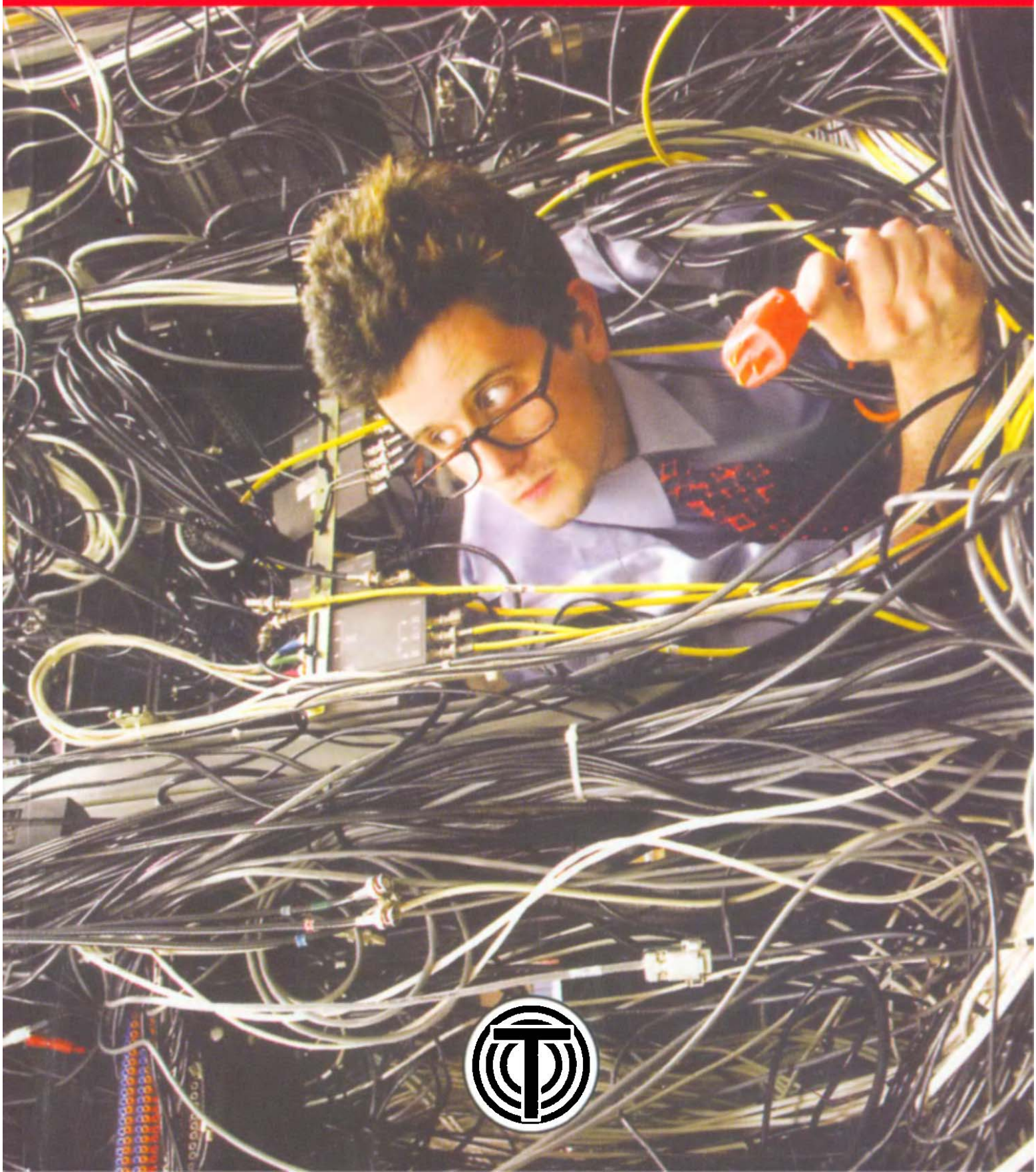
Р. Корис, Х. Шмидт-Вальтер

СПРАВОЧНИК
инженера-схемотехника



ЭЛЕКТРОННЫЕ КОМПОНЕНТЫ
ВАШЕГО УСПЕХА

SICK MAXIM DALLAS Infineon International IOR Rectifier EPCOS Honeywell VISHAY BOURNS ANALOG DEVICES AMP CRYDOM Kingbright DATA VISION



микросхемы, транзисторы, диоды
конденсаторы, резисторы, фильтры
оптоэлектронные компоненты
электромеханические компоненты
соединители и кабели
мультиметры, осциллографы
радиомонтажный инструмент
паяльное оборудование

Бесплатный каталог
и CD с технической документацией
высылаются по заявкам предприятий

www.platan.ru
ПЛАТАН

Офисы в Москве : м. Молодежная: Москва, ул.Ивана Франко, 40, стр.2, (495)97-000-99, почта: 121351, Москва, а/я 100, e-mail: platan@aha.ru м. Новослободская: Москва, 1-й Щемиловский пер., 17/19, стр.2 (495)744-70-70, platan@platan.ru

Офис в Санкт-Петербурге: ул.Зверинская, 44 (812) 232-88-36, 232-23-73, platan@mail.wplus.net
Представительства: Воронеж: (0732) 59-75-57 Казань: (8432) 92-18-06 Киев: (38044) 494-37-92 Новосибирск: (3832) 16-33-66 Омск: (3812) 24-69-03 Ульяновск: (8422) 37-65-67 Уфа: (3472) 32-10-79
Региональные дилеры: Белгород: (0722) 32-87-22 Ижевск: (3412) 43-72-51 Омск: (3812) 24-10-90 Ростов-на-Дону: (8632) 44-34-48 Саратов: (8452) 27-88-55 Самара: (8462) 35-26-09 С.-Петербург: (812) 327-96-92 Саратов: (8452) 27-88-55 Тольятти: (8482) 70-91-03 Томск: (3822) 55-65-30, 51-12-25 Чебоксары: (8352) 56-63-03 Йошкар-Ола: (8362) 45-17-45 Минск: (375-17) 287-28-60 Якутск: (4112) 35-07-19

МИР электроники

Р. КОРИС,
Х. ШМИДТ-ВАЛЬТЕР

Справочник инженера-схемотехника

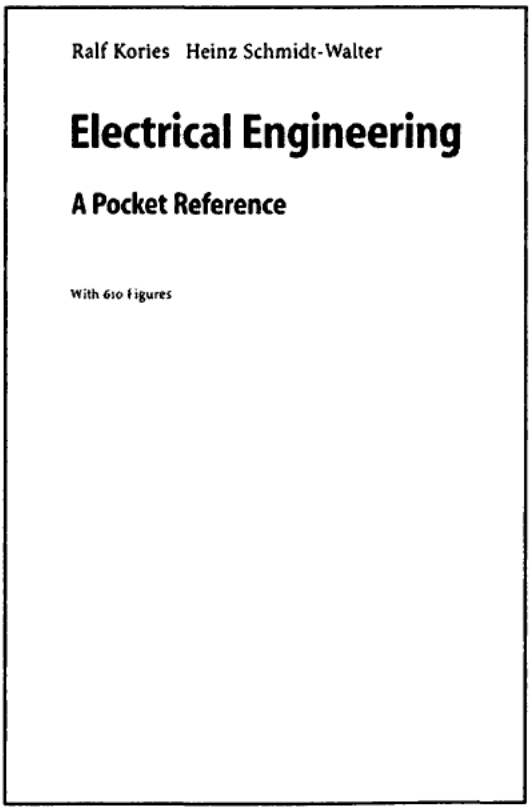
Перевод с английского
Ю. А. Заболотной
под редакцией
Е. Л. Свинцова

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2008

Корис Р., Шмидт-Вальтер Х.
Справочник инженера-схемотехника
Москва:
Техносфера, 2008. – 608с. ISBN 978-5-94836-164-2

Удобный, компактный и достаточно полный источник информации по электротехнике и электронике, основам расчета цепей постоянного и переменного тока, закономерностям электрических и магнитных полей, принципам измерения основных электрических величин, аналоговой и цифровой схемотехнике, силовым электрическим компонентам. Большое количество иллюстраций упрощают поиск необходимой информации.

Книга адресована студентам, инженерам, разработчикам электронной аппаратуры и измерительных систем. Справочник переведен на несколько языков, в Германии переиздавался шесть раз. Без сомнения, он будет популярен и в России.


Ralf Kories Heinz Schmidt-Walter

Electrical Engineering

A Pocket Reference

With 610 Figures

© Verlag Harri Deutsch, 2003
© 2006, ЗАО «РИЦ «Техносфера», перевод на русский язык
© 2008, ЗАО «РИЦ «Техносфера», оригинал-макет, оформление
сканировал: kipiaxxx , обработал: jtp

ISBN 978-5-94836-164-2
ISNB 3-540-43965-X (нем.)

Содержание

Предисловие 12
Глава 1. Цепи постоянного тока 13
1.1. Основные величины, основные законы 13
1.1.1. Электрический заряд 13
1.1.2.Электрический ток 13
1.1.3. Напряжение и потенциал 14
1.1.4. Закон Ома 15
1.1.5. Сопротивление и проводимость 15
1.1.6. Температурная зависимость сопротивления 16
1.1.7. Индуктивность 16
1.1.8. Емкость 17
1.1.9. Идеальный источник напряжения 18
1.1.10. Идеальный источник тока 18
1.1.11. Законы Кирхгофа 18
1.1.12. Мощность и энергия 19
1.1.13. Коэффициент полезного действия 22
1.1.14. Передача максимальной мощности 23
1.2. Основные схемы 24
1.2.1. Реальные источники напряжения и тока 24
1.2.2. Последовательные и параллельные соединения элементов схем 26
1.2.3. Преобразование соединений «звезда – треугольник» 30
1.2.4. Делители тока и напряжения 31
1.2.5. *RC*- и *RL*-цепочки 32
1.2.6. *RLC*-схемы 39
1.3. Методы расчета линейных схем 44
1.3.1. Правило знаков 44
1.3.2. Методы анализа электронных схем (по узлам и контурам) . . 44
1.3.3. Принцип суперпозиции 46
1.3.4. Метод анализа по контурам 47
1.3.5. Метод анализа по узлам 48
1.3.6. Теоремы Тевенина и Нортона 49
1.4. Обозначения 52
Литература 52
Глава 2. Электрические поля 53
2.1. Электростатические поля 53
2.1.1. Закон Кулона 53
2.1.2. Напряженность электрического поля 54

2.1.3. Напряжение и потенциал 56
2.1.4. Электростатическая индукция 56
2.1.5. Электрическое смещение 58
2.1.6. Диэлектрики 59
2.1.7. Интеграл Кулона 60
2.1.8. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля 61
2.1.9. Емкость 61
2.1.10. Электростатическое поле на границе двух сред 62
2.1.11. Емкость и напряженность электрического поля систем из проводников различной геометрической формы (обзор) . 63
2.1.12. Энергия электростатического поля 65
2.1.13. Силы, действующие в электростатическом поле 65
2.1.14. Характеристики электростатического поля (обзор) 68
2.1.15. Соотношения между характеристиками электростатического поля 69
2.2. Электрическое поле проводника с установившимся постоянным током 69
2.2.1. Напряжение и потенциал 70
2.2.2. Ток 70
2.2.3. Напряженность электрического поля 70
2.2.4. Плотность тока 71
2.2.5. Удельное сопротивление и удельная проводимость 72
2.2.6. Сопротивление и проводимость 73
2.2.7. Законы Кирхгофа 75
2.2.8. Поле проводника с установившимся постоянным током на границе двух сред 76
2.2.9. Характеристики полей и сопротивлений проводников с различными геометрическими параметрами (обзор) 77
2.2.10. Мощность и энергия проводника с установившимся постоянным током 79
2.2.11. Характеристики поля проводника с установившимся постоянным током (обзор) 80
2.2.12. Соотношения между характеристиками поля проводника с установившимся постоянным током 80
2.3. Магнитные поля 81
2.3.1. Сила, действующая на движущийся заряд 82
2.3.2. Определение плотности магнитного потока 83
2.3.3. Закон Био – Савара 85
2.3.4. Напряженность магнитного поля 86
2.3.5. Магнитный поток 87
2.3.6. Магнитное напряжение и закон Ампера 88
2.3.7. Магнитное сопротивление, магнитная проводимость, индуктивность 90
2.3.8. Характеристики материалов в магнитном поле 92

