), позволяет успешно решать многие конструктивные задачи на проективно-евклидовой плоскости.

Я не представляю себе изучение математики без решения задач. Упражнения (всего их более 200), подобранные к каждой из восьми глав книги, позволяют глубже усвоить теоретический материал, полу-

чить удовлетворение от их успешного решения. Решать их все совсем необязательно. Достаточно выбрать из предлагаемых наборов наиболее интересные для себя. При неудачах необходимо приступать к решению неоднократно. Почти ко всем задачам вычислительного характера даны авторские ответы. В задачах на доказательство лучше не давать никаких «указаний», дабы не сбивать решающего с его идеи решения, поскольку решения автора не всегда оказываются лучшими.

В основном книга предназначена для самостоятельной работы над ней. Вместе с тем она может служить и учебным пособием для студентов математических факультетов педагогических университетов по общему курсу геометрии, а также для спецкурсов и спецсеминаров, для работы над курсовыми и дипломными темами. Автор будет благодарен за доброжелательную критику.

Я. П. Понарин

ЧАСТЬ I

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Основы аффинной геометрии на плоскости

С началами аффинной геометрии плоскости читатель уже знаком по материалу второй части первого тома «Элементарной геометрии» [12, § 22–24]. Желательно повторить его перед началом чтения книги. Здесь аффинная геометрия излагается в систематическом виде.

§1. Понятие об аффинной геометрии

1.1. Аффинная плоскость как геометрический объект идентична евклидовой плоскости. Однако её геометрическая структура существенно отличается от евклидовой: в *аффинной плоскости нет метрики*, т. е. длин отрезков и величин углов, поэтому отсутствуют и все понятия, связанные с ними, такие как окружность, квадрат, ромб, правильный треугольник (многоугольник), перпендикулярность прямых, биссектриса угла и др. По этой причине геометрия аффинной плоскости (*аффинная геометрия*) значительно беднее евклидовой геометрии. Однако, как мы убедимся в дальнейшем, это вовсе не означает, что аффинная геометрия малосодержательна.

Основными объектами аффинной геометрии являются точка и прямая с основными отношениями между ними «лежать на» (принадлежать) и «лежать между» для трёх точек прямой (порядок точек на прямой). К аффинной геометрии относятся все другие объекты и отношения, которые могут быть определены через указанные, как-то: отрезок, луч, угол, вектор, параллельность, коллинеарность векторов, линейная зависимость векторов, равенство отрезков одной прямой или параллельных прямых и др. По своему происхождению аффинная геометрия тесно связана с параллельным проектированием прямой на прямую и плоскость и его числовыми инвариантами: отношением коллинеарных отрезков (векторов) и отношением площадей плоских фигур.

1.2. Аксиоматика аффинной геометрии плоскости. Аксиоматически аффинную плоскость можно определить как множество точек и множество его подмножеств — прямых, связанных отношениями принадлежности и порядка, удовлетворяющих следующим девяти аксиомам системы Гильберта¹, разделённым на четыре группы I–IV.

¹Давид Гильберт (1862–1943) — немецкий математик, классик математики. Его творчество охватывает всю математику. Он дал полную систему аксиом евклидовой

I. Аксиомы принадлежности

I_1 . Для любых двух (различных) точек A и B существует единственная содержащая их прямая.

I_2 . Каждая прямая содержит по крайней мере две точки.

I_3 . Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

II. Аксиомы порядка

II_1 . Среди любых трёх (различных) точек одной прямой (и только среди таких трёх точек) существует одна и только одна точка, лежащая между двумя другими.

II_2 . Для любых двух точек A и B существует хотя бы одна такая точка C , что B лежит между A и C .

II_3 (**аксиома Паша**²). Пусть A, B, C — три точки, не принадлежащие одной прямой, и a — прямая, не содержащая ни одну из этих точек (рис. 1). Если при этом прямая a содержит точку, лежащую между A

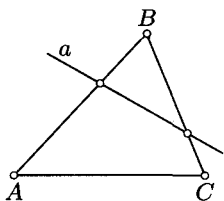


Рис. 1

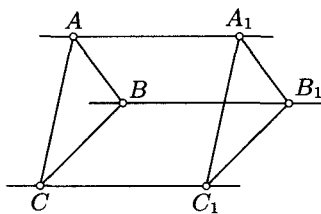


Рис. 2

и B , то она содержит либо точку, лежащую между A и C , либо точку, лежащую между B и C .

III. Аксиомы параллельности

III_1 (**аксиома Евклида**). Для любой точки M , не принадлежащей прямой a , существует единственная такая прямая m , что не существует точки, принадлежащей одновременно обеим прямым a и m . Прямые a и m называются взаимно *параллельными*.

III_2 (**аффинная аксиома Дезарга**). Если прямые AA_1 и BB_1 параллельны прямой CC_1 , прямая AB параллельна прямой A_1B_1 и прямая BC — прямой B_1C_1 , то прямая AC параллельна прямой A_1C_1 (рис. 2).

геометрии, в 1900 году сформулировал на международном конгрессе 23 важнейшие проблемы математики.

²Мориц Паш (1843–1930) — немецкий математик, предшественник Гильберта в области оснований геометрии. Аксиома II_3 взята Гильбертом из книги М. Паша «Лекции по основаниям геометрии» (1832).

IV. Аксиома непрерывности

Аксиома Дедекинда³. Пусть все точки, лежащие между точками A и B , и сами точки A и B разделены на два класса так, что

- а) точка A принадлежит первому классу, а точка B — второму;
- б) любая точка первого класса, отличная от A (если такие точки существуют), лежит между A и любой точкой второго класса.

Тогда существует либо такая точка C , принадлежащая первому классу, что все точки, лежащие между C и B , принадлежат второму классу, либо такая точка C , принадлежащая второму классу, что все точки, лежащие между A и C , принадлежат первому классу.

В таком случае о точке C говорят, что она производит *дедекиндово сечение* указанного множества точек на два класса.

Из аксиомы Дедекинда можно вывести два фундаментальных предложения — *постулат Архимеда* и *принцип Кантора* (о вложенных отрезках).

Постулат Архимеда. Пусть на луче AB дан отрезок CD и взяты точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ так, что точка A_1 лежит между A и A_2 , точка A_2 — между A_1 и A_3 и т. д., причём отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ равны отрезку CD . Тогда существует такая точка A_n луча AB , что B лежит между A и A_n (равенство отрезков прямой определено в п. 2.1).

Принцип Кантора⁴. Пусть на прямой a дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего, и при этом не существует отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой последовательности. Тогда на прямой a существует единственная точка C , лежащая внутри всех отрезков A_iB_i ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Обратно, из этих двух утверждений можно получить принцип Дедекинда. Однако эти доказательства находятся в стороне от нашего основного изложения и поэтому не приводятся.

1.3. Аффинная геометрия как самостоятельная наука. Совокупность всех утверждений (теорем), которые можно вывести из аксиом изложенной выше аксиоматики, составляет содержание аффинной геометрии на плоскости, которая может быть и евклидовой плос-

³Рихард Дедекинд (1831–1916) — немецкий математик, ученик Гаусса и Дирихле в Геттингенском университете. Один из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел, сформулировал полную систему аксиом арифметики, содержащую, в частности, принцип полной математической индукции.

⁴Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, творец теории множеств. Родился в Петербурге, окончил Берлинский университет в 1867 г. Развил одну из теорий иррациональных чисел.

костью. Поэтому аффинная геометрия полностью входит в евклидову геометрию. Однако такое подчинённое положение аффинной геометрии по отношению к евклидовой не вытекает неизбежно из самого содержания этих геометрий, а лишь является следствием метода доказательств аффинных теорем и введения аффинных понятий

Слово «аффинный» (лат. *affinis* — родственный, близкий) введено ещё Эйлером, но только после появления Эрлангенской Программы Клейна (1872) аффинная геометрия была признана самостоятельной наукой как теория инвариантов аффинной группы преобразований⁵. (Подробнее об этом говорится в §11.)

Для построения аффинной геометрии плоскости мало исключить группу аксиом конгруэнтности (и само отношение конгруэнтности) из аксиоматики Гильберта евклидовой геометрии. Необходимо ещё включить аксиому Π_2 — аффинную аксиому Дезарга. В евклидовой геометрии это утверждение легко доказывается с помощью теорем о равенстве треугольников. Гильберт показал, что если не пользоваться аксиомами конгруэнтности, то предложение Π_2 никогда не удастся доказать. Поэтому в аффинной геометрии его приходится принимать в качестве аксиомы в группе аксиом параллельности. При самостоятельном построении аффинной геометрии эта аксиома играет роль, аналогичную роли признаков равенства треугольников в геометрии Евклида.

§2. Некоторые аффинные понятия и теоремы

2.1. Равенство отрезков прямой и параллельных прямых. На основе аксиом аффинной геометрии определим одно из важнейших аффинных понятий — равенство параллельных отрезков.

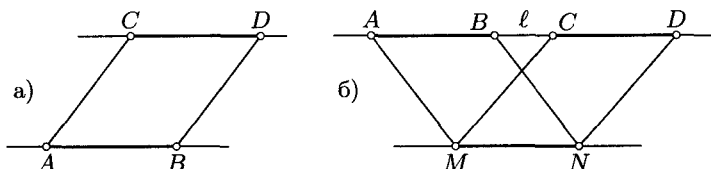


Рис. 3

Определение. Отрезки AB и CD параллельных прямых называются *равными*, если $AC \parallel BD$ (рис. 3а). Отрезки AB и CD одной

⁵Эрлангенская Программа — краткое название программной работы Клейна «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», представляющей собой развёрнутое изложение речи Клейна при вступлении в должность заведующего кафедрой геометрии Эрлангенского университета (г. Эрланген, Германия).

прямой ℓ называются *равными*, если существует третий отрезок MN , лежащий на прямой, параллельной ℓ , и равный каждому из отрезков AB и CD (рис. 36).

Согласно этому определению равенство отрезков есть отношение между направленными отрезками: из того, что $AB = CD$, не следует, что $AB = DC$.

Из определения вытекают рефлексивность ($AB = AB$), симметричность ($AB = CD \Rightarrow CD = AB$) и транзитивность ($AA_1 = BB_1$ и $BB_1 = CC_1 \Rightarrow AA_1 = CC_1$) отношения равенства параллельных отрезков. Последнее есть следствие аффинной аксиомы Дезарга.

Для примера применения определённого выше понятия докажем, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из них пополам.

Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 4). Проведём $BM \parallel AC$ и $OM \parallel AD$. Тогда по определению равенства отрезков $CO = BM$. Из треугольников OCD и MBA по аксиоме Дезарга $AM \parallel DO$. Следовательно, $BM = OA$, и поэтому $CO = OA$.

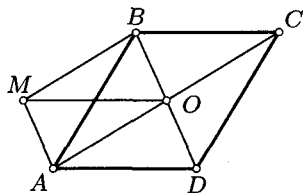


Рис. 4

2.2. Теорема Фалеса. Пусть через концы равных отрезков прямой m проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую ℓ . Тогда они отсекают на прямой ℓ также равные между собой отрезки.

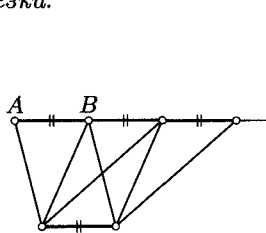


Рис. 6

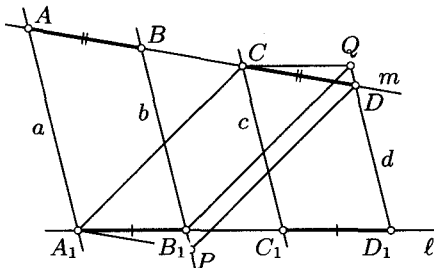


Рис. 5

Доказательство. Пусть отрезки $AB = CD$ лежат на прямой m и параллельные прямые a, b, c, d , проходящие через концы этих отрезков, пересекают прямую ℓ соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 5). Проведём $A_1P \parallel m$, $P \in b$, тогда $A_1P = AB$. По свойству транзитивности $A_1P = CD$, вследствие чего $A_1C \parallel PD$. Пусть $B_1Q \parallel PD$, где $Q \in d$. Тогда из треугольников A_1PB_1 и CDQ по аксиоме Дезарга получаем, что $CQ \parallel \ell$, а поэтому $CQ = A_1B_1$ и $CQ = C_1D_1$, откуда $A_1B_1 = C_1D_1$. $\square$

Определение равных отрезков позволяет умножить отрезок AB на натуральное число m (рис. 6, $m = 2; 3$), а теорема Фалеса — делить его на любое число равных частей. Этим самым определяется операция умножения отрезка AB на рациональное положительное число $\frac{m}{n}$. При умножении отрезка на отрицательные рациональные числа добавляется смена направления отрезка на противоположное.

2.3. Сравнение сонаправленных отрезков. Отношение коллинеарных отрезков. Сонаправленность и противоположенность коллинеарных отрезков AB и CD можно определить соответственно тому, лежат ли точки B и D в одной полуплоскости от прямой AC или же в различных полуплоскостях. Определим понятия «меньше» и «больше» для двух сонаправленных отрезков AB и CD .

Пусть A, B, C — три точки одной прямой и отрезки AB и AC сонаправлены. По определению полагаем, что $AB < AC$, если B лежит между A и C , и $AB > AC$, если C лежит между A и B .

Если отрезки AB и CD параллельны и сонаправлены, то на прямой AB построим отрезок $AE = CD$. Тогда полагаем, что $AB < CD$, если $AB < AE$, и $AB > CD$, если $AB > AE$.

Теорема. Для любых двух коллинеарных отрезков AB и CD существует единственное действительное число λ , при котором

$$AB = \lambda \cdot CD.$$

Доказательство. Пусть отрезки AB и CD сонаправлены. Разобьём множество всех положительных рациональных чисел на два класса — «нижний» и «верхний». К нижнему классу отнесём все такие рациональные положительные числа p , что $p \cdot CD \leq AB$. К верхнему классу — все рациональные положительные числа q , для каждого из которых $q \cdot CD > AB$. Согласно постулату Архимеда существуют такие натуральные числа m и n , что $AB < m \cdot CD$ и $CD \leq n \cdot AB$. Поэтому оба класса непусты: нижний класс содержит рациональное число $\frac{1}{n}$, а верхнему классу принадлежит число $q = m$, поскольку $\frac{1}{n} \cdot CD \leq AB$. Из неравенств $p \cdot CD \leq AB < q \cdot CD$ следует, что $p < q$. Тогда по принципу Дедекинда сечением множества рациональных чисел определяется единственное действительное число λ , при котором $\lambda \cdot CD = AB$. $\square$

В этом случае число λ называется *отношением коллинеарных (сонаправленных) отрезков AB и CD* :

$$\lambda = \frac{AB}{CD}.$$

В случае, если отрезки AB и CD противоположены, AB и DC сонаправлены. Согласно теореме $AB = \lambda' \cdot \overline{DC} = \lambda \cdot CD$, где $\lambda = -\lambda'$.

В частности, для трёх точек прямой отношение

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = (AB, C), \quad C \neq B, \quad A \neq B,$$

называется *отношением трёх точек прямой*, при этом точки A и B называются *базисными*, а точка C — *делящей*. Для внутренних точек отрезка AB , очевидно, $\lambda > 0$, а для внешних $\lambda < 0$.

Важно заметить, что в аффинной геометрии два неколлинеарных отрезка не могут быть сравнимыми: для них не определяются отношения «равно», «меньше», «больше». В этом состоит существенное отличие аффинной геометрии от евклидовой.

Аксиома Дезарга и теорема Фалеса позволяют доказать (с использованием аксиомы Дедекинда) свойство параллельного проектирования: если через концы отрезков прямой t проведены параллельные прямые, пересекающие прямую ℓ , то отношение любых двух отрезков прямой t равно отношению соответственных отрезков (проекций) прямой ℓ (**обобщённая теорема Фалеса**).

2.4. Аффинная теорема Паппа⁶. Если стороны BC и AD четырёхугольника $ABCD$ параллельны и M — произвольная точка стороны AB , то прямые, проходящие через его вершины A и B параллельно прямым CM и DM соответственно, пересекаются в точке N стороны CD (рис. 7).

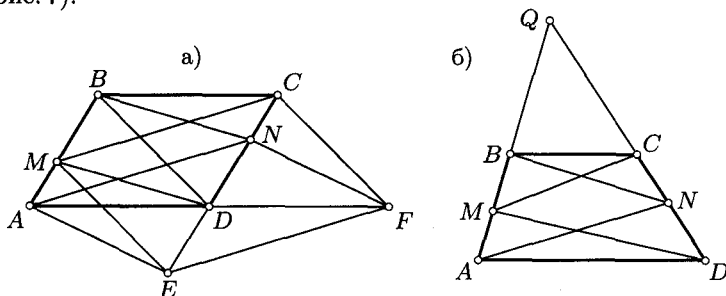


Рис. 7

Доказательство. Обозначим через N точку пересечения прямой CD с прямой AN , параллельной CM , и докажем, что $BN \parallel DM$. Сначала рассмотрим случай $AB \parallel CD$. Отложим от точки D отрезки $DE = BM$ и $DF = BC$. Тогда по аксиоме Дезарга из треугольников MBC и EDF получим $EF \parallel MC$. Следовательно, $EF = MC$, и так как

⁶Папп Александрийский (конец III в. н. э.) — последний крупный математик древней Греции. Ряд теорем из его «Математического сборника» может быть отнесен к проективной геометрии.

$MC = AN$, то $EF = AN$. Поэтому четырёхугольник $ANFE$ — параллелограмм и, значит, $ND = DE$. Поскольку $DE = BM$, то $ND = BM$, т. е. $BN \parallel MD$.

Если же прямые AB и CD пересекаются в точке Q (рис. 76), то по обобщённой теореме Фалеса

$$\frac{QA}{QB} = \frac{QD}{QC} \quad \text{и} \quad \frac{QM}{QA} = \frac{QN}{QC}.$$

Перемножив эти равенства, получим $\frac{QM}{QB} = \frac{QD}{QN}$, откуда и следует, что $BN \parallel MD$. $\square$

Примечание. 1. В случае параллелограмма $ABCD$ теорема Паппа равносильна утверждению о коммутативности сложения отрезков: если $AM = NC$ и $MB = DN$, то $AM + MB = DN + NC$.

2. В условии теоремы существенно лишь, что $BC \parallel AD$. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ могут и пересекаться (рис. 8).

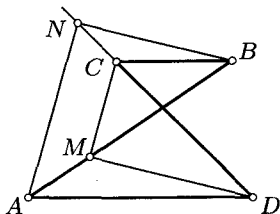


Рис. 8

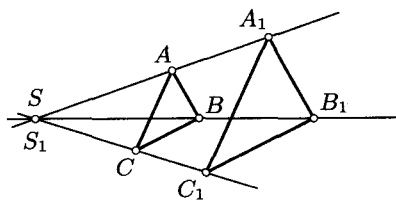


Рис. 9

2.5. Гомотетичные треугольники. Из обобщённой теоремы Фалеса просто выводится **признак гомотетичности треугольников**: если стороны треугольника ABC соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, то эти треугольники либо гомотетичны, либо получаются один из другого параллельным переносом.

В самом деле, пусть $(AA_1) \cap (BB_1) = S$, $(AA_1) \cap (CC_1) = S_1$ (рис. 9). Тогда

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \quad \text{и} \quad \frac{S_1A}{S_1A_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Так как по обобщённой теореме Фалеса $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\frac{SA}{SA_1} = \frac{S_1A}{S_1A_1}$, а это означает, что точки S и S_1 совпадают.

Если же $AA_1 \parallel BB_1$, то и прямая CC_1 также параллельна им. В противном случае эти три прямые по доказанному имели бы общую точку. Тогда при данных условиях $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$, и по определению равенства отрезков будем иметь $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

§ 3. Аффинные операции над векторами

3.1. Сложение и вычитание векторов. По определению аффинно равные отрезки сонаправлены (п. 2.1). *Вектором* называется множество всех равных отрезков плоскости, которые будем называть *представителями* данного вектора $\bar{r}$. Вектор $\bar{r}$ задаётся любым из своих представителей, поэтому пишут $\bar{r} = \overline{AB}$, $\bar{p} = \overline{CD}$ и $\bar{p} = \bar{r}$, если $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Сложение векторов определяется равенством $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ для любых трёх точек A, B, C . На основании аксиомы Дезарга сумма векторов не зависит от выбора их представителей (рис. 2).

Обычным способом доказываем, что сложение векторов коммутативно и ассоциативно:

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= \bar{b} + \bar{a}, \\ (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$

Разность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ определяется равенством $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$, поскольку $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

Векторы суммы и разности коллинеарных векторов коллинеарны данным векторам.

3.2. Умножение вектора на действительное число. Во всех учебных руководствах эта операция определяется с использованием длины вектора (отрезка), которая, однако, отсутствует в аффинной геометрии. Введём понятие произведения вектора на число аффинными средствами.

Пусть дан вектор $\bar{r} = \overline{AB}$ и действительное число $\alpha > 0$. Если α — рациональное положительное число $\frac{m}{n}$, то произведением $\alpha \cdot \bar{r}$ называется вектор $\overline{AC}$, построение которого обосновано в предыдущем § 2: умножение отрезка AB на целое число m и последующее деление на целое число n (с изменением направления в случае $\alpha < 0$).

Пусть число $\alpha > 0$ иррациональное и $\frac{p}{n}, \frac{q}{n}$ — его рациональные приближения:

$$\frac{p}{n} < \alpha < \frac{q}{n}.$$

Ими определяются точки P и Q прямой AB : $\overline{AP} = \frac{p}{n} \cdot \overline{AB}$ и $\overline{AQ} = \frac{q}{n} \cdot \overline{AB}$. При $n \rightarrow \infty$ получаем бесконечную возрастающую последовательность рациональных чисел $\frac{p}{n}, \frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}, \dots$ и бесконечную убывающую последовательность рациональных чисел $\frac{q}{n}, \frac{q_1}{n_1}, \frac{q_2}{n_2}, \dots$, при этом $\frac{p_i}{n_i} < \frac{q_i}{n_i}$. Эти последовательности порождают бесконечную последовательность отрезков $PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, \dots$, каждый из которых лежит внутри предыдущего, и не существует отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой

последовательности. Тогда по принципу Кантора (конец п. 1.2) существует единственная точка C , принадлежащая каждому из отрезков $P_i Q_i$. По определению полагаем $\overline{AC} = \alpha \cdot \overline{AB}$.

В частности, если α — рациональное число, то точка C совпадает с одной из точек P_i . При $\alpha < 0$ точка C симметрична P_i относительно точки A . Полагаем $0 \cdot \vec{r} = \vec{0}$ по определению.

3.3. Алгебраические свойства аффинных операций над векторами. Для любых действительных чисел α, β и любых векторов $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{r}) &= (\alpha\beta) \cdot \vec{r}, \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{r} &= \alpha \cdot \vec{r} + \beta \cdot \vec{r},\end{aligned}\tag{I.1}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}.\tag{I.2}$$

Требуется дать аффинные доказательства этих соотношений. Первое из них можно считать очевидным. Докажем свойство (I.1). Вектор $\alpha \cdot \vec{r} + \beta \cdot \vec{r}$ коллинеарен вектору $\vec{r}$. По критерию коллинеарности $\alpha \cdot \vec{r} + \beta \cdot \vec{r} = \gamma \cdot \vec{r}$. Необходимо доказать, что $\gamma = \alpha + \beta$. Сначала рассмотрим случай $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. Пусть p и p_1 — произвольные рациональные числа из нижних классов действительных чисел α и β : $0 < p \leq \alpha, 0 < p_1 \leq \beta$. Тогда рациональное число $p + p_1$ принадлежит нижнему классу действительного числа $\alpha + \beta$. Так как $\alpha \cdot \vec{r} + \beta \cdot \vec{r} = \gamma \cdot \vec{r}$, то $p + p_1$ входит в нижний класс действительного числа γ . Следовательно, нижний класс действительного числа $\alpha + \beta$ полностью входит в нижний класс числа γ . С равным правом этим же свойством обладают верхние классы чисел $\alpha + \beta$ и γ . Поэтому равны и сами эти числа. Соотношение (I.1) доказано для положительных чисел α, β, γ . Другие комбинации их знаков сводятся к рассмотренной. Пусть, например, $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0$. Тогда равенство $\alpha \cdot \vec{r} + \beta \cdot \vec{r} = \gamma \cdot \vec{r}$ перепишем так: $\alpha \cdot \vec{r} + (-\gamma \cdot \vec{r}) = -\beta \cdot \vec{r}$. Поскольку в этом случае $\alpha > 0, -\gamma > 0, -\beta > 0$, то по доказанному $\alpha + (-\gamma) = -\beta$, откуда снова $\gamma = \alpha + \beta$.

Переходим к доказательству соотношения (I.2). Выделим особо случай $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ и

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha \cdot (\vec{a} + \lambda \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot (1 \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{a}) = \alpha(1 + \lambda) \cdot \vec{a}, \\ \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} &= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot (\lambda \cdot \vec{a}) = (\alpha + \alpha\lambda) \cdot \vec{a} = \alpha(1 + \lambda) \cdot \vec{a},\end{aligned}$$

чем и закончено доказательство для этого случая. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то сохраняет свою силу известное традиционное доказательство с помощью построения гомотетичных треугольников.

Далее обычным путём можно ввести аффинные понятия линейной комбинации векторов, линейной зависимости (независимости) векторов, аффинные координаты вектора и точки. Читатель может повторить это по одному из многих учебных пособий по аналитической геометрии.

§ 4. Косое произведение векторов

4.1. Определение и его следствия. Пусть задан аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ — совокупность точки O и упорядоченной пары неколлинеарных векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Косым произведением $\bar{a} \circ \bar{b}$ векторов $\bar{a} = (a_1, a_2)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2)$ называется число

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Из этого определения и свойств определителей непосредственно вытекают следующие **свойства** косого произведения:

- 1) $\bar{a} \circ \bar{b} > 0$, если упорядоченные пары $(\bar{a}, \bar{b})$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ориентированы одинаково, и $\bar{a} \circ \bar{b} < 0$, если они имеют противоположные ориентации;
- 2) $\bar{a} \circ \bar{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны;
- 3) антикоммутативность:

$$\bar{b} \circ \bar{a} = -(\bar{a} \circ \bar{b});$$

- 4) ассоциативность:

$$\lambda \bar{a} \circ \bar{b} = \bar{a} \circ \lambda \bar{b} = \lambda(\bar{a} \circ \bar{b});$$

- 5) дистрибутивность:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \circ \bar{c} = \bar{a} \circ \bar{c} + \bar{b} \circ \bar{c};$$

- 6) $\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2 = 1$.

Косое произведение векторов есть аффинное понятие. Величина косого произведения данных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ существенно зависит от выбора аффинного репера. Найдём эту зависимость.

Пусть $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ — новый репер и

$$\bar{e}_1 = \alpha_1 \cdot \bar{e}'_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}'_2, \quad \bar{e}_2 = \beta_1 \cdot \bar{e}'_1 + \beta_2 \cdot \bar{e}'_2.$$

Тогда на основании свойств косого произведения находим

$$\begin{aligned} \bar{a} \circ \bar{b} &= (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2) \circ (b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2) = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(\bar{e}'_1 \circ \bar{e}'_2). \quad (\text{I.4}) \end{aligned}$$

Но теперь уже $\bar{e}'_1 \circ \bar{e}'_2 = 1$. Следовательно,

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}. \quad (I.5)$$

Таким образом, при замене базисного репера косое произведение любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ умножается на постоянное число, равное косому произведению $\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2$ векторов прежнего репера относительно нового репера:

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2),$$

где $\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \delta$ — определитель из координат старых базисных векторов в новом репере.

4.2. Геометрический смысл косого произведения. Найдём площадь ориентированного треугольника OAB в аффинной системе координат, заданной базисным треугольником OE_1E_2 (рис. 10), если точки

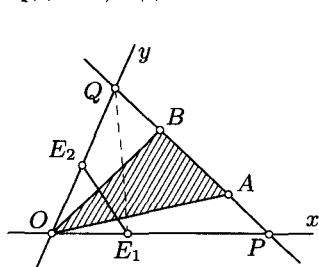


Рис. 10

A и B имеют соответственно координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Пусть $P(p, 0)$ и $Q(0, q)$ — точки пересечения прямой AB с осями координат. Не используя метрические формулы, можно доказать (задача № I.16) аффинные равенства

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OPQ}} = \frac{AB}{PQ}, \quad \frac{S_{OPQ}}{S_{OE_1Q}} = \frac{OP}{OE_1}, \quad \frac{S_{OE_1Q}}{S_{OE_1E_2}} = \frac{OQ}{OE_2},$$

из которых следует, что

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OE_1E_2}} = \frac{AB}{PQ} \cdot \frac{OP}{OE_1} \cdot \frac{OQ}{OE_2}. \quad (I.6)$$

Поскольку прямая AB имеет уравнение $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, мы имеем

$$1 - \frac{y_1}{q} = \frac{1}{p} = \frac{1 - \frac{y_2}{q}}{x_2},$$

следовательно, $q = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$. Отсюда находим

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{x_1 - x_2}{p}, \quad \frac{OP}{OE_1} = p, \quad \frac{OQ}{OE_2} = q.$$

Наконец, пользуясь соотношением (I.6), получаем равенство

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OE_1E_2}} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OE_1E_2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \bar{a} \circ \bar{b},$$

т. е. косое произведение $\bar{a} \circ \bar{b}$ векторов равно отношению площади ориентированного треугольника (параллелограмма), построенного на этих векторах как на сторонах, к площади базисного треугольника (параллелограмма) системы координат.

Если площадь базисного треугольника (параллелограмма) принята за единицу измерения площадей, то косое произведение равно площади ориентированного треугольника OAB (параллелограмма), построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4.3. Следствия.

1. Так как треугольники ABC , BCA , CAB одинаково ориентированы, то $\bar{CA} \circ \bar{CB} = \bar{AB} \circ \bar{AC} = \bar{BC} \circ \bar{BA}$.

2. Равенство $\bar{AB} \circ \bar{AC} = 0$ есть необходимое и достаточное условие коллинеарности трёх точек A , B , C .

3. Площадь ориентированного четырёхугольника $ABCD$ можно выразить формулой

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(\bar{AC} \circ \bar{BD}).$$

4. Для любого треугольника ABC и любой точки O имеет место равенство

$$\bar{OA} \circ \bar{OB} + \bar{OB} \circ \bar{OC} + \bar{OC} \circ \bar{OA} = \bar{AB} \circ \bar{AC}. \quad (I.7)$$

Действительно, на основании свойств косого произведения получаем

$$\bar{AB} \circ \bar{AC} = (\bar{OB} - \bar{OA}) \circ (\bar{OC} - \bar{OA}) = \bar{OB} \circ \bar{OC} - \bar{OB} \circ \bar{OA} - \bar{OA} \circ \bar{OC},$$

что равносильно соотношению (I.7).

5. Для любых трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ плоскости имеет место тождество

$$(\bar{b} \circ \bar{c}) \cdot \bar{a} + (\bar{c} \circ \bar{a}) \cdot \bar{b} + (\bar{a} \circ \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{0}. \quad (I.8)$$

Доказательство. Поскольку три вектора плоскости линейно зависимы, то существуют числа α , β , γ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = \bar{0}.$$

Умножив это равенство косо справа последовательно на векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, получим

$$\begin{cases} \beta(\bar{b} \circ \bar{a}) + \gamma(\bar{c} \circ \bar{a}) = 0, \\ \alpha(\bar{a} \circ \bar{b}) + \gamma(\bar{c} \circ \bar{b}) = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha : \beta : \gamma = (\bar{c} \circ \bar{b}) : (\bar{b} \circ \bar{c}) : (\bar{a} \circ \bar{b})$, что приводит к тождеству (I.8). $\square$

§5. Косое произведение векторов в доказательствах аффинных теорем планиметрии

5.1. Свойство трапеции. В трапеции $ABCD$ точка S пересечения диагоналей AC и BD , точка P пересечения продолжений боковых сторон BC и AD и середины M и N оснований AB и CD лежат на одной прямой.

Доказательство. На основании свойств косого произведения, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имеем $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DC} = 0$, или, в развёрнутом виде,

$$(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) \circ (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}) = 0,$$

$$\overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PD} = 0.$$

Так как первое и последнее слагаемые этой суммы равны нулю по причине коллинеарности точек, то $\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} = 0$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} \circ \overrightarrow{PN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \circ \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PD}) = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PD}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, точки P, M, N коллинеарны. Заменяя точку P точкой S , аналогично получим, что коллинеарны и точки S, M, N . Следовательно, точки P и S лежат на прямой MN . $\square$

5.2. Теорема Гаусса. Если некоторая прямая пересекает прямые AB, BC, CA , определяющие треугольник ABC , в точках C_1, A_1, B_1 соответственно, то середины M, N, P отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой (рис. 11).

Доказательство. Необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN} \circ \overrightarrow{MP} = 0$. Это равносильно равенству

$$\overrightarrow{M} \circ \overrightarrow{N} + \overrightarrow{N} \circ \overrightarrow{P} + \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{M} = 0,$$

или, подробнее,

$$(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A_1}) \circ (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B_1}) + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B_1}) \circ (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C_1}) + (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C_1}) \circ (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A_1}) = 0.$$

На основании коллинеарности точек каждой из троек $A, B, C_1; B, C, A_1; C, A, B_1; A_1, B_1, C_1$ имеем

$$\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B} \circ \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_1} \circ \overrightarrow{A} = 0,$$

$$\begin{aligned}\overline{B} \circ \overline{C} + \overline{C} \circ \overline{A_1} + \overline{A_1} \circ \overline{B} &= 0, \\ \overline{C} \circ \overline{A} + \overline{A} \circ \overline{B_1} + \overline{B_1} \circ \overline{C} &= 0, \\ \overline{A_1} \circ \overline{B_1} + \overline{B_1} \circ \overline{C_1} + \overline{C_1} \circ \overline{A_1} &= 0.\end{aligned}$$

После почленного сложения этих равенств путём группировки членов получаем доказываемое равенство. $\square$

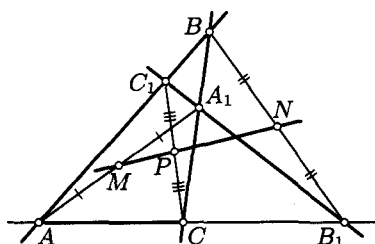


Рис. 11

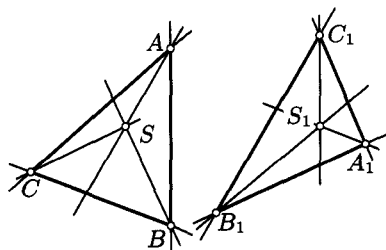


Рис. 12

5.3. Свойство пары аффинно связанных треугольников.

Если прямые, проведенные через вершины одного треугольника ABC параллельно соответственным сторонам другого треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и прямые, проведенные через вершины второго треугольника параллельно соответственным сторонам первого, также пересекаются в одной точке (рис. 12).

Доказательство. При произвольном выборе начала векторов уравнения прямых первой тройки имеют вид

$$\begin{aligned}(\overline{X} - \overline{A}) \circ (\overline{B_1} - \overline{C_1}) &= 0, & \overline{A} \circ (\overline{B_1} - \overline{C_1}) &= \overline{X} \circ (\overline{B_1} - \overline{C_1}), \\ (\overline{X} - \overline{B}) \circ (\overline{C_1} - \overline{A_1}) &= 0, & \text{или} & \quad \overline{B} \circ (\overline{C_1} - \overline{A_1}) = \overline{X} \circ (\overline{C_1} - \overline{A_1}), \\ (\overline{X} - \overline{C}) \circ (\overline{A_1} - \overline{B_1}) &= 0, & \overline{C} \circ (\overline{A_1} - \overline{B_1}) &= \overline{X} \circ (\overline{A_1} - \overline{B_1}).\end{aligned}$$

Согласно условию теоремы эта система совместна. Сложив уравнения, в правой части получим тождественно нуль:

$$\overline{A} \circ (\overline{B_1} - \overline{C_1}) + \overline{B} \circ (\overline{C_1} - \overline{A_1}) + \overline{C} \circ (\overline{A_1} - \overline{B_1}) = 0,$$

или

$$\overline{A} \circ \overline{B_1} + \overline{B} \circ \overline{C_1} + \overline{C} \circ \overline{A_1} = \overline{A_1} \circ \overline{B} + \overline{B_1} \circ \overline{C} + \overline{C_1} \circ \overline{A}.$$

Симметрия этого равенства относительно векторов A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 свидетельствует об истинности доказываемого утверждения. $\square$

5.4. Отношение площадей четырёхугольника и ассоциированного с ним треугольника. Если продолжения противоположных сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K , а E, F — середины его диагоналей AC и BD , то площадь треугольника EFK равна четвертой части площади четырёхугольника $ABCD$.

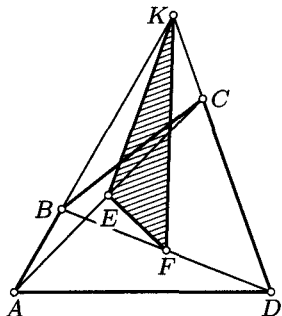


Рис. 13

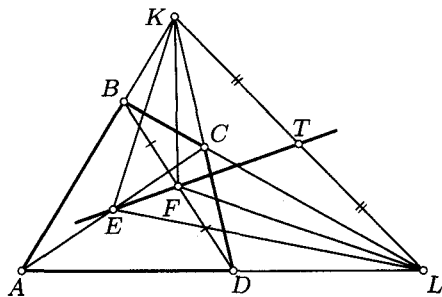


Рис. 14

Доказательство. Примем точку K за начало векторов (рис. 13). Тогда $S_{ABCD} = S_{ADK} - S_{BCK} = \frac{1}{2}(\overline{A} \circ \overline{D} - \overline{B} \circ \overline{C})$. Кроме того,

$$S_{EFK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{A} + \overline{C}}{2} \circ \frac{\overline{B} + \overline{D}}{2} \right) = \frac{1}{8} (\overline{A} \circ \overline{B} + \overline{A} \circ \overline{D} + \overline{C} \circ \overline{B} + \overline{C} \circ \overline{D}).$$

Но поскольку $\overline{A} \circ \overline{B} = 0$ и $\overline{C} \circ \overline{D} = 0$, то $S_{EFK} = \frac{1}{8} (\overline{A} \circ \overline{D} - \overline{B} \circ \overline{C})$. Следовательно, $S_{EFK} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. $\square$

Следствие. Если $(AD) \cap (BC) = L$, то на равных правах $S_{EFL} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (рис. 14), поэтому $S_{EFK} = S_{EFL}$. По свойству медианы треугольника отрезок EF принадлежит медиане ET треугольника EKL . Имеем такой результат: *середины диагоналей выпуклого четырёхугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Гаусса четырёхугольника.*

§6. Аффинные преобразования плоскости

Аффинные преобразования могут рассматриваться на множестве точек как аффинной, так и евклидовой плоскостей. В целях самостоятельного построения аффинной геометрии объектом аффинных преобразований естественно принять аффинную плоскость, что в дальнейшем не будем оговаривать.

6.1. Определение и примеры аффинных преобразований.

Аффинным преобразованием плоскости называется преобразование, которое отображает каждую прямую на прямую. Отсюда сразу следует, что преобразование, обратное аффинному, также является аффинным.

Приведём три примера аффинных преобразований, с которыми читатель уже знаком: параллельный перенос, гомотетия и косая симметрия.

1. *Параллельным переносом* (просто *переносом*) $T_{\vec{r}}$ называется преобразование, при котором каждая точка X отображается на такую точку X' , что $\overline{XX'} = \vec{r}$, где $\vec{r}$ — заданный (постоянный) вектор. Перенос — аффинное преобразование, поскольку каждую прямую отображает на прямую, ей параллельную, или на себя. Свойства переноса подробно изложены в томе I учебного пособия [12].

2. *Гомотетией* H_O^k с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости (пространства), которое каждую точку X отображает на такую точку X' , что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$. Образом прямой при гомотетии является прямая, параллельная ей, или совпадающая с ней. Для повторения можно обратиться также к книге [12, т. 1, с. 206–209]. В частности, при $k = -1$ гомотетия является *центральной симметрией*.

Гомотетию ещё можно определить как аффинное преобразование, переводящее каждую прямую в параллельную ей прямую или в прямую, совпадающую с данной; см. [7, с. 280]. В этом случае приходится рассматривать перенос как частный вид гомотетии, что в отечественной литературе не принято.

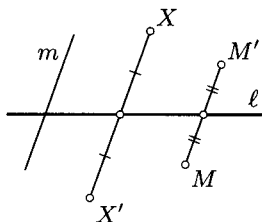


Рис. 15

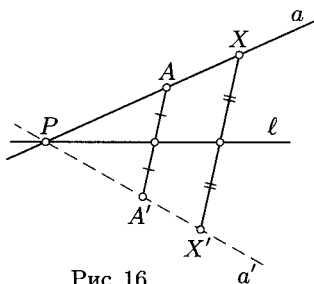


Рис. 16

3. *Косой симметрией* S_{ℓ}^m с осью ℓ и направлением прямой m , не параллельной ℓ , называется преобразование плоскости, при котором каждая точка X , не принадлежащая оси ℓ , переходит в такую точку X' , что прямая XX' параллельна m и середина отрезка XX' принадлежит ℓ (рис. 15). Если $X \in \ell$, то $X' \equiv X$.

На основании этого определения преобразование, обратное косой симметрии, есть та же самая косая симметрия, т. е. косая симметрия — преобразование *инволюционное* (инволюция).

Докажем, что косая симметрия — преобразование аффинное. Пусть прямая a пересекает ось ℓ в точке P и $S_\ell^m(A) = A'$ (рис. 16), X' — образ произвольной точки $X \in a$. Тогда $XX' \parallel AA'$. Для трапеции $AA'X'X$ по свойству п. 5.1 прямые $A'X'$ и AX пересекаются в точке P . Так как точки P и A постоянны, то образом прямой a является прямая $(PA') = a'$. Если $a \parallel \ell$, то $\overline{AA'} = \overline{XX'}$ и поэтому имеем перенос прямой a на вектор $\vec{r} = \overline{AA'}$, т. е. $a' \parallel a$.

6.2. Сохранение параллельности прямых при аффинных преобразованиях. Рассмотрим первые следствия определения аффинных преобразований.

Теорема. *Образы параллельных прямых при аффинном преобразовании параллельны между собой.*

В самом деле, если параллельные прямые a и b переходят при аффинном преобразовании f в прямые a' и b' , то $a' \parallel b'$, поскольку предположение о том, что $a' \cap b' = M'$, приводит к противоречию: точка M' не имеет прообраза при преобразовании f , хотя всякое преобразование взаимно однозначно по определению.

Следствие. *При аффинном преобразовании f середина отрезка AB отображается на середину отрезка с концами $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$.*

Для доказательства построим произвольный параллелограмм $AMBN$ с диагональю AB . Его диагонали AB и MN имеют общую середину C . По предыдущей теореме образом этого параллелограмма является параллелограмм $A'M'B'N'$. Точка C' пересечения его диагоналей есть образ точки C при аффинном преобразовании f .

6.3. Теорема Дарбу⁷. *Аффинное преобразование отображает отрезок на отрезок.*

Доказательство. Из того, что концы отрезка AB переходят при аффинном преобразовании в концы отрезка $A'B'$, и из определения аффинного преобразования ещё сразу не следует, что образом отрезка AB является отрезок $A'B'$. Надо доказать, что в н у т р е н н и е точки отрезка AB отображаются на в н у т р е н н и е точки отрезка $A'B'$. Очевидно, достаточно показать, что внешние к отрезку AB точки переходят в точки, внешние к отрезку $A'B'$. Пусть точка C прямой AB такова, что B лежит между A и C . Построим трапецию, в которой данные точки A и B являются серединами её оснований (рис. 17).

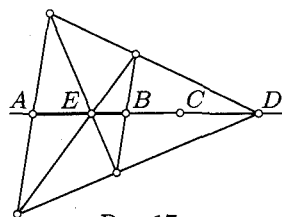


Рис. 17

⁶Гастон Дарбу (1842–1917) — видный французский математик, многолетний президент Парижской АН, член Петербургской АН. Основные его труды относятся к дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям.

По свойству трапеции её боковые стороны пересекаются в точке D прямой AB , внешней к отрезку AB . Покажем, что основания трапеции могут быть выбраны так, что взятая ранее точка C окажется серединой отрезка DE (E — точка пересечения диагоналей трапеции). Пусть $\overline{AE} = \alpha \cdot \overline{AB}$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) и $\overline{AD} = \beta \cdot \overline{AD}$ ($\beta > 1$). По нашему требованию необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AE} + \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \overline{AB}.$$

С другой стороны, пусть $\overline{AC} = \gamma \cdot \overline{AB}$, где $\gamma > 1$ по выбору точки C . Тогда должно выполняться равенство $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Система условий

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad \beta > 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad \gamma > 1$$

совместна: например, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$, $\gamma = \frac{4}{3}$ — одно из возможных её решений. Поэтому для любого отрезка AB всегда существует вспомогательная трапеция, при которой точка C будет серединой отрезка DE . Выполним аффинное преобразование f . В силу сохранения параллельности прямых образом трапеции является также трапеция, в которой точки D' и E' — образы точек D и E , а середина C' отрезка $D'E'$ — образ середины C отрезка DE . Теорема Дарбу доказана. $\square$

§ 7. Числовые инварианты аффинных преобразований

7.1. Отношение коллинеарных векторов. Из инвариантности параллельности прямых и определения равных отрезков следует, что аффинное преобразование отображает равные отрезки на равные отрезки, и, значит, образом вектора является вектор.

Теорема. *Аффинное преобразование сохраняет отношение коллинеарных векторов.*

Доказательство. Сначала докажем это утверждение для сонаправленных векторов. Пусть $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ ($\lambda > 0$) и $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ — образы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при аффинном преобразовании f . Докажем, что $\vec{a}' = \lambda \cdot \vec{b}'$ при том же значении λ . Равенство $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ не зависит от выбора представителей $\overline{AB} = \vec{a}$ и $\overline{AC} = \vec{b}$ векторов. Точки A, B, C коллинеарны. Пусть $\frac{p}{n}$ и $\frac{q}{n}$ — рациональные приближения действительного числа $\lambda = \frac{AB}{AC}$:

$$\frac{p}{n} \leq \lambda \leq \frac{q}{n}.$$

Построим точки P и Q , для которых $\overline{AP} = \frac{p}{n} \cdot \overline{AC}$ и $\overline{AQ} = \frac{q}{n} \cdot \overline{AC}$. Отре-

зок AP содержит p отрезков, каждый из которых равен отрезку $\frac{AC}{n}$, отрезок AQ содержит q таких отрезков. В силу следствия из п. 6.2 для образов A', B', C', P', Q' точек A, B, C, P, Q выполняется аналогичное свойство: отрезок $A'P'$ содержит p отрезков, каждый из которых равен отрезку $\frac{A'C'}{n}$, а отрезок $A'Q'$ содержит q таких отрезков. Если положить, что $\bar{a}' = \lambda' \cdot \bar{b}'$, то отсюда будем иметь

$$\frac{p}{n} \cdot A'C' \leq \lambda' \cdot A'C' \leq \frac{q}{n} \cdot A'C'$$

и поэтому $\frac{p}{n} \leq \lambda' \leq \frac{q}{n}$. Неравенства $\frac{p}{n} \leq \lambda \leq \frac{q}{n}$ и $\frac{p}{n} \leq \lambda' \leq \frac{q}{n}$ имеют место одновременно для любого натурального числа n , т. е. $\lambda' = \lambda$.

Сонаправленность и, значит, противонаправленность векторов инвариантны относительно аффинных преобразований. Поэтому из доказанного следует истинность утверждения и для противонаправленных векторов (рассуждение от противного). $\square$

Следствие 1. Аффинное преобразование сохраняет отношение трёх точек прямой.

Следствие 2. Соответственные аффинные координаты соответственных точек (и векторов) в соответственных системах координат равны.

Действительно, аффинные координаты точки $M(x, y)$ есть отношения трёх точек прямой (рис. 18):

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OE_1}}, \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OE_2}},$$

а они являются инвариантами.

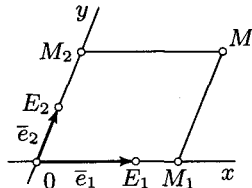


Рис. 18

7.2. Инвариантность отношения площадей плоских фигур
для пары соответственных параллелограммов и пары соответственных треугольников сразу следует из геометрического смысла косога произведения векторов и формул (I.3) и (I.5). В самом деле, если треугольник ABC аффинно отображается на треугольник $A'B'C'$ и репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ на репер $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, то по следствию 2 имеем

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2, & \overline{CB} &= b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2, \\ \overline{CA'} &= a_1 \cdot \bar{e}'_1 + a_2 \cdot \bar{e}'_2, & \overline{CB'} &= b_1 \cdot \bar{e}'_1 + b_2 \cdot \bar{e}'_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} : S_{ABC} &= (\overline{CA'} \circ \overline{CB'}) : (\overline{CA} \circ \overline{CB}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\bar{e}'_1 \circ \bar{e}'_2) : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (\bar{e}'_1 \circ \bar{e}'_2). \end{aligned}$$

Итак, отношение площади образа треугольника к площади этого треугольника равно косому произведению $\vec{e}'_1 \circ \vec{e}'_2$ базисных векторов преобразованного репера, т. е. равно определителю $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, составленному из координат базисных векторов полученного репера в прежнем репере.

Площадь многоугольника определяется путём разложения его на треугольники, а площадь любой квадрируемой плоской фигуры с криволинейной границей — предельным переходом из последовательностей площадей вписанных в неё и описанных около неё многоугольников. Следовательно, полученный вывод сохраняет силу и для отношения площадей любых двух соответственных фигур при аффинном преобразовании.

Из полученной зависимости следует вывод: *отношение площадей любых фигур равно отношению площадей их образов при аффинном преобразовании плоскости*: $S_1 : S_2 = S'_1 : S'_2$.

В частности, при $\Delta = \pm 1$ абсолютная величина площади фигуры остаётся неизменной при аффинном преобразовании плоскости.

Определение. Аффинное преобразование, сохраняющее площади плоских фигур (по абсолютной величине), называется *эквиаффинным преобразованием*. Примером эквиаффинного преобразования служит перенос.

7.3. Аффинные преобразования первого и второго родов.

Ориентация треугольника определяется порядком записи его вершин. При этом два треугольника с общей стороной будут ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда они лежат в одной полуплоскости от этой стороны, и ориентированы противоположно в противном случае (направление их общей стороны в ориентациях этих треугольников необходимо одно и то же).

При выбранном порядке две возможные ориентации треугольника соответствуют двум случаям знаков косого произведения упорядоченной пары векторов его сторон.

Площади различно ориентированных треугольников отличаются знаком без учёта их абсолютных величин. Поэтому из вывода об инвариантности отношения площадей любых двух ориентированных фигур имеем такое **следствие**.

Аффинное преобразование переводит любые два одинаково ориентированных треугольника в два одинаково ориентированных треугольника, а любые два противоположно ориентированных треугольника — в два противоположно ориентированных треугольника. При этом возможны два и только два случая: либо аффинное преобразование

сохраняет ориентацию каждого треугольника, либо изменяет её на противоположную. В первом случае аффинное преобразование называется преобразованием *первого рода*, во втором случае — аффинным преобразованием *второго рода*. Например, перенос и гомотетия — аффинные преобразования I рода, косая симметрия — аффинное преобразование II рода.

§8. Конструктивное задание и координатные формулы аффинного преобразования

8.1. Теорема о задании аффинного преобразования. Если даны три неколлинеарные точки A, B, C и три неколлинеарные точки A', B', C' , то существует единственное аффинное преобразование f плоскости, при котором $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

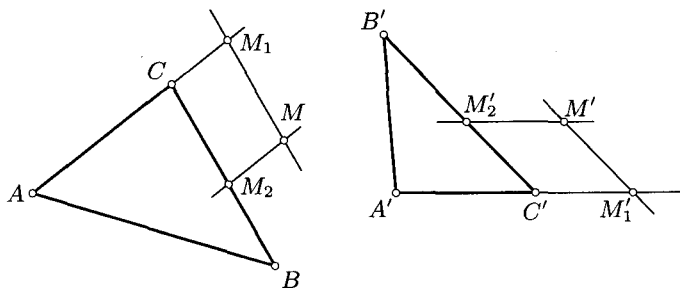


Рис. 19

Доказательство. Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведём прямые $MM_1 \parallel BC$ и $MM_2 \parallel AC$, $M_1 \in (AC)$, $M_2 \in (BC)$ (рис. 19) и построим точки $M'_1 \in (A'C')$, $M'_2 \in (B'C')$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\overline{C'M'}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA}}, \quad \frac{\overline{C'M'_2}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CB}}. \quad (I.9)$$

Через M'_1 и M'_2 проведём прямые, параллельные $C'B'$ и $C'A'$ соответственно. Точка M' их пересечения существует, так как $C'B' \nparallel C'A'$.

Преобразование $f: M \rightarrow M'$ плоскости является аффинным преобразованием. В самом деле, зададим аффинные реперы $(C, \overline{CA}, \overline{CB})$ и $(C', \overline{C'A'}, \overline{C'B'})$. Если x, y — координаты точки M относительно первого репера, то в силу соотношений (I.9) точка M' имеет равные им соответственные координаты относительно второго репера. Пусть прямая m дана своим уравнением $ax + by + c = 0$ в первом репере. Тогда множество образов её точек при рассматриваемом преобразовании $f: M \rightarrow M'$

будет иметь то же самое уравнение во втором репере и, следовательно, является прямой линией. В частности, точки A и A' , B и B' , C и C' имеют соответственно равные координаты в данных реперах, и поэтому $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Существование искомого преобразования f доказано. Докажем его единственность. Если бы существовало другое аффинное преобразование g , при котором $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$, то на основании аффинных инвариантов мы бы необходимо получили, что $g(M) = M'$ для любой точки M плоскости, т. е. $g = f$. $\square$

Выполненное в ходе доказательства построение есть один из возможных способов построения образа M' для произвольной точки M плоскости при аффинном преобразовании, заданном тремя парами соответственных точек.

8.2. Координатные формулы аффинного преобразования.

Пусть имеем исходный аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и относительно него задан второй репер $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, где $\bar{e}'_1 = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2$, $O'(c_1, c_2)$. По теореме из п. 8.1 этими двумя реперами определено аффинное преобразование плоскости. Найдём зависимость между координатами соответственных точек $\overline{M(x, y)} \rightarrow \overline{M'(x', y')}$ относительно исходного репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Имеем $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'}$. Поскольку точка M' имеет те же координаты x, y во втором репере, что и точка M в исходном, то предыдущее равенство в координатах примет вид

$$x' \cdot \bar{e}_1 + y' \cdot \bar{e}_2 = c_1 \cdot \bar{e}_1 + c_2 \cdot \bar{e}_2 + x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2.$$

После замены векторов $\bar{e}'_1$ и $\bar{e}'_2$ их выражениями получаем

$$x' \cdot \bar{e}_1 + y' \cdot \bar{e}_2 = x \cdot (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2) + y \cdot (b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2) + c_1 \cdot \bar{e}_1 + c_2 \cdot \bar{e}_2,$$

откуда

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2, \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

причём $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, так как векторы $\bar{e}'_1$ и $\bar{e}'_2$ неколлинеарны. Полученные формулы (I.10) выражают искомую зависимость и называются *формулами аффинного преобразования*.

Обратно, если преобразование $M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$ задано формулами (I.10) при $\Delta \neq 0$, то оно будет аффинным. В самом деле, если дана

прямая $Ax' + By' + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$), то множество прообразов её точек согласно соотношениям (I.10) будет иметь уравнение

$$A(a_1x + b_1y + c_1) + B(a_2x + b_2y + c_2) + C = 0,$$

или $(Aa_1 + Ba_2)x + (Ab_1 + Bb_2)y + Ac_1 + Bc_2 = 0$, в котором коэффициенты при x и y не равны нулю одновременно. В противном случае однородная линейная система относительно A и B

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 = 0, \\ Ab_1 + Bb_2 = 0 \end{cases}$$

имела бы определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, поскольку она имеет ненулевое решение (A, B) , что противоречит условию $\Delta \neq 0$. Следовательно, преобразование $(x', y') \rightarrow (x, y)$ аффинное. Тогда и преобразование $(x, y) \rightarrow (x', y')$, заданное формулами (I.10), также аффинное.

Знак определителя Δ формул (I.10) аффинного преобразования имеет наглядное геометрическое истолкование: при $\Delta > 0$ аффинное преобразование есть аффинное преобразование первого рода, а при $\Delta < 0$ — оно второго рода (см. п. 7.2 и п. 7.3).

Для примера рассмотрим косую симметрию. Если вектор $\vec{e}_1$ — направляющий вектор её оси, а вектор $\vec{e}_2$ определяет её направление, то косая симметрия имеет координатные формулы $x' = x$, $y' = -y$, поэтому $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$. Следовательно, косая симметрия плоскости является эквивалентным преобразованием второго рода.

§9. Неподвижные точки

и неизменяемые направления

9.1. Неподвижные точки. Точка называется неподвижной (двойной) точкой аффинного преобразования, если она совпадает со своим образом.

Проведём исследование аффинного преобразования, заданного формулами (I.10). Так как для неподвижной точки $x' = x$, $y' = y$, то координаты неподвижных точек являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + (b_2 - 1)y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Возможны три случая.

1. $\frac{a_1 - 1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2 - 1}$. Система (I.11) имеет единственное решение. Аффинное преобразование имеет единственную неподвижную точку, называемую *центром* этого преобразования. Такое преобразование называется *центраффинным* преобразованием. Примером является гомотетия.

2. $\frac{a_1 - 1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2 - 1} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Система (I.11) несовместна. Аффинное преобразование не имеет неподвижных точек. Примером служит перенос.

3. $\frac{a_1 - 1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2 - 1} = \frac{c_1}{c_2}$. Система (I.11) имеет лишь одно независимое уравнение. Множеством неподвижных точек является *прямая*. В этом случае аффинное преобразование называется *родственным* преобразованием, или *родством*, а прямая неподвижных точек — *осью* родства. Ось родства имеет уравнение, совпадающее с одним из уравнений (I.11) (в частности, с тем, которое не обращается в тождество). Косая симметрия — пример родственного преобразования.

9.2. Неизменяемые направления. Поскольку аффинное преобразование сохраняет параллельность прямых и сонаправленность лучей, то оно переводит *направление* в соответствующее *направление*, определяемое ненулевым вектором $\vec{s}$ (с точностью до произвольного множителя λ). Если аффинное преобразование f отображает прямую a на параллельную прямую a' , то говорят, что прямая a имеет *неизменяемое направление*, а направляющий вектор $\vec{r}$ этой прямой называется *собственным вектором* аффинного преобразования.

Найдём условия существования и возможное число неизменяемых направлений произвольного аффинного преобразования, заданного формулами (I.10). Пусть вектору $\vec{r} = \overline{OM} = (x, y)$ соответствует вектор $\vec{r}' = \overline{OM'} = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ (также отложенный от начала O). Аффинное преобразование f порождает соответствующее аффинное преобразование векторов, имеющее формулы

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y, \\ y' = a_2x + b_2y. \end{cases}$$

В случае, если вектор $\vec{r}$ является собственным вектором аффинного преобразования f , имеем $\vec{r}' = \lambda \vec{r}$. Это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = \lambda x, \\ a_2x + b_2y = \lambda y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_1 - \lambda)x + b_1y = 0, \\ a_2x + (b_2 - \lambda)y = 0. \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Система (I.12) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{I.13})$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* аффинного преобразования (I.10), а его корни — *характеристическими корнями*.

Уравнение (I.13) запишем в виде

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + \Delta = 0. \quad (\text{I.14})$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Виета ($\lambda_1 \lambda_2 = \Delta$) оба характеристических корня отличны от нуля. При $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ из системы (I.12) находятся (с точностью до множителя) координаты собственных векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Итак, *каждому действительному характеристическому корню соответствует одно неизменяемое направление, а различным характеристическим корням — разные неизменяемые направления.*

Так как корни характеристического уравнения имеют определённый геометрический смысл, то они не зависят от выбора системы координат. Поэтому не зависят от системы координат и их сумма $\lambda_1 + \lambda_2 = a_1 + b_2$ и произведение $\lambda_1 \lambda_2 = \Delta$. Следовательно, является инвариантным и само характеристическое уравнение (I.14).

Дискриминант характеристического уравнения (I.14) равен

$$(a_1 + b_2)^2 - 4\Delta.$$

Он неотрицателен, в частности, при $\Delta < 0$. Поэтому *характеристические корни аффинного преобразования второго рода всегда действительны и различны.*

Сравнивая характеристическое уравнение (I.13) с условиями 2 и 3 из п. 9.1, замечаем, что при этих условиях число $\lambda = 1$ служит корнем характеристического уравнения. Отсюда следуют такие выводы.

1. *Аффинное преобразование не имеет неподвижных точек или имеет прямую неподвижных точек (ось родства) тогда и только тогда, когда хотя бы один характеристический корень равен 1.*

2. *Если оба характеристических корня отличны от 1, то аффинное преобразование является центроаффинным.*

Ясно, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ аффинное преобразование имеет единственное неизменяемое направление. Отсюда если $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ (т.е. $\Delta = 1$), то аффинное преобразование является *эквивалентным преобразованием первого рода*.

Задача. Найти неизменяемые направления преобразования

$$\begin{cases} x' = 28x - 50y + c_1, \\ y' = 15x - 27y + c_2. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 28 - \lambda & -50 \\ 15 & -27 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. Система (I.12) имеет вид

$$\begin{cases} (28 - \lambda)x - 50y = 0, \\ 15x - (27 + \lambda)y = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 3$ имеем два эквивалентных уравнения

$$25x - 50y = 0, \quad 15x - 30y = 0.$$

Следовательно, прямая $x - 2y = 0$ имеет неизменяемое направление. При $\lambda_2 = -2$ аналогично находим вторую прямую неизменяемого направления $3x - 5y = 0$.

§ 10. Родственные преобразования

10.1. Свойства родства. Родственное преобразование определено (п. 9.1) как аффинное преобразование, имеющее прямую неподвижных точек (ось родства). Если аффинное преобразование имеет две неподвижные точки A и B , то оно является родственным с осью AB , так как для каждой точки $M \in (AB)$ из равенства отношений $(AB, M) = (AB, M')$ следует совпадение точек M и M' .

По теореме о задании аффинного преобразования родство ρ можно задать его осью ℓ и парой соответственных (родственных) точек $A \rightarrow A'$, не принадлежащих прямой ℓ .

Рассмотрим свойства родства, вытекающие из его определения.

1. Каждая из прямых, соединяющих родственные точки, отображается при этом родстве ρ на себя. В самом деле, если $A \notin \ell$, $\rho(A) = A'$ и $(AA') \cap \ell = B$, то $\rho(B) = B$. Поэтому прямые AB и $A'B'$ совпадают. Если же прямая AA' параллельна ℓ , то она отображается на себя на основании инвариантности параллельности прямых при аффинном преобразовании.

2. Родственные прямые пересекаются на оси ℓ родства ρ или параллельны ей. Действительно, если $\rho(m) = m'$ и $m \cap \ell = P = P'$, то прямая m' проходит через точку $P = P'$. Если же $m \parallel \ell$, то $m' \parallel \ell$.

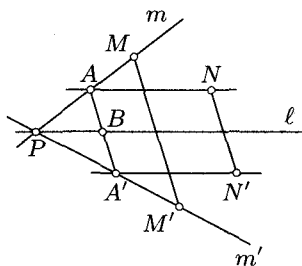


Рис. 20

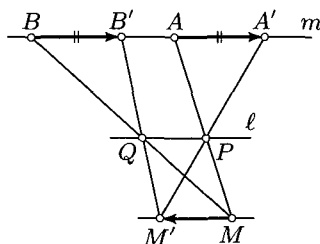


Рис. 21

по свойству инвариантности параллельности прямых (рис. 20).

3. *Прямые, каждая из которых проходит через две родственные точки, параллельны.* Действительно, если $\rho(A) = A'$, $\rho(M) = M'$ и прямая AM пересекает ось родства в точке P , то $(AM, P) = (A'M', P)$. По теореме, обратной обобщённой теореме Фалеса, прямые AA' и MM' параллельны. Если же прямая AM параллельна ℓ , то и $A'M' \parallel \ell$ по свойству 1. Тогда для любой точки P прямой AM и её образа P' имеет место то же самое равенство отношений трёх точек $(AM, P) = (A'M', P')$, из которого и следует доказываемое свойство.

Направление прямых, каждая из которых содержит две родственные точки, называется *направлением родства*.

Последние два свойства дают простой способ построения образа M' произвольной точки M , если родство задано осью ℓ и парой $A \rightarrow A'$ родственных точек: $(AM) \cap \ell = P$, $(MM') \parallel (AA')$, $M' \in (PA')$.

Родство может быть задано парой родственных треугольников ABC и $A'B'C'$. В этом случае ось родства строится по хорошо известной теореме Дезарга; см. [12, с. 74].

Родство, направление которого совпадает с направлением его оси, называется *сдвигом* (рис. 21).

4. *Если направление родства не совпадает с направлением его оси, то ось делит в одном и том же отношении каждый из отрезков, соединяющих точки со их образами* (рис. 20).

В самом деле, если $\rho(A) = A'$ и $(AA') \cap \ell = B$, то отношение $k = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}}$ постоянно для данного родства по свойству отношения отрезков на параллельных прямых. Это отношение называется *коэффициентом родства*. В частности, для косо́й симметрии $k = -1$.

Родство с положительным коэффициентом называется *косым сжатием к прямой* (просто *косым сжатием*).

5. Сдвиг с очевидностью имеет единственное неизменяемое направление (направление сдвига) и имеет прямую неподвижных точек. Согласно выводам из п. 9.2 оба характеристических корня равны 1. Поэтому

для точек каждой прямой, имеющей направление сдвига, выполняется равенство $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, откуда $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Итак, все точки прямой, имеющей направление сдвига, смещаются на один и тот же вектор. Это позволяет легко построить образы точек при сдвиге (рис. 21).

6. Родство с отрицательным коэффициентом, отличное от косой симметрии, есть композиция косой симметрии и косого сжатия.

10.2. Представление аффинного преобразования композицией двух родственных. Пусть аффинное преобразование φ задано двумя соответственными треугольниками ABC и $A'B'C'$. Через вершины треугольника ABC проведём параллельные прямые a, b, c произвольного направления (рис. 22), а через вершины треугольника $A'B'C'$ — параллельные прямые a', b', c' другого направления, так, чтобы точки

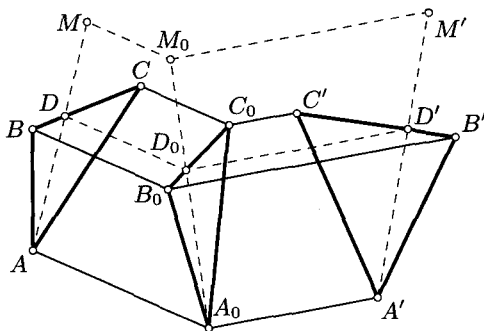


Рис. 22

$(AB) \cap c$ и $(A'B') \cap c'$ делили соответственно отрезки AB и $A'B'$ в неравных отношениях. Тогда точки $A_0 = a \cap a'$, $B_0 = b \cap b'$, $C_0 = c \cap c'$ будут неколлинеарны. Так как по построению $AA_0 \parallel BB_0 \parallel CC_0$ и $A_0A' \parallel B_0B' \parallel C_0C'$, то существует родство ρ_1 , переводящее треугольник ABC в треугольник $A_0B_0C_0$, и родство ρ_2 , переводящее треугольник $A_0B_0C_0$ в треугольник $A'B'C'$. Композиция $\rho_2\rho_1$ отображает треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$ и является аффинным преобразованием. По теореме п. 8.1 она совпадает с заданным аффинным преобразованием φ :

$$\varphi = \rho_2\rho_1.$$

Это представление аффинного преобразования неоднозначно: вследствие большого произвола в выборе направлений родства ρ_1 и родства ρ_2 оно может быть выполнено бесконечным числом вариантов.

Представление аффинного преобразования композицией двух родственных даёт изящный способ построения образа M' точки M при аффинном преобразовании, показанный на рис. 22.

§11. Построение центра аффинного преобразования

11.1. Использование композиции двух родственных преобразований. Пусть аффинное преобразование φ отлично от родственного и задано двумя соответственными треугольниками ABC и $A'B'C'$. Построим неподвижную точку (центр) этого преобразования. Для этого построим треугольник $A_0B_0C_0$, родственный каждому из данных треугольников (рис. 23). Этим самым мы представили данное аффинное преобразование композицией двух родственных преобразований ρ_1 и ρ_2 . Построим их оси ℓ_1 и ℓ_2 , на которых лежат точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A_0B_0C_0$, $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$.

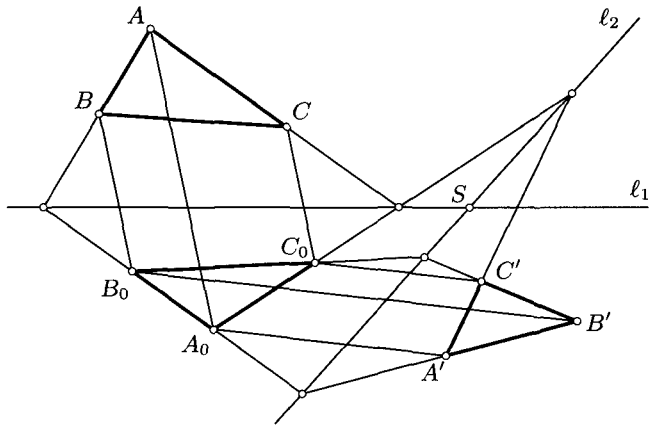


Рис. 23

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 не совпадают, ибо иначе преобразование φ оказалось бы родственным. Если они непараллельны, то их общая точка S и есть искомым центром преобразования, φ , поскольку других неподвижных точек не имеется (иначе φ было бы родством).

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то неподвижных точек композиции $\rho_2\rho_1 = \varphi$ не существует: если бы $\varphi(M) = M$, то необходимо $\rho_1(M) = \rho_2^{-1}(M)$, что невозможно, поскольку направления преобразований ρ_1 и ρ_2 различны.

11.2. Другой способ построения центра аффинного преобразования заключается в непосредственном использовании задания аффинного преобразования тремя парами соответственных точек $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$. Пусть BC и $B'C'$ непараллельны, CA и $C'A'$ также непараллельны. Проведём через A прямую p параллельно BC , а через A' прямую p' параллельно $B'C'$. Если BC и $B'C'$ пересекаются в точке

M_1 , а p и p' — в точке N_1 , то прямая M_1N_1 представляет собой множество неподвижных точек множества всех аффинных преобразований, каждое из которых отображает прямые BC и p соответственно на прямые $B'C'$ и p' (рис. 24).