2.3.9. Магнитные поля на границах двух сред 96
2.3.10. Магнитные цепи 96
2.3.11. Магнитные цепи постоянного магнита 99
2.3.12. Индуктивность различных геометрических конфигураций (обзор) 101
2.3.13. Электромагнитная индукция 102
2.3.14. Взаимная индукция 109
2.3.15. Принцип действия трансформатора 111
2.3.16. Энергия магнитного поля 112
2.3.17. Силы, действующие в магнитном поле. 113
2.3.18. Характеристики магнитного поля (обзор) 115
2.3.19. Взаимосвязь характеристик магнитного поля. 116
2.4. Уравнения Максвелла. 116
2.5. Обозначения 118
Литература. 120
Глава 3. Цепи переменного тока 121
3.1. Математические основы описания цепей переменного тока . . . 121
3.1.1. Тригонометрические функции 121
3.1.2. Комплексные числа 123
3.1.3. Вычислительные операции с комплексными числами . . . 129
3.1.4. Арифметические действия с комплексными числами (обзор) 131
3.1.5. Комплексная экспоненциальная функция 132
3.1.6. Тригонометрические функции с комплексными аргументами 133
3.1.7. Переход от синусоидальных сигналов к фазорам 134
3.2. Синусоидальные сигналы 137
3.2.1. Характеристики синусоидальных сигналов. 138
3.2.2. Характеристики несинусоидальных сигналов 141
3.3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи переменного тока 142
3.3.1. Комплексное сопротивление 142
3.3.2. Комплексное сопротивление пассивных компонентов. . . 144
3.3.3. Комплексная проводимость. 145
3.3.4. Комплексная проводимость пассивных компонентов . . . 147
3.3.5. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость (обзор) 147
3.4. Импеданс пассивных компонентов. 148
3.5. Соединения пассивных компонентов 150
3.5.1. Последовательные соединения 150
3.5.2. Параллельные соединения 156
3.5.3. Обзор последовательных и параллельных соединений пассивных элементов. 162
3.6. Преобразования электрических цепей 164

3.6.1. Преобразование параллельных цепей в последовательные и наоборот . . . 164
3.6.2. Преобразования «звезда – треугольник» и «треугольник – звезда» . . . 165
3.6.3. Схемы замещения . . . 168
3.7. Простые электрические цепи . . . 169
3.7.1. Делители комплексных напряжений и токов . . . 169
3.7.2. Нагруженный делитель комплексных напряжений . . . 172
3.7.3. Согласование импедансов . . . 173
3.7.4. Делитель напряжения с заданными входным и выходным сопротивлениями . . . 175
3.7.5. Фазовращатели . . . 176
3.7.6. Мосты переменного тока . . . 180
3.8. Мощность в цепи переменного тока . . . 182
3.8.1. Мгновенная мощность . . . 182
3.8.2. Средняя мощность . . . 184
3.8.3. Комплексная мощность . . . 187
3.8.4. Мощность в цепях переменного тока (обзор) . . . 188
3.8.5. Цепи компенсации реактивных составляющих тока . . . 190
3.9. Трехфазные цепи . . . 191
3.9.1. Многофазные системы . . . 191
3.9.2. Трехфазные цепи . . . 192
3.9.3. Трехфазные генераторы, включенные по схеме «треугольник» . . . 194
3.9.4. Трехфазные генераторы, включенные по схеме «звезда» . . . 195
3.10. Симметричные трехфазные системы (обзор) . . . 197
3.10.1. Мощность в трехфазных системах . . . 198
3.11. Обозначения . . . 199
Литература . . . 201
Глава 4. Измерение тока, напряжения и мощности . . . 202
4.1. Электрические измерительные приборы . . . 202
4.1.1. Магнитоэлектрический измеритель . . . 202
4.1.2. Магнитоэлектрический логометр . . . 203
4.1.3. Электродинамический измеритель . . . 203
4.1.4. Электромагнитный измеритель . . . 204
4.1.5. Другие электромеханические измерители . . . 205
4.1.6. Электрические измерители (обзор) . . . 206
4.2. Измерение постоянного тока и напряжения . . . 207
4.2.1. Магнитоэлектрические измерители . . . 207
4.2.2. Расширение пределов измерения приборов по току . . . 208
4.2.3. Расширение пределов измерения приборов по напряжению . . . 210
4.2.4. Защита от перегрузок . . . 210
4.2.5. Систематические погрешности при измерении тока и напряжения . . . 211

4.3. Измерение переменного тока и напряжения 212
4.3.1. Магнитоэлектрические измерители с выпрямителем 212
4.3.2. Электромагнитные измерители 213
4.3.3. Расширение диапазона измерения при помощи измерительных трансформаторов 214
4.3.4. Измерение среднеквадратичных значений (СКЗ) сигналов 215
4.4. Измерение мощности 216
4.4.1. Измерение мощности в цепях постоянного тока 216
4.4.2. Измерение мощности в цепях переменного тока 218
4.4.3. Измерение мощности в многофазных системах 220
4.5. Погрешности измерения 223
4.5.1. Систематические и случайные погрешности измерения . . 223
4.5.2. Гарантированный предел допустимой погрешности 224
4.6. Обозначения на измерительных приборах 224
4.7. Методы измерений (обзор) 225
4.8. Обозначения 226
Литература 226
Глава 5. Частотный анализ цепей 227
5.1. Линейные системы 227
5.1.1. Передаточные функции, амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики 228
5.2. Фильтры 230
5.2.1. Фильтры нижних частот 230
5.2.2. Фильтры верхних частот 231
5.2.3. Полосовые фильтры 231
5.2.4. Режекторные фильтры 233
5.2.5. Фазовые фильтры 233
5.3. Простые фильтры 233
5.3.1. Фильтры нижних частот 233
5.3.2. Нормирование частотных характеристик 235
5.3.3. Фильтры верхних частот 237
5.3.4. Фильтры более высоких порядков 239
5.3.5. Полосовые фильтры 240
5.3.6. Варианты реализации фильтров 242
5.4. Обозначения 243
Литература 244
Глава 6. Сигналы и системы 245
6.1. Сигналы 245
6.1.1. Определения 245
6.1.2. Свойства симметричности сигналов 246
6.2. Ряды Фурье 247
6.2.1. Тригонометрическая форма записи рядов Фурье 247
6.2.2. Амплитудно-фазовая форма представления рядов Фурье . 249
6.2.3. Экспоненциальная форма представления рядов Фурье . . . 249
6.2.4. Представления рядов Фурье (обзор) 251

6.2.5. Интегралы для вычисления коэффициентов Фурье 252
6.2.6. Ряды Фурье некоторых полезных функций 253
6.2.7. Применение рядов Фурье 255
6.3. Системы 258
6.3.1. Характеристики систем 258
6.3.2. Элементарные сигналы 260
6.3.3. Сдвиг и масштабирование временных сигналов 263
6.3.4. Реакция систем на различные входные воздействия 264
6.3.5. Вычисление отклика системы на импульсную и ступенчатую функции 270
6.3.6. Идеальные системы 276
6.4. Преобразования Фурье 282
6.4.1. Принцип преобразований Фурье 282
6.4.2. Основные определения 282
6.4.3. Представление преобразования Фурье в комплексном виде 283
6.4.4. Свойства преобразований Фурье (обзор) 284
6.4.5. Преобразования Фурье элементарных сигналов 286
6.4.6. Обзор преобразований Фурье 291
6.5. Нелинейные системы 294
6.5.1. Основные определения 294
6.5.2. Характеристики нелинейных систем 294
6.6. Обозначения 300
Литература 302
Глава 7. Разработка аналоговых схем 303
7.1. Методы анализа электрических схем 303
7.1.1. Линеаризация в рабочей точке 303
7.1.2. Эквивалентные схемы по переменному току 304
7.1.3. Входной и выходной импеданс 305
7.1.4. Четырехполюсники 307
7.1.5. Блок-схемы 310
7.1.6. Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) 312
7.2. Кремниевые и германиевые диоды 313
7.2.1. Вольт-амперные характеристики Si- и Ge-диодов 313
7.2.2. Температурная зависимость порогового напряжения 314
7.2.3. Динамическое или дифференциальное сопротивление . . . 314
7.3. Усилители малых сигналов на биполярных транзисторах 315
7.3.1. Характеристики транзисторов 315
7.3.2. Эквивалентные схемы 320
7.3.3. Пара Дарлингтона (составной транзистор) 322
7.3.4. Основные схемы на биполярных транзисторах 324
7.3.5. Схема с общим эмиттером 325
7.3.6. Схема с общим коллектором (эмиттерный повторитель) . . 337
7.3.7. Схема с общей базой 340
7.3.8. Основные схемы на биполярных транзисторах (обзор) . . . 342
7.3.9. Источники тока на биполярных транзисторах 343

7.3.10. Дифференциальный усилитель на биполярных транзисторах . . . 345
7.3.11. Дифференциальные усилители на биполярных транзисторах (обзор) . . . 351
7.3.12. Токовое зеркало . . . 352
7.4. Усилители малых сигналов на полевых транзисторах . . . 352
7.4.1. Характеристики транзисторов и основные соотношения . 353
7.4.2. Эквивалентные схемы . . . 357
7.4.3. Основные схемы на полевых транзисторах . . . 358
7.4.4. Схема с общим истоком . . . 359
7.4.5. Схема с общим затвором . . . 366
7.4.6. Основные схемы на полевых транзисторах (обзор) . . . 367
7.4.7. Источники тока на полевых транзисторах . . . 368
7.4.8. Дифференциальный усилитель на полевых транзисторах . 369
7.4.9. Дифференциальный усилитель на полевых транзисторах (обзор) . . . 370
7.4.10. Полевой транзистор как регулируемый резистор . . . 371
7.5. Отрицательная обратная связь . . . 372
7.5.1. Топология систем с обратными связями . . . 373
7.5.2. Влияние отрицательной обратной связи на входной и выходной импеданс . . . 376
7.5.3. Влияние отрицательной обратной связи на частотные характеристики . . . 377
7.5.4. Устойчивость систем с отрицательными обратными связями . . . 378
7.6. Операционные усилители . . . 380
7.6.1. Характеристики ОУ . . . 380
7.6.2. Частотная коррекция . . . 385
7.6.3. Компараторы . . . 386
7.6.4. Схемы на ОУ . . . 386
7.7. Активные фильтры . . . 399
7.7.1. Фильтры нижних частот . . . 400
7.7.2. Фильтры верхних частот . . . 409
7.7.1. Полосовые фильтры . . . 411
7.7.4. Универсальный фильтр . . . 413
7.7.5. Фильтр с переключаемым конденсатором . . . 414
7.8. Генераторы . . . 415
7.8.1. *RC*-генераторы . . . 416
7.8.2. *LC*-генераторы . . . 417
7.8.3. Кварцевые генераторы . . . 419
7.8.4. Мультивибраторы . . . 421
7.9. Нагрев и охлаждение . . . 422
7.9.1. Надежность и срок службы . . . 422
7.9.2. Расчет температуры . . . 424
7.10. Усилители мощности . . . 427