В самом деле, если неподвижная точка S существует и она не принадлежит прямой M_1N_1 , то через S можно провести прямые ℓ и ℓ_1 ,

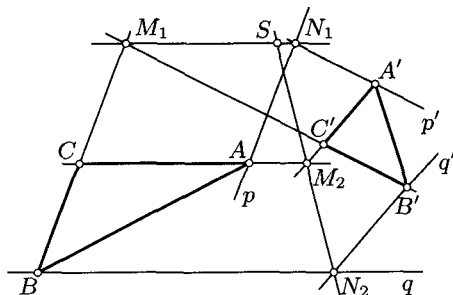


Рис. 24

соответственно параллельные p и p' . Эти прямые должны быть соответственными в каждом аффинном преобразовании рассматриваемого множества. Но тогда прямые ℓ и ℓ_1 пересекают прямую M_1N_1 в точках L и L_1 , разделяющих отрезок M_1N_1 в равных отношениях, вследствие чего должны совпасть. Но это противоречит предположению о том, что неподвижная точка не принадлежит прямой M_1N_1 .

Аналогично проведём через точку B прямую q параллельно CA , а через B' прямую q' параллельно $C'A'$. Если CA и $C'A'$ пересекаются в точке M_2 , а q и q' — в точке N_2 , то прямая M_2N_2 представляет собой множество неподвижных точек множества всех аффинных преобразований, каждое из которых переводит прямые CA и q соответственно в прямые $C'A'$ и q' .

Если теперь потребовать, чтобы аффинное преобразование переводило одновременно BC в $B'C'$, p в p' , CA в $C'A'$, q в q' , то оно будет переводить точки A , B , C соответственно в точки A' , B' , C' и поэтому совпадёт с заданным преобразованием. Следовательно, точка S пересечения прямых M_1N_1 и M_2N_2 является неподвижной точкой данного преобразования.

Если прямые M_1N_1 и M_2N_2 параллельны, то неподвижных точек нет. Если эти прямые совпадают, то заданное аффинное преобразование является родственным. Если соответственные стороны треугольников параллельны, то аффинное преобразование есть перенос или гомотетия.

В общем случае, когда прямые каждой пары AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ непараллельны, прямая M_3N_3 , построенная по аналогии с прямыми M_1N_1 и M_2N_2 , проходит через точку S их пересечения в силу равноправия этих трёх прямых.

Очевидно, вместо треугольников ABC и $A'B'C'$ можно взять такие параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$, что $AB \parallel A'B'$ и $BC \parallel B'C'$ (рис. 25).

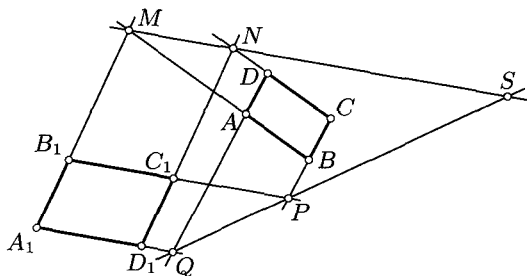


Рис. 25

В таком случае неподвижная точка аффинного преобразования, переводящего $ABCD$ в $A'B'C'D'$, есть общая точка прямых MN и PQ , где

$$\begin{aligned} M &= (AB) \cap (A'B'), & N &= (CD) \cap (C'D'), \\ P &= (BC) \cap (B'C'), & Q &= (DA) \cap (D'A'). \end{aligned}$$

В заключение заметим, что этот способ построения неподвижной точки аффинного преобразования применим для движений и подобий, при этом используются два правильных треугольника или два квадрата.

§12. Формулы аффинных преобразований некоторых частных видов

Найдём формулы простейших аффинных преобразований в системах координат, выбирая их так, чтобы полученные формулы имели возможно более простой вид.

12.1. Родство. Примем ось Ox за ось родства. Тогда каждая точка $(x, 0)$ неподвижна. По общим формулам аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

получим такие тождества:

$$x \equiv a_1x + c_1, \quad 0 \equiv a_2x + c_2,$$

из которых следует, что

$$a_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Поэтому эти формулы принимают простой вид

$$\begin{cases} x' = x + b_1 y, \\ y' = b_2 y. \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Постоянное число $b_2 = \frac{y'}{y} = k$ называется *коэффициентом родства* (п. 10.1, свойство 4). Положим, что направление родства совпадает с направлением оси Oy . Тогда каждые две родственные точки (x, y) и (x', y') будут иметь равные абсциссы $x' \equiv x$, в силу соотношений (I.15) получим $b_1 = 0$ и формулы родственного преобразования будут простейшими:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

При $k > 0$ родство (I.16) является *косым сжатием* к оси Ox , при $k = -1$ — *косой симметрией* к оси Ox , при $k < 0$ — *родством*

П рода, так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k < 0$.

12.2. Сдвиг. В этом случае направление родства совпадает с направлением его оси и выбор оси ординат не имеет значения. Любые две соответственные точки имеют равные ординаты $y' = y$, и поэтому в формулах (I.15) будет $b_2 = 1$. Обозначим $b_1 = c$. Формулы сдвига вдоль оси Ox принимают следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x + cy, \\ y' = y, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Постоянное число $c = (x' - x) : y$ называется *коэффициентом сдвига*.

12.3. Гомотетия. Пусть точка $S(x_0, y_0)$ — центр гомотетии, $k \neq 0$ — её коэффициент. По определению гомотетии $\overline{SX'} = k \cdot \overline{SX}$, что равносильно двум координатным уравнениям

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0), \\ y' - y_0 = k(y - y_0), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0, \\ y' = ky + (1 - k)y_0, \end{cases} \quad \Delta = k^2 > 0.$$

В частности, при $k = -1$ имеем *центральный симметрию*:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0, \\ y' = -y + 2y_0. \end{cases}$$

12.4. Перенос и переносная симметрия. Независимо от выбора системы координат непосредственно по определению получаем формулы переноса на вектор $\overline{MM'} = (a, b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Композицию косой симметрии и переноса параллельно её оси называют *переносной симметрией* с данной осью и вектором переноса.

Пусть ось Ox — ось косой симметрии, ось Oy задаёт её направление и $\bar{r} = (a, 0)$ — вектор переноса. Тогда по формулам косой симметрии $x_1 = x$, $y_1 = -y$ и формулам переноса $x' = x_1 + a$, $y' = y_1$ получаем формулы переносной симметрии:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y, \end{cases} \quad \Delta = -1.$$

Задача. Доказать, что композиция косой симметрии и центральной симметрии, центр которой не принадлежит оси первой симметрии, является переносной симметрией. Найти её ось и вектор.

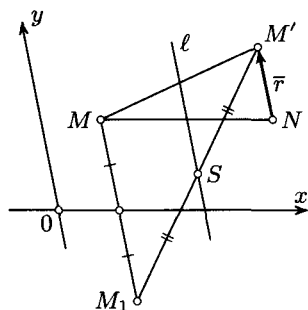


Рис. 26

Решение. Пусть косая симметрия задана формулами $x' = x$, $y' = -y$ и $S(x_0, y_0)$ — центр второй симметрии (рис. 26). Тогда композиция этих симметрий будет иметь следующие формулы:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0, \\ y' = y + 2y_0, \end{cases} \quad y_0 \neq 0. \quad (\text{I.17})$$

Прямая ℓ , проходящая через S параллельно оси Oy , делит отрезок MM' пополам (теорема Фалеса). Построим такую точку N , что $MN \parallel Ox$, $NM' \parallel \ell$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{NM'} &= \overline{NM} + \overline{MM'} = (x - x', 0) + (x' - x, y' - y) = \\ &= (0, y' - y) = (0, 2y_0). \end{aligned}$$

Так как вектор $\bar{r} = \overline{NM'}$ коллинеарен ℓ и не зависит от выбора точки M , то формулы (I.17) определяют переносную симметрию с осью ℓ и вектором $\bar{r}$.

При $y_0 = 0$ имеем косую симметрию с осью ℓ .

§ 13. Эквиаффинные преобразования как композиции косых симметрий

13.1. Примеры. Для косой симметрии $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, т. е. она является эквиаффинным преобразованием II рода. Перенос, центральная симметрия и сдвиг — эквиаффинные преобразования I рода. Перенос представляется композицией двух косых симметрий с параллельными осями и общим направлением, совпадающим с направлением переноса.

Сдвиг σ с осью ℓ , при котором $M \rightarrow M'$, является композицией косой симметрии с той же осью ℓ ($M \rightarrow M_1$) в произвольном направлении и косой симметрии с осью ℓ ($M_1 \rightarrow M'$) (рис. 27). Он может быть представлен также и композицией симметрий, оси которых пересекаются, а направления совпадают (рис. 28). Тогда ось сдвига содержит точку O

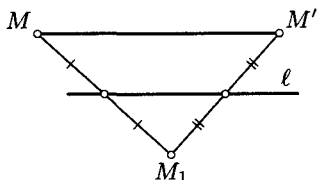


Рис. 27

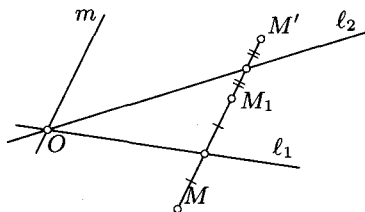


Рис. 28

пересечения осей симметрий, а его направление совпадает с общим направлением симметрий.

Центральная симметрия с центром O есть коммутативная композиция двух косых симметрий, оси которых пересекаются в точке O .

Тождественное преобразование (оно, очевидно, эквиаффинное) есть квадрат косой симметрии с произвольными осью и направлением.

Эти примеры и тот факт, что всякое движение евклидовой плоскости представимо композицией осевых симметрий, см. [12, с. 187], наводят на мысль о возможности представления любого эквиаффинного преобразования аффинной плоскости композицией косых симметрий. И это действительно так.

13.2. Теоремы о разложении эквиаффинных преобразований. Теорема. Если эквиаффинное преобразование f имеет неподвижную точку A , то оно является либо косой симметрией, ось которой содержит точку A , либо композицией двух таких симметрий, либо композицией трёх таких симметрий, либо тождественным преобразованием.

Доказательство. Если преобразование f отлично от тождественного, то существует такая точка B , что $f(B) = C \neq B$. Рассмотрим косую симметрию σ_1 , при которой точки B и C являются соответственными, а ось содержит точку A . Тогда композиция $\sigma_1 f$, очевидно, имеет две неподвижные точки A и B и поэтому является эквиаффинным родством с осью AB . Следовательно, эта композиция есть либо косая симметрия, либо сдвиг τ с осью AB , т. е. либо $\sigma_1 f = \sigma_2$, либо $\sigma_1 f = \tau$. Тогда из первого представления следует, что $f = \sigma_1 \sigma_2$. Сдвиг τ , в свою очередь, представим композицией двух косых симметрий $\tau = \sigma_3 \sigma_4$, откуда $f = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. Наконец, если композиция $\sigma_1 f$ — тождественное преобразование, то $f = \sigma_1$. Утверждение доказано. $\square$

Теорема. Любое эквиаффинное преобразование f плоскости есть либо тождественное преобразование, либо косая симметрия, либо композиция не более четырёх косых симметрий.

Доказательство. Случай, когда преобразование f имеет хотя бы одну неподвижную точку, обобщён предыдущей теоремой. Если неподвижных точек не имеется, то рассмотрим пару соответственных точек $f(A) = B$ и косую симметрию σ_1 , при которой $\sigma_1(A) = B$. Тогда точка A неподвижна при композиции $\sigma_1 f$, которая на основании предыдущей теоремы может быть либо тождественным преобразованием, либо косой симметрией, либо композицией двух или трёх косых симметрий:

$$\sigma_1 f = E, \quad \sigma_1 f = \sigma_2, \quad \sigma_1 f = \sigma_2 \sigma_3, \quad \sigma_1 f = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4,$$

откуда соответственно

$$f = \sigma_1, \quad f = \sigma_1 \sigma_2, \quad f = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad f = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4. \quad \square$$

13.3. Критерий эквицентроаффинного преобразования. Для того чтобы аффинное преобразование было эквиаффинным и центроаффинным (п. 9.1) одновременно, необходимо и достаточно, чтобы одновременно имели место условия

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1 \quad \text{и} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 \\ a_2 & b_2 - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку $\delta = (a_1 - 1)(b_2 - 1) - a_2 b_1 = \Delta - (a_1 + b_2) + 1$, то эти условия совместны тогда и только тогда, когда

$$a_1 + b_2 \neq 2 \quad \text{и} \quad a_1 + b_2 \neq 0.$$

Эти критерии не зависят от выбора системы координат, поскольку имеют геометрический смысл.

Примером эквицентроаффинного преобразования служит центральная симметрия, но не только она.

§ 14. Группы преобразований и геометрии

14.1. Понятие группы преобразований. Примеры. Рассмотрим совокупность G преобразований f_i , обладающую такими свойствами:

- 1) если $f_1 \in G$ и $f_2 \in G$, то композиция $f_2 f_1 \in G$;
- 2) если $f \in G$, то обратное преобразование $f^{-1} \in G$.

Из этих двух условий непосредственно следует, что совокупность G содержит тождественное преобразование $E = f^{-1}f$.

Простым примером такой совокупности преобразований служит тройка аффинных преобразований: двух косых симметрий с пересекающимися осями a и b и, соответственно, с направлениями b и a и симметрии относительно точки O пересечения прямых a и b . Проверка выполнения указанных двух условий незатруднительна.

Определение. Группой G преобразований называется совокупность G преобразований, обладающая двумя свойствами: 1) композиция любых двух преобразований из G принадлежит G ; 2) преобразование, обратное любому преобразованию из G , принадлежит G .

При выполнении этих требований говорят, что множество G преобразований замкнуто относительно операции композиции.

Очевидно, следующие известные множества преобразований являются группами: 1) множество всех движений евклидовой плоскости (пространства), см. [12, с. 155], — группа движений; 2) множество всех преобразований подобия евклидовой плоскости (пространства), см. [12, с. 225], — группа подобий; 3) множество всех аффинных преобразований аффинной плоскости — аффинная группа.

Для множества всех аффинных преобразований выполнение требований группы непосредственно следует из определения аффинного преобразования (§6).

Подмножество H группы G называется подгруппой группы G , если H — группа. В приведённых примерах трёх групп — движений, подобий и аффинной — подгруппами являются соответственно их подмножества преобразований первого рода. Однако группами не будут соответствующие подмножества преобразований второго рода, так как композиция двух преобразований второго рода есть преобразование первого рода.

Множество всех гомотетий плоскости не является группой, так как композиция двух гомотетий может быть не только гомотетией, но и переносом; см. [12, с. 219]. Однако если рассматривать множество всех гомотетий и переносов, то оно есть группа, для которой множество всех переносов — её коммутативная подгруппа.

Вот ещё аналогичный пример. Множество всех родственных преобразований с общей осью ℓ есть группа (докажите!), для которой подгруппой является множество всех сдвигов с осью ℓ .

14.2. Определение геометрии по Клейну. В 1872 году Феликс Клейн определил геометрию как теорию инвариантов данной группы преобразований⁸. Говорят, что эта группа порождает соответствующую геометрию.

Среди инвариантов каждой группы преобразований можно указать основные, из которых получаются все остальные. Аффинная группа преобразований порождает аффинную геометрию. Её содержание может быть получено из одного инварианта — коллинеарности точек. Сам Клейн придавал особое значение группе подобий, называя её *главной группой*. Евклидова геометрия порождается двумя группами — группой движений и группой подобий.

Принципиально важно выяснить вопрос о зависимости между геометрией группы G и геометрией её подгруппы H . Будем называть их условно G -геометрией и H -геометрией.

Всякий G -инвариант в то же время есть, очевидно, и H -инвариант. Подгруппа H группы G ($H \subset G$, $H \neq G$) выделяется из G по крайней мере одним дополнительным условием — её характеристическим инвариантом, не являющимся инвариантом всей группы G . Например, подгруппа Π подобий аффинной группы A характеризуется дополнительным инвариантом — отношением неколлинеарных отрезков, не имеющим места в группе A . Следовательно, вообще H -геометрия шире, чем G -геометрия, и включает в себя G -геометрию.

Таким образом, если H — подгруппа группы G , то их геометрии находятся в обратной связи: G -геометрия является частью H -геометрии. В частности, аффинная геометрия полностью входит в евклидову геометрию: аффинные инварианты являются также инвариантами группы подобий и группы движений.

14.3. Аффинно эквивалентные фигуры. В евклидовой геометрии очень большую роль играют понятия равных фигур и подобных фигур как таких фигур, которые являются соответственными при движениях или при подобиях. Эти понятия чужды аффинной геометрии, но аналогичное значение имеют аффинно эквивалентные (аффинно равные) фигуры. Две фигуры называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, отображающее одну из них на другую. Поэтому эти две фигуры обладают одними и теми же

⁸Имеется русский перевод его классической работы «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (Эрлангенская Программа).

аффинными свойствами. В аффинной геометрии они неразличимы, относятся к одному аффинному типу.

Рассмотрим примеры. Согласно теореме о задании аффинного преобразования плоскости, для любых двух треугольников, если не установлено соответствие между их вершинами, существует шесть аффинных преобразований, каждое из которых отображает один из них на другой. Поэтому на аффинной плоскости все треугольники одинаковы. На этом основан метод аффинных преобразований решения аффинных задач на евклидовой плоскости; см. [12, § 24].

Любые два параллелограмма аффинно эквивалентны. В аффинной геометрии нельзя выделить ни ромбы, ни прямоугольники, ни квадраты. Для двух трапеций дело обстоит иначе: они могут отличаться отношениями оснований. Две трапеции аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда равны отношения их оснований. Нетрудно доказать, что два четырёхугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда их диагонали делятся точками пересечения в соответственно равных отношениях.

Типизация основных видов аффинных преобразований плоскости (без включения их композиций)

А. Центроаффинные

1. Центральная симметрия
2. Гомотетия
3. Эллиптический поворот
4. Гиперболический поворот

А̄. Нецентроаффинные

1. Родство
2. Перенос
3. Переносная симметрия
4. Параболический поворот

Б. Родственные

1. Косая симметрия
2. Сжатие ($k > 0$)
3. Сдвиг
4. Родство II рода

Б̄. Неродственные

1. Гомотетия
2. Аффинные повороты
3. Перенос
4. Переносная симметрия

В. Эквиваффинные

1. Центральная симметрия
2. Косая симметрия
3. Сдвиг
4. Аффинные повороты
5. Перенос
6. Переносная симметрия

В̄. Неэквиваффинные

1. Гомотетия ($k \neq -1$)
2. Родство $\Delta \neq \pm 1$

Задачи и упражнения

I.1. Точки E и K — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые BE и KD делят диагональ AC на три равные части. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

I.2. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали пересекаются в точке Q ; M и N — такие точки диагоналей AC и BD , что $AM = QC$ и $BN = QD$. Докажите, что прямые DM и CN отсекают на основании AB равные отрезки AE и BF .

I.3. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMNP$, где $M \in AB$, $P \in AD$. Докажите, что прямые MD , BP , NC пересекаются в одной точке.

I.4. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что вершины D , E , F принадлежат соответственно прямым AB , BC , AC . Через середину M стороны BC проведена прямая AM , пересекающая DE в точке K . Докажите, что $CFDK$ — параллелограмм.

I.5. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам DC и CB параллелограмма $ABCD$. Через середины отрезков DM и AB проведена прямая, через середины отрезков AD и BN — вторая прямая, пересекающая первую в точке S . Докажите, что прямая AS проходит через середину отрезка MN .

I.6. Через противоположные вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены две параллельные прямые, первая из которых пересекает прямые BC и CD в точках M и N , а вторая — прямые AB и AD в точках P и Q . Докажите, что $MP \parallel NQ$.

I.7. Пусть D , E , F — середины сторон BC , CA , AB треугольника ABC . Проходящая через B прямая пересекает отрезок DE и продолжение отрезка EF в точках M и N . Докажите, что $AN \parallel CM$.

I.8. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB . Постройте его середину с помощью одной линейки.

I.9. Даны две параллельные прямые и точка A . С помощью одной линейки постройте прямую, проходящую через точку A параллельно данным прямым.

I.10. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB . Пользуясь одной линейкой, постройте отрезок, равный $2AB$.

I.11. Если три диагонали шестиугольника (не обязательно выпуклого) имеют общую середину, то каждые две его противоположные стороны параллельны. Докажите.

I.12. Докажите, что середины сторон четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами центрально-симметричного шестиугольника.

I.13. Два треугольника (или многоугольника) называются равными, если один из них служит образом другого при переносе или центральной симметрии. Пользуясь этим определением, докажите утверждение: два треугольника равновелики, если они имеют равные стороны, лежащие на одной прямой, а их противоположные вершины лежат на параллельной прямой.

I.14. Если треугольники OAB и OA_1B_1 гомотетичны, то треугольники OA_1B и OAB_1 равновелики. Докажите.

I.15. Если точки M, N, P лежат на прямых, содержащих соответственно стороны треугольника ABC , а точки M_1, N_1, P_1 соответственно симметричны им относительно середин сторон этого треугольника, то треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики. Докажите.

I.16. Если две стороны двух ориентированных треугольников лежат на прямой, а противоположные им вершины — на параллельной ей прямой, то отношение площадей этих треугольников равно отношению коллинеарных сторон. Докажите.

I.17. Если никакие три из четырёх точек A, B, C, D не лежат на одной прямой и никакие три из четырёх точек A_1, B_1, C_1, D_1 не лежат на одной прямой и $AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1, AC \parallel A_1C_1, AD \parallel A_1D_1, BD \parallel B_1D_1$, то также $CD \parallel C_1D_1$. Докажите.

I.18. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABKL, BCMN, CAPQ$. Докажите, что если $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CM}$, то

$$S_{CAPQ} = S_{ABKL} + S_{BCMN}.$$

Если $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$, то площадь одного параллелограмма равна сумме площадей двух других.

I.19. Прямые AB и CD пересекаются в точке M . Докажите, что площадь S треугольника ACM равна

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{(\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{CD})}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD}} \right|.$$

I.20. Дано аффинное преобразование плоскости. На данной прямой найдите пару соответственных точек при этом преобразовании.

I.21. Дано аффинное преобразование. Через данную точку проведите две соответственные прямые при этом преобразовании.

I.22. Докажите, что если аффинное преобразование переводит один пучок параллельных прямых в другой, то соответственные прямые этих пучков пересекаются в точках, принадлежащих одной прямой.

I.23. Докажите, что два аффинных преобразования в общем случае имеют только одну общую пару соответственных точек. Постройте эту пару.

1.24. Докажите, что если два аффинных преобразования имеют две общие пары соответственных точек, то таких пар бесконечно много.

1.25. Докажите, что если при аффинном преобразовании $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow E$, $E \rightarrow A$, то каждая диагональ пятиугольника $ABCDE$ параллельна одной из сторон пятиугольника. Постройте неподвижную точку этого преобразования.

1.26. Напишите формулы аффинного преобразования, которое переводит точки $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 1)$ соответственно в точки $A'(-1, 10)$, $B'(6, 6)$, $C'(-4, 6)$.

1.27. Найдите неподвижные точки аффинного преобразования, которое переводит точки $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(1, -1)$ соответственно в точки $A'(-3, 0)$, $B'(6, 2)$, $C'(10, -1)$.

1.28. Покажите, что аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 4x + 4y + 1, \\ y' = 6x + 9y + 2 \end{cases}$$

есть родство. Найдите его ось, направление и коэффициент.

1.29. Покажите, что аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2, \\ y' = 2x - y + 2 \end{cases}$$

есть сдвиг. Найдите его ось.

1.30. Покажите, что аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y + 3, \\ y' = x + 2y - 1 \end{cases}$$

есть косая симметрия. Найдите её ось и направление.

1.31. Составьте формулы косой симметрии с осью $2x - y + 1 = 0$ и направлением $\vec{r} = (1, 3)$.

1.32. Составьте формулы сдвига с осью $x - y + 1 = 0$ и парой соответственных прямых $2x - y = 0$ и $y - 2 = 0$.

1.33. Для любой точки плоскости существует содержащая её прямая, которая неподвижна при данном нетождественном эквиаффинном преобразовании. Докажите, что это преобразование есть либо сдвиг, либо центральная симметрия, либо перенос.

1.34. Докажите, что любое аффинное преобразование есть композиция эквиаффинного преобразования и гомотетии.

1.35. Докажите, что множество всех родственных преобразований с общим наперёд заданным направлением есть группа.

I.36. Докажите, что композиция двух сдвигов с общим направлением есть либо сдвиг, либо перенос.

I.37. Докажите, что множество всех сдвигов и переносов с общим направлением есть группа.

I.38. Даны три косых симметрии, направления которых определены сторонами некоторого треугольника, а оси параллельны и содержат середины соответствующих сторон этого треугольника. Докажите, что композицией этих трёх симметрий является также косая симметрия. Постройте её ось.

I.39. Точки A_1 , B_1 , C_1 делят стороны BC , CA , AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Докажите, что совпадают центроиды треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и треугольника, образованного прямыми AA_1 , BB_1 , CC_1 .

I.40. Через точку P , не принадлежащую сторонам треугольника ABC , проведены прямые, параллельные прямым AB , BC , CA и пересекающие соответственно прямые BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что

$$\frac{PA_1}{AB} + \frac{PB_1}{BC} + \frac{PC_1}{CA} = 1.$$

Линии второго порядка на аффинной плоскости

В отечественной учебной литературе изложение теории кривых второго порядка ведётся с использованием метрических понятий. Даже аффинные свойства часто доказываются метрическими средствами и поэтому теряются среди общего материала. Это расходится с поставленной целью написания нашей книги. С этой точки зрения положительно отличается от других почти забытый учебник [10] высокообразованного геометра и педагога А. М. Лопшица, где аффинной геометрии уделено достаточно много внимания.

Кривой второго порядка называется плоская линия, которая имеет в некоторой аффинной системе координат уравнение второй степени. Порядок уравнения кривой не зависит от выбора аффинного репера, и, следовательно, кривая второго порядка является а ф ф и н н ы м п о н я т и е м.

В данном изложении мы ограничимся в основном действительными невырожденными линиями второго порядка — эллипсом, гиперболой, параболой. Редкие отступления от аффинного изложения к евклидовой плоскости приводятся лишь для сведения читателя. Они могут быть опущены без ущерба для понимания дальнейшего.

§15. Эллипс

15.1. Аффинное определение и каноническое уравнение эллипса. Пусть даны три неколлинеарные точки O, A, B . Эллипсом будем называть геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых сумма квадратов площадей треугольников OAM и OBM равна квадрату площади треугольника OAB :

$$S_{OAM}^2 + S_{OBM}^2 = S_{OAB}^2. \quad (\text{II.1})$$

Из этого определения ещё сразу не следует, что существуют точки M плоскости, обладающие свойством (II.1). Это скоро обнаружится при получении координатного уравнения рассматриваемого геометрического места точек. Зададим аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, где $\bar{e}_1 = \overline{OA}$,

$\bar{e}_2 = \overline{OB}$. Равенство (II.1) равносильно его представлению через косые произведения соответствующих векторов —

$$(\bar{e}_1 \circ \overline{OM})^2 + (\bar{e}_2 \circ \overline{OM})^2 = \bar{e}_1 \circ \bar{e}_2.$$

Если $\overline{OM} = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$, то согласно определению (I.3) косого произведения это равенство эквивалентно следующему:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2,$$

или

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (\text{II.2})$$

Это и есть *аффинное каноническое уравнение эллипса* относительно заданного репера. Оно имеет бесконечное множество решений — координат точек эллипса, хотя пока и не даёт полного представления об этой кривой.

15.2. Исследование аффинных свойств эллипса по его каноническому уравнению. Из уравнения (II.2) видно, что $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Это означает, что все точки эллипса лежат внутри параллелограмма с вершинами $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

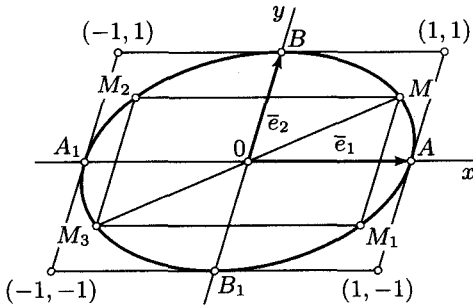


Рис. 29

Далее, если $M(x, y)$ — точка эллипса, то ему принадлежат также и точки $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$ (рис. 29). Следовательно, эллипс отображается на себя косой симметрией с осью Ox в направлении оси Oy , косой симметрией с осью Oy в направлении оси Ox , а также центральной симметрией с центром O .

Всякая хорда эллипса, содержащая центр O его симметрии, называется его *диаметром*. Хорды MM_1 , параллельные диаметру BB_1 , делятся

пополам диаметром AA_1 (рис. 30), и аналогично хорды MM_2 , параллельные диаметру AA_1 , делятся пополам диаметром BB_1 (рис. 31).

Первоначальные диаметры AA_1 и BB_1 не являются исключительными: этим свойством обладают и другие пары диаметров эллипса.

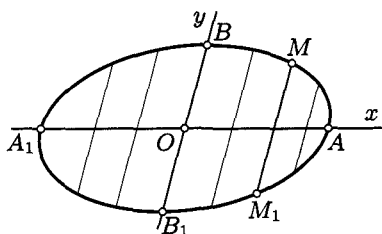


Рис. 30

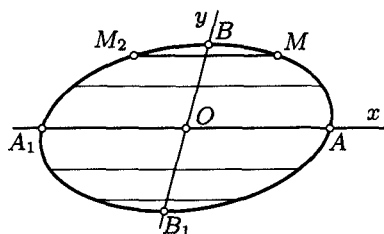


Рис. 31

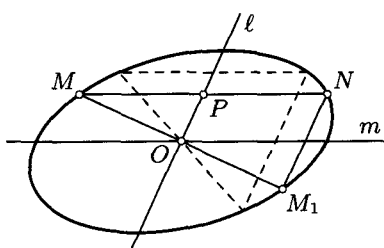


Рис. 32

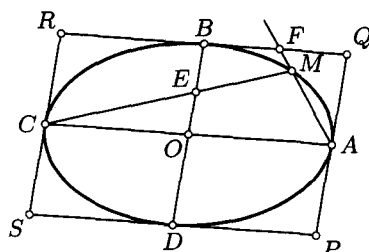


Рис. 33

Пусть MN — некоторая хорда эллипса, параллельная его диаметру t (рис. 32), P — её середина, O — центр эллипса. Рассмотрим композицию двух косых симметрий с осями $\ell = (OP)$ и t соответственно в направлениях прямых t и ℓ (п. 14.1): $M \rightarrow N \rightarrow M_1$. Она является центральной симметрией с центром O : $S_m S_\ell = Z_0$, откуда следует, что точка M_1 принадлежит эллипсу, O — середина хорды MM_1 , $NM_1 \parallel \ell$, диаметр t делит хорду NM_1 пополам. Если будем считать M переменной точкой эллипса, то получим следующие важные выводы:

- 1) множество середин P хорд MN , параллельных диаметру t эллипса, есть его диаметр ℓ ;
- 2) если диаметр ℓ эллипса делит пополам хорды, параллельные диаметру t , то диаметр t делит пополам хорды, параллельные диаметру ℓ .

Два диаметра эллипса, обладающие последним свойством, называются сопряжёнными диаметрами этого эллипса.

15.3. Задание эллипса двумя его сопряжёнными диаметрами. Если даны два отрезка AA_1 и BB_1 с общей серединой O , то тем самым задан и базисный треугольник OAB , участвующий в определении эллипса. Поэтому эллипс задаётся двумя его сопряжёнными диаметрами AA_1 и BB_1 . Все пары сопряжённых диаметров эллипса равноправны (аффинно эквивалентны).

Поставим задачу о построении точек эллипса, заданного парой его сопряжённых диаметров AC и BD . Построим параллелограмм $PQRS$, для которого эти отрезки служат средними линиями (рис. 33). На прямой OB возьмём произвольную точку E и на прямой QB построим точку F так, что

$$\overline{OE} : \overline{EB} = \overline{QF} : \overline{FB}.$$

Докажем, что точка $M = (CE) \cap (AF)$ принадлежит заданному эллипсу. Зададим аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$. Пусть точка E имеет координаты $(0, \alpha)$, а точка F — координаты $(\beta, 1)$. В силу равенства отношений $(OB, E) = (QB, F)$ имеем равенство $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-\beta}{\beta}$, откуда $\alpha = 1 - \beta$. Прямые CE и AF получают соответственно уравнения

$$\alpha x - y + \alpha = 0, \quad \text{и} \quad x + \alpha y - 1 = 0,$$

из которых следует, что

$$x = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad y = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}. \quad (\text{II.3})$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x^2 + y^2 = 1$. Этим самым принадлежность точки $M(x, y)$ заданному эллипсу доказана. Её построение, выполненное на рис. 33, представляет простой аффинный способ построения любого числа точек эллипса при изменении положения точки E и использовании свойства кососимметричности эллипса относительно прямых AC и BD и относительно точки O их пересечения.

Выбранное в качестве характеристического свойства эллипса свойство (II.1) хотя и является аффинным, но не даёт наглядного представления о форме эллипса и его геометрических свойствах.

Примечание. Известные читателю понятия: оси эллипса, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет не существуют в аффинной геометрии. Полуоси эллипса могут быть определены как перпендикулярные полудиаметры, что тоже неаффинно. Уравнение (II.2) совпадает с уравнением окружности единичного радиуса с центром в начале координат прямоугольной декартовой системы координат.

Следствие. Любые два эллипса аффинно эквивалентны (и аффинно эквивалентны окружности).

15.4. Параметрические уравнения эллипса. Функции $\sin t$ и $\cos t$ могут быть определены чисто аналитически степенными рядами

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots, \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

($-\infty < t < +\infty$). Поэтому они имеют место в аффинной геометрии, несмотря на изучаемую их евклидову теорию, основанную на использовании окружности.

Так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, то можно положить

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Эти уравнения и представляют собой один из возможных видов *параметрических уравнений эллипса*. Другим видом параметрических уравнений эллипса являются уравнения (II.3):

$$x = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad y = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2},$$

где α — любое действительное число.

15.5. Теорема Аполлония¹. *Параллелограммы, построенные на парах сопряжённых полудиаметров эллипса, равновелики.*

Доказательство. Пусть OA и OB , OA_1 и OB_1 — две пары сопряжённых полудиаметров эллипса ω (рис. 34). Парам точек $O \rightarrow O_1$,

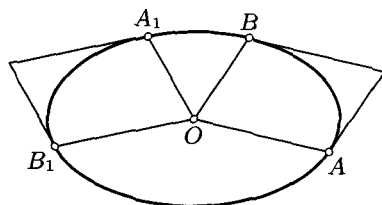


Рис. 34

$A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$ задаётся аффинное преобразование f , а данными парами полудиаметров — один и тот же эллипс ω , инвариантный при преобразовании f . На основании инвариантности отношения площадей

$$\frac{S_{OAB}}{S_\omega} = \frac{S_{OA_1B_1}}{S_\omega},$$

откуда $S_{OAB} = S_{OA_1B_1}$, и, значит, параллелограммы равновелики.

¹Аполлоний Пергский (около 262 — 190 гг. до н.э.) — младший из трёх крупнейших геометров древней Греции (Перга — город в Малой Азии). Его важнейший труд «Конические сечения» оказал большое влияние при создании аналитической геометрии Декартом и Ферма.

§ 16. Аффинные автоморфизмы эллипса.

Эллиптический поворот

16.1. Координатные формулы автоморфизмов эллипса. Преобразование, отображающее фигуру на себя, называется *автоморфизмом* этой фигуры. Найдём аффинные автоморфизмы эллипса. По доказанному в п. 15.2 косая симметрия относительно диаметра эллипса в сопряжённом ему направлении есть один из автоморфизмов этого эллипса. Очевидно, композиция любых двух автоморфизмов фигуры есть также её автоморфизм. Следовательно, *множество всех автоморфизмов фигуры есть группа*.

Ясно, что всякий автоморфизм эллипса оставляет неподвижным его центр. Пусть эллипс имеет каноническое уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Тогда любой его аффинный автоморфизм имеет однородные формулы

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y, \\y' &= a_2x + b_2y.\end{aligned}\tag{II.4}$$

Необходимо, чтобы выполнялось равенство $x'^2 + y'^2 = 1$, или

$$(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = 1.$$

Поэтому имеем тождественное равенство

$$(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = x^2 + y^2.$$

Следовательно, коэффициенты преобразования (II.4) удовлетворяют трём условиям

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

На основании первых двух условий можно положить

$$a_1 = \cos \varphi, \quad a_2 = \sin \varphi, \quad b_1 = \cos \psi, \quad b_2 = \sin \psi.$$

Тогда третье условие примет вид $\cos(\varphi - \psi) = 0$. Отсюда

$$\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}, \quad b_1 = \mp \sin \varphi, \quad b_2 = \pm \cos \varphi.$$

Таким образом, всякий автоморфизм эллипса $x^2 + y^2 = 1$ имеет либо формулы вида

$$\begin{cases}x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,\end{cases} \quad \Delta = 1, \tag{II.5}$$

либо формулы вида

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi, \end{cases} \quad \Delta = -1. \quad (\text{II.6})$$

В частности, преобразование (II.5) при $\varphi = 0$ является тождественным, а при $\varphi = \pi$ — центральной симметрией:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Преобразование (II.6) имеет ось родства

$$y = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} x \Leftrightarrow y = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} x,$$

а так как $\Delta = -1$, то оно является косо́й симметрией относительно диаметра эллипса.

Определение. Нетождественное эквиаффинное преобразование первого рода, отображающее на себя некоторый эллипс, называется *эллиптическим поворотом*.

Эллиптический поворот имеет формулы (II.5).

Итак, любой нетождественный аффинный автоморфизм эллипса есть либо эллиптический поворот, либо косая симметрия, либо центральная симметрия.

16.2. Конструктивное представление эллиптического поворота. Теорема. Для любых двух точек A и B эллипса γ существует единственный эллиптический поворот, отображающий эллипс γ на себя и точку A на точку B (рис. 35).

Доказательство. **Существование.** Для некоторой точки $P \in \gamma$ рассмотрим композицию косых симметрий относительно диаметров ℓ и m в сопряжённых им направлениях: $A \rightarrow P$ и $P \rightarrow B$. Указанная композиция отображает эллипс γ на себя и точку A на точку B .

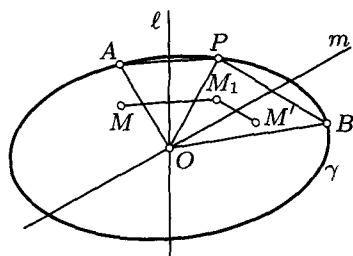


Рис. 35

Единственность. Эллиптический поворот имеет формулы (II.5), зависящие от одного параметра φ — угла эллиптического поворота. По заданной паре $A(x_1, y_1) \rightarrow B(x_2, y_2)$ соответственных точек получаем линейную неоднородную систему

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y_2 = y_1 \cos \varphi + x_1 \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

относительно $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ с определителем $x_1^2 + y_1^2 = 1$. Поэтому всегда существует её единственное решение и соответствующий ему единственный эллиптический поворот. Это лишний раз доказывает и его существование, предыдущее конструктивное доказательство которого представляет собой хороший способ построения образа M_1 произвольной точки M при заданном эллиптическом повороте (рис. 35). $\square$

Таким образом, эллиптический поворот вполне определяется заданием инвариантного эллипса γ и угла φ поворота.

16.3. Геометрический смысл угла эллиптического поворота. Если эллиптический поворот переводит полуэллипсы OA и OB эллипса γ в полуэллипсы OA_1 и OB_1 , то в силу его эквиаффинности эллиптические секторы AOB и A_1OB_1 будут равновеликими, откуда сразу следует и равновеликость секторов AOA_1 и BOB_1 , заматаемых полуэллипсами OA и OB (рис. 36).

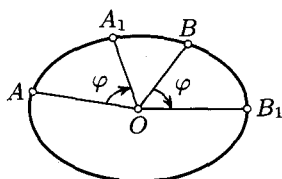


Рис. 36

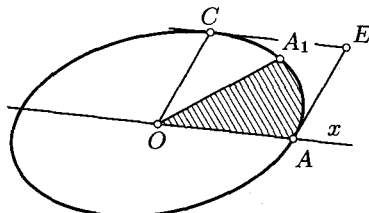


Рис. 37

Эллиптический угол φ как мера эллиптического поворота обладает важным свойством аддитивности: при композиции эллиптических поворотов их углы складываются. Это следует из того, что при этом складываются площади соответствующих эллиптических секторов.

По теореме Аполлония площадь S_0 параллелограмма, построенного на двух сопряжённых полуэллипсах OA и OC , не зависит от выбора их пары. Кроме того, отношение площадей двух фигур не зависит от единичного (координатного) параллелограмма. Поэтому отношение $S_\varphi : S_0$ площади S_φ сектора AOA_1 к площади S_0 является характеристикой угла φ эллиптического поворота. За эллиптическую меру угла принимается

$$\varphi = \frac{2S_\varphi}{S_0}. \quad (\text{II.8})$$

Это можно было бы подтвердить и вычислениями; см. [8, с. 151].

Угол эллиптического поворота равен отношению удвоенной площади, заматаемой полуэллипсом произвольного инвариантного эллипса, к площади параллелограмма, построенного на двух сопряжённых полуэллипсах этого эллипса (рис. 37).

Примечание. Сделаем небольшое отступление в евклидову плоскость. Известно, что эллипс есть образ окружности при ортогональном сжатии её к диаметру (рис. 38). Пусть эллиптический поворот f задан

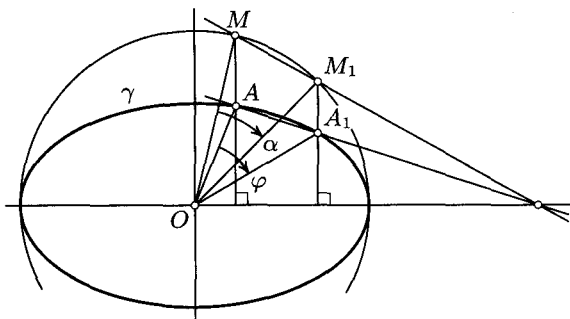


Рис. 38

инвариантным эллипсом γ и парой его соответственных точек $A \rightarrow A_1$. Если M и M_1 — прообразы этих точек при сжатии g , то эллиптический поворот можно представить композицией

$$f = g\omega g^{-1},$$

где ω — обычный (круговой) поворот ($M \rightarrow M_1$) евклидовой плоскости около центра O на угол $\alpha = \widehat{MOM_1}$.

§17. Гипербола

17.1. Аффинное определение гиперболы и её каноническое уравнение. Пусть заданы три неколлинеарные точки O, A, B . Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых истинно соотношение

$$S_{OBM}^2 - S_{OAM}^2 = S_{OAB}^2.$$

Выберем аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, где $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$. Если x, y — координаты точки M в этом репере, то аналогично эллипсу имеем

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (\text{II.9})$$

Из этого уравнения видно, что $|x| \geq 1$. Это означает, что на гиперболе не существует точек внутри полосы, ограниченной двумя прямыми, параллельными оси Oy и пересекающими ось Ox в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Это значит также, что на гиперболе найдутся точки, координаты которых имеют сколь угодно большие значения. Из уравнения (II.9) следует также, что если точка $M(x, y)$ лежит на гиперболе, то на ней

лежат и точки $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$. Поэтому гипербола, как и эллипс, кососимметрична относительно каждой оси координат в направлении другой оси и начало координат является центром её симметрии — *центром гиперболы* (рис. 39). Хорда MM_3 содержит центр O гиперболы и является одним из её диаметров. Не существует диаметра, лежащего на оси Oy , так как на этой оси не существует точек гиперболы. Хорда MM_2 параллельна оси Ox и делится осью Oy пополам. Хорда MM_1 параллельна оси Oy и делится осью Ox пополам.

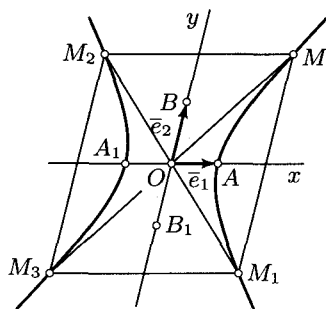


Рис. 39

В случае гиперболы понятию диаметра придают расширенный смысл. Именно, *диаметром гиперболы* называют прямую, на которой лежат середины всех хорд, параллельных некоторой заданной прямой. Тогда говорят что этот диаметр *сопряжён* направлению этой прямой. Ось Ox можно теперь назвать диаметром, сопряжённым направлению оси Oy . Таким образом, координатные оси образуют пару сопряжённых диаметров гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, при этом ось Ox называется *действительным диаметром* гиперболы, а ось Oy — её *мнимым диаметром*.

Почти дословно можно повторить рассуждения о серединах параллельных хорд эллипса с использованием композиции косых симметрий (п. 15.2), которая является центральной симметрией. Тогда снова получим аналогичные выводы:

- 1) множество всех середин параллельных хорд гиперболы есть прямая — *диаметр гиперболы* (в его расширенном смысле) (рис. 40);
- 2) если диаметр ℓ делит пополам хорды, параллельные диаметру m , то и диаметр m делит пополам хорды, параллельные диаметру ℓ .

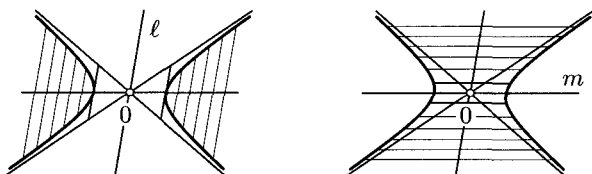


Рис. 40

Пара диаметров ℓ и m гиперболы, обладающая последним свойством, называется парой *сопряжённых диаметров* этой гиперболы. Существенно, что один из двух сопряжённых диаметров действительный, другой — мнимый.

17.2. Асимптоты гиперболы. Сопряжённые гиперболы. Для более полного исследования вопроса о форме гиперболы найдём точки пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ с прямой $y = kx$, проходящей через её центр. Из системы этих уравнений получаем, что

$$x^2 = \frac{1}{1 - k^2}.$$

Отсюда следуют такие выводы: 1) если точки пересечения гиперболы и прямой действительные, то они симметричны относительно центра гиперболы; 2) при $k^2 < 1$ прямая пересекает гиперболу в двух действительных точках; 3) при $k^2 > 1$ точки пересечения мнимые; 4) если $k = \pm 1$, то точек пересечения прямой и гиперболы вообще не существует (ни действительных, ни мнимых).

Определение. Если прямая, проходящая через центр гиперболы, не имеет с ней ни действительных, ни мнимых точек пересечения, то она называется *асимптотой гиперболы*.

Очевидно, гипербола имеет две асимптоты — при $k = 1$ и при $k = -1$ соответственно с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$. Асимптоты гиперболы параллельны диагоналям параллелограмма, построенного на векторах $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ координатного репера (рис. 41).

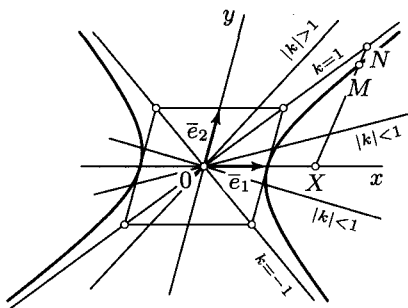


Рис. 41

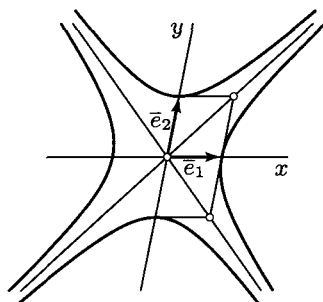


Рис. 42

При неограниченном удалении точки гиперболы от её центра она неограниченно приближается к асимптоте. В самом деле, при фиксированном значении x точка $M(x, y)$ гиперболы и соответствующая ей точка $N(x, y_1)$ асимптоты имеют разность ординат

$$y_1 - y = z - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}},$$

которая стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Поменяем ролями переменные x и y , при этом сохранив данную систему координат:

$$y^2 - x^2 = 1.$$

Это уравнение является уравнением гиперболы, для которой ось Oy является действительной, а ось Ox — мнимой, но асимптоты останутся прежними: $y - x = 0$ и $x + y = 0$ (рис. 42). Гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и $y^2 - x^2 = 1$, имеющие общую пару асимптот, называются *сопряжёнными гиперболами*.

17.3. Уравнение гиперболы относительно её асимптот. Заменим координатный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ новым репером $(O, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, где $\bar{e}'_1 = \frac{1}{2} \cdot (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$, $\bar{e}'_2 = \frac{1}{2} \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2 = x' \cdot \bar{e}'_1 + y' \cdot \bar{e}'_2 = \\ &= \frac{1}{2} x' \cdot (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) + \frac{1}{2} y' \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \\ &= \frac{1}{2} (x' + y') \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{2} (y' - x') \cdot \bar{e}_2, \end{aligned}$$

откуда $x = \frac{1}{2}(x' + y')$, $y = \frac{1}{2}(y' - x')$.

В новом репере гипербола имеет новое уравнение

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y) = y'x' = 1, \\ x'y' &= 1. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

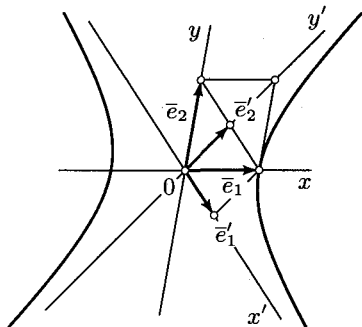


Рис. 43

Асимптоты гиперболы $x - y = 0$ и $x + y = 0$ становятся осями координат $y' = 0$ и $x' = 0$ новой аффинной системы $Ox'y'$. Уравнение (II.10) называют *уравнением гиперболы относительно её асимптот* (рис. 43).

17.4. Параметрические уравнения гиперболы можно получить, представив её каноническое уравнение в виде $(x + y)(x - y) = 1$. Очевидно, $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Положим $x - y = t$, тогда $x + y = \frac{1}{t}$, откуда

$$\begin{cases} 2x = t + \frac{1}{t}, \\ 2y = -t + \frac{1}{t}. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Эти уравнения называется *параметрическими уравнениями гиперболы*.

Заметим, что $x > 0$ при $t > 0$ и обратно, а $x < 0$ при $t < 0$ и обратно. Следовательно, для $t > 0$ имеем одну (правую) ветвь гиперболы, а для $t < 0$ — другую (левую) её ветвь. Значениям $t = \pm 1$ соответствуют точки пересечения гиперболы с осью Ox . Уравнения (II.11) позволяют получить простой аффинный способ построения точек гиперболы.

Уравнением $x - y = t$ определяется пучок прямых, параллельных асимптоте $y = x$, а уравнение $x + y = \frac{1}{t}$ задаёт пучок прямых, параллельных второй асимптоте. Точка M пересечения соответственных прямых этих пучков, которые отвечают одному значению t , имеет координаты (II.11), т.е. является точкой гиперболы,

Соответственные прямые этих пучков удобно строить по их точкам пересечения с осью Ox : $x = t$ и $x = \frac{1}{t}$.

17.5. Построение точек гиперболы. Пусть дан репер $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$ и точка P : $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB}$ (рис. 44). Рассмотрим пучок прямых с центром в точке P : $y - 1 = k(x - 1)$, $k \neq 0$. Пусть некоторая прямая этого пучка пересекает прямые OA и OB в точках C и N . Построим на ней точку M , заданную условием $\overline{CM} = \overline{PN}$, и найдём множество всех точек $M(x, y)$ для всех прямых пучка, кроме прямой, параллельной прямой OA . Находим координаты точек $C\left(\frac{1+k}{k}, 0\right)$ и $N(0, k)$. Из условия $\overline{CM} = \overline{PN}$ получаем $x = \frac{1}{k}$, $y = k$. Следовательно, рассматриваемым геометрическим местом точек M является гипербола $xy = 1$ с асимптотами OA и OB .

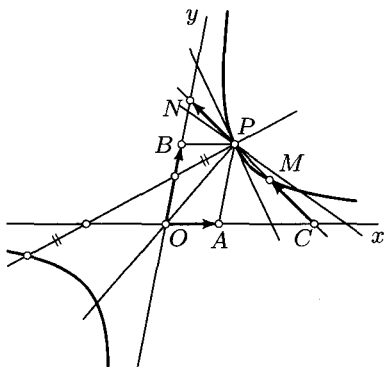


Рис. 44

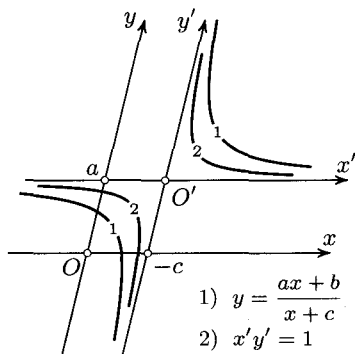


Рис. 45

17.6. Гипербола как график дробно-линейной функции. Дробно-линейной функцией называется функция

$$y = \frac{ax + b}{x + c}, \quad b \neq ac. \quad (\text{II.12})$$

Ограничение $b \neq ac$ необходимо, потому что при $b = ac$ функция обращается в постоянную $y = a$. Значения $x = -c$ и $y = a$ не удовлетворяют равенству (II.12) и поэтому исключаются.

Выполним перенос начала координат заданной системы Oxy на вектор $OO' = (-c, a)$, т.е. произведём замену $x = x' - c$, $y = y' + a$. Тогда уравнение (II.12) примет вид

$$x'y' = b - ac. \quad (\text{II.13})$$

Уравнениями (II.13) и (II.12) задаётся одна и та же гипербола, но в разных системах координат $O'x'y'$ и Oxy . При $b - ac > 0$ она гомотетична гиперболе $x'y' = 1$ с центром гомотетии в точке $O'(-c, a)$. Эти гиперболы имеют общие асимптоты $x = -c$ и $y = a$ (рис. 45). При $b - ac < 0$ гипербола (II.13) гомотетична гиперболе $x'y' = -1$ при том же центре гомотетии.

§18. Аффинные автоморфизмы гиперболы.

Гиперболический поворот

18.1. Справка о гиперболических синусе и косинусе. На множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел x гиперболический синус ($\text{sh } x$) и гиперболический косинус ($\text{ch } x$) определяются формулами

$$\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Они представляются степенными рядами

$$\begin{aligned} \text{sh } x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ \text{ch } x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

В отличие от тригонометрических функций они **н е п е р и о д и ч н ы**. Их графики представлены рисунком 46.

Функция $\text{sh } x$ нечётная: $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$, $\text{sh } 0 = 0$.

Функция $\text{ch } x$ чётная: $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$, $\text{ch } 0 = 1$.

Имеют место зависимость

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \quad (\text{II.14})$$

и формулы сложения

$$\begin{aligned} \text{sh}(\alpha \pm \beta) &= \text{sh } \alpha \text{ch } \beta \pm \text{ch } \alpha \text{sh } \beta, \\ \text{ch}(\alpha \pm \beta) &= \text{ch } \alpha \text{ch } \beta \pm \text{sh } \alpha \text{sh } \beta. \end{aligned}$$

Подробную теорию гиперболических функций читатель может найти в брошюре [15], где эти функции рассматриваются геометрически на евклидовой плоскости с использованием

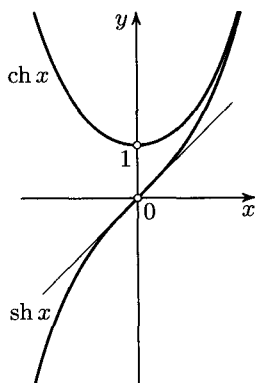


Рис. 46

равнобочной гиперболы при постоянном сравнении с тригонометрическими функциями.

Геометрически аргумент α (гиперболический угол) равен удвоенной площади криволинейного треугольника (сектора гиперболы) OAM (O — начало координат, $A(1, 0)$, M — точка равнобочной гиперболы).

18.2. Автоморфизмы гиперболы. Всякий автоморфизм f гиперболы γ оставляет неподвижным её центр и поэтому представляется однородными формулами

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y, \\ y' = a_2x + b_2y. \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Прообраз гиперболы $x'^2 - y'^2 = 1$ имеет уравнение

$$(a_1x + b_1y)^2 - (a_2x + b_2y)^2 = 1.$$

Так как $f(\gamma) = \gamma$, то получаем тождество

$$(a_1^2 - a_2^2)x^2 + (b_1^2 - b_2^2)y^2 + 2(a_1b_1 - a_2b_2)xy \equiv x^2 - y^2,$$

из которого следует, что коэффициенты формул (II.15) необходимо удовлетворяют условиям

$$a_1^2 - a_2^2 = 1, \quad b_1^2 - b_2^2 = -1, \quad a_1b_1 - a_2b_2 = 0. \quad (\text{II.16})$$

Отсюда видно, что $a_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.

Возможны два случая: $a_2 = 0$ и $a_2 \neq 0$. Рассмотрим их подробнее.

1. При $a_2 = 0$ из третьего условия (II.16) следует, что $b_1 = 0$, а из первых двух — $a_1 = \pm 1$, $b_2 = \pm 1$. Поэтому формулы (II.15) дают четыре вида аффинных автоморфизмов гиперболы: тождественное преобразование ($x' = x, y' = y$), центральную симметрию ($x' = -x, y' = -y$), косую симметрию с осью Ox ($x' = x, y' = -y$), косую симметрию с осью Oy ($x' = -x, y' = y$).

2. Пусть $a_2 \neq 0$. Тогда в силу первого условия (II.16) и зависимости (II.14) можно положить $a_1 = \text{ch } \varphi$, $a_2 = \text{sh } \varphi$. Аналогично, на основе второго условия (II.16), $b_2 = \text{ch } \psi$, $b_1 = \text{sh } \psi$. В результате третье условие примет вид

$$\text{ch } \varphi \text{ sh } \varphi - \text{sh } \varphi \text{ ch } \psi = 0, \quad \text{или} \quad \text{sh}(\psi - \varphi) = 0,$$

откуда $\varphi = \psi$. Поэтому формулы автоморфизмов (II.15) запишутся в окончательном виде

$$\begin{cases} x' = x \text{ch } \varphi + y \text{sh } \varphi, \\ y' = x \text{sh } \varphi + y \text{ch } \varphi, \end{cases} \quad \Delta = \text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1. \quad (\text{II.17})$$

Эти формулы определяют э к в и ц е н т р о а ф ф и н н о е преобразование первого рода. Оно называется *гиперболическим поворотом*.

Подведём итог. Осями координат гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ может быть любая пара её сопряжённых диаметров. Следовательно, аффинными автоморфизмами гиперболы являются следующие преобразования: *косые симметрии относительно её диаметров в сопряжённых им направлениях, симметрия относительно её центра, гиперболические повороты около её центра, тождественное преобразование*.

18.3. Гиперболический поворот определён как эквиаффинное преобразование первого рода, отображающее некоторую гиперболу на себя. Он имеет формулы (II.17), где параметр φ называется *углом гиперболического поворота*. Здесь уместна одна оговорка: центральная симметрия относительно центра гиперболы удовлетворяет этому определению, но ни при каком действительном значении φ этими формулами не охватывается. Поэтому она имеет особое название — *инволютивный поворот*.

Рассмотрим свойства гиперболического поворота.

1. Если гипербола $x^2 - y^2 = 1$ инвариантна при гиперболическом повороте (II.17), то при этом повороте также инвариантна сопряжённая ей гипербола $y^2 - x^2 = 1$.

Действительно, с учётом соотношения (II.14) получаем

$$\begin{aligned} y'^2 - x'^2 &= (x \operatorname{sh} \varphi + y \operatorname{ch} \varphi)^2 - (x \operatorname{ch} \varphi + y \operatorname{sh} \varphi)^2 = \\ &= x^2(\operatorname{sh}^2 \varphi - \operatorname{ch}^2 \varphi) + y^2(\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi) = y^2 - x^2. \end{aligned}$$

Поэтому, если $y^2 - x^2 = 1$, то и $y'^2 - x'^2 = 1$.

2. Каждая из асимптот гиперболы, инвариантной при гиперболическом повороте, отображается этим поворотом на себя.

В самом деле,

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x \operatorname{ch} \varphi + y \operatorname{sh} \varphi) + (x \operatorname{sh} \varphi + y \operatorname{ch} \varphi) = \\ &= (x + y)(\operatorname{sh} \varphi + \operatorname{ch} \varphi) = (x + y)e^\varphi. \end{aligned}$$

Так как $e^\varphi \geq 1$, то $x' + y'$ и $x + y$ обращаются в нуль одновременно. Аналогично доказывается инвариантность второй асимптоты $x - y = 0$.

3. Гиперболическим поворотом каждая ветвь инвариантной гиперболы отображается на себя.

Для доказательства по формулам (II.17) находим

$$\begin{aligned} xx' - yy' &= (x^2 \operatorname{ch} \varphi + xy \operatorname{sh} \varphi) - (xy \operatorname{sh} \varphi + y^2 \operatorname{ch} \varphi) = \\ &= (x^2 - y^2) \operatorname{ch} \varphi = \operatorname{ch} \varphi \geq 1, \quad xx' - yy' \geq 1, \end{aligned}$$

откуда $xx' \geq 1 + yy'$. Если бы соответственные точки оказались на разных ветвях гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, то мы бы имели $xx' < 0$ и полученное неравенство было бы противоречиво, поскольку правая его часть может быть положительной.

4. Гиперболический поворот определяется заданием инвариантной гиперболы и пары соответственных точек одной её ветви.

Доказательство дословно совпадает с доказательством аналогичного свойства эллиптического поворота (п. 16.2). Построение образа данной точки плоскости при заданном гиперболическом повороте просто вы-

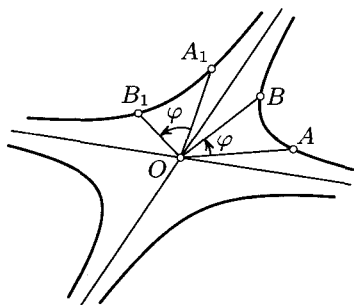


Рис. 47

полняется при представлении этого поворота композицией двух косых симметрий (рис. 35).

5. При гиперболическом повороте все радиусы двух сопряжённых инвариантных гипербол замечают равновеликие гиперболические секторы (рис. 47). Имеет место теорема Аполлония (п. 15.5).

6. Угол φ гиперболического поворота выражается той же формулой (II.8), что и при эллиптическом повороте.

§19. Парабола

19.1. Аффинное определение и каноническое уравнение параболы. Пусть даны три неколлинеарные точки O, A, B . Параболой называется геометрическое место M точек плоскости, для каждой из которых выполняется соотношение

$$S_{OAM}^2 + S_{OBM}S_{OAB} = 0. \quad (\text{II.18})$$

Зададим репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, где $\bar{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\bar{e}_2 = \overrightarrow{OB}$. Если точка M имеет в этом репере координаты x, y , то соотношение (II.18) эквивалентно равенству

$$(\bar{e}_1 \circ \overrightarrow{OM})^2 + (\bar{e}_2 \circ \overrightarrow{OM})(\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2) = 0,$$

которое в координатах имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$y^2 - x = 0.$$

Это и есть аффинное каноническое уравнение параболы.

Из уравнения $x = y^2$ следует, что если на параболы лежит точка $M(x, y)$, то на ней лежит и точка $M_1(x, -y)$. Хорда MM_1 параллельна оси Oy , её середина принадлежит оси Ox . Таким образом, ось Ox есть геометрическое место середин хорд параболы, параллельных оси Oy . На основании определения, принятого в п. 17.1, ось Ox является *диаметром параболы, сопряжённым направлением оси Oy* (рис. 48).

Так как $y^2 \geq 0$, то $x \geq 0$, а координата y может принимать сколь угодно большие значения. Это значит, что парабола находится в правой полуплоскости от оси Oy и простирается в эту полуплоскость сколь угодно далеко.

Для полного выяснения вопроса о форме параболы рассмотрим точки пересечения параболы $x = y^2$ с прямой, проходящей через фиксированную точку (x_0, y_0) этой параболы. Система уравнений секущей прямой и параболы

$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0), \\ y^2 = x \end{cases}$$

при $k = 0$ имеет очевидное единственное решение (x_0, y_0) . Следовательно, каждая прямая $y - y_0 = 0$, параллельная оси Ox , пересекает параболу в единственной точке. Говорят, что такие прямые имеют *асимптотическое направление*.

Если $k \neq 0$, то эта система имеет два решения:

$$(x_0, y_0) \text{ и } \left(\left(\frac{1}{k} - y_0 \right)^2, \frac{1}{k} - x_0 \right),$$

т. е. прямая, не параллельная оси Ox и проходящая через точку параболы, пересекает параболу ещё в одной точке (рис. 49). Ось Oy имеет

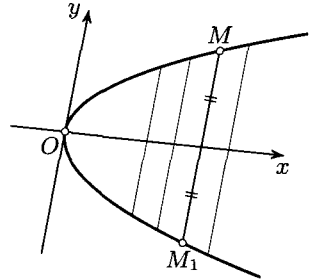


Рис. 48

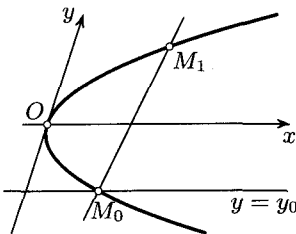


Рис. 49

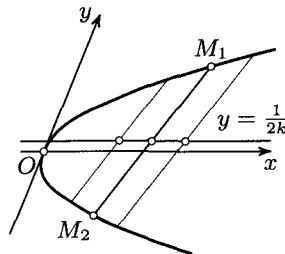


Рис. 50

с параболой две совпадающие общие точки, так как в этом случае два решения системы $x = 0$ и $x = y^2$ совпадают.

Прямая, имеющая с кривой две совпадающие общие точки, называется *касательной* к кривой в двойной общей точке. В частности, ось Oy касается параболы $y^2 = x$ в начале координат.

19.2. Диаметры параболы определяются на основании **теоремы**: *середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой*. Эта прямая называется *диаметром параболы, сопряжённым данным хордам*.

Доказательство. Пусть дана хорда M_1M_2 и

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \quad y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2),$$

где k — постоянное число, не равное нулю. Тогда

$$x_1 - x_2 = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = \frac{1}{k}(y_1 - y_2),$$

откуда

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{k}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2k}.$$

Если (x, y) — середина хорды M_1M_2 , то $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ и $y = \frac{1}{2k}$. Но первое из этих равенств есть тождество, а второе представляет собой уравнение искомого множества. Итак, *середины всех параллельных хорд параболы, имеющих направление k , принадлежат прямой $y = \frac{1}{2k}$ (рис. 50), параллельной оси Ox* . $\square$

19.3. Построение точек параболы. Построим параллелограмм $OACB$ на базисных векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Пусть точки $P(\alpha, 0) \in (OB)$ и $Q(\beta, 1) \in (BC)$ удовлетворяют условию (рис. 51)

$$\overline{OP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC}.$$

Построим прямые $m \parallel (OA)$, $P \in m$, и OQ . Найдём координаты точки M их пересечения. Поскольку прямые m и OQ имеют соответственно уравнения $y = \alpha$ и $y = \frac{1}{\beta}x$, то M имеет координаты $(\alpha\beta, \alpha)$. Равенство указанных отношений приводит к равенству $\alpha = \beta$. Следовательно, координаты точки $M(\alpha^2, \alpha)$ удовлетворяют уравнению $y^2 = x$, т. е. точка M лежит на заданной параболе. Рисунок 51 иллюстрирует простой аффинный способ построения точек параболы с помощью параллелограмма.

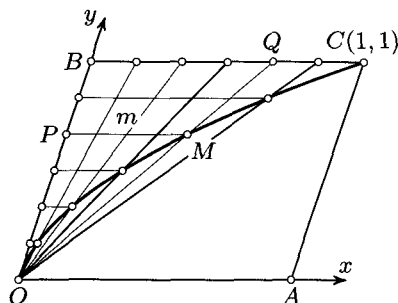


Рис. 51

координаты точки $M(\alpha^2, \alpha)$ удовлетворяют уравнению $y^2 = x$, т. е. точка M лежит на заданной параболе. Рисунок 51 иллюстрирует простой аффинный способ построения точек параболы с помощью параллелограмма.

§ 20. Аффинные автоморфизмы параболы.

Параболический поворот

20.1. Формулы автоморфизмов параболы. Пусть данная парабола γ имеет уравнение $y = x^2$. Пусть её автоморфизм f задан формулами

$$\begin{cases} x' = ax + by + c, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1. \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Для того чтобы уравнение $x'^2 - y' = 0$ было уравнением образа параболы $x^2 - y = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$b = 0, \quad a_1 = 2ac, \quad b_1 = a^2, \quad c_1 = c^2.$$

Тогда формулы (II.19) принимают вид

$$\begin{cases} x' = ax + c, \\ y' = 2acx + a^2y + c^2, \end{cases} \quad \Delta = a^3. \quad (\text{II.20})$$

Всякий автоморфизм параболы сохраняет её единственное асимптотическое направление и отображает её диаметр на диаметр (в силу их аффинного характера). Составим характеристическое уравнение (I.14) для преобразования (II.20):

$$\lambda^2 - (a + a^2)\lambda + a^3 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = a$ и $\lambda_2 = a^2$. Согласно выводам из п. 9.2, преобразование (II.20) имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда оба характеристических корня отличны от 1, т.е. при $a \neq \pm 1$. В противном случае $\Delta = \pm 1$, т.е. при $a = \pm 1$ преобразование (II.20) эквиаффинное. Тогда возможны три случая.

1. $a = 1, c = 0$. Преобразование f тождественное.
2. $a = 1, c \neq 0$. Формулы (II.20) принимают вид

$$\begin{cases} x' = x + c, \\ y' = 2cx + y + c^2, \end{cases} \quad \Delta = 1. \quad (\text{II.21})$$

Система (I.11) несовместна. Неподвижных точек нет. Такое преобразование f называется *параболическим поворотом*.

3. $a = -1$. Формулы будут такими:

$$\begin{cases} x' = -x + c, \\ y' = -2cx + y + c^2, \end{cases} \quad \Delta = -1.$$

Этими уравнениями определяется косая симметрия относительно диаметра $x = \frac{1}{2}c$.

Итак, в отличие от автоморфизмов эллипса и гиперболы, автоморфизмы параболы зависят от двух параметров и содержат как эквиаффинные, так и неэквиаффинные преобразования, как центроаффинные, так и нецентроаффинные преобразования.

20.2. Параболический поворот. *Параболическим поворотом* называется эквиаффинное преобразование первого рода, отображающее некоторую параболу на себя и не имеющее неподвижных точек. Параболический поворот имеет формулы (II.21).

Рассмотрим свойства параболического поворота.

1. *Параболический поворот является композицией сдвига и переноса, не параллельного оси сдвига.*

Действительно, согласно формулам (II.21) зададим сдвиг $x_1 = x$, $y_1 = y + 2cx$ с осью Oy и перенос $x' = x_1 + c$, $y' = y_1 + c^2$ ($c \neq 0$). Вектор $\bar{r} = (c, c^2)$ переноса не параллелен оси Oy сдвига. Очевидно, их композиция и есть данный параболический поворот (рис. 52).

2. *Параболический поворот определяется заданием пары соответственных точек параболы*, поскольку значение его единственного параметра c определяется заданием этой пары: $c = x' - x$.

3. Исключив из уравнений (II.21) параметр c , получаем

$$x'^2 - y' = x^2 - y.$$

Это означает следующее. Каждая из парабол семейства

$$x^2 - y = C \quad (\text{II.22})$$

инвариантна при параболическом повороте (II.21), т. е. при этом повороте точки перемещаются по параболам (II.22), имеющим общие диаметры. Каждая из этих парабол отображается на другую переносом в направлении оси Oy (рис. 53).

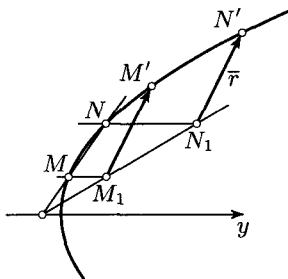


Рис. 52

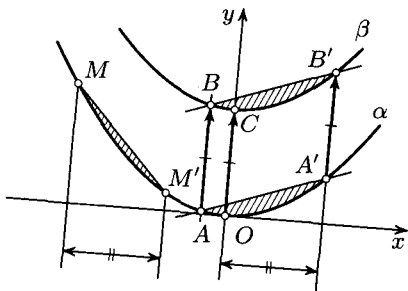


Рис. 53

4. Прямые, каждая из которых содержит две соответственные точки при параболическом повороте, отсекают от содержащей их инвариантной параболы семейства (II.22) равновеликие сегменты.

Доказательство. Пусть параболический поворот f , заданный парой $M \rightarrow M'$ соответственных точек параболы α (для $C=0$), переводит точку A этой параболы в точку A' (рис. 53). Тогда сегменты, отсекаемые от неё прямыми MM' и AA' , равновелики, так как параболический поворот — эквиаффинное преобразование. Парабола α переводится в любую другую параболу β семейства (II.22) переносом в направлении общих диаметров. Сегмент, отсекаемый от параболы α прямой AA' , равновелик соответствующему сегменту параболы β .

§ 21. Диаметры и касательные

21.1. Критерии сопряжённости двух диаметров эллипса и гиперболы. Пусть дан диаметр $y = kx$ эллипса $x^2 + y^2 = 1$. Найдём уравнение сопряжённого ему диаметра. Он делит пополам каждую хорду M_1M_2 , параллельную данному диаметру (§ 15). Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$. Так как $x_1^2 + y_1^2 = 1$ и $x_2^2 + y_2^2 = 1$, то $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$, или $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)$. Середина $P(x, y)$ хорды M_1M_2 имеет координаты $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Отсюда на основании предыдущего равенства имеем уравнение диаметра, сопряжённого данному диаметру $y = kx$:

$$x = -ky, \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{k}x. \quad (\text{II.23})$$

Таким образом, критерием сопряжённости двух диаметров эллипса, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 , является условие

$$k_1 k_2 = -1.$$

В полной аналогии будем иметь уравнение диаметра, сопряжённого данному диаметру $y = kx$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$:

$$y = \frac{1}{k}x,$$

и критерий их сопряжённости — $k_1 k_2 = 1$.

21.2. Касательные к кривым второго порядка. Касательной к кривой второго порядка называется прямая, имеющая с кривой две общие совпавшие точки.

Выведем уравнение касательной к эллипсу $x^2 + y^2 = 1$ в его точке $T(x_0, y_0)$. Прямую, содержащую эту точку, зададим параметрическими

уравнениями $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, где α, β — координаты её направляющего вектора. Из системы уравнений эллипса и этой прямой имеем

$$(x_0 + \alpha t)^2 + (y_0 + \beta t)^2 = 1,$$

или

$$(\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0)t + x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Поскольку $x_0^2 + y_0^2 = 1$, то это равенство принимает вид

$$(\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0)t = 0.$$

Его очевидному решению $t_1 = 0$ отвечает точка T . По определению касательной его второе решение

$$t_2 = -\frac{2(\alpha x_0 + \beta y_0)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

должно совпадать с первым: $t_1 = t_2 = 0$, что выполнимо лишь при условии $\alpha x_0 + \beta y_0 = 0$ (условие касания), откуда $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{x_0}{y_0}$. Следовательно, искомое уравнение $y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$ касательной уточняется:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0), \quad \text{или} \quad xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Таким образом, касательная к эллипсу $x^2 + y^2 = 1$ в его точке (x_0, y_0) имеет уравнение

$$xx_0 + yy_0 = 1. \quad (\text{II.24})$$

Повторять его вывод для касательной к гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ нет необходимости, так как отличие несущественно. Ответ аналогичен:

$$xx_0 - yy_0 = 1.$$

Переходим к решению такой же задачи для параболы $x = y^2$. В этом случае $x_0 + \alpha t = (y_0 + \beta t)^2$, или, что эквивалентно,

$$\beta^2 t^2 + (2\beta y_0 - \alpha)t + y_0^2 - x_0 = 0.$$

Так как $y_0^2 - x_0 = 0$, то $\beta^2 t^2 + (2\beta y_0 - \alpha)t = 0$. Требуемое условие $t_1 = t_2 = 0$ приводит к тому, что $2\beta y_0 - \alpha = 0$ (условие касания), откуда $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2y_0}$. Тогда уравнение касательной будет иметь вид

$$y - y_0 = \frac{1}{2y_0}(x - x_0), \quad \text{или} \quad 2yy_0 - 2y_0^2 = x - x_0.$$

Поскольку $y_0^2 = x_0$, то имеем окончательно искомое уравнение касательной:

$$2yy_0 = x + x_0. \quad (\text{II.25})$$

21.3. Построение касательных к эллипсу и гиперболе основано на следующей **теореме**: касательные к эллипсу или гиперболе параллельны диаметру, который сопряжён диаметру, содержащему точку касания.

Доказать это совсем просто. Если $T(x_0, y_0)$ — заданная точка касания эллипса, то содержащий её диаметр имеет уравнение $y = \frac{y_0}{x_0}x$, а сопряжённый ему диаметр, в силу соотношения (II.23), — уравнение $x_0x + y_0y = 0$. Сравнение его с уравнением (II.24) касательной к эллипсу убедительно говорит об истинности доказываемого факта.

Повторять доказательство для гиперболы нет необходимости. Построения выполнены на рис. 54 и рис. 55.

Построение касательной к параболе ещё проще. Пусть $T(x_0, y_0)$ — точка параболы $y^2 = x$. Тогда касательная (II.25) пересекает ось Ox в точке $x = -x_0$. Если система координат не задана, то можно поступить так: через данную точку T проводим произвольную хорду и параллельную ей хорду. Их середины определяют диаметр параболы, который может быть принят в качестве оси Ox . Тогда ось Oy параллельна выбранным хордам (рис. 56).

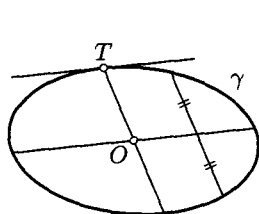


Рис. 54

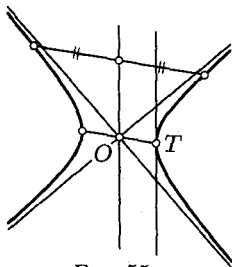


Рис. 55

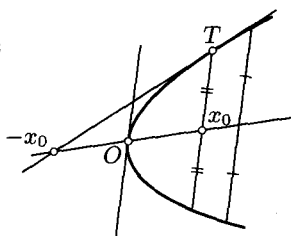


Рис. 56

§ 22. Общее уравнение линий второго порядка

22.1. Определения. Линией второго порядка называется множество всех точек аффинной плоскости, аффинные координаты каждой из которых удовлетворяют уравнению второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (\text{II.26})$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — действительные числа и хотя бы одно из чисел a_{11} , a_{12} , a_{22} отлично от нуля.

Уравнение (II.26) называется *общим уравнением* определяемой им линии. Слагаемые второй степени называются *старшими членами* этого уравнения.

Доказано, что порядок линии не зависит от выбора аффинной системы координат. Согласно каноническим уравнениям эллипса, гиперболы и параболы эти кривые относятся к линиям второго порядка. К ним относятся также линии, задаваемые уравнениями

$$\begin{aligned}(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) &= 0, \\ (ax + by + c)^2 &= 0,\end{aligned}\tag{II.27}$$

представляющие собой пару прямых и сведенную прямую. Они называются *вырожденными линиями* второго порядка.

С уравнением (II.26) связаны два определителя

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

называемых соответственно *определителем старших членов* и *общим определителем кривой*.

22.2. Критерий вырожденности кривой второго порядка.

Для того чтобы линия второго порядка была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $D = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть кривая вырожденная и её уравнение имеет вид (II.27). Тогда

$$D = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2a_1a_2 & a_1b_2 + a_2b_1 & a_1c_2 + a_2c_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & 2b_1b_2 & b_1c_2 + b_2c_1 \\ a_1c_2 + a_2c_1 & b_1c_2 + b_2c_1 & 2c_1c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь использовано умножение определителей по способу «столбцы на столбцы».

Достаточность. Пусть $D = 0$. Докажем, что кривая представляет собой пару прямых. По определению кривой второго порядка коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} её уравнения не могут быть одновременно нулями. Предположим сначала, что $a_{22} \neq 0$. Уравнение (II.26) представим в виде квадратного уравнения относительно y :

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + (a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) = 0,$$

откуда

$$a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23}) \pm \sqrt{(a_{12}x + a_{23})^2 - a_{22}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33})}.$$

Нас интересует подкоренное выражение. Запишем его по степеням x :

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 + 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33}).$$

Дискриминант этого квадратного трёхчлена равен нулю:

$$(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 - (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{23}^2 - a_{22}a_{33}) = a_{22}(-a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2) = a_{22}(-D) = 0.$$

Следовательно, подкоренное выражение является квадратом некоторого двучлена $\alpha x + \beta$, и потому

$$a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23}) \pm (\alpha x + \beta).$$

А это — два уравнения двух прямых.

При $a_{22} = 0$, но $a_{11} \neq 0$ поступаем аналогично, находя выражение для $a_{11}x$. Когда же $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$, тогда условие $D = 0$ принимает вид $2a_{13}a_{23} = a_{12}a_{33}$. Поэтому вопрос решается очень просто: уравнение представляется так:

$$(a_{12}x + a_{23})(a_{12}y + a_{13}) = 0,$$

т. е. опять же задаёт пару прямых, которые параллельны соответственным осям координат. $\square$

Доказанный критерий $D = 0$ вырождения кривой не зависит от системы координат, поскольку выражает собой геометрический факт, не связанный с системой координат.

Задача 1. Дана кривая $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$. Выяснить, является ли она вырожденной. В случае вырожденности найти уравнения составляющих её прямых.

Решение. Проверяем выполнение критерия $D = 0$ вырожденности:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Данное уравнение кривой решаем относительно x :

$$x^2 - 2(2y - 1)x + 3y^2 - 2y = 0, \quad x = 2y - 1 \pm (y - 1).$$

Мы получили пару пересекающихся прямых

$$x - 3y + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x - y = 0.$$

Задача 2. Решить аналогичную задачу для кривой

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Она решается проще, так как это уравнение представляется в виде $(x - 3y)^2 - 2(x - 3y) - 3 = 0$, откуда $x - 3y = 3$ и $x - 3y = -1$. Следовательно, данная кривая состоит из двух параллельных прямых.

§23. Определение вида невырожденной кривой второго порядка по её общему уравнению

23.1. Аффинная эквивалентность эллипсов, гипербол, парабол. По определениям этих кривых каждая из них задаётся аффинным репером, а он — базисным треугольником. Вид кривой определяется соответствующими соотношениями между площадями треугольников. Согласно теореме о задании аффинного преобразования плоскости (§8) любые два треугольника аффинно эквивалентны. Отсюда следует, что *любые два эллипса, любые две гиперболы, любые две параболы аффинно эквивалентны и в соответствующих аффинных реперах они имеют одинаковые аффинные канонические уравнения.* Однако любые две из этих кривых различных видов аффинно неэквивалентны.

Таким образом, для невырожденных линий второго порядка существуют три и только три аффинных типа — эллипсы, гиперболы и параболы.

На основании аффинных инвариантов для вырожденных действительных линий второго порядка также существуют три и только три аффинных типа — пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых и сведенная прямая. Их различение по общему уравнению (при $D = 0$) показано на примерах в предыдущем параграфе.

Найдём критерии различения невырожденных линий, заданных их общим уравнением (II.26).

23.2. Признаки эллипса. Если эллипс имеет каноническое уравнение $x'^2 + y'^2 = 1$, то его прообраз при аффинном преобразовании f имеет уравнение $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$, т. е. уравнение вида (II.26):

$$(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)xy + (b_1^2 + b_2^2)y^2 + 2(a_1c_1 + a_2c_2)x + 2(b_1c_1 + b_2c_2)y + c_1^2 + c_2^2 - 1 = 0, \quad (\text{II.28})$$

для которого

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \Delta^2 > 0.$$

Найдём определитель D общего уравнения (II.28) эллипса:

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 & a_1c_1 + a_2c_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1c_1 + b_2c_2 \\ a_1c_1 + a_2c_2 & b_1c_1 + b_2c_2 & c_1^2 + c_2^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\Delta^2 = -\delta < 0. \quad (\text{II.29})$$

Поскольку определитель Δ аффинного преобразования f является инвариантом преобразования и не зависит от выбранной системы координат (§9), то имеем такой критерий эллипса по общему уравнению:

$$\delta > 0, \quad D < 0.$$

23.3. Критерий гиперболы. Прообраз гиперболы $x'^2 - y'^2 = 1$ при аффинном преобразовании f имеет уравнение

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 - (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

или

$$(a_1^2 - a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 - a_2b_2)xy + (b_1^2 - b_2^2)y^2 + 2(a_1c_1 - a_2c_2)x + 2(b_1c_1 - b_2c_2)y + c_1^2 - c_2^2 - 1 = 0.$$

Поэтому $\delta = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_1 - a_2b_2 & b_1^2 - b_2^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = -\Delta^2 < 0,$

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1b_1 - a_2b_2 & a_1c_1 - a_2c_2 \\ a_1b_1 - a_2b_2 & b_1^2 - b_2^2 & b_1c_1 - b_2c_2 \\ a_1c_1 - a_2c_2 & b_1c_1 - b_2c_2 & c_1^2 - c_2^2 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \Delta^2 > 0.$$

Итак, критериями гиперболы являются условия

$$\delta < 0, \quad D > 0.$$

23.4. Признаки параболы. Этим же путём получаем уравнение прообраза параболы $y'^2 - x' = 0$:

$$(a_2x + b_2y + c_2)^2 - (a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

или

$$a_2^2x^2 + 2a_2b_2xy + b_2^2y^2 + (2a_2c_2 - c_1)x + (2b_2c_2 - b_1)y + c_2^2 - c_1 = 0.$$

Тогда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2b_2 \\ a_2b_2 & b_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель D нет необходимости находить; существенно лишь, что он отличен от нуля, ибо в противном случае кривая была бы вырожденной (п. 22.2).

Следовательно, критериями параболы являются условия

$$\delta = 0, \quad D \neq 0.$$

Полезно заметить, что $\delta = 0$ тогда и только тогда, когда сумма старших членов общего уравнения кривой является **полным квадратом** некоторого двучлена.

Общий результат можно подытожить таблицей:

Кривая	δ	D
Эллипс	$\delta > 0$	$D < 0$
Гипербола	$\delta < 0$	$D > 0$
Парабола	$\delta = 0$	$D \neq 0$

Примеры.

1. $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0, \quad \delta = 9, \quad D = -81.$

Кривая — эллипс.

2. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0, \quad \delta = -36, \quad D = 36^2.$

Кривая — гипербола.

3. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0, \quad \delta = 0, \quad D = -16.$

Кривая — парабола.

4. $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \delta = 0, \quad D = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2a & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 \\ b & -1 & 2c \end{vmatrix} = -\frac{a}{4} \neq 0.$

Кривая — парабола.

23.5. О мнимых кривых второго порядка. При определении линии второго порядка общим уравнением (II.26) формально (без учёта их геометрических свойств) неизбежно приходится рассматривать такие, например, уравнения:

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = -1, \quad x^2 = -4.$$

Первое из них удовлетворяется лишь одной действительной точкой $(0, 0)$, а два другие и вовсе не имеют действительных решений. Первое и последнее из них могут быть записаны так:

$$(x + iy)(x - iy) = 0, \quad (x + 2i)(x - 2i) = 0 \quad (i^2 = -1).$$

Все три уравнения — уравнения **мнимых линий** второго порядка. Эти два по форме похожи на уравнения пары пересекающихся прямых и пары параллельных прямых, уравнение $x^2 + y^2 = -1$ называют уравнением *мнимого эллипса*.

Для мнимых линий второго порядка возможны три и только три случая, а именно:

- 1) мнимый эллипс (критерий: $\delta > 0$, $D > 0$);
- 2) пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (критерий: $\delta > 0$, $D = 0$);
- 3) пара мнимых параллельных прямых (критерии сложнее, здесь не уточняются).

Рассмотрение мнимых линий второго порядка оставим в стороне как не имеющее практического интереса.

Историческая справка

Кривые второго порядка изучались ещё древнегреческими математиками времен Евклида (IV в. до н. э.). Они вошли в античную математику под названием конических сечений и рассматривались как средство решения задач на построение, которые не решались с помощью циркуля и линейки. Например, при помощи этих кривых Менехм дал решение задачи об удвоении куба.

Интерес к коническим сечениям возрастал, по мере того как увеличивалось число решаемых с их помощью задач. Теория кривых второго порядка стала изучаться специально. Аполлоний Пергский (прибл. 262–190 гг. до н. э.), современник и научный соперник Архимеда, написал сочинение «Конические сечения», состоящее из восьми книг, которое не имеет себе равных по полноте, общности и систематичности изложения теории конических сечений. Эта теория строилась Аполлонием на основе пересечения кругового конуса плоскостью, откуда и произошло само название «конические сечения».

Идея метода координат содержалась в сочинении Аполлония в далеко несовершенной форме — форме геометрической алгебры. Системы координат Аполлония неотделимы от индивидуальных кривых, не введены координаты всех точек плоскости, вообще нет стремления сводить геометрические задачи к алгебраическим. В те времена существовало обратное стремление — алгебраические задачи сводились к геометрическим.

Уравнения конических сечений были получены и исследованы французским математиком Пьером Ферма (1601–1665), который вместе с Рене Декартом является основоположником метода координат. Ферма упрощал уравнения второй степени с помощью поворота и переноса системы координат.

Задачи и упражнения

II.1. Докажите, что диагонали параллелограмма, описанного около эллипса, сопряжены относительно этого эллипса.

II.2. Если параллелограмм вписан в эллипс, то его стороны параллельны двум его сопряжённым диаметрам. Докажите.

II.3. Точка A принадлежит эллипсу. Докажите, что на этом эллипсе существуют такие точки B и C , что центроид треугольника ABC совпадает с центром эллипса.

II.4. Если O — центр эллипса и касательные к нему в точках P и Q пересекаются в точке M , то прямая OM делит хорду PQ пополам. Докажите.

II.5. Докажите, что отношения отрезков касательных к эллипсу, проведённых из данной точки, к параллельным им диаметрам эллипса равны.

II.6. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу в точках его пересечения с сопряжёнными диаметрами.

II.7. Найдите геометрическое место середин всех хорд эллипса, проходящих через данную точку.

II.8. Через данную точку M проводятся всевозможные хорды PQ эллипса. Найдите геометрическое место таких точек N этих хорд, что $PN = MQ$.

II.9. Через данную точку M проведены две касательные MA и MB и две произвольные секущие CD и EF . Докажите, что прямые CF и DE пересекаются на прямой AB , соединяющей точки касания.

II.10. Найдите способ построения касательных к эллипсу, проходящих через данную внешнюю точку.

II.11. Через середину T хорды AB эллипса проведены хорды KL и MN . Докажите, что если прямые KM и LN пересекают AB в точках P и Q , то $PT = TQ$ (а если $KM \parallel AB$, то и $LN \parallel AB$).

II.12. Дан диаметр AB эллипса и прямая m , параллельная его сопряжённому диаметру. Точка P — отличная от A и B точка эллипса. Через произвольную точку K прямой AP проведена прямая KH , параллельная прямой m и пересекающая прямую BP в точке H . Покажите, что точка $M = (AH) \cap (KB)$ принадлежит эллипсу.

II.13. Дан треугольник ABC . Докажите, что существует эллипс, касающийся его сторон в их серединах (*вписанный эллипс Штейнера*).

II.14. Дан треугольник ABC . Докажите, что существует эллипс, содержащий его вершины, касательные в которых к этому эллипсу параллельны противоположным сторонам треугольника ABC (*описанный эллипс Штейнера*).

II.15. Касательная к эллипсу с центром O в точке M пересекает в точках P и Q касательные в концах диаметра AB . Докажите, что произведение площадей треугольников AMB и POQ не зависит от выбора диаметра AB и точки M .

II.16. Если прямые PA_1 , PB_1 , PC_1 , параллельные соответственно сторонам BC , CA , AB треугольника ABC , пересекают соответственно прямые AB , BC , CA в точках A_1 , B_1 , C_1 , то эти точки коллинеарны тогда и только тогда, когда точка P принадлежит описанному эллипсу Штейнера треугольника ABC (*аффинная теорема Симсона*). Докажите.

II.17. Четырёхугольник $ABCD$ описан около эллипса с центром O . Докажите, что

$$S_{OAB} + S_{OCD} = S_{ODA} + S_{OBC}.$$

II.18. Проверьте и подтвердите истинность утверждений задач II.1, II.2, II.4, II.5 для гиперболы. В дополнение к задаче II.4 докажите равновеликость треугольников OMP и OMQ для гиперболы.

II.19. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, отсекаемый асимптотами, делится точкой касания пополам.

II.20. Докажите, что сопряжённые гиперболы кососимметричны одна другой относительно одной из асимптот в направлении другой.

II.21. Докажите, что два сопряжённых диаметра гиперболы кососимметричны относительно каждой из асимптот в направлении другой.

II.22. К гиперболе проведены две касательные, пересекающие её асимптоты в точках A и B , A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.

II.23. Найдите уравнения двух касательных к гиперболе $xy = m^2$ (к параболе $y^2 = 2x$), проходящих через точку $M(a, b)$.

II.24. Точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$ принадлежат гиперболе $xy = 1$ (параболе $y = x^2$). Найдите условие параллельности хорд AB и CD .

II.25. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в гиперболу $xy = 1$ (в параболу $y = x^2$). Докажите, что существует бесконечное множество четырёхугольников, вписанных в неё, таких, что их стороны соответственно параллельны сторонам данного четырёхугольника $ABCD$.

II.26. Докажите, что отрезки любой секущей гиперболы, заключённые между этой гиперболой и её асимптотами, равны между собой.

II.27. Докажите, что треугольники, каждый из которых образован касательной к гиперболе и её асимптотами, равновелики.

II.28. Найдите геометрическое место середин хорд гиперболы, отсекающих от неё сегменты постоянной площади σ .

II.29. Через две произвольные точки M и N гиперболы проведены прямые, параллельные асимптотам. Докажите, что: 1) диагональ PQ полученного параллелограмма $MPNQ$ проходит через центр гиперболы и точку пересечения касательных к гиперболе в точках M и N ; 2) если U и V — точки пересечения прямых PM и PN с асимптотами, то $UV \parallel MN$.

II.30. Докажите, что прямые, соединяющие произвольную точку M гиперболы с двумя фиксированными её точками A и B , отсекают на асимптоте гиперболы равные отрезки (равные тому отрезку, который отсекают на асимптоте прямые, параллельные другой асимптоте и проходящие через точки A и B).

II.31. Докажите, что к параболе нельзя провести две параллельные касательные.

II.32. Докажите, что если парабола является образом другой параболы при переносе, то эти параболы имеют не более одной общей точки.

II.33. Докажите, что точка пересечения касательных к параболе в концах её хорды принадлежит диаметру, сопряжённому направлению этой хорды.

II.34. Пусть MP и MQ — касательные к параболе в точках P и Q . KL — третья касательная, касающаяся параболы в точке T дуги PQ и пересекающая MP и MQ в точках K и L . Докажите, что:

$$1) \frac{MK}{KP} = \frac{QL}{LM} = \frac{LT}{TK};$$

2) треугольники PQT и MKL равновелики.

II.35. Пусть MP и MQ — касательные к параболе в точках P и Q . Точки K и L — середины отрезков MP и MQ . Докажите, что прямая KL также является касательной к этой параболе.

II.36. Четырёхугольник образован четырьмя касательными к параболе. Докажите, что его средние линии также касаются этой параболы и что прямая, содержащая середины его диагоналей, является диаметром этой параболы.

II.37. Определите, какие кривые заданы следующими уравнениями:

$$1) x^2 - 4xy - 4y^2 - 2x = 0;$$

$$2) x^2 + 6xy + 9y^2 - 10y + 7 = 0;$$

$$3) 6xy - 3x^2 + 6y^2 + 12x + 18y + 13 = 0;$$

$$4) 3x^2 + 10xy + 10y^2 - 50y = 0.$$

II.38. Дано семейство кривых второго порядка, зависящее от параметра λ : $x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$. При каких значениях λ кривая будет 1) эллипсом; 2) параболой; 3) гиперболой; 4) парой прямых?

Аффинные преобразования пространства

§24. Аффинное пространство

24.1. Аксиоматика аффинной стереометрии. Понятие аффинного пространства не требует особой подготовки. Достаточно отослать читателя к самому началу книги. Теперь вводятся важнейшие неопределяемые объекты пространства — плоскости вместе с аксиоматикой аффинной планиметрии. Однако необходимо добавить несколько аксиом в группу аксиом принадлежности.

I_4 . Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.

I_5 . Существуют по крайней мере четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости.

I_6 . Для любых трёх точек A, B, C , не лежащих на одной прямой, существует единственная плоскость, содержащая эти точки.

I_7 . Если две точки A и B прямой a принадлежат плоскости α , то и вся прямая a принадлежит плоскости α .

I_8 . Если различные плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют и общую прямую, содержащую точку A .

Особое значение имеет **аксиома однородности** пространства.

V . В каждой плоскости пространства выполняются аксиомы аффинной планиметрии.

Последняя аксиома может вызвать недоумение: а как же иначе? Да, бывает и не так. Есть геометрии (например, псевдоевклидова), в которых не во всех плоскостях имеет место одна и та же планиметрия. Это и исключается аксиомой V . В группе аксиом параллельности дополнительные аксиомы не нужны: соответствующие этим аксиомам утверждения для пространства уже являются **теоремами** (см. следующий пункт).

Множество всех точек, прямых и плоскостей, в котором имеют место изложенные выше аксиомы, называется **аффинным пространством**.

24.2. Параллельные прямые и плоскости. Прямая и плоскость или две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек. Отсюда следует, что любая плоскость, пересекающая

две параллельные плоскости, пересекает их по параллельным прямым. Если две плоскости параллельны, то любая прямая, лежащая в одной из них, параллельна другой плоскости. Если две прямые параллельны, то любая плоскость, проходящая через одну из них, параллельна другой прямой.

Существование параллельных плоскостей устанавливается следующей **теоремой**. *Через любую данную точку A , не лежащую в данной плоскости γ , проходит единственная плоскость, параллельная γ .*

Доказательство. Пусть a и b — две пересекающиеся прямые плоскости γ и a_1, b_1 — две прямые, соответственно параллельные a и b и проходящие через точку A . Покажем, что плоскость (a_1b_1) параллельна γ . Допустим, что это не так и ℓ — прямая их пересечения. Так как $a_1 \parallel \gamma, b_1 \parallel \gamma$, то прямые a_1 и b_1 не могут пересечь прямую ℓ . Таким образом, прямые a_1 и b_1 проходят через точку A и параллельны ℓ , что противоречит аксиоме параллельности Евклида. Это доказывает, что плоскости (a_1b_1) и γ параллельны. Более того, плоскость (a_1b_1) — е д и н с т в е н н а я плоскость, проходящая через точку A и параллельная γ . Действительно, если бы существовали две такие плоскости, то они пересекались бы по прямой m_1 , проходящей через точку A . Тогда приходим к противоречию: две прямые их пересечения с плоскостью (A, m) , где m — прямая плоскости γ , не параллельная m_1 , оказываются, параллельными прямой m и содержащими точку A . $\square$

Обратим внимание на такой факт: если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости и их соответственные стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 параллельны, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны. Он есть прямое следствие аффинной стереометрической теоремы: если три плоскости попарно пересекаются, то их линии пересечения пересекаются в одной точке или параллельны см. [12, т. 2, § 1]. В этом случае треугольники соответственно гомотетичны или получаются один из другого переносом. В последнем случае отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны (определение из § 2), что является стереометрическим аналогом (обобщением) аксиомы Π_2 Дезарга.

§ 25. Тройное произведение векторов

25.1. Определение и свойства тройного произведения. Пусть дан репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ аффинного пространства, т. е. совокупность точки O и упорядоченной тройки $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ некопланарных векторов.

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ разложены по векторам этого репера:

$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{c} = c_1 \cdot \bar{e}_1 + c_2 \cdot \bar{e}_2 + c_3 \cdot \bar{e}_3.$$

Тройным произведением $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ этих векторов называется число

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{III.1})$$

В частности, $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 = 1$. Из этого определения и свойств определителей вытекают следующие свойства тройного произведения, аналогичные свойствам косого произведения (§ 4):

1) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, если упорядоченные тройки $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ориентированы одинаково; $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, если эти тройки ориентированы противоположно;

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны;

3) тройное произведение не изменяется при круговой перестановке векторов ($\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$) и меняет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, при перемене местами двух векторов;

4) оно ассоциативно: $(\lambda \cdot \bar{a})\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\lambda \cdot \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b}(\lambda \cdot \bar{c}) = \lambda(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$

5) и дистрибутивно: $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\bar{b}\bar{c} = \bar{r}_1\bar{b}\bar{c} + \bar{r}_2\bar{b}\bar{c}$, ...

Тройное произведение данных векторов существенно зависит от выбора аффинного репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Пусть $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ — новый аффинный репер, причём

$$\bar{e}_1 = \alpha_1 \cdot \bar{e}'_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}'_2 + \alpha_3 \cdot \bar{e}'_3,$$

$$\bar{e}_2 = \beta_1 \cdot \bar{e}'_1 + \beta_2 \cdot \bar{e}'_2 + \beta_3 \cdot \bar{e}'_3,$$

$$\bar{e}_3 = \gamma_1 \cdot \bar{e}'_1 + \gamma_2 \cdot \bar{e}'_2 + \gamma_3 \cdot \bar{e}'_3.$$

Тогда на основании свойств тройного произведения находим

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(выкладки опущены).

Таким образом, при замене базисного репера тройное произведение векторов умножается на постоянное число σ , равное тройному произведению $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ векторов прежнего репера относительно нового репера.

25.2. Геометрический смысл тройного произведения. Обратимся к формуле, выражающей объём ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на рёбрах, через координаты векторов относительно базиса $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$; см. [12, т. 2, с. 231]:

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \sigma. \quad (\text{III.2})$$

Здесь σ — объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Из сравнения соотношений (III.1) и (III.2) имеем

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \frac{V}{\sigma}.$$

Таким образом, *тройное произведение векторов равно отношению объёма параллелепипеда, построенного на этих векторах, к объёму параллелепипеда, построенного на базисных векторах аффинного репера пространства*. Если же объём этого «базисного» параллелепипеда принять за единицу измерения объёмов, то *тройное произведение векторов будет равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах*.

Следствия.

1. Объём ориентированного тетраэдра $OABC$, где O — начало векторов, представляется формулой

$$V = \frac{1}{6} \overline{ABC},$$

Объём ориентированного тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6} (\overline{BCD} - \overline{CDA} + \overline{DAB} - \overline{ABC}).$$

2. Для любых четырёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ имеет место тождество

$$(\vec{b}\vec{c}\vec{d}) \cdot \vec{a} - (\vec{c}\vec{d}\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{d}\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{d} = 0.$$

3. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — произвольные некопланарные векторы, то для того, чтобы векторы $\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$, $\vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$, $\vec{c} + \nu \cdot \vec{a}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda\mu\nu = -1.$$

Доказательства этих следствий предлагаются читателю в качестве нетрудных упражнений (см. п. 4.3).

§ 26. Аффинные преобразования пространства

26.1. Определение и его следствия. Аффинным преобразованием пространства называется преобразование, отображающее каждую плоскость на плоскость. Всякое преобразование обратимо по определению. Преобразование, обратное аффинному, также есть аффинное преобразование.

Образы параллельных плоскостей суть параллельные плоскости, в чём сразу убеждаемся рассуждением от противного. Следовательно, образы непараллельных плоскостей суть непараллельные плоскости.

Прямая есть линия пересечения двух плоскостей. Поэтому согласно определению аффинное преобразование пространства отображает каждую прямую на прямую. Оно сохраняет параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости, отображает скрещивающиеся прямые на скрещивающиеся прямые. Каждое из этих утверждений тривиально доказывается методом «от противного».

Аффинное преобразование пространства порождает (индуцирует) аффинное отображение каждой плоскости на её образ. Это означает, что аффинное отображение плоскости на плоскость обладает всеми инвариантами аффинных преобразований плоскости: сохраняются отношения коллинеарных векторов и отношения площадей фигур, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Это не относится к площадям фигур, лежащих в непараллельных плоскостях.

Первыми примерами аффинных преобразований пространства служат гомотетия и перенос. Для евклидова пространства аффинным преобразованием является преобразование подобия, в частности движение.

26.2. Конструктивное задание аффинного преобразования.

Теорема. Существует единственное аффинное преобразование пространства, которое отображает данные четыре некопланарные точки A, B, C, D на четыре наперёд заданные некопланарные точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно.

Доказательство. Рассмотрим аффинные реперы $(D, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и $(D_1, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$, где $\bar{e}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\bar{e}_2 = \overrightarrow{DB}$, $\bar{e}_3 = \overrightarrow{DC}$ и $\bar{e}'_1 = \overrightarrow{D_1A_1}$, $\bar{e}'_2 = \overrightarrow{D_1B_1}$, $\bar{e}'_3 = \overrightarrow{D_1C_1}$. Определим преобразование f пространства следующим законом: каждой точке M , имеющей координаты x, y, z относительно первого репера, поставим в соответствие такую точку M' , которая относительно второго репера имеет те же самые координаты x, y, z . Очевидно, что преобразование f аффинное, поскольку образом плоскости, имеющей уравнение $ax + by + cz + d = 0$ относительно первого репера, является множество точек, которое относительно второго репера имеет

то же самое уравнение, т. е. тоже плоскость, ибо вид уравнения плоскости не зависит от выбора аффинного репера пространства. Согласно закону преобразования f , в частности, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$, $f(D) = D_1$.

Для доказательства единственности аффинного преобразования f достаточно заметить, что всякое аффинное преобразование пространства обладает следующим свойством: *соответственные точки в соответственных реперах имеют равные соответственные координаты*. Это прямо следует из инвариантности отношения коллинеарных векторов, а аффинные координаты точки являются таковыми (см. § 7, рис. 18). Поэтому любое другое аффинное преобразование, имеющее те же пары соответственных точек, необходимо совпадает с первоначально построенным аффинным преобразованием f . $\square$

26.3. Координатные формулы аффинного преобразования пространства. Пусть даны репер $(D, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и аффинное преобразование f , которое переводит точку $M(x, y, z)$ в точку $M'(x', y', z')$. Требуется выразить координаты x' , y' , z' через координаты x , y , z и параметры, задающие преобразование f . Такими параметрами могут служить координаты образов базисных векторов: $\bar{e}'_1(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{e}'_2(b_1, b_2, b_3)$, $\bar{e}'_3(c_1, c_2, c_3)$ и координаты (относительно первого репера) образа $O'(d_1, d_2, d_3)$ точки O .

Воспользуемся векторным равенством

$$\overline{OM'} = \overline{OM'} + \overline{OO'}.$$

По определению координат вектора и координат точки имеем

$$\begin{aligned} \overline{OM'} &= x \cdot \bar{e}'_1 + y \cdot \bar{e}'_2 + z \cdot \bar{e}'_3 = \\ &= x \cdot (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3) + y \cdot (b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3) + \\ &\quad + z \cdot (c_1 \cdot \bar{e}_1 + c_2 \cdot \bar{e}_2 + c_3 \cdot \bar{e}_3) = (a_1x + b_1y + c_1z) \cdot \bar{e}_1 + \\ &\quad + (a_2x + b_2y + c_2z) \cdot \bar{e}_2 + (a_3x + b_3y + c_3z) \cdot \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда рассматриваемое векторное равенство равносильно трём координатным равенствам

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3. \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Поскольку векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ линейно независимы, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обратно, если преобразование пространства задано формулами (III.3) с отличным от нуля определителем Δ , то оно является аффинным преобразованием. Для доказательства проще проверить, что преобразование, обратное преобразованию (III.3), аффинное. Отсюда будет следовать аффинность преобразования (III.3).

Возьмём произвольную плоскость $Ax' + By' + Cz' + D = 0$. Выполнив подстановки (III.3), получим уравнение её преобразов:

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)x + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3)y + \\ + (Ac_1 + Bc_2 + Cc_3)z + (Ad_1 + Bd_2 + Cd_3) = 0.$$

Коэффициенты при x, y, z не могут быть одновременно нулями, так как в противном случае система

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0, \\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0 \end{cases}$$

с отличным от нуля определителем Δ имела бы лишь нулевое решение $A = B = C = 0$, что противоречит смыслу уравнения плоскости.

При $\Delta > 0$ заданные реперы одинаково ориентированы (аффинное преобразование первого рода), а при $\Delta < 0$ эти реперы ориентированы противоположно (аффинное преобразование второго рода).

26.4. Отношение объёмов — аффинный инвариант. Пусть параллелепипед F объёма V аффинно отображается на параллелепипед F' объёма V' . Так как соответственные векторы относительно соответственных реперов имеют равные соответственные координаты, то согласно формулам (III.1) и (III.2) имеем

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad V' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3) = V \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V \cdot \Delta, \\ V' = V \Delta,$$

где Δ — определитель аффинного преобразования. Отсюда для любых двух параллелепипедов F_1 и F_2 следует зависимость

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V'_1}{V'_2}.$$

Далее известным путём это свойство переносится на любые два многогранника и затем на любые два кубируемых тела: *отношение объёмов двух кубируемых тел не изменяется при аффинном преобразовании пространства.*

§27. Неподвижные точки и неизменяемые направления аффинного преобразования пространства

27.1. Неподвижные точки. Пусть аффинное преобразование f пространства задано формулами (III.3). Аналогично п. 9.1 для отыскания его неподвижных точек получаем систему

$$\begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + (b_2 - 1)y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + (c_3 - 1)z + d_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Не вдаваясь в алгебраические подробности её исследования, отметим возможные случаи.

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - 1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Преобразование f имеет единственную неподвижную точку (*центр преобразования*) и называется *центраффинным* преобразованием. В частности, центраффинным преобразованием является гомотетия.

Уравнения (III.4) можно интерпретировать как уравнения трёх плоскостей, пересекающихся в неподвижной точке.

2. Если плоскости (III.4) попарно пересекаются по трём параллельным прямым, то неподвижных точек нет. Примером служат перенос и переносная симметрия.

Направление этих трёх прямых есть неизменяемое направление аффинного преобразования f (см. следующий пункт).

3. Система совместна и содержит два независимых уравнения. Все три плоскости проходят через одну прямую — *ось неподвижных точек* преобразования.

4. Система совместна и содержит одно независимое уравнение. Преобразование f имеет *плоскость неподвижных точек*. Оно называется *родственным* преобразованием, или *родством*. Примером является косая зеркальная симметрия (отражение от плоскости).

Заметим попутно, что если преобразование имеет ось неподвижных точек, то оно имеет также семейство параллельных неподвижных плоскостей (например, косая симметрия относительно прямой).

27.2. Неизменяемые направления. Пусть ненулевой вектор $\bar{r} = (x, y, z)$ имеет неизменяемое направление, т. е. $\bar{r}' = \lambda \cdot \bar{r}$:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z = \lambda x, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z = \lambda y, \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z = \lambda z. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + (b_2 - \lambda)y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + (c_3 - \lambda)z = 0. \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Однородная линейная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{III.6})$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* аффинного преобразования f . При раскрытии определителя оно запишется так:

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0. \quad (\text{III.7})$$

Здесь

$$J_1 = a_1 + b_2 + c_3, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \Delta.$$

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни этого уравнения, то по теореме Виета

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ J_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ J_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \Delta, \end{aligned}$$

а так как $\Delta \neq 0$, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Таким образом, *все корни характеристического уравнения отличны от нуля.*

Решив характеристическое уравнение (III.7) и подставив его корни в систему (III.5) вместо λ , получим вектор $\bar{r}$ неизменяемого направления аффинного преобразования — его *собственный вектор*.

Поскольку характеристическое уравнение имеет нечётную степень, то хотя бы один из его корней действительный. Поэтому *любое аффинное преобразование имеет хотя бы одно неизменяемое направление.* Различным корням характеристического уравнения соответствуют различные неизменяемые направления.

Пример. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = x + 4y + z, \\ y' = 3y, \\ z' = -2x + 4y + 4z. \end{cases}$$

Составим и решим его характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} J_1 &= 8, & J_2 &= 21, & J_3 &= 18; \\ -D(\lambda) &= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0; \\ \lambda_1 &= 2, & \lambda_2 &= \lambda_3 = 3. \end{aligned}$$

При $\lambda = 2$ система (III.5) принимает вид

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 0, \\ y = 0, \\ -2x + 4y + 2z = 0, \end{cases}$$

откуда

$$y = 0, \quad z = x.$$

Это и есть уравнения прямой неизменяемого направления, соответствующего корню $\lambda_1 = 2$.

27.3. Плоскости неизменяемых направлений. Если при аффинном преобразовании плоскость отображается на параллельную ей плоскость, то говорят, что эта *плоскость имеет неизменяемое направление*.

Любое аффинное преобразование (III.3) представимо композицией центроаффинного преобразования φ :

$$\begin{cases} x_1 = a_1x + b_1y + c_1z, \\ y_1 = a_2x + b_2y + c_2z, \\ z_1 = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

и переноса T :

$$\begin{cases} x' = x_1 + d_1, \\ y' = y_1 + d_2, \\ z' = z_1 + d_3. \end{cases}$$

Преобразование φ и перенос T будем называть *ассоциированными* с данным преобразованием $f = T \cdot \varphi$. Так как перенос сохраняет направление любой прямой и любой плоскости, то аффинное преобразование f

и ассоциированное с ним преобразование φ имеют одни и те же прямые и плоскости неизменяемых направлений.

Пусть преобразование φ переводит плоскость γ , проходящую через начало координат, в плоскость $Ax' + By' + Cz' = 0$. Тогда согласно соотношениям (III.8) имеем следующее уравнение плоскости γ :

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)x + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3)y + (Ac_1 + Bc_2 + Cc_3)z = 0.$$

Для совпадения плоскостей γ и γ' необходимо и достаточно, чтобы соответственные коэффициенты их уравнений были пропорциональны:

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = \lambda A, \\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = \lambda B, \\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = \lambda C. \end{cases}$$

Отсюда следует то же самое характеристическое уравнение (III.6) лишь со взаимной заменой соответственных строк и столбцов.

Таким образом, характеристические корни аффинного преобразования определяют как прямые, так и плоскости неизменяемых направлений преобразования.

§ 28. Родственные преобразования

28.1. Родство пространства. Родственное преобразование (родство) пространства определено как аффинное преобразование, имеющее плоскость неподвижных точек (*плоскость родства*). Если аффинное преобразование пространства имеет три неколлинеарные неподвижные точки A, B, C , то оно является родственным с плоскостью ABC , поскольку в этом случае неподвижна каждая точка плоскости ABC (теорема п. 8.1).

По теореме п. 26.2 родство ρ можно задать плоскостью ω сродства и парой соответственных (родственных) точек, не лежащих в плоскости ω . Рассмотрим его свойства. Их доказательства аналогичны доказательствам свойств родства плоскости (§10).

1. Каждая из прямых, соединяющих родственные точки, отображается при этом родстве на себя (неподвижна).

2. Каждая плоскость γ , проходящая через две родственные точки, неподвижна, поскольку она содержит ещё и другую неподвижную прямую — линию пересечения плоскости γ с плоскостью родства — или ей параллельна.

3. Родство ρ пространства индуцирует в каждой неподвижной плоскости γ , отличной от плоскости ω родства, родство с осью $\ell = \gamma \cap \omega$.

4. Прямые, каждая из которых содержит две родственные точки, параллельны. Их направление называется *направлением родства*.

5. Две родственные прямые пересекаются в плоскости родства или ей параллельны.

6. Если направление родства не параллельно плоскости ω родства, то плоскость ω делит в одном и том же отношении k каждый из отрезков, соединяющих точки со своими образами. Точнее, если $\rho(M) = M'$ и $(MM') \cap \omega = A$, то $k = \frac{AM'}{AM}$ (рис. 57). Это отношение называется *коэффициентом родства*.

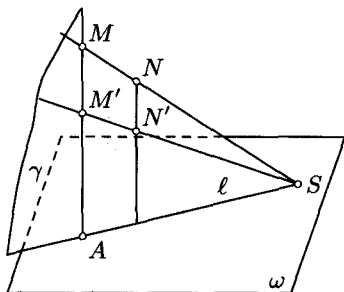


Рис. 57

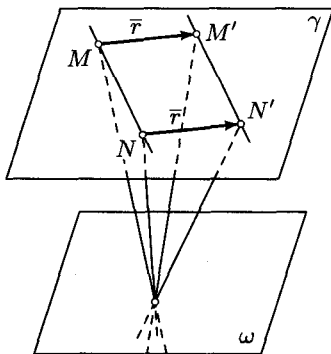


Рис. 58

28.2. Частные виды родственных преобразований пространства. 1. Если коэффициент родства $k = -1$, то родство называется *косой зеркальной симметрией* относительно плоскости ω (*косым отражением от плоскости*). Её плоскость делит пополам каждый из отрезков, соединяющих родственные точки.

2. Если направление родства параллельно его плоскости, то родство называется *сдвигом* (рис. 58). В каждой фиксированной плоскости, параллельной плоскости сдвига, точки смещаются на один и тот же вектор (свойство 3 из п. 28.1 и свойство 5 из п. 10.1). В этих плоскостях сдвиг пространства индуцирует переносы, векторы которых зависят от выбора плоскости.

3. Родство с положительным коэффициентом называется *косым сжатием* к плоскости ω .

4. Родство с отрицательным коэффициентом есть композиция косой зеркальной симметрии и косого сжатия.

28.3. Формулы родственных преобразований. Совместим координатную плоскость Oxy с плоскостью родства. Так как каждая её точка $(x, y, 0)$ неподвижна, то согласно формулам преобразования (III.3) имеем

$$x \equiv a_1 x + b_1 y + d_1,$$

$$y \equiv a_2 x + b_2 y + d_2,$$

$$0 \equiv a_3 x + b_3 y + d_3,$$

откуда следует, что

$$a_1 = 1, \quad b_1 = d_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad a_2 = d_2 = a_3 = b_3 = d_3 = 0,$$

и формулы преобразования принимают вид

$$\begin{cases} x' = x + c_1 z, \\ y' = y + c_2 z, \\ z' = c_3 z. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть направление родства определено осью Oz . Тогда $x' = x$, $y' = y$ и поэтому $c_1 = c_2 = 0$. Обозначим $c_3 = k$. Формулы преобразования запишутся так:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = kz, \end{cases} \quad \Delta = k \neq 1.$$

При $k > 0$ имеем косое сжатие к плоскости Oxy в направлении оси Oz . При $k = -1$ родство является косою зеркальной симметрией:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z, \end{cases} \quad \Delta = -1.$$

2. Пусть направление родства параллельно его плоскости. Родство есть сдвиг. Придадим оси Ox направление сдвига. Тогда $y' = y$ и $z' = z$ тождественно. Поэтому в формулах (III.9) имеем $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Обозначим $c_1 = c$. Формулы сдвига имеют вид

$$\begin{cases} x' = x + cz, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1. \quad (\text{III.10})$$

Отсюда $x' - x = cz$, $y' - y = 0$, $z' - z = 0$. В каждой плоскости $z = t$ имеем перенос $T_{\vec{r}}$ на вектор $\vec{r} = (ct, 0, 0)$.

§29. Некоторые специальные виды аффинных преобразований пространства

29.1. Косая осевая симметрия. Косой симметрией S_ℓ с осью ℓ в направлении плоскости μ называется преобразование, которое оставляет неподвижной каждую точку прямой ℓ , а каждую точку M , не лежащую на ℓ , отображает на такую точку M' , что прямая MM' параллельна плоскости μ и отрезок MM' делится прямой ℓ пополам (рис. 59)

Примем прямую ℓ за ось Ox , а плоскость μ — за координатную плоскость Oyz . Если $M(x, y, z) \rightarrow M'(x', y', z')$ при симметрии S_ℓ , то $x' = x$, $\frac{y+y'}{2} = 0$, $\frac{z+z'}{2} = 0$. Стало быть, формулы

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = -z, \end{cases} \quad \Delta = 1$$

являются формулами косой симметрии с осью Ox в направлении плоскости Oyz . Поэтому она является эквивалентным преобразованием первого рода, имеющим ось неподвижных точек.

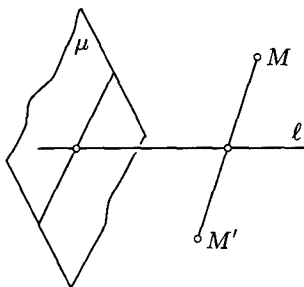


Рис. 59

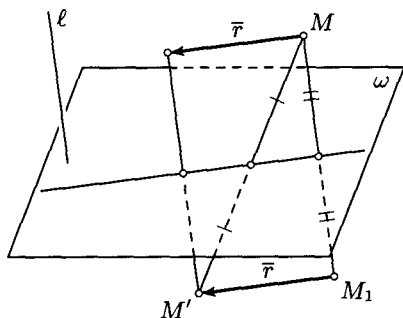


Рис. 60

29.2. Переносная симметрия есть по определению композиция косой зеркальной симметрии и переноса параллельно плоскости симметрии. Она коммутативна, имеет семейство неподвижных плоскостей, каждая из которых параллельна направлению ℓ симметрии и вектору $\vec{r}$ переноса, и не имеет неподвижных точек. В каждой неподвижной плоскости индуцируется переносная симметрия плоскости (рис. 60).

Пусть плоскость ω симметрии принята в качестве координатной плоскости Oxy , а ось Oz параллельна направлению симметрии. Если точка $M(x, y, z)$ переходит в точку $M'(x', y', z')$ при заданной переносной

симметрии, $M \rightarrow M_1(x, y, -z)$ при входящей в неё косо́й симметрии и $M_1 \rightarrow M'$ при переносе на вектор $\bar{r} = (a, b, 0)$, то

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -z; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x_1 + a, \\ y' = y_1 + b, \\ z' = z_1. \end{cases}$$

Следовательно, переносная симметрия запишется формулами

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = -z, \end{cases} \quad \Delta = -1.$$

29.3. Косой перенос. *Косым переносом* пространства называется композиция сдвига и переноса параллельно плоскости сдвига, но не параллельно направлению сдвига.

Сдвиг в направлении оси Ox с плоскостью Oxy сдвига имеет формулы (III.10). Зададим перенос $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z$, $b \neq 0$, $abc \neq 0$. Их композиция имеет формулы

$$\begin{cases} x' = x + cz + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Из этих формул следует, что всякая плоскость $z = k$ является неподвижной, причём в каждой из них индуцируется перенос и для разных значений k эти переносы различны.

29.4. Аффинные повороты. Как и на плоскости, они имеются трёх видов: эллиптический, гиперболический и параболический.

Эллиптическим поворотом пространства называется аффинное преобразование, которое имеет ось ℓ неподвижных точек и индуцирует в некоторой неподвижной плоскости σ эллиптический поворот (§16).

Пусть ℓ — ось Oz , а плоскость σ — плоскость Oxy . Если O — центр эллиптического поворота в плоскости Oxy , то этот поворот имеет формулы (II.5). Тогда формулы эллиптического поворота пространства будут такими:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Плоскости $z = \text{const}$ называются *плоскостями эллиптического поворота*. Других неподвижных плоскостей нет.

Гиперболическим поворотом пространства называется аффинное преобразование, которое имеет ось ℓ неподвижных точек и индуцирует в некоторой неподвижной плоскости σ гиперболический поворот (§18).

При аналогичных предыдущему предположениях гиперболический поворот имеет формулы

$$\begin{cases} x' = x \operatorname{ch} \varphi + y \operatorname{sh} \varphi, \\ y' = x \operatorname{sh} \varphi + y \operatorname{ch} \varphi, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Параболическим поворотом пространства называется эквиаффинное преобразование первого рода без неподвижных точек, индуцирующее в некоторой неподвижной плоскости σ параболический поворот (§20).

Пусть плоскость Oxy совпадает с плоскостью σ , а инвариантная парабола в ней имеет уравнение $y^2 = x$. Тогда параболический поворот пространства будет записываться формулами

$$\begin{cases} x' = x + 2cy + c^2, \\ y' = y + c, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Из этих формул видно, что параболический поворот является композицией сдвига параллельно плоскости $y = 0$

$$\begin{cases} x' = x + 2cy, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

и переноса на вектор $\vec{r} = (c^2, c, 0)$, не параллельный плоскости сдвига.

29.5. Параболический сдвиг — это аффинное преобразование пространства, которое имеет ось неподвижных точек и индуцирует в некоторой неподвижной плоскости параболический поворот. При этом условии из общих формул аффинного преобразования пространства получаются следующие формулы параболического сдвига:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y + z, \\ z' = z, \end{cases} \quad \Delta = 1.$$

Плоскости $z = k \neq 0$ неподвижны. В каждой из них индуцируется аффинное преобразование $x' = x + y$, $y' = y + k$ без неподвижных точек с одним неизменяемым направлением ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), т. е. параболический поворот.

§ 30. Центр аффинного преобразования пространства

Пусть аффинное преобразование пространства задано парой тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причём плоскости α и α_1 , β и β_1 , γ и γ_1 соответственно непараллельны. Зададимся целью найти *центр* (неподвижную точку) этого преобразования.

Руководствуясь аналогией с § 11, проведём через A плоскость α' , параллельную плоскости α , а через A_1 — плоскость α'_1 , параллельную α_1 . Если α и α_1 пересекаются по прямой a , а α' и α'_1 — по прямой a_1 , то прямые a и a_1 параллельны. Определяемая ими плоскость (a, a_1) является множеством всех неподвижных точек множества всех аффинных преобразований, которые отображают плоскости α и α' соответственно на плоскости α_1 и α'_1 .

Рассматривая точки B и B_1 , C и C_1 и делая подобные этим построения, получим ещё две плоскости (b, b_1) и (c, c_1) с аналогичными свойствами. Если потребовать, чтобы аффинное преобразование одновременно переводило α в α_1 , β в β_1 , γ в γ_1 , α' в α'_1 , β' в β'_1 и γ' в γ'_1 , то оно переведёт точки A, B, C, D соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1 и поэтому совпадёт с заданным преобразованием. Следовательно, точка S пересечения плоскостей (a, a_1) , (b, b_1) и (c, c_1) , если такая существует, является центром заданного преобразования. Если эти три плоскости не имеют общих точек, то неподвижных точек нет. Случаи, когда эти три плоскости имеют общую прямую или совпадают, оставим без внимания.

В общем случае, когда плоскости каждой из четырёх пар (α, α_1) , (β, β_1) , (γ, γ_1) , (δ, δ_1) непараллельны, четвёртая плоскость (d, d_1) , построенная таким же способом, что и уже рассмотренные три, проходит через точку S их пересечения в силу равноправного положения относительно этой точки S рассматриваемых четырёх плоскостей.

§ 31. Аффинные автоморфизмы тетраэдра

Группа аффинных автоморфизмов произвольного тетраэдра $ABCD$ изоморфна группе самосовмещений правильного тетраэдра евклидова пространства, а та изоморфна алгебраической группе подстановок из четырёх элементов. Поэтому число элементов группы равно $4! = 24$.

При любом аффинном отображении тетраэдра на себя его вершины переходят в вершины и остаётся неподвижным его центроид. Некоторые из искомых автоморфизмов усматриваются без труда. Очевидно, ими являются шесть косых симметрий относительно медианных плоскостей тетраэдра, каждая из которых оставляет неподвижными две вершины,

а две другие переводит друг в друга. Они характеризуются подстановками вида

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix}.$$

Ясно также, что к рассматриваемым аффинным преобразованиям относятся три косых симметрии относительно бимедиан тетраэдра, каждая из которых переводит друг в друга вершины каждого из двух противоположных рёбер тетраэдра, например

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

В этом случае остаются неподвижными середины двух противоположных рёбер.

Рассмотрим аффинное преобразование пространства, заданное подстановкой вершин

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix},$$

при котором неподвижна одна вершина A , а остальные переходят циклически: $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ в одном из двух возможных направлений. Таких преобразований имеется восемь. Они являются эллиптическими поворотами около четырёх медиан тетраэдра.

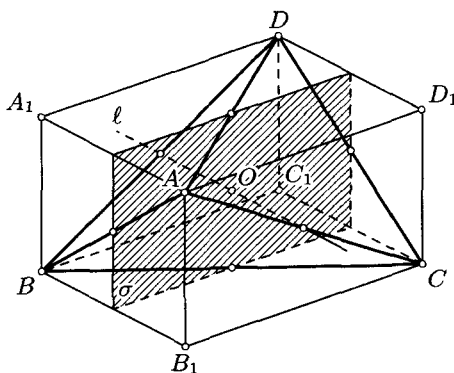


Рис. 61

Далее, примем во внимание, что середины четырёх рёбер тетраэдра, образующих косой четырёхугольник, лежат в одной плоскости. Таких плоскостей существует три. Для наглядности построим параллелепипед $A_1B_1C_1DAB_1CD_1$, описанный около данного тетраэдра $ABCD$ (рис. 61). Косая симметрия S_σ относительно его срединной плоскости σ , параллельной рёбрам AB_1 , A_1B , CD_1 , C_1D , отображает тетраэдр $ABCD$

на тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ и обратно. Эллиптический поворот ψ пространства с осью ℓ , содержащей середины рёбер AC и BD , заданный парой точек $A_1 \rightarrow B$, отображает каждый из параллелограммов A_1BC_1D и AB_1CD_1 на себя: $B \rightarrow C_1 \rightarrow D \rightarrow A_1 \rightarrow B$, $A \rightarrow B_1 \rightarrow C \rightarrow D_1 \rightarrow A$. Композиция ψS_σ переводит $A \rightarrow A_1 \rightarrow B$, $B \rightarrow B_1 \rightarrow C$, $C \rightarrow C_1 \rightarrow D$, $D \rightarrow D_1 \rightarrow A$, т. е. характеризуется подстановкой

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}.$$

Поскольку число бимедиан равно трём, а каждой из них соответствует два эллиптических поворота (в противоположных направлениях), то число композиций типа ψS_σ равно шести.

Таким образом, обнаружено шесть косых зеркальных симметрий относительно медианных плоскостей, три косых осевых симметрии относительно бимедиан, восемь эллиптических поворотов около медиан тетраэдра, шесть поворотных симметрий, т. е. всего $6 + 3 + 8 + 6 + 1 = 24$ аффинных автоморфизма тетраэдра, включая и тождественное преобразование.

Задачи и упражнения

III.1. Вычислите тройное произведение векторов

$$(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})(\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}),$$

если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 1$.

III.2. На диагоналях граней параллелепипеда, имеющих общую вершину, построен другой параллелепипед. Найдите отношение его объёма к объёму данного параллелепипеда.

III.3. Плоскость, не проходящая через вершины косого четырёхугольника $ABCD$, пересекает его стороны AB , BC , CD , DA соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Докажите, что центры треугольников ABC_1 , ACD_1 , CDA_1 , ADB_1 принадлежат одной плоскости.

III.4. Даны плоскость α и не параллельная ей прямая ℓ . Найдите композицию косой зеркальной симметрии S_α^ℓ относительно плоскости α в направлении прямой ℓ и косой осевой симметрии S_ℓ^α относительно прямой ℓ параллельно плоскости α . Является ли эта композиция коммутативной?

III.5. Прямые, проведённые через вершины тетраэдра $ABCD$ параллельно некоторой прямой, пересекают плоскости противоположных этим вершинам граней соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Докажите, что объём тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ втрое больше объёма данного тетраэдра $ABCD$.

III.6. Дан трёхгранный угол $Oabc$. Постройте неподвижные плоскости композиций косых зеркальных симметрий относительно плоскостей его граней α, β, γ в направлениях соответствующих им противоположных рёбер a, b, c : $S_\gamma^c S_\beta^b S_\alpha^a$, $S_\alpha^a S_\gamma^c S_\beta^b$, $S_\beta^b S_\alpha^a S_\gamma^c$.

III.7. Точки A, B, C, D некопланарны. Аффинное преобразование пространства задано парами точек $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A$. Напишите формулы этого преобразования относительно репера $(D, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, где $\bar{e}_1 = \overrightarrow{DA}, \bar{e}_2 = \overrightarrow{DB}, \bar{e}_3 = \overrightarrow{DC}$.

III.8. Найдите формулы и вид аффинного преобразования, при котором точки $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ неподвижны, а точка $(0, 0, 1)$ переходит в точку $(1, 1, 1)$.

III.9. Вершины тетраэдра $ABCD$ находятся в точках $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1)$. Найдите формулы аффинного преобразования, при котором вершина A неподвижна, а середины рёбер AB, AC, AD переходят в середины противоположных им рёбер.

III.10. Найдите неподвижные элементы — точку, прямую и плоскость при аффинном преобразовании из задачи III.7.

III.11. Определите вид аффинного преобразования пространства, отображающего вершины данного тетраэдра в центры тяжести противоположных им граней.

III.12. Найдите неподвижные элементы аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 6, \\ y' = 4x + 3y - 8, \\ z' = -2z + 9. \end{cases}$$

III.13. Докажите, что всякое аффинное преобразование пространства можно представить композицией трёх родственных преобразований.

III.14. Аффинное преобразование пространства является композицией двух родственных преобразований тогда и только тогда, когда оно имеет семейство параллельных неподвижных плоскостей. Докажите.

III.15. Докажите, что аффинное преобразование, обладающее прямой неподвижных точек, имеет семейство параллельных неподвижных плоскостей.

III.16. Если плоскости трёх родственных преобразований параллельны, то их композицией является либо родство, либо композиция двух родственных преобразований. Докажите.

III.17. Докажите, что совокупность всех сдвигов и всех переносов с одним и тем же направлением есть группа.

Квадрики в аффинном пространстве

§ 32. Определение квадрики.

Пересечение квадрики с плоскостью

32.1. Определение. Поверхностью второго порядка, или *квадрикой* трёхмерного аффинного пространства называется множество всех точек этого пространства, координаты каждой из которых удовлетворяют уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (\text{IV.1})$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — действительные числа (хотя бы одно из них отлично от нуля).

Уравнение (IV.1) называется *общим уравнением* определяемой им квадрики. Будем записывать его кратко $F(x, y, z) = 0$. Доказано, что степень уравнения поверхности не зависит от выбора аффинного репера пространства.

Сумма членов второй степени уравнения (IV.1) называется *квадратичной формой* квадрики:

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \quad (\text{IV.2})$$

32.2. Пара плоскостей как квадрика. Объединение двух плоскостей $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ можно задать уравнением

$$(Ax + By + Cz + D)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,$$

которое, очевидно, приводится к виду (IV.1). Следовательно, пара плоскостей есть квадрика. В этом случае говорят также, что *квадрика распадается* на пару плоскостей. В частности, таковой является дважды взятая (сдвоенная) плоскость $(Ax + By + Cz + D)^2 = 0$.

Пример. Квадрика задана уравнением

$$2x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + 2yz + 3y - 3z - 2 = 0.$$

Покажем, что она является парой плоскостей. Для этого запишем это уравнение по степеням переменной z :

$$z^2 + (x - 2y + 3)z + (-2x^2 + y^2 - xy - 3y + 2) = 0,$$

откуда затем выразим эту переменную:

$$z = \frac{1}{2}(-x + 2y - 3 \pm (3x + 1)).$$

Тем самым мы получили уравнения

$$x + y - z - 1 = 0, \quad 2x - y + z + 2 = 0$$

двух плоскостей, составляющих данную квадрику.

32.3. Пересечение квадрики с плоскостью. Пусть даны квадрика γ и плоскость α . Координатную плоскость Oxy совместим с плоскостью α . Пусть в этой системе координат квадрика γ имеет уравнение (IV.1). Тогда пересечение её с плоскостью α задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение с планиметрической точки зрения, как в гл. II, относительно аффинного репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ плоскости Oxy .

Возможны следующие случаи.

1. Если хотя бы один из коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} отличен от нуля, то данное уравнение в указанной системе координат определяет кривую второго порядка, лежащую в плоскости α .

2. При $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ уравнение принимает вид

$$2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Поэтому, когда b_1 и b_2 не равны нулю одновременно, пересечение $\gamma \cap \alpha$ есть прямая. Если же $b_1 = b_2 = 0$, но $c \neq 0$, то уравнение противоречиво, т.е. пересечение $\gamma \cap \alpha$ пусто.

3. Если $a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_1 = b_2 = c = 0$, то уравнение квадрики γ принимает вид

$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2b_3).$$

Следовательно, квадрика является парой плоскостей $z = 0$ и $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2b_3 = 0$, первая из которых и есть данная плоскость α .

Подведём итог. Если плоскость не входит в состав квадрики и её пересечение с квадрикой непусто, то оно является либо кривой второго порядка, либо прямой.

Примечание. Кривая пересечения квадрики с плоскостью задаётся системой двух уравнений этих поверхностей. Например, окружность в евклидовом пространстве есть линия пересечения сферы и плоскости:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

§ 33. Цилиндрические квадрики

33.1. Определение и составление уравнения цилиндрической квадрики. Один из способов получения квадрики указывает следующая теорема.

Теорема. Пусть даны кривая γ второго порядка и ненулевой вектор $\vec{p}$, не параллельный плоскости кривой γ . Множество Q всех точек аффинного пространства, принадлежащих всем тем прямым, которые параллельны вектору $\vec{p}$ и пересекают кривую γ , есть квадрика.

Доказательство. Выберем аффинную систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью кривой γ , а ось Oz имела направление вектора $\vec{p}$. Составим уравнение указанного множества Q . Пусть кривая γ имеет уравнения

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

где a_{ij} не обращаются в нуль все одновременно. Пусть $M(X, Y, Z)$ — произвольная точка множества Q и прямая ℓ заданного множества, проходящая через точку M , пересекает кривую γ в точке $N(x, y, 0)$ (рис. 62). Когда точка N пробежит кривую γ , множество всех точек

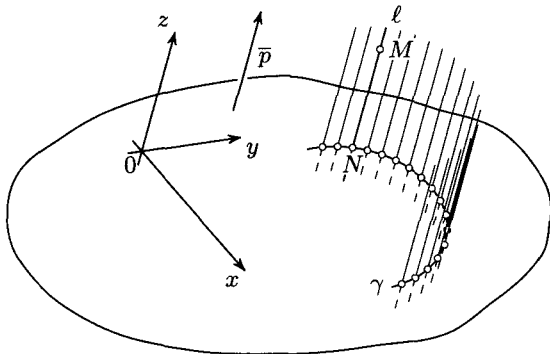


Рис. 62

движущейся вслед за ней прямой ℓ совпадёт с множеством Q . Прямую ℓ в фиксированном её положении можно задать параметрическими уравнениями (с параметром t)

$$X = z, \quad Y = y, \quad Z = t, \quad (\text{IV.4})$$

так как она содержит точку $N(x, y, 0)$ и имеет направляющий вектор $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Из уравнений (IV.3) и (IV.4) совсем просто исключить переменные x, y, z, t , подставляя в первое из уравнений (IV.3) $x = X, y = Y$ и полагая, что z принимает все действительные значения t :

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2b_1X + 2b_2Y + c = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Это и есть уравнение множества Q . Оно второй степени, поэтому задаёт к в а д р и к у. $\square$

Определение. Квадрика, представляющая собой множество всех точек всех параллельных прямых, пересекающих некоторую кривую γ второго порядка и не лежащих в её плоскости, называется *цилиндрической квадрикой* или *цилиндром второго порядка*. Кривая γ называется её *направляющей*, а указанные параллельные прямые — её *образующими*.

При доказательстве теоремы из этого пункта дан способ составления уравнения цилиндрической квадрики. Он сохраняет силу и в общем случае, если аффинная система координат выбрана произвольно и направляющая кривая γ имеет уравнения

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

где $F(x, y, z)$ — многочлен второй степени. Тогда произвольная образующая ℓ цилиндра задаётся уравнениями

$$X = x + a_1t, \quad Y = y + a_2t, \quad Z = z + a_3t, \quad (\text{IV.7})$$

где X, Y, Z — координаты её текущей точки, $N(x, y, z)$ — точка пересечения ℓ и γ , а направляющий вектор $\bar{p}$ имеет координаты a_1, a_2, a_3 . Из уравнений (IV.6) и (IV.7) исключим переменные x, y, z, t , тогда полученная зависимость между X, Y, Z и будет искомым уравнением заданной цилиндрической квадрики.

Пример. Найти уравнение цилиндра с направляющей кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

и вектором $\bar{p} = (1, 1, 1)$ в качестве образующей.

Параметрические уравнения образующей имеют вид

$$X = x + t, \quad Y = y + t, \quad Z = z + t,$$

откуда $x = X - t$, $y = Y - t$, $z = Z - t$. Подстановкой в уравнения направляющей получаем

$$\begin{cases} (X - t)^2 + (Y - t)^2 + (Z - t)^2 = 1, \\ X + Y + Z - 3t = 1. \end{cases}$$

Остаётся исключить из этих уравнений параметр t . Из второго уравнения выражаем $t = \frac{1}{3}(X + Y + Z - 1)$. Приведём первое уравнение к виду

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(X + Y + Z)t + 3t^2 = 1.$$

Подставляя в него найденное выражение для t , получаем

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{2}{3}(X + Y + Z)(X + Y + Z - 1) + \\ + \frac{1}{3}(X + Y + Z - 1)^2 = 1.$$

Это и есть искомое уравнение заданного цилиндра. После преобразований оно принимает окончательный вид

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ = 1.$$

33.2. Канонические уравнения цилиндрических квадрик.