7.10.1. Эмиттерный повторитель 428
7.10.2. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса B 431
7.10.3. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса C 433
7.10.4. Характеристические кривые при работе в разных режимах . 434
7.10.5. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса AB 434
7.10.6. Подача сигналов на входы усилителей мощности 438
7.10.7. Импульсные усилители мощности 440
7.11. Обозначения 441
Литература 442
Глава 8. Цифровая электроника 443
8.1. Алгебра логики 443
8.1.1. Логические переменные и элементы 443
8.1.2. Логические функции и их обозначения 444
8.1.3. Логические преобразования 448
8.1.4. Логические преобразования (обзор) 450
8.1.5. Анализ логических схем 451
8.1.6. Сумма произведений и произведение сумм 451
8.1.7. Оптимизация логических функций 454
8.1.8. Построение комбинационных схем 460
8.2. Электронная реализация логических схем 461
8.2.1. Определение электрических характеристик 461
8.2.2. Обозначения, принятые в справочной литературе (обзор) . 465
8.2.3. Семейство ТТЛ-схем 468
8.2.4. Семейство КМОП-схем 470
8.2.5. Сравнение ТТЛ- и КМОП-серий 472
8.2.6. Специальные разновидности схем 473
8.3. Комбинационные схемы и последовательная логика 476
8.3.1. Обозначение внутренних зависимостей 477
8.3.2. Символы, используемые в комбинационных и последовательных логических схемах 479
8.4. Примеры комбинационных схем 480
8.4.1. Дешифратор 1:*n* 480
8.4.2. Мультиплексор и демультиплексор 480
8.5. Триггеры 482
8.5.1. Применение триггеров 482
8.5.2. RS-триггер 482
8.5.3. D-триггер 484
8.5.4. Синхронный двухступенчатый триггер 484
8.5.5. JK-триггер 485
8.5.6. Режимы работы триггеров 487
8.5.7. Обозначения в схемах триггеров 487
8.5.8. Триггеры (обзор) 488

8.5.9. Триггеры, тактируемые перепадом напряжения (обзор) . . 489
8.5.10. Разработка триггеров, тактируемых перепадом напряжения 490
8.5.11. Схемы триггеров (обзор) 493
8.6. Запоминающие устройства. 493
8.6.1. Организация запоминающих устройств 494
8.6.2. Обращение к памяти 495
8.6.3. Статические и динамические ОЗУ 496
8.6.4. Постоянные запоминающие устройства 498
8.6.5. Программируемые логические устройства 499
8.7. Регистры 504
8.8. Счетчики 505
8.8.1. Асинхронные счетчики. 506
8.8.3. ТТЛ- и КМОП-счетчики (обзор) 516
8.9. Проектирование и реализация последовательных логических схем 519
Литература 526
Глава 9. Источники питания 527
9.1. Силовые трансформаторы 527
9.2. Выпрямление и фильтрация 529
9.2.1. Схемы разных выпрямителей 531
9.3. Стабилизация аналогового напряжения 533
9.3.1. Стабилизация напряжения при помощи стабилитрона . . 533
9.3.2. Стабилизация напряжения при помощи транзистора . . . 533
9.3.3. Регуляторы напряжения 534
9.4. Импульсные источники питания 535
9.4.1. ИИП с несимметричными выходами, вторичные ИИП . . 536
9.4.2. Первичные ИИП 542
9.4.3. Импульсные источники питания (обзор) 555
9.4.4. Управление импульсными источниками питания 558
9.4.5. Расчет катушек индуктивности и высокочастотных трансформаторов 561
9.4.6. Управление коэффициентом мощности. 566
9.4.7. Подавление высокочастотных помех в ИИП 570
9.5. Обозначения 574
Литература 575
Приложение 1. Перевод английских сокращений 576
Приложение 2. Обозначения в электрических схемах 604

Предисловие

Цель

Цель этой книги — предоставление справочной информации об основных законах электротехники и электроники, необходимой широкому кругу читателей: от студентов технических вузов до разработчиков электронной аппаратуры.

Этот справочник представляет собой не просто набор формул и уравнений, в нем даны разъяснения фундаментальных закономерностей и способов их применения.

Это пособие будет полезно студентам, изучающим такие дисциплины, как электротехника, электроника, системы связи, автоматизация технологических процессов и т. д., при подготовке к занятиям и экзаменам.

Опыт издания этой книги в Германии показал, что она стала настольной книгой многих инженеров и разработчиков, от которых получены о ней хорошие отзывы.

Организация книги

Эта книга построена так же, как и большинство справочников. При ее составлении старались обеспечить независимость каждой главы от остальных глав. Необходимые факты приводятся в контексте излагаемого материала.

Для обобщения материала, а также иллюстрации основных закономерностей и отдельных фактов в книге приводится большое количество сводных таблиц, примеров и рисунков.

Для понимания каждого символа любого уравнения в конце всех глав размещен список используемых обозначений, их значений и единиц измерения.

Расширенный предметный указатель помогает легко найти ответ на интересующий вопрос.

Поскольку все электрические устройства не могут работать без источников питания, последняя глава справочника посвящена именно им. Здесь содержится информация об устройстве современных источников питания, которая может быть полезной как для начинающих, так и для опытных разработчиков электронных схем.

Благодарности

Этот справочник — результат совместной работы трех европейских университетов. Авторы особенно благодарны Elmar Jung и Paul O'Leary из Dublin Institute of Technology за перевод немецкой редакции на английский язык, а также Christopher Bruce, Frank Duignan и Eugene Coyle за прочтение рукописи и ряд ценных комментариев. Книга не увидела бы свет без Elmar Jung — мастера компьютерной верстки, а также без кропотливого редактора Ms. Tracey Wilbourn. Окончательный вариант справочника — заслуга большого коллектива людей.

И наконец, авторы хотят поблагодарить сотни читателей, которые на протяжении последних лет делились с нами своими мнениями и давали советы, как улучшить книгу, чтобы сделать ее еще более полезной.

Авторы

ГЛАВА 1

ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Основные величины, основные законы

1.1.1. Электрический заряд

Единицей измерения заряда в системе СИ является кулон (Кл).

Вся теория электричества построена на существовании электрических **зарядов**, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Между двумя электрическими зарядами всегда действует сила, описываемая законом Кулона (раздел 2.1.1). Одноименные заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные — притягиваются.

С физической точки зрения любой заряд кратен **элементарному заряду** e. Элементарный заряд $e = \pm 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Электроны переносят отрицательный заряд, а протоны — положительный. Недостаток электронов в теле означает, что тело заряжено положительно. Аналогично этому избыток электронов указывает на то, что тело заряжено отрицательно.

1.1.2. Электрический ток

В системе СИ единицей электрического тока является ампер (А).

Направленное движение носителей электрического заряда называется **электрическим током**:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{1.1}$$

Электрический ток I в проводнике равен заряду dQ, проходящему через поперечное сечение проводника за время dt. Ток называется постоянным, если через проводник за равные промежутки времени проходит одинаковое количество заряда, т. е. *для постоянного тока* справедливо:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \text{const}. \tag{1.2}$$

Направление тока

Положительным направлением тока считается направление движения носителей положительного заряда, которое эквивалентно движению носителей отрицательного заряда, происходящему в обратном направлении. В металлических проводниках носителями зарядов являются электроны. Следовательно, с физической точки зрения электроны движутся навстречу положительному потоку тока (рис. 1.1).

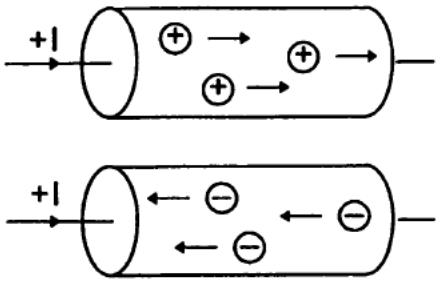


Рис. 1.1. Определение положительного направления тока

- Электрические заряды всегда движутся по замкнутому контуру. Это значит, что для протекания в цепи электрического тока она должна быть замкнута.

1.1.3. Напряжение и потенциал

В системе СИ единицей измерения напряжения является вольт (В).

Электрическое **напряжение** часто называют электродвижущей силой (ЭДС), вызывающей движение носителей зарядов.

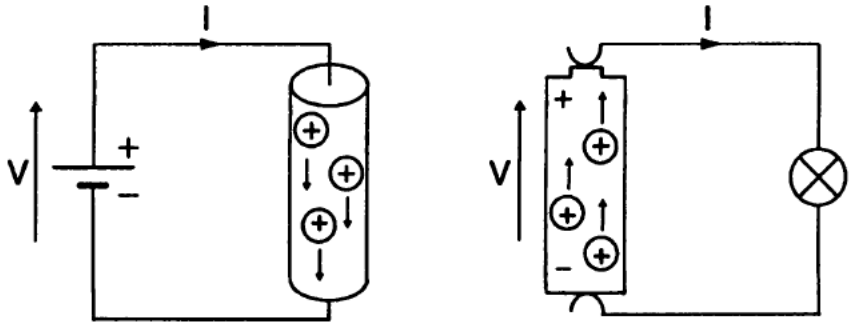


Рис. 1.2. Электрические схемы, показывающие полярность напряжения и направление тока

Электрический ток всегда течет от положительного вывода источника напряжения к его отрицательному выводу. Поскольку ток может течь только в замкнутой цепи, *внутри* источника напряжения (например, в батарее) ток течет от отрицательного вывода к положительному (рис. 1.2).

Потенциал φ является скалярной величиной. Если считать, что одна из точек пространства обладает нулевым потенциалом ($\varphi = 0$), то для всех остальных точек пространства может быть определено абсолютное значение потенциала. Это значение соответствует энергии, которую необходимо сообщить заряженной частице, чтобы заставить ее переместиться из точки с потенциалом $\varphi = 0$ в заданную точку. Для такой физической модели справедливо,

что напряжение V между двумя точками равно разности потенциалов между ними (рис. 1.3). Тогда можно записать, что:

$$V_{21} = \varphi_2 - \varphi_1. \tag{1.3}$$

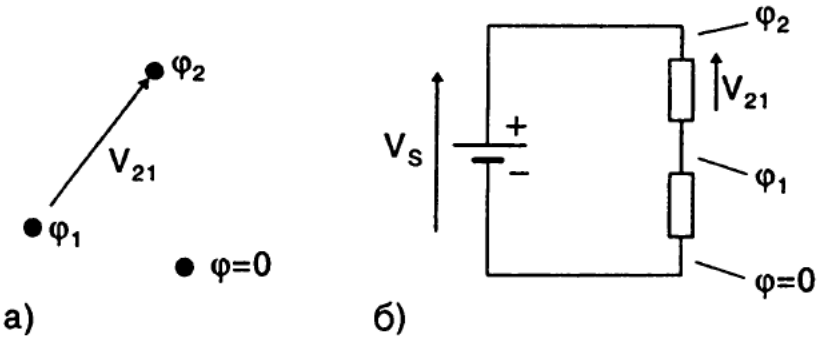


Рис. 1.3. Соотношение между напряжением и потенциалом:
а) для произвольных точек;
б) в замкнутом контуре

1.1.4. Закон Ома

Величина тока, текущего через нагрузку, определяется приложенным к ней напряжением. Если выполняется условие, что свойства нагрузки не зависят ни от тока, протекающего через нее, ни от напряжения, приложенного к ней, то для такой цепи справедлив **закон Ома**:

$$V \propto I \quad \text{или} \quad V = R \cdot I. \tag{1.4}$$

В соответствии с этим законом ток меняется пропорционально напряжению, а величина R, связывающая ток и напряжение, называется **электрическим сопротивлением**.

1.1.5. Сопротивление и проводимость

Единицей измерения сопротивления в системе СИ является ом, 1 Ом = 1 В/А.

Единицей измерения проводимости в системе СИ является сименс (См), 1 См = 1 А/В.

Следующие соотношения связывают ток и напряжение через **сопротивление** R и **проводимость** G (рис. 1.4):

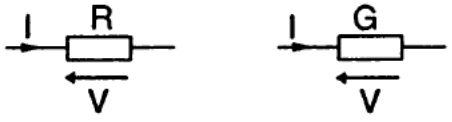


Рис. 1.4. Обозначение сопротивления и проводимости в электрической цепи

$$V = R \cdot I \quad \text{или} \quad R = \frac{V}{I};$$

$$I = G \cdot V \quad \text{или} \quad G = \frac{I}{V}. \tag{1.5}$$

1.1.6. Температурная зависимость сопротивления

Во всех реальных резисторах изменение температуры приводит к изменению их сопротивления. Зависимость между величиной сопротивления и температурой является практически линейной и может быть описана через **температурный коэффициент сопротивления** α (K^{-1}).

При нагреве резистора R_1 от температуры θ_1 до температуры θ_2, его сопротивление изменится на величину:

$$\Delta R = R_{1\alpha}(\theta_2 - \theta_1). \qquad (1.6)$$

Сопротивление резистора при температуре θ_2 можно найти из выражения:

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)]. \qquad (1.7)$$

Температурный коэффициент сопротивления α часто задается при температуре $\theta = 20\,^{\circ}C$. При помощи этого значения можно вычислять величину сопротивления до температур, не превышающих $\approx 200\,^{\circ}C$. Для большинства резистивных материалов (за исключением некоторых типов полупроводников) α имеет положительное значение. Это означает, что с ростом температуры величина сопротивления будет увеличиваться.