Уравнение (IV.5) определяет цилиндрическую квадрику с заданной направляющей и образующими, параллельными оси Oz . В нём отсутствует переменная z . Это означает, что z принимает любые действительные значения, не зависящие от x и y .

Обратно, если в уравнении отсутствует переменная z , то этим уравнением определяется цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz . Действительно, если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольно выбранная точка поверхности $F(x, y) = 0$, то на ней лежит и точка $M(x_0, y_0, z)$, где z — любое действительное число, поскольку $F(x, y)$ не зависит от z . А это значит, что на данной поверхности лежит вся прямая, проходящая через M_0 параллельно Oz . Следовательно, вся поверхность состоит из прямых, параллельных оси Oz , т. е. является цилиндром, для которого эти прямые служат образующими.

Аналогично уравнения $F(x, z) = 0$ и $F(y, z) = 0$ являются уравнениями цилиндров, образующие которых параллельны соответственно осям Oy и Ox . Их направляющие кривые имеют соответственно уравнения

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

В частности, уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 - y^2 = 1,$$

$$y^2 = x$$

определяются цилиндрические квадрики, называемые соответственно *эллиптическим цилиндром* (рис. 63), *гиперболическим цилиндром* (рис. 64) и *параболическим цилиндром* (рис. 65). Эти уравнения называются аффинными каноническими уравнениями цилиндрических квадрик.

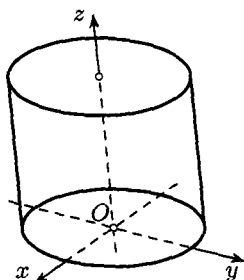


Рис. 63

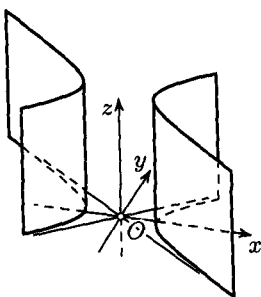


Рис. 64

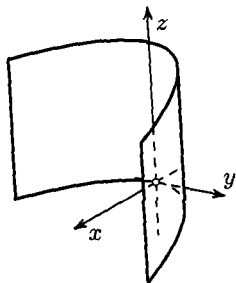


Рис. 65

Направляющими этих цилиндров являются соответственно эллипс, гипербола и парабола, имеющие в пространстве соответственно уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = x, \\ z = 0. \end{cases}$$

33.3. Проекция кривой на координатную плоскость. Пусть кривая задана уравнениями (IV.6) и требуется найти уравнения её проекции на плоскость Oxy параллельно оси Oz . Если из системы (IV.6) исключить переменную z , то поручим уравнение цилиндра, проектирующего заданную кривую на плоскость Oxy . Система уравнений проектирующего цилиндра и плоскости Oxy проекции является искомой.

Пример. Кривая задана уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $z = 1 - x - y$ и подставим в первое уравнение:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 &= 1, \\x^2 + y^2 + xy - x - y &= 0.\end{aligned}$$

Это — уравнение проектирующего цилиндра. Следовательно, искомая проекция заданной кривой записывается уравнениями

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + xy - x - y = 1, \\z = 0.\end{cases}$$

Пользуясь критериями из § 23, находим, что эта кривая является эллипсом.

33.4. Плоские сечения цилиндрических квадрик. В дополнение к теореме п. 33.1 докажем такое утверждение.

Теорема. Все сечения цилиндрической квадрики плоскостями, не параллельными её образующим, являются кривыми второго порядка одного и того же аффинного вида: для эллиптического цилиндра — эллипсами, для гиперболического — гиперболами, для параболического — парабололами.

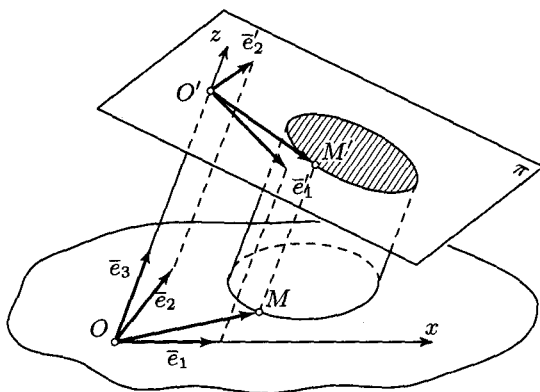


Рис. 66

Доказательство. Пусть цилиндрическая квадрика Q имеет уравнение $F(x, y) = 0$ относительно репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ (рис. 66). Её сечение плоскостью Oxy имеет то же самое уравнение относительно репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Рассмотрим сечение квадрики Q произвольной плоскостью π , не параллельной образующим. Пусть плоскость Oxy и плоскость π пересекают некоторую фиксированную образующую квадрики

соответственно в точках M и M' . В плоскости π введём репер $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, полученный параллельным проектированием репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ на плоскость π параллельно образующим квадрики. Тогда соответственные координаты точек M и M' относительно реперов $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ равны в силу инвариантов параллельного проектирования. Поэтому сечения квадрики Q плоскостью Oxy и плоскостью π имеют одинаковые уравнения относительно соответствующих реперов, т. е. имеют один и тот же аффинный вид. $\square$

§ 34. Конические квадрики

34.1. Определение конической квадрики, составление её уравнения. Квадрика, на которой существует такая точка S , что вместе с любой точкой M ей принадлежит вся прямая SM , называется *конической квадрикой*, или *конусом второго порядка*. Точка S называется её *вершиной*, а прямые SM — её *образующими* (рис. 67).

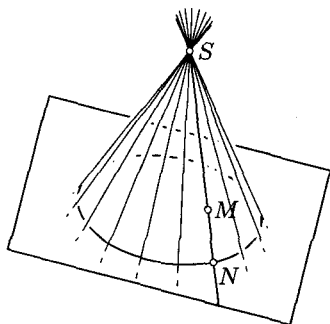


Рис. 67

Как доказано в п. 33.1, сечение квадрики плоскостью есть в общем случае кривая второго порядка. Кривая пересечения конуса второго порядка плоскостью, не содержащей его вершину, называется *направляющей* этого конуса. Конус можно задать его вершиной и какой-либо одной из его направляющих. По этим данным составляется уравнение конуса.

Пусть заданы аффинная система координат $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, точка $S(x_0, y_0, z_0)$ в качестве вершины и кривая γ в качестве направляющей конической квадрики:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

Здесь $F(x, y, z) = 0$ — многочлен второй степени и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Если $N(x, y, z)$ — произвольная фиксированная точка направляющей γ , то образующая SN конуса может быть записана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (x - x_0)t, \\ Y &= y_0 + (y - y_0)t, \\ Z &= z_0 + (z - z_0)t, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

где числа $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ суть координаты вектора $\overrightarrow{SN}$. Искомое

уравнение заданного конуса получается путём исключения из уравнений (IV.8) и (IV.9) переменных x, y, z, t .

Пример. Вершина конуса имеет координаты $(1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Составить уравнение конуса.

Параметрические уравнения (IV.9) образующей в данном случае имеют вид

$$X = 1 + (x - 1)t,$$

$$Y = 1 + (y - 1)t,$$

$$Z = 1 + (z - 1)t,$$

откуда $x = \frac{X-1}{t} + 1$, $y = \frac{Y-1}{t} + 1$, $z = \frac{Z-1}{t} + 1$. Подставляя эти выражения в уравнение $x + y + z = 1$ плоскости направляющей, находим $t = -\frac{1}{2}(X + Y + Z - 3)$. Следовательно,

$$z = \frac{-X + Y + Z - 1}{X + Y + Z - 3}, \quad y = \frac{X - Y + Z - 1}{X + Y + Z - 3}, \quad x = \frac{X + Y - Z - 1}{X + Y + Z - 3}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ даёт искомое уравнение конуса:

$$\begin{aligned} (-X + Y + Z - 1)^2 + (X - Y + Z - 1)^2 + \\ + (X + Y - Z - 1)^2 = (X + Y + Z - 3)^2. \end{aligned}$$

Оно преобразуется к такому виду:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ + 2X + 2Y + 2Z - 3 = 0.$$

34.2. Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат. Каноническое уравнение конуса. Обратимся к уравнению второй степени от трёх переменных x, y, z

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0, \quad (\text{IV.10})$$

в котором все члены имеют вторую степень. Его называют *однородным* уравнением второй степени.

Теорема. Однородное уравнение (IV.10) второй степени при заданной аффинной системе координат в пространстве определяет коническую квадрику с вершиной в начале координат.

Доказательство. Квадрика (IV.10) содержит начало координат O . Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ — любая фиксированная точка этой квадрики, отличная от точки O . Тогда $a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{13}x_1z_1 + 2a_{23}y_1z_1 = 0$. Покажем, что вся прямая OM лежит на данной квадрике. Параметрические уравнения прямой OM таковы: $x = x_1t, y = y_1t, z = z_1t$. Подстановка в уравнение (IV.10) показывает, что в силу предыдущего равенства оно удовлетворяется координатами x, y, z при всех значениях t , т. е. любая точка прямой OM лежит на квадрике (IV.10). Согласно определению она является конусом с вершиной в точке O . $\square$

В частности, уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (\text{IV.11})$$

имеет вид (IV.10) и называется каноническим аффинным уравнением конуса.

34.3. Условие распада конической квадрики на пару плоскостей. Заметим, что при $z = 1$ уравнение (IV.10) становится идентичным уравнению (II.26) линии γ второго порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

Отдельно взятое первое уравнение определяет цилиндрическую поверхность ω с направляющей γ (в плоскости $z = 1$) и образующими, параллельными оси Oz . На основании критерия из п. 22.2 кривая γ распадается на пару прямых тогда и только тогда, когда

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{IV.12})$$

(В этом и только в этом случае цилиндр ω обращается в пару плоскостей). Применительно к конусу (IV.10) согласно его определению это означает следующее.

Коническая квадрика, имеющая уравнение (IV.10), распадается на пару плоскостей тогда и только тогда, когда имеет место условие (IV.12) (так как в этом случае направляющей кривой квадрики служит пара прямых).

§ 35. Кривые второго порядка как конические сечения

Было доказано, что все сечения цилиндрической квадрики плоскостями, не параллельными её образующим, являются кривыми второго порядка одного и того же аффинного класса. Для конуса второго порядка дело обстоит совсем иначе. Сейчас мы покажем, что сечением конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, может быть и эллипс, и гипербола, и парабола.

Аффинную систему координат всегда можно выбрать так, чтобы конус имел уравнение

$$x^2 + y^2 - (1 - z)^2 = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Действительно, пусть конус задан своим каноническим уравнением (IV.11) в аффинной системе $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Перенесём начало O в точку $O'(0, 0, -1)$, сохранив базисные векторы. Формулы перехода к другой аффинной системе будут такими: $x = x'$, $y = y'$, $z = z' - 1$. После замены переменных по этим формулам уравнение (IV.11) принимает вид (IV.13), где штрихи отброшены.

Зададим сечение конуса (IV.13) плоскостью $z = ky$, проходящей через ось Ox , и исследуем кривую сечения при различных значениях k . Эта кривая записывается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (1 - z)^2 = 0, \\ z = ky. \end{cases}$$

По теореме из п. 33.4 вид этой кривой совпадает с видом её проекции на плоскость Oxy параллельно оси Oz . Эта проекция имеет уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (1 - ky)^2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

От уравнения $z = 0$ можно временно отвлечься, при этом помня, однако, что первое уравнение рассматривается относительно системы координат в плоскости Oxy . Запишем его так:

$$x^2 + (1 - k^2)y^2 + 2ky - 1 = 0. \quad (\text{IV.14})$$

Воспользуемся критериями линий второго порядка, изложенными в § 23. Для уравнения (IV.14) имеем

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 & k \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

(здесь обозначения δ и D соответствуют гл. II).

Возможны три существенно различных случая:

- 1) если $|k| < 1$, то $\delta > 0$ и, следовательно, кривая (IV.14) является эллипсом (в частности, эллипс $x^2 + y^2 = 1$ получается при $k = 0$);
- 2) если $|k| > 1$, то $\delta < 0$, и поэтому кривая будет гиперболой;
- 3) если $|k| = 1$, то $\delta = 0$ и, значит, эта кривая — парабола.

Для полноты исследования рассмотрим также сечения конуса (IV.13) плоскостями $z = ky + 1$, проходящими через вершину $S(0, 0, 1)$ конуса параллельно соответственным плоскостям $z = ky$ при различных значениях k . Кривая пересечения определяется системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (1 - z)^2 = 0, \\ z = ky + 1, \end{cases}$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2 - (k^2 - 1)y^2 = 0, \\ z = ky + 1, \end{cases}$$

полученной подстановкой в первое уравнение выражения для z из второго уравнения. Так как первое уравнение распадается на два линейных, то рассматриваемое сечение представляет собой пару прямых — образующих конуса:

$$\begin{cases} x + \sqrt{k^2 - 1}y = 0, \\ z = ky + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \sqrt{k^2 - 1}y = 0, \\ z = ky + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим те же три возможных случая.

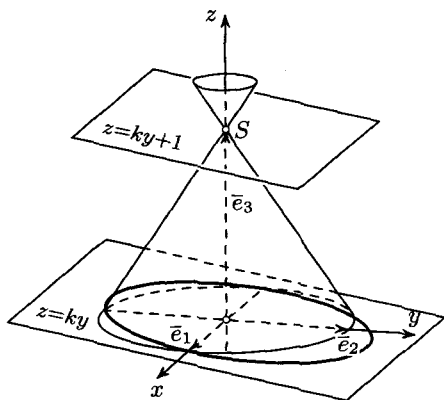


Рис. 68

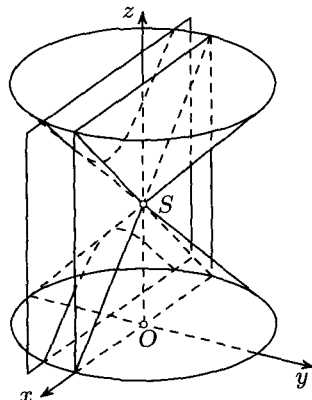


Рис. 69

1. При $|k| < 1$ коэффициент $\sqrt{k^2 - 1}$ при y — число мнимое. Это означает, что секущая плоскость не содержит образующих конуса (рис. 68).

2. При $|k| > 1$ число $\sqrt{k^2 - 1}$ действительное, поэтому плоскость пересекает конус по двум различным образующим, которые параллельны плоскости $z = ky$ (рис. 69).

3. При $|k| = 1$ обе системы совпадают:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = ky + 1. \end{cases}$$

В этом случае секущая плоскость пересекает конус только по одной образующей, содержащейся в плоскости Oyz и параллельной плоскости $z = ky$ (рис. 70).

Результатом этих исследований являются следующее утверждение.

Теорема. *Плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не имеет с ним других общих точек, либо пересекает его по двум различным образующим, либо содержит только одну образующую этого конуса. Плоскость, не проходящая через вершину конуса, пересекает его по эллипсу, гиперболе или параболе, если она соответственно не параллельна ни одной из образующих конуса, параллельна двум его образующим или же параллельна одной из его образующих.*

Эти выводы иллюстрируются рис. 68, рис. 69 и рис. 70, на которых проекции конических сечений на плоскость Oxy не изображены.

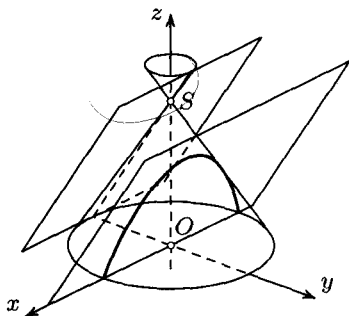


Рис. 70

§ 36. Эллипсоид

36.1. Определение и геометрическая форма эллипсоида.

Некоторые квадрики трудно определить их геометрическими свойствами. Целесообразнее определять их каноническими уравнениями относительно заданного аффинного репера.

Эллипсоидом называется квадрика, заданная уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\text{IV.15})$$

в аффинной системе координат пространства.

В силу чётности степеней переменных вместе с каждой точкой (x, y, z) этому уравнению удовлетворяют и точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом наборе знаков плюсов и минусов. Поэтому эллипсоид кососимметричен относительно каждой из координатных плоскостей (в направлениях

не принадлежащих им осей), относительно каждой из осей (в направлении не содержащих их координатных плоскостей) и относительно начала координат. Центр симметрии эллипсоида называется его *центром*.

Хорды, а также прямые, содержащие центр, называются *диаметрами* эллипсоида. Из уравнения следует, что $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$. Это значит, что эллипсоид заключён внутри параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям и касаются его в точках $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$.

Координатные плоскости Oxy , Oxz , Oyz пересекают эллипсоид соответственно по эллипсам

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным, также являются эллипсами. Например, при $z = h$ ($|h| < 1$) имеем эллипс

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - h^2, \\ z = h. \end{cases}$$

Вообще, всякое сечение эллипсоида плоскостью есть эллипс.

Эти результаты позволяют полностью представить форму эллипсоида (рис. 71).

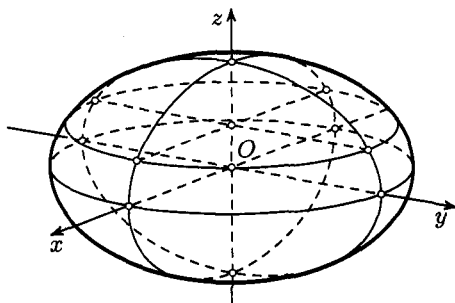


Рис. 71

36.2. Сопряжённые диаметры и диаметральные плоскости эллипсоида. Поставим задачу найти множество середин параллельных хорд эллипсоида.

Пусть произвольная хорда рассматриваемого множества имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = X + \alpha t, \\ y = Y + \beta t, \\ z = Z + \gamma t, \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

где (X, Y, Z) — середина этой хорды, а (α, β, γ) — координаты её направляющего вектора $\vec{p}$. Параметры t_1 и t_2 точек её пересечения с эллипсоидом (IV.15) находятся из уравнения

$$(X + \alpha t)^2 + (Y + \beta t)^2 + (Z + \gamma t)^2 = 1,$$

или

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t^2 + 2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)t + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

откуда по теореме Виета

$$t_1 + t_2 = -\frac{2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Середина выбранной хорды соответствует значению $\frac{t_1 + t_2}{2}$ параметра t . С другой стороны, она имеет координаты

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad Y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad Z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Поэтому из параметрических уравнений (IV.16) хорды следует, что $t_1 + t_2 = 0$. Отсюда получаем уравнение

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \tag{IV.17}$$

искомого множества точек.

Таким образом, *середины хорд, параллельных заданному вектору $\vec{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$, принадлежат диаметральной плоскости (IV.17) эллипсоида*. Она называется диаметральной плоскостью π , *сопряжённой вектору $\vec{p}$ относительно эллипсоида*, а диаметр с направляющим вектором $\vec{p}$ называется *диаметром, сопряжённым плоскости π* .

Сопряжённость диаметров и диаметральных плоскостей эллипсоида имеет геометрический аффинный смысл и, следовательно, инвариантна относительно заданных преобразований пространства.

Следствие 1. *Диаметральная плоскость ω эллипсоида, содержащая его диаметр a , пересекает сопряжённую ему диаметральную плоскость π по диаметру b , который сопряжён с диаметром a относительно эллипса пересечения эллипсоида с плоскостью ω .*

В самом деле, по определению сопряжённости диаметра a и плоскости π диаметр b (как подмножество плоскости π) делит пополам хорды, параллельные диаметру a , т. е. сопряжён ему относительно указанного эллипса.

Следствие 2. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то сопряжённые им диаметральные плоскости эллипсоида пересекаются по диаметру, который сопряжён с плоскостью $O\bar{a}\bar{b}$.

Действительно, если $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то сопряжённые им диаметральные плоскости π_1 и π_2 имеют уравнения

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

а плоскость $O\bar{a}\bar{b}$ — уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Направляющий вектор прямой $\pi_1 \cap \pi_2$ имеет координаты

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

поэтому сопряжённая ему плоскость имеет то же самое уравнение, что и плоскость $O\bar{a}\bar{b}$.

36.3. Сопряжённые тройки диаметров и сопряжённые тройки диаметральных плоскостей. *Сопряжённой тройкой диаметров* эллипсоида называется тройка диаметров, обладающая тем свойством, что каждый из них сопряжён с диаметральной плоскостью, содержащей два других. Аналогично *сопряжённой тройкой диаметральных плоскостей* эллипсоида называется тройка диаметральных плоскостей, обладающая тем свойством, что каждая из них сопряжена с диаметром, по которому пересекаются две другие.

Примерами таких троек служат координатные оси и координатные плоскости, так как в силу условия (IV.2) вектор $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ сопряжён плоскости $x = 0$, вектор $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ — плоскости $y = 0$, а вектор $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ — плоскости $z = 0$.

Свобода выбора любой другой такой сопряжённой тройки диаметров такова. Один из диаметров можно взять произвольно. Тогда два других должны лежать в диаметральной плоскости, сопряжённой взятому диаметру, и быть сопряжёнными диаметрами эллипса, по которому эта плоскость пересекает эллипсоид. В качестве второго диаметра может быть взят произвольный диаметр этого эллипса, и тогда третий диаметр сопряжённой тройки определяется однозначно как сопряжённый к выбранному (относительно эллипса).

Ясно, что если три диаметра эллипсоида образуют сопряжённую тройку, то и три плоскости, определяемые их парами, образуют сопряжённую тройку диаметральных плоскостей.

Эллипсоид однозначно определяется заданием репера, образованного сопряжённой тройкой его радиусов, поскольку этим репером определяется его каноническое уравнение (IV.15).

На основании теоремы о задании аффинного преобразования пространства, *всякие два эллипсоида аффинно эквивалентны*.

Поскольку координаты векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ сопряжённой тройки $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ удовлетворяют уравнению вида (IV.17) диаметральной плоскости, сопряжённой вектору $\bar{a}$, то

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,$$

и аналогично

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$$

Эти равенства суть координатные критерии сопряжённости тройки $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

§ 37. Гиперболоиды

37.1. Однополостный гиперболоид. *Однополостным гиперболоидом* называется квадрика, имеющая аффинное каноническое уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \quad (\text{IV.18})$$

Этому уравнению вместе с каждой точкой (x, y, z) удовлетворяют и точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любых комбинациях знаков плюсов и минусов. Следовательно, гиперболоид (IV.18) коссимметричен относительно каждой из координатных плоскостей в направлениях не принадлежащих им осей координат, относительно каждой из осей параллельно не содержащим их плоскостям координат и относительно начала координат. Начало координат как центр симметрии называется *центром* однополостного гиперболоида.

Гиперболоид пересекается с осями Ox и Oy соответственно в точках $(\pm 1, 0, 0)$ и $(0, \pm 1, 0)$ и не пересекается с осью Oz . Областью изменения каждой переменной является всё множество действительных чисел.

Сечение гиперболоида плоскостью $z = 0$ есть эллипс

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Он называется *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по гиперболам

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - z^2 = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

называемым *главными гиперболами* этого гиперболоида. Каждое сечение гиперболоида плоскостями $z = h$ есть эллипс

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + h^2, \\ z = h. \end{cases}$$

Горловой эллипс является наименьшим из них. Сечения гиперболоида плоскостями $x = h$ и $y = h$ при $|h| \neq 1$ суть гиперболы

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 - h^2, \\ x = h; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - z^2 = 1 - h^2, \\ y = h, \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

а при $|h| = 1$ — пары прямых

$$\begin{cases} (y + z)(y - z) = 0, \\ x = \pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + z)(x - z) = 0, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Так как числа $1 - h^2$ при $|h| > 1$ и $|h| < 1$ имеют разные знаки, то соответственно этим случаям гиперболы (IV.19) имеют различное расположение внутри вертикальных углов между их общими асимптотами. Действительные оси этих гипербол имеют разные направления: при $|h| > 1$ они параллельны оси Oz , а при $|h| < 1$ они параллельны осям Ox и Oy соответственно (рис. 72).

Каждое сечение однополостного гиперболоида плоскостями $y = kx$ (*меридиональное сечение*) является гиперболой:

$$\begin{cases} x^2 + (kx)^2 - z^2 = 1, \\ y = kx. \end{cases}$$

Множество асимптот этих гиперболических конусов запишется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + (kx)^2 - z^2 = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений параметр k , получаем уравнение конуса с вершиной в центре гиперboloида и осью Oz :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Этот конус называется *асимптотическим конусом* однополостного гиперboloида.

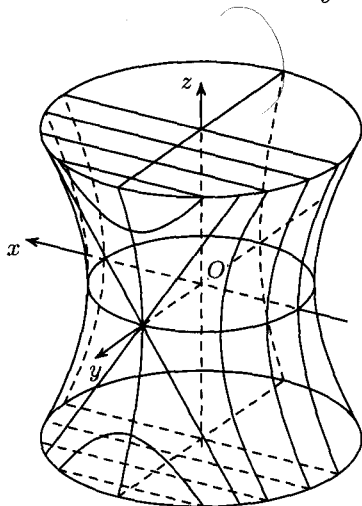


Рис. 72

Результаты о диаметрах и диаметральных плоскостях (§36) имеют место и для гиперboloида. Некоторые отличия от эллипсоида связаны с тем, что образующие асимптотического конуса не имеют общих точек (ни действительных, ни мнимых) с гиперboloидом, а параллельные им прямые пересекают гиперboloид лишь в единственной точке. Такие прямые называются *прямыми асимптотического направления* относительно гиперboloида. Векторы $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$ асимптотических направлений характеризуются условием $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$.

Имеет место **теорема**: *середины параллельных хорд однополостного гиперboloида (IV.18) принадлежат его диаметральной плоскости*

$$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0, \quad (\text{IV.21})$$

где (α, β, γ) — координаты вектора неасимптотического направления.

Её доказательство дословно совпадает с доказательством аналогичной теоремы для эллипсоида (п. 36.2). Диаметральная плоскость (IV.21) и вектор $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$, а также определяемый им диаметр называются *взаимно сопряжёнными* относительно гиперboloида (IV.18).

Материал п. 36.3 остаётся в силе и для гиперboloида (с учётом оговорок о прямых асимптотического направления).

37.2. Двуполостный гиперboloид. *Двуполостным гиперboloидом* называется квадрика, имеющая в заданной аффинной системе координат каноническое уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1. \quad (\text{IV.22})$$

Как эллипсоид и однополостный гиперboloид, эта квадрика кососимметрична относительно каждой из координатных плоскостей, относительно каждой из координатных осей, и относительно начала координат, которое называется её *центром*.

Плоскости Oxz и Oyz пересекают двуполостный гиперboloид по гиперболам

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = -1, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - z^2 = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

(главные гиперболы), которые пересекаются в точках $(0, 0, \pm 1)$. Сечение гиперboloида плоскостью $z = h$ имеет уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $|h| < 1$, то первому из этих уравнений не удовлетворяет ни одна точка. Значит, плоскость $z = h$ вовсе не пересекает гиперboloид. При $h = \pm 1$ ему удовлетворяют лишь две точки $(0, 0, \pm 1)$. Это означает, что плоскости $z = 1$ и $z = -1$ касаются гиперboloида. При $|h| > 1$ этими уравнениями определяется эллипс.

Рассмотрим сечения гиперboloида (IV.22) плоскостями $x = h$ и $y = h$:

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = 1 + h^2, \\ x = h; \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 - x^2 = 1 + h^2, \\ y = h. \end{cases}$$

Это — гиперболы, действительные оси которых параллельны оси Oz . Наконец, сечения двуполостного гиперboloида плоскостями $y = kx$:

$$\begin{cases} z^2 - (1 + k^2)x^2 = 1, \\ y = kx \end{cases}$$

при любом k суть также гиперболы. Множество асимптот этих гипербол задается уравнениями

$$\begin{cases} z^2 - (1 + k^2)x^2 = 0, \\ y = kx, \end{cases}$$

при исключении из которых параметра k снова приходим к уравнению

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

того же асимптотического конуса (IV.20), что и для однополостного гиперболоида. Следовательно, эти два гиперболоида имеют общий асимптотический конус, а потому называются *соасимптотическими гиперболоидами* (сопряжёнными гиперболоидами).

В результате форма двуполостного гиперболоида становится вполне определённой (рис. 73).

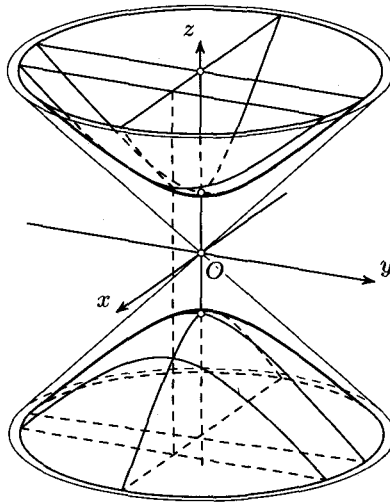


Рис. 73

По отношению к двуполостному гиперболоиду его диаметральные плоскости (и диаметры) можно разделить на два типа — пересекающие гиперболоид и не пересекающие его. Диаметральные плоскости первого типа пересекают асимптотический конус по двум образующим. Диаметральные плоскости второго типа либо имеют с конусом общей лишь его вершину, либо касаются его (по образующей).

Теорема из п. 36.2 о серединах параллельных хорд эллипсоида сохраняет силу и для двуполостного гиперboloида: *середины параллельных хорд двуполостного гиперboloида принадлежат его диаметральной плоскости*

$$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0,$$

где (α, β, γ) — направляющий вектор этих хорд ($\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$).

Существуют и сопряжённые тройки диаметров, и сопряжённые тройки диаметральных плоскостей, обладающие аналогичными свойствами, что и для эллипсоида. При этом сопряжённые (соасимптотические) двуполостный и однополостный гиперboloиды рассматриваются вместе.

§ 38. Однополостный гиперboloид как линейчатая квадрика

Квадрика, являющаяся объединением прямых, называется линейчатой квадрикой, а принадлежащие ей прямые — её *прямолинейными образующими*. Соответственно своим определениям цилиндрические квадрики и коническая квадрика являются линейчатыми. Конечно, линейчатой будет не любая квадрика. Скажем, эллипсоид не может быть объединением прямых линий в силу своей ограниченности.

Далее будет показано, что линейчатыми квадриками являются однополостный гиперboloид и гиперболический параболоид.

Каноническое уравнение однополостного гиперboloида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

можно записать, очевидно, так:

$$(x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y). \quad (\text{IV.23})$$

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} u(x + z) = v(1 + y), \\ v(x - z) = u(1 - y), \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

где u, v — параметры, принимающие любые действительные значения, не равные нулю одновременно. При фиксированных значениях u и v каждое из уравнений этой системы определяет плоскость, так как $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 \neq 0$. Поэтому системой (IV.24) определяется прямая при каждой фиксированной паре (u, v) значений параметров, причём парам

(u, v) и $(\alpha u, \alpha v)$, $\alpha \neq 0$, отвечает одна и та же прямая. Уравнение (IV.23) однополостного гиперболоида является следствием уравнений (IV.24): оно получается при их почленном умножении. Следовательно, каждая точка прямой (IV.24) лежит и на гиперболоиде. Поэтому всё семейство (серия) прямых (IV.24) принадлежит гиперболоиду.

Наряду с системой (IV.24) равным образом можно рассматривать и такую систему:

$$\begin{cases} u(x+z) = v(1-y), \\ v(x-z) = u(1+y), \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

определяющую второе семейство (серию) прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Ниже при доказательстве теоремы 4 будет доказано, что прямые (IV.24) и (IV.25) не совпадают. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида обладают замечательными свойствами.

Теорема 1. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной и только по одной образующей каждого семейства.*

Доказательство. Для заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ гиперболоида нужная пара значений параметров u, v образующей первого семейства, содержащей эту точку, находится из системы

$$\begin{cases} (x_0 + z_0)u - (1 + y_0)v = 0, \\ -(1 - y_0)u + (x_0 - z_0)v = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_0 + z_0 & -y_0 - 1 \\ y_0 - 1 & x_0 - z_0 \end{vmatrix} = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 = 0.$$

Поэтому система имеет ненулевые решения, являющиеся парами чисел, пропорциональных паре $(1 + y_0, x_0 + z_0)$, а значит, и паре $(x_0 - z_0, 1 - y_0)$. Эти пары ненулевые, так как допущение о том, что они нулевые, приводит к противоречию с принадлежностью точки M_0 гиперболоиду. Множеству всех пропорциональных ненулевых пар значений параметров u, v соответствует единственная образующая гиперболоида. Аналогично находится единственная образующая второго семейства, содержащая точку M_0 . Она получается при значениях u, v , пропорциональных паре $(1 - y_0, x_0 + z_0)$, а следовательно, и паре $(x_0 - z_0, 1 + y_0)$. Итак, образующая первого семейства, содержащая точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет уравнения

$$\begin{cases} (1 + y_0)(x + z) = (x_0 + z_0)(1 + y), \\ (x_0 + z_0)(x - z) = (1 + y_0)(1 - y), \end{cases}$$

а образующая второго семейства, проходящая через ту же точку, определяется уравнениями

$$\begin{cases} (1 - y_0)(x + z) = (x_0 + z_0)(1 - y), \\ (x_0 + z_0)(x - z) = (1 - y_0)(1 + y). \end{cases} \quad \square$$

Теорема 2. Любые три прямолинейные образующие одного семейства однополостного гиперболоида не параллельны одной плоскости.

Доказательство. Из уравнений (IV.24) находим координаты направляющего вектора образующей первого семейства:

$$\begin{vmatrix} -v & u \\ u & -v \end{vmatrix} = v^2 - u^2, \quad \begin{vmatrix} u & u \\ -v & v \end{vmatrix} = 2uv, \quad \begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2.$$

Возьмём три произвольные образующие этого семейства, отвечающие парам параметров (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) , при этом $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$, $u_2 v_3 \neq u_3 v_2$, $u_3 v_1 \neq u_1 v_3$. Определитель, составленный из координат направляющих векторов этих образующих, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} v_1^2 - u_1^2 & 2u_1 v_1 & v_1^2 + u_1^2 \\ v_2^2 - u_2^2 & 2u_2 v_2 & v_2^2 + u_2^2 \\ v_3^2 - u_3^2 & 2u_3 v_3 & v_3^2 + u_3^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} v_1^2 & u_1 v_1 & u_1^2 \\ v_2^2 & u_2 v_2 & u_2^2 \\ v_3^2 & u_3 v_3 & u_3^2 \end{vmatrix} = \\ = 2(u_1 v_2 - u_2 v_1)(u_2 v_3 - u_3 v_2)(u_3 v_1 - u_1 v_3) \neq 0.$$

Для трёх произвольных образующих второго семейства это свойство доказывается аналогично. $\square$

Теорема 3. Любые две прямолинейные образующие одного семейства однополостного гиперболоида скрещиваются.

Доказательство. Пусть двум произвольным образующим первого семейства соответствуют параметры u_1, v_1 и u_2, v_2 , причём $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$. Система уравнений этих образующих

$$\begin{cases} u_1(x + z) = v_1(1 + y), \\ v_1(x - z) = u_1(1 - y), \\ u_2(x + z) = v_2(1 + y), \\ u_2(x - z) = v_2(1 - y) \end{cases}$$

противоречива. В самом деле, умножим эти уравнения соответственно на u_2, v_2, u_1, v_1 и затем из первого уравнения вычтем третье, а из второго — четвёртое:

$$\begin{cases} (u_2 v_1 - u_1 v_2)(1 + y) = 0, \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1)(1 - y) = 0. \end{cases}$$

Так как $u_2v_1 - u_1v_2 \neq 0$, то

$$\begin{cases} 1 + y = 0, \\ 1 - y = 0, \end{cases}$$

откуда следует противоречивое равенство $2 = 0$. Таким образом, любые две образующие первого семейства не пересекаются. Но в силу теоремы 2 они и не параллельны.

Для любых двух образующих второго семейства доказательство данного свойства аналогично. $\square$

Теорема 4. Любые две образующие разных семейств однополостного гиперболоида лежат в одной плоскости.

Доказательство. Составим систему из уравнений двух образующих различных семейств:

$$\begin{cases} u_1(x + z) = v_1(1 + y), \\ v_1(x - z) = u_1(1 - y), \\ u_2(x + z) = v_2(1 - y), \\ u_2(x - z) = v_2(1 + y). \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Исследуем её на совместность. Эти уравнения умножим соответственно на u_2 , v_2 , u_1 , v_1 и затем из первого вычтем третье, а из второго — четвёртое:

$$\begin{cases} u_2v_1(1 + y) - u_1v_2(1 - y) = 0, \\ u_1v_2(1 - y) - u_2v_1(1 + y) = 0. \end{cases}$$

Полученные уравнения совпадают:

$$(u_1v_2 + u_2v_1)y = u_1v_2 - u_2v_1.$$

При $u_1v_2 + u_2v_1 \neq 0$ это уравнение имеет единственное решение

$$y = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_1v_2 + u_2v_1},$$

подстановкой которого, например, в первые два уравнения системы (IV.26) находим решение этой системы:

$$x = \frac{u_1u_2 + v_1v_2}{u_1v_2 + u_2v_1}, \quad y = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_1v_2 + u_2v_1}, \quad z = \frac{v_1v_2 - u_1u_2}{u_1v_2 + u_2v_1}.$$

Следовательно, при $u_1v_2 + u_2v_1 \neq 0$ две образующие разных семейств пересекаются в точке с найденными координатами.

Условие $u_1v_2 + u_2v_1 = 0$ приводит к другому выводу. Перепишем систему (IV.26) так:

$$\begin{cases} u_1x - v_1y + u_1z = v_1, \\ v_1x + u_1y - v_1z = u_1, \\ u_2x + v_2y + u_2z = v_2, \\ v_2x - u_2y - v_2z = u_2. \end{cases}$$

При данном условии плоскости, определяемые первым и третьим уравнениями, параллельны, так как все миноры матрицы $\begin{pmatrix} u_1 & -v_1 & u_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 \end{pmatrix}$ коэффициентов при переменных равны нулю. По аналогичной причине параллельны плоскости, определяемые вторым и четвёртым уравнениями. (Параллельные плоскости могут совпадать в каждой из двух указанных пар, однако одновременное их совпадение в обеих парах невозможно, ибо такое допущение приводит к противоречию: $u_1 = v_1 = 0$ или $u_2 = v_2 = 0$.) Следовательно, при рассматриваемом условии две образующие разных семейств параллельны. $\square$

Заметим, что если образующая первого семейства проходит через точку $(x_0, y_0, 0)$, то

$$\begin{cases} u_1x_0 - v_1y_0 = v_1, \\ v_1x_0 + u_1y_0 = u_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_1v_2x_0 - v_1v_2y_0 = v_1v_2, \\ u_2v_1x_0 + u_1u_2y_0 = u_1u_2. \end{cases} \quad (*)$$

Если образующая второго семейства проходит через точку $(-x_0, -y_0, 0)$, то имеют место уравнения

$$\begin{cases} -u_2x_0 - v_2y_0 = v_2, \\ -v_2x_0 + u_2y_0 = u_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -u_2v_1x_0 - v_1v_2y_0 = v_1v_2, \\ -u_1v_2x_0 + u_1u_2y_0 = u_1u_2. \end{cases}$$

При условии $u_1v_2 + u_2v_1 = 0$ два последние равенства совпадают с равенствами (*). Точки $(x_0, y_0, 0)$ и $(-x_0, -y_0, 0)$ являются диаметрально противоположными точками эллипса

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

являющегося сечением гиперболоида координатной плоскостью Oxy (горловой эллипс). Из сказанного следует вывод: *параллельные образующие различных семейств однополостного гиперболоида проходят через диаметрально противоположные точки его горлового эллипса.*

Доказанные свойства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида иллюстрирует рис. 74.

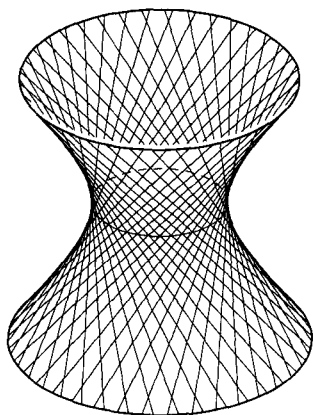


Рис. 74

Однополостные гиперболоиды используются в строительной технике. Впервые такую идею использовал русский инженер В. Г. Шухов (1853–1939). По его системе построена телевизионная башня в Москве, которая состоит из ряда однополостных гиперболоидов вращения с общей осью.

Задача. Найти множество всех прямых, каждая из которых лежит в одной плоскости с каждой из трёх прямых

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 1, \\ z = t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -t, \\ z = t. \end{cases}$$

Решение. Указанные прямые проходят соответственно через точки $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(-1, 0, 0)$ и имеют направляющие векторы $\vec{p}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{p}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{p}_3 = (0, -1, 1)$. Проверка показывает, что данные три прямые попарно скрещиваются и что векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ не компланарны, т. е. эти прямые не параллельны одной плоскости. Пусть произвольная прямая из искомого множества прямых имеет параметрические уравнения $x = X + \alpha t$, $y = Y + \beta t$, $z = Z + \gamma t$, где (X, Y, Z) — координаты некоторой фиксированной точки этой прямой.

Запишем условия того, что эта прямая лежит в одной плоскости с каждой из трёх данных:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} X & Y-1 & Z \\ -1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} X+1 & Y & Z \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{cases} \alpha(Y-Z) - \beta(X-1) + \gamma(X-1) = 0, \\ \alpha(Y-1) - \beta(X+Z) + \gamma(Y-1) = 0, \\ \alpha(Y+Z) - \beta(X+1) + \gamma(-X-1) = 0. \end{cases}$$

Исключив из этой системы параметры α, β, γ , получим зависимость между координатами X, Y, Z любой точки прямой искомого множества, т. е. уравнение этого множества. Последняя система является однородной линейной системой относительно α, β, γ . Она заведомо должна иметь ненулевые решения, поскольку существует бесконечное множество прямых, обладающих заданным свойством. Поэтому её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} Y-Z & -X+1 & X-1 \\ Y-1 & -X-Z & Y-1 \\ Y+Z & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$$

однополостного гиперболоида.

Этот результат не является частным случаем. Из свойств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида следует, что он представляет собой множество прямых, каждая из которых пересекает три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, или параллельна одной из них.

§ 39. Эллиптический параболоид

39.1. Аффинное каноническое уравнение и сечения эллиптического параболоида. Эллиптическим параболоидом называется квадрика, имеющая каноническое уравнение

$$x^2 + y^2 = 2z. \quad (\text{IV.27})$$

Выясним его геометрический вид. Так как вместе с точкой (x, y, z) этому уравнению удовлетворяют точки $(\pm x, \pm y, z)$ с любой комбинацией

плюсов и минусов, то эллиптический параболоид кососимметричен относительно плоскостей Oxz и Oyz и относительно оси Oz . Начало координат называется *вершиной параболоида*, ось Oz — *осью параболоида*.

Плоскости Oxz и Oyz пересекают параболоид соответственно по параболом

$$\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

называемым его *главными параболом* (рис. 75).

Согласно уравнению (IV.27) $z \geq 0$, следовательно, плоскости $z = h$ при $h < 0$ не имеют общих точек с параболоидом, а плоскость $z = 0$ касается его в начале координат. При $h > 0$ сечениями являются эллипсы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

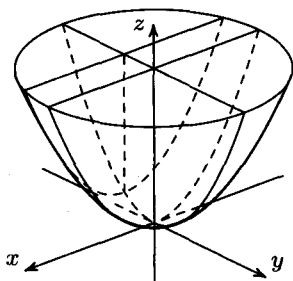


Рис. 75

Покажем, что эллиптический параболоид можно образовать геометрически с помощью главных парабол (IV.28). Для этого рассмотрим его сечения плоскостями $y = t$, параллельными плоскости Oxz :

$$\begin{cases} x^2 = 2z - t^2, \\ y = t. \end{cases}$$

Этими уравнениями определяется семейство парабол, идентичных (метрически равных) первой из главных парабол с вершинами $\left(0, t, \frac{t^2}{2}\right)$ на второй главной параболе. Аналогичная картина получается и для сечений плоскостями $x = t$. Таким образом, имеем такой способ получения эллиптического параболоида. *Если взять две пересекающиеся параболы с параллельными осями, не лежащие в одной плоскости, и одну из них перемещать параллельно себе (т.е. заменять её плоскостью параллельной ей плоскостью) так, чтобы её вершина скользила по другой параболе, то первая парабол опишет эллиптический параболоид.*

Характерное свойство эллиптического параболоида выясняется при изучении вопроса о пересечении его с прямыми, проходящими через вершину. Если $\vec{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$ — направляющий вектор такой прямой, то она имеет параметрические уравнения $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$. При

подстановке этих выражений в уравнение (IV.27) получаем уравнение $(\alpha^2 + \beta^2)t^2 = 2\gamma t$, имеющее один корень $t = 0$, отвечающий точке O пересечения прямой с параболоидом. При $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ другой корень равен $\frac{2\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}$. Если же $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, т. е. если $\alpha = \beta = 0$, то при $\gamma \neq 0$ уравнение $(\alpha^2 + \beta^2)t^2 = 2\gamma$ не имеет решения.

Следовательно, каждая прямая, проходящая через вершину параболоида, кроме его оси, пересекает параболоид в двух точках (возможно, совпадающих), а ось и параллельные ей прямые пересекают его в единственной точке. Эти прямые называются *прямыми асимптотического направления* относительно параболоида.

Этим свойством эллиптический параболоид существенно отличается от каждой из полостей двуполостного гиперболоида, у которого каждая прямая, проходящая через его центр внутри асимптотического конуса, пересекает эту полость только в одной точке.

39.2. Диаметральные плоскости и диаметры эллиптического параболоида. Найдём множество середин (X, Y, Z) хорд эллиптического параболоида, параллельных вектору $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$ неасимптотического направления ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$). Руководствуясь аналогией с п. 36.2, запишем параметрические уравнения прямой, содержащей выбранную хорду этого множества:

$$x = X + \alpha t, \quad y = Y + \beta t, \quad z = Z + \gamma t.$$

Эта прямая пересекает параболоид (IV.27) в двух точках, для которых значения t_1 и t_2 параметра t являются корнями уравнения

$$(X + \alpha t)^2 + (Y + \beta t)^2 = (Z + \gamma t)^2,$$

или

$$(\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2(\alpha X + \beta Y - \gamma)t + X^2 + Y^2 - 2Z = 0.$$

Так как $t_1 + t_2 = 0$, то по теореме Виета

$$t_1 + t_2 = -\frac{2(\alpha X + \beta Y - \gamma)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0,$$

откуда

$$\alpha X + \beta Y - \gamma = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Следовательно, *искомое множество середин хорд эллиптического параболоида, параллельных вектору $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$, принадлежит плоскости (IV.29). Эта плоскость называется диаметральной плоскостью этого параболоида, сопряжённой вектору $\vec{r}$.*

Далее рассмотрим множество векторов $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$, параллельных плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, которая не параллельна оси параболоида ($C \neq 0$). Это множество характеризуется условием

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \quad (\text{IV.30})$$

Из системы уравнений (IV.29) и (IV.30) исключим параметры α, β, γ :

$$\frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{-1}{C},$$

откуда

$$X = -\frac{A}{C}, \quad Y = -\frac{B}{C}.$$

Этими уравнениями определяется прямая d , параллельная оси параболоида и содержащая точку $K\left(-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}, 0\right)$ плоскости Oxy . Эта прямая d называется *диаметром* эллиптического параболоида, *сопряжённым* наклонной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Итак, диаметр параболоида содержит середины его хорд, параллельных плоскости π , не параллельной оси параболоида. Следовательно, он содержит центры S эллипсов всех сечений эллиптического параболоида, плоскостями, параллельными плоскости π (рис. 76).

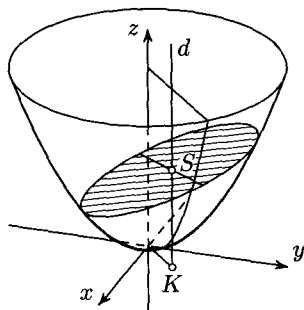


Рис. 76

§ 40. Гиперболический параболоид

40.1. Сечения и форма гиперболического параболоида. Гиперболическим параболоидом называется квадрика, имеющая аффинное каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = 2z. \quad (\text{IV.31})$$

Вместе с каждой точкой (x, y, z) этому уравнению удовлетворяют и точки $(\pm x, \pm y, z)$ при любых комбинациях плюсов и минусов. Следовательно, параболоид кососимметричен относительно плоскостей Oxz и Oyz и относительно оси Oz . Начало координат называется *вершиной* гиперболического параболоида, ось Oz — его *осью* (симметрии).

Плоскости Oxz и Oyz пересекают параболоид по параболам

$$\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = -2z, \\ x = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

которые называются его *главными параболоми*. Сечениями параболоида плоскостями $z = h$ ($h \neq 0$) являются гиперболы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Это — уравнения двух семейств сопряжённых (соасимптотических) гипербол: при $h > 0$ их действительные оси параллельны оси Ox , а при $h < 0$ они параллельны оси Oy .

Координатная плоскость $z = 0$ рассекает параболоид по двум прямым

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Сечения гиперболического параболоида плоскостями $y = kx$ суть параболы

$$\begin{cases} (1 - k^2)x^2 = 2z, \\ y = kx \end{cases}$$

при $k \neq \pm 1$ и та же пара прямых (IV.33) при $k = \pm 1$.

Аналогично эллиптическому параболоиду *гиперболический параболоид* образуется переносом одной из главных парабол (IV.32) так, что её вершина скользит по другой параболе, при этом параболы лежат в разных плоскостях, а их оси направлены противоположно. В результате образуется седлообразная поверхность (рис. 77).

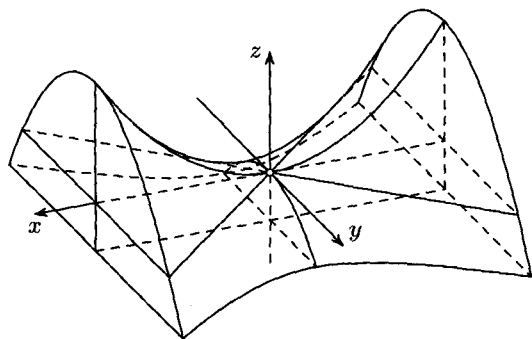


Рис. 77

Для полноты картины рассмотрим ещё сечения параболоида плоскостями $y = \pm x + c$, параллельными плоскости $y = x$ или плоскости $y = -x$. Исключив переменную y из уравнений $x^2 - y^2 = 2z$ и $y = x + c$, получим уравнение $2z = -2cx - c^2$, а исключив y из уравнений $x^2 - y^2 = 2z$ и $y = -x + c$, получим уравнение $2z = 2cx - c^2$. Это означает, что прямая

$$\begin{cases} y = x, \\ 2z = -2cx - c^2, \end{cases}$$

параллельная плоскости $y = x$, лежит на параболоиде, также как и прямая

$$\begin{cases} y = -x, \\ 2z = 2cx - c^2, \end{cases}$$

параллельная плоскости $y = -x$.

40.2. Диаметральные плоскости и диаметры гиперболического параболоида. Возьмём вектор $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$, не параллельный ни одной из плоскостей $y = \pm x$ ($\beta \neq \pm \alpha$, $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$). При полной аналогии с п. 39.2 может быть доказана следующая теорема.

Теорема. Множество средних точек (X, Y, Z) хорд гиперболического параболоида, параллельных вектору $\vec{r}$, принадлежит плоскости

$$\alpha X - \beta Y - \gamma = 0. \quad (\text{IV.34})$$

Указанная плоскость называется *диаметральной плоскостью* параболоида, *сопряжённой* вектору $\vec{r}$.

Продолжая аналогию с эллиптическим параболоидом, рассмотрим множество векторов $\vec{r} = (\alpha, \beta, \gamma)$, параллельных заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ ($C \neq 0$), не параллельной оси параболоида. Это множество характеризуется условием

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad \alpha^2 - \beta^2 \neq 0. \quad (\text{IV.35})$$

Исключив параметры α, β, γ из уравнений (IV.34) и (IV.35), приходим к уравнениям

$$X = -\frac{A}{C}, \quad Y = \frac{B}{C},$$

которые определяют прямую d , параллельную оси параболоида. Она называется *диаметром параболоида*, сопряжённым плоскостям, параллельным плоскости $Ax + By + Cz = 0$ ($C \neq 0$).

Диаметр параболоида содержит центры гипербола, по которым сопряжённые ему плоскости пересекают гиперболический параболоид.

40.3. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Покажем, что гиперболический параболоид является линейчатой квадрикой. Уравнение (IV.31) $x^2 - y^2 = 2z$ представим в виде

$$(x + y)(x - y) = 2z$$

и рассмотрим две системы уравнений

$$\begin{cases} u(x + y) = v, \\ v(x - y) = 2uz; \end{cases} \quad \begin{cases} u(x + y) = 2vz, \\ v(x - y) = u, \end{cases}$$

где u, v — параметры, принимающие любые действительные значения, не равные нулю одновременно. Опуская доказательства (читатель может провести их самостоятельно по аналогии с доказательствами теорем из §38), приведём лишь результаты.

Каждая из этих систем при фиксированных значениях u и v определяет прямую линию, полностью лежащую на гиперболическом параболоиде. Пропорциональным парам значений параметров отвечает одна и та же прямая. При всевозможных значениях параметров этими системами определяются два семейства (серии) прямолинейных образующих гиперболического параболоида.

Первое уравнение первой системы показывает, что все образующие этого семейства параллельны плоскости $x + y = 0$. Второе уравнение второй системы говорит о том, что все образующие другого семейства параллельны плоскости $x - y = 0$.

Имеют место следующие **теоремы**.

1. Через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной и только по одной образующей каждого семейства.
2. Любые две образующие разных семейств пересекаются.
3. Любые две образующие одного семейства скрещиваются.

Эти свойства прямолинейных образующих гиперболического параболоида иллюстрируются рисунком 78.

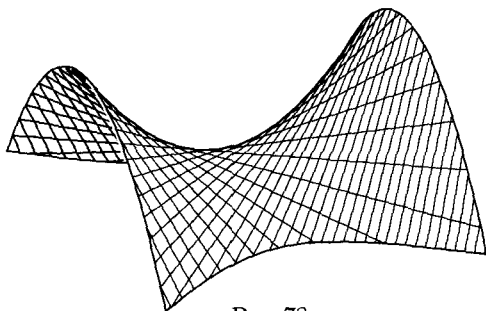


Рис. 78

Из свойств прямолинейных образующих гиперболического параболоида вытекает такой способ его образования. Пусть даны три попарно скрещивающиеся прямые, параллельные некоторой плоскости. Тогда множество всех прямых, пересекающих каждую из данных трёх прямых или параллельных одной из них, есть одна серия образующих гиперболического параболоида, для которого три данные прямые принадлежат второй его серии прямолинейных образующих.

§41. Касательные прямые и касательные плоскости к квадрикам

41.1. Касательные прямые. Рассмотренные квадрики запишем уравнением, обобщающим их канонические уравнения:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 2Dz. \quad (\text{IV.36})$$

Прямая, имеющая с квадрикой две совпавшие общие точки или полностью принадлежащая квадрике, называется *касательной прямой* к этой квадрике (в двойной точке).

Найдём координатное условие касания прямой ℓ

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t \quad (\text{IV.37})$$

с квадрикой (IV.36) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей квадрике F . Выполнив подстановки (IV.37), получаем уравнение

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (\text{IV.38})$$

где

$$\begin{aligned} P &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \\ Q &= Ax_0\alpha + By_0\beta + (Cz_0 - D)\gamma, \\ R &= Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 - 2Dz_0 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (IV.38) принимает вид

$$t(Pt + 2Q) = 0.$$

Его корню $t = 0$ отвечает общая точка M_0 прямой ℓ и квадрики. Если $P \neq 0$, то второй корень этого уравнения равен $-\frac{2Q}{P}$. При $P = Q = 0$ уравнение удовлетворяется при всех t , т. е. прямая ℓ принадлежит квадрике. В случае $P = 0$, $Q \neq 0$ уравнение $Pt + 2Q = 0$ не имеет решений: прямая ℓ имеет с квадрикой единственную общую точку M_0 .

Если $P \neq 0$ и $Q = 0$, то корни уравнения $t(Pt + 2Q) = 0$ совпадают, т.е. прямая ℓ имеет с квадрикой две совпавшие общие точки — является касательной к квадрике.

В равенстве $Q = Ax_0\alpha + By_0\beta + (Cz_0 - D)\gamma = 0$ числа α, β, γ можно рассматривать как переменные величины — параметры. Поэтому квадрика имеет бесконечно много касательных прямых в данной точке M_0 . Это уравнение говорит о том, что векторы касательных прямых линейно зависимы, т.е. компланарны, а все касательные прямые принадлежат одной плоскости.

41.2. Касательные плоскости. Плоскость, содержащая множество всех касательных прямых к квадрике в данной её точке, называется *касательной плоскостью* к квадрике в этой точке.

Если x, y, z — координаты произвольной точки касательной плоскости, то $\alpha = x - x_0$, $\beta = y - y_0$, $\gamma = z - z_0$. Поэтому условие $Q = 0$ касания приводит к уравнению касательной плоскости

$$Ax_0(x - x_0) + By_0(y - y_0) + (Cz_0 - D)(z - z_0) = 0.$$

Если учесть, что $Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = 2Dz_0$ (принадлежность точки M_0 квадрике (IV.36)), то уравнение касательной плоскости примет окончательный вид

$$Ax_0x + By_0y + Cz_0z = D(z + z_0).$$

Подставляя в это уравнение вместо A, B, C, D соответственно коэффициенты канонических уравнений квадрик, получаем следующую таблицу уравнений касательных плоскостей к квадрикам, заданным каноническими аффинными уравнениями.

№	Уравнение касательной плоскости	Уравнение квадрики
1	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$x_0x + y_0y + z_0z = 1$
2	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	$x_0x + y_0y - z_0z = 1$
3	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	$x_0x + y_0y - z_0z = 0$
4	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$	$x_0x + y_0y - z_0z = -1$
5	$x^2 + y^2 = 1$	$x_0x + y_0y = 1$
6	$x^2 - y^2 = 1$	$x_0x - y_0y = 1$
7	$y^2 = 2x$	$y_0y = x + x_0$
8	$x^2 + y^2 = 2z$	$x_0x + y_0y = z + z_0$
9	$x^2 - y^2 = 2z$	$x_0x - y_0y = z + z_0$

Задача. Доказать, что всякая касательная плоскость к однополостному гиперboloиду (гиперболическому параболоиду) содержит две его прямолинейные образующие.

Решение. Зададим однополостный гиперboloид аффинным каноническим уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Тогда касательная плоскость к нему в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$) имеет уравнение $x_0x + y_0y - z_0z = 1$. Образующие гиперboloида, проходящие через эту точку, записываются уравнениями (§ 38, теорема 1)

$$\begin{cases} (1 + y_0)(x + z) = (x_0 + z_0)(1 + y), \\ (x_0 + z_0)(x - z) = (1 + y_0)(1 - y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - y_0)(x + z) = (x_0 + z_0)(1 - y), \\ (x_0 + z_0)(x - z) = (1 - y_0)(1 + y). \end{cases}$$

Направляющий вектор образующей первого семейства имеет координаты $v^2 - u^2$, $2uv$, $v^2 + u^2$, которые в данном случае равны соответственно числам $(x_0 + z_0)^2 - (1 + y_0)^2$, $2(1 + y_0)(x_0 + z_0)$, $(x_0 + z_0)^2 + (1 + y_0)^2$. Проверяем выполнение условия параллельности этого вектора касательной плоскости:

$$\begin{aligned} x_0((x_0 + z_0)^2 - (1 + y_0)^2) + 2y_0(1 + y_0)(x_0 + z_0) - \\ - z_0((x_0 + z_0)^2 + (1 + y_0)^2) = (x_0 + z_0)(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что образующая второй серии лежит в касательной плоскости.

§ 42. Аффинная классификация квадрик

Задача аффинной классификации квадрик состоит в том, чтобы указать все такие классы квадрик, что любые две квадрики из одного класса аффинно эквивалентны, а любые две квадрики, принадлежащие разным классам, аффинно неэквивалентны. Классы квадрик, обладающие этим свойством, называются *аффинными классами* квадрик.

Число членов квадратичной формы в каноническом уравнении квадрики называется *рангом* квадратичной формы и соответствующей квадрики.

Аффинное преобразование пространства задаётся двумя его реперами. Данная точка и её образ при аффинном преобразовании в соответственных реперах имеют равные соответственные координаты. Отсюда следует важный вывод: *любые две аффинно эквивалентные квадрики*

имеют в соответственных реперах одинаковые канонические уравнения, и обратно, квадрики с одинаковыми аффинными каноническими уравнениями аффинно эквивалентны. Следовательно, квадрики, имеющие различные канонические уравнения, аффинно неэквивалентны.

Учитывая возможную замену знаков в уравнении, можно написать все различные канонические уравнения квадрик рангов $R = 3, 2, 1$.

Аффинная классификация квадрик трёхмерного пространства может быть представлена следующей таблицей.

№	R	Каноническое уравнение	Название (форма) квадрики
1	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	эллипсоид
2	3	$x^2 + y^2 + z^2 = -1$	мнимый эллипсоид
3	3	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	однополостный гиперболоид
4	3	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$	двуполостный гиперболоид
5	3	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	конус второго порядка
6	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	мнимый конус
7	2	$x^2 + y^2 = 2z$	эллиптический параболоид
8	2	$x^2 - y^2 = 2z$	гиперболический параболоид
9	2	$x^2 + y^2 = 1$	эллиптический цилиндр
10	2	$x^2 - y^2 = 1$	гиперболический цилиндр
11	2	$x^2 + y^2 = -1$	мнимый цилиндр
12	2	$x^2 + y^2 = 0$	пара мнимых плоскостей с общей действительной прямой
13	2	$x^2 - y^2 = 0$	пара пересекающихся плоскостей
14	1	$x^2 = 2y$	параболический цилиндр
15	1	$x^2 = 1$	пара параллельных плоскостей
16	1	$x^2 = 0$	сдвоенная плоскость
17	1	$x^2 = -1$	пара мнимых параллельных плоскостей

Каноническими уравнениями 1–17 определяются все 17 классов квадрик трёхмерного пространства.

С точки зрения действительного пространства, мнимый конус (6) представляет собой одну точку, пара мнимых плоскостей (12) — одну прямую, а мнимый эллипсоид (2), мнимый цилиндр (11) и пара мнимых параллельных плоскостей (17) — пустые множества. Указанные их названия обусловлены схожестью их канонических уравнений с уравнениями соответствующих действительных квадрик.

Задачи и упражнения

IV.1. Напишите уравнение цилиндрической квадрики, содержащей точки $(1, 0, -1)$ и $(2, 0, 2)$, если плоскости $x + 2y + z = 0$ и $x - z = 0$ являются плоскостями её косо́й симметрии, а прямая их пересечения — осью косо́й симметрии параллельно координатной плоскости Oyz .

IV.2. Параболический цилиндр проходит через две точки $(1, 1, 1)$ и $(1, -1, 1)$, его образующие параллельны прямой $x = t, y = t, z = -2t$, а плоскость $x + y + z = 0$ является плоскостью его косо́й симметрии в направлении $\vec{p} = (1, 1, 1)$. Напишите уравнение этого цилиндра.

IV.3. Конус задан уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(0, -2, 2)$ и $(-1, 0, 0)$ и пересекающей этот конус по параболе.

IV.4. Напишите уравнение конуса с вершиной $(1, 0, -1)$, содержащего кривую

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

IV.5. При каком условии плоскость $Ax + By + Cz = 0$ пересекает конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ по двум прямым?

IV.6. Используя плоские сечения, определите вид квадрик

$$z^2 = xy \quad \text{и} \quad z = xy.$$

Изобразите их в заданной аффинной системе координат.

IV.7. Найдите уравнение конуса, содержащего оси аффинной системы координат, если ось конуса имеет направляющий вектор $\vec{p} = (1, 1, 1)$.

IV.8. Докажите, что плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ касается эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$.

IV.9. Найдите уравнение конуса, образованного касательными к эллипсоиду $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, проходящими через точку $(0, 0, 3)$.

IV.10. Найдите уравнение квадрики, являющейся объединением прямых, касающихся эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и пересекающих прямые

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ z = 0. \end{cases}$$

IV.11. Докажите, что касательная плоскость к двуполостному гиперболоиду пересекает его асимптотический конус по эллипсу.

IV.12. Докажите теоремы из п. 40.3 о свойствах гиперболического параболоида.

IV.13. Найдите уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперboloида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

IV.14. Найдите уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z$, параллельных плоскости $6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

IV.15. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ касалась параболоида $x^2 + y^2 = 2z$.

IV.16. По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает двуполостный гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = -4$?

IV.17. Найдите уравнение поверхности, являющейся множеством прямых, параллельных плоскости $2x + 3y - 5 = 0$ и пересекающих прямые

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}.$$

IV.18. Докажите, что диаметральная плоскость однополостного гиперboloида или гиперболического параболоида не проходит через его прямолинейную образующую.

IV.19. Если k — линия пересечения однополостного гиперboloида γ и его диаметральной плоскости ω , сопряжённой диаметру d , то проекция любой прямолинейной образующей гиперboloида на плоскость ω в направлении диаметра d касается линии k . Докажите.

IV.20. Докажите, что касательная плоскость к двуполостному гиперboloиду отсекает от его асимптотического конуса часть постоянного объёма.

ЧАСТЬ II

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Основы геометрии проективной плоскости

§1. Определение проективной плоскости

Понятие проективной плоскости было введено для того, чтобы избавиться от необходимости различать в планиметрии случаи параллельных и пересекающихся прямых, т. е. полностью освободиться от понятия параллельных прямых. Для этого пришлось рассматривать параллельные прямые как прямые, пересекающиеся в «бесконечно удалённой», или «несобственной» точке. Такое соглашение должно быть точно описано математически. С этой целью нам придётся освободиться от привычных представлений о плоскости и принять следующее аксиоматическое определение понятия проективной плоскости.

Определение. *Проективной плоскостью* называется множество, элементы которого именуются *точками*, если в нём выделены определённые подмножества, именуемые *прямыми*, такие, что выполняются следующие аксиомы.

Π_1 . Для любых двух различных точек существует единственная содержащая их прямая.

Π_2 . Любые две различные прямые имеют единственную общую точку.

Π_3 . Существуют четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой.

Прямая проективной плоскости называется также *проективной прямой*. Аксиомы Π_1 , Π_2 , Π_3 проективной плоскости будем называть *аксиомами принадлежности* проективной геометрии плоскости.

Теорема. *Проективная прямая содержит по крайней мере три точки.*

Доказательство. Пусть A, B, C, D — четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой (аксиома Π_3), и пусть $(AB) \cap (CD) = M$, $(BC) \cap (AD) = N$, $(AC) \cap (BD) = P$ (аксиома Π_2). Из того, что шесть прямых AB, CD, BC, AD, AC, BD различны, следует, что точки M, N, P различны и отличны от точек A, B, C, D . Каждая из упомянутых прямых содержит по крайней мере три точки. Далее, если произвольная прямая ℓ не содержит точку A , то она пересекается с прямыми AB, AC, AD в трёх различных точках (аксиома Π_2). Если ℓ не содержит точку B , то она пересекает прямые BA, BC, BD в трёх различных точках. Этим множество всех прямых проективной плоскости пока исчерпано. $\square$

Следствие. Существуют четыре прямые, никакие три из которых не содержат общей точки.

Действительно, таковыми являются прямые AB , BC , CD , DA .

Данным выше определением охватываются и такие проективные плоскости, которые содержат конечное число (например, семь) точек. Они называются *конечными проективными плоскостями*.

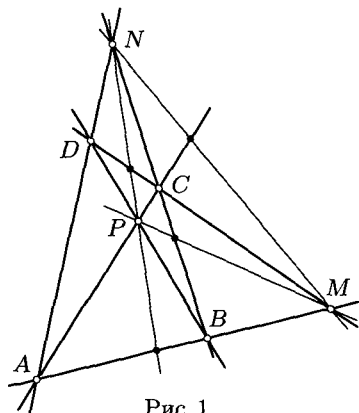


Рис. 1

Фигура, образованная четырьмя точками A , B , C , D , никакие три из которых неколлинеарны, и шестью прямыми (сторонами) AB , BC , CD , DA , AC , BD , называется *полным четырёхвершинником* (четырёхугольником) $ABCD$. Прямые AB и CD , BC и AD , AC и BD называются его *противоположными сторонами*, точки M , N , P пересечения его противоположных сторон — *диагональными точками*, прямые MN , MP , NP — *диагоналями* полного четырёхвершинника $ABCD$ (рис. 1).

Π_4 (**аксиома Фано**). *Диагональные точки полного четырёхвершинника неколлинеарны.*

Аксиома Фано исключает существование конечных проективных плоскостей. Кроме уже имеющих семи точек и девяти прямых, возникают новые точки пересечения прямых и новые прямые. За счёт этого число точек и прямых проективной плоскости неограниченно увеличивается.

§2. Классические модели проективной плоскости. Действительная проективная плоскость

Подчеркнём ещё раз, что по определению проективная плоскость мыслится абстрактно как всякое множество, удовлетворяющее аксиомам Π_1 , Π_2 , Π_3 . *Моделью* (интерпретацией) проективной плоскости называется конкретное множество объектов, удовлетворяющее её определению.

Для построения некоторой модели проективной плоскости надо удачно подобрать требуемое множество, определив понятия «точка» и «прямая», и проверить выполнимость аксиом принадлежности.

Существование проективной плоскости доказывается построением хотя бы одной её модели. Этим же устанавливается и непротиворечивость принятых аксиом.

Рассмотрим две модели проективной плоскости, полученные исторически вместе с развитием проективной геометрии.

2.1. Связка прямых аффинного трёхмерного пространства как модель проективной плоскости. Рассмотрим множество всех прямых аффинного пространства, содержащих точку S (центр связки), и переименуем её объекты так: прямая связки — «точка», подмножество всех прямых связки, принадлежащих одной плоскости, — «прямая». Тогда «точка» принадлежит «прямой», если соответственно в связке прямая принадлежит плоскости.

Легко видеть, что при таких соглашениях выполняются все три аксиомы проективной плоскости. Действительно, 1) так как в связке любые две различные прямые принадлежат единственной плоскости связки, то любые две различные «точки» принадлежат единственной «прямой»; 2) поскольку в связке любые две различные плоскости имеют единственную общую прямую связки, то любые две различные «прямые» имеют единственную общую «точку»; 3) в связке существуют четыре различные прямые, никакие три из которых не принадлежат одной плоскости связки, поэтому существуют четыре «точки», никакие три из которых не принадлежат одной «прямой».

Этим показано, что связка прямых трёхмерного аффинного пространства при надлежащем переименовании её объектов является моделью проективной плоскости.

2.2. Расширенная аффинная плоскость. Другая классическая модель проективной плоскости получается из предыдущей путём центрального проектирования. Возьмём аффинную плоскость π , не принадлежащую заданной связке с центром S . Между множеством точек и прямыми плоскости π , с одной стороны, и множеством прямых и плоскостей связки S , с другой стороны, установим соответствие: каждой точке $M \in \pi$ поставим в соответствие прямую SM связки и каждой прямой $a \subset \pi$ отнесём плоскость (S, a) связки (рис. 2). Это соответствие является отображением и называется *перспективным отображением* плоскости в связку.

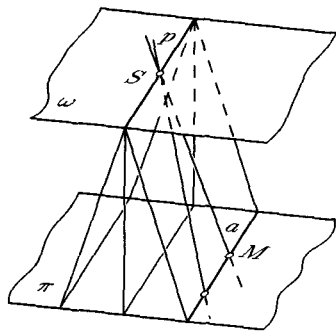


Рис. 2

Легко видеть, что перспективное отображение аффинной плоскости в связку сохраняет отношение принадлежности (инцидентности): если $M \in a$, то $(SM) \subset (S, a)$. Однако такое отображение не является взаимно однозначным. Действительно, если прямая p связки параллельна плоскости π , то у этой прямой нет соответственной точки в плоскости π . Если плоскость ω связки параллельна плоскости π , то в плоскости π отсутствует соответственная ей прямая. Прямые и плоскость ω связки, параллельные плоскости π , будем называть *особыми прямыми* и *особой плоскостью* связки.

Указанный недостаток перспективного отображения далее будет устранен искусственным образом исходя из нужд строящейся модели. Сначала сформулируем некоторые очевидные свойства прямых и плоскостей связки.

1. В каждой неособой плоскости связки существует единственная особая прямая (она является общей прямой данной неособой плоскости и особой плоскости ω).

2. Множество всех особых прямых связки образует особую плоскость.

3. Для того, чтобы плоскость π пересекала пучок плоскостей связки S по пучку параллельных прямых, необходимо и достаточно, чтобы ось пучка плоскостей была особой прямой (параллельной прямым пересечения).

Для достижения взаимной однозначности рассматриваемого перспективного отображения специальным соглашением дополним множество точек аффинной плоскости π недостающими точками, которые поставим в соответствие особым прямым связки. Именно, чисто умозрительно каждой особой прямой связки поставим в соответствие некоторую точку, которую будем считать принадлежащей этой особой прямой и плоскости $\bar{\pi}$ и которую будем называть *несобственной точкой* плоскости $\bar{\pi}$ (и соответствующей особой прямой связки). Этим соглашением множеству особых прямых связки поставлено в соответствие множество всех несобственных точек плоскости $\bar{\pi}$, вследствие чего перспективное отображение стало взаимно однозначным.

Аффинная плоскость, дополненная несобственными точками, существенно отличается своими свойствами от обычной аффинной плоскости π . В силу достигнутой взаимной однозначности перспективного отображения, свойства этой новой плоскости $\bar{\pi}$ получаются путём формальной переформулировки свойств прямых и плоскостей связки. В частности,

1) *множество всех несобственных точек плоскости $\bar{\pi}$ образует прямую, которая называется несобственной прямой плоскости $\bar{\pi}$ (в перспективном соответствии ей отвечает особая плоскость ω)*;

2) на каждой собственной прямой существует единственная несобственная точка;

3) пучку параллельных прямых принадлежит единственная несобственная точка.

Определение. Аффинная плоскость, дополненная несобственными точками так, что выполняются указанные свойства 1–3, называется *расширенной аффинной плоскостью* $\bar{\pi}$.

Поскольку связка прямых трёхмерного аффинного пространства есть модель проективной плоскости, а расширенная аффинная плоскость $\bar{\pi}$ находится в перспективном (взаимно однозначном) соответствии со связкой, то, следовательно, и расширенная аффинная плоскость служит моделью проективной плоскости.

Важно заметить, что все точки проективной плоскости равноправны между собой. Равноправны также и все прямые проективной плоскости. Когда же мы говорим о несобственных точках и несобственной прямой, то всегда имеем в виду расширенную аффинную плоскость как модель проективной плоскости.

Практически несобственные точки расширенной аффинной плоскости удобно мыслить как бесконечно удалённые. Будем обозначать их большими буквами с индексом ∞ : A_∞ , B_∞ и т. д. Согласно свойству 2 несобственную точку можно задать содержащей её собственной прямой.

В рассматриваемой модели свойства, требуемые аксиомами Π_1 и Π_2 , в случае несобственных элементов конкретно выглядят так. Если A — собственная точка и B_∞ — несобственная точка, заданная прямой b , то прямая AB_∞ проходит через A параллельно прямой b (рис. 3). Если обе точки несобственные, то и содержащая их прямая также несобственная. На обычной аффинной плоскости она не изображается, а лишь мыслится как бесконечно удалённая. Собственная и несобственная прямые имеют ту общую точку, которая задаётся этой собственной прямой.

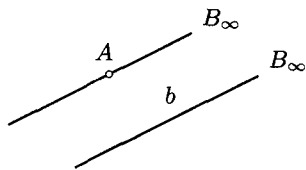


Рис. 3

Расширенная аффинная плоскость долгое время была единственной известной моделью проективной плоскости и потому отождествлялась с самим понятием проективной плоскости.

2.3. Действительная проективная плоскость. Две модели проективной плоскости называются *изоморфными*, если между их точками установлено взаимно однозначное соответствие, при котором точкам

всякой прямой одной модели соответствуют точки некоторой прямой другой модели.

Такое взаимно однозначное соответствие установлено между связкой прямых аффинного трёхмерного пространства и расширенной аффинной плоскостью. Следовательно, эти две классические модели проективной плоскости изоморфны.

Аксиоматическое определение проективной плоскости, данное в §1, не обеспечивает изоморфизм двух любых её моделей. Множество точек, порождённых на основе аксиом Π_1 и Π_2 четырьмя точками, никакие три из которых не коллинеарны, $\dot{y}$ же, чем множество точек расширенной аффинной плоскости (первое из них либо конечно, либо счётно, а второе имеет мощность континуум). Следовательно, это определение охватывает как проективные плоскости, которые изоморфны расширенной аффинной плоскости, так и проективные плоскости, не изоморфные ей.

Проективная плоскость, любая модель которой изоморфна расширенной аффинной плоскости (и следовательно связке прямых трёхмерного аффинного пространства), называется *действительной проективной плоскостью*. В ней выполняется аксиома Фано.

С этого момента, если нет оговорки, будет рассматриваться только действительная проективная плоскость, поэтому слово «действительная» опускается.

§3. Принцип двойственности для проективной плоскости

Выражения «точка лежит на прямой» и «прямая проходит через точку» можно заменить одним выражением «точка и прямая инцидентны». Используя термин «инцидентность», сформулируем аксиому Π_1 и сделаем в ней взаимную замену слов «точка» и «прямая»:

для любых двух различных $\frac{\text{точек}}{\text{прямых}}$ существует единственная инцидентная им $\frac{\text{прямая}}{\text{точка}}$.

Читая это предложение по нижним словам, обнаруживаем, что оно совпадает с аксиомой Π_2 . Аналогично поступим и с аксиомой Π_3 :

существуют четыре $\frac{\text{точки}}{\text{прямые}}$, никакие три из которых не инцидентны одной $\frac{\text{прямой}}{\text{точке}}$.

Предложение, содержащее слова под чертой, истинно: оно совпадает со следствием из теоремы §1.

Все предложения для проективной плоскости об инцидентностях точек и прямых могут быть доказаны на основе аксиом Π_1 , Π_2 , Π_3 . Следо-

вательно, взаимная замена слов «точка» и «прямая» превращает любое предложение такого рода в новое предложение, заведомо истинное без специального доказательства. Мы пришли к следующему результату, называемому **принципом двойственности**.

Если истинно некоторое предложение об инцидентности точек и прямых проективной плоскости, то будет истинно и предложение, получающееся из данного взаимной заменой слов «точка» и «прямая».

Два предложения, получающиеся друг из друга по принципу двойственности, называются *взаимно двойственными*.

Теореме из §1 будет двойственно такое предложение: *каждой точке инцидентны по крайней мере три прямые*. Ранее оно ещё не было получено, но доказательство его излишне.

Для аффинной и евклидовой плоскостей принцип двойственности не имеет места, так как для них не выполняется аксиома Π_2 .

Для успешного применения принципа двойственности нужно хорошо научиться получать фигуры, двойственные заданным. Например, прямой проективной плоскости как множеству всех её точек будет двойственна фигура, являющаяся (производим указанную замену слов) множеством всех прямых этой плоскости, инцидентных одной точке. А это, как известно, — пучок прямых.

Тройку точек, не инцидентных одной прямой, называют *трёхвершинником*, а сами эти точки — его вершинами. Ему двойственна фигура, представляющая собой три прямые, не инцидентные одной точке. Её называют *трёхсторонником*, а эти прямые — его сторонами. Если задан трёхвершинник, то имеется и трёхсторонник, образованный прямыми, соединяющими попарно вершины трёхвершинника. Обратно, трёхсторонник порождает сразу же трёхвершинник. Поэтому в случаях, где не требуется особая точность терминологии, эти фигуры объединяют под одним названием «треугольник», хотя понятие угла на проективной плоскости отсутствует.

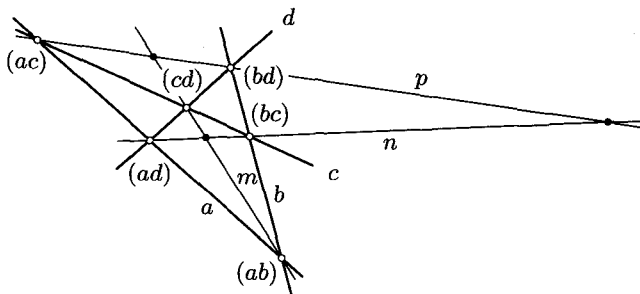


Рис. 4

Ниже будут приведены другие, более содержательные примеры применения принципа двойственности.

Полному четырёхвершиннику двойственной фигурой является *полный четырёхсторонник*. Он образован четырьмя прямыми a, b, c, d , (*сторонами*), из которых никакие три не проходят через одну точку, и шестью точками их пересечения — *вершинами*: $(ab), (bc), (cd), (da), (ac), (bd)$. Прямые m, n, p , соединяющие противоположные вершины, называются *диагоналями* полного четырёхсторонника, а точки их пересечения — *диагональными точками* этого четырёхсторонника (рис. 4).

§4. Проективные координаты

4.1. Определение и аффинный смысл проективных координат точки. Введение понятия проективной плоскости нельзя считать до конца завершённым одним её аксиоматическим определением. Необходимо уравнивать в правах несобственные элементы — точки и прямую расширенной аффинной плоскости с остальными её точками и прямыми. Однако это нельзя сделать чисто декларативно, а следует осуществить на деле математическим аппаратом путём введения проективных координат точки проективной плоскости. Используем барицентрические координаты; см. [12, т. 3, гл. 1].

Определение. Пусть A, B, C — базисные точки барицентрической системы координат аффинной плоскости π , (t_1, t_2, t_3) — барицентрические координаты её произвольной точки M , $E(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — фиксированная точка, для которой $\mu_1\mu_2\mu_3 \neq 0$. *Проективными координатами* точки M называются числа x_i , для которых произведения $\mu_i x_i$ соответственно пропорциональны числам t_i , т. е.

$$\mu_i x_i = \rho t_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (I.1)$$

где множитель $\rho \neq 0$ зависит от данной точки M .

На аффинной плоскости π уравнение $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ не имеет геометрического смысла, поскольку сумма барицентрических координат по определению равна единице. Обратимся к связке S . Её особая плоскость ω в аффинном репере $(S, \overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC})$, где точки A, B, C принадлежат плоскости π , имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z = 0,$$

совпадающее с уравнением $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Согласно модели проективной плоскости в связке это означает, что оно представляет собой уравнение

несобственной прямой расширенной аффинной плоскости $\bar{\pi}$. При переходе к проективным координатам оно принимает вид

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0.$$

Любой другой плоскости $u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0$ связки на расширенной аффинной плоскости $\bar{\pi}$ отвечает прямая, имеющая в проективных координатах уравнение того же вида:

$$\mu_1 u_1 x_1 + \mu_2 u_2 x_2 + \mu_3 u_3 x_3 = 0. \quad (\text{I.2})$$

Если в формулах (I.1) положить $t_i = \mu_i$ ($i = 1, 2, 3$), то получим, что $x_i = \rho$, т. е. тогда точка E будет иметь проективные координаты $(1, 1, 1)$. С учётом множителя ρ координаты точек A, B, C остаются прежними: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Таким образом, заданием точек A, B, C, E общего положения и указанных троек их координат каждая точка M проективной плоскости получает проективные координаты (I.1), где коэффициент $\rho \neq 0$ не зависит от i , а зависит только от данной точки M . Говорят, что четырёхвершинник $ABCE$ задаёт проективную систему координат проективной плоскости.

Барицентрическая система координат относительно базисного треугольника ABC является частным случаем проективной системы $\{ABCE\}$, когда точка E служит центроидом треугольника ABC .

Если $\overrightarrow{SM} = (x_1, x_2, x_3)$ — направляющий вектор прямой связки S , то прямая SM принадлежит плоскости $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ проективной плоскости. Согласно модели ей соответствует точка прямой (I.2) с теми же проективными координатами (x_1, x_2, x_3) относительно проективной системы $\{ABCE\}$. Следовательно, с аффинной точки зрения *проективные координаты точки проективной плоскости являются аффинными координатами направляющего вектора соответствующей ей прямой связки S .*

Так как направляющий вектор прямой определяется с точностью до постоянного ненулевого множителя, то имеем бесконечное множество пропорциональных троек проективных координат данной точки проективной плоскости. Отсюда следуют такие выводы.

1. Каждой точке проективной плоскости соответствует по крайней мере одна упорядоченная ненулевая тройка действительных чисел.

2. Две упорядоченные тройки (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) соответствуют одной точке тогда и только тогда, когда существует такое действительное число $\lambda \neq 0$, что $y_i = \lambda x_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Для класса пропорциональных троек $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ будем использовать запись $(x_1 : x_2 : x_3)$; фиксированную тройку из этого класса будем обычно обозначать (x_1, x_2, x_3) .

4.2. Замена проективной системы координат. Найдём зависимость между проективными координатами точки M в двух проективных системах координат. Пусть дан проективный репер $\{ABCE\}$ и относительно него задан другой репер $\{A'B'C'E'\}$ координатами своих точек: $A'(a_1 : a_2 : a_3)$, $B'(b_1 : b_2 : b_3)$, $C'(c_1 : c_2 : c_3)$, $E'(d_1 : d_2 : d_3)$. Пусть произвольная точка M относительно этих реперов имеет соответственно координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$. Обратимся снова к связке S , приняв её центр за начало векторов. Тогда будем иметь

$$\rho_1 \bar{A}' = a_1 \bar{A} + a_2 \bar{B} + a_3 \bar{C},$$

$$\rho_2 \bar{B}' = b_1 \bar{A} + b_2 \bar{B} + b_3 \bar{C},$$

$$\rho_3 \bar{C}' = c_1 \bar{A} + c_2 \bar{B} + c_3 \bar{C}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \rho(x_1 \bar{A} + x_2 \bar{B} + x_3 \bar{C}) = x'_1 \rho_1 \bar{A}' + x'_2 \rho_2 \bar{B}' + x'_3 \rho_3 \bar{C}' = \\ &= x'_1(a_1 \bar{A} + a_2 \bar{B} + a_3 \bar{C}) + x'_2(b_1 \bar{A} + b_2 \bar{B} + b_3 \bar{C}) + \\ &+ x'_3(c_1 \bar{A} + c_2 \bar{B} + c_3 \bar{C}) = (a_1 x'_1 + b_1 x'_2 + c_1 x'_3) \bar{A} + \\ &+ (a_2 x'_1 + b_2 x'_2 + c_2 x'_3) \bar{B} + (a_3 x'_1 + b_3 x'_2 + c_3 x'_3) \bar{C}, \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{cases} \rho x_1 = a_1 x'_1 + b_1 x'_2 + c_1 x'_3, \\ \rho x_2 = a_2 x'_1 + b_2 x'_2 + c_2 x'_3, \\ \rho x_3 = a_3 x'_1 + b_3 x'_2 + c_3 x'_3, \end{cases} \quad (I.3)$$

где в силу неколлинеарности точек A' , B' , C' выполнено условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

На основании условия $\Delta \neq 0$ система уравнений (I.3) однозначно разрешима относительно x'_i при любых ρx_i . Пока осталась неучтённой зависимость троек проективных координат «единичной» точки E относительно рассматриваемых реперов:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = \rho d_1, \\ a_2 + b_2 + c_2 = \rho d_2, \\ a_3 + b_3 + c_3 = \rho d_3. \end{cases} \quad (I.4)$$

Эти равенства называются *условиями согласования* троек a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) проективных координат базисных точек нового репера посредством тройки d_i новых координат точки E .

§ 5. Уравнения прямой в проективных координатах. Теорема Дезарга

5.1. Виды уравнений прямой. Уравнение (I.2) прямой в проективных координатах x_i является линейным однородным:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \quad (\text{I.5})$$

Оно называется *общим уравнением* прямой. Если точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$ принадлежат прямой (I.5), то имеем систему относительно u_i :

$$\begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \\ u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0, \\ u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

На основании аксиомы Π_1 она имеет ненулевое решение $(u_1 : u_2 : u_3)$. Следовательно, её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение и есть *уравнение прямой AB по двум её точкам*. Поэтому строки определителя необходимо линейно зависимы, но две последние его строки линейно независимы. Тогда элементы первой строки есть линейные комбинации соответствующих элементов второй и третьей строк:

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \quad x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3. \quad (\text{I.6})$$

Здесь λ и μ — действительные параметры, не обращающиеся одновременно в нуль. Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой. Точка прямой задаётся значением отношения λ/μ или μ/λ параметров. Уравнения (I.6) удобно применять в их краткой условной записи:

$$X = \lambda A + \mu B. \quad (\text{I.7})$$

При $\mu = 0$ точка X совпадает с A , при $\lambda = 0$ точка X совпадает с B .

5.2. Критерий принадлежности трёх прямых одному пучку.

Для того чтобы три прямые, задаваемые уравнениями

$$\begin{aligned} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 &= 0, \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 &= 0, \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

принадлежали одному пучку, т. е. пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы однородная линейная система уравнений (I.8) имела ненулевое решение, что имеет место тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{I.9})$$

Равенство (I.9) и представляет собой координатный критерий принадлежности трёх прямых одному пучку.

5.3. Теорема Дезарга. Известный французский архитектор, инженер и геометр Жирар Дезарг (1593–1662) доказал замечательную теорему, являющуюся одной из первых теорем проективной геометрии.

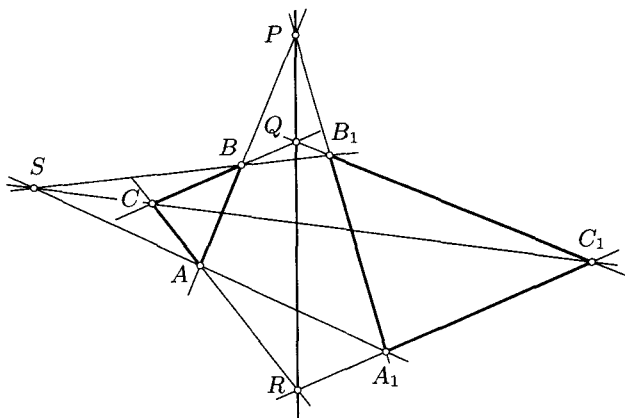


Рис. 5

Теорема. Если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 , соединяющие соответственные вершины двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке S , то соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трёх точках P , Q , R , принадлежащих одной прямой (рис. 5).

Доказательство. Зададим проективную систему координат. Используя (I.7), по условию теоремы имеем

$$S = \alpha A + \alpha_1 A_1,$$

$$S = \beta B + \beta_1 B_1,$$

$$S = \gamma C + \gamma_1 C_1.$$

Значения параметров всегда можно подобрать так, что тройка координат точки S в этих равенствах будет одна и та же. Тогда, приравнявая правые части первых двух равенств, получаем

$$\alpha A - \beta B = -\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1.$$

Если P — точка пересечения прямых AB и A_1B_1 , то существует такая тройка её проективных координат, что

$$P = \alpha A - \beta B = -\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1.$$

Аналогично

$$Q = \beta B - \gamma C = -\beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1$$

и

$$R = \gamma C - \alpha A = -\gamma_1 C_1 + \alpha_1 A_1.$$

Складывая почленно последние три равенства, получаем

$$P + Q + R = 0.$$

Отсюда $P = -Q - R$, что согласно соотношению (I.7) означает принадлежность точек P, Q, R одной прямой (здесь $\lambda = \mu = -1$). $\square$

Треугольники, удовлетворяющие теореме Дезарга, называются *дезарговскими*, или *перспективными*.

5.4. Обратная теорема Дезарга. Применим к доказанной теореме Дезарга принцип двойственности (§3). Треугольник — фигура сама себе двойственная. Поэтому достаточно заменить друг на друга слова «вершины» и «стороны». Запишем оба предложения вместе, используя термин «инцидентность».

Если $\frac{\text{прямые}}{\text{точки}}$, инцидентные соответственным $\frac{\text{вершинам}}{\text{сторонам}}$ $\frac{\text{двух тре-}}{\text{угольников}}$, инцидентны одной $\frac{\text{точке}}{\text{прямой}}$, то соответственные $\frac{\text{стороны}}{\text{вершины}}$ этих треугольников инцидентны трём $\frac{\text{точкам}}{\text{прямым}}$, которые инцидентны одной $\frac{\text{прямой}}{\text{точке}}$.

В обычной формулировке второе предложение (по нижним словам) выглядит следующим образом.

Если точки пересечения соответственных сторон двух треугольников лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке.

Это — обратная теорема Дезарга. Доказывать её уже не нужно, поскольку она получена из доказанной теоремы по принципу двойственности.

Фигура на рис. 5, иллюстрирующем теорему Дезарга, содержит 10 точек и 10 прямых, причём на каждой прямой лежит по три точки и через каждую точку проходят три прямые. Такую фигуру называют *конфигурацией Дезарга*. Точка S называется *дезарговой точкой*, а прямая PQR — *дезарговой прямой* двух дезарговых треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Конфигурация Дезарга обладает интересным свойством: любую из 10 её точек можно взять за дезаргову точку, тогда однозначно определяются дезарговы треугольники и дезаргова прямая; каждую из 10 прямых можно принять в качестве дезарговой прямой, тогда однозначно определяются дезарговы треугольники и дезаргова точка.

§6. Двойное отношение четырёх точек прямой

6.1. Определение двойного отношения четырёх точек прямой. Пусть точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$, $D(d_1 : d_2 : d_3)$ принадлежат одной прямой и $A \neq B$. Тогда согласно соотношению (I.6) существуют такие числа $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, что

$$\begin{cases} c_i = \lambda a_i + \mu b_i, \\ d_i = \lambda' a_i + \mu' b_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{I.10})$$

При $C \neq B$, $D \neq A$ и $D \neq B$ рассмотрим число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\lambda' \mu}{\lambda \mu'}$. В силу одноственности координат точек вместо a_i, b_i, c_i, d_i можно взять соответственно $\rho a_i, \sigma b_i, \alpha c_i, \beta d_i$, где $\rho, \sigma, \alpha, \beta$ все отличны от нуля. Равенства (I.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha c_i &= \frac{\alpha \lambda}{\rho} (\rho a_i) + \frac{\alpha \mu}{\sigma} (\sigma b_i), \\ \beta d_i &= \frac{\beta \lambda'}{\rho} (\rho a_i) + \frac{\beta \mu'}{\sigma} (\sigma b_i). \end{aligned}$$

При замене троек проективных координат данных точек число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$ заменяется числом

$$\left(\frac{\alpha \mu}{\sigma} : \frac{\alpha \lambda}{\rho} \right) : \left(\frac{\beta \mu'}{\sigma} : \frac{\beta \lambda'}{\rho} \right) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Таким образом, число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$ не зависит от выбора троек координат точек A, B, C, D , а зависит только от положения их на прямой.

Определение. Если A, B, C, D — четыре точки одной прямой ($A \neq B, C \neq B, D \neq B$) и

$$C = \lambda A + \mu B, \quad D = \lambda' A + \mu' B, \quad (\text{I.11})$$

то число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$ называется *двойным (сложным) отношением* четырёх точек A, B, C, D и обозначается $(ABCD)$.

Итак, если имеют место равенства (I.11), то по определению

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}. \quad (\text{I.12})$$

Точки A и B называются *базисными*, точки C и D — *делящими*.

6.2. Сохранение двойного отношения при замене проективной системы координат. Двойное отношение четырёх точек прямой является геометрическим понятием согласно доказываемой ниже теореме.

Теорема. Двойное отношение четырёх точек прямой не зависит от выбора проективной системы координат.

Доказательство. Пусть даны точки A, B, C, D некоторой прямой своими координатами в системе Π и приняты обозначения (I.10) и (I.11). Тогда по определению имеет место равенство (I.12). Формулы (I.3) перехода к другой системе Π' представим в краткой записи:

$$\rho x_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x'_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{I.13})$$

Если в новых координатах $A(a'_1 : a'_2 : a'_3)$, $B(b'_1 : b'_2 : b'_3)$, $C(c'_1 : c'_2 : c'_3)$, $D(d'_1 : d'_2 : d'_3)$, то

$$\begin{aligned} \rho_1 a_i &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} a'_k, & \rho_2 b_i &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} b'_k, \\ \rho_3 c_i &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} c'_k, & \rho_4 d_i &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} d'_k. \end{aligned}$$

Так как точки A, B, C, D коллинеарны, то в силу соотношений (I.11) имеем

$$c'_k = \lambda a'_k + \mu b'_k \quad \text{и} \quad d'_k = \lambda' a'_k + \mu' b'_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\rho_3 c_i &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} c'_k = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} (\lambda a'_k + \mu b'_k) = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} a'_k + \mu \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} b'_k = \lambda \rho_1 a_i + \mu \rho_2 b_i,\end{aligned}$$

или

$$\rho_3 c_i = \rho_1 \lambda a_i + \rho_2 \mu b_i,$$

и аналогично

$$\rho_4 d_i = \rho_1 \lambda' a_i + \rho_2 \mu' b_i.$$

Значит, снова

$$(ABCD) = \frac{\rho_2 \mu}{\rho_1 \lambda} : \frac{\rho_2 \mu'}{\rho_1 \lambda'} = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

□

6.3. Свойства двойного отношения четырёх точек прямой.

Кроме инвариантности относительно выбора системы координат двойное отношение четырёх точек прямой обладает другими замечательными свойствами.

Теорема 1. Если даны три различные точки A, B, C и действительное число $\alpha \neq 0$, то существует единственная такая точка D этой прямой, что $(ABCD) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $C = \lambda A + \mu B$, где $\lambda \neq 0$, так как $C \neq B$. Если для искомой точки D положить $D = \lambda' A + \mu' B$, то

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \alpha,$$

откуда находим отношение $\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\mu}{\alpha \lambda}$, которое при условиях $\alpha \neq 0$ и $\lambda \neq 0$ определяет единственную точку D прямой AB . □

На основании доказанной теоремы три различные точки A, B, C прямой задают систему координат на прямой, в которой координатой точки D служит двойное отношение $(ABCD) = \alpha$. При $\alpha = 1$ точка D совпадает с C : $(ABCC) = 1$. Для точек A и B соответственно $\mu' = 0$ и $\lambda' = 0$, и поэтому координата α не существует.

Теорема 2. Двойное отношение четырёх точек прямой не изменяется при перестановке базисной и делящей пары с сохранением порядка точек внутри каждой пары и при изменении порядка точек в обеих парах. При изменении порядка точек только в одной из этих пар двойное отношение заменяется его обратной величиной.

Доказательство. Рассмотрим поочередно указанные в формулировке теоремы случаи, считая все точки различными.

1. При $C \neq D$ система

$$\begin{cases} C = \lambda A + \mu B, \\ D = \lambda' A + \mu' B \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

имеет отличный от нуля определитель $\delta = \lambda\mu' - \lambda'\mu$. Решая её, находим

$$A = \frac{\mu'}{\delta}C - \frac{\mu}{\delta}D, \quad B = -\frac{\lambda'}{\delta}C + \frac{\lambda}{\delta}D.$$

По определению двойного отношения

$$(CDAB) = \left(-\frac{\mu}{\delta} : \frac{\mu'}{\delta}\right) : \left(\frac{\lambda}{\delta} : -\frac{\lambda'}{\delta}\right) = \frac{\lambda'\mu}{\lambda\mu'} = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Итак,

$$(CDAB) = (ABCD).$$

2. Согласно тому же определению

$$(ABDC) = \frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

3. Справедливы равенства

$$(BACD) = (CDBA) = \frac{1}{(CDAB)} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Здесь использованы случаи 1 и 2.

4. Справедливы равенства

$$(BADC) = \frac{1}{(BACD)} = (ABCD).$$

□

Теорема 3. При перестановке двух средних или двух крайних точек двойное отношение заменяется на дополнение его до единицы:

$$(ACBD) = (DBCA) = 1 - (ABCD).$$

Доказательство. Действительно, из той же системы (I.14) получаем

$$B = -\frac{\lambda}{\mu}A + \frac{1}{\mu}C, \quad D = -\frac{\delta}{\mu}A + \frac{\delta\mu'}{\delta\mu}C.$$

Тогда согласно определению (I.12) имеем

$$\begin{aligned}(ACBD) &= -\frac{1}{\lambda} : \left(\frac{\mu'}{\mu} : \frac{-\delta}{\mu} \right) = \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda\mu'} = \\ &= 1 - \left(\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} \right) = 1 - (ABCD).\end{aligned}$$

Следовательно, $(DBCA) = (ACBD) = 1 - (ABCD)$. Итак, при всевозможных перестановках четырёх точек (24 случая) двойное отношение принимает шесть значений:

$$(ABCD) = \alpha; \quad \frac{1}{\alpha}; \quad 1 - \alpha; \quad \frac{1}{1 - \alpha}; \quad 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}; \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

При $\alpha = -1$ различных значений будет только три: -1 ; 2 ; $1/2$. □

6.4. Двойное отношение четырёх коллинеарных точек аффинной плоскости. Рассмотрим два отношения $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$ и $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \mu$ для данных точек A, B, C, D прямой аффинной плоскости. При любом начале векторов $\overline{C} = \frac{1}{1+\lambda}\overline{A} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{B}$ и $\overline{D} = \frac{1}{1+\mu}\overline{A} + \frac{\mu}{1+\mu}\overline{B}$. Поэтому

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} : \frac{1}{1+\lambda} \right) : \left(\frac{\mu}{1+\mu} : \frac{1}{1+\mu} \right) = \lambda : \mu, \\ (ABCD) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.\end{aligned}$$

§7. Двойное отношение и проективные координаты точек

7.1. Представление двойного отношения в проективных координатах. Пусть точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$, $D(d_1 : d_2 : d_3)$ все различны. Без сужения общности рассуждений можно полагать

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

С помощью равенств $c_i = \lambda a_i + \mu b_i$ и $d_i = \lambda' a_i + \mu' b_i$ ($i = 1, 2, 3$) находим

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \mu' \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \lambda' \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку все точки различны, то ни одно из чисел λ , μ , λ' , μ' не равно нулю, и поэтому каждый из этих определителей отличен от нуля. Почленным делением этих равенств находим

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\mu}{\lambda}, \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Следовательно,

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}. \quad (\text{I.15})$$

При $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ все четыре определителя обращаются в нуль и формула (I.15) теряет смысл. Тогда либо $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$, либо $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Поэтому тем же путём находим соответственно

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad (\text{I.16})$$

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (\text{I.17})$$

7.2. Выражение отношений проективных координат точки через двойные отношения. Пусть A_1, A_2, A_3, E — базисные точки проективной системы координат. Возьмём произвольную точку $M(x_1 : x_2 : x_3)$, не принадлежащую сторонам координатного треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 6). Тогда $x_1x_2x_3 \neq 0$ и точки $M_1 = (MA_1) \cap (A_2A_3)$,

$M_2 = (MA_2) \cap (A_3A_1)$, $M_3 = (MA_3) \cap (A_1A_2)$ имеют координаты $M_1(0 : x_2 : x_3)$, $M_2(x_1 : 0 : x_3)$, $M_3(x_1 : x_2 : 0)$. В частности, если точка M совпадает с E , то $E_1(0 : 1 : 1)$, $E_2(1 : 0 : 1)$, $E_3(1 : 1 : 0)$. На основании формулы (I.15) имеем

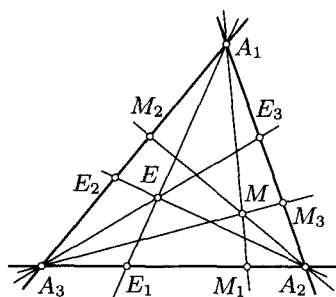


Рис. 6

$$(A_1A_2E_3M_3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1}{x_2}. \quad (\text{I.18})$$

Аналогично по формулам (I.17) и (I.16) находим

$$(A_2A_3E_1M_1) = \frac{x_2}{x_3}, \quad (A_3A_1E_2M_2) = \frac{x_3}{x_1}. \quad (\text{I.19})$$

Равенства (I.19) и представляют собой искомые выражения.

Следствие. *Имеет место тождество*

$$(A_1A_2E_3M_3)(A_2A_3E_1M_1)(A_3A_1E_2M_2) = 1.$$

§8. Двойное отношение четырёх прямых пучка и его свойства

Как доказано в §5, прямые a , b , c , заданные уравнениями

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда на основании необходимого и достаточного условия равенства нулю определителя имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1, \\ c_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2, \\ c_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Равенства (I.20) будем писать в сокращённом условном виде

$$c = \lambda a + \mu b$$

(сравните с (I.7)).

Если прямая d принадлежит этому же пучку, то

$$d = \lambda' a + \mu' b.$$

Как и в § 6, можно установить, что число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$ не зависит от выбора троек коэффициентов уравнений данных четырёх прямых.

Определение. Если a, b, c, d — четыре прямые одного пучка и

$$\begin{aligned} c &= \lambda a + \mu b, \\ d &= \lambda' a + \mu' b, \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

то число $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$ называется *двойным отношением четырёх прямых* a, b, c, d и обозначается $(abcd)$.

Итак, если имеют место равенства (I.21), то по определению

$$(abcd) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Теорема. *Двойное отношение четырёх точек A, B, C, D , в которых прямая m , не принадлежащая данному пучку, пересекает четыре прямые a, b, c, d этого пучка, равно двойному отношению указанных прямых:*

$$(ABCD) = (abcd),$$

т. е. не зависит от выбора прямой m (рис. 7).

Доказательство. Если прямая m имеет уравнение $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$, то координаты точки C её пересечения с прямой c пучка находим из системы

$$\begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0. \end{cases}$$

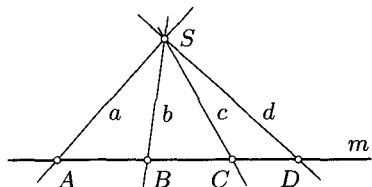


Рис. 7

Имеем

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Так как прямые m и s различны, то хотя бы один из этих трёх определителей не равен нулю. Подставляя соотношения (I.20), получаем

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left(\lambda \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right) : \\ : \left(\lambda \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right) : \left(\lambda \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Здесь определители $\begin{vmatrix} m_i & m_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} m_i & m_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) есть соответственно координаты точки A пересечения прямых m и a и координаты точки B пересечения прямых m и b . Поэтому в соответствии с формулами (I.6) и (I.7) имеем $C = \lambda A + \mu B$. Аналогично этому $D = \lambda' A + \mu' B$, где $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ имеют те же самые значения, что в формулах (I.21). Следовательно,

$$(ABCD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = (abcd).$$

□

Следствие 1. Двойное отношение четырёх прямых пучка не зависит от выбора проективной системы координат.

Это следует из свойств двойного отношения четырёх точек прямой и предыдущей теоремы.

Следствие 2. Двойное отношение четырёх точек прямой инвариантно относительно центрального проектирования (рис. 8):

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (abcd).$$

Следствие 3. Двойные отношения четвёрок соответственных прямых двух пучков равны, если они проектируют одну четвёрку точек прямой, не принадлежащей этим пучкам (рис. 9):

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1) = (ABCD).$$

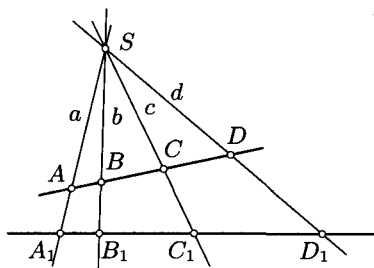


Рис. 8

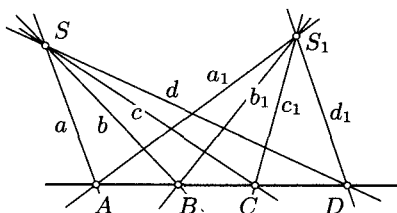


Рис. 9

§ 9. Разделённость пар точек проективной прямой

На проективной плоскости не существует понятия «лежать между» для трёх точек прямой, так как проективная прямая замкнута, что ясно из её модели пучком прямых. Пучок замкнут: прямая пучка не делит его на две части. Поэтому точка проективной прямой не делит её на два луча.

В проективной плоскости отсутствует понятие луча. Две прямые пучка делят его на две части. Значит, две точки проективной прямой делят её на две части — два отрезка (рис. 10). Отсюда следует, что на проективной плоскости отсутствует понятие угла. Термин «треугольник» используется лишь по привычке, условно, в смысле «трёхвершинник» или «трёхсторонник».

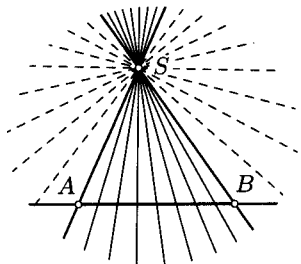


Рис. 10

Порядок точек на проективной прямой характеризуется понятием взаимной разделённости двух пар точек этой прямой. Введём это понятие. Каждая точка X прямой AB , отличная от A и B , допускает представление (I.7): $X = \lambda A + \mu B$, $\lambda\mu \neq 0$.

Определение. Множество всех точек проективной прямой, для которых $\lambda\mu$ сохраняет знак, называется *отрезком* с концами A и B .

На проективной прямой имеется два отрезка с концами A и B . На одном из них $\lambda\mu > 0$, а на другом $\lambda\mu < 0$. Данное определение отрезка не зависит от выбора троек проективных координат его концов: точка прямой определяется отношением $\frac{\mu}{\lambda}$, а знак его совпадает со знаком произведения $\lambda\mu$.

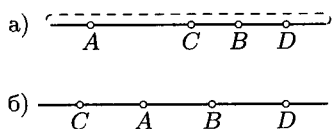


Рис. 11

Определение. Пусть даны четыре различные точки A, B, C, D прямой. Говорят, что пара точек C, D *разделяет* пару точек A, B , если точки C, D принадлежат разным отрезкам с концами A, B (рис. 11а).

На рис. 11б изображена пара C, D , не разделяющая пару A, B .

Теорема (критерий разделённости пар точек). Для того чтобы пара C, D разделяла пару A, B , необходимо и достаточно, чтобы двойное отношение $(ABCD)$ было отрицательно.

Доказательство. Если $C = \lambda A + \mu B$ и $D = \lambda' A + \mu' B$, то для того, чтобы пара C, D разделяла пару A, B согласно предыдущим определениям необходимо и достаточно, чтобы выполнялись либо неравенства $\lambda\mu > 0$ и $\lambda'\mu' < 0$, либо $\lambda\mu < 0$ и $\lambda'\mu' > 0$. Тогда в обоих случаях $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = (ABCD) < 0$, так как отношения $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\mu'}{\lambda'}$ имеют разные знаки. $\square$

Следствие 1. Для того чтобы пара точек C, D не разделяла пару точек A, B , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $(ABCD) > 0$.

Следствие 2. Если пара C, D разделяет пару A, B , то и пара A, B разделяет пару C, D . (Отношение разделённости пар симметрично.)

В самом деле, $(ABCD) = (CDAB)$, поэтому оба эти отношения имеют один и тот же знак.

§ 10. Гармоническая четвёрка точек

Определение. Четвёрка точек прямой называется *гармонической*, если двойное отношение этих точек равно -1 .

Если $(ABCD) = -1$, то говорят также, что пара C, D *гармонически разделяет* пару A, B . Так как $(CDAB) = (ABCD) = -1$, то и пара A, B гармонически разделяет пару C, D . Способ построения гармонической четвёрки точек прямой основан на теореме, называемой гармоническим свойством полного четырёхвершинника (§ 1).

Теорема. На каждой диагонали полного четырёхвершинника имеется гармоническая четвёрка точек, образованная двумя диагональными точками и точками пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку.

Это свойство называют гармоническим свойством полного четырёхвершинника.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — полный четырёхвершинник, M, N, P — его диагональные точки (рис. 12). Рассмотрим диагональ MN . Пусть $(MN) \cap (BD) = E$, $(MN) \cap (AC) = F$. Докажем, что $(MNEF) = -1$. Проектированием сначала с центром D , потом с центром B получаем (§ 8, следствие 2):

$$(MNEF) = (CAPF) = (NMEF).$$

Следовательно, $(MNEF) = (NMEF) = \frac{1}{(MNEF)}$, откуда $(MNEF)^2 = 1$

и $(MNEF) = \pm 1$. Но $(MNEF) = 1$ только при $E = F$, что невозможно, иначе бы точки A, B, C, D были коллинеарны. Значит, $(MNEF) = -1$, т.е. четвёрка точек M, N, E, F является гармонической.

Так как $(MNEF) = (CAPF)$, то $(CAPF) = -1$. □

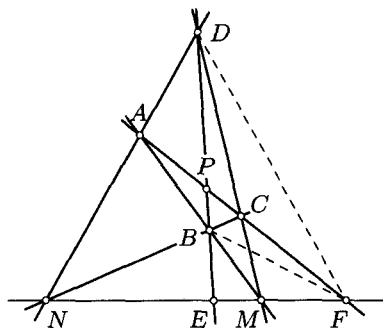


Рис. 12

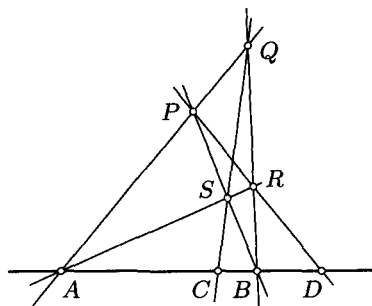


Рис. 13

Следствие. На каждой стороне полного четырёхвершинника имеется гармоническая четвёрка точек, образованная парой вершин, диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.

Из доказанной теоремы вытекает простой способ построения точки, образующей вместе с тремя данными гармоническую четвёрку.

Пусть даны три точки A, B, C прямой и требуется построить точку D (этой прямой), которая бы в паре с точкой C гармонически разделяла пару точек A, B . Так как величиной двойного отношения $(ABCD) = -1$ и тремя данными точками A, B, C точка D определяется однозначно (п. 6.3), то она не зависит от выбора полного четырёхвершинника, для которого бы точки A и B были диагональными, а точки C и D — точками пересечения диагонали AB с двумя сторонами, проходящими через третью диагональную точку. Поэтому через A проводим две произвольные прямые (рис. 13), а через C — третью произвольную прямую, которая пересекает первые две в точках Q и S . Далее,

$$(BS) \cap (AQ) = P, \quad (BQ) \cap (AS) = R, \quad (PR) \cap (AB) = D.$$

Применяя теорему из данного параграфа к полному четырёхвершиннику $PQRS$, убеждаемся в правильности построения нужной точки D .

Это построение в дальнейшем применяется многократно, поэтому надо владеть им автоматически.

Задачи и упражнения

I.1. Принимая точки $(5:6:0)$, $(1:2:3)$, $(1:1:0)$ за вершины координатного треугольника новой проективной системы координат, найдите координаты её единичной точки относительно первоначальной системы.

I.2. Покажите, что точки $A(3:2:1)$, $B(2:4:-1)$, $C(0:-8:5)$ инцидентны одной прямой. Найдите λ и μ , при которых $C = \lambda A + \mu B$. Напишите уравнение этой прямой.

I.3. В плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ даны точки M и N . Прямые A_iM пересекают противоположные им стороны треугольника $A_1A_2A_3$ соответственно в точках M_i ($i = 1, 2, 3$). Прямые A_iN пересекают соответственные стороны треугольника $M_1M_2M_3$ в точках P_i . Докажите, что прямые M_iP_i пересекаются в одной точке.

I.4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в плоскости так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке S , а прямые AB_1 , BC_1 , CA_1 пересекаются в одной точке S_1 . Докажите, что прямые AC_1 , BA_1 , CB_1 также инцидентны одной точке.

I.5. Сформулируйте теорему Дезарга для связки прямых трёхмерного аффинного пространства.

I.6. Докажите обратную теорему Дезарга на основании прямой теоремы Дезарга.

I.7. Будут ли иметь место прямая и обратная теоремы Дезарга, если вершины C и C_1 (или B и B_1) треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают?

I.8. Приняв произвольную точку конфигурации Дезарга за дезаргову точку, найдите в этой конфигурации дезарговы треугольники и дезаргову прямую.

I.9. Приняв произвольную прямую конфигурации Дезарга за дезаргову прямую, найдите в этой конфигурации дезарговы треугольники и дезаргову точку.

I.10. Даны треугольник ABC и точка S . Построены точки

$$A_1 = (SA) \cap (BC), \quad B_1 = (SB) \cap (CA), \quad C_1 = (SC) \cap (AB).$$

Докажите, что точки $(BC) \cap (B_1C_1)$, $(CA) \cap (C_1A_1)$, $(AB) \cap (A_1B_1)$ коллинеарны.

I.11. Даны треугольник ABC и прямая p . Построены точки

$$\begin{aligned} A_0 &= (BC) \cap p, & B_0 &= (CA) \cap p, & C_0 &= (AB) \cap p, \\ A_1 &= (BB_0) \cap (CC_0), & B_1 &= (CC_0) \cap (AA_0), & C_1 &= (AA_0) \cap (BB_0). \end{aligned}$$

Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

I.12. На расширенной аффинной плоскости в произвольный четырёхугольник вписана трапеция, основания которой параллельны одной его диагонали. Докажите, что продолжения её боковых сторон пересекаются на другой диагонали этого четырёхугольника.

I.13. Даны треугольник ABC и три коллинеарные точки A_0, B_0, C_0 . Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, вершины которого принадлежали бы сторонам треугольника ABC , а его стороны проходили через данные точки A_0, B_0, C_0 .

I.14. Даны прямые a и b , точка пересечения которых недоступна. Пользуясь только одной линейкой, проведите через данную точку C прямую, которая содержит точку $M = a \cap b$.

I.15. Даны прямая m и не принадлежащие ей точки A и B . Пользуясь только одной линейкой, постройте точку пересечения прямых AB и m , не проводя прямой AB .

I.16. На расширенной аффинной плоскости даны две параллельные прямые a и b и не принадлежащая им точка C . Пользуясь только одной линейкой, проведите через точку C прямую, параллельную данным прямым a и b .

I.17. Покажите, что точки $A(1:4:1)$, $B(0:1:1)$, $C(2:3:-3)$ коллинеарны, и найдите такую точку D , что $(ABCD) = -4$.

I.18. Докажите, что для любых пяти точек прямой имеет место следующая зависимость между двойными отношениями:

$$(ABCD) = \frac{(ABCM)}{(ABDM)}.$$

I.19. Точки A, B, C неколлинеарны. Если некоторая прямая m пересекает прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и прямые a_1, b_1, c_1 содержат произвольную точку $M \in m$, то $(MA_1B_1C_1) = (ma_1b_1c_1)$. Докажите.

I.20. На аффинной плоскости четыре прямые проходят через начало координат и имеют угловые коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 . Найдите двойное отношение этих прямых.

I.21. Прямые a, b, c, d принадлежат одному пучку. Прямые a и b имеют аффинные уравнения $3x + y - 5 = 0$ и $x - y + 1 = 0$. Прямая c проходит через начало координат, и $(abcd) = 3$. Найдите уравнение прямой d .

I.22. Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме из §10 о гармоническом свойстве полного четырёхвершинника.

I.23. Точки E_1, E_2, E_3 — центральные проекции единичной точки E на стороны координатного треугольника ABC соответственно из вершин A, B, C . Постройте точки P_1, P_2, P_3 — четвёртые гармонические

к точкам E_1, E_2, E_3 относительно пар точек B и C , C и A , A и B . Вычислите координаты точек P_1, P_2, P_3 , покажите, что они коллинеарны, и найдите уравнение содержащей их прямой.

I.24. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон составляют гармоническую четвёрку. Найдите гармонические четвёрки точек на боковых сторонах трапеции.

I.25. В параллелограмме $ABCD$ точка M — центроид треугольника ABC , точка N — середина стороны AB , а точка K — проекция вершины B на прямую DA параллельно диагонали CA . Докажите, что четвёрка точек C, N, M, K является гармонической и прямые BC, BA, BD, BK образуют гармоническую четвёрку прямых.

I.26. Докажите, что две стороны треугольника и биссектрисы внутреннего и внешнего углов при их общей вершине составляют гармоническую четвёрку прямых.

Проективные отображения и преобразования

При классическом (аксиоматическом) определении проективной плоскости прямая понимается как самостоятельный геометрический объект, удовлетворяющий аксиомам принадлежности (инцидентности) точки и прямой. Этот чисто гильбертовский взгляд на сущность прямой становится обременительным при изложении теории преобразований. Поэтому в классической литературе по проективной геометрии термин «прямолинейный ряд точек» означает «множество точек прямой», хотя в сущности это то же, что «прямая» в современном понимании. Думаю, что пора перестать прятаться от себя и перейти на обычную терминологию. Однако там, где речь идёт о пучках прямых и принципе двойственности, приходится оставаться на гильбертовском понимании прямой как самостоятельного геометрического объекта. Разумеется, это не может привести к недоразумениям.

§ 11. Проективные отображения прямой на прямую (пучка на пучок)

11.1. Перспективные отображения. Отображение прямой m на прямую m_1 называется *перспективным отображением*, если каждой точке $M \in m$ соответствует такая точка $M_1 \in m_1$, что множество всех прямых MM_1 есть пучок с центром S . Иными словами, перспективное отображение прямой на прямую — это центральное проектирование одной из них на другую с центром S проектирования, (не принадлежащим данным прямым (рис. 8)). Если $M \rightarrow M_1$, то будем использовать традиционную запись

$$m(M) \overset{S}{\bar{\wedge}} m_1(M_1).$$

На основании следствия 2 из § 8 при перспективном отображении равны двойные отношения каждой четвёрки соответственных точек:

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Тем самым определено *перспективное соответствие* между множеством точек M прямой m и множеством прямых SM пучка S :

$$m(M) \overset{S}{\bar{\wedge}} (SM).$$

Говорят, что два пучка S и S_1 находятся в *перспективном соответствии*, если соответственные прямые этих пучков пересекаются на одной прямой m (см. рис. 9):

$$abcd \stackrel{m}{\wedge} a_1 b_1 c_1 d_1.$$

В каждом из рассмотренных случаев равны двойные отношения четвёрок соответственных элементов.

11.2. Проективное отображение прямой на прямую (пучка на пучок). Отображение прямой m на прямую m_1 называется *проективным отображением*, если оно перспективно или является композицией конечного числа перспективных отображений. Это определение, очевидно, равносильно такому: *отображение прямой m на прямую m_1 называется проективным отображением, если оно сохраняет двойное отношение каждой четвёрки точек прямой.*

Аналогично определяется проективное отображение одного пучка прямых на другой пучок, а также проективное соответствие между множеством точек прямой и множеством прямых пучка.

Основная теорема проективной геометрии. *Существует единственное проективное отображение, при котором три данные точки A, B, C прямой m отображаются на три наперёд заданные точки A_1, B_1, C_1 прямой m_1 .*

Доказательство. Пусть заданы две тройки ABC и $A_1B_1C_1$ коллинеарных точек (рис. 14). Построим точки $B_0 = (AB_1) \cap (A_1B)$, $C_0 = (AC_1) \cap (A_1C)$, $A_0 = (AA_1) \cap (B_0C_0)$. Тогда определилась композиция двух перспективных отображений

$$ABC \stackrel{A_1}{\wedge} A_0B_0C_0 \stackrel{A}{\wedge} A_1B_1C_1,$$

при которой с помощью произвольной точки X_0 прямой B_0C_0 находится пара $X \rightarrow X_1$ соответственных точек прямых m и m_1 :

$$X = (A_1X_0) \cap m, \quad X_1 = (AX_0) \cap m_1.$$

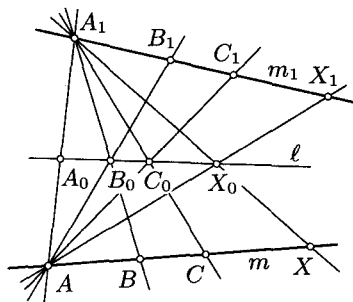


Рис. 14

Согласно определению отображение $X \rightarrow X_1$ является проективным и отображает точки A, B, C соответственно на точки A_1, B_1, C_1 . Существование требуемого отображения доказано. Оно единственно, так как образ X_1 каждой точки X прямой m однозначно определяется точками

A_1, B_1, C_1 и величиной двойного отношения $\alpha = (ABCX)$ (при выбранной точке X прямой m (п. 6.3)). Прямая $\ell = (B_0C_0)$ называется осью проективного отображения прямой m на прямую m_1 . $\square$

Следствие 1. Проективное отображение прямой на прямую либо перспективно (при $A_1 \equiv A$, рис. 15), либо является композицией двух перспективных отображений.

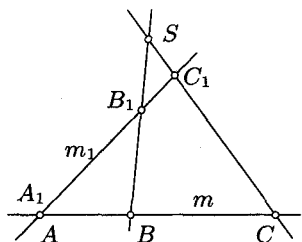


Рис. 15

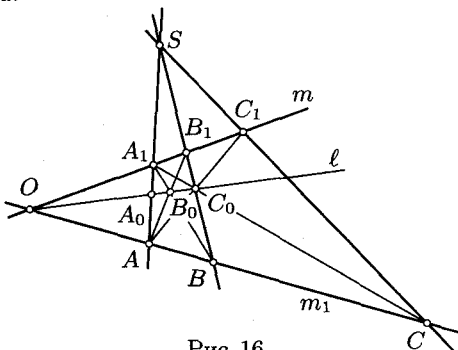


Рис. 16

Следствие 2 (критерий перспективности проективного отображения). Проективное отображение прямой на прямую является перспективным тогда и только тогда, когда общая точка этих прямых неподвижна при этом отображении.

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна (рис. 15). Докажем его необходимость. Пусть $(AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) = S$ и прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке O (рис. 16). Тогда согласно теореме Дезарга для треугольников ABC_1 и A_1B_1C точки O, B_0, C_0 коллинеарны. Это и означает, что при заданном отображении общая точка O прямых m и m_1 неподвижна. $\square$

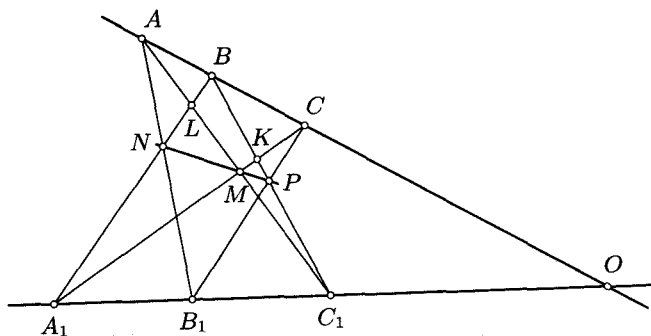


Рис. 17

11.3. Теорема Паппа. Если вершины A, B, C шестивершинника $AB_1CA_1BC_1$ коллинеарны и противоположные им вершины A_1, B_1, C_1 также коллинеарны, то его противоположные стороны AB_1 и A_1B , B_1C и BC_1 , CA_1 и C_1A пересекаются в трёх коллинеарных точках N, P, M (рис. 17).

Доказательство. Построим дополнительно точки

$$L = (AC_1) \cap (BA_1),$$

$$K = (BC_1) \cap (CA_1),$$

$$O = (AB) \cap (A_1B_1).$$

Тогда будем иметь

$$A_1NLB \stackrel{A}{\wedge} A_1B_1C_1O \stackrel{C}{\wedge} KPC_1B.$$

Таким образом, в проективном отображении $A_1NLB \bar{\wedge} KPC_1B$ точка B оказывается неподвижной. Согласно предыдущему критерию (следствие 2) это отображение будет перспективным, а именно,

$$A_1NL \stackrel{M}{\wedge} KPC_1,$$

так как прямые A_1K и LC_1 , соединяющие соответственные точки, проходят через точку M . Следовательно, и NP пройдёт через M . $\square$

§12. Проективные преобразования прямой

Проективным преобразованием прямой называется преобразование, которое сохраняет двойное отношение любых четырёх её точек.

Как доказано в п. 6.3 (теорема 1), три данные точки A, B, C прямой и заданное число $\alpha \neq 0$ однозначно определяют такую точку D этой прямой, что $(ABCD) = \alpha$. Иными словами, тройка $\{ABC\}$ коллинеарных точек задаёт систему координат (проективный репер), относительно которой точка D имеет (неоднородную) координату α .

Если $\{A'B'C'\}$ — другая фиксированная тройка точек той же прямой AB , то для четырёх пар соответственных точек при проективном преобразовании f прямой равны двойные отношения: $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Если первые три пары фиксированы, то для любой точки X точка X' определяется однозначно. Следовательно, проективное преобразование прямой определяется заданием трёх пар соответственных точек.

Следствие. Нетождественное проективное преобразование прямой может иметь не более двух неподвижных точек.

Проективные (однородные) координаты точки X прямой AB относительно репера $\{ABE_3\}$ этой прямой определим как две первые проективные координаты этой точки относительно репера $\{ABCE\}$ плоскости, где точка C не принадлежит прямой AB и $E_3 = (CE) \cap (AB)$ (третья её координата будет нулевой).

Найдём формулы проективного преобразования прямой AB в проективных координатах. Пусть оно задано тремя парами точек $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $E_3 \rightarrow E'_3$, где $E'_3 = (CE') \cap (AB)$. Пусть $X(x_1 : x_2 : 0) \rightarrow X'(x'_1 : x'_2 : 0)$ и координаты определены в одном заданном репере $\{ABCE\}$ плоскости. По определению проективного преобразования прямой $(ABE_3X) = (A'B'E'_3X')$. Согласно формулам (I.18) связи проективных координат с двойными отношениями координаты точки X' относительно репера $\{A'B'C'E'\}$ совпадают с координатами точки C относительно репера $\{ABCE\}$.

Рассмотрим теперь координаты одной точки X' в двух реперах $\{ABCE\}$ и $\{A'B'C'E'\}$ плоскости. По формулам (I.3) замены проективной системы координат с учётом изменившейся роли штрихов в обозначениях переменных имеем (при сохранении остальных обозначений)

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + 0 x_3, \\ \rho x'_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + 0 x_3, \\ \rho x'_3 = 0 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2, \\ \rho x'_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2, \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для точек прямой AB формулы (II.1) и представляют собой искомые формулы заданного проективного преобразования этой прямой. Согласно этим формулам

$$A(1:0) \rightarrow A'(a_1:a_2), \quad B(0:1) \rightarrow B'(b_1:b_2), \quad E(1:1) \rightarrow E'((a_1+b_1):(a_2+b_2)).$$

Конструктивно проективное преобразование прямой может быть выполнено так. Пусть оно задано тремя парами точек $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ данной прямой. Сначала тройку ABC спроектируем из произвольного центра на некоторую прямую m в тройку $A_1B_1C_1$, а затем применим построение из п. 11.2 для троек $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ (рис. 14).

§13. Проективные инволюции прямой

13.1. Задание и координатные формулы. Напомним определение инволюции. Преобразование множества называется *инволюционным преобразованием* или *инволюцией*, если оно совпадает со своим обратным, и не является тождественным.

Теорема. Для того чтобы проективное преобразование прямой было инволюционным, необходимо и достаточно, чтобы на этой прямой имелась пара несовпадающих соответственных при данном преобразовании точек A и A' , отображающихся одна на другую.

Доказательство. Необходимость следует из определения инволюции. Докажем достаточность. Если при преобразовании f существует пара $A \leftrightarrow A'$ и $f(X) = X'$, то надо доказать, что $f(X') = X$ для любой точки X данной прямой. Пусть $f(X') = Y$. Тогда по определению проективного преобразования прямой $(AA'XX') = (A'AX'Y)$, а по свойству двойного отношения $(AA'XX') = (A'AX'X)$. Следовательно, $(A'AX'X) = (A'AX'Y)$, а это значит, что точки X и Y совпадают, что и нужно было доказать. $\square$

Следствие. Проективная инволюция прямой однозначно определяется заданием двух пар её соответственных точек.

Получим координатные формулы инволюции. Разрешив систему (II.1) относительно x_1 и x_2 , имеем

$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{\rho}x_1 = -b_2x'_1 + b_1x'_2, \\ -\frac{\Delta}{\rho}x_2 = a_2x'_1 - a_1x'_2. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Для того чтобы преобразования (II.1) и (II.2) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $a_1 = -b_2$. Сменив обозначения, получаем формулы проективной инволюции прямой:

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = ax_1 + bx_2, \\ \lambda x'_2 = cx_1 - ax_2, \end{cases} \quad a^2 + bc \neq 0. \quad (\text{II.3})$$

Заметим, что проективное преобразование (II.1) прямой является инволюцией тогда и только тогда, когда сумма $a_1 + b_2$ элементов главной диагонали его определителя Δ равняется нулю.

В частности, если в качестве базисных точек проективной системы координат на прямой принять пару соответственных точек инволюции, то мы получим $a = 0$ и формулы (II.3) примут вид

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = bx_2, \\ \lambda x'_2 = cx_1. \end{cases}$$

13.2. Неподвижные точки инволюции. Виды инволюций. Неподвижные точки инволюции (II.3) определяются системой

$$\begin{cases} \lambda x_1 = ax_1 + bx_2, \\ \lambda x_2 = cx_1 - ax_2, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} (a - \lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ cx_1 - (a + \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет ненулевые решения при характеристическом условии

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & -(a + \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{bc}.$$

Следовательно, если $bc > 0$, то существуют две неподвижные точки U и V инволюции, которая в этом случае называется *гиперболической инволюцией* прямой. При $bc < 0$ инволюция не имеет неподвижных точек и называется *эллиптической инволюцией*.

Теорема. *Две неподвижные точки гиперболической инволюции гармонически разделяют каждую пару её соответственных точек.*

Доказательство. В самом деле, пусть $A \leftrightarrow A'$ при гиперболической инволюции с неподвижными точками U и V . Тогда

$$(UVAA') = (UVA'A) = \frac{1}{(UVAA')},$$

откуда $(UVAA')^2 = 1$. Если $(UVAA') = 1$, то точки A и A' совпадают, чего быть не может (так как неподвижных точек не более двух). Поэтому $(UVAA') = -1$, что и утверждается теоремой. $\square$

Следствие. *Неподвижные точки U и V гиперболической инволюции полностью её определяют, так как для каждой точки X прямой UV её образ — точка X' образует с тремя данными гармоническую четвёрку и потому однозначно определяется.*

13.3. Вторая теорема Дезарга. *Произвольная прямая пересекает противоположные стороны полного четырёхвершинника в трёх парах соответственных точек одной инволюции.*

Доказательство. Пусть прямая m пересекает противоположные стороны полного четырёхвершинника $KLMN$ в точках A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 (рис. 18). Этими парами задаётся проективное преобразование прямой m . Докажем, что оно является инволюцией. Для этого достаточно убедиться, что согласно теореме п. 13.1

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1).$$

В соответствии с обозначениями рис. 18 имеем

$$AA_1BC \stackrel{K}{\wedge} PA_1ML \stackrel{N}{\wedge} AA_1C_1B_1.$$

Тогда $(AA_1BC) = (AA_1C_1B_1) = (A_1AB_1C_1)$, что и было необходимо получить. $\square$

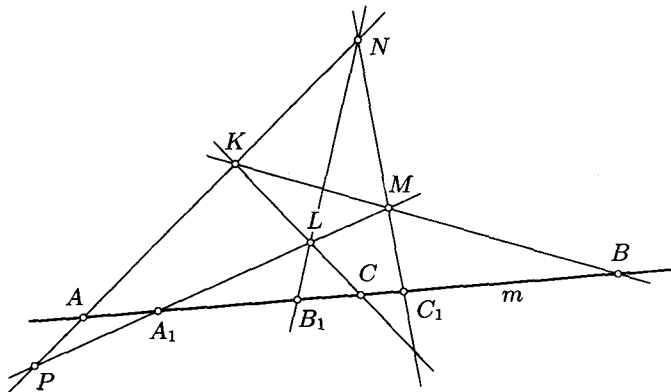


Рис. 18

Используем вторую теорему Дезарга для построения образа C_1 точки C при заданной инволюции парами соответственных точек $A \leftrightarrow A_1$ и $B \leftrightarrow B_1$. Для этого достаточно по данным точкам A, A_1, B, B_1, C построить нужный четырёхвершинник $KLMN$. Поступаем так. Через точки A и A_1 проводим пару произвольных прямых и пересекаем их третьей произвольной прямой, проходящей через точку C . По полученным точкам K и L строим прямые BK и B_1L , которые пересекут прямые A_1L и AK в точках M и N . Тогда прямая MN пересекает прямую AB в искомой точке C_1 .

§ 14. Проективные преобразования плоскости

14.1. Определение и задание проективных коллинеаций.

Преобразование плоскости, при котором каждая прямая плоскости отображается на прямую проективно (п. 11.2), называется *проективным преобразованием* (проективной коллинеацией) плоскости.

Из этого определения и теоремы из § 8 сразу следует, что при проективном преобразовании плоскости пучок прямых отображается на пучок прямых с сохранением двойного отношения каждой четвёрки прямых, т. е. отображается *проективно*.

Теорема. Любое преобразование плоскости, отображающее прямые на прямые и хотя бы одну из них отображающее проективно, является проективной коллинеацией.

Доказательство. Пусть коллинеация f отображает проективно прямую a на прямую a' и $f(m) = m'$. Установим между m и a перспективное соответствие φ : $\varphi(m) = a$. Тогда

$$m(Y) \bar{\wedge} a(X) \bar{\wedge} a'(X') \bar{\wedge} m'(Y'),$$

так что коллинеация f отображает m на m' проективно, т. е. $Y \bar{\wedge} Y'$, что и требовалось установить. $\square$

Лемма. Если при данном проективном преобразовании плоскости неподвижны стороны четырёхсторонника (или вершины четырёхвершинника), то оно является тождественным преобразованием.

Действительно, при данном преобразовании неподвижными будут шесть точек — вершин этого четырёхсторонника, расположенных по три на каждой стороне. Согласно следствию § 12 неподвижной оказывается каждая точка сторон четырёхсторонника. Если через произвольную точку M общего положения провести две прямые, то они будут неподвижны, а потому неподвижна и точка M их пересечения.

Проведя двойственные рассуждения, получим этот же результат для четырёхвершинника.

Теорема (о задании проективного преобразования). Существует единственное проективное преобразование плоскости, которое данные четыре точки A, B, C, D общего положения отображает на четыре наперёд заданные точки A', B', C', D' общего положения.

Доказательство. Пусть прямая общего положения пересекает стороны AB и AD в точках X и Y (рис. 19). Этой прямой соответствует прямая $X'Y'$, где $ABMX \bar{\wedge} A'B'M'X'$ и $ADNY \bar{\wedge} A'D'N'Y'$. Чтобы доказать, что отображение $(XY) \rightarrow (X'Y')$ есть проективная коллинеация,

необходимо показать, что пучку прямых с центром на прямой $X'Y'$ соответствует пучок прямых с центром на $X'Y'$. Отсюда будет следовать, что коллинеарные точки отображаются на коллинеарные точки. Чтобы

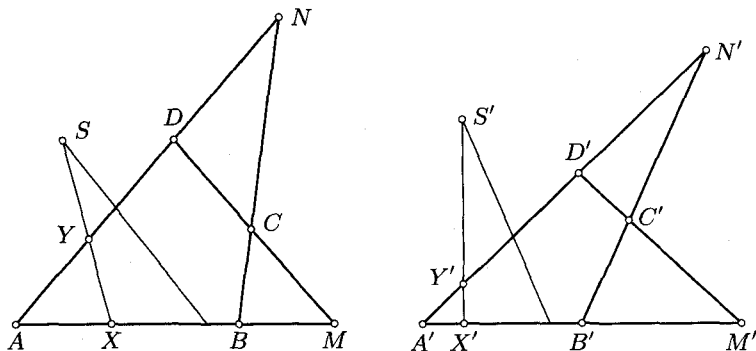


Рис. 19

доказать это, предположим, что прямая $X'Y'$ поворачивается в пучке S' так, что $X' \bar{\bar{A}} Y'$. Тогда на основании условия построения точек X' и Y' имеем:

$$X' \bar{\bar{A}} X \bar{\bar{A}} Y \bar{\bar{A}} Y'.$$

Поскольку точка A инвариантна при перспективном отображении $X \bar{\bar{A}} Y$, то точка A' должна быть инвариантной при проективном отображении $X' \bar{\bar{A}} Y'$. Согласно критерию из следствия 2 п. 11.2 это отображение также будет перспективным и прямая $X'Y'$ будет описывать пучок прямых, что и требовалось установить. Тем самым существование доказано.

Единственность проективного преобразования f непосредственно следует из леммы. $\square$

14.2. Координатные формулы проективного преобразования. Пусть на основании предыдущей теоремы проективное преобразование плоскости задано двумя четырёхвершинниками $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ отображается в точку $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, где координаты точек определяются относительно проективной системы $\Pi = \{ABCD\}$. Искомые формулы должны содержать зависимость между координатами точек M и M' в заданной системе Π . Для их получения рассмотрим дополнительно вторую проективную систему $\Pi' = \{A'B'C'D'\}$. В силу проективности заданного преобразования и связей (I.18) между проективными координатами точки и двойными отношениями точка M' в системе Π' будет иметь такие же координаты, что и точка M в системе Π .

Рассмотрим координаты точки M' в двух системах: $(x_1 : x_2 : x_3)$ в системе Π' и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ в системе Π . Тогда по формулам (I.3) замены системы координат с учётом изменившейся роли штрихов в обозначениях координат имеем

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3, \\ \rho x'_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3, \\ \rho x'_3 = a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

причём

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(обозначения координат базисных точек системы остались прежними).