Пример. Для алюминия и меди $\alpha = 0{,}004\ K^{-1}$. При изменении температуры на $\Delta\theta = 100$ K сопротивление медного или алюминиевого провода изменится на 40 %.

Для нахождения величины сопротивления в более широком температурном диапазоне необходимо учитывать нелинейность зависимости $R = f(\theta)$. Для этого вводят дополнительный квадратичный член с коэффициентом β. Тогда зависимость сопротивления от температуры принимает вид:

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1) + \beta(\theta_2 - \theta_1)^2]. \qquad (1.8)$$

1.1.7. Индуктивность

В системе СИ единицей измерения индуктивности является генри (Гн): 1 Гн = 1 В·с/А.

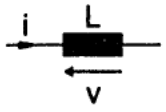


Рис. 1.5. Обозначение индуктивности в электрических схемах

- Напряжение v на элементе с **индуктивностью** L пропорционально скорости изменения тока i:

$$v = L\frac{di}{dt}, \quad i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_1} v\,dt + I_0, \quad L = \frac{v\,dt}{di}. \qquad (1.9)$$

Ток, протекающий по цепи до начала процесса интегрирования, обозначается как I_0. Если на индуктивный элемент подать постоянное напряжение, то ток в нем будет нарастать по линейному закону (рис. 1.6).

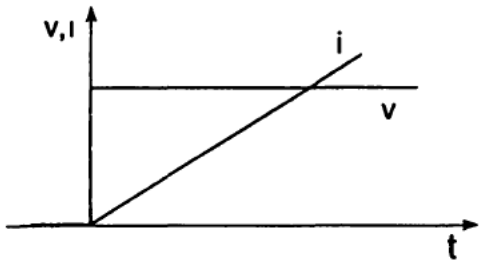


Рис. 1.6. Зависимость тока от времени при подаче на индуктивный элемент постоянного напряжения

- Ток, протекающий через индуктивный элемент, не может меняться мгновенно, в то время как напряжение на нем изменяется моментально.
- Ток в индуктивном элементе пропорционален интегралу во времени от приложенного к нему напряжения.

Под индуктивным элементом понимается **индуктор**, **дроссель** или **катушка индуктивности**.

1.1.8. Емкость

В системе СИ единицей измерения емкости является фарад (Ф): $1\,\Phi = 1\,\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}}$.

- Ток, протекающий через цепь с емкостным элементом, обладающим емкостью C, пропорционален скорости изменения напряжения v на этом элементе:

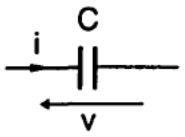


Рис. 1.7. Обозначение емкости в электрических схемах

$$i = C\frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1} i\,dt + V_0, \quad C = \frac{i\,dt}{dv}. \tag{1.10}$$

Напряжение, приложенное к емкостному элементу до начала процесса интегрирования, равно V_0. Если емкостной элемент подключить к идеальному источнику тока, то напряжение на нем будет меняться линейно (рис. 1.8).

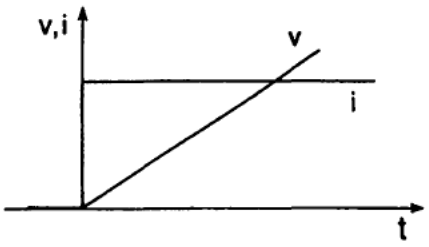


Рис. 1.8. Зависимость напряжения от времени при подключении емкостного элемента к идеальному источнику тока

- Напряжение на емкостном элементе является непрерывной величиной (т. е. не может меняться мгновенно), в то время как ток в цепи с емкостным элементом изменяется практически моментально.

Емкостной элемент часто называют **конденсатором**. Ток, протекающий через цепь с емкостным элементом, приводит к накоплению в нем электрических зарядов, т. е. происходит его зарядка.

1.1.9. Идеальный источник напряжения

При подключении к цепи **источника напряжения** в ней появляется электрический ток (рис. 1.9).

- **Идеальный источник напряжения** вырабатывает напряжение V_S, не зависящее от изменений тока I в нагрузке.

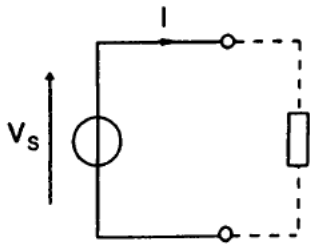


Рис. 1.9. Идеальный источник напряжения

1.1.10. Идеальный источник тока

- **Идеальный источник тока** вырабатывает ток I_S, не зависящий от напряжения на нагрузке V (рис. 1.10).

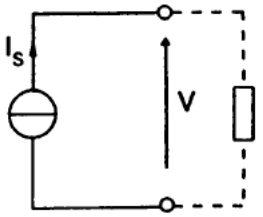


Рис. 1.10. Идеальный источник тока

1.1.11. Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа описывают поведение тока и напряжения в электрических схемах. Любая электрическая цепь может быть представлена в виде **эквивалентной схемы**, состоящей из **ветвей**, **узлов** и **контуров** (рис. 1.11). Точки соединения называются узлами, а отрезки, соединяющие два узла, — ветвями. В свою очередь, ветви формируют замкнутые контуры.

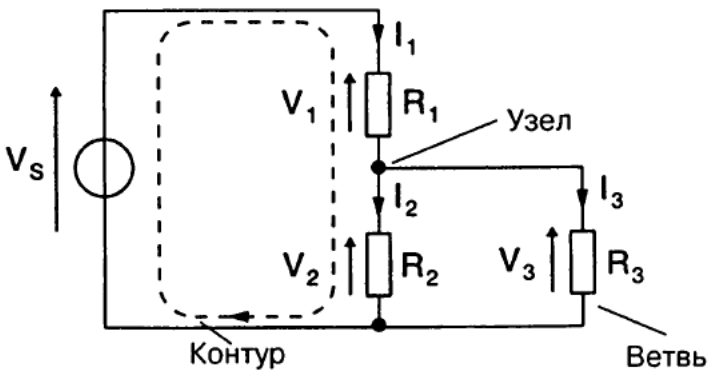


Рис. 1.11. Типовая схема, состоящая из ветвей, узлов и контуров

1.1.11.1. Первый закон Кирхгофа (закон токов)

- Сумма токов в узле всегда равна нулю:

$$\sum_n I_n = 0. \tag{1.11}$$

Другими словами, это означает, что сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из него. Для цепи, показанной на рис. 1.11, можно записать:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Для того чтобы лучше понять этот закон, необходимо вспомнить, что ток течет только в замкнутом контуре, в котором никакие дополнительные токи появиться не могут.

1.1.11.2. Второй закон Кирхгофа (закон напряжений)

- Сумма всех напряжений в контуре всегда равна нулю:

$$\sum_m V_m = 0. \tag{1.12}$$

Для схемы на рис. 1.11 это означает, что:

$$\begin{aligned} -V_S + V_1 + V_2 &= 0, \\ -V_S + V_1 + V_3 &= 0, \\ V_2 - V_3 &= 0. \end{aligned}$$

1.1.12. Мощность и энергия

В системе СИ единицей измерения мощности является ватт: 1 Вт = 1 В·А.
В системе СИ единицей измерения энергии является джоуль: 1 Дж = 1 Вт·с.

Мгновенная мощность определяется как:

$$p(t) = i(t) \cdot v(t). \tag{1.13}$$

На практике часто используется величина, называемая **средней мощностью** P:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i(t) \cdot v(t) dt. \tag{1.14}$$

Например, средние потери мощности на диоде определяются рассеянием тепла на нем.

Для цепей постоянного тока формула (1.14) принимает вид:

$$P = V \cdot I. \tag{1.15}$$

Электрическая энергия W — это интеграл мощности во времени:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\cdot v(t)\,dt. \qquad (1.16)$$

Для цепей постоянного тока справедливо следующее выражение:

$$W = P\cdot(t_2 - t_1) = V\cdot I\cdot(t_2 - t_1). \qquad (1.17)$$

Примечание. В системе СИ единицы измерения мощности и энергии электрических величин связаны с соответствующими единицами механических и термодинамических параметров определенными выражениями.

Пример. Найдем, какой ток должен протекать через нагревательный элемент для повышения температуры 1 л воды в течение 10 минут на 100 °С (с 0 до 100 °С), если напряжение, поданное на него равно 230 В. Вспомним, что 1 Дж/с = 1 В·А. Тогда:

$$W = 100 \text{ ккал} = 418{,}7 \text{ кДж} = 0{,}116 \text{ кВт·ч},$$

$$W = V\cdot I\cdot t,$$

$$I = \frac{W}{V\cdot t} = \frac{418{,}7 \text{ кДж}}{230 \text{ В}\cdot 600 \text{ с}} = 3{,}0 \text{ А}.$$

1.1.12.1. Энергия и мощность теплового рассеяния на резисторе

В резисторе электрическая энергия преобразуется в тепловую энергию. Для резистора напряжение пропорционально току, поэтому:

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = i(t)^2\cdot R = \frac{v(t)^2}{R}. \qquad (1.18)$$

Здесь не учитывается температурное изменение сопротивления.

Выражение для средней мощности имеет вид:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\cdot R dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v(t)^2}{R}dt\,. \qquad (1.19)$$

Для цепей постоянного тока это выражение упрощается:

$$P = V\cdot I = I^2\cdot R = \frac{V^2}{R}\,. \qquad (1.20)$$

Пример. При напряжении 230 В двигатель вырабатывает механическую энергию $P = 500$ Вт. Определить величину эквивалентного резистора, моделирующего потребление мощности этим двигателем, считая, что в нем нет никаких потерь.

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{(230 \text{ В})^2}{500 \text{ Вт}} = 106 \text{ Ом}.$$

Энергия W, выделяемая в виде тепла в течение некоторого интервала времени, находится из следующего выражения:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt\,. \tag{1.21}$$

Для цепей постоянного тока это выражение принимает вид:

$$W = V \cdot I \cdot (t_2 - t_1) = I^2 \cdot R \cdot (t_2 - t_1) = \frac{V^2}{R} \cdot (t_2 - t_1). \tag{1.22}$$

1.1.12.2. Энергия магнитного поля катушки индуктивности

В идеальном индукторе происходит поглощение и выделение электрической энергии. Электрическая энергия в нем не преобразуется в тепловую. Энергия, накапливаемая в индукторе, является энергией магнитного поля (см. раздел 2.3.16).

Для энергии, запасенной в индукторе, справедливо следующее соотношение:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} v(t) \cdot i(t)dt + W_0.$$

Пусть начальная энергия, соответствующая моменту времени t_0, равна W_0. Считая, что $v = L\,di/dt$, а $W_0 = 0$, получаем выражение:

$$W = \int L\frac{di}{dt} i\,dt = L\int i\,di = \frac{1}{2} L \cdot i^2,$$

$$W = \frac{1}{2} L \cdot i^2. \tag{1.23}$$

Для цепей постоянного тока справедливо:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2. \tag{1.24}$$

- Энергия, запасенная в индукторе, пропорциональна величине индуктивности и квадрату тока, протекающего через него.

1.1.12.3. Энергия электрического поля заряженного конденсатора

В идеальном конденсаторе проходят процессы поглощения и выделения электрической энергии. Преобразования электрической энергии в тепловую в нем не происходит. Энергия, накапливаемая в конденсаторе, является энергией электрического поля (см. раздел 2.1.12).

Энергия заряженного конденсатора определяется следующим соотношением:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} v(t) \cdot i(t)dt + W_0.$$

Пусть начальная энергия, соответствующая моменту времени t_0, равна W_0. Считая, что $i = C dv/dt$, а $W_0 = 0$, можно вывести следующее выражение:

$$W = \int C\frac{dv}{dt} v\,dt = C\int v\,dv = \frac{1}{2}C\cdot v^2,$$

$$W = \frac{1}{2}C\cdot v^2. \qquad (1.25)$$

Для цепей постоянного тока справедливо:

$$W = \frac{1}{2}C\cdot V^2. \qquad (1.26)$$

- Энергия, запасенная в конденсаторе, пропорциональна величине емкости и квадрату напряжения на его электродах.

1.1.13. Коэффициент полезного действия

Коэффициент полезного действия (КПД) η — это отношение эффективной (полезной) мощности $P_{эфф}$ к общей мощности $P_{общ}$:

$$\eta = \frac{P_{эфф}}{P_{общ}} = \frac{P_{эфф}}{P_{эфф} + P_{потерь}}. \qquad (1.27)$$

Пример. Двигатель потребляет мощность $P = 230\ В \cdot 5\ А$. При этом, вращаясь со скоростью $n = 3000$ об/мин, он создает момент $M = 2{,}5$ Н·м. Найдем КПД этого двигателя:

$$\eta = \frac{P_{эфф}}{P_{общ}} = \frac{M\omega}{V\cdot I} = \frac{M\frac{2\pi}{60}n}{V\cdot I} = 0{,}68 = 68\,\%.$$

Определим КПД реального источника напряжения с сопротивлением нагрузки R_L. Это сопротивление соответствует эффективной мощности, а сопротивление источника R_S отображает потери мощности (рис. 1.12).

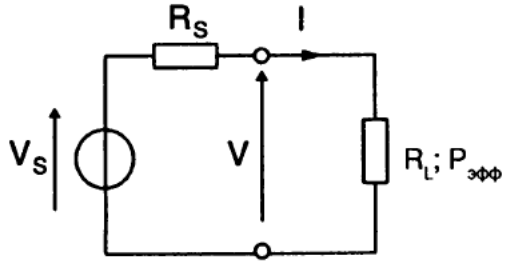


Рис. 1.12. Реальный источник напряжения с нагрузочным резистором

$$P_{эфф} = V\cdot I, \quad P_{общ} = V_s\cdot I, \quad P_{потерь} = I^2\cdot R_s.$$

$$\eta = \frac{V\cdot I}{V_S\cdot I} = \frac{V_S\cdot\frac{R_L}{R_S+R_L}\cdot\frac{V_S}{R_S+R_L}}{V_S\cdot\frac{V_S}{R_S+R_L}} = \frac{R_L}{R_S+R_L}.$$

- Чем меньше сопротивление источника, тем выше КПД. Если сопротивление источника напряжения равно нулю, то КПД равно 1 (рис. 1.13).

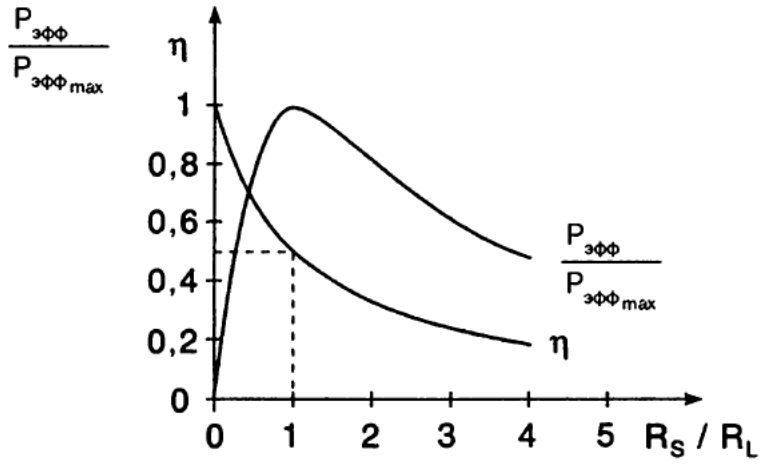


Рис. 1.13. КПД и приложенная мощность реального источника напряжения

1.1.14. Передача максимальной мощности

В некоторых случаях важным является не КПД источника напряжения, а передача им максимальной мощности. Например, это существенно для многих типов датчиков и аудиосистем.

Полезная мощность $P_{эфф}$, получаемая от источника питания, обладающего сопротивлением R_S, равна:

$$P_{эфф} = V \cdot I = V_S \cdot \frac{R_L}{R_S + R_L} \cdot \frac{V_S}{R_S + R_L} = V_S^2 \cdot \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2}.$$

Если $dP_{эфф}/dR_L = 0$, то сопротивление нагрузки, при котором полезная мощность $P_{эфф}$ достигает максимального значения, находится из следующего выражения:

$$\frac{dP_{эфф}}{dR_L} = 0 = V_S^2 \frac{(R_S + R_L)^2 - 2R_L \cdot (R_S + R_L)}{(R_S + R_L)^4}.$$

Решая его, получаем:

$$R_L = R_S. \qquad (1.28)$$

Это выражение известно как условие **согласования импедансов**.

В этом случае КПД равен:

$$\eta = \frac{R_L}{R_S + R_L} = \frac{1}{2} = 50\ \%. \qquad (1.29)$$

- При $R_L = R_S$ нагрузка потребляет максимальную мощность, а КПД источника при этом составляет 50 %.

1.2. Основные схемы

1.2.1. Реальные источники напряжения и тока

1.2.1.1. Реальный источник напряжения

Напряжение на выводах реального источника напряжения (например, батареи) зависит от его выходного тока. Это напряжение уменьшается при увеличении выходного тока. Реальный источник напряжения часто представляется в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 1.14. Эта схема состоит из идеального источника напряжения V_S и сопротивления источника R_S, включенного последовательно с ним.

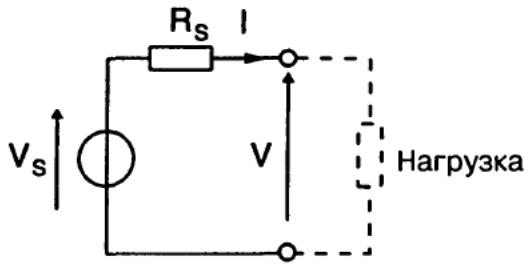


Рис. 1.14. Эквивалентная схема реального источника напряжения

Применив второй закон Кирхгофа, рассчитаем вольт-амперную характеристику источника напряжения:

$$-V_S + I \cdot R_S + V = 0,$$

$$V = V_S - I \cdot R_S. \qquad (1.30)$$

Из этого выражения видно, что при увеличении тока I напряжение V уменьшается линейно. В этой эквивалентной схеме не учитывается нелинейность реального источника напряжения. Однако для большинства практических случаев такая эквивалентная схема является вполне удовлетворительной.

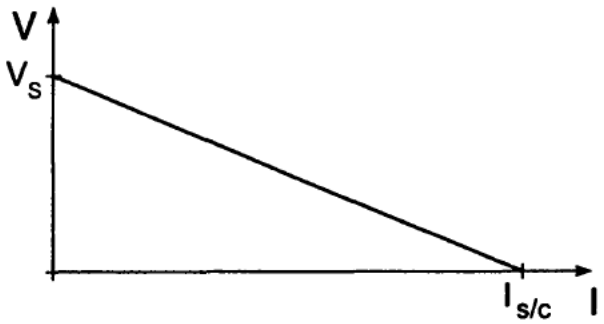


Рис. 1.15. Вольт-амперная характеристика источника напряжения, обладающего некоторым сопротивлением

- В случае разомкнутой цепи (т. е. при $I = 0$) $V = V_S$.
- В случае короткозамкнутой цепи (т. е. при $V = 0$) ток равен:

$$I = I_{s/c} = \frac{V_S}{R_S}.$$

Величина $I_{s/c}$ называется **током короткого замыкания**.

- Чем меньше сопротивление источника напряжения R_S, тем ближе он к идеальному.

1.2.1.2. Реальный источник тока

Ток, вырабатываемый реальным источником тока, зависит от напряжения на нагрузке. При увеличении сопротивления нагрузки этот ток уменьшается. Например, фотодиод является источником тока, в котором падающий свет приводит к появлению тока, практически не зависящего от напряжения в цепи. Реальный источник тока часто представляют в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 1.16, которая состоит из идеального источника тока I_S и включенного параллельно ему сопротивления источника R_S.

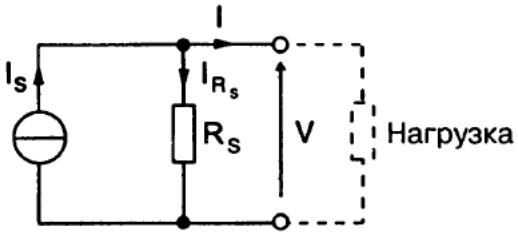


Рис. 1.16. Эквивалентная схема реального источника тока

Чем выше сопротивление нагрузки, тем большее напряжение появится на выводах источника тока. Чем выше напряжение V, тем больший ток будет протекать через сопротивление источника R_S.

Применив первый закон Кирхгофа, рассчитаем зависимость тока от напряжения для источника тока:

$$-I_S + \frac{V}{R_S} + I = 0\ ,$$

$$I = I_S - \frac{V}{R_S}. \qquad (1.31)$$

Из этого выражения видно, что при увеличении напряжения V, ток I будет уменьшаться линейно. В этой эквивалентной схеме не учитывается нелинейность реального источника тока. Однако для большинства практических случаев такая эквивалентная схема является вполне удовлетворительной.

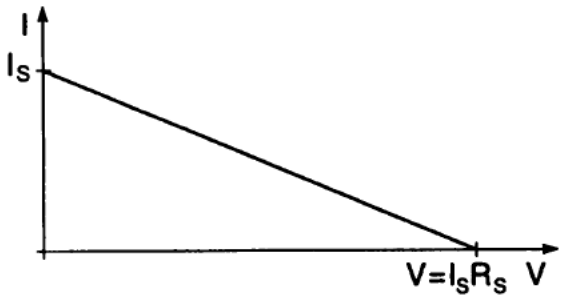


Рис. 1.17. Зависимость тока от напряжения для источника тока, обладающего внутренним сопротивлением

- Для короткозамкнутой цепи ($V = 0$) $I = I_S$.
- При разомкнутой цепи весь ток течет через внутреннее сопротивление, поэтому:

$$V = V_{o/c} = I_S \cdot R_S,$$

где $V_{o/c}$ — напряжение разомкнутой цепи, т. е. без нагрузки.

- Чем выше сопротивление реального источника тока R_S, тем ближе он к идеальному.

1.2.1.3. Преобразование источника напряжения в источник тока и наоборот

Поскольку и источник тока, и источник напряжения имеют идентичные линейные вольт-амперные характеристики, они могут быть преобразованы друг в друга. Так, реальный источник тока можно представить в виде источника напряжения с высоким внутренним сопротивлением, а реальный источник напряжения — в виде источника тока с низким внутренним сопротивлением (рис. 1.18).

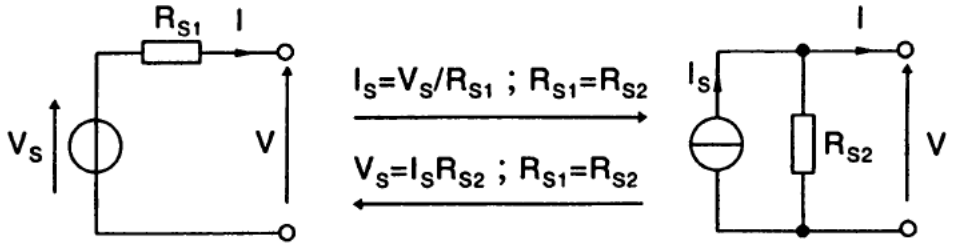


Рис. 1.18. Преобразование источника тока в источник напряжения и наоборот

1.2.2. Последовательные и параллельные соединения элементов схем

- **Последовательное соединение.** При последовательном соединении элементов через них течет один и тот же ток.
- **Параллельное соединение.** При параллельном соединении элементов ко всем из них прикладывается одинаковое напряжение.