Нетрудно проверить, что при условии (I.4) действительно

$$\begin{aligned} A(1, 0, 0) &\rightarrow A'(a_1 : a_2 : a_3), & B(0, 1, 0) &\rightarrow B'(b_1 : b_2 : b_3), \\ C(0, 0, 1) &\rightarrow C'(c_1 : c_2 : c_3), & D(1, 1, 1) &\rightarrow D'(d_1 : d_2 : d_3). \end{aligned}$$

Обратно, при заданной проективной системе координат формулы (II.4) задают преобразование плоскости $M(x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$. Оно будет проективным преобразованием. В самом деле, по аналогии с п.8.2 §8 ч. I нетрудно доказываться, что при этом преобразовании каждая прямая отображается на прямую. Формулы (II.4) формально совпадают с формулами перехода от одной системы координат к другой. Поэтому доказательство инвариантности двойного отношения четырёх точек прямой (п.6.2 §6) формально переносится на доказательство его инвариантности при рассматриваемом преобразовании по формулам (II.4).

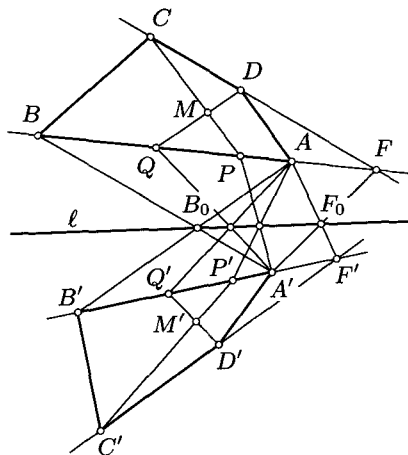


Рис. 20

14.3. Построение образа точки при коллинеации. Пусть проективное преобразование плоскости задано четырьмя парами точек $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$, $D \rightarrow D'$ и выбранная точка M не принадлежит сторонам четырёхвершинника $ABCD$ (рис. 20). Построение сводится

к двукратному применению способа, изложенного в п. 11.2. Точки $F = (AB) \cap (CD)$ и $F' = (A'B') \cap (C'D')$ являются соответственными при заданном преобразовании. Пусть

$$(CM) \cap (AB) = P.$$

Указанным способом строим образ P' точки P . Аналогично строится образ Q' точки $Q = (DM) \cap (AB)$. Так как $M = (CP) \cap (DQ)$, то

$$M' = (C'P') \cap (D'Q').$$

В случае, если точка M принадлежит одной из сторон четырёхвершинника $ABCD$, построение выполняется за один приём.

Следствие. *Проективное преобразование плоскости определяется заданием трёх пар соответственных точек и пары соответственных прямых.*

В самом деле, выполненное построение образа M' точки M не изменится, если вместо четырёхвершинников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ будут заданы соответственные треугольники BCF и $B'C'F'$ и соответственные прямые AD и $A'D'$ или же соответственные треугольники ADF и $A'D'F'$ и соответственные прямые BC и $B'C'$.

§ 15. Неподвижные точки коллинеации.

Гомология

15.1. Неподвижные точки. Пусть проективное преобразование f имеет формулы (II.4). Если в них положить $x'_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), то получим систему относительно координат x_i неподвижных точек преобразования:

$$\begin{cases} (a_1 - \rho)x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + (b_2 - \rho)x_2 + c_2x_3 = 0, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + (c_3 - \rho)x_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Поставленной задаче удовлетворяют лишь ненулевые решения этой системы, которые будут существовать тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \rho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \rho & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.6})$$

Уравнение (II.6) называется *характеристическим уравнением* проективного преобразования (II.4), его корни — *характеристическими числами* этого преобразования. Найдя их и подставив в систему (II.5)

вместо ρ , мы получим систему, содержащую не более двух независимых уравнений. Следовательно, каждому характеристическому числу соответствует по крайней мере одна неподвижная точка.

Так как характеристическое уравнение (II.6) имеет нечётную (третью) степень, то хотя бы один из его корней будет всегда действительным. Таким образом, *любое проективное преобразование плоскости имеет по крайней мере одну неподвижную точку*.

Отметим без доказательства, что всякое проективное преобразование плоскости имеет также хотя бы одну неподвижную (двойную) прямую.

15.2. Гомология проективной плоскости. Рассмотрим важный частный случай, когда система сводится к одному уравнению, задающему прямую, каждая точка которой неподвижна при данном преобразовании. Вот пример такого преобразования:

$$\begin{cases} \rho x'_1 = \alpha x_1, \\ \rho x'_2 = \alpha x_2, \\ \rho x'_3 = \beta x_3. \end{cases}$$

Здесь $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. Действительно, оно имеет характеристические числа $\rho_1 = \rho_2 = \alpha$, $\rho_3 = \beta$. При $\rho = \alpha$ система сводится к одному уравнению $(\beta - \alpha)x_3 = 0$, или $x_3 = 0$, а другие два обращаются в тождества. Следовательно, сторона A_1A_2 координатного треугольника является прямой неподвижных точек. При $\rho = \beta$ получаем ещё одну неподвижную точку $A_3(0, 0, 1)$.

Определение. Нетождественное проективное преобразование плоскости, имеющее прямую неподвижных точек, называется *гомологией*, а эта прямая — её *осью*.

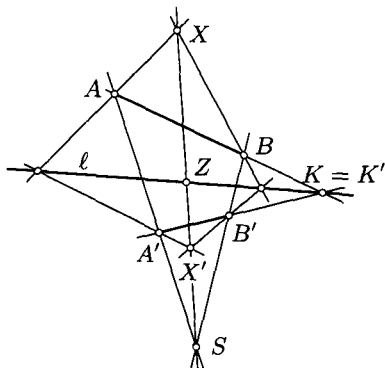


Рис. 21

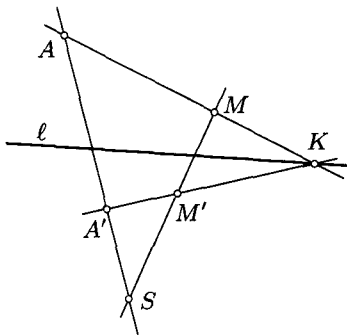


Рис. 22

Рассмотрим свойства гомологии.

Пусть при некоторой гомологии с осью ℓ точка A отображается на точку A' , точка B — на точку B' и $(AB) \cap \ell = K$ (рис. 21). По определению гомологии точка K неподвижна: $K' = K$. Поскольку гомология — преобразование проективное, то три коллинеарные точки A, B, K отображаются на три коллинеарные точки A', B', K' . Следовательно, *прямая AB пересекает свой образ $A'B'$ при гомологии на оси этой гомологии.*

Далее, пусть $(AA') \cap (BB') = S$. Докажем, что прямые XX' , определяемые парами соответственных точек, проходят через точку S . Образ X' точки X есть точка пересечения образов прямых AX и BX . Треугольники ABX и $A'B'X'$ удовлетворяют условию обратной теоремы Дезарга (считаем, что $X \notin (AB)$), согласно которой прямая XX' проходит через точку пересечения прямых AA' и BB' . Если $Y \in (AB)$, то, используя треугольники AXY и $A'X'Y'$, аналогично докажем, что прямая YY' проходит через S . Итак, *все прямые, соединяющие каждую точку плоскости со своим образом при гомологии, проходят через постоянную точку S , которую называют центром гомологии.*

Если $(XX') \cap \ell = Z$, то $Z' = Z$ и $(XZ) = (X'Z')$. Следовательно, каждая из прямых, определяемых парами соответственных точек при гомологии, является неподвижной при этой гомологии. Отсюда следует, что центр S гомологии есть неподвижная точка.

Итак, *каждая точка оси гомологии и её центр S — неподвижные точки этой гомологии. Ось гомологии и каждая прямая, проходящая через центр гомологии, — неподвижные прямые гомологии.*

Гомологию можно задать осью ℓ , центром S и парой соответственных точек A и A' (коллинеарных с центром). Действительно, тогда для каждой точки M плоскости однозначно строится её образ: $(AM) \cap \ell = K$, $(A'K) \cap (MS) = M'$ (рис. 22). В случае, когда $M \in (AA')$, надо сначала построить образ N' некоторой точки $N \notin (AA')$ и, используя пару точек N и N' , построить указанным способом образ точки M .

Гомологию, центр которой лежит на её оси, называют *элицией*.

15.3. Гомологии расширенной аффинной плоскости. В общем случае она не будет аффинным преобразованием, поскольку не сохраняет простое отношение трёх точек прямой. (См., например, точки A, M, K на рис. 22). Однако существуют частные виды гомологий аффинной плоскости, являющиеся аффинными преобразованиями — *аффинными гомологиями*. Если центр S гомологии — несобственная точка, т. е. прямые, каждая из которых соединяет точку плоскости со своим образом,

параллельны, то такая гомология является родством (рис. 23). Если ось ℓ гомологии — несобственная прямая, то каждая прямая плоскости параллельна своему образу. В этом случае гомология является гомотетией (рис. 24). В случае, когда центр и ось гомологии несобственные, гомология (эляция) является переносом (рис. 25).

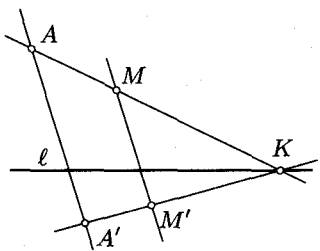


Рис. 23

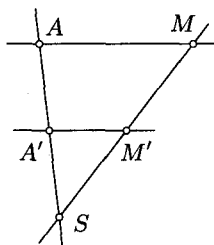


Рис. 24

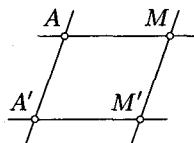


Рис. 25

15.4. Гармоническая гомология имеет своей основой следующее утверждение.

Теорема 1. Любое инволюционное проективное преобразование плоскости является гомологией.

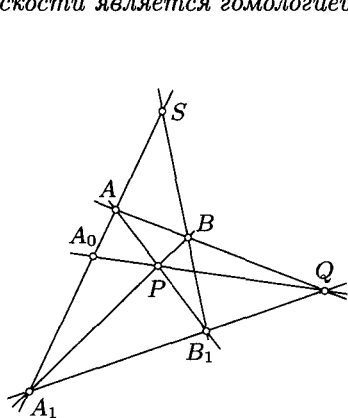


Рис. 26

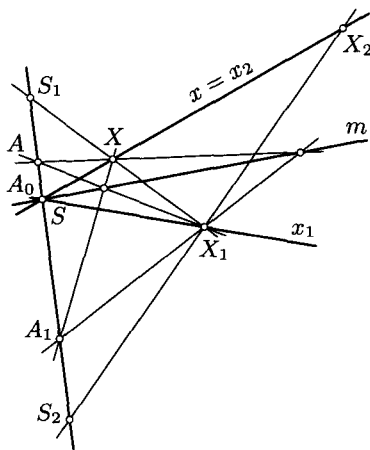


Рис. 27

Доказательство. Если f — проективная инволюция плоскости, то по определению инволюции $f^{-1} = f$ и поэтому для её задания достаточно указания двух пар соответственных точек: $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, так как тогда имеем ещё две пары: $A_1 \rightarrow A$, $B_1 \rightarrow B$. Прямые AA_1 и BB_1 неподвижны, поэтому неподвижна точка S их пересечения. Поскольку $(AB) \leftrightarrow (A_1B_1)$ и $(AB_1) \leftrightarrow (A_1B)$, то неподвижны точки P и Q пересечения этих прямых (рис. 26). Кроме того, две неподвижные прямые

AA_1 и PQ пересекаются в неподвижной точке A_0 . Три точки A_0, P, Q прямой неподвижны, значит, будет неподвижна каждая точка этой прямой. Итак, заданная проективная инволюция f плоскости является гомологией с осью PQ и центром S . Эта гомология частного вида и называется *инволюционной* (или *гармонической*) гомологией. $\square$

Следствие. На каждой неподвижной прямой (SA) , содержащей центр гармонической гомологии, эта гомология индуцирует гиперболическую инволюцию $A \leftrightarrow A_1$, неподвижными точками которой являются центр S и точка A_0 пересечения прямой (SA) с осью гомологии.

Теорема 2. Композиция двух гармонических гомологий с общей осью является элацией.

Доказательство. Сначала убедимся, что композиция двух гомологий γ_1 и γ_2 с общей осью m есть гомология γ с той же осью и центры S_1, S_2 и S коллинеарны. Действительно, если точки прямой m неподвижны при гомологиях γ_1 и γ_2 , то они неподвижны и при их композиции γ . Аналогично прямая S_1S_2 неподвижна при γ . Если точки S_1 и S_2 не принадлежат общей оси гомологий, то неподвижная прямая S_1S_2 проходит через центр S гомологии γ .

Пусть теперь обе гомологии являются гармоническими и $m \cap (S_1S_2) = A_0$ (рис. 27). Тогда A_0 — неподвижная точка композиции γ . Докажем, что если для произвольной точки X выполнены условия $\gamma_1(X) = X_1$ и $\gamma_2(X_1) = X_2$, то прямые $(A_0X) = x$ и $(A_0X_2) = x_2$ совпадают. На основании предыдущего следствия прямые x и A_0X_1 гармонически разделяют пару прямых S_1S_2 и m . На том же основании прямые A_0X_1 и x_2 гармонически разделяют ту же пару прямых S_1S_2 и m . Но тройкой S_1S_2, m, A_0X_1 четвёртая прямая x_2 определяется однозначно, и, таким образом, $x_2 = x$. Так как соответственные точки X и X_2 композиции γ коллинеарны с точкой A_0 , то центром S этой композиции и является точка A_0 .

Согласно определению (п. 15.2) гомология, центр которой лежит на оси гомологии, есть элация. $\square$

§16. Неподвижные прямые коллинеации.

Представление коллинеации композицией гомологий

Мы называем прямую g *неподвижной прямой* коллинеации f , если $f(g) = g$. При этом следует различать два случая.

В одном случае неподвижна каждая точка прямой g — прямою то-
чечно неподвижна (прямая неподвижных точек), например ось
гомологии.

В другом случае, если f не является тождественным преобразованием, неподвижная прямая g содержит не более двух неподвижных точек. Примером такой прямой является любая прямая, содержащая центр гомологии. В этом случае неподвижную прямую часто называют также *инвариантной* прямой, или *двойной* прямой коллинеации. На инвариантной прямой коллинеация плоскости индуцирует проективное преобразование, отображающее каждую точку $M = m \cap g$ на точку $M' = m' \cap g$, где m и m' — любые две соответственные прямые коллинеации.

Коллинеация f может быть задана двумя соответственными трёхвершинниками ABC и $A'B'C'$ и неподвижной (инвариантной) прямой g , поскольку недостающей парой соответственных точек будет служить любая из трёх пар

$$(AB) \cap g \rightarrow (A'B') \cap g,$$

$$(BC) \cap g \rightarrow (B'C') \cap g,$$

$$(CA) \cap g \rightarrow (C'A') \cap g.$$

16.1. Существование неподвижной прямой коллинеации.

Пусть коллинеация f задана формулами (II.4) и прямая g' имеет уравнение

$$u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 = 0. \quad (\text{II.7})$$

Тогда её прообраз g должен иметь уравнение

$$u_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3) + u_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3) + u_3(a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3) = 0. \quad (\text{II.8})$$

Чтобы прямая g была неподвижной, необходимо и достаточно, чтобы соответственные коэффициенты уравнений (II.7) и (II.8) были пропорциональны:

$$\begin{cases} u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = \lambda u_1, \\ u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = \lambda u_2, \\ u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3 = \lambda u_3. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Эта система имеет ненулевое решение $(u_1 : u_2 : u_3)$ при характеристическом условии

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{II.10})$$

которое, очевидно, совпадает с характеристическим уравнением (II.6) коллинеации f (при равносильной взаимной замене строк и столбцов определителя).

Как известно, уравнение нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень, значит, существует по крайней мере одно действительное число λ , при котором система (II.9) даёт искомые коэффициенты u_i неподвижной прямой g коллинеации f .

Но при этом же значении $\lambda = \rho$ из системы (II.5) находятся координаты x_i неподвижной точки T коллинеации f . Неподвижная прямая g и неподвижная точка T называются *ассоциированной парой* неподвижных элементов коллинеации f . Поскольку характеристическое уравнение (II.10) может иметь не более трёх действительных корней, то коллинеация f может иметь не более трёх ассоциированных пар неподвижных элементов.

Неподвижные точки коллинеации, очевидно, являются точками пересечения неподвижных прямых. По числу неподвижных точек и их взаимному расположению классифицируются коллинеации плоскости; см. [2, с. 210–215].

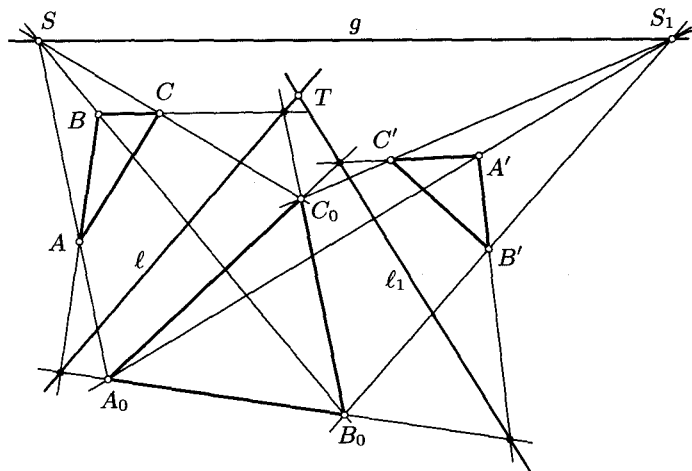


Рис. 28

16.2. Представление коллинеации плоскости композицией двух гомотетий. Пусть коллинеация f плоскости задана парой соответственных трёхвершинников ABC и $A'B'C'$ и неподвижной прямой g . Возьмём на прямой g две произвольные точки S и S_1 (рис. 28). Построим точки $A_0 = (SA) \cap (S_1A')$, $B_0 = (SB) \cap (S_1B')$, $C_0 = (SC) \cap (S_1C')$. Точки S и S_1 прямой g всегда можно выбрать так, чтобы точки A_0, B_0, C_0 были неколлинеарны. Тогда парами точек $A \rightarrow A_0, B \rightarrow B_0, C \rightarrow C_0$ определяется гомотетия γ с центром S и осью ℓ , а парами $A_0 \rightarrow A',$

$B_0 \rightarrow B'$, $C_0 \rightarrow C'$ определяется гомология γ_1 с центром S_1 и осью ℓ_1 . Так как прямая g — общая неподвижная прямая этих гомологий γ и γ_1 , то она будет и неподвижной прямой их композиции $\gamma_1\gamma$: $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$. Следовательно, $f = \gamma_1\gamma$.

Ясно, что такое представление может быть осуществлено бесконечно многими способами в зависимости от выбора точек S и S_1 .

Следствие. Точка $T = \ell \cap \ell_1$ есть неподвижная точка коллинеации f . Она не зависит от представления $f = \gamma_1\gamma$, так как определяется формулами коллинеации и выбранным корнем λ характеристического уравнения.

Таким образом, представление коллинеации плоскости композицией двух гомологий позволяет не только построить образ любой точки при коллинеации проще обычного способа, но и найти её неподвижную точку T .

Обратно, если даны два соответственных трёхвершинника ABC и $A'B'C'$ и неподвижная точка T коллинеации f , то, проведя через T две произвольные прямые ℓ и ℓ_1 , можно построить центры S и S_1 гомологий γ и γ_1 , а значит, и неподвижную прямую $g = (SS_1)$.

§17. Проективная геометрия с групповой точки зрения

Возвратимся к §14 первой части этой книги, в котором изложена сущность геометрии в определении её Ф. Клейном, классиком геометрии, как теории инвариантов некоторой группы преобразований (1872). Там представлены аффинная и евклидова геометрии в свете Эрлангенской Программы Клейна и связь между этими геометриями.

Теперь рассмотрим с групповой точки зрения геометрию проективной плоскости, содержание которой было уже изложено в определённой степени подробности в предыдущих параграфах.

Теорема. Множество всех проективных преобразований плоскости является группой.

Доказательство. Если f_1 и f_2 — проективные преобразования плоскости, то каждое из них всякую прямую плоскости проективно отображает на прямую. Поэтому и преобразование $f = f_2 \circ f_1$ всякую прямую проективно отображает на прямую. Следовательно, преобразование f проективно. Кроме того, если преобразование g проективное, то обратное ему преобразование g^{-1} также проективное, так как проективно отображает всякую прямую на прямую. $\square$

Группа проективных преобразований носит название *проективной группы*.

Со времен Клейна групповая точка зрения на геометрию стала главенствующей. Геометрия, порожаемая данной группой преобразований, чаще всего носит то же название, что и порождающая её группа. В частности, проективная группа порождает проективную геометрию.

Определение. *Проективной геометрией* называется теория инвариантов проективной группы преобразований.

Основным инвариантом проективной группы преобразований является коллинеарность точек — отображение прямой на прямую и, следовательно, — инцидентность точки и прямой. На первый взгляд может показаться, что из одного такого инварианта вряд ли можно вывести какую-либо содержательную теорию. Однако это не так. Проективная геометрия как теория проективных инвариантов богата по содержанию.

Инварианты проективной группы называют также *проективными свойствами* фигур. Объектами проективной геометрии служат фигуры, характеристические свойства которых являются проективными. Их называют *проективными фигурами*. Иначе и грубо говоря, фигура называется проективной (т. е. представляет собой объект проективной геометрии), если её образом при всяком проективном преобразовании является фигура того же названия.

Проективная прямая замкнута (§9), а поэтому замкнута и сама проективная плоскость. В проективной плоскости отсутствует понятие параллельности прямых. Следовательно, проективной геометрии чужды и все понятия, связанные с параллельностью прямых.

Важнейшим понятием проективной геометрии является единственный числовой инвариант проективных преобразований — двойное отношение четырёх точек прямой и двойное отношение четырёх прямых пучка.

В содержание проективной геометрии входят лишь такие теоремы, которые выражают проективные и только проективные свойства проективных фигур, как, скажем, теорема Дезарга и теорема Паппа (§11).

Понятие «равенства» фигур в проективной геометрии имеет свой особый смысл, обозначаемый термином «проективная эквивалентность» фигур.

Две фигуры называются *проективно эквивалентными*, если существует хотя бы одно проективное преобразование, отображающее одну из этих фигур на другую.

По теореме о задании проективного преобразования плоскости (§14) проективно эквивалентны любые два четырёхвершинника (четырёхсторонника). Проективно эквивалентны также и любые два трёхсторонника (трёхвершинника), так как существует бесконечное множество проективных преобразований, каждое из которых отображает один трёхвершинник на другой: четвёртая пара соответственных точек выбирается произвольно. По этой же причине проективно эквивалентны любые две пары точек и любые две прямые. Однако два произвольных пятивершинника не будут проективно эквивалентными: четырьмя парами соответственных точек проективное преобразование задаётся, а точки пятой пары могут оказаться соответственными при этом преобразовании разве лишь случайно.

Отношение проективной эквивалентности фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Проективная эквивалентность фигур — понятие, аналогичное понятию конгруэнтных фигур в геометрии группы движений (перемещений) и аналогичное понятию аффинно эквивалентных фигур в аффинной геометрии.

Переходя к вопросу о связи между проективной и аффинной геометриями, напомним читателю об общей связи между геометрией группы G и геометрией её подгруппы H (§14): геометрия группы G (G -геометрия) является частью геометрии её подгруппы H (H -геометрии). Однако для проективной и аффинной геометрий непосредственный вывод на основании этой общей зависимости будет некорректным, поскольку «поле действия» проективной группы и «поле действия» аффинной группы не совпадают: проективная плоскость не идентична аффинной плоскости. Приходится рассматривать расширенную аффинную плоскость и принять дополнительное условие для аффинных преобразований.

Доопределим аффинные преобразования аффинной плоскости на расширенную аффинную плоскость дополнительным соглашением ставить в соответствие несобственной точке каждой прямой несобственную точку образа этой прямой. Тогда, очевидно, все аффинные преобразования расширенной аффинной плоскости будут проективными. Но множество проективных преобразований шире множества аффинных преобразований. Подтверждающим это примером служит гомотопия. Следовательно, *аффинная группа является собственной подгруппой проективной группы преобразований.*

Теперь ссылка на общую связь будет правомерной. Таким образом, *аффинная геометрия включает в себя как составную часть проективную геометрию.* Все проективные свойства являются аффинными, но не все аффинные свойства проективны.

Задачи и упражнения

II.1. Проективное преобразование прямой задано тремя парами соответственных точек

$$A(0:1) \rightarrow A'(1:2), \quad B(2:-1) \rightarrow B'(1:0), \quad C(1:-2) \rightarrow C'(0:1).$$

Найдите формулы этого преобразования.

II.2. Проективное преобразование прямой задано двумя неподвижными точками X и Y и парой точек $A \rightarrow A'$. Постройте образ данной точки M при этом преобразовании.

II.3. Инволюция прямой задана двумя парами точек

$$A(1:1) \leftrightarrow A'(5:-3), \quad B(1:0) \leftrightarrow B'(2:-1).$$

Напишите формулы этой инволюции.

II.4. Докажите, что в эллиптической инволюции прямой для каждой пары соответственных точек существует другая пара, разделяющая гармонически первую пару.

II.5. Инволюция прямой задана двумя парами точек A и A' , B и B' . Одной линейкой постройте для данной точки C её образ C' .

II.6. Напишите формулы проективного преобразования плоскости, которое базисные точки системы координат $\{ABCE\}$ переводит соответственно в точки $(2:4:8)$, $(2:-1:2)$, $(3:2:5)$, $(2:5:7)$.

II.7. Проективное преобразование плоскости задано парами соответственных точек

$$A(2:1:1) \rightarrow A'(2:1:5), \quad B(1:2:1) \rightarrow B'(2:-1:3), \\ C(1:-1:1) \rightarrow C'(-1:2:3), \quad D(-1:1:1) \rightarrow D'(1:2:1).$$

Найдите формулы этого преобразования.

II.8. Найдите образ и прообраз точки $(-3:2:1)$ при проективном преобразовании

$$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ \rho x'_2 = -x_1 + x_2 - 3x_3, \\ \rho x'_3 = 2x_1 - 5x_2 - x_3. \end{cases}$$

Найдите также образ и прообраз прямой $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ при этом преобразовании.

II.9. Найдите неподвижные точки и неподвижные прямые следующего преобразования:

$$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 + x_2, \\ \rho x'_2 = 8x_1 + 3x_2, \\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

II.10. , Докажите, что проективное преобразование, переводящее точки $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$, $E(1:1:1)$ соответственно в точки E , C , B , A , есть гомотопия.

II.11. Гомотопия расширенной аффинной плоскости задана центром, осью и парой соответственных точек. Постройте образ несобственной прямой при этой гомотопии.

II.12. Какие коллинеации заданы следующими формулами:

- а) $\rho x'_1 = x_1$, $\rho x'_2 = x_2$, $\rho x'_3 = cx_3$;
 б) $\rho x'_1 = x_1 + c_1x_3$, $\rho x'_2 = x_2 + c_2x_3$, $\rho x'_3 = x_3$?

II.13. При каком условии два пятивершинника проективно эквивалентны?

II.14. Какой вид принимает теорема из п.15.4 о композиции двух гармонических гомотопий с общей осью для расширенной аффинной плоскости?

II.15. Докажите, что композиция трёх гармонических гомотопий, центры которых совпадают с вершинами, а оси — со сторонами некоторого треугольника, есть тождественное преобразование.

II.16. Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотопичны с центром S гомотопии и треугольник ABC гомотопичен треугольнику $B_1C_1A_1$ с центром S_1 , то треугольник ABC также гомотопичен треугольнику $C_1A_1B_1$ (тройки вершин треугольников упорядочены!). Докажите.

II.17. В какое предложение аффинной геометрии перейдёт утверждение предыдущей задачи, если прямая AB является несобственной?

Проективная теория линий второго порядка

§18. Проективное определение линии второго порядка

18.1. Определение и характеристическое свойство линии второго порядка. Пусть задано проективное преобразование плоскости. Геометрическое место точек пересечения прямых данного пучка S с их образами при этом преобразовании (соответственными прямыми проективного пучка S') называется *линией второго порядка*, порождённой проективными пучками S и S' (рис. 29).

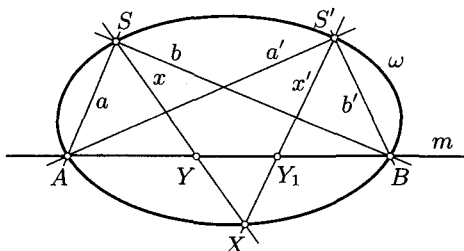


Рис. 29

Теорема. Произвольная прямая имеет с кривой второго порядка не более двух общих точек.

Доказательство. Пусть прямая m не содержит центры S и S' пучков, порождающих кривую ω . Если x и x' — соответственные прямые этих пучков, то множество точек $Y = x \cap m$ прямой m отображается на множество точек $Y_1 = x' \cap m$ этой прямой преобразованием $\varphi: Y \rightarrow Y_1$, которое является проективным преобразованием:

$$m(Y) \bar{\wedge} S(x) \bar{\wedge} S'(x') \bar{\wedge} m(Y_1).$$

Если точка A неподвижна при этом преобразовании, то согласно определению она принадлежит кривой ω . Обратно, если A — общая точка кривой ω и прямой m , то она неподвижна при преобразовании φ , так как через неё проходят две соответственные прямые пучков S и S' .

Но проективное преобразование прямой имеет не более двух неподвижных точек (§12). Доказательство закончено. $\square$

Этим характеристическим свойством кривой второго порядка и оправдывается её проективное определение.

Следствие. *Центр проективных пучков, порождающих кривую второго порядка, принадлежат этой кривой.*

Действительно, общую прямую SS' пучков обозначим через p , считая её прямой пучка S . Тогда в пучке S' ей соответствует прямая p' . Если считать прямую $S'S = q'$ принадлежащей пучку S' , то в пучке S ей будет соответствовать прямая q . Следовательно, $S = q \cap q'$ и $S' = p \cap p'$. Согласно определению точки S и S' принадлежат кривой ω (рис. 30).

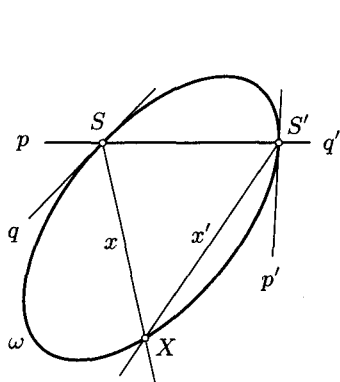


Рис. 30

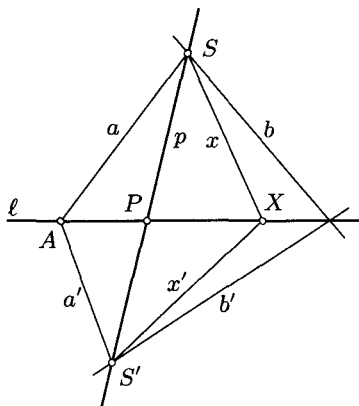


Рис. 31

18.2. Распадение линии второго порядка на пару прямых.

Рассмотрим частный случай проективных пучков, когда они перспективны. Пусть прямая ℓ — ось перспективности этих пучков (рис. 31). Тогда она является геометрическим местом точек пересечения соответственных прямых пучков S и S' . Поэтому согласно определению прямая ℓ должна принадлежать линии ω . Другой прямой, составляющей совместно с прямой ℓ линию ω , является общая прямая p данных пучков. В самом деле, если $\ell \cap p = P$, то прямой SP первого пучка соответствует прямая $S'P$ второго пучка (согласно критерию перспективности пучков), т. е. каждая точка прямой p принадлежит как прямой SP , так и прямой $S'P$. Поэтому она является общей точкой пары соответственных прямых пучков и должна принадлежать линии ω .

Таким образом, $\omega = \ell \cup p$.

§19. Основная теорема проективной теории линий второго порядка

В определении линии второго порядка центры S и S' проективных пучков играют особую роль по сравнению с остальными точками кривой. В действительности такого отличия нет.

Теорема. Точки кривой второго порядка проектируются из любых двух её точек двумя проективными пучками прямых.

Доказательство. Пусть кривая ω порождена двумя проективными пучками с центрами S_1 и S_2 и A, B, C, D — произвольные четыре точки этой кривой (рис. 32). Рассмотрим точки $X_1 = (S_1C) \cap (AD)$ и $X_2 = (S_2C) \cap (BD)$. Если точка C описывает кривую ω , то точки X_1 и X_2 описывают соответственно прямые AD и BD и находятся в проективном соответствии этих прямых:

$$AD(X_1) \bar{\wedge} S_1(S_1C) \bar{\wedge} S_2(S_2C) \bar{\wedge} BD(X_2).$$

Поскольку в этом соответствии $X_1 \bar{\wedge} X_2$ точка D инвариантна, то оно перспективно: $X_1 \bar{\wedge} X_2$. Найдём центр перспективности отображения $X_1 \rightarrow X_2$. Заметим, что $A \rightarrow A_2 = (S_2A) \cap (BD)$ и $(S_1B) \cap (AD) = B_1 \rightarrow B$. Поэтому центром перспективности этого отображения будет точка M пересечения прямых AA_2 и B_1B , т.е. прямых AS_2 и BS_1 . Следовательно, точки X_1, X_2 и M коллинеарны. При этом точка M зависит только от точек S_1, S_2, A и B и не зависит от точек C и D .

Рассмотрим теперь два пучка прямых с центрами A и B и соответственными прямыми AD и BD . Докажем, что эти пучки проективны. Фиксируем точку C и считаем переменной точку D кривой ω .

Тогда точки X_1 и X_2 будут перемещаться по прямым CS_1 и CS_2 соответственно, и при этом

$$\text{пучок } A(AD) \bar{\wedge} \text{ прямая } CS_1(X_1) \stackrel{M}{\bar{\wedge}} \text{ прямая } CS_2(X_2) \bar{\wedge} \text{ пучок } B(BD),$$

поскольку прямая X_1X_2 проходит через M независимо от переменной точки D . Следовательно, пучки $A(AD)$ и $B(BD)$ проективны. Так как центры A и B этих пучков — произвольные точки кривой ω , то доказательство закончено. $\square$

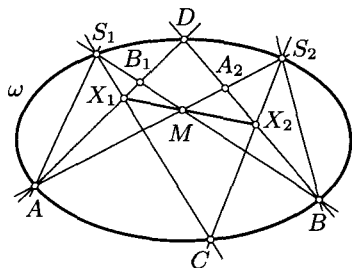


Рис. 32

Следствие 1. *Кривая второго порядка полностью определяется своими пятью точками.*

В самом деле, любые две из них могут быть приняты за центры пучков, проективное соответствие между которыми задаётся тремя парами прямых, пересекающихся соответственно в трёх остальных точках.

Следствие 2. *В каждой точке кривой второго порядка существует касательная прямая к этой кривой.*

Воспользуемся общепринятым определением касательной к кривой и дадим для него проективную интерпретацию. Пусть точка $X \in \omega$ стремится по кривой ω к точке S (рис. 29). Тогда предельное положение прямой $x = (SX)$ есть по определению касательная к кривой ω в точке S . С другой стороны, в этом случае соответственная прямая $x' = (S'X)$ стремится к общей прямой $S'S$ пучков, порождающих кривую ω . Таким образом, касательной к кривой второго порядка в её точке S является прямая q пучка S , соответственная общей прямой $S'S$ в проективном соответствии пучков, порождающих кривую ω . То же самое верно и для прямой p' пучка S' , соответствующей общей прямой SS' в проективном соответствии этих пучков.

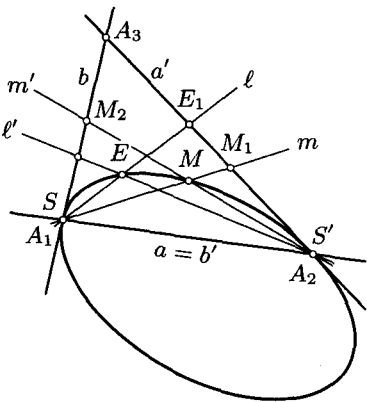


Рис. 33

На основании доказанной теоремы за центры пучков, порождающих кривую второго порядка, могут быть приняты любые две её точки. Это значит, что в каждой точке кривой существует касательная к ней.

§ 20. Уравнение линии второго порядка в проективных координатах

Пусть кривая второго порядка порождена проективными пучками S и S' . Выберем проективную систему координат $\{A_1A_2A_3E\}$, положив $A_1 = S$, $A_2 = S'$ (рис. 33). Прямую A_1A_2 пучка S обозначим через a . Пусть $a' \neq a$. Прямую A_2A_1 пучка S' обозначим через b' . Её прообразом в пучке S является некоторая прямая $b \neq b'$. Пусть $a' \cap b = A_3$, $f(\ell) = \ell'$ и $\ell \cap \ell' = E$, где ℓ — фиксированная прямая пучка S , отличная от прямых a и b . Найдём зависимость между проективными координатами x_1 , x_2 ,

x_3 точки M в проективной системе $\{A_1 A_2 A_3 E\}$. По свойству двойного отношения четырёх прямых пучка

$$(ablm) = (a'b'\ell'm'),$$

и, кроме того,

$$(ablm) = (A_2 A_3 E_1 M_1), \quad (a'b'\ell'm') = (A_3 A_1 E_2 M_2).$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_1 &= \ell \cap (A_2 A_3), & M_1 &= m \cap (A_2 A_3), \\ E_2 &= \ell' \cap (A_1 A_3), & M_2 &= m' \cap (A_1 A_3). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(A_2 A_3 E_1 M_1) = (A_3 A_1 E_2 M_2). \quad (\text{III.1})$$

По формулам (I.18) получаем $(A_2 A_3 E_1 M_1) = \frac{x_2}{x_3}$, $(A_3 A_1 E_2 M_2) = \frac{x_3}{x_1}$. На основании соотношения (III.1) имеем

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}. \quad (\text{III.2})$$

Здесь пока считаем, что $m \neq a$, поэтому $x_3 \neq 0$, а из формулы (III.2) следует, что $x_1 \neq 0$. Уравнение (III.2) запишем в виде

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0. \quad (\text{III.3})$$

Итак, все точки $M = m \cap m'$, отличные от A_1 и A_2 , принадлежат линии второго порядка с уравнением (III.3). Так как $A_1 = b \cap b'$ и $A_2 = a \cap a'$, то эти точки принадлежат рассматриваемому множеству. С другой стороны, их координаты удовлетворяют этому уравнению.

Если линия второго порядка представляет собой объединение прямых $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ и $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$, то её уравнение запишется так:

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3) = 0,$$

а в развёрнутом виде —

$$\begin{aligned} u_1 v_1 x_1^2 + u_2 v_2 x_2^2 + u_3 v_3 x_3^2 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) x_1 x_2 + \\ + (u_2 v_3 + u_3 v_2) x_2 x_3 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) x_1 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, любая кривая второго порядка имеет в проективных координатах однородное уравнение второй степени

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0, \quad (\text{III.4})$$

в котором $a_{ij} = a_{ji}$. При обычном, непроективном, изложении теории кривая второго порядка этим уравнением и определяется.

Кривая второго порядка, заданная уравнением (III.4), распадается на пару прямых при характеристическом условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(см. § 22 первой части этой книги).

Уравнение образа кривой (III.3) при проективном преобразовании (II.4) имеет вид (III.4).

§ 21. Теорема Паскаля и её применение

Известный французский физик и математик Блез Паскаль в шестнадцатилетнем возрасте написал свой первый труд «Опыт исследования конических сечений» (1639), в котором содержится знаменитая теорема о вписанном в кривую второго порядка шестиугольнике.

21.1. Аналитическое доказательство теоремы Паскаля. Возьмём кривую второго порядка и на ней произвольно шесть точек в последовательности $A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3$ (рис. 34). Соединив эти точки прямыми в указанной последовательности, получим шестиугольник, вписанный в кривую. Назовём *противоположными сторонами* этого шестиугольника такие две стороны, которые в заданном порядке отделяются друг от друга двумя сторонами. Противоположными будут, следовательно, стороны A_1B_2 и A_2B_1 , A_2B_3 и A_3B_2 , A_3B_1 и A_1B_3 .

Теорема Паскаля. Точки пересечения противоположных сторон произвольного шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, лежат на одной прямой.

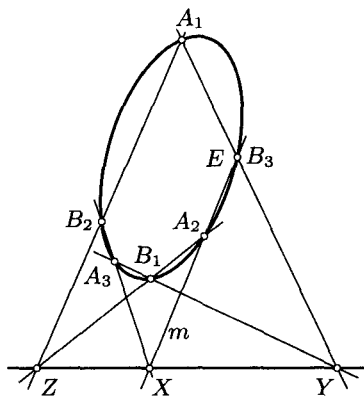


Рис. 34

Указанная в теореме прямая называется *прямой Паскаля* вписанного шестиугольника.

Доказательство. Приведём доказательство для невырожденной кривой. Точку B_3 примем за единичную точку E проективной системы координат $\{A_1A_2A_3E\}$. Подставляя координаты точек $A_1, A_2,$

A_3, E в уравнение кривой $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$, получаем $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ и $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$. Поэтому уравнение кривой в других обозначениях коэффициентов принимает вид

$$ax_2x_3 + bx_1x_3 + cx_1x_2 = 0, \quad (\text{III.5})$$

где $a + b + c = 0$. Так как точки $B_1(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ и $B_2(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ лежат на кривой (III.5), то получаем

$$\begin{cases} a(\alpha_2\alpha_3) + b(\alpha_1\alpha_3) + c(\alpha_1\alpha_2) = 0, \\ a(\beta_2\beta_3) + b(\beta_1\beta_3) + c(\beta_1\beta_2) = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Поскольку a, b, c не могут быть равными нулю одновременно, то определитель линейной однородной системы (III.6) относительно a, b, c необходимо равняется нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2 \\ \beta_2\beta_3 & \beta_1\beta_3 & \beta_1\beta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{III.7})$$

Пусть $(A_2B_3) \cap (A_3B_2) = X$, $(A_1B_3) \cap (A_3B_1) = Y$, $(A_1B_2) \cap (A_2B_1) = Z$. Найдём координаты точек X, Y, Z . Для этого составим уравнения указанных прямых по двум точкам:

$$\begin{array}{ll} (A_2B_3) & x_1 - x_3 = 0, \\ (A_1B_3) & x_2 - x_3 = 0, \\ (A_1B_2) & \beta_3x_2 - \beta_2x_3 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (A_3B_2) & \beta_2x_1 - \beta_1x_2 = 0, \\ (A_3B_1) & \alpha_2x_1 - \alpha_1x_2 = 0, \\ (A_2B_1) & \alpha_3x_1 - \alpha_1x_3 = 0. \end{array}$$

Отсюда решением соответствующих систем уравнений находим координаты точек X, Y, Z . Определитель

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1\beta_3 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{III.8})$$

составленный из этих координат (по строкам), равен определителю (III.7), в чём можно легко убедиться непосредственной проверкой. Равенство нулю определителя (III.8) и доказывает коллинеарность точек X, Y, Z . $\square$

Обратная теорема Паскаля. Если точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой, то его вершины принадлежат одной кривой второго порядка.

Доказательство. При выбранной системе координат равенство (III.7) является необходимым и достаточным условием принадлеж-

ности шести точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ одной кривой второго порядка. Равенство нулю определителя (III.8) эквивалентно равенству (III.7). $\square$

Теорема Паскаля имеет место и для вырожденной кривой и была известна гораздо ранее. Это — доказанная в п. 11.3 теорема Паппа.

Примечание. Другое доказательство теоремы Паскаля было уже попутно получено при доказательстве основной теоремы (§ 19). Там было доказано, что точки X_1, X_2, M лежат на одной прямой (рис. 32). Но эти точки являются точками пересечения противоположных сторон шестивершинника S_1CS_2ADB с вершинами на кривой второго порядка.

Теорема Паскаля показывает, что шесть точек кривой второго порядка зависимы, и даёт способ построения точки кривой по заданным пяти её точкам. Пусть, например, даны точки A_1, B_2, A_3, B_1, A_2 и надо построить какую-нибудь шестую точку B_3 кривой. Для этого строим $Z = (A_1B_2) \cap (A_2B_1)$, выбираем произвольную прямую m , проходящую через A_2 , и находим точку X её пересечения с прямой B_2A_3 . Далее получаем $Y = (A_3B_1) \cap (XZ)$ и $B_3 = (A_2X) \cap (A_1Y)$. Каждое новое положение прямой m приводит к построению новой точки кривой.

21.2. Теорема Паскаля для вырожденных шестиугольников. Вершины шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, могут (в частности, по две) совпадать, и поэтому шестиугольник может вырождаться в пятиугольник, четырёхугольник и треугольник. Теорема Паскаля сохраняется и для этих случаев, при этом сторона шестиугольника, соединяющая две совпавшие вершины, становится касательной к линии второго порядка в двойной вершине. Для сохранения единообразия вершины шестиугольника обозначим цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно их номерам в выбранной последовательности вершин. Пусть $(12) \cap (45) = X$, $(23) \cap (56) = Y$, $(34) \cap (61) = Z$.

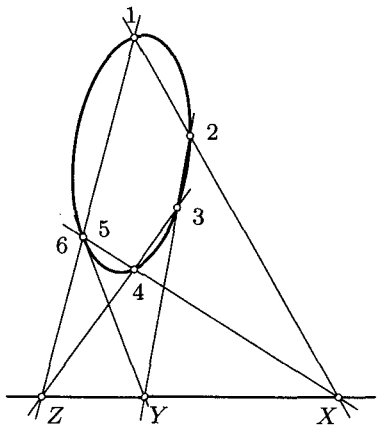


Рис. 35

1. Если вершины 5 и 6 совпадают, то получаем пятиугольник, для которого теорема Паскаля будет формулироваться так: во всяком пятиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, точки (X, Z) пересечения несмежных сторон в двух парах и точка (Y) пересечения пятой стороны с касательной в противоположной вершине лежат на одной прямой (рис. 35).

Это утверждение даёт способ построения касательной к кривой в данной её точке. В самом деле, достаточно взять ещё какие-нибудь четыре точки кривой и построить прямую Паскаля для полученного пятиугольника по двум точкам (X, Z) . Точка пересечения (Y) этой прямой с оставшейся стороной пятиугольника определяет искомую касательную.

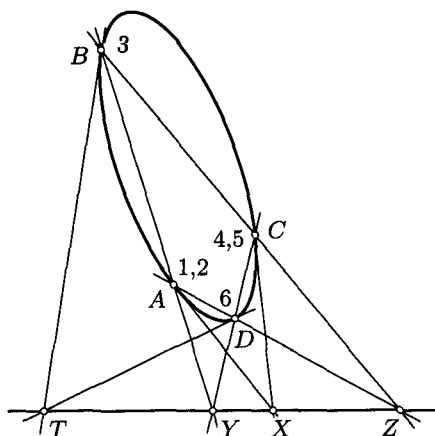


Рис. 36

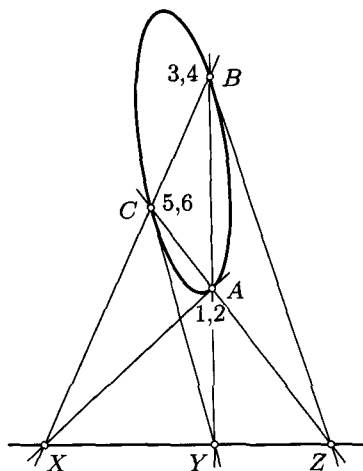


Рис. 37

2. Пусть в шестиугольнике совпадают вершины 1 и 2, 4 и 5. Тогда он вырождается в четырёхугольник $ABCD$ (рис. 36). Стороны (12) и (45) становятся касательными. Кроме точек X, Y, Z , на прямой Паскаля будет лежать и точка T пересечения касательных в вершинах B и D , поскольку при совпадении вершин 2 и 3, 5 и 6 положение точек Y и Z не изменится. Таким образом, в рассматриваемом случае теорема Паскаля предстаёт в следующей форме.

Во всяком (простом) четырёхугольнике, вписанном в кривую второго порядка, противоположные стороны и касательные в противоположных вершинах пересекаются в четырёх точках, лежащих на одной прямой.

3. Если совпадают вершины 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, то шестиугольник вырождается в треугольник ABC (рис. 37). Тогда теорема Паскаля может быть высказана следующим образом.

Точки пересечения сторон вписанного в кривую второго порядка треугольника с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

§22. Поляра точки и полюс прямой

22.1. Определения полярны и полюса. Точки P и Q называются гармонически сопряжёнными относительно кривой ω второго порядка, если пара (P, Q) гармонически разделяет пару (A, B) точек пересечения прямой PQ с кривой ω . По определению разделённости пар точек (§9) точки P и Q принадлежат разным отрезкам прямой PQ , на которые точки A и B делят эту прямую, т. е. одна из них лежит во внутренней области, а другая во внешней относительно кривой (рис. 38). Пусть точка P внутренняя. Каждая прямая пучка с центром P пересекает кривую в двух точках. Поэтому для данной точки P имеется бесконечное множество точек Q , каждая из которых гармонически сопряжена с точкой P относительно кривой ω .

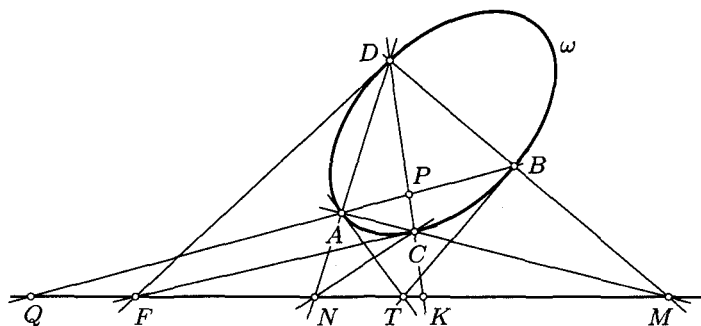


Рис. 38

Теорема. Геометрическим местом точек Q , гармонически сопряжённых с данной точкой P относительно кривой ω второго порядка, является прямая.

Доказательство. Проведём через точку P произвольную секущую CD и рассмотрим полный четырёхвершинник $ACBD$ с диагональными точками $M = (AC) \cap (BD)$, $N = (BC) \cap (AD)$, $P = (AB) \cap (CD)$. На основании гармонических свойств полного четырёхвершинника (§10) построенная ранее точка Q на стороне AB принадлежит диагонали $(MN) = p$. На этой же диагонали MN лежит и точка K , гармонически сопряжённая с точкой P относительно пары (C, D) . Для вписанного четырёхугольника $ACBD$ прямая p служит прямой Паскаля (§21) и содержит ещё точки T и F пересечения касательных к кривой ω в противоположных вершинах A и B , C и D .

Прямая p , соответствующая первоначально взятой точке P и построенная во взаимосвязи с данной кривой ω , может быть определена по

средством одной секущей AB , проходящей через точку P . В самом деле, она определяется точкой T пересечения касательных в точках A и B и точкой Q , четвёртой гармонической к точке P относительно пары (A, B) : $p = (TQ)$. Но секущая CD выбрана произвольно (независимо от AB), и она определяет ту же прямую p точками K и F . Следовательно, прямая p не зависит от выбора секущей CD , содержащей данную точку P . Таким образом, произвольная точка K прямой p — точка рассматриваемого геометрического места точек. Утверждение доказано. $\square$

Определение. Прямая, содержащая множество точек, гармонически сопряжённых с данной точкой P относительно кривой второго порядка, называется *полярной точки P* относительно этой кривой.

Если P — внутренняя точка относительно кривой, то её полярна вся состоит из точек рассматриваемого геометрического места точек. Если P — внешняя точка, то указанное геометрическое место точек есть хорда кривой ω , принадлежащая полярной p . Случай $P \in \omega$ рассмотрим чуть ниже.

Следствие 1. Полярна p точки P содержит точки пересечения касательных к кривой в концах хорд, принадлежащих прямому пучку с центром P .

Следствие 2. Полярна p точки P есть диагональ вписанного в кривую полного четырёхвершинника, имеющего точку P своей третьей диагональной точкой.

Случай, когда $P \in \omega$, является особым, так как тогда данное выше определение поляры неприменимо. В этом случае воспользуемся следствием 1. Касательная p в точке P кривой ω содержит все точки пересечения касательных к кривой в концах хорд кривой, содержащих точку P . Одна из этих касательных постоянна — прямая p (рис. 39). Таким образом, полярной точки P , принадлежащей кривой ω , следует считать касательную к этой кривой в данной точке.

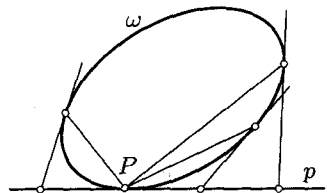


Рис. 39

Полус P данной прямой p определяется как точка, полярной которой является данная прямая p .

22.2. Построение поляры. На свойстве поляры, содержащемся в следствии 2 из предыдущего пункта, основан способ её построения для точки P , не принадлежащей кривой ω (рис. 40). Любые две секущие, проведённые через заданную точку P , определяют вписанный четырёхугольник $ABCD$, диагональ MN которого и есть полярна точки P .

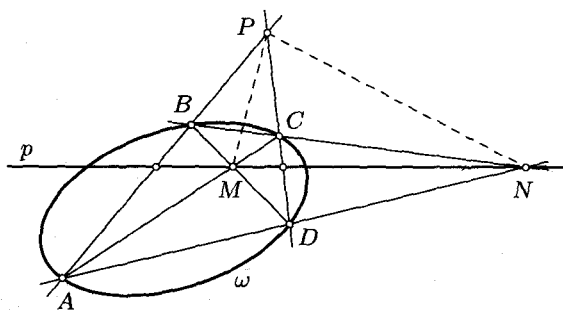


Рис. 40

Согласно этому свойству прямая PN есть полярная точки M , а прямая PM — полярная точки N относительно ω . Треугольник PMN обладает тем свойством, что каждая его вершина служит полюсом противоположной стороны. Треугольник, вершины которого являются полюсами его сторон, называется *автополярным треугольником* относительно кривой второго порядка. В частности, диагональный треугольник полного четырёхвершинника, вписанного в кривую второго порядка, является автополярным треугольником относительно этой кривой.

Полезно знать и другой вариант изложенного способа построения поляр. Так как полярная точки P определена этой точкой и кривой ω , то она не зависит от выбора секущих прямых, содержащих точку P . Поэтому проведём ещё третью секущую EF и построим диагональную точку $T = (CF) \cap (DE)$ полного четырёхвершинника $CDFE$ (рис. 41). Прямая MT есть полярная точки P .

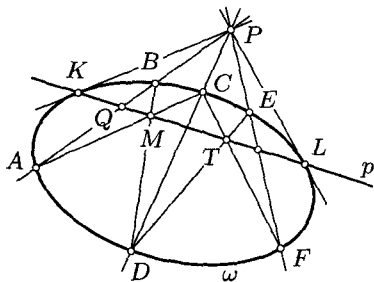


Рис. 41

Важно заметить, что при вращении секущей AB около точки P точки A , B , Q стремятся одновременно к точке K касания прямой PK с кривой ω по определению касательной в силу независимости полярной от выбора секущей AB и на основании теоремы о полярной (гармонической) сопряжённости точек P и Q . Отсюда следует примечательный вывод: *полярная внешней точки P относительно кривой ω пересекает эту кривую в точках K и L касания прямых, проходящих через P .*

Другой теоретически и практически важный вывод следует из того, что точки P и Q полярно сопряжены относительно кривой ω и а и м н о. Согласно определению полярной точки это означает следующее.

Если полярка точки P содержит точку Q , то и полярка точки Q содержит точку P . Это свойство называется свойством взаимности поляр. Оно распространяется и на определение полярки точки кривой ω как касательной (для точек P и K на рис. 41).

22.3. Построение полюса данной прямой можно выполнить, пользуясь свойством взаимности поляр. На данной прямой p выбираем две произвольные точки A и B и строим их полярки a и b . Пусть P — искомый полюс. Тогда из того, что $A \in p$, следует, что $P \in a$, а если $B \in p$, то $P \in b$. Таким образом, $P = a \cap b$ (рис. 42).

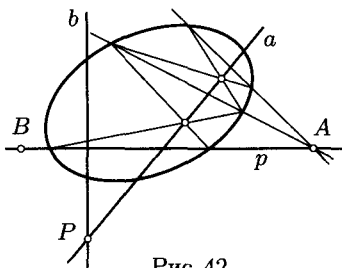


Рис. 42

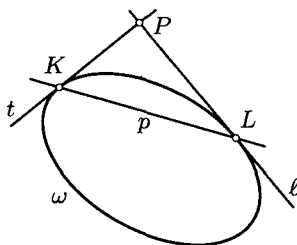


Рис. 43

22.4. Построение касательных к линии второго порядка. Пусть построена полярка p точки $P \notin \omega$. Если прямая p и кривая ω имеют две действительные общие точки K и L (которые совпадать не могут, так как иначе прямая p была бы касательной к ω и точка P принадлежала бы ω как её полюс), то касательные t и ℓ в этих точках являются по определению их полярками. Поскольку $K \in p$, то по свойству взаимности $P \in t$, и аналогично из того, что $L \in p$, следует, что $P \in \ell$. Значит, $P = t \cap \ell$.

Таким образом, если из точки P проведены две касательные к линии второго порядка, то прямая, соединяющая точки касания, является поляркой точки P (рис. 43).

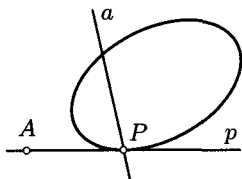


Рис. 44

Этот факт используется для построения касательных к кривой ω , проходящих через данную точку P . Для этого строится полярка p точки P . Точки K и L пересечения её с кривой ω служат точками касания искомым касательных PT и PL .

Построим касательную к линии второго порядка в принадлежащей ей точке P . Для этого через P проведём произвольную прямую a и построим её полюс A . Тогда прямая AP будет касательной к кривой в точке P (рис. 44). В самом деле, $P \in a \Rightarrow A \in p$. Поэтому прямая $p = (AP)$ (полярка точки P кривой) есть касательная к кривой в точке P .

§ 23. Уравнение полярны

23.1. Координатный критерий полярной сопряжённости точек. Пусть уравнением (III.4) задана невырожденная линия ω второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j = 0. \quad (\text{III.9})$$

Здесь и далее суммирование производится по индексам i и j , каждый из которых принимает значения 1, 2, 3. С целью графического упрощения записей не будем воспроизводить это условие.

Пусть прямая m , содержащая точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q(q_1 : q_2 : q_3)$, имеет параметрические уравнения

$$x_i = \lambda p_i + \mu q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{III.10})$$

Желая найти общие точки линии ω и прямой m , подставим уравнения (III.10) в (III.9):

$$\sum a_{ij}(\lambda p_i + \mu q_i)(\lambda p_j + \mu q_j) = 0.$$

Выполнив умножение и группировку слагаемых, приведём это уравнение относительно λ и μ к виду

$$\lambda^2 \sum a_{ij}p_ip_j + 2\lambda\mu \sum a_{ij}p_iq_j + \mu^2 \sum a_{ij}q_iq_j = 0.$$

Введём обозначения $\sum a_{ij}p_ip_j = A$, $\sum a_{ij}p_iq_j = B$, $\sum a_{ij}q_iq_j = C$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \quad (\text{III.11})$$

Согласно обозначениям, равенства $A=0$ и $C=0$ означают соответственно, что $P \in \omega$ и $Q \in \omega$. Пусть точки P и Q не принадлежат ω .

Найдём координатный критерий полярной сопряжённости точек P и Q относительно ω . Если $M_1 = \lambda_1 Q + \mu_1 P$ и $M_2 = \lambda_2 Q + \mu_2 P$ ($\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$), то по определению двойного отношения $(QPM_1M_2) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$. Так как $(QPM_1M_2) = \frac{1}{(M_1M_2PQ)} = -1$, то $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -1$, что эквивалентно выполнению равенства $\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 0$.

С другой стороны, $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ и $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ являются корнями уравнения (III.11), из которого по теореме Виета имеем

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -\frac{2B}{C}, \quad C \neq 0.$$

Следовательно, $-\frac{2B}{C} = 0$, поэтому $B = 0$, или

$$\sum a_{ij}p_iq_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (\text{III.12})$$

Это и есть критерий полярной сопряжённости точек $P(p_i)$ и $Q(q_i)$ относительно линии $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$, если точка P не лежит на ней.

Из условия (III.12) немедленно следует уравнение поляры точки P . Пусть $Q(x_1 : x_2 : x_3)$ — произвольная точка этой поляры. Тогда

$$\sum a_{ij}p_ix_j = 0,$$

или, в подробной записи,

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + \\ + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0. \quad (\text{III.13})$$

Это — уравнение поляры точки P . Коэффициенты при переменных x_i не обращаются одновременно в нуль, так как в противном случае из системы

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = 0, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = 0 \end{cases}$$

необходимо следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку она имеет ненулевое решение $(p_1 : p_2 : p_3)$. Стало быть, в этом случае кривая ω была бы вырожденной (§20).

23.2. Уравнение касательной. Рассмотрим пока опущенный случай, когда $P \in \omega$ ($A = 0$). Тогда общие точки прямой m и кривой ω совпадают: прямая M является касательной к кривой. При $A = 0$ уравнение (III.11) принимает вид

$$\mu(2B\lambda + C\mu) = 0, \quad (\text{III.14})$$

откуда $\mu = 0$, т.е. $P \in \omega$. Поскольку точка P должна быть второй общей точкой прямой m и кривой ω , то $\mu = 0$ должен быть двукратным корнем уравнения (III.14). Но при $\mu = 0$ необходимо $\lambda \neq 0$. Следовательно, $B = 0$. Таким образом, мы снова пришли к тому же уравнению (III.13), которое теперь одновременно является и уравнением касательной к кривой ω в принадлежащей ей точке P , и уравнением поляры этой точки.

Примечание. Равенство $\sum a_{ij}p_iq_j = 0$ ($a_{ij} = a_{ji}$) включает в себя аналитическое подтверждение свойства взаимности поляр.

§ 24. Полярное соответствие (поляритет)

24.1. Определение и координатные формулы. При заданной невырожденной кривой второго порядка каждая точка плоскости имеет свою полярю.

Всякая ли прямая имеет полюс относительно заданной линии второго порядка? Для ответа на этот вопрос сравним уравнение прямой $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ с уравнением (III.13) полярны. Эта прямая будет полярной некоторой точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$, если существуют такие числа p_1, p_2, p_3 и $\rho \neq 0$, что

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = \rho u_1, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = \rho u_2, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = \rho u_3. \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Эта система имеет единственное (при заданном ρ) ненулевое решение (p_1, p_2, p_3) для каждой заданной ненулевой тройки (u_1, u_2, u_3) тогда и только тогда, когда её определитель Δ отличен от нуля, т. е. когда линия второго порядка невырожденная. Числа p_1, p_2, p_3 и будут координатами полюса данной прямой. Итак, *относительно невырожденной линии второго порядка всякая прямая плоскости имеет единственный полюс.*

Таким образом, между множеством всех точек плоскости и множеством всех её прямых устанавливается посредством данной кривой взаимно однозначное соответствие: каждой точке ставится в соответствие её поляр и каждой прямой — её полюс. Это соответствие называется *полярным соответствием* относительно кривой второго порядка, или *поляритетом* плоскости, а порождающая его кривая второго порядка — его *базисной кривой*.

Аналитически поляритет записывается формулами (III.15). Обозначая координаты точки через x_1, x_2, x_3 , а координаты соответственной ей прямой — через u_1, u_2, u_3 . Имеем

$$\begin{cases} \rho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Здесь $a_{ij} = a_{ji}$ и $\det(a_{ij}) \neq 0$.

В силу свойства взаимности полюсов и поляр поляритет отображает множество всех точек прямой на пучок прямых, причём данной прямой ставится в соответствие центр этого пучка. Более того, имеет место такая теорема.

Теорема. Двойное отношение четырёх прямых пучка, являющихся образами четырёх точек прямой в заданном полярите, равно двойному отношению этих точек.

Эта теорема не нуждается в специальном доказательстве в силу и н-во л ю щ и о н н о с т и поляритета $P \leftrightarrow p$: точка P и её поляр p соответствуют друг другу в з а и м н о. Поэтому каждой четвёрке $ABCD$ коллинеарных точек, связанных зависимостями (I.11), отвечает четвёрка $abcd$ соответственных прямых пучка поляр, связанных теми же зависимостями (I.21), откуда и следует равенство $(ABCD) = (abcd)$ двойных отношений.

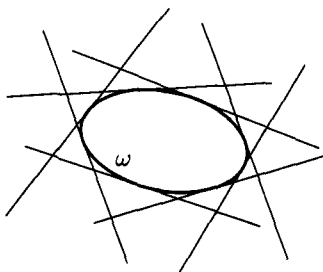


Рис. 45

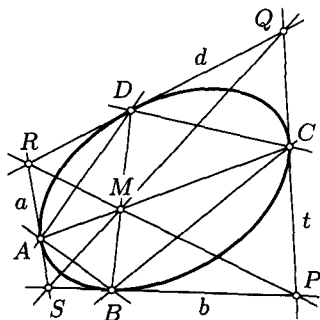


Рис. 46

24.2. Пучок прямых второго порядка. Множество прямых плоскости, каждая из которых содержит соответственную ей точку в заданном полярите, называется *пучком прямых второго порядка*. Иными словами, пучком прямых второго порядка называется множество всех касательных к невырожденной кривой второго порядка (рис. 45). Рассматриваемые ранее обычные пучки прямых будем называть теперь *пучками первого порядка*. Данная кривая ω по отношению к своему пучку второго порядка называется *базисной кривой* этого пучка (или его *огibaющей*) и является множеством точек касания с прямыми пучка.

Теорема Маклорена. Любые две прямые пучка второго порядка проективно отображаются (проектируются) одна на другую остальными прямыми этого пучка.

Доказательство. Эта теорема двойственна основной теореме проективной теории кривых второго порядка (§ 19). Пусть A, B, C, D — произвольные четыре точки кривой ω , а прямые a, b, t, d — касательные к кривой ω соответственно в этих точках (рис. 46). Рассмотрим точки $S = a \cap b$, $R = a \cap d$, $P = b \cap t$, $Q = d \cap t$, $M = (AC) \cap (BD)$. По теореме Паскаля для вписанного четырёхугольника $ACBD$ точки M, S, Q коллинеарны, по той же теореме для четырёхугольника $ABDC$, точки $M,$

R, P также коллинеарны. Зафиксируем точки A, B, D кривой ω , а точку C будем перемещать по кривой. Тогда точка M будет перемещаться по постоянной прямой BD . Таким образом, имеем

$$b(P) \bar{\wedge} R(RP) \bar{\wedge} BD(M) \bar{\wedge} S(SQ) \bar{\wedge} d(Q),$$

откуда и следует доказываемое: $b(P) \bar{\wedge} d(Q)$. Прямая BD есть ось перспективности пучков R и S .

24.3. Понятие о корреляции общего вида. Если отказаться от условия $a_{ij} = a_{ji}$ симметричности матрицы (a_{ij}) в формулах (III.16), то получим соответствие более общего вида, не связанное с кривой второго порядка: каждой точке $(x_1 : x_2 : x_3)$ этими формулами ставится в соответствие некоторая прямая. Такое соответствие называется *коррелятивным*, или *корреляцией*. Поляритет есть частный вид корреляции, а именно, поляритет — корреляция и н в о л ю ц и о н н а я: если $P \rightarrow p$, то $p \rightarrow P$. Корреляция общего вида этим свойством не обладает. Однако теорема об инвариантности двойного отношения сохраняет силу и для таких корреляций.

§ 25. Теорема Брианшона

25.1. Теорема Брианшона для описанного шестиугольника.

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, образованный касательными в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6 кривой второго порядка (рис. 47). Его вершины A, B, C, D, E, F являются соответственно полюсами прямых (12), (23), (34), (45), (56), (61). По свойству взаимности прямые AD, BE, CF есть поляры точек X, Y, Z пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника (123456). По теореме Паскаля точки X, Y, Z лежат

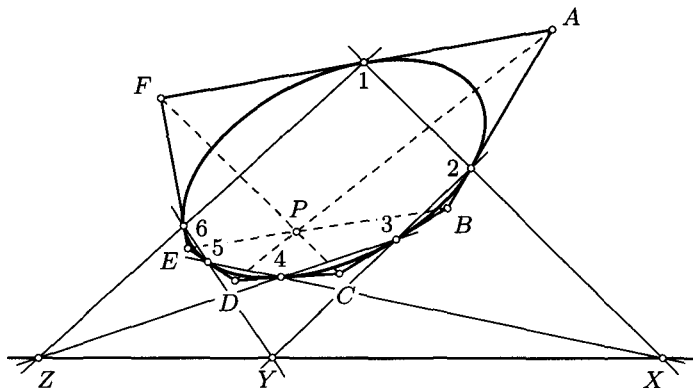


Рис. 47

на одной прямой (прямой Паскаля), поэтому их поляры AD , BE , CF должны пересекаться в одной точке P , являющейся полюсом прямой XYZ . Сформулируем доказанное.

Теорема Брианшона. *Во всяком шестиугольнике, описанном около кривой второго порядка, прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.*

Указанная в теореме точка называется *точкой Брианшона* описанного шестиугольника.

Французский математик Шарль Брианшон (1785–1864), занимавшийся в основном проективной геометрией, доказал эту теорему в 1806 году. Она двойственна теореме Паскаля.

25.2. Теорема Брианшона для вырожденных шестиугольников. Точка пересечения совпадающих сторон является точкой их касания с кривой второго порядка. Рассмотрим эти случаи.

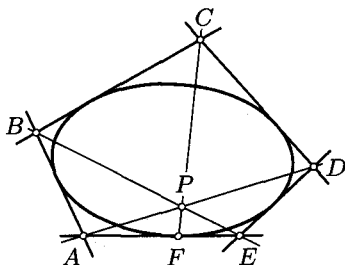


Рис. 48

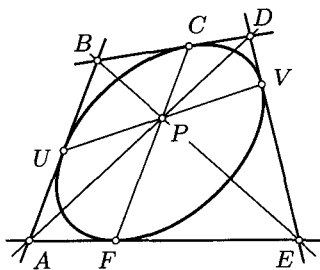


Рис. 49

1. Пусть $(EF) = (FA)$ (рис. 48). Для получающегося описанного пятиугольника $ABCDE$ теорему Брианшона можно перефразировать так: *в любом пятиугольнике, описанном около кривой второго порядка, прямые, соединяющие несмежные вершины в двух парах, и прямая, соединяющая пятую вершину с точкой касания противоположной стороны, пересекаются в одной точке.*

2. Пусть $(BC) = (CD)$ и $(EF) = (FA)$ (рис. 49). Тогда C и F — точки касания двойных сторон BD и EA с кривой. По теореме Брианшона прямые AD , BE , CF пересекаются в одной точке P . Если считать двойными две другие противоположные стороны четырёхугольника $ABDE$, то положение точки P останется прежним. Поэтому через P проходит и прямая UV , соединяющая точки касания прямых AB и DE с кривой.