1.2.2.1. Последовательное соединение резисторов

На рис. 1.19 показано последовательное соединение резисторов R. Применив к этой цепи второй закон Кирхгофа, получим:

$$V = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \ldots + I \cdot R_n = I \cdot (R_1 + R_2 + \ldots R_n) = I \cdot R_{\text{суммарн}},$$

$$R_{\text{суммарн}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \qquad (1.32)$$

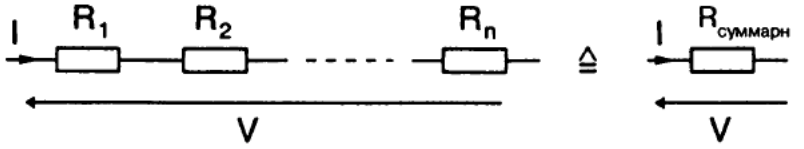


Рис. 1.19. Последовательное соединение резисторов

1.2.2.2. Параллельное соединение резисторов

На рис. 1.20 показано параллельное соединение резисторов R. Применив к этой цепи первый закон Кирхгофа, получим:

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n} = V \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) = V \cdot \frac{1}{R_{\text{суммарн}}}.$$

$$\frac{1}{R_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \qquad (1.33)$$

Для параллельного соединения *двух* резисторов справедливо:

$$\frac{1}{R_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R_{\text{суммарн}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (1.34)$$

- Результирующее сопротивление параллельной комбинации резисторов всегда меньше сопротивления каждого индивидуального резистора.

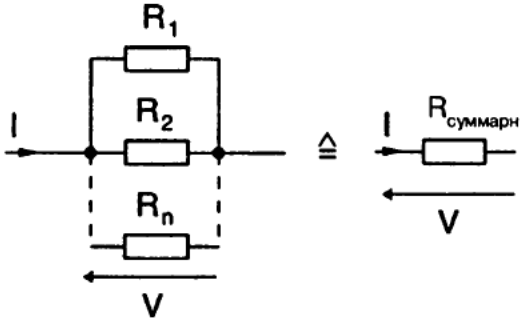


Рис. 1.20. Параллельное соединение резисторов

1.2.2.3. Последовательное соединение проводимостей

Применив к последовательной цепи, состоящей из некоторого числа элементов с проводимостью G (рис. 1.21), второй закон Кирхгофа, получим:

$$V = \frac{I}{G_1} + \frac{I}{G_2} + \ldots + \frac{I}{G_n} = I \cdot \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \ldots + \frac{1}{G_n}\right) = I \cdot \frac{1}{G_{\text{суммарн}}},$$

$$\frac{1}{G_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \ldots + \frac{1}{G_n}. \qquad (1.35)$$

Для последовательного соединения *двух* проводимостей справедливо:

$$\frac{1}{G_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}, \quad G_{\text{суммарн}} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}. \qquad (1.36)$$

- Результирующая проводимость последовательной комбинации проводимостей всегда меньше значения каждой индивидуальной проводимости.

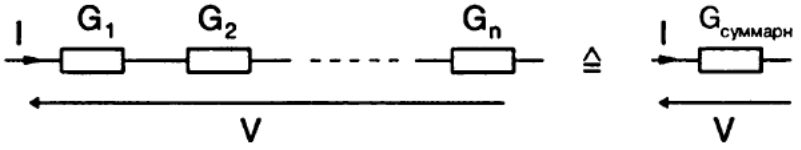


Рис. 1.21. Последовательное соединение проводимостей

1.2.2.4. Параллельное соединение проводимостей

На рис. 1.22 показано параллельное соединение нескольких элементов проводимости G. Применив к данной цепи первый закон Кирхгофа, получим:

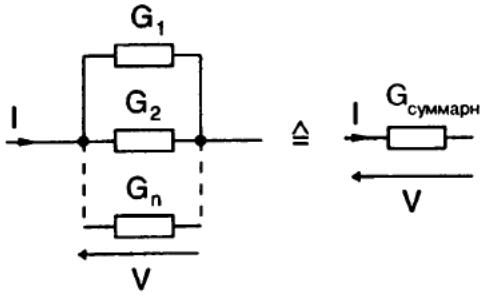


Рис. 1.22. Параллельное соединение проводимостей

$$I = V \cdot G_1 + V \cdot G_2 + \ldots + V \cdot G_n = V \cdot (G_1 + G_2 + \ldots G_n) = V \cdot G_{\text{суммарн}},$$

$$G_{\text{суммарн}} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n. \qquad (1.37)$$

1.2.2.5. Последовательное соединение индуктивных элементов

Применив первый закон Кирхгофа к цепи, состоящей из последовательного соединения нескольких индуктивных элементов (рис. 1.23), получим:

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \ldots + L_n \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \ldots + L_n) \frac{di}{dt} = L_{\text{суммарн}} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$L_{\text{суммарн}} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n. \qquad (1.38)$$

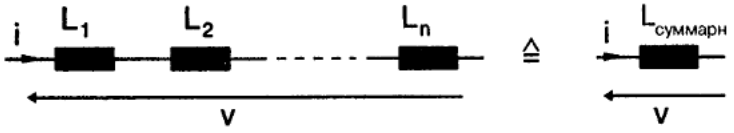


Рис. 1.23. Последовательное соединение индуктивных элементов

1.2.2.6. Параллельное соединение индуктивных элементов

Применив второй закон Кирхгофа к цепи, состоящей из параллельного соединения нескольких индуктивных элементов (рис. 1.24), получим:

$$i = \frac{1}{L_1}\int v\,dt + \frac{1}{L_2}\int v\,dt + \ldots + \frac{1}{L_n}\int v\,dt + I_{01} + I_{02} + \ldots + I_{0n} =$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right)\int v\,dt + I_{01} + I_{02} + \ldots + I_{0n} = \frac{1}{L_{\text{суммарн}}}\int v\,dt + I_0,$$

$$\frac{1}{L_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}. \qquad (1.39)$$

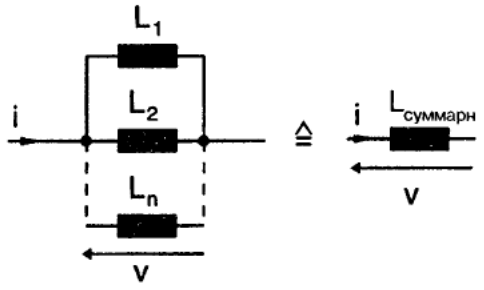


Рис. 1.24. Параллельное соединение индуктивных элементов

Для параллельного соединения двух индуктивностей справедливо:

$$\frac{1}{L_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \quad L_{\text{суммарн}} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}. \tag{1.40}$$

- Результирующая индуктивность параллельного соединения нескольких индуктивных элементов всегда ниже индуктивности каждого из элементов.

1.2.2.7. Последовательное соединение конденсаторов

Применив второй закон Кирхгофа к цепи из последовательного соединения нескольких емкостных элементов (рис. 1.25), получим:

$$v = \frac{1}{C_1}\int i\,dt + V_{01} + \frac{1}{C_2}\int i\,dt + V_{02} + \ldots + \frac{1}{C_n}\int i\,dt + V_{0n} =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)\int i\,dt + V_{01} + V_{02} + V_{0n} =$$

$$= \frac{1}{C_{\text{суммарн}}}\int i\,dt + V_0,$$

$$\frac{1}{C_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}. \tag{1.41}$$

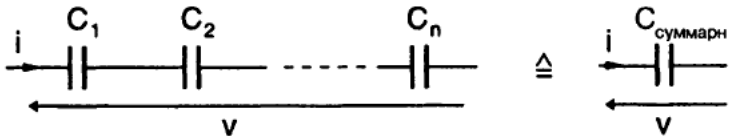


Рис. 1.25. Последовательное соединение емкостных элементов

Для *двух* последовательных конденсаторов справедливо:

$$\frac{1}{C_{\text{суммарн}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C_{\text{суммарн}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \tag{1.42}$$

- Результирующая емкость последовательного соединения нескольких конденсаторов всегда меньше емкости каждого емкостного элемента.

1.2.2.8. Параллельное соединение конденсаторов

Применив первый закон Кирхгофа к цепи из параллельного соединения нескольких емкостных элементов (рис. 1.26), получим:

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \ldots + C_n \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n) \frac{dv}{dt},$$

$$C_{\text{суммарн}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \qquad (1.43)$$

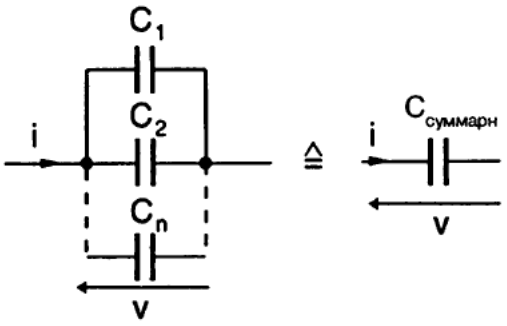


Рис. 1.26. Параллельное соединение емкостных элементов

1.2.3. Преобразование соединений «звезда – треугольник»

Соединение «звезда» всегда может быть преобразовано в эквивалентное **соединение «треугольник»** и наоборот (рис. 1.27). Такие преобразования часто бывают необходимы при расчете сложных резисторных схем.

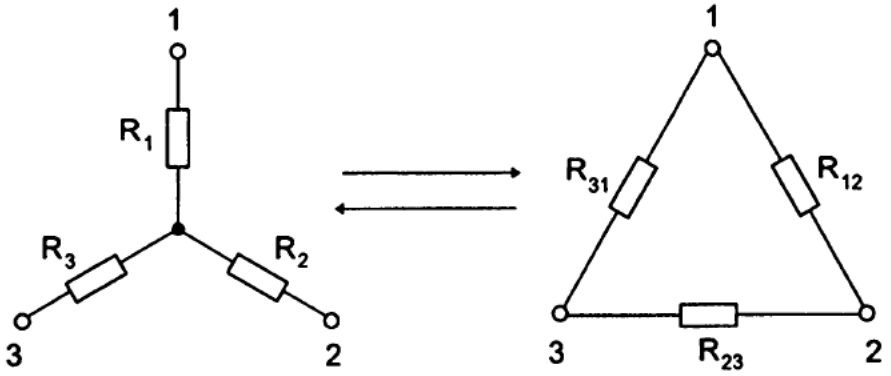


Рис. 1.27. Преобразование «звезда – треугольник»

В преобразовании «звезда – треугольник» используются соотношения:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}, \qquad (1.44)$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}.$$

А для преобразования «треугольник – звезда» справедливы следующие выражения:

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$
$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \qquad (1.45)$$
$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

1.2.4. Делители тока и напряжения

1.2.4.1. Делитель напряжения

Если через два резистора (рис. 1.28) протекает одинаковый ток, то справедливо соотношение:

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V}{R_1 + R_2},$$

из которого выводятся выражения, описывающие работу делителя напряжения:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{V_1}{V} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (1.46)$$

- При последовательном соединении резисторов падение напряжения на каждом из них пропорционально величине их сопротивлений (это правило справедливо для последовательного соединения любого количества резисторов).

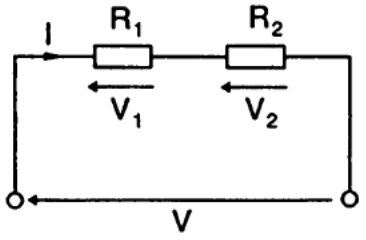


Рис. 1.28. Делитель напряжения

1.2.4.2. Делитель тока

Если к двум элементам проводимости G (рис. 1.29) приложено одинаковое напряжение, то справедливо соотношение:

$$V = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \frac{I}{G_1 + G_2},$$

из которого выводятся выражения, описывающие работу делителя тока:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}, \quad \frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}, \quad \frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}. \qquad (1.47)$$

- При параллельном соединении элементов с проводимостью G ток, протекающий через каждый из них, определяется величиной их проводимости (это правило справедливо для параллельного соединения любого количества элементов).

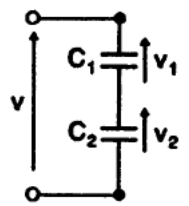
Заменив проводимости на сопротивления, получим:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1},\quad \frac{I_1}{I}=\frac{R_2}{R_1+R_2},\quad \frac{I_2}{I}=\frac{R_1}{R_1+R_2}. \tag{1.48}$$

- При параллельном соединении резисторов ток, протекающий в каждом из них, обратно пропорционален величине их сопротивлений.

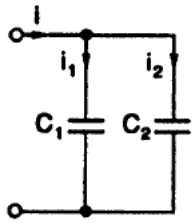
1.2.4.3. Емкостные и индуктивные делители

На рис. 1.30 показаны примеры емкостных и индуктивных делителей с соответствующими соотношениями токов и напряжений в них. Приведенные выражения справедливы только тогда, когда *до подачи* на схемы тока i и напряжения v в емкостных и индуктивных элементах не было запасено никакой энергии, т. е. $V_n(t=0)=0$ и $i_n(t=0)=0$.



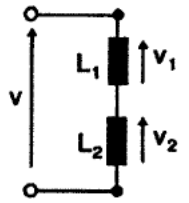
$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{C_2}{C_1}$$

$$\frac{v_1}{v}=\frac{C_2}{C_1+C_2}$$



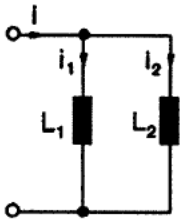
$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\frac{i_1}{i}=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$



$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

$$\frac{v_1}{v}=\frac{L_1}{L_1+L_2}$$



$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{L_2}{L_1}$$

$$\frac{i_1}{i}=\frac{L_2}{L_1+L_2}$$

Рис. 1.30. Емкостные и индуктивные делители

1.2.5. *RC*- и *RL*-цепочки

Этот раздел посвящен описанию переходных процессов, происходящих в схемах последовательного или параллельного соединений резисторов и индуктивных или емкостных элементов при подаче на них постоянного тока или напряжения. Переходные процессы в таких цепях, как правило, описываются дифференциальными уравнениями первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$q(t)=\tau\frac{dy}{dt}+y\ . \tag{1.49}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения получается из решения однородного уравнения $\left(\tau\frac{dy}{dt}+y=0\right)$ и любого частного решения

(например, для определения частного решения при ступенчатом входном воздействии обычно рассматривается поведение системы при $t \to \infty$).

Таким образом, решение неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$y(t) = y(t)_{\text{однородн}} + y(t)_{\text{частн}}. \tag{1.50}$$

Коэффициент τ в выражении (1.49) называется **постоянной времени**.

Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка можно записать в виде:

$$y(t)_{\text{однородн}} = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{1.51}$$

Постоянный коэффициент K_1 получается из начальных условий, соответствующих величине y при $t = 0$.

Пример: расчет переходной характеристики RC-фильтра нижних частот при ступенчатом входном воздействии.

Применив к схеме, показанной на рис. 1.31, второй закон Кирхгофа (закон напряжений), получим следующее выражение:

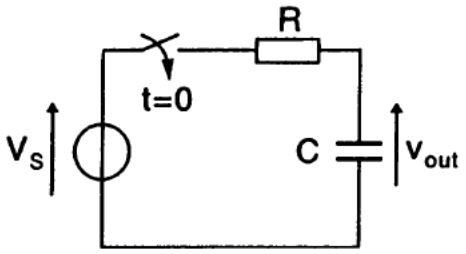


Рис. 1.31. RC-фильтр нижних частот

$$V_S = i \cdot R + V_{\text{out}}, \quad \text{где} \quad i = C\frac{dV_{\text{out}}}{dt}.$$

Исходя из этого, запишем неоднородное дифференциальное уравнение:

$$V_S = R \cdot C \cdot \frac{dV_{\text{out}}}{dt} + V_{\text{out}}, \quad \text{где} \quad R \cdot C = \tau.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$V_{\text{out}}(t) = V_{\text{out}}(t)_{\text{однородн}} + V_{\text{out}}(t)_{\text{частн}} = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + V_S.$$

Коэффициент K_1 определяется при начальных условиях, когда $V_{\text{out}}(0) = 0$:

$$0 = K_1 + V_S \quad \Rightarrow \quad K_1 = -V_S.$$

Теперь запишем окончательное решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$V_{\text{out}}(t) = -V_S \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + V_S = V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

- Константа τ называется постоянной времени. За время τ величина выходного напряжения достигает 63 % установившегося значения. Через интервал времени, равный 5τ, выходное напряжение отличается от стационарного значения только на 1 % (рис. 1.32).

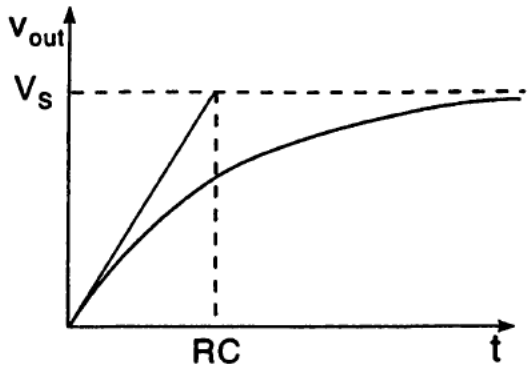


Рис. 1.32. Переходная характеристика *RC*-фильтра нижних частот

1.2.5.1. Последовательная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Предполагается, что до этого времени конденсатор находился в разряженном состоянии. Применив к схеме на рис. 1.33 второй закон Кирхгофа, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$V_S = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i(t) = \frac{V_S}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$V_C(t) = V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \qquad (1.52)$$

$$V_R(t) = V_S \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \tau = R\cdot C\,.$$

После замыкания ключа конденсатор начинает заряжаться через резистор *R*. В процессе заряда конденсатора напряжение на нем возрастает, что вызывает уменьшение напряжения на резисторе *R*. Поскольку величина тока в цепи пропорциональна напряжению V_R, он тоже будет уменьшаться (рис. 1.33).

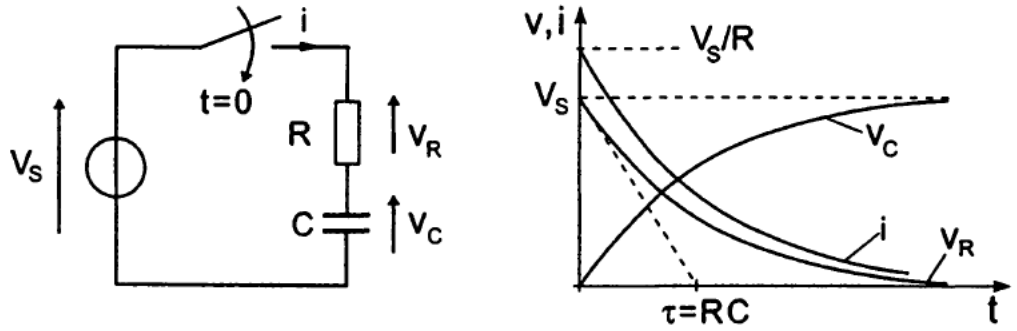


Рис. 1.33. Последовательная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

1.2.5.2. Последовательная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока

На рис. 1.34 показана последовательная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока. В момент времени $t = 0$ ключ меняет свое положение. Предполагается, что до этого времени конденсатор находился в разряженном состоянии.

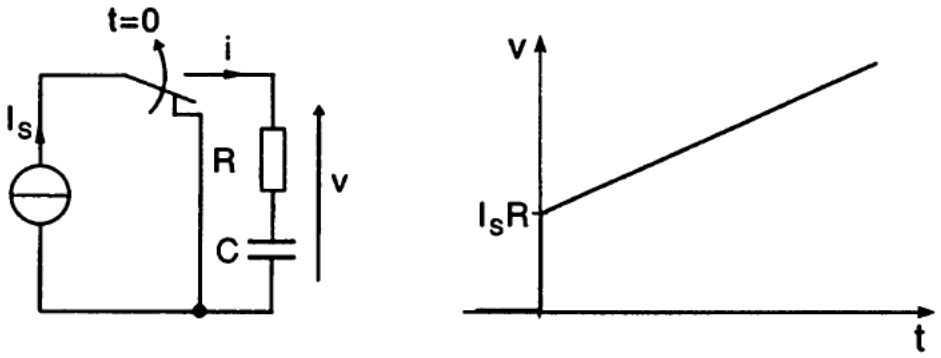


Рис. 1.34. Последовательная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока

Применим к показанной на рис. 1.34 схеме второй закон Кирхгофа:

$$v = I_S \cdot R + \frac{1}{C}\int I_S dt.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v(t) = I_S \cdot R + \frac{1}{C} \cdot I_S \cdot t. \qquad (1.53)$$

1.2.5.3. Параллельная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока

На рис. 1.35 показана параллельная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока. В момент времени $t = 0$ ключ меняет свое положение. Предполагается, что до этого времени конденсатор находился в разряженном состоянии.

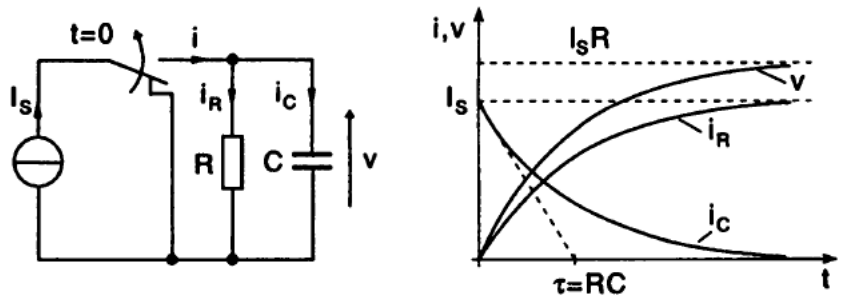


Рис. 1.35. Параллельная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику тока

Применяя к схеме на рис. 1.35 первый закон Кирхгофа (закон токов), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$I_S = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v(t) = I_S \cdot R \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

$$i_R(t) = I_S \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \qquad (1.54)$$

$$i_C(t) = I_S \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \tau = R \cdot C.$$

1.2.5.4. Параллельная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

Теоретически, напряжение на конденсаторе меняется мгновенно, т. е. за бесконечно короткий промежуток времени. Следовательно, ток $i_C = C\,dv/dt$ имеет бесконечно большое значение. На практике схема, показанная на рис. 1.36, является неработоспособной из-за выхода ключа из строя.

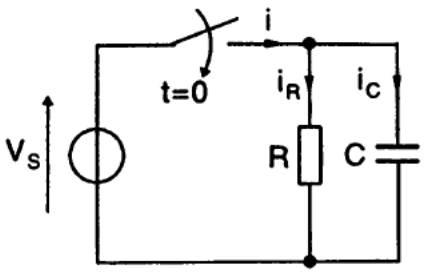


Рис. 1.36. Параллельная *RC*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

1.2.5.5. Последовательная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

Применив к схеме на рис. 1.37 второй закон Кирхгофа, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$V_S = i \cdot R + L\frac{di}{dt}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i(t) = \frac{V_S}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right),$$

$$V_R(t) = V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right), \qquad (1.55)$$

$$V_L(t) = V_S e^{-\frac{t}{L/R}}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Напряжение V_S подается на *RL*-цепочку в момент времени $t = 0$. Ток i, протекающий в схеме, растет со скоростью $di/dt = V_S/L$, что вызывает увеличение падения напряжения на резисторе и одновременное снижение напряжения на катушке индуктивности.

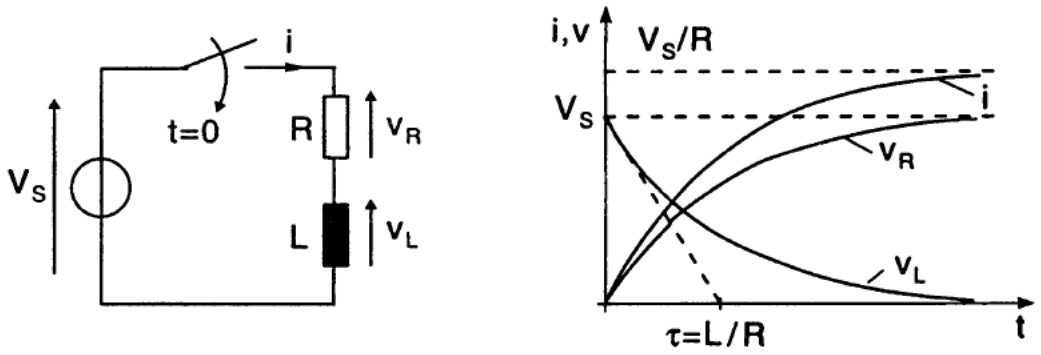


Рис. 1.37. Последовательная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

1.2.5.6. Последовательная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику тока

Переключение ключа в схеме, показанной на рис. 1.38, теоретически может привести к образованию бесконечно большого значения di/dt, в результате чего на катушке индуктивности появится бесконечно высокое напряжение. Однако на практике этого допускать нельзя.