Итак, *во всяком описанном около кривой второго порядка (простом) четырёхугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, проходят через точку пересечения диагоналей.*

3. Если в шестиугольнике $(AB) = (BC)$, $(CD) = (DE)$ и $(EF) = (FA)$, то стороны треугольника ACE касаются кривой в точках B, D, F . Следовательно, во всяком треугольнике, описанном около кривой второго порядка, прямые, соединяющие его вершины с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке (рис. 50).

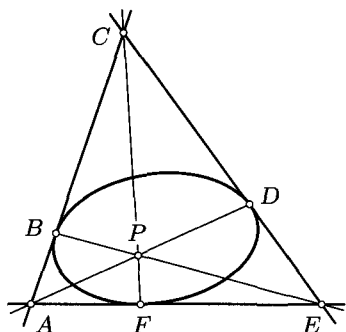


Рис. 50

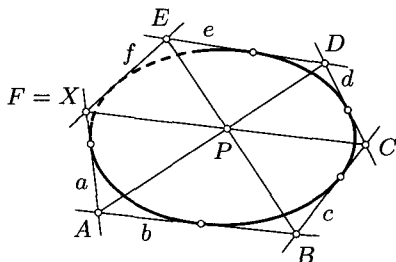


Рис. 51

25.3. Обратная теорема Брианшона. Если прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, пересекаются в одной точке, то его стороны касаются некоторой кривой второго порядка.

Доказательство. Пучок прямых второго порядка определяется пятью принадлежащими ему прямыми a, b, c, d, e . В самом деле, согласно теореме Маклорена две из этих прямых, например a и b , могут быть приняты в качестве основных, на которых устанавливается проективное соответствие. Тогда три пары точек их пересечения с оставшимися задают это соответствие, определяющее весь пучок.

Пусть согласно условию теоремы прямые AD, BE, CF пересекаются в точке P (рис. 51). Пятью прямыми a, b, c, d, e зададим пучок второго порядка, т. е. положим, что эти прямые касаются некоторой кривой ω второго порядка. Осталось показать, что шестая прямая $f = (FE)$ также касается кривой ω . Точка E не может быть внутренней относительно ω , так как лежит на касательной к ней. Фиксируем точку E . Через неё проходят две касательные к ω , одна из которых есть прямая DE . На другой касательной будем искать точку X её пересечения с прямой a . Построим искомую прямую EX , пользуясь теоремой Брианшона. Противоположными вершинами шестиугольника $ABCDEX$, описанного около ω , являются точки A и D, B и E , которыми определяется его точка P Брианшона: $P = (AD) \cap (BE)$. Следовательно, прямая CX должна проходить через P , и потому прямая CX совпадает с прямой CP . Таким образом, точка X совпадает с точкой F , и прямая $f = (FE)$ касается ω . $\square$

В ходе доказательства показан способ построения прямой пучка второго порядка, заданного пятью его прямыми, а искомая прямая задана точкой E на одной из этих прямых. Этот способ основан на использовании обратной теоремы Бриансона.

§ 26. Проективные связи точек кривой второго порядка и прямой линии

26.1. Перспективное соответствие. Пусть даны кривая ω и прямая m . Из произвольной точки $S \in \omega$ спроектируем точки прямой m на кривую ω (или наоборот) (рис. 52):

$$m(ABC) \bar{\wedge} S(abc) \bar{\wedge} \omega(A_0B_0C_0).$$

Это отображение называется *перспективным соответствием* прямой m и кривой ω . Оно эффективно используется при изучении проективных отображений прямой на прямую, кривой на кривую и прямой на кривую.

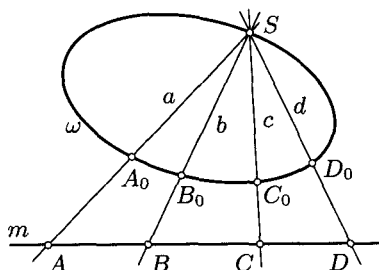


Рис. 52

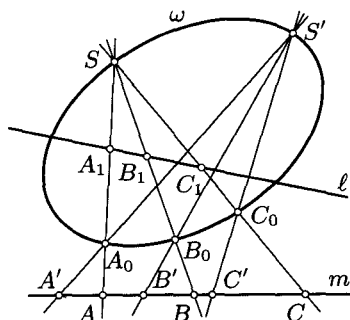


Рис. 53

Равенством двойных отношений $(ABCD) = (abcd)$ можно определить понятие двойного отношения четырёх точек $(A_0B_0C_0D_0)$ кривой второго порядка как двойное отношение $(abcd)$ четвёрки соответственных прямых перспективного пучка с центром S на этой кривой или же как двойное отношение $(ABCD)$ четырёх соответственных точек прямой.

Фиксируем две произвольные точки S и S' кривой ω . Спроектируем сначала из точки S точки прямой m на кривую ω , а затем полученные точки на кривой ω из точки S' — обратно на ту же прямую m или на другую прямую ℓ (рис. 53):

$$m(ABC) \xrightarrow{S} \omega(A_0B_0C_0) \xrightarrow{S'} m(A'B'C') \xrightarrow{\ell} \ell(A_1B_1C_1).$$

В результате имеем проективное преобразование прямой $m: A \rightarrow A'$ и перспективное отображение $A \rightarrow A_1$ прямой m на прямую ℓ , которые получены посредством кривой ω (порождены этой кривой и заданными её точками S и S').

26.2. Проективное преобразование кривой второго порядка.

Будем аналогично проектировать точки кривой ω на прямую m из точки S кривой, а затем полученные точки спроектируем обратно на кривую ω из другой точки S_1 этой кривой (рис. 54):

$$m(ABC) \stackrel{S}{\wedge} m(A_1B_1C_1) \stackrel{S_1}{\wedge} \omega(A'B'C').$$

Эта композиция двух перспективных отображений представляет собой преобразование кривой ω , сохраняющее двойное отношение каждой четвёрки точек:

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (A'B'C'D').$$

Оно называется *проективным преобразованием кривой второго порядка*. Прямая m называется *осью* этого преобразования. Ось преобразования позволяет легко построить образ каждой точки кривой при этом преобразовании. Очевидно также, что точки X и Y пересечения оси m преобразования с кривой являются неподвижными точками преобразования.

В зависимости от числа неподвижных точек, проективные преобразования кривой делятся на три типа: *гиперболические* (две неподвижные точки), *параболические* (одна неподвижная точка) и *эллиптические* (неподвижных точек нет), что соответствует трём возможным случаям взаимного расположения оси преобразования и кривой.

Докажем, что *проективное преобразование кривой второго порядка определяется заданием трёх пар соответственных точек этой кривой*.

В самом деле, пусть заданы три пары $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$ соответственных точек преобразования кривой ω . Каждую из этих пар можно принять в качестве центров проектирующих пучков. Если в качестве центров принять точки A и A_1 , то точки $M = (AB_1) \cap (A_1B)$ и $N = (AC_1) \cap (A_1C)$ пересечения соответственных прямых будут опреде-

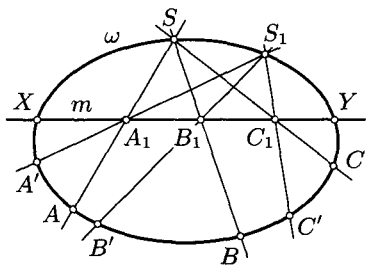


Рис. 54

лять ось преобразования (рис. 55). Аналогично пучки с центрами B и B_1 определяют две точки $(BA_1) \cap (B_1A) = M$ и $P = (BC_1) \cap (B_1C)$ оси преобразования. Но эти три точки M, N, P лежат на одной прямой, которая является прямой Паскаля для вписанного шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$. Доказательство завершено.

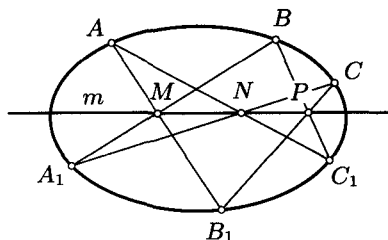


Рис. 55

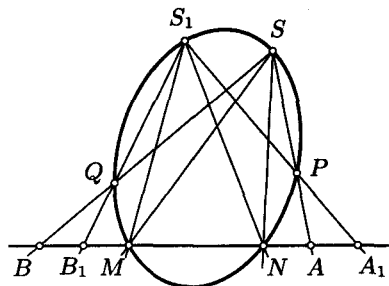


Рис. 56

26.3. Теорема Штаудта. Если задано проективное гиперболическое преобразование прямой с неподвижными точками M и N , которое отображает точки A и B соответственно в точки A_1 и B_1 , то существует и другое проективное преобразование этой прямой с теми же неподвижными точками M и N , при котором точки A и A_1 переходят соответственно в точки B и B_1 .

Доказательство. По условию теоремы $(MNAB) = (MNA_1B_1)$. Спроектируем точки M, N, A, B и M, N, A_1, B_1 соответственно из точек S и S_1 . Тогда проектирующие пучки будут проективными. Рассмотрим точки P и Q пересечения соответственных прямых SA и S_1A_1 , SB и S_1B_1 . Тогда шесть точек S, S_1, M, N, P, Q будут принадлежать одной кривой второго порядка, порождённой проективными пучками S и S_1 (рис. 56). Проектируя из точек Q и P точки этой кривой, будем иметь два проективных пучка, соответствующие прямые которых определяют на прямой MN проективное преобразование с неподвижными точками M и N , отображающее точки A и A_1 на точки B и B_1 . $\square$

26.4. Критерий инволюции кривой второго порядка. Проективное преобразование кривой второго порядка инволюционно тогда и только тогда, когда оно индуцируется гармонической гомологией плоскости, центр и ось которой полярно сопряжены относительно рассматриваемой кривой.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть инволюция кривой ω (как и инволюция прямой, задана двумя парами $A \leftrightarrow A_1$ и $B \leftrightarrow B_1$ соответственных точек, а $X \leftrightarrow X_1$ — произвольная пара этой инволю-

ции (рис. 57). Тогда соответственные точки инволюции будут проектироваться из точек A и A_1 прямыми, пересекающимися на оси p преоб-

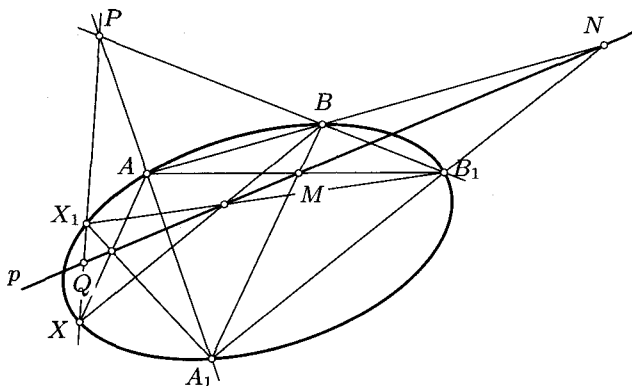


Рис. 57

разования. Так как оно инволюционно, то $X_1 \rightarrow X$, и поэтому прямые AX и A_1X_1 также пересекаются на прямой p . В частности, прямые AB и A_1B_1 , AB_1 и A_1B также пересекаются на этой прямой. Если пару $A \leftrightarrow A_1$ заменить парой $B \leftrightarrow B_1$, то получим, что прямые BX и B_1X_1 пересекаются на p . По теореме Дезарга для треугольников ABX и $A_1B_1X_1$ прямые AA_1 , BB_1 , XX_1 имеют общую точку P . Так как точки P , $M = (AB_1) \cap (A_1B)$ и $N = (AB) \cap (A_1B_1)$ суть диагональные точки полного четырёхвершинника, вписанного в кривую ω , то P — полюс прямой $(MN) = p$. Эта гомология гармоническая (п. 15.4).

Достаточность почти очевидна. Если P — полюс прямой p относительно ω , то точки X и X_1 пересечения произвольной прямой пучка P с кривой ω гармонически сопряжены с точками P и $Q = (XX_1) \cap p$, т. е. точки X и X_1 соответствуют друг другу в инволюции кривой ω . $\square$

§27. Проективная классификация линий второго порядка

Задача проективной классификации линий второго порядка состоит в нахождении всех проективно неэквивалентных (проективно различных) линий второго порядка.

Надлежащим выбором проективной системы координат общее уравнение (III.4) линии второго порядка можно привести к виду, в котором все коэффициенты a_{ij} при $i \neq j$ будут нулями, а коэффициенты a_{ii} будут иметь лишь значения 1, -1 , 0. Учитывая ещё, что при надобности всегда

можно сменить нумерацию координат (т. е. нумерацию вершин базисного треугольника системы координат), а также умножить обе части уравнения на -1 , получаем пять и только пять простейших уравнений линий второго порядка на проективной плоскости:

$$1) x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$$

$$2) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0;$$

$$3) x_1^2 - x_2^2 = 0;$$

$$4) x_1^2 + x_2^2 = 0;$$

$$5) x_1^2 = 0.$$

Они называются *каноническими уравнениями* этих линий.

Покажем для примера, что уравнение 1) имеет невырожденная линия второго порядка относительно её автополярного треугольника $A_1 A_2 A_3$, если за единичную точку E взять точку пересечения касательных, проведённых к ней через точки A_1 и A_2 (рис. 58). Действительно, прямая $A_1 A_2$ — полярна точки $A_3(0:0:1)$. С одной стороны, она имеет уравнение $x_3 = 0$, а с другой — уравнение $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$, поэтому $a_{13} = a_{23} = 0$. Равным образом из условия, что $(A_2 A_3)$ — полярна точки $A_1(1:0:0)$, получаем $a_{12} = a_{13} = 0$. Уравнение кривой принимает вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Учитывая ещё, что точки $E_1(0:1:1)$ и $E_2(1:0:1)$ лежат на этой кривой, получаем $a_{22} + a_{33} = 0$ и $a_{11} + a_{33} = 0$. Значит, $a_{11} = a_{22} = -a_{33}$, и уравнение кривой после сокращения принимает вид 1).

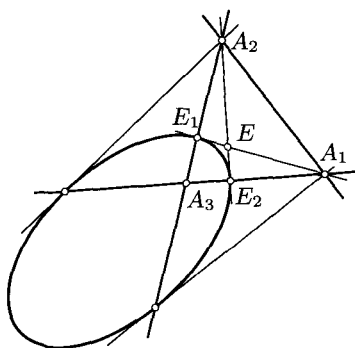


Рис. 58

Любые два полных четырёхвершинника проективно эквивалентны согласно теореме о задании проективного преобразования плоскости. Если ими заданы две проективные системы координат, то координаты соответственных точек относительно этих систем соответственно равны. Отсюда следует, что две линии второго порядка, имеющие в соответствующих системах координат одинаковые канонические уравнения, проективно эквивалентны, а две линии, имеющие в соответствующих системах координат различные канонические уравнения, неэквивалентны.

Таким образом, уравнениями 1)–5) представлены все пять проективно различных типов линий второго порядка.

Линия 1) содержит бесконечное множество действительных точек и поэтому называется действительной (невырожденной) линией второго порядка, или *овалом*. Линия 2) не содержит ни одной действительной точки. Её называют *мнимым овалом*. Уравнением 3) задаётся пара действительных различных прямых $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$. Линия 4) содержит единственную действительную точку $(0, 0, 1)$. Её уравнение можно представить в виде $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$, где $i^2 = -1$. Говорят, что уравнение 4) задаёт *пару мнимых прямых*, пересекающихся в действительной точке. Линия 5) есть *сдвоенная прямая* $x_1 = 0$.

Итак, на проективной плоскости существует лишь единственный проективный тип действительных невырожденных линий второго порядка — овалы, из которых уже нельзя выделить проективно различные линии. Разделение на эллипсы, гиперболы и параболы имеет место только на аффинной плоскости.

Задачи и упражнения

III.1. Найдите уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $(0:0:1)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:1)$, $(2:3:1)$.

III.2. Стороны BC , CA , AB треугольника ABC касаются кривой второго порядка соответственно в точках A_1 , A_2 , A_3 . Прямые AA_1 , BA_2 , CA_3 пересекаются в точке E . Найдите уравнение этой кривой относительно системы $\{A_1A_2A_3E\}$.

III.3. Найдите уравнение линии второго порядка, содержащей точки $(1:0:0)$, $(1:0:-1)$, $(2:1:0)$ и касающейся прямых $x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 + x_3 = 0$.

III.4. Докажите теорему Паскаля для треугольника, используя метод координат.

III.5. Если два треугольника гомологичны, то шесть точек, в которых стороны одного треугольника пересекают несоответственные стороны другого, лежат на одной кривой второго порядка. Докажите.

III.6. Если два треугольника вписаны в одну кривую второго порядка, то они также описаны около некоторой другой кривой второго порядка. Докажите.

III.7. Даны пять точек кривой второго порядка. Постройте касательную к этой кривой в одной из данных точек, а также касательную из шестой заданной точки.

III.8. Дана (начерчена) кривая второго порядка. Постройте касательную к кривой в данной её точке P , пользуясь только одной линейкой.

III.9. Даны четыре точки кривой второго порядка и касательная в одной из них. Постройте ещё одну точку кривой.

III.10. Даны три точки кривой второго порядка и касательные в двух из них. Постройте ещё одну точку этой кривой.

III.11. Даны пять точек невырожденной линии второго порядка. Постройте полярную данной точки P относительно этой линии.

III.12. Даны пять касательных к некоторой кривой второго порядка. Постройте точку касания одной из них.

III.13. Два полных четырёхвершинника имеют общие диагональные точки. Докажите, что эти четырёхвершинники вписаны в одну кривую второго порядка.

III.14. Докажите, что поляры точек прямой, не касающейся базисной кривой ω , пересекают данную прямую m в соответственных им точках одной инволюции.

III.15. Треугольник ABC вписан в кривую ω . Прямая m не проходит через его вершины и пересекает кривую ω в точках X и Y . Прямая t касается кривой ω в точке A . Докажите, что три пары точек $M = (AB) \cap m$ и $N = (AC) \cap m$, $P = (BC) \cap m$ и $Q = t \cap m$, X и Y являются парами соответственных точек одной инволюции.

III.16. Докажите критерий касания прямой $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ и кривой второго порядка, заданной общим уравнением (III.4),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Проективные модели аффинной и трёх метрических геометрий

Феликс Клейн оценил значение проективной геометрии кратко: «проективная геометрия — это все геометрии». Глубокий смысл этого афоризма кроется в том, что проективная геометрия важна не только сама по себе как итог стремления геометров к обобщениям и устранению из геометрии метрики, а главное её значение состоит в том, что она несёт в себе скрытую возможность построения многих геометрий как следствий проективных понятий и теорем путём их различных специализаций.

В общих словах, идея заключается в следующем. Рассматривается группа проективных автоморфизмов заданной специально выбранной фигуры Ω . Инварианты этой группы согласно Эрлангенской Программе Клейна и составляют содержание соответствующей геометрии, по отношению к которой фигура Ω называется *абсолютом* этой геометрии.

Английский математик Артур Кэли (1821–1895) ввёл *проективное мероопределение* расстояний, установил связь между теорией инвариантов и проективной геометрией. Трудami Ф. Клейна и Д. Соммервиля установлено, что на проективной плоскости могут быть построены $3^2 = 9$ различных метрических геометрий, а в n -мерном пространстве — 3^n метрических геометрий. Они называются геометриями Кэли—Клейна. Аффинная геометрия таковой не является, поскольку в аффинной геометрии метрика отсутствует.

Ниже излагаются начала аффинной, евклидовой, псевдоевклидовой геометрий и геометрии Лобачевского на базе проективной геометрии, в которых абсолютами являются соответственно прямая, несобственная прямая с фиксированной парой её мнимых циклических точек, несобственная прямая с фиксированной парой её действительных точек и невырожденная кривая второго порядка.

§28. Проективно-аффинная плоскость.

Проективно-аффинные преобразования

Вспомним, что расширенная аффинная плоскость как модель проективной плоскости была получена из аффинной путём присоединения несобственных точек, множество которых образует несобственную прямую (§2). Теперь ставится обратная задача — получить аффинную,

а затем евклидову плоскости из проективной и построить аффинную и евклидову геометрии на базе проективной геометрии.

Для получения аффинной плоскости из проективной, естественно, надо удалить из проективной плоскости какую-либо одну прямую. Практически же эту прямую приходится просто фиксировать.

Определение. Проективная плоскость называется *проективно-аффинной*, если на ней фиксирована некоторая прямая ω . Эта прямая ω называется *несобственной прямой* проективно-аффинной плоскости.

Точки прямой ω будем называть *несобственными* и при надобности в их обозначениях писать индекс ω : $A_\omega, B_\omega, M_\omega, \dots$

Все прямые, кроме ω , и все точки, не принадлежащие ω , будем называть *собственными прямыми* и *собственными точками* проективно-аффинной плоскости.

Термин «проективно-аффинная» отражает тот факт, что проективная плоскость при фиксировании на ней прямой ω остаётся проективной, но без точек прямой ω она изоморфна аффинной плоскости.

Определение. Проективное преобразование проективно-аффинной плоскости, отображающее несобственную прямую ω на себя, называется *проективно-аффинным преобразованием*.

Следствие. *Проективно-аффинное преобразование всякую собственную точку проективно-аффинной плоскости отображает на собственную точку.*

Действительно, если $A \notin \omega$ и $A \rightarrow A'$, то $A' \notin \omega$, так как если бы выполнялось условие $A' \in \omega$, то по предыдущему определению мы необходимо получили бы, что $A \in \omega$ (прямая ω отображается на себя), что противоречит выбору точки A .

Таким образом, разделение точек (и, следовательно, прямых) проективно-аффинной плоскости на собственные и несобственные инвариантно относительно проективно-аффинных преобразований: множество всех собственных точек отображается на себя, множество всех несобственных точек отображается на себя.

Теорема. *Всякое проективно-аффинное преобразование, рассматриваемое на множестве всех собственных точек проективно-аффинной плоскости, является аффинным преобразованием.*

Доказательство проведём аналитически. Пусть проективная система координат выбрана так, что прямая ω имеет уравнение $x_3 = 0$ (рис. 59, а). Такую систему координат будем называть проективно-аф-

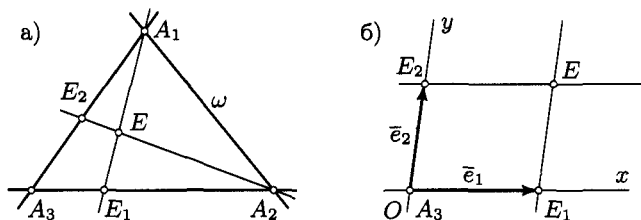


Рис. 59

финной. Проективно-аффинное преобразование зададим формулами

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3,\end{aligned}\tag{IV.1}$$

причём $\det(c_{ij}) \neq 0$. По определению проективно-аффинного преобразования из равенства $x_3 = 0$ должно следовать, что $x'_3 = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $c_{31} = c_{32} = 0$, но $c_{33} \neq 0$. Тогда формулы (IV.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= c_{33}x_3,\end{aligned}\tag{IV.2}$$

где $c_{33} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, что следует из условия $\det(c_{ij}) \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = c_{33} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Формулами (IV.2) записывается проективно-аффинное преобразование. Будем рассматривать его на множестве собственных точек. Тогда $x_3 \neq 0$, что позволяет перейти к аффинным координатам x, y точки, определяя их формулами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Для этого достаточно первую и вторую формулы из (IV.2) разделить почленно на третью:

$$\begin{aligned}\frac{x'_1}{x'_3} &= \frac{c_{11}}{c_{33}} \frac{x_1}{x_3} + \frac{c_{12}}{c_{33}} \frac{x_2}{x_3} + \frac{c_{13}}{c_{33}}, \\ \frac{x'_2}{x'_3} &= \frac{c_{21}}{c_{33}} \frac{x_1}{x_3} + \frac{c_{22}}{c_{33}} \frac{x_2}{x_3} + \frac{c_{23}}{c_{33}}.\end{aligned}$$

В новых обозначениях коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} x' &= a_1x_1 + b_1y + c_1, & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &\neq 0. \\ y' &= a_2x_1 + b_2y + c_2, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

А это — формулы аффинного преобразования аффинной плоскости.

Если несобственную прямую $\omega = (A_1A_2)$ считать бесконечно удалённой, то проективная система координат $\{A_1A_2A_3E\}$ деформируется в аффинную систему (рис. 596).

Обратно, если аффинное преобразование (IV.3) множества всех собственных точек проективно-аффинной плоскости расширить на всю проективно-аффинную плоскость условием ставить в соответствие несобственной точке каждой (собственной) прямой несобственную точку её образа, то оно станет проективно-аффинным преобразованием. $\square$

§29. Основные понятия проективно-аффинной геометрии

Множество всех проективно-аффинных преобразований проективно-аффинной плоскости есть подгруппа проективной группы преобразований, изоморфная аффинной группе преобразований аффинной плоскости.

В самом деле, выполнение требований группы сразу следует из определения проективно-аффинного преобразования. Изоморфизм указанных групп вытекает из эквивалентности формул (IV.2) и (IV.3) при условии, что формулы (IV.2) рассматриваются на множестве всех собственных точек проективно-аффинной плоскости.

Проективно-аффинная группа преобразований порождает геометрию, называемую *проективно-аффинной геометрией*. В силу указанного выше изоморфизма групп, проективно-аффинная геометрия изоморфна аффинной геометрии. Однако рассмотрение фактов проективно-аффинной геометрии не лишено интереса, так как эти факты рассматриваются с новой, более высокой точки зрения — с точки зрения проективной геометрии.

Введём сначала понятия отрезка и луча на проективно-аффинной плоскости. Если A и B — две собственные точки, то тот из двух отрезков проективной прямой AB , который имеет концы A и B и не содержит несобственную точку прямой AB , называется *отрезком* $[AB]$ на проективно-аффинной плоскости. Если O — собственная точка прямой a и $a \cap \omega = P$, то отрезки проективной прямой, имеющие своими концами точки O и P , называются *лучами* прямой a с началом O на проективно-аффинной плоскости.

29.1. Параллельные прямые. Согласно аксиоме Π_2 всякая прямая $a \neq \omega$ имеет с несобственной прямой ω единственную общую точку, которая называется *несобственной точкой* прямой a .

Определение. Две (собственные) прямые называются *параллельными* ($a \parallel b$), если они имеют общую несобственную точку (рис. 60).

Из этого определения напрямую следует, что отношение параллельности прямых симметрично и транзитивно. Покажем, что понятие параллельных прямых принадлежит проективно-аффинной геометрии.

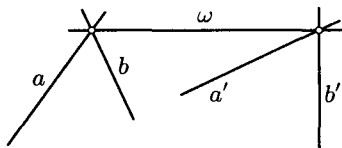


Рис. 60

Теорема. Всякое проективно-аффинное преобразование отображает параллельные прямые на параллельные прямые.

Доказательство. Пусть $a \parallel b$, т.е. прямые a, b, ω принадлежат одному пучку, и пусть при заданном проективно-аффинном преобразовании $a \rightarrow a', b \rightarrow b'$. Кроме того, $\omega \rightarrow \omega$. Поскольку проективное преобразование пучок прямых отображает на пучок прямых, то прямые a', b', ω' принадлежат одному пучку и, значит, $a' \parallel b'$. $\square$

Если две прямые заданы уравнениями $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ и $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$, то точка их пересечения имеет координаты

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

При условии, что несобственная прямая ω имеет уравнение $x_3 = 0$, критерием параллельности этих прямых является равенство

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

29.2. Проективно-аффинное определение вектора. Пару точек A, B будем считать упорядоченной, а отрезки AB и BA будем называть *направленными* и обозначать соответственно $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Определение. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, принадлежащие различным прямым, называются *эквивалентными* ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$), если $(AB) \parallel (CD)$ и $(AC) \parallel (BD)$ (рис. 61). Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, принадлежащие одной прямой, называются *эквивалентными*, если существует не принадлежащий этой прямой направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$, эквивалентный каждому из отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 62).

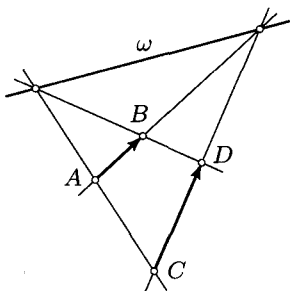


Рис. 61

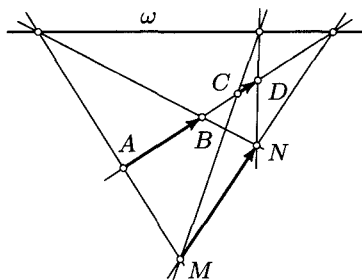


Рис. 62

Из определения вытекает, что

$$(\overline{AB} \stackrel{\omega}{=} \overline{CD}) \Leftrightarrow (\overline{AC} \stackrel{\omega}{=} \overline{BD}).$$

Теорема. Отношение эквивалентности, заданное на множестве всех направленных отрезков проективно-аффинной плоскости, является отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность эквивалентности направленных отрезков содержится в её определении. Докажем транзитивность. Пусть $\overline{AA_1} \stackrel{\omega}{=} \overline{BB_1}$ и $\overline{BB_1} \stackrel{\omega}{=} \overline{CC_1}$. Тогда $(AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) = S \in \omega$ (рис. 63). Если $(AC) \cap (A_1C_1) = R$, то $R \in \omega$. В самом деле, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяют условию теоремы Дезарга, согласно которой точки P, Q, R пересечения их соответственных сторон коллинеарны. Из условий $(AA_1) \cap (CC_1) = S \in \omega$ и $(AC) \cap (A_1C_1) = R \in \omega$ следует, что $\overline{AA_1} \stackrel{\omega}{=} \overline{CC_1}$. $\square$

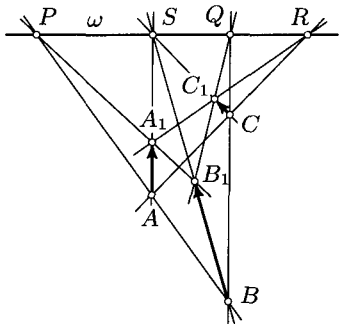


Рис. 63

По отношению эквивалентности множество всех направленных отрезков проективно-аффинной плоскости разбивается на классы эквивалентности.

Определение. Каждый из классов эквивалентности, на которые разбивается множество всех направленных отрезков по отношению эквивалентности, называется *вектором*. Направленные отрезки, принадлежащие данному вектору, называются его *представителями*.

Вектор задаётся любым своим представителем. Именно в этом смысле будем понимать запись $\vec{r} = \overline{AB}$. Кроме того, в дальнейшем при обозначении эквивалентных направленных отрезков $\overline{AB} \stackrel{\omega}{=} \overline{CD}$ букву ω

будем опускать, понимая под записью $\overline{AB} = \overline{CD}$ тот факт, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ являются представителями одного и того же вектора $\vec{r}$. В случаях, где не требуется скрупулезная точность выражений, ради сокращения речи вместо «вектор $\vec{r}$, заданный представителем (направленным отрезком) $\overline{AB}$ » будем говорить просто «вектор $\overline{AB}$ ». Вектор $\overline{AA}$ называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

29.3. Отношение коллинеарных векторов. Два вектора называются *коллинеарными*, если их представители принадлежат параллельным прямым или одной прямой.

Определение. Пусть A, B, C — три собственные точки прямой, имеющей несобственную точку D_ω . Отношением направленных отрезков $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ называется двойное отношение $(ABCD_\omega)$:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = (ABCD_\omega). \quad (\text{IV.4})$$

Отношением коллинеарных векторов называется отношение их представителей, имеющих общее начало.

Надо, конечно, доказать, что отношение коллинеарных векторов не зависит от выбора их представителей. Действительно, если $\overline{CA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{CA} \parallel \overline{C_1A_1}$ и $\overline{CB} \parallel \overline{C_1B_1}$ (рис. 64), то $(CA) \cap (C_1A_1) = D_\omega$ и $(AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) = S_\omega$. Так как двойное отношение четырёх точек прямой инвариантно относительно центрального проектирования, то $(ABCD_\omega) = (A_1B_1C_1D_\omega)$ и, значит, $\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{C_1A_1} : \overline{C_1B_1}$.

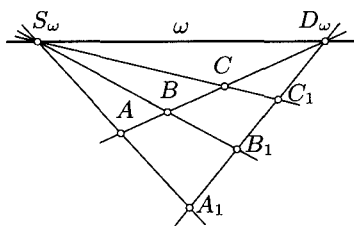


Рис. 64

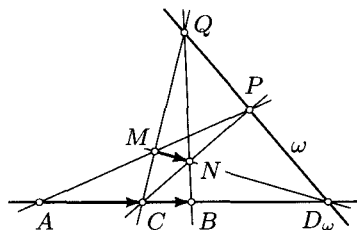


Рис. 65

Теорема. Для любых двух различных точек A и C имеет место равенство

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AC}} = -1.$$

Доказательство. Пусть $(AB) \cap \omega = D_\omega$. Построим полный четырёхвершинник $PQMN$, в котором $(PQ) = \omega$, C и D_ω — диагональные точки (рис. 65). Тогда четвёрка точек A, B, C, D_ω будет гармонической:

$(ABCD_\omega) = -1$ и $\overline{CB} = \overline{MN} = \overline{AC}$. В соответствии с соотношением (IV.4) имеем $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$ и $\frac{\overline{CA}}{\overline{AC}} = -1$. $\square$

Определение. Точка C называется *серединой отрезка AB* , если выполнено условие $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$.

Отношение коллинеарных векторов есть инвариант группы проективно-аффинных преобразований, поскольку оно определено через проективно-аффинные понятия: параллельность прямых и двойное отношение четырёх точек прямой.

§ 30. Умножение вектора на число

Пусть даны вектор $\bar{r} = \overline{AB}$ и число $\alpha \neq 0$. Если $(AB) \cap \omega = D_\omega$, то по теореме 1 из п. 6.3 существует единственная такая точка $C \in (AB)$, что $(D_\omega ABC) = \alpha$. Так как $(D_\omega ABC) = (CBAD_\omega)$, то по формуле (IV.4) получаем

$$\alpha = (CBAD_\omega) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Этим самым оправдано следующее определение.

Определение. Произведением вектора $\overline{AB} \neq \bar{0}$ на число $\alpha \neq 0$, называется такой вектор $\overline{AC}$, что $C \in (AB)$ и $D_\omega ABC = \alpha$, $D_\omega = (AB) \cap \omega$.

Итак, по определению

$$(D_\omega ABC) \overline{AB} = \overline{AC}. \quad (\text{IV.5})$$

При $\bar{r} = \bar{0}$ или $\alpha = 0$ полагаем по определению $\alpha \bar{r} = \bar{0}$.

Докажем проективными средствами свойства этой операции.

30.1. Ассоциативность умножения вектора на число. Для любых действительных чисел α и β и любого вектора $\bar{r}$ истинно равенство

$$\alpha(\beta \bar{r}) = (\alpha\beta) \bar{r}. \quad (\text{IV.6})$$

Доказательство. При $(\bar{r} = \bar{0}) \vee (\alpha = 0) \vee (\beta = 0)$ равенство (IV.6) очевидно. Поэтому далее будем считать, что $\bar{r} \neq \bar{0}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Пусть $\overline{OA} = \bar{r}$, $(OA) \cap \omega = X$, $\beta = (XOAB)$. Тогда согласно определению (IV.5) $\beta \bar{r} = (XOAB) \overline{OA} = \overline{OB}$. Далее,

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \bar{r}) &= \alpha \overline{OB} = (XOBC) \overline{OB} = \overline{OC}, \\ \alpha\beta &= (XOBC)(XOAB) = \frac{(XOAC)}{(XOAB)} (XOAB) = (XOAC). \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Здесь использовано соотношение $(ABCD) = \frac{(ABCM)}{(ABDM)}$ для любых пяти точек прямой (см. задачу I.18). Следовательно,

$$(\alpha\beta)\bar{r} = (XOAC')\overline{OA} = \overline{OC}. \quad (\text{IV.8})$$

Из формул (IV.7) и (IV.8) следует доказываемое равенство (IV.6). $\square$

30.2. Дистрибутивный закон умножения вектора на число.

Для любого действительного числа α и любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ истинно соотношение

$$\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}. \quad (\text{IV.9})$$

Доказательство. При $(\alpha = 0) \vee (\bar{a} = \bar{0}) \vee (\bar{b} = \bar{0})$ это соотношение выполняется по определению умножения вектора на число. Поэтому далее будем полагать, что $\alpha \neq 0$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Проведём доказательство для $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Выберем проективно-аффинную систему координат $\{XYOE\}$ так, чтобы выполнялись равенства $\bar{e}_1 = \overline{OE}_1 = \bar{a}$, $\bar{e}_2 = \overline{OE}_2 = \bar{b}$ (рис. 66). Тогда $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OE}_1 + \overline{OE}_2 = \overline{OE}$. Построим $\overline{OA} = \alpha\bar{a}$, $\overline{OB} = \alpha\bar{b}$, откуда $(XOE_1A) = (YOE_2B) = \alpha$. Положим $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$. Поскольку $\overline{OA} = \alpha\bar{e}_1$, $\overline{OB} = \alpha\bar{e}_2$, $\overline{OC} = \alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2$, то точки A, B, C имеют соответственно координаты $(\alpha, 0, 1)$, $(0, \alpha, 1)$, $(\alpha, \alpha, 1)$. Точки $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$, $C(\alpha, \alpha, 1)$ коллинеарны, так как определитель из их координат равен нулю. Если $(OC) \cap (XY) = D_\omega$, то по определению произведения вектора на число $(D_\omega OEC)\overline{OE} = \overline{OC}$, откуда вследствие того, что $(D_\omega OEC) = (XOE_1A) = \alpha$, следует соотношение (IV.9) для случая $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. $\square$

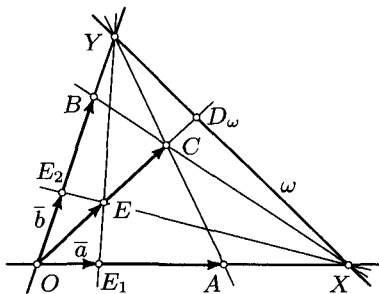


Рис. 66

§ 31. Аффинное истолкование проективных теорем

Теперь, когда определены все основные понятия проективно-аффинной геометрии, можно вывести всю аффинную геометрию из проективной. Способ получения аффинных теорем из проективных покажем на нескольких примерах. В следующем параграфе будут рассмотрены свойства линий второго порядка на проективно-аффинной и аффинной плоскостях.

Возвратимся к полному четырёхвершиннику и его гармоническим свойствам (§10). Пусть M, N, P — диагональные точки полного четырёхвершинника $ABCD$ (рис. 12). Если диагональ MN является несобственной прямой, то по определению $(AB) \parallel (CD)$ и $(BC) \parallel (AD)$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм (при обычном его определении). Так как $(ACPF_\omega) = -1$ и $(DBPE_\omega) = -1$, то по определению (§29) точка P является серединой отрезков AC и BD .

Итак, доказано, что *точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам*.

Сейчас заново выберем несобственную прямую ω так, чтобы выполнялось условие $D \in \omega$, но все остальные точки рассматриваемой фигуры не принадлежали ω . Тогда $(AN) \parallel (CM)$ и четырёхугольник $ACMN$ есть трапеция. Если прямую ω считать бесконечно удалённой, то фигура, изображенная на рис. 12, на аффинной плоскости будет иметь вид, иллюстрируемый рис. 67. Поскольку $(ACPF) = (NMEF) = -1$, то получаем следующее свойство. *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, пересекает боковые стороны в точках, каждая из которых гармонически сопряжена с точкой пересечения боковых сторон относительно вершин трапеции, принадлежащих соответственной боковой её стороне.*

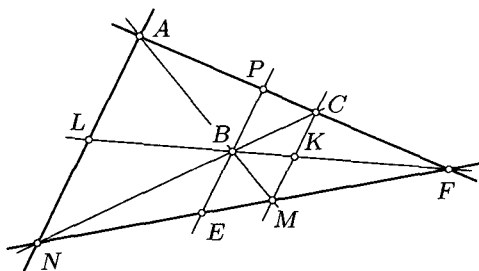


Рис. 67

Далее, пусть в рассматриваемой фигуре $(AN) \cap (BF) = L$, $(CM) \cap (BF) = K$. Так как $(PEBD_\omega) = (ANLD_\omega) = (CMKD_\omega) = -1$, то точки B, L, K являются соответственно серединами отрезков PE, AN, CM . Таким образом, получаем следующие выводы.

1. *Отрезок прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, который отсекается боковыми сторонами, делится точкой пересечения диагоналей пополам.*

2. *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения боковых сторон, содержит также середины оснований.*

А так как $(LKBF) = (ACPF) = -1$, то получаем такой результат.

3. *Средины оснований трапеции гармонически разделяют пару точек, образованную точкой пересечения диагоналей и точкой пересечения боковых сторон.*

Из последнего свойства вытекает аффинный способ построения точки, четвёртой гармонической к трём данным. Пусть даны точки L, K, B и требуется построить точку F , которая в паре с точкой B гармонически разделяет пару L, K . Для этого через точки L и K проводим две произвольные параллельные прямые LN и KM (рис. 67), а через B — произвольную пересекающую их прямую AM (A и M — точки пересечения). Строим точку C так, чтобы точка K была серединой отрезка MC . Тогда прямая LK и прямая AC пересекаются в искомой точке F .

§ 32. Линии второго порядка на проективно-аффинной плоскости

32.1. Аффинные свойства линий второго порядка. На проективно-аффинной плоскости невырожденные линии второго порядка по отношению к несобственной прямой ω можно разделить на три типа.

Определение. Невырожденная линия второго порядка называется *эллипсом*, если она не имеет общих действительных точек с несобственной прямой ω ; называется *гиперболой*, если пересекает прямую ω в двух действительных различных точках; называется *параболой*, если касается прямой ω .

Разделение невырожденных линий второго порядка на эллипсы, гиперболы и параболы инвариантно относительно проективно-аффинных преобразований, так как инвариантно число несобственных точек линии второго порядка.

Определение. *Центром* линии второго порядка называется полюс несобственной прямой относительно этой линии.

Понятие центра линии второго порядка относится к проективно-аффинной геометрии. В самом деле, пусть при проективно-аффинном преобразовании линия γ отображается на γ' , точка A — на точку A' . Тогда поляр a точки A относительно γ отображается на поляр a' точки A' относительно γ' (по определению поляры и в силу инвариантности двойного отношения). Так как $\omega \rightarrow \omega$, то центр линии γ отображается на центр линии γ' .

Невырожденная линия второго порядка имеет единственный центр, причём центр эллипса и центр гиперболы — собственные точки, а центр параболы несобственный.

Определение. Касательная к линии второго порядка в её несобственной точке называется *асимптотой* этой линии.

При проективно-аффинном преобразовании асимптота линии второго порядка отображается на асимптоту её образа.

Гипербола имеет две различные действительные асимптоты. Асимптота параболы есть прямая ω , поэтому на аффинной плоскости парабола не имеет асимптот. Эллипс не имеет асимптот.

Определение. Прямая, проходящая через центр линии второго порядка, называется *диаметром* этой линии. Два диаметра линии второго порядка называются *сопряжёнными*, если один из них проходит через полюс другого относительно этой линии.

В силу свойства взаимности полюсов и поляр отношение сопряжённости диаметров симметрично. Все диаметры параболы параллельны.

Согласно формулам (III.16) прямая $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ относительно кривой $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ имеет своим полюсом точку $(u_1, u_2, -u_3)$. Поэтому координатный критерий сопряжённости двух диаметров

$$u_1x_1 + u_2x_2 = 0, \quad v_1x_1 + v_2x_2 = 0$$

этой кривой имеет вид

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0. \quad (\text{IV.10})$$

Теорема. Каждый из двух сопряжённых диаметров линии второго порядка делит пополам хорды этой линии, параллельные другому диаметру.

Доказательство. Пусть O — центр линии второго порядка, а a и b — два её сопряжённых диаметра. Так как a и b проходят через полюс O прямой ω , то прямая ω содержит полюсы A_ω и B_ω прямых a и b (рис. 68). По определению сопряжённых диаметров и в силу симметричности этого отношения $A_\omega \in b$ и $B_\omega \in a$. Пусть $(PQ) \parallel a$ и $(PQ) \cap b = M$. По определению поляры $(PQMB_\omega) = -1$, и по определению середины отрезка точка M — середина отрезка PQ . $\square$

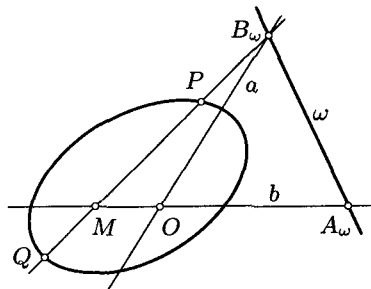


Рис. 68

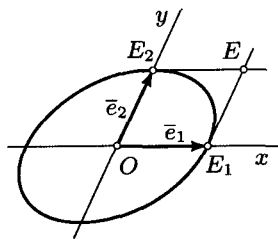


Рис. 69

32.2. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в аффинных координатах. Пусть $A_1A_2A_3$ — автополярный треугольник относительно невырожденной линии γ и E — точка пересечения касательных к γ , проведённых из точек A_1 и A_2 (см. рис. 58).

Тогда в проективной системе координат $\{A_1A_2A_3E\}$ линия γ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (§27). Пусть теперь $(A_1A_2) = \omega$ и ω не пересекает γ , т. е. γ — эллипс на проективно-аффинной плоскости (рис. 69). Тогда $A_3 = 0$ — центр эллипса, (A_1A_3) и (A_2A_3) — два его сопряжённых диаметра. В аффинных координатах ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$) уравнение этого эллипса имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Если ω — бесконечно удалённая прямая, то проективно-аффинная плоскость становится расширенной аффинной плоскостью и рис. 58 принимает вид, представленный на рис. 69.

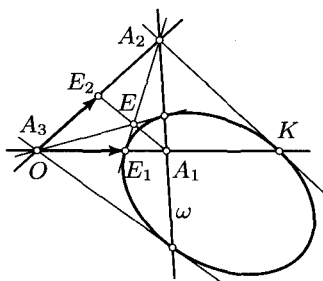


Рис. 70

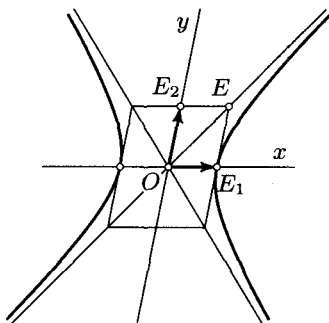


Рис. 71

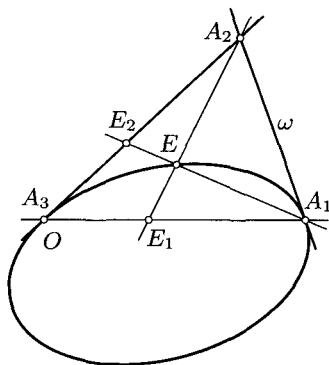


Рис. 72

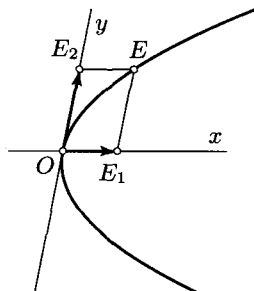


Рис. 73

Если прямая $(A_1A_2) = \omega$ пересекает линию γ (рис. 70), то γ — гипербола. В проективных координатах в соответствии с выбором системы координат она имеет уравнение $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. В аффинных координатах оно записывается в виде

$$x^2 - y^2 = 1.$$

При переходе к аффинной плоскости гипербола будет иметь вид, изображенный на рис. 71.

Если $A_1 \in \gamma$, $A_2 \in \gamma$, $E \in \gamma$ и прямые A_3A_1 и A_3A_2 касаются γ , т. е. служат асимптотами гиперболы (см. рис. 33), то её уравнение имеет вид $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ (§20), или, в аффинных координатах,

$$xy = 1.$$

Пусть теперь прямая $(A_1A_2) = \omega$ касается ω в точке A_1 и (A_3A_2) касается γ в точке A_3 (рис. 72), т. е. γ — парабола. В соответствии с соотношением (III.3) её уравнение при $E \in \gamma$ будет иметь вид $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, или, в аффинных координатах (рис. 73),

$$y^2 = x.$$

32.3. Аффинная классификация линий второго порядка. Выбором несобственной прямой ω из пяти проективных типов линий второго порядка (§21) можно получить все их аффинные типы. Во всех случаях, кроме параболы, это можно сделать формально путём перенумерации переменных в проективных уравнениях и перехода к аффинным координатам. Результаты представим в следующей таблице.

№	Тип	Уравнение в координатах		Название линии
		проективных	аффинных	
1	I	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 1$	эллипс
2	I	$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 - y^2 = 1$	гипербола
3	I	$x_1x_3 - x_2^2 = 0$	$y^2 = x$	парабола
4	II	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 + y^2 = -1$	мнимый эллипс
5	III	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$x^2 - y^2 = 0$	пара действительных пересекающихся прямых
6	III	$x_1^2 - x_3^2 = 0$	$x^2 = 1$	пара действительных параллельных прямых
7	IV	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 0$	пара мнимых пересекающихся прямых
8	IV	$x_1^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 = -1$	пара мнимых параллельных прямых
9	V	$x_1^2 = 0$	$x^2 = 0$	пара действительных совпадающих прямых

Сделаем некоторые пояснения к этой таблице. Названия линий №№ 1, 2, 3 находятся в соответствии с данным выше определением эллипса, гиперболы и параболы, в чём убеждаемся решением их уравнений с уравнением $x_3 = 0$ несобственной прямой.

Уравнение $x_1^2 - x_3^2 = 0$ задаёт пару прямых $x_1 + x_3 = 0$ и $x_1 - x_3 = 0$, проходящих через несобственную точку $A_2(0 : 1 : 0)$, т. е. параллельных с проективно-аффинной точки зрения. По этой же причине уравнением $x_1^2 + x_3^2 = 0$ задаётся пара мнимых параллельных прямых. Мнимая невырожденная линия № 4 на проективно-аффинной плоскости называется мнимым эллипсом вследствие аналогии её уравнения с уравнением эллипса.

Указанные в этой таблице девять типов линий второго порядка представляют собой все аффинные их типы, т. е. любые две линии одного типа аффинно эквивалентны, а любые две линии разных типов аффинно неэквивалентны.

Для доказательства построим такие проективно-аффинные системы координат, в которых заданные две линии одного типа имеют одинаковые канонические уравнения в проективных координатах, причём прямая ω является общей стороной их координатных треугольников. Проективное преобразование, задаваемое этими системами, отображает одну линию на другую, причём $\omega \rightarrow \omega$. Это преобразование является проективно-аффинным, и поэтому две линии одного типа аффинно эквивалентны. Две линии, принадлежащие к разным из девяти указанных типов, не могут быть аффинно эквивалентными, так как они либо проективно неэквивалентны, либо в случае проективной эквивалентности имеют различное число несобственных точек.

§ 33. Проективно-евклидова плоскость.

Преобразования подобия

Сейчас перед нами стоит задача построения евклидовой геометрии на базе проективно-аффинной геометрии. Для этого надо выделить специальную подгруппу проективно-аффинной группы преобразований.

Зададим некоторую прямую ω в качестве несобственной прямой проективно-аффинной плоскости и невырожденную действительную линию γ второго порядка, не имеющую с ω общих действительных точек. Построим треугольник $A_1 A_2 A_3$, автополярный относительно γ , так, чтобы выполнялось условие $(A_1 A_2) = \omega$ (рис. 58). За единичную точку E выберем точку пересечения касательных к γ , проведённых из A_1 и A_2 . Тогда в системе $\{A_1 A_2 A_3 E\}$ прямая ω имеет уравнение $x_3 = 0$, а кри-

вая γ (эллипс) имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (§27). Решая систему этих уравнений, находим координаты двух мнимых сопряжённых точек $J_1(1 : i : 0)$ и $J_2(1 : -i : 0)$ пересечения ω и γ .

Точки J_1 и J_2 называются *мнимыми циклическими точками* несобственной прямой ω . При выбранной прямой ω они определяются заданием эллипса γ и позволяют, как мы увидим, ввести мероопределение отрезков и углов.

Точки A_1, A_2, J_1, J_2 образуют гармоническую четвёрку. Действительно, по формулам (I.15) имеем

$$(A_1 A_2 J_1 J_2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}} = -1.$$

Нетрудно проверить, что прямые $A_3 A_1$ и $A_3 A_2$ касаются эллипса γ в точках J_1 и J_2 .

Определение 1. Проективная плоскость называется *проективно-евклидовой плоскостью*, если на ней фиксирована несобственная прямая ω и две её мнимые циклические точки.

Иначе говоря, проективно-евклидовой плоскостью называется проективно-аффинная плоскость, если на ней заданы две мнимые циклические точки несобственной прямой.

Определение 2. Совокупность несобственной прямой ω и двух её мнимых циклических точек называется *абсолютом* проективно-евклидовой плоскости.

Определение 3. Проективные преобразования проективно-евклидовой плоскости называются *преобразованиями подобия*, если они отображают её абсолют на себя.

Из определения 3 и определения из §28 следует, что преобразования подобия проективно-евклидовой плоскости являются проективно-аффинными преобразованиями. Если их рассматривать только на множестве всех собственных точек, то они являются аффинными преобразованиями (IV.3).

На основании определения 3 легко проверяется, что *множество всех преобразований подобия проективно-евклидовой плоскости является группой*. Она называется *группой подобий*. Геометрия, порождённая группой подобий, называется *проективно-евклидовой геометрией*.

33.1. Формулы преобразования подобия в проективных координатах необходимо должны быть частным видом формул (IV.2)

проективно-аффинного преобразования. Согласно определению 3 этим преобразованием пара мнимых циклических точек J_1 и J_2 отображается на себя. Это возможно в двух и только в двух случаях: 1) $J_1 \rightarrow J_1$ и $J_2 \rightarrow J_2$; 2) $J_1 \rightarrow J_2$ и $J_2 \rightarrow J_1$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1. Подставляя координаты точек J_1 и J_2 в первые две формулы (IV.2), получаем

$$\begin{aligned} 1 \rho_1 &= 1 c_{11} + i c_{12} + 0 c_{13}, \\ i \rho_1 &= 1 c_{21} + i c_{22} + 0 c_{23} \quad (J_1 \rightarrow J_1), \\ 1 \rho_2 &= 1 c_{11} + (-i) c_{12} + 0 c_{13}, \\ (-i) \rho_2 &= 1 c_{21} + (-i) c_{22} + 0 c_{23} \quad (J_2 \rightarrow J_2). \end{aligned}$$

Умножим почленно второе и четвёртое из этих равенств соответственно на $-i$ и i , переписав остальные без изменения:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c_{11} + i c_{12}, & \rho_1 &= -i c_{21} + c_{22}, \\ \rho_2 &= c_{11} - i c_{12}, & \rho_2 &= i c_{21} + c_{22}. \end{aligned}$$

Отсюда $c_{11} = c_{22}$ и $c_{12} = -c_{21}$, и формулы (IV.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3, \\ \rho x'_2 &= -c_{12} x_1 + c_{11} x_2 + c_{23} x_3, \\ \rho x'_3 &= c_{33} x_3, \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{vmatrix} = c_{11}^2 + c_{12}^2 > 0, \quad c_{33} \neq 0.$$

Преобразования подобия (IV.11) называются *преобразованиями подобия первого рода*.

2. При $J_1 \rightarrow J_2$ и $J_2 \rightarrow J_1$ этим же путём получаем $c_{11} = -c_{22}$ и $c_{12} = c_{21}$. Преобразования подобия в этом случае записываются формулами

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{12} x_1 - c_{11} x_2 + c_{23} x_3, \\ \rho x'_3 &= c_{33} x_3, \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & -c_{11} \end{vmatrix} = -c_{11}^2 - c_{12}^2 < 0, \quad c_{33} \neq 0.$$

Преобразования подобия (IV.12) называются *преобразованиями подобия второго рода*.

Если преобразования подобия рассматривать только на множестве всех собственных точек проективно-евклидовой плоскости и перейти к аффинным координатам $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, то преобразования подобия первого и второго родов запишутся соответственно формулами

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c_1, \\ y' &= -bx + ay + c_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

и

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c_1, \\ y' &= bx - ay + c_2, \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$.

§34. Длина отрезка и мера угла на проективно-евклидовой плоскости. Групповой подход к евклидовой геометрии

Несобственная прямая ω и эллипс γ , пересечением которых является пара мнимых циклических точек J_1 и J_2 , позволяют ввести метрику проективно-евклидовой плоскости. Начнём с введения понятия длины отрезка.

Пусть O — центр эллипса γ и M — произвольная точка плоскости. Если P — одна из общих точек прямой OM и эллипса γ (рис. 74), то за

длину отрезка OM примем по определению число $\left| \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \right|$:

$$|OM| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \right|.$$

Если $(OM) \cap \omega = C_\omega$, то на основании соотношения (IV.5) имеем

$$|OM| = |(C_\omega OPM)|.$$

В силу этого определения

$$|OP| = 1,$$

и поэтому эллипс γ становится окружностью единичного радиуса (при обычном определении окружности).

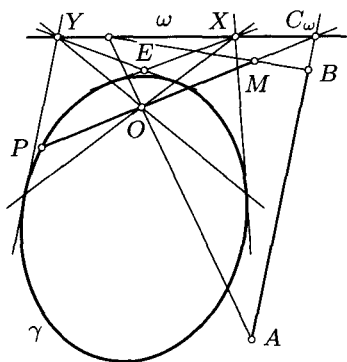


Рис. 74

Длиной произвольного отрезка AB будем считать длину эквивалентного ему отрезка OM с началом в центре O единичной окружности γ (рис. 74).

Получим формулу длины отрезка в той проективно-аффинной системе координат $\{X\Upsilon OE\}$, в которой единичная (масштабная) окружность γ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Пусть $(m_1 : m_2 : m_3)$ — проективные координаты точки M . Тогда прямая OM имеет уравнение $m_2 x_1 = m_1 x_2$. Решая его совместно с уравнением окружности γ , находим $P(m_1 : m_2 : \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2})$. Учитывая, что C_ω имеет координаты $(m_1 : m_2 : 0)$, в соответствии с формулой (I.16) имеем

$$|OM| = |(C_\omega OPM)| = \frac{\left| \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ m_1 & \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} \right|}{\left| \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m_1 & \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \end{vmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{|m_3|}.$$

Двойные знаки в этой выкладке согласуются. Переходя к проективно-аффинным координатам, полагаем $m_3 = 1$ и поэтому

$$|OM| = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad (\text{IV.15})$$

где M имеет координаты $(m_1, m_2, 1)$.

Для произвольного отрезка AB при $A(x_1, y_1, 1)$ и $B(x_2, y_2, 1)$ построим эквивалентный ему отрезок OM . Так как $\overline{AB} = \overline{OM}$, то $x_2 - x_1 = m_1$ и $y_2 - y_1 = m_2$. По определению $|AB| = |OM|$, и в силу соотношения (IV.15) имеем

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Как изменится длина отрезка при преобразованиях подобия (IV.13) и (IV.14)? Пусть $A'(x'_1, y'_1, 1)$ и $B'(x'_2, y'_2, 1)$ — образы точек $A(x_1, y_1, 1)$ и $B(x_2, y_2, 1)$ при подобии первого рода. Тогда

$$\begin{aligned} |A'B'|^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = (ax_2 + by_2 + c_1 - ax_1 - by_1 - c_1)^2 + \\ &+ (-bx_2 + ay_2 + c_2 + bx_1 - ay_1 - c_2)^2 = \\ &= (a^2 + b^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) = (a^2 + b^2)|AB|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|A'B'| = k|AB|, \quad (\text{IV.16})$$

где $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ — постоянное число, называемое коэффициентом подобия. Этот же результат имеет место и для подобий II рода.

Переходим к введению мероопределения углов на проективно-евклидовой плоскости. Пусть прямые u и v , содержащие стороны данного угла с вершиной S , имеют соответственно уравнения $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ и $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$. Тогда точки U и V их пересечения с ω будут иметь координаты $(u_2 : -u_1 : 0)$ и $(v_2 : -v_1 : 0)$. Введём в рассмотрение мнимые прямые $(SJ_1) = j_1$ и $(SJ_2) = j_2$ и двойное отношение (uvj_1j_2) четвёрки прямых пучка с центром S . Руководствуясь формулой (I.15), находим

$$\begin{aligned} (uvj_1j_2) &= (UVJ_1J_2) = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & -u_1 \\ 1 & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & -v_1 \\ 1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & -u_1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & -v_1 \\ 1 & i \end{vmatrix}} = \frac{(u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2)}{(u_1 - iu_2)(v_1 + iv_2)} = \\ &= \frac{(u_1 + iu_2)^2(v_1 - iv_2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{((u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2))^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)} = \\ &= \frac{((u_1v_1 + u_2v_2) + i(u_2v_1 - u_1v_2))^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{(uvj_1j_2)} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} + i \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{u_2v_1 - u_1v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)^2 = 1,$$

положим

$$\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \sin \varphi, \quad (\text{IV.17})$$

где φ — действительное число из промежутка $(0, \pi)$. Тогда

$$\sqrt{(uvj_1j_2)} = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Логарифмируем по основанию e :

$$\frac{1}{2} \ln(uvj_1j_2) = i\varphi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{2i} \ln(uvj_1j_2). \quad (\text{IV.18})$$

Как известно, логарифмическая функция комплексного переменного многозначна. Если ограничиться главным значением логарифма, то величина φ будет функцией упорядоченной пары прямых (u, v) . Поэтому естественно эту величину φ принять по определению за меру угла

между прямыми u и v . Вместе с принятием этого определения меры φ угла между прямыми мы имеем координатные формулы (IV.17) для косинуса и синуса угла между прямыми. Формула (IV.18) называется *формулой Лагерра*.

Так как двойное отношение четырёх прямых пучка есть инвариант подобий, а пара (J_1, J_2) мнимых циклических точек отображается при подобии на себя, то *величина φ угла между прямыми инвариантна (с точностью до знака) относительно подобий*.

Отметим важный частный случай, когда четвёрка (u, v, j_1, j_2) прямых является гармонической. Принимая во внимание, что $\ln(-1) = \pi i$, по формуле Лагерра получаем $\varphi = \frac{\pi}{2}$. С другой стороны, поскольку $(UVJ_1J_2) = -1$, то

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & -u_1 \\ 1 & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & -v_1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \right) : \left(\begin{vmatrix} u_2 & -u_1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & -v_1 \\ 1 & i \end{vmatrix} \right) = -1$$

или $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$, что совпадает с критерием сопряжённости (IV.10) прямых u, v относительно единичной окружности γ . Сравнение этих результатов приводит к необходимости принять такое определение: две прямые проективно-евклидовой плоскости называются *перпендикулярными*, если они полярно сопряжены относительно масштабной окружности γ .

Введение мероопределения отрезков и углов превращает проективно-аффинную систему $\{XYOE\}$ координат в прямоугольную декартову.

Абсолют проективно-евклидовой плоскости состоит из мнимых циклических точек J_1 и J_2 и содержащей их действительной прямой ω (§33). Его можно задать только действительными образами — эллипсом γ (в качестве единичной окружности) и его центром O . Тогда несобственная прямая ω будет полярной точки O относительно γ , а точки J_1 и J_2 — точками пересечения ω и γ .

Задание единичной окружности и её центра позволяет решать любые метрические задачи на проективно-евклидовой плоскости.

Заметим, что *всякая окружность проективно-евклидовой плоскости содержит её мнимые циклические точки*. Отсюда они и получили своё название циклических. Действительно, окружность γ проходит через эти точки. Возьмём произвольную окружность α с центром A . Проективное преобразование, при котором пара (J_1, J_2) отображается на себя, O на A , а фиксированная точка окружности γ переходит в фиксированную точку окружности α , является подобием и поэтому переводит γ в α . Значит, $(J_1, J_2) \subset \alpha$.

Кривая второго порядка задаётся пятью своими точками. Для всех окружностей точки J_1 и J_2 постоянны. Поэтому *окружность задаётся тремя неколлинеарными точками*.

На основании равенства (IV.16) движения будут иметь формулы (IV.13) и (IV.14) при дополнительном условии $a^2 + b^2 = 1$. Если положить $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$, то формулы движений примут известный вид

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + c_1, \\ y' = \mp x \sin \varphi \pm y \cos \varphi + c_2, \end{cases}$$

где во второй формуле верхние знаки относятся к движениям первого рода, нижние — к движениям второго рода.

§35. Проективно-аффинная модель псевдоевклидовой геометрии

В конце своей жизни выдающийся немецкий математик и физик Герман Минковский (1864–1909) создал геометрическую интерпретацию специальной теории относительности. В работе «Пространство и время» (1909) он изложил геометрию, носящую его имя, — геометрию Минковского. Позднее её стали называть псевдоевклидовой геометрией.

35.1. Абсолют псевдоевклидовой плоскости. Две мнимые циклические точки абсолюта евклидовой плоскости заменим парой действительных точек U и V несобственной прямой ω . Несобственная прямая ω с фиксированной парой (U, V) действительных точек этой прямой составляют абсолют двумерной геометрии, которую называют *псевдоевклидовой геометрией*, или *геометрией Минковского*. Ниже излагаются её начала на основе проективной геометрии.

С практической точки зрения, целесообразнее задать абсолют аналитически следующей системой:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

где первое уравнение определяет кривую γ второго порядка, а второе — несобственную прямую $\omega = (A_1 A_2) = (XY)$ (рис. 70, 75). Кривая γ — гипербола с асимптотами OU и OV . Согласно уравнениям (IV.19), точки U и V абсолюта имеют проективно-аффинные координаты $U(1, 1, 0)$, $V(1, -1, 0)$.

Так как несобственная прямая ω входит в состав абсолюта аффинной и псевдоевклидовой геометрий, то последняя является также и аффинной геометрией. Говоря точнее, *псевдоевклидова геометрия имеет аффинную базу*, т. е. все аффинные свойства фигур имеют место и в псевдоевклидовой геометрии.

Однако несобственные точки U и V абсолюта определяют специфику этой геометрии. Содержащие их собственные прямые называются *изотропными* прямыми псевдоевклидовой плоскости.

После перехода к аффинной плоскости рисунок 75 принимает вид, представленный на рис. 71, а числа $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$ ($x_3 \neq 0$) будут аффинными координатами точки M и вектора

$\overline{OM}$ относительно аффинного репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, где $\bar{e}_1 = \overline{OE}_1 = (1, 0)$, $\bar{e}_2 = \overline{OE}_2 = (0, 1)$. Кривая γ получает аффинное уравнение $x^2 - y^2 = 1$.

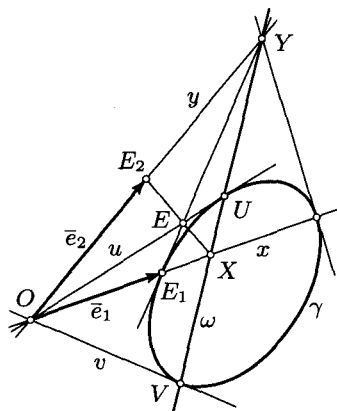


Рис. 75

35.2. Векторы псевдоевклидовой плоскости. Квадратичной форме $x^2 - y^2$ абсолюта (IV.19) однозначно соответствует билинейная форма

$$x_1x_2 - y_1y_2,$$

которой определяется *скалярное произведение* векторов $\bar{a} = (x_1, y_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2)$:

$$\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 - y_1y_2 \quad (\text{IV.20})$$

и соответственно скалярный квадрат вектора $\bar{r} = (x, y)$:

$$\bar{r}^2 = x^2 - y^2, \quad |\bar{r}| = \sqrt{\bar{r}^2}. \quad (\text{IV.21})$$

В частности, $\bar{e}_1\bar{e}_2 = 0$, $\bar{e}_1^2 = 1$, $\bar{e}_2^2 = -1$. Следовательно, аффинный репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ становится *ортонормированным* репером.

Существенно различны три возможных случая:

$$\bar{r}^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > y^2,$$

$$\bar{r}^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < y^2,$$

$$\bar{r}^2 = 0 \ (\bar{r} \neq 0) \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Соответственно этим случаям векторы называются *евклидовыми*, *псевдоевклидовыми* и *изотропными*. Коллинеарные векторы принадлежат

одному типу. Векторы $\overline{OM}$ точек M гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ являются евклидовыми, векторы $\overline{ON}$ точек N сопряжённой ей гиперболы $x^2 - y^2 = -1$ necessarily псевдоевклидовы. Изотропные векторы коллинеарны асимптотам u и v этих гипербол (рис. 76).

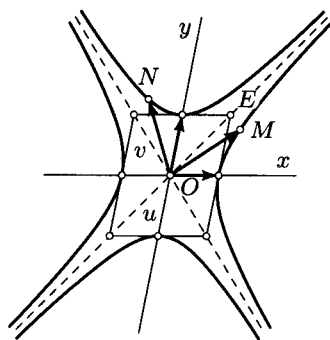


Рис. 76

Векторы называются *ортогональными*, когда их скалярное произведение равно нулю.

Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место изменённое неравенство Коши—Буняковского

$$(\bar{a}\bar{b})^2 \geq \bar{a}^2 \bar{b}^2. \quad (\text{IV.22})$$

Действительно, имеем

$$(\bar{a}\bar{b})^2 = (x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + (y_1 y_2)^2,$$

$$\bar{a}^2 \bar{b}^2 = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = (x_1 x_2)^2 - (x_1 y_2)^2 - (y_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2.$$

Но из очевидного неравенства $(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \geq 0$ следует, что $2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq (x_1 y_2)^2 + (y_1 x_2)^2$, откуда и вытекает истинность неравенства (IV.22). Знак равенства имеет место лишь для коллинеарных векторов.

35.3. Угол между векторами. Согласно неравенству (IV.22) $(\bar{a}\bar{b})^2 / (\bar{a}^2 \bar{b}^2) \geq 1$. Поэтому, принимая во внимание, что гиперболический косинус не меньше единицы, в качестве величины φ угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ примем число φ , для которого выполняется равенство

$$\text{ch } \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}^2| |\bar{b}^2|}. \quad (\text{IV.23})$$

Отсюда находим

$$\text{th}^2 \varphi = \frac{\text{sh}^2 \varphi}{\text{ch}^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \varphi} = 1 - \frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{(\bar{a}\bar{b})^2} = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2}.$$

Следовательно,

$$\text{th } \varphi = \frac{|x_1 y_2 - y_1 x_2|}{|x_1 x_2 - y_1 y_2|}.$$

По определению углового коэффициента вектора $\frac{y_1}{x_1} = k_1$, $\frac{y_2}{x_2} = k_2$. Разделив числитель и знаменатель полученного выражения на $x_1 x_2$, получаем

$$\text{th } \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 - k_1 k_2}.$$

Знак абсолютной величины оставлен лишь в числителе, так как произведение $k_1 k_2$ не зависит от порядка векторов. Для ориентированных углов этот знак не нужен и в числителе.

Из формулы (IV.23) с привлечением (IV.20) получаем

$$\operatorname{sh}^2 \varphi = \operatorname{ch}^2 \varphi - 1 = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}{\bar{a}^2 \bar{b}^2}. \quad (\text{IV.24})$$

В псевдоевклидовой плоскости приходится рассматривать мнимые углы между векторами, так как не для всех действительных значений φ равенство (IV.23) имеет место. В частности, угол между векторами разных типов всегда имеет мнимую меру φ .

Как известно,

$$\operatorname{ch} i\alpha = \cos \alpha \quad \text{и} \quad \cos i\alpha = \operatorname{ch} \alpha.$$

Для ортогональных неизотропных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеем

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}i.$$

Мера φ развёрнутого угла равна πi , так как если $\alpha = \pi$, то $\varphi = \pi i$.

§ 36. Проективные преобразования, сохраняющие абсолют псевдоевклидовой плоскости

36.1. Псевдоевклидовы подоби́я. Как было определено, проективные преобразования плоскости, отображающие прямую ω ($x_3 = 0$) на себя, называются проективно-аффинными преобразованиями и представляются формулами (IV.12):

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= c_{33}x_3, \end{aligned} \quad c_{33}x_3 \neq 0. \quad (\text{IV.25})$$

Потребуем теперь, чтобы пара точек (U, V) абсолюта псевдоевклидовой плоскости сохранялась при преобразованиях (IV.25). Это возможно в двух и только в двух случаях:

- 1) $U(1, 1, 0) \rightarrow U(1, 1, 0), \quad V(1, -1, 0) \rightarrow V(1, -1, 0);$
- 2) $U(1, 1, 0) \rightarrow V(1, -1, 0), \quad V(1, -1, 0) \rightarrow U(1, 1, 0).$

В соответствии с формулами (IV.25) в первом случае имеем

$$\begin{cases} \rho_1 = c_{11} + c_{12}, \\ \rho_1 = c_{21} + c_{22}; \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_2 = c_{11} - c_{12}, \\ -\rho_2 = c_{21} - c_{22}, \end{cases}$$

откуда следует, что $c_{11} + c_{12} = c_{21} + c_{22}$ и $c_{11} - c_{12} = -c_{21} + c_{22}$, что, в свою очередь, влечёт равенства $c_{11} = c_{22}$ и $c_{12} = c_{21}$. Тогда делением первых двух равенств (IV.25) на третье, переходя к аффинным координатам и сменив соответственно обозначения, получаем

$$\begin{cases} x' = ax + by + c_1, \\ y' = bx + ay + c_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0. \quad (\text{IV.26})$$

Во втором случае тем же путём будем иметь $c_{11} = -c_{22}$ и $c_{12} = -c_{21}$, и тогда

$$\begin{cases} x' = ax + by + c_1, \\ y' = -bx - ay + c_1, \end{cases} \quad -a^2 + b^2 \neq 0. \quad (\text{IV.27})$$

Преобразования векторов псевдоевклидовой плоскости имеют соответственно однородные формулы

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = bx + ay, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = -bx - ay, \end{cases} \quad a^2 - b^2 \neq 0. \quad (\text{IV.28})$$

По этим формулам находим для обоих случаев

$$\bar{r}'_1 \bar{r}'_2 = (a^2 - b^2) \bar{r}_1 \bar{r}_2,$$

где $\bar{r}(x, y) \rightarrow \bar{r}'(x', y')$. В частности,

$$\bar{r}'^2 = (a^2 - b^2) \bar{r}^2.$$

Так как при преобразованиях (IV.27) и (IV.28) скалярные произведения векторов умножаются на постоянное число $a^2 - b^2$, то эти преобразования сохраняют величины углов между векторами псевдоевклидовой плоскости и отношения их скалярных квадратов. Это даёт право называть эти преобразования *псевдоевклидовыми подобиями* соответственно первого и второго родов.

36.2. Псевдоевклидовы движения. Если $a^2 - b^2 = 1$, то преобразование (подобие) (IV.26) сохраняет скалярные произведения векторов, а следовательно, расстояния и углы, т. е. представляет собой *псевдоевклидово движение* плоскости.

Выделим сначала особые случаи. При $a = 1$, $b = 0$ имеем перенос:

$$\begin{cases} x' = x + c_1, \\ y' = y + c_2, \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

а при $a = -1$, $b = 0$ — центральную симметрию:

$$\begin{cases} x' = -x + c_1, \\ y' = -y + c_2, \end{cases}$$

с центром $S\left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right)$.

Движения (IV.27) второго рода при $a = 1$, $b = 0$ и при $a = -1$, $b = 0$ суть соответственно осевые симметрии относительно Ox и Oy :

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Движения общего вида являются композициями движений (IV.28) с неподвижной точкой O и переносов (IV.29). Согласно равенству $a^2 - b^2 = 1$, положим $a^2 = \text{ch}^2 \varphi$, $b^2 = \text{sh}^2 \varphi$. Тогда для $a = \pm \text{ch} \varphi$, $b = \pm \text{sh} \varphi$ имеем (с точностью до замены φ на $-\varphi$) два вида движений первого рода:

$$\begin{cases} x' = x \text{ch} \varphi + y \text{sh} \varphi, \\ y' = x \text{sh} \varphi + y \text{ch} \varphi; \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{cases} x' = -x \text{ch} \varphi - y \text{sh} \varphi, \\ y' = -x \text{sh} \varphi - y \text{ch} \varphi, \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

и два вида движений второго рода:

$$\begin{cases} x' = x \text{ch} \varphi - y \text{sh} \varphi, \\ y' = x \text{sh} \varphi - y \text{ch} \varphi; \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{cases} x' = -x \text{ch} \varphi + y \text{sh} \varphi, \\ y' = -x \text{sh} \varphi + y \text{ch} \varphi. \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Движение (IV.30) называется *поворотом* псевдоевклидовой плоскости около точки O на угол φ . С аффинной точки зрения псевдоевклидов поворот является гиперболическим поворотом с базисной (неподвижной) гиперболой $x^2 - y^2 = 1$ (§18 ч. I). Движение (IV.31) есть

коммутативная композиция поворота (IV.30) и симметрии относительно точки O . Она является поворотом на угол $\varphi + \pi i$. Движения (IV.32) и (IV.33) суть композиции поворота (IV.30) и осевых симметрий относительно осей Ox и Oy .

Таким образом, группа движений псевдоевклидовой плоскости состоит из поворотов (на действительные и мнимые углы), осевых симметрий и переносов (включая тождественный перенос).

§ 37. Псевдоевклидова элементарная планиметрия

37.1. Сумма углов треугольника. Мера угла между векторами, в соответствии с её определением, сохраняется при замене данных двух векторов сонаправленными (противонаправленными) им векторами. Поэтому в псевдоевклидовой плоскости имеют место те же зависимости между углами, полученными при пересечении двух параллельных прямых третьей, что и в евклидовой плоскости. Отсюда следует, что сумма внутренних углов треугольника равна развёрнутому углу:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi i.$$

37.2. Площадь треугольника. Понятие площади относится к аффинной геометрии, поэтому имеет место и в псевдоевклидовой плоскости. Если за единицу площади принять площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ аффинного репера, то в равенстве (IV.24) числитель равен квадрату удвоенной площади треугольника ABC со сторонами $CA = b$ и $CB = a$:

$$2S = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Согласно этому равенству имеем

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sh} \hat{C}. \quad (\text{IV.34})$$

37.3. Теоремы синусов и косинусов. Аффинная формула площади треугольника не зависит от выбора пары его сторон. По этой причине не будет зависеть от этого выбора и формула (IV.34). Следовательно,

$$bc \operatorname{sh} \hat{A} = ca \operatorname{sh} \hat{B} = ab \operatorname{sh} \hat{C}.$$

При делении этих равенств на abc получаем

$$\frac{\operatorname{sh} \hat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sh} \hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sh} \hat{C}}{c}. \quad (\text{IV.35})$$

Для треугольника ABC используем общепринятые обозначения $\overline{CA} = \bar{b}$, $\overline{CB} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{c}$. Тогда $\bar{c}^2 = (\bar{b} - \bar{a})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\bar{b}$. Согласно равенству (IV.23) имеем $\bar{a}\bar{b} = ab \operatorname{ch} \hat{C}$, поэтому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{ch} \hat{C}. \quad (\text{IV.36})$$

Соотношения (IV.35) и (IV.36) выражают собой содержание теорем синусов и косинусов для треугольника псевдоевклидовой плоскости. В частности, для прямоугольного треугольника ABC выполняются равенства $\bar{a}\bar{b} = 0$, $\operatorname{ch} \hat{C} = 0$, а тогда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Формально теорема Пифагора в псевдоевклидовой плоскости имеет тот же вид, что и в евклидовой. Однако следует иметь в виду, что катеты псевдоевклидова треугольника — отрезки разных типов, гипотенуза же может быть отрезком любого типа.

37.4. Неравенство треугольника. Если все стороны треугольника имеют действительные длины, то большая из них больше суммы двух других.

В самом деле, из равенства (IV.36) следует, что $(2\bar{a}\bar{b})^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2$. Согласно неравенству (IV.22) Коши—Буняковского $(\bar{a}\bar{b})^2 > a^2b^2$ (равенство имеет место лишь для коллинеарных векторов). Поэтому $(a^2 + b^2 - c^2)^2 > 4a^2b^2$, откуда либо $(a - b)^2 > c^2$, либо $c^2 > (a + b)^2$. Следовательно, имеет место одно и только одно из трёх неравенств: либо $a > b + c$, либо $b > a + c$, либо $c > a + b$.

Следствие. Если стороны равнобедренного треугольника имеют действительные длины, то его боковая сторона меньше половины основания.

37.5. Окружности псевдоевклидовой плоскости. При обычном (евклидовом) определении окружности в силу формулы (IV.21) имеем уравнение окружности радиуса ρ с центром в начале координат:

$$x^2 - y^2 = \rho^2. \quad (\text{IV.37})$$

Существенно различны три возможных случая.

1. Радиус ρ окружности — действительное число. Тогда уравнение (IV.37) определяет гиперболу (рис. 76) с действительной осью Ox .

2. Радиус окружности имеет мнимую длину $\rho = i a$. Тогда уравнение (IV.37) принимает вид $x^2 - y^2 = -a^2$ и определяет в аффинной плоскости гиперболу с действительной осью Oy .

Гиперболы, соответствующие случаям 1 и 2, взаимно сопряжены (имеют общую пару асимптот). С псевдоевклидовой точки зрения их общие асимптоты являются парой изотропных прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

3. Радиус окружности имеет нулевую длину $\rho = 0$. Тогда окружность представляет собой пару изотропных прямых: $x^2 - y^2 = 0$ (вырожденная окружность).

Как показано в п. 17.6 первой части книги, уравнение

$$y = \frac{ax + b}{x + c} \quad (\text{IV.38})$$

также определяет гиперболу, т. е. псевдоевклидову окружность первого или второго типа.

Теорема. *Около всякого треугольника псевдоевклидовой плоскости можно описать окружность, причём только одну.*

Доказательство. Рассмотрим сначала особый случай, когда одна из сторон, например сторона AB треугольника ABC , принадлежит изотропной прямой. Тогда через вершину C проведём изотропную прямую, не параллельную AB . В результате вершины треугольника окажутся на окружности нулевого радиуса.

Пусть теперь все стороны треугольника неизотропные. Примем изотропные прямые за оси системы координат. Тогда окружности будут иметь уравнение вида (IV.38). Перепишем его так:

$$\begin{aligned} ax - cy + b &= xy, \quad b \neq ac, \\ (x + c)(y - a) &= b - ac. \end{aligned}$$

Точка $S(-c, a)$ — центр этой окружности. Для того чтобы вершины треугольника принадлежали этой окружности, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $a, -c, b$, для которых

$$\begin{cases} ax_1 - cy_1 + b = x_1y_1, \\ ax_2 - cy_2 + b = x_2y_2, \\ ax_3 - cy_3 + b = x_3y_3. \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку точки A, B, C неколлинеарны. Поэтому система (IV.39) всегда имеет единственное решение. Оно является нулевым лишь в случае, рассмотренном в начале доказательства. $\square$

§ 38. Проективная модель плоскости Лобачевского

38.1. Абсолют. В отличие от абсолютов аффинной, евклидовой и псевдоевклидовой геометрий абсолютом геометрии Лобачевского, называемой также *гиперболической геометрией*, служит не прямая, а невырожденная кривая ω второго порядка (§27, рис. 58):

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Поэтому гиперболическая плоскость не является аффинной плоскостью, что влечёт за собой глубокую специфику её геометрии, непохожесть на рассмотренные выше геометрии. По отношению к абсолюту ω точки проективной плоскости делятся на три типа (класса): 1) *собственные точки* плоскости Лобачевского — внутренние точки относительно абсолюта; 2) *несобственные точки* плоскости Лобачевского — точки абсолюта; 3) *идеальные точки* — внешние точки относительно абсолюта ω .

Для внутренних и внешних точек существуют строгие определения и аналитические критерии. Точка проективной плоскости называется *внутренней* точкой относительно кривой ω , если любая прямая, содержащая эту точку, пересекает ω в двух действительных точках, и называется *внешней* точкой относительно ω , если среди содержащих её прямых существует прямая, не пересекающая кривую ω .

Теорема. Точка $P(p_1 : p_2 : p_3)$ является внутренней точкой относительно кривой $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 < 0, \quad (\text{IV.40})$$

и внешней точкой относительно этой кривой, если и только если

$$p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 > 0. \quad (\text{IV.41})$$

Доказательство. Точка $P(p_1 : p_2 : 0)$ внешняя, поскольку содержащая её прямая $x_3 = 0$ не пересекает кривую ω . Пусть $P(p_1 : p_2 : p_3)$ — фиксированная точка проективной плоскости, не принадлежащая кривой ω : $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \neq 0$. Если X — произвольная точка прямой PQ , где $Q(q_1 : q_2 : 0)$ — точка прямой $x_3 = 0$, то имеем параметрическое представление $X = \lambda P + \mu Q$. Точки пересечения прямой PQ с кривой ω отвечают корням уравнения (III.11)

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0,$$

где $A = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \neq 0$, $C = q_1^2 + q_2^2 > 0$. Дискриминант D этого уравнения равен $D = B^2 - AC$. Так как $B^2 \geq 0$, $C > 0$, то $D > 0$ тогда и только

тогда, когда $A < 0$. Это значит, что любая прямая PQ имеет две общие действительные точки с кривой ω тогда и только тогда, когда $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 < 0$. По определению внутренней точки это неравенство и является её критерием.

В противном случае ($p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 > 0$) точка P внешняя, так как иное предположение противоречит доказанному. $\square$

Объектом гиперболической плоскости является не вся проективная плоскость, а только внутренняя область абсолюта. Именно она и называется гиперболической плоскостью. В гиперболической геометрии под точками понимаются только собственные точки, а под прямыми — только хорды абсолюта (с исключёнными концами).

Всякую проективную прямую, пересекающую абсolut, будем называть *собственной*, прямую, касающуюся абсолюта — *несобственной* и любую прямую, не имеющую общих точек с абсolutом, — *идеальной* прямой. В дальнейшем при построении проективной модели гиперболической геометрии будем рассматривать не только гиперболическую плоскость, но и всю проективную плоскость, а слово «прямая» будем употреблять, как правило, в проективном смысле.

Заметим ещё, что *поляры собственных точек являются идеальными прямыми и, наоборот, поляры идеальных точек есть собственные прямые, а поляры несобственных точек — несобственные прямые.*

Согласно уравнению (III.13) полярная точка $P(p_1 : p_2 : p_3)$ относительно абсолюта $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ имеет уравнение

$$p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3 = 0.$$

Отношения «принадлежать» и «лежать между» в данной модели понимаются в обычном, евклидовом смысле, а равенство фигур означает их эквивалентность относительно группы гиперболических движений плоскости (§ 39).

38.2. Взаимное расположение двух прямых гиперболической плоскости. Две прямые a и b следует считать *пересекающимися*, *параллельными* или *расходящимися* (сверхпараллельными) смотря по тому, пересекаются ли содержащие их проективные прямые в собственной точке (рис. 77), несобственной (рис. 78) или идеальной (рис. 79).

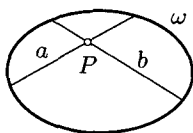


Рис. 77

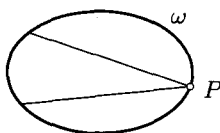


Рис. 78

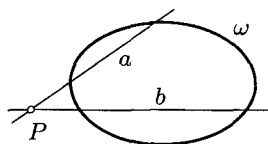


Рис. 79

Если эти прямые имеют уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ и $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, то координаты точки P равны $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ и на основании критериев (IV.40) и (IV.41) знак числа

$$\delta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

соответствует трём указанным случаям взаимного расположения прямых: $\delta < 0$, $\delta = 0$ и $\delta > 0$ — их характеристическим условиям.

Эти соглашения к построению проективной модели планиметрии Лобачевского обеспечивают выполнение исходного постулата этой геометрии — аксиомы параллельности Лобачевского: для данной прямой ℓ и не принадлежащей ей точки A существуют по крайней мере две прямые, проходящие через точку A и не пересекающие прямую ℓ . На рис. 80 таких прямых бесконечно много, но только две из них (AU и AV) согласно определению по Лобачевскому параллельности прямых параллельны прямой UV . Прямая AM пересекает ℓ . Прямые AU и AV параллельны прямой UV в разных направлениях.

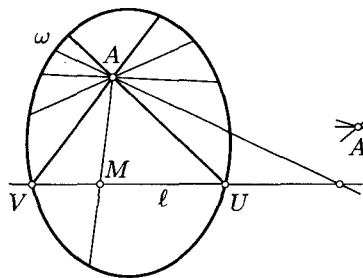


Рис. 80

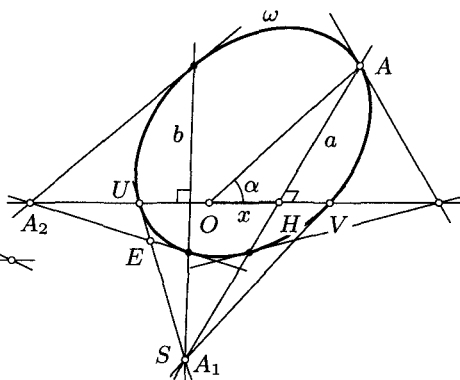


Рис. 81

Две прямые называются *перпендикулярными*, если каждая из них проходит через полюс другой относительно абсолюта. Если S — полюс собственной прямой UV , то прямая $a = (AS)$ силу этого определения перпендикулярна прямой UV (рис. 81). Так как S — идеальная точка гиперболической плоскости, то отсюда сразу следует, что две прямые a и b , перпендикулярные третьей прямой UV , расходятся.

Отсюда следует также, что две расходящиеся прямые a и b имеют единственный общий перпендикуляр UV — полярю точки $S = a \cap b$.

Лучом называется отрезок проективной прямой (§9), все точки которого и один конец собственные, а другой конец несобственный. Точка O гиперболической прямой UV делит её на два луча OU и OV .

Углом называется фигура, являющаяся объединением двух неколлинеарных лучей с общим началом.

Пусть луч OA параллелен лучу HA и OH перпендикулярен HA . Тогда угол $AON = \alpha$ называется *углом параллельности* прямых OA и HA , а отрезок OH — *отрезком параллельности* этих прямых (рис. 81). В гиперболической плоскости имеет место теорема о внешнем угле треугольника, согласно которой *угол параллельности всегда меньше прямого, т. е. является острым*.

Угол параллельности и отрезок параллельности двух параллельных прямых находятся в функциональной зависимости, называемой основным соотношением геометрии Лобачевского (§39).

§39. Проективная метрика гиперболической плоскости

39.1. Длина отрезка. Гиперболическая длина d отрезка $[AB]$ прямой UV определяется формулой (рис. 82)

$$d[AB] = \frac{k}{2} \ln(ABUV), \quad (\text{IV.42})$$

где U, V — несобственные точки прямой AB , а k — постоянное действительное число, называемой *постоянной Лобачевского*, а также *радиусом кривизны* пространства Лобачевского.

Из определения (IV.42) вытекают все известные свойства длины отрезка. При изменении порядка его концов двойное отношение заменяется обратной величиной, что влечёт смену знака логарифма. Так как пары (A, B) и (U, V) являются взаимно неразделёнными, то двойное отношение $(ABUV)$ положительно и потому логарифм — действительное число. Для ориентированных отрезков $d[AB] = -d[BA]$.

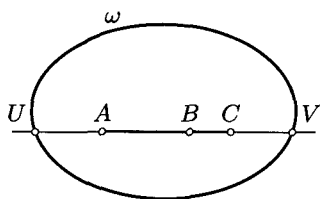


Рис. 82

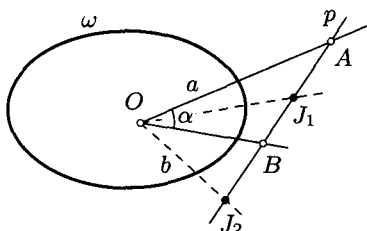


Рис. 83

Гиперболическая длина отрезка — величина аддитивная. Действительно, если B лежит между A и C , то $d[AC] = d[AB] + d[BC]$. Для доказательства используем известное соотношение между двойными отношениями для произвольных пяти точек прямой:

$$(UVAB) = \frac{(UVAC)}{(UVBC)},$$

откуда

$$\ln(UVAC) = \ln(UVAB) + \ln(UVBC).$$

Так как отрезки AB , BC , AC сонаправлены, то в этом равенстве модуль суммы равен сумме модулей и поэтому оно равносильно доказываемому.

В частности, если точки A и B совпадают, то $(AAUV) = 1$ и $d[AA] = 0$.

39.2. Мера угла. Пусть a и b — стороны угла $(\widehat{ab})$ с вершиной O (рис. 83), а p — поляр его вершины относительно абсолюта, т. е. идеальная прямая. *Гиперболической мерой α угла $(\widehat{ab})$ называется число*

$$\alpha = \frac{1}{2i} \ln(ABJ_1J_2), \quad (\text{IV.43})$$

где $A = a \cap p$, $B = b \cap p$, J_1 и J_2 — мнимые точки пересечения поляр p с абсолютом ω .

Это определение полностью согласуется с формулой Лагерра (IV.18) проективно-евклидовой метрики углов, поскольку $(ABJ_1J_2) = (abj_1j_2)$, где $j_1 = (OJ_1)$, $j_2 = (OJ_2)$, а $(abj_1j_2) = e^{2i\varphi}$ (§ 34). Поэтому

$$\alpha = \frac{1}{2i} \ln(abj_1j_2) = \frac{1}{2i} \ln e^{2i\varphi} = \frac{1}{2i} 2i\varphi = \varphi.$$

Таким образом, *проективно-евклидова метрика φ углов совпадает с проективной метрикой углов гиперболической плоскости.*

В частности, если $(ABJ_1J_2) = -1$, то по формуле Муавра $\cos \psi + i \sin \psi = e^{i\psi}$ (при $\psi = \pi$) имеем $\psi^{\pi i} = -1$, а тогда в силу соотношения (IV.43) получаем $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, *полярно сопряжённые относительно абсолюта прямые a и b имеют меру угла, равную $\frac{\pi}{2}$ (т. е. евклидово перпендикулярны).*

39.3. Основное соотношение геометрии Лобачевского. Между отрезком x и углом α параллельности прямых существует замечательная зависимость

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{x}{k}}, \quad (\text{IV.44})$$

где k — постоянная Лобачевского.

Докажем это соотношение средствами проективной геометрии. Обратимся к рис. 81 и введём проективную систему координат $\{A_1 A_2 A_3 E\}$, в которой базисные точки A_1 и A_3 совпадают соответственно с точками S и O , а абсолют ω имеет каноническое уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Если (a_1, a_2, a_3) — проективные координаты характеристической точки A ($OA \parallel HA$, $OH \perp UV$), то точка $H = (UV) \cap (A_1 A)$ будет иметь координаты $(0, a_2, a_3)$. Учитывая, что $U(0, 1, 1)$, $V(0, 1, -1)$, находим по формуле (I.17) двойное отношение $(OHUV)$ для отрезка x параллельности прямых OA и HA :

$$(OHUV) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a_3 + a_2}{a_3 - a_2}, \quad a_1^2 + a_2^2 = a_3^2.$$

Прямые OH и OA имеют соответственно уравнения $x_1 = 0$ и $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$. На основании совпадения евклидовой и гиперболической меры угла, по формулам (IV.17) для угла α имеем

$$\cos \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \sin \alpha = \frac{a_1}{a_3}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{a_2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{a_3 - a_2}{a_1}$.

С другой стороны, по определению (IV.42) гиперболической длины

$$\frac{x}{k} = \frac{1}{2} \ln(OHUV).$$

Поэтому, учитывая полученный выше результат, получаем

$$e^{-\frac{x}{k}} = \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 + a_2}}.$$

Осталось убедиться в истинности равенства

$$\frac{a_3 - a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 + a_2}}.$$

Возведение его в квадрат и привлечение соотношения $a_1^2 = a_3^2 - a_2^2$ даёт очевидное равенство

$$\frac{(a_3 - a_2)^2}{a_3^2 - a_2^2} = \frac{a_3 - a_2}{a_3 + a_2}.$$

Итак, зависимость (IV.44) доказана.

Таким образом, в метрике плоскости Лобачевского мера длины отрезка и мера угла взаимно обусловлены в отличие от евклидовой геометрии, где эти меры независимы друг от друга, а мера длины условна (принимается по соглашению). В плоскости Лобачевского существует абсолютная единица меры длины, равная $-k \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ для некоторого определённого угла α .

§ 40. Движения гиперболической плоскости

40.1. Определение и общие свойства. Движениями гиперболической плоскости называются проективные преобразования, отображающие абсолют ω на себя. Множество проективных автоморфизмов абсолютa есть группа. Гиперболическая геометрия есть теория инвариантов этой группы — группы движений гиперболической плоскости.

Каждую из двух областей проективной плоскости, на которые её делит абсолют, движения отображают на себя. В самом деле, если бы внутренняя точка A отображалась на внешнюю точку A' , то по определению внешней точки существовала бы содержащая её прямая m' , не пересекающая абсолют, а её прообраз должен был бы пересекать его как прямая, проходящая через внутреннюю точку A . Тогда точки пересечения не имели бы образов на прямой m' . Полученное противоречие доказывает, что внутренние точки отображаются на внутренние точки; внешние точки отображаются на внешние по аналогичной причине.

Длина отрезка и величина угла определены через абсолют и двойное отношение четырёх точек прямой, которые инвариантны при движениях гиперболической плоскости. Следовательно, движения сохраняют длины отрезков и величины углов.

Рассмотрим отдельно виды движений.

40.2. Осевая и центральная симметрии. Было доказано (§ 26), что инволюционная (гармоническая) гомология отображает кривую на себя тогда и только тогда, когда центр и ось гомологии полярно сопряжены относительно этой кривой. Рассмотрим эти два случая.

Пусть инволюционная гомология f отображает абсолют ω на себя и её ось ℓ — собственная прямая. Тогда её центр S — идеальная точка (рис. 84). Точка S и прямая ℓ неподвижны при гомологии f . Если $A \in \omega$ и $f(A) = A'$, то $A' \in \omega$ и $(AA') \perp \ell$. Каждая точка X прямой AA' отображается на точку X' этой прямой, причём $(A_0XAA') = (A_0X'A'A)$, где $A_0 = \ell \cap (AA')$. Согласно соотношению (IV.42) отрезки A_0X и A_0X' имеют равные гиперболические длины. Эти свойства говорят о том, что инволюционную гомологию f с собственной осью следует назвать *осевой симметрией* (отражением от прямой) гиперболической плоскости.

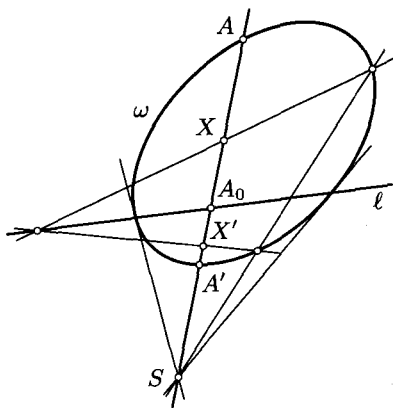


Рис. 84

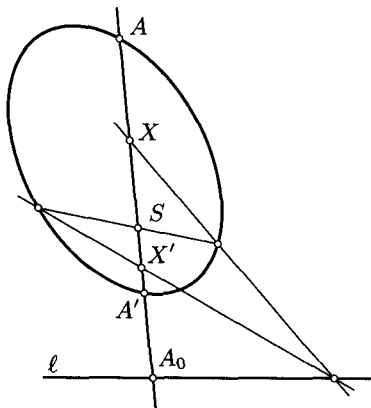


Рис. 85

Пусть ось ℓ гомотологии f — идеальная прямая. Тогда её полюс S — собственная точка — единственная неподвижная точка этой гомотологии (рис. 85). Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что для любой прямой AA' пучка S и любой её точки X отрезки SX и SX' имеют равные гиперболические длины. Следовательно, инволюционную гомотологию f с собственным центром S можно определить как *центральною симметрию* гиперболической плоскости относительно точки S .

Этими двумя видами исчерпываются все инволюционные движения гиперболической плоскости.

40.3. Повороты. Скольжение вдоль прямой. Рассмотрим три случая композиций двух инволюционных гомотогий.

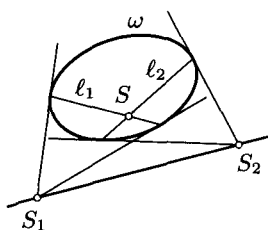


Рис. 86

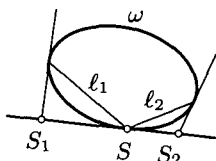


Рис. 87

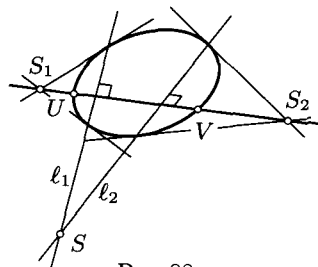


Рис. 88

1. Композиция $f_2 \circ f_1$ двух осевых симметрий, оси ℓ_1 и ℓ_2 которых пересекаются в собственной точке S , имеет единственную неподвижную точку S (рис. 86). Её поляра S_1S_2 — идеальная прямая. Движение $f = f_2 \circ f_1$ называется *поворотом* около точки S .

2. Точка $S = \ell_1 \cap \ell_2$ несобственная (рис. 87). Тогда её поляра S_1S_2 — несобственная прямая. Точка S и прямая S_1S_2 — единственные неподвижные точка и прямая композиции $f_2 \circ f_1$. Эта композиция называется *орициклическим поворотом* (около несобственной точки S).

3. Точка S идеальная. Тогда её поляра S_1S_2 — собственная прямая (рис. 88). Пусть U и V — несобственные точки этой прямой. При композиции $f_2 \circ f_1$ прямая UV неподвижна, а точки U и V отображаются каждая на себя. Следовательно, остаются неподвижными три точки S , U и V . Так как точки S_1 и S_2 идеальные, а прямая S_1S_2 собственная, то они не могут оказаться полярно сопряжёнными, следовательно, композиция $f_2 \circ f_1$ не является гомологией, и двойные элементы исчерпываются вершинами и сторонами треугольника SUV . Движение не имеет неподвижных точек и имеет единственную неподвижную прямую UV . Гиперболические полуплоскости относительно этой прямой отображаются каждая на себя. Гиперболическое движение $f = f_2 \circ f_1$ называется *скольжением вдоль прямой UV* .

40.4. Представление произвольного движения композицией осевых симметрий. Согласно определению гиперболическое движение характеризуется проективным преобразованием абсолюта, а оно задаётся тремя парами соответственных точек (§26). Гиперболическим инволюциям абсолюта отвечают осевые симметрии гиперболической плоскости.

Теорема. *Любое движение гиперболической плоскости есть либо осевая симметрия, либо композиция двух осевых симметрий, либо композиция трёх осевых симметрий.*

Доказательство сводится к представлению проективного преобразования φ кривой ω композицией гиперболических инволюций этих кривой. Если φ — гиперболическая инволюция, то доказывать нечего. Если φ — эллиптическая инволюция, то проведём через её центр две полярно сопряжённые прямые. Они будут осями двух гиперболических инволюций, композиция которых (в любом порядке) и есть преобразование φ . Если же φ неинволюционно, то возьмём на абсолюте ω точку A , не являющуюся неподвижной. Пусть $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$, $\varphi(C) = D$. Точки A , B , C различны, поэтому различны и точки B , C , D . Зададим на абсолюте две инволюции

$$f_1: A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow B \quad \text{и} \quad f_2: A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C.$$

Проверкой убеждаемся, что композиция $f_2 \circ f_1$ совпадает с φ . Инволюция f_1 гиперболическая, так как имеет неподвижную точку B . Если f_2 также гиперболическая инволюция, то доказательство закончено. Если

f_2 есть эллиптическая инволюция, то представим её композицией двух гиперболических инволюций аналогично предыдущему: $f_2 = g_2 \circ g_1$. Таким образом, либо преобразование φ — гиперболическая инволюция, либо оно является композицией двух или трёх гиперболических инволюций, что и нужно было показать. $\square$

Композиции двух осевых симметрий и только они являются движения первого рода. Осевая симметрия и композиции трёх осевых симметрий — движения второго рода. В результате всякое гиперболическое движение первого рода, отличное от тождественного, есть либо поворот, либо орициклический поворот, либо скольжение вдоль прямой. Композиция осевой симметрии и скольжения вдоль её оси называется *скользящей симметрией* гиперболической плоскости. Кроме осевой симметрии, движением второго рода является скользящая симметрия.

§41. Пучки прямых и циклы в гиперболической плоскости

41.1. Пучки прямых. Так как на проективной плоскости всякие две прямые пересекаются, то любые два пучка прямых проективно эквивалентны. Поэтому пучки прямых можно различать только по положению их центра относительно абсолюта. Пучок прямых называется *эллиптическим*, *параболическим* или *гиперболическим*, если его центр является соответственно собственной, несобственной или идеальной точкой (рис. 89, 90, 91).

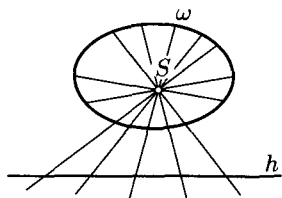


Рис. 89

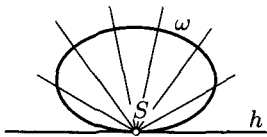


Рис. 90

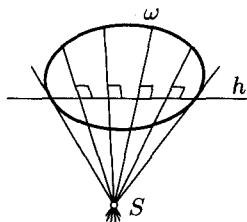


Рис. 91

Прямая h , перпендикулярная каждой прямой пучка, называется *базой* этого пучка. По определению перпендикулярных прямых база пучка полярно сопряжена каждой прямой пучка и является полярной его центра. С точки зрения гиперболической геометрии эллиптический пучок имеет только центр, но не имеет базы. Параболический пучок не имеет ни центра, ни базы и представляет собой множество всех прямых, параллельных одной прямой в одном направлении,

а потому и параллельных друг другу. Гиперболический пучок имеет базу, но не имеет центра, и определяется как множество прямых, перпендикулярных одной прямой.

41.2. Окружность, орицикл, эквидистанта. Циклами гиперболической плоскости называются кривые второго порядка, являющиеся образами её абсолюта ω при (неинволюционных) гомологиях, центр и ось которых взаимно полярны относительно абсолюта.

В зависимости от положения центра гомологии относительно абсолюта различают три вида циклов. Центром и базой цикла называется центр и ось порождающей его гомологии. Ниже будет показано, что циклы с собственными центрами являются окружностями (в гиперболической метрике) (рис. 92). Циклы с несобственным центром называются орициклами, или предельными циклами (рис. 93). Циклы с идеальным центром (собственной базой) называются гиперциклами, или эквидистантами (рис. 94).

Пусть гомология Γ задана центром S , осью p и парой точек $U \rightarrow A$, U — точка абсолюта ω , A — заданная собственная точка. Тогда кривая $\gamma = \Gamma(\omega)$ есть по определению цикл, заданный центром S , базой p и принадлежащей ему точкой A .

Рассмотрим произвольную прямую $m = (UV)$ пучка S и её полюс M , $M \in p$. Прямая MU касается абсолюта в точке U . Поэтому прямая MA касается цикла γ в точке $A = \Gamma(U)$. Так как прямые m и MA перпендикулярны (в смысле гиперболической геометрии), то прямая m пересекает цикл γ ортогонально. Поскольку m — произвольная прямая пучка S , то кривая γ является ортогональной траекторией этого пучка.

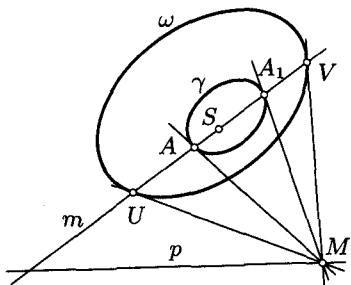


Рис. 92

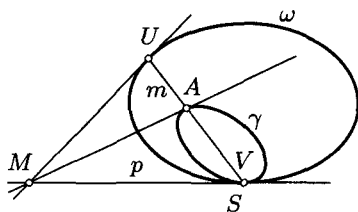


Рис. 93

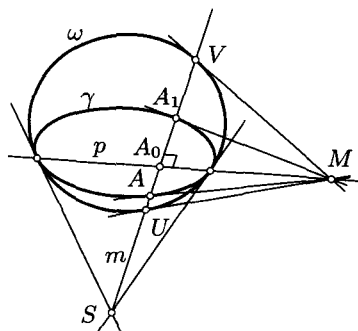


Рис. 94

Итак, доказано, что цикл γ есть ортогональная траектория соответствующего пучка: окружность γ — ортогональная траектория эллиптического (собственного) пучка с центром в её центре, орицикл — ортогональная траектория пучка параллельных прямых (несобственного пучка), эквидистанта — ортогональная траектория пучка расходящихся прямых.

Термин «эквидистанта» в буквальном смысле означает «кривая равных расстояний». Это оправдывается её свойством: *эквидистанта является геометрическим местом точек гиперболической плоскости, равноудалённых от своей базы*. Действительно, в силу обнаруженных зависимостей, иллюстрируемых рис. 94, точка S и её поляр p относительно абсолюта полярно сопряжены также и относительно эквидистанты γ . Поэтому для двух точек A и B эквидистанты прямые AB , A_0B_0 , UU_1 , VV_1 пересекаются в одной точке, откуда следует равенство двойных отношений $(AA_0UV) = (BB_0U_1V_1)$ и, следовательно, равенство длин отрезков AA_0 и BB_0 .

Для двух точек A и B окружности γ (рис. 92) аналогичное равенство двойных отношений $(ASUV) = (BSU_1V)$ означает равенство гиперболических расстояний от этих точек до центра S .

Изложенная проективная интерпретация планиметрии Лобачевского была впервые указана в 1868 году итальянским математиком Евгением Бельтрами (1835–1900). Позднее, в 1871 г., с других позиций пришёл к ней Феликс Клейн. Этим был положен конец сомнениям в непротиворечивости геометрии Лобачевского и конец многочисленным бесплодным попыткам доказать Пятый постулат Евклида на основе аксиом абсолютной геометрии.

Задачи и упражнения

IV.1. Дайте проективно-аффинное истолкование теоремы о пересечении медиан треугольника.

IV.2. Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого параллелограмма. Проективно-аффинными средствами докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

IV.3. На проективно-аффинной плоскости даны пять точек невырожденной кривой второго порядка. Постройте её центр.

IV.4. На проективно-аффинной плоскости параллелограмм вписан в эллипс. Докажите, что центр параллелограмма совпадает с центром эллипса, а стороны параллелограмма параллельны двум его сопряжённым диаметрам.

IV.5. На проективно-аффинной плоскости параллелограмм описан около кривой второго порядка. Докажите, что его диагонали являются сопряжёнными диаметрами этой кривой.

IV.6. Средствами проективно-аффинной геометрии докажите, что касательные к эллипсу (гиперболе) в концах диаметра параллельны. Докажите, что любые две касательные к параболу непараллельны.

IV.7. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе (на проективно-аффинной плоскости), заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

IV.8. Дайте проективно-аффинную характеристику аффинных преобразований: а) родства, б) сдвига, в) косой симметрии, г) гомотетии, д) центральной симметрии, е) переноса.

В задачах №№ IV.9–IV.10 проективно-евклидова плоскость задана несобственной прямой и «единичной» (масштабной) окружностью.

IV.9. Даны три точки окружности проективно-евклидовой плоскости. Постройте её центр.

IV.10. Докажите, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на её диаметр, прямой.

IV.11. Докажите, что углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу, равны.

IV.12. На проективно-евклидовой плоскости постройте точку, симметричную данной относительно данной прямой.

IV.13. На проективно-евклидовой плоскости постройте квадрат по заданному отрезку, являющемуся его стороной.

IV.14. Даны две непараллельные прямые. Постройте биссектрисы углов между ними.

IV.15. Даны сторона AB ромба $ABCD$ и точка P , принадлежащая его диагонали AC . Постройте ромб.

IV.16. Дан угол с вершиной O и внутри него точка A . Прямые AX и AU образуют равные углы с прямой AO . Докажите, что все прямые XU принадлежат одному пучку.

IV.17. Если одна сторона треугольника псевдоевклидовой плоскости содержит центр его описанной окружности, то две другие его стороны перпендикулярны. Докажите.

IV.18. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника псевдоевклидовой плоскости пересекаются в центре его описанной окружности.

IV.19. Докажите, что высоты псевдоевклидова треугольника пересекаются в одной точке.

IV.20. Докажите, что каждая из изотропных прямых псевдоевклидовой плоскости перпендикулярна себе.

IV.21. Докажите, что расстояние d от точки $P(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ псевдоевклидовой плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

IV.22. Даны прямая ℓ и точка A гиперболической плоскости. Постройте точку, симметричную ей относительно данной прямой.

IV.23. Даны прямые ℓ и a гиперболической плоскости. Постройте прямую, симметричную прямой a относительно прямой ℓ .

IV.24. Даны точка S и прямая m гиперболической плоскости. Постройте прямую, симметричную прямой m относительно точки S .

IV.25. Постройте образ точки M при симметрии относительно точки S в гиперболической плоскости.

IV.26. Даны две собственные прямые гиперболической плоскости. Постройте биссектрисы углов между ними.

IV.27. В гиперболической плоскости дан треугольник ABC . Постройте его высоты.

IV.28. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника гиперболической плоскости принадлежат одному пучку. Рассмотрите возможные случаи.

IV.29. Докажите, что средняя линия треугольника гиперболической плоскости перпендикулярна к срединному перпендикуляру соответствующей стороны.

IV.30. Докажите, что около всякого треугольника с собственными вершинами можно описать ч е т ы р е цикла, из которых три непременно эквидистанты, а четвёртый может быть одним из трёх его видов.

Исторический очерк о проективной геометрии

1. Ряд предложений проективного характера был установлен ещё в древней Греции. В знаменитом труде Аполлония (III век до н.э.) «Конические сечения» имеются и некоторые проективные свойства эллипса, гиперболы и параболы. Содержащееся там свойство точки пересечения двух касательных к эллипсу послужило для Дезарга исходным пунктом при создании теории полюсов и поляра.

В III веке н.э. эллинская математика давно миновала высшую точку своего развития. В «Математическом собрании» Паппа приводятся леммы, многие из которых носят проективный характер: эквивалент двойного отношения четырёх точек прямой, гармонические свойства четырёхугольника (в терминологии того времени), теорема Паппа, являющаяся частным случаем теоремы Паскаля, свойство шести точек пересечения с прямой сторон полного четырёхугольника и некоторые другие. Доказываются они в основном многократным применением теоремы Менелая (I в. н.э.).

В IV–XIV веках прогресс в области геометрии был весьма незначителен. В эпоху возрождения в XV веке потребности живописи и архитектуры снова привлекли внимание ученых к теории перспективы. В работах Леонардо да Винчи (1452–1519) и Альбрехта Дюрера (1471–1528) эта теория имеет ещё эмпирический характер. Усовершенствование методов изображения достигнуто трудами Брука Тейлора (1685–1731), Жерара Дезарга (1591–1661) и Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777). Возрождение интереса к ним связано с именами Гаспара Монжа (1746–1818) во Франции и Якоба Штейнера (1796–1863) в Германии. Монж был инженером по образованию, что привело к созданию им новой *начертательной геометрии*. В руках Монжа она стала методом изучения свойств пространственных фигур. Его последователи Жан Понселе (1788–1867) и Мишель Шаль (1793–1880) получили в этом стимул для новой успешной разработки синтетических методов. Понселе также имел инженерное образование. Его основной труд «Трактат о проективных свойствах фигур» (1822) был задуман в основном в 1813–1814 гг. в русском плену в Саратове. В самом его начале дано определение проективного свойства плоской фигуры как сохраняющегося при центральном проектировании. Этим самым было определено содержание проективной геометрии как отдельной дисциплины внутри евклидовой геометрии. В «Трактате» строится теория проективных

свойств прямолинейных фигур и конических сечений, формулируются предложения о полюсах и полярах. Эти результаты затем обобщаются на пространственные фигуры. Понселе принадлежат и первые примеры проективных преобразований: гомология и полярное преобразование. Детальному изучению полярных преобразований посвящён и другой мемуар Понселе «Теория взаимных поляр».

Полярные преобразования привели Понселе к принципу двойственности. Независимо от него к этому принципу пришёл Жозеф Жергонн (1771–1859), благодаря чему Шарль Жюльен Брианшон в 1806 г. получил теорему, названную его именем. Понселе полностью решил проблему о построениях одной линейкой при задании окружности и её центра.

В основном труде Якоба Штейнера «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (1832) руководящей является идея проективного соответствия между формами первой степени, систематически используется принцип двойственности. Штейнер враждебно относился к аналитическим методам.

Непосредственная связь между теорией изображений и изучением проективных свойств фигур проявилась вполне отчётливо в научной деятельности Дезарга. Он был инженером и архитектором. Его исследования по перспективе послужили отправным пунктом при создании основополагающего для проективной геометрии произведения «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при пересечении конуса с плоскостью». Основным методом в нём является применение перспективного отображения плоскостей. Путём центрального проектирования свойства окружности переносятся на все виды конических сечений. Строится теория инволюций. Дезарг устанавливает проективный характер инволюции шести точек (п. 13.3).

Важной заслугой Дезарга является систематическое использование бесконечно удалённых точек и прямых, теории полюсов и поляр. Теоремы Дезарга, сыгравшие огромную роль в дальнейшем развитии проективной геометрии, были найдены им в связи с исследованиями по теории изображений.

Основной метод Дезарга был воспринят Блезом Паскалем (1623–1662). Замечательную теорему о вписанном шестиугольнике он доказывает сначала для окружности, основываясь на теореме Менелая, а затем перспективным отображением устанавливает её истинность для произвольного конического сечения.

2. К середине XVII столетия стали известны многие предложения проективной геометрии, которые оставались ещё разрозненными. Продолжавшееся изучение (конец XVII в.—начало XVIII в.) проективных свойств фигур синтетическими методами не изменило указанного положения. Под влиянием блестящих аналитиков Леонарда Эйлера (1707–

1783) и Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) господствующее положение в геометрии заняли аналитические методы. Синтетические методы и проблемы проективной геометрии оказались полностью заброшенными в течение более полувека.

Многие результаты Штейнера одновременно были получены также и Мишелем Шалем (1793–1880). Шалю принадлежит также большое число исследований по теории линий и поверхностей второго порядка. В частности, им впервые было введено понятие проективного соответствия точек на кривой второго порядка.

После работ Понселе, Штейнера, Шаля и других их современников проективная геометрия стала наукой с богатым и определённым содержанием. Однако она оставалась зависимой от метрической геометрии, поскольку основное её понятие — двойное отношение определялось через метрические понятия — длину отрезка и величину угла. Карл Штаудт (1798–1867) впервые поставил и в основном решил проблему построения проективной геометрии независимо от метрики. Это весьма важное достижение Штаудт осуществил в работах «Геометрия положения» (1847) и «Дополнительные исследования по геометрии положения» (1856–1860).

3. Указанные успехи проективной геометрии были достигнуты почти исключительно синтетическими методами, одновременно с этим были созданы и аналитические методы, получившие в проективной геометрии плодотворное применение. Наиболее важные в этом направлении работы принадлежат Августу Мёбиусу (1790–1868) и Юлиусу Плюккеру (1801–1868). В работе «Барицентрическое исчисление» (1827) Мёбиус впервые вводит барицентрические однородные координаты, на основе которых он даёт аналитическое определение аффинных и проективных преобразованиях плоскости и пространства. Таким образом, аналитический подход к коллинеациям и корреляциям предшествовал синтетическому. Для коллинеаций Мёбиус указал способ и дал их конструктивное осуществление. Им были открыты пространственные кривые третьего порядка.

Следующий шаг был сделан Плюккером. Введённые им координаты (1835) точек плоскости не отличаются от проективных. Позднее (1846) такие же координаты были даны им и для точек пространства.

Аналитические методы проективной геометрии получили большое содействие в теории алгебраических инвариантов, создателями которой являются Артур Кэли (1821–1895) и Джеймс Сильвестр (1814–1897). Эта теория оказала существенное влияние на теорию групп преобразования Софуса Ли (1842–1899). В своём «Шестом мемуаре об алгебраических формах» Кэли впервые отчётливо высказал проективную точку зрения на евклидову геометрию: «метрическая геометрия является ча-

стью проективной геометрии, и проективная геометрия есть вся геометрия». В ходе исторического развития соотношение между евклидовой и проективной геометриями изменилось на обратное.

В связи с указанными исследованиями Феликс Клейн (1849–1925) уяснил основополагающее значение для геометрии понятия группы преобразований. Так возникла групповая точка зрения на геометрию — «Эрлангенская Программа» (1872).

Создание современной геометрической аксиоматики в решающей степени стимулировалось открытием геометрии Лобачевского. Развитие проективной геометрии в XX веке шло в нескольких направлениях. Продолжалась разработка аксиоматики проективной геометрии.

4. Одним из первых русских учёных, занимавшихся в значительной степени вопросами проективной геометрии, был профессор московского университета Василий Яковлевич Цингер (1836–1907). Его считают основателем московской геометрической школы. Среди учеников-проективистов В. Я. Цингера были выдающиеся геометры Константин Алексеевич Андреев (1848–1921) и Алексей Константинович Власов (1868–1922). Магистерская и докторская диссертации К. А. Андреева «О геометрическом образовании плоских кривых» (1875) и «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий» (1879) содержат исследования многозначных проективных соответствий форм первой ступени и применение их к построению алгебраических кривых высших порядков. Он занимался также «многоугольниками Понселе», т. е. многоугольниками, описанными около одного конического сечения и вписанными в другое.

А. К. Власов не только развивает проективные свойства систем конических сечений, но и впервые даёт исследование их метрических свойств. А. К. Власову принадлежат также глубокие исследования в области аксиоматики.

Ученик А. К. Власова Нил Александрович Глаголев (1888–1945) решил общую задачу проективного исчисления, начало которому было положено Штейнером и Штаудтом. Это исследование изложено в главе «Арифметизация проективного пространства» первого издания (1936) его книги «Проективная геометрия».

Вопросами проективной геометрии занимались многие отечественные учёные, среди которых необходимо назвать имена А. Н. Колмогорова, П. К. Рашевского, Н. В. Ефимова, А. А. Глаголева, З. А. Скопеца, Л. А. Скорнякова.

В наше время проективная геометрия не является «модной» наукой. Но мода — явление преходящее. Наступят и другие времена, когда проективная геометрия получит новое дыхание.

Ответы к некоторым задачам

ЧАСТЬ I. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

- I.7. Это следует из теоремы Паппа (п. 2.4).
- I.19. $S = \frac{1}{2}(\overline{AM} \circ \overline{AC})$, $\overline{AM} = \lambda \overline{AB} = \overline{AC} + \mu \overline{CD}$.
- I.24. Если $f_1(A) = f_2(A) = A'$ и $f_1(B) = f_2(B) = B'$, то каждая точка прямой AB неподвижна при преобразовании $f_2^{-1} \circ f_1$. Следовательно, для любой точки $M \in (AB)$ имеем $(M, f_1(M)) = (M, f_2(M))$.
- I.25. Для данного преобразования $f: f^5 = E$. Значит, f — эквиаффинное преобразование, и из равенства $S_{ABC} = S_{BCD}$ следует, что $BC \parallel AD$.
- I.26. $x' = 2x - y - 1$, $y' = x + 2y + 5$.
- I.27. $(1, 2)$.
- I.28. Ось: $3x + 4y + 1 = 0$, $\bar{r} = (1, 2)$, $k = 12$.
- I.29. $x - y + 1 = 0$.
- I.30. $x + y - 1 = 0$, $\bar{r} = (3, -1)$.
- I.31. $x' = 5x - 2y + 2$, $y' = 12x - 5y + 6$.
- I.32. $x' = 3x - 2y + 2$, $y' = 2x - y + 2$.
- I.39. Центроид треугольника ABC неподвижен при аффинном преобразовании $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.
- I.40. Неоднократно используйте обобщённую теорему Фалеса (п. 2.3).
- II.37. 1) Гипербола; 2) парабола; 3) пара пересекающихся прямых; 4) эллипс.
- II.38. 1) $\lambda > 1$; 2) $\lambda = 1$; 3) $\lambda < 1$ ($\lambda \neq -24$); 4) $\lambda = -24$.
- III.1. 9.
- III.2. $2:1$.
- III.4. Центральная симметрия с центром $O = \ell \cap \alpha$.
- III.7. $x' = -x - y - z + 1$, $y' = x$, $z' = y$.
- III.8. $x' = x + z$, $y' = y + z$, $z' = z$. Параболический сдвиг.
- III.9. $x' = y + z$, $y' = z + x$, $z' = x + y$.
- III.11. Гомотетия с центром в центроиде и коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$.

III.12. Точка $(1, 2, 3)$, прямая $x = 1$, $y = 2$, плоскость $z = 3$.

IV.2. $(x + y + z)^2 + 4\left(x - y - \frac{9}{4}\right) = 0$.

IV.3. $4x - 3y - 5z + 4 = 0$.

IV.4. $(x - 1)^2 + y^2 = (x + y - z - 2)^2$.

IV.5. $A^2 + B^2 \geq C^2$.

IV.6. Конус. Гиперболический параболоид.

IV.7. $xy + yz + zx = 0$.

IV.9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{1} = 0$.

IV.10. $x^2 \pm (y^2 - z^2) = 1$.

IV.13. $2x + z = 0$, $y = 3$ и $x = 2$, $4y + 3z = 0$.

IV.15. $A^2 + B^2 = 2C \cdot D$.

IV.16. По гиперболе. Используйте параметрические уравнения данной плоскости.

IV.17. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 2z$.

Часть II. Проективная геометрия

I.1. $(7 : 9 : 3)$.

I.2. $\lambda : \mu = -2 : 3$, $6x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 0$.

I.3. Используйте систему координат $\{A_1 A_2 A_3 N\}$.

I.7. Они становятся тривиальными утверждениями.

I.17. $D(8 : 37 : 13)$.

I.20. $(abcd) = \frac{(k_3 - k_1)(k_4 - k_2)}{(k_4 - k_1)(k_3 - k_2)}$. Рассмотрите точки пересечения данных прямых с прямой $x = 1$.

I.21. $7x - y - 5 = 0$.

I.23. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

II.1. $\rho x'_1 = 2x_1 + x_2$, $\rho x'_2 = x_1 + 2x_2$.

II.3. $\rho x'_1 = -2x_1 - 3x_2$, $\rho x'_2 = x_1 + 2x_2$.

II.6. $\rho x'_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$, $\rho x'_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_3$, $\rho x'_3 = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3$.

II.7. $\rho x'_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $\rho x'_2 = x_1 - x_2$, $\rho x'_3 = 2x_1 + x_3$.

II.8. $(6 : -2 : 17)$, $(39 : 17 : -8)$; $20x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 0$.

II.9. $(0 : 0 : 1)$, $(3 : 12 : 5)$, $(6 : -3 : 1)$; $7x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0$. $2x_1 + x_2 = 0$, $4x_1 - x_2 = 0$.

- II.12.** а) Гомология с центром $(0:0:1)$ и осью $x_3 = 0$; б) элация с центром $(c_1:c_2:0)$ и осью $x_3 = 0$.
- II.17.** Если $a \cap b \cap c = S$, $a_1 \cap b_1 \cap c_1 = S_1$, $a \cap a_1 = A_1$, $b \cap b_1 = B_1$, $c \cap c_1 = C_1$, $c \cap a_1 = C$ и $a \parallel b_1$, $b \parallel c_1$, то прямые, проходящие через точки A_1 и C_1 параллельно прямым b и a , пересекаются на прямой B_1C (рис. 95).

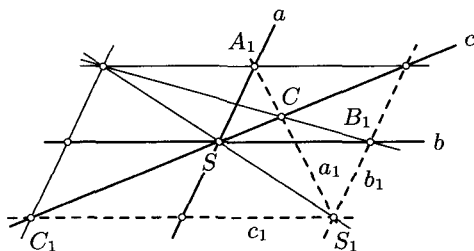


Рис. 95

- III.1.** $3x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_3 + x_2x_3 = 0$.
- III.2.** $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$.
- III.3.** $2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$.
- III.6.** Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Примените сначала теорему Паскаля к шестистороннику $ABCA_1B_1C_1$, а затем теорему Бриансона к шестистороннику $(BC)(CA)(AB)(B_1A_1)(A_1C_1)(C_1B_1)$.
- III.13.** Диагональный треугольник автополярен относительно кривой, определённой пятью данными точками. Докажите, что остальные три точки принадлежат этой кривой.
- IV.2.** Примените теорему Дезарга.
- IV.8.** а) Гомология с несобственным центром и собственной осью; б) элация с собственной осью и несобственным центром; в) инволюционная гомология с несобственным центром; г) гомология с несобственной осью; д) инволюционная гомология с несобственной осью, е) элация с несобственной осью.
- IV.9.** Постройте два диаметра кривой.
- IV.16.** Рассмотрите точку, гармонически сопряжённую с точкой A относительно точек пересечения прямой m , перпендикулярной OA , со сторонами угла.

Предметный указатель

- Абсолют
 - геометрии, 233
 - геометрии Лобачевского, 263
 - проективно-евклидовой плоскости, 248
 - псевдоевклидовой плоскости, 254
- Автоморфизмы аффинные
 - гиперболы, 74
 - параболы, 79
 - эллипса, 65
- Аксиома
 - Дедекинда, 18
 - Дезарга аффинная, 18
 - Евклида, 18
 - Паша, 18
- Асимптота гиперболы, 70
- База
 - пучка прямых, 272
 - цикла, 273
- Вектор
 - аффинной плоскости, 25
 - собственный
 - аффинного преобразования, 101
- Гармоническая четвёрка точек, 178
- Геометрия
 - Лобачевского (гиперболическая), 263
 - Минковского (псевдоевклидова), 254
 - проективная, 202
 - проективно-аффинная, 236
 - проективно-евклидова, 248
- Гипербола, 68
 - проективной плоскости, 243
- Гиперболический параболоид, 143
- Гиперболический поворот, 74, 107
- Гиперболический цилиндр, 118
- Гиперболоид
 - двуполостный, 132
 - однополостный, 129
- Гиперболоиды сопряжённые (соасимптотические), 133
- Гиперболы главные гиперболоида, 130
- Гиперцикл, 273
- Главные гиперболы, 130
- Гомология
 - аффинная, 196
 - гармоническая (инволюционная), 197
 - проективной плоскости, 195
 - элация, 196
- Гомотетия, 33, 49
- Горловой эллипс, 129
- Группа
 - аффинная, 53
 - подобий, 248
 - преобразований, 53
 - проективная, 201
- Движение
 - псевдоевклидовой плоскости, 258
- Движения
 - гиперболической плоскости, 269
- Двойное отношение
 - четырёх прямых, 175
 - четырёх точек прямой, 169
- Двуполостный гиперболоид, 132
- Дедекиндово сечение, 19
- Действительная проективная плоскость, 160
- Диаметр
 - гиперболического параболоида, 145
 - гиперболы, 69
 - параболы, 78
 - эллипсоида, 126
 - эллиптического параболоида, 143
- Дробно-линейная функция, 72
- Изотропные прямые, 255
- Инволютивный поворот, 75
- Инволюция, 188
 - гиперболическая, 189
 - эллиптическая, 189
- Касательная к кривой второго порядка, 81
- Квадрика аффинная, 113
 - коническая, 120
 - цилиндрическая, 116
- Коллинеация проективная, 191
- Конус
 - асимптотический гиперболоида, 131
 - второго порядка, 120
- Конфигурация Дезарга, 168
- Координаты проективные, 162
- Корреляция, 223
- Косая симметрия, 33
- зеркальная, 104

- Косое
 - отражение, 104
 - произведение, 27
 - сжатие, 104
- Косой перенос, 107
- Коэффициент родства, 44, 49, 104
- Коэффициент сдвига, 49
- Кривая второго порядка аффинной плоскости, 60
- Критерий разделённости пар точек, 177
- Линия второго порядка, 83
- Мера
 - длины плоскости Лобачевского, 268
 - угла гиперболическая, 267
- Направление родства, 104
- Овал, 230
- Однополостный гиперboloид, 129
- Окружность гиперболической плоскости, 273
- Орицикл, 273
- Ось гомологии, 195
- Отношение трёх точек прямой, 23
- Отображение
 - перспективное, 183
 - — плоскости в связку, 157
 - проективное, 184
- Отражение косое, 104
- Парабола, 76
 - проективной плоскости, 243
- Параболический
 - поворот, 79
 - цилиндр, 118
- Параболический поворот, 108
- Параболоид
 - гиперболический, 143
 - эллиптический, 140
- Параллельный перенос, 33
- Перенос
 - косой, 107
 - параллельный, 33
- Переносная симметрия, 50
- Перспективное отображение, 157, 183
- Перспективное соответствие, 226
- Плоскость
 - аффинная
 - — расширенная, 159
 - проективная, 155
 - — действительная, 160
 - проективно-аффинная, 234
 - проективно-евклидова, 248
 - родства, 103
- Поверхность второго порядка, 113
- Поворот
 - гиперболический, 74, 107
 - гиперболической плоскости, 270
 - — орициклический, 270
 - инволютивный, 75
 - параболический, 79, 108
 - псевдоевклидовой плоскости, 259
 - эллиптический, 66, 107
- Поляра точки, 216
- Поляритет (полярное соответствие), 221
- Постоянная Лобачевского, 266
- Постулат Архимеда, 19
- Преобразование
 - аффинное, 37
 - инволюционное, 188
 - плоскости аффинное, 33
 - подобия, 248
 - — второго рода, 249
 - — первого рода, 249
 - проективно-аффинное, 234
 - проективное
 - — кривой второго порядка, 227
 - — плоскости, 191
 - родственное, 41
 - центроаффинное, 40
 - эквиаффинное, 37
 - эквицентроаффинное, 74
- Преобразование пространства
 - аффинное, 97
 - центроаффинное, 100
- Принцип
 - Кантора, 19
 - двойственности, 161
- Проективная
 - геометрия, 202
 - плоскость, 155
 - прямая, 155
- Проективное
 - отображение, 184
 - преобразование плоскости, 191
 - преобразование прямой, 186
- Проективные координаты, 162
- Произведение векторов тройное, 95
- Пространство аффинное, 93
- Прямая
 - Гаусса, 32
 - плоскости Лобачевского
 - — идеальная, 264
 - — несобственная, 264

- собственная, 264
- Пучок прямых, 222
- Разделённость пар точек, 177
- Ранг квадратики, 149
- Расширенная аффинная плоскость, 159
- Репер проективный, 186
- Родство, 41
- пространства, 103
- Сдвиг, 44, 104
- Сжатие косое, 44, 104
- Симметрия
 - зеркальная косая, 104
 - косая, 106
 - переносная, 50
- Скольжение вдоль прямой, 271
- Соасимптотические гиперболоиды, 133
- Собственный вектор, 101
 - аффинного преобразования, 41
- Сопряжённая тройка диаметров, 128
- Сопряжённые диаметры
 - гиперболы, 69
 - эллипса, 62
- Теорема
 - Аполлония, 64
 - Брианшона, 224
 - для вырожденных шестиугольников, 224
 - Гаусса, 30
 - Дарбу, 34
 - Дезарга, 166
 - обратная, 167
 - Маклорена, 222
 - Паппа, 185
 - Паппа аффинная, 23
 - Паскаля, 211
 - для вырожденных шестиугольников, 213
 - Симсона аффинная, 91
 - Фалеса, 21
 - обобщённая, 23
 - Штаудта, 228
 - о задании аффинного преобразования, 38
 - о задании проективного преобразования, 191
 - проективной геометрии основная, 184
- Точка
 - Брианшона, 224
 - неподвижная аффинного преобразования, 40
- Трёхвершинник, 161
- Трёхсторонник, 161
- Треугольник
 - дезаргов (перспективный), 167
- Треугольник автополярный, 217
- Тройка диаметров сопряжённая, 128
- Тройное произведение векторов, 95
- Угол гиперболический, 74
- Уравнение
 - характеристическое
 - аффинного преобразования, 101
- Формула Лагерра, 252
- Характеристическое уравнение
 - аффинного преобразования, 42, 101
 - проективного преобразования, 194
- Центр
 - аффинного преобразования, 100, 108
 - гиперболы, 68
 - двуполостного гиперболоида, 132
 - линии второго порядка, 243
 - однополостного гиперболоида, 129
 - эллипсоида, 125
- Центр гомологии, 196
- Центроаффинное преобразование, 40
- Цикл гиперболической плоскости, 273
- Цилиндр второго порядка, 116
 - гиперболический, 118
 - параболический, 118
 - эллиптический, 118
- Четырёхвершинник, 156
- Четырёхсторонник, 162
- Эквидистанта, 273
- Эквиполлентные отрезки, 237
- Эквицентроаффинное преобразование, 74
- Элация, 196
- Эллипс, 60
 - Штейнера
 - вписанный, 90
 - описанный, 90
 - горловой, 129
 - проективной плоскости, 243
- Эллипсоид, 125
- Эллиптический параболоид, 140
- Эллиптический поворот, 66, 107
- Эллиптический цилиндр, 118

Список литературы

- [1] *Вольберг О.* Основные идеи проективной геометрии. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
- [2] *Глаголев Н. А.* Проективная геометрия. — М.: Высшая школа, 1963.
- [3] *Гуревич Г. Б.* Проективная геометрия. — М.: Физматгиз, 1960.
- [4] *Делоне Б. Н., Райков Д. А.* Аналитическая геометрия. Т. 2. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [5] *Елисеев Е. М.* Проективная геометрия. — Арзамас: АГПИ, 1999.
- [6] *Кокстер Г. С. М.* Действительная проективная плоскость. — М.: Физматгиз, 1959.
- [7] *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
- [8] *Комиссарук А. М.* Аффинная геометрия. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.
- [9] *Комиссарук А. М.* Проективная геометрия в задачах. — Минск: Вышэйшая школа, 1971.
- [10] *Лопшиц А. М.* Аналитическая геометрия. — М.: Учпедгиз, 1948.
- [11] *Понарин Я. П.* Аналитическая геометрия проективной плоскости. — Киров: КГПИ, 1988.
- [12] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. — М.: МЦНМО. Т. 1 — 2004, т. 2 — 2006, т. 3 — 2009.
- [13] *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. — М.: Мир, 1970.
- [14] *Четверухин Н. Ф.* Проективная геометрия. — М.: Учпедгиз, 1961.
- [15] *Шерватов В. Г.* Гиперболические функции. — М.: Физматгиз, 1958.
- [16] *Яглом И. М., Ашкингузе В. Г.* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. — М.: Учпедгиз, 1962.
- [17] *Lenz H.* Vorlesungen über projective Geometrie. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1965.

Яков Петрович Понарин

АФФИННАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Подписано в печать 17.03.2009 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Тираж 2000 экз. Заказ № 14698.

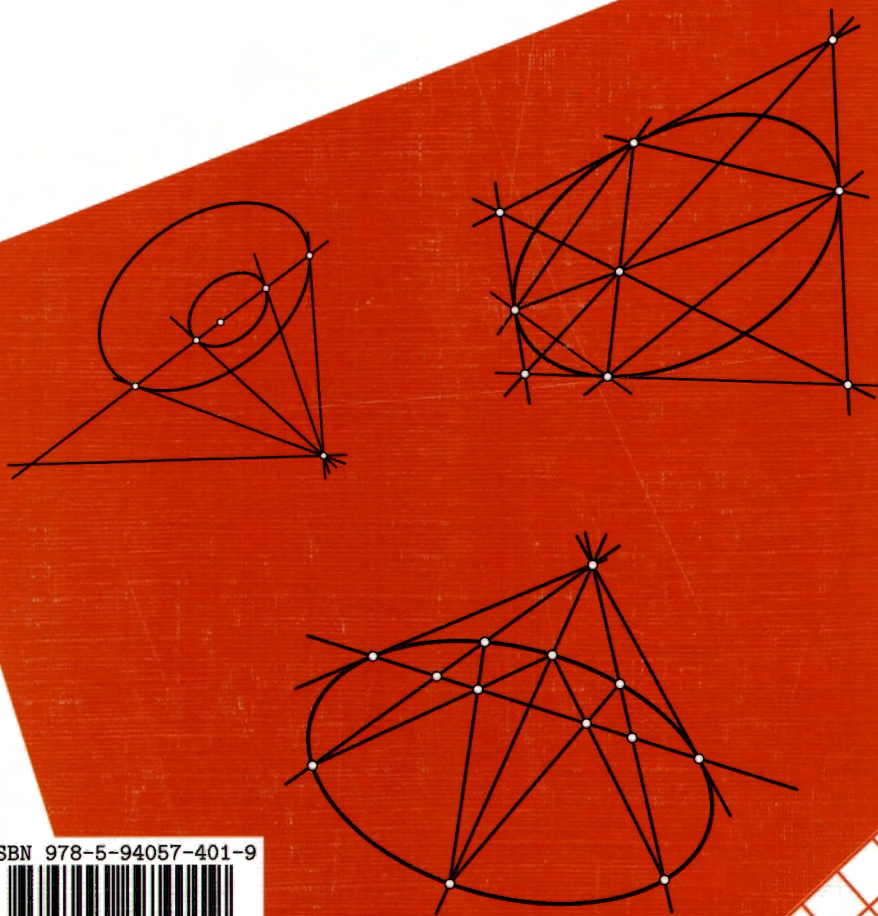
Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано по СтР-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

Книга содержит элементарное систематическое изложение двух классических геометрий как самостоятельных геометрических дисциплин без использования метрических понятий. Она адресуется лицам, желающим самостоятельно заняться изучением основ высшей геометрии.

Основное внимание уделяется аффинным и проективным преобразованиям. На базе проективной геометрии представлены модели аффинной, евклидовой геометрий, геометрии Минковского и геометрии Лобачевского.



ISBN 978-5-94057-401-9



9 785940 574019 >

www.biblio.mccme.ru