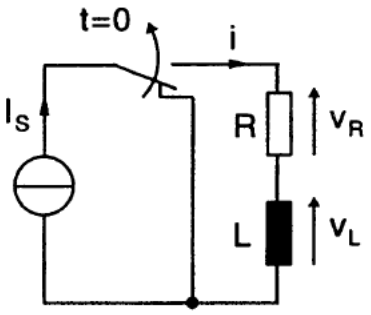


Рис. 1.38. Последовательная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику тока

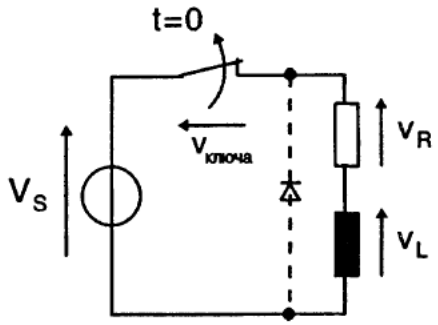


Рис. 1.39. Подключение резистивно-индуктивной нагрузки

Очень высокие значения di/dt получаются также в результате отключения резистивно-индуктивной нагрузки (рис. 1.39).

В момент времени $t = 0$ в схеме протекает ток V_S/R. Размыкание ключа приводит к падению тока со скоростью $di/dt \to -\infty$, что, в свою очередь, ведет к ситуации, когда $v_L \to -\infty$. Применение второго закона Кирхгофа для схемы на рис. 1.39 дает возможность записать выражение:

$$V_S = v_{ключа} + v_R + v_L,$$

из которого видно, что значительно возрастает не только v_L, но и $v_{ключа}$, тогда как v_R и V_S имеют конечные значения. На практике это ведет к разрушению ключа. Для предотвращения этой ситуации в схему добавляется **ограничительный диод**.

1.2.5.7. Параллельная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

Применив первый закон Кирхгофа к схеме, показанной на рис. 1.40, получим уравнение:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \frac{1}{L}\int V_S\, dt,$$

решение которого имеет вид:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \frac{V_S \cdot t}{L}, \qquad (1.56)$$

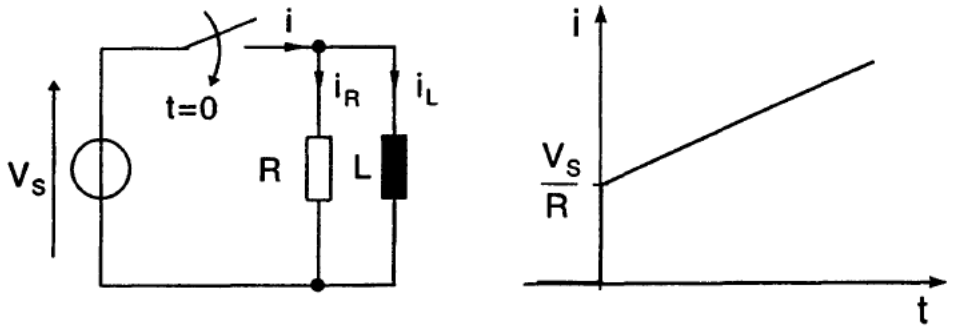


Рис. 1.40. Параллельная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику напряжения

1.2.5.8. Параллельная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику тока

На рис. 1.41 показана параллельная *RL*-цепочка, работающая с источником тока. Ключ замыкается в момент времени $t = 0$. Предполагается, что до этого момента времени ток i_L был равен нулю. Применив к схеме на рис. 1.41 первый закон Кирхгофа, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$I_S = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\, dt.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v(t) = I_S \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{L/R}},$$

$$i_L(t) = I_S \cdot (1 - e^{-\frac{t}{L/R}}), \qquad (1.57)$$

$$i_R(t) = I_S \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

После замыкания ключа весь ток I_S потечет через резистор R, при этом ток через индуктивный элемент i_L начнет увеличиваться со скоростью $di/dt = I_S \cdot R/L$. По мере возрастания тока i_L ток через резистор i_R будет уменьшаться до тех пор, пока весь ток I_S не *потечет* через катушку индуктивности. После чего v станет равным 0, поскольку $i_R = 0$ (рис. 1.41).

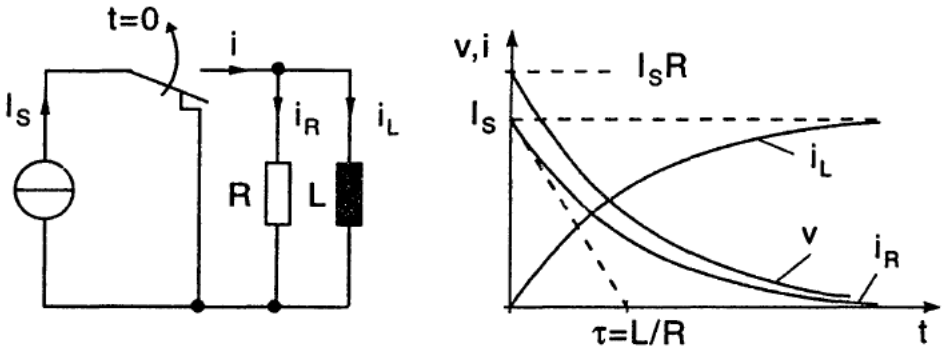


Рис. 1.41. Параллельная *RL*-цепочка, подключаемая к источнику тока

1.2.6. *RLC*-схемы

Этот раздел посвящен описанию переходных процессов, происходящих в схемах, в состав которых входят индуктивные и емкостные элементы, при их подключении к источникам постоянного тока или напряжения. Если в системе присутствуют два независимых энергонакопительных элемента (например, конденсаторы и катушки индуктивности), то она может войти в колебательный режим. Все колебательные процессы описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$q(t) = \frac{1}{\omega_0^{\,2}} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \frac{dy}{dt} + y. \qquad (1.58)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из решения однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$$

и любого частного решения. Для получения описания переходной характеристики при ступенчатом входном воздействии, как правило, используют значение функции y, соответствующее $t \to \infty$.

Следовательно, решение неоднородного дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$y(t) = y(t)_{\text{однородн}} + y(t)_{\text{частн}}. \qquad (1.59)$$

Коэффициент D называется **коэффициентом затухания**, а коэффициент ω_0 — **резонансной частотой**: $\omega_0 = 2\pi f_0$. При решении однородного дифференциального уравнения второго порядка необходимо рассматривать три возможных случая.

1. **Передемпфирование** ($D > 1$):
Решение имеет следующий вид:

$$y(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}. \tag{1.60}$$

2. **Критическое демпфирование** ($D = 1$):

$$y(t) = (K_1 t + K_2) \cdot e^{-D\omega_0 t}. \tag{1.61}$$

3. **Недодемпфирование** ($D < 1$):

$$y(t) = e^{-D\omega_0 t}(K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t), \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}. \tag{1.62}$$

Константы K_1 и K_2 определяются из начальных условий: $y(0)$ и $y'(0)$.

Угловая частота ω называется **собственной частотой**, соответствующей частоте затухающих колебаний демпфированной системы. Ее величина несколько ниже резонансной частоты и зависит от коэффициента затухания.

Примечание. Генератор на основе колебательного контура обычно работает на резонансной частоте. Для обеспечения условий резонанса ($D = 0$) процессы затухания в схеме должны компенсироваться некоторым активным компонентом, например транзистором.

При описании колебательных схем также используются и другие понятия, такие как:

- коэффициент потерь: $d = 2D$;
- добротность: $Q = \dfrac{1}{2D}$;
- полоса пропускания: $B = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \cdot 2D$.

1.2.6.1. Последовательная *RLC*-цепь

Алгоритм решения дифференциального уравнения можно показать на примере последовательной *RLC*-цепи. Схема, показанная на рис. 1.42, представляет собой фильтр нижних частот. Требуется описать переходные процессы, происходящие в нем при подаче на вход ступенчатого сигнала, т. е. определить функцию $v_{out}(t)$.

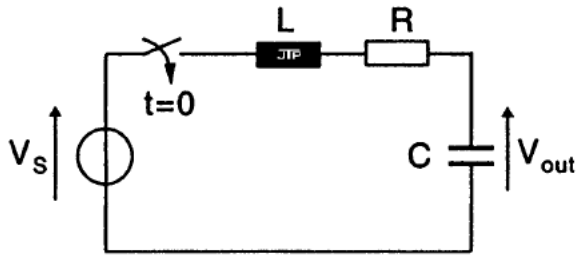


Рис. 1.42. Последовательная *RLC*-цепь (фильтр нижних частот)

Применив к данной схеме второй закон Кирхгофа, получим уравнение:

$$V_S = L\frac{di}{dt} + R \cdot i + v_{out}.$$

Поскольку $i = C\dfrac{dv_{out}}{dt}$, неоднородное дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$V_S = \underbrace{LC}_{\frac{1}{\omega_0^2}} \frac{d^2 V_{out}}{dt^2} + \underbrace{RC}_{\frac{2D}{\omega_0^2}} \frac{dV_{out}}{dt} + V_{out}, \quad LC = \frac{1}{\omega_0{}^2}, \quad RC = \frac{2D}{\omega_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad D = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{1.63}$$

Однородное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$0 = LC\frac{d^2 v_{\text{out}}}{dt^2} + RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}}. \tag{1.64}$$

Одним из частных решений дифференциального уравнения является следующее:

$$v_{\text{out частн}} = v_{\text{out}}(t \to \infty) = v_S. \tag{1.65}$$

Для определения коэффициентов K_1 и K_2 требуются два значения функции $v_{\text{out}}(t)$, поэтому обычно используются начальные условия:

$$v_{\text{out}}(t=0) = 0, \quad \text{и} \quad \left.\frac{dv_{\text{out}}}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.66}$$

Найдем решения неоднородного дифференциального уравнения для трех вышеперечисленных случаев.

1. Передемпфирование ($D > 1$):

$$v_{\text{out}}(t) = v_{\text{out}}(t)_{\text{однородн}} + v_{\text{out частн}} =$$

$$= K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + v_S, \qquad \lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}.$$

Коэффициенты K_1 и K_2 определяются из начальных условий: сначала вычисляется первая производная $dv_{\text{out}}(t)/dt$, после чего в выражения для $dv_{\text{out}}(t)/dt$ и $v_{\text{out}}(t)$ подставляется условие $t = 0$, и из полученных уравнений находятся значения искомых коэффициентов:

$$\frac{dv_{\text{out}}(t)}{dt} = \lambda_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 K_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$v_{\text{out}}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 + K_2 + V_S = 0,$$

$$\left.\frac{dv_{\text{out}}}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{\lambda_2 V_S}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{и} \quad K_2 = \frac{\lambda_1 V_S}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

- Решение дифференциального уравнения для случая передемпфирования имеет вид:

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{V_S}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + V_S. \tag{1.67}$$

2. Критическое демпфирование ($D = 1$):

$$v_{out}(t) = v_{out}(t)_{однородн} + v_{out\ частн} =$$

$$= (K_1 t + K_2)e^{-\omega_0 t} + V_S, \quad D\omega_0 = \omega.$$

Коэффициенты K_1 и K_2 определяются из начальных условий: сначала вычисляется первая производная $dv_{out}(t)/dt$, после чего в выражения для $dv_{out}(t)/dt$ и $v_{out}(t)$ подставляется условие $t = 0$, и из полученных уравнений находятся значения искомых коэффициентов:

$$\frac{dv_{out}}{dt} = K_1 e^{-\omega_0 t} - (K_1 t + K_2)\omega_0 e^{-\omega_0 t},$$

$$v_{out}(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 + V_S = 0,$$

$$\left.\frac{dv_{out}}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 - \omega_0 K_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = -\omega_0 V_S \quad \text{и} \quad K_2 = -V_S.$$

- Решение дифференциального уравнения для случая критического демпфирования имеет вид:

$$v_{out}(t) = -(\omega_0 V_S t + V_S)e^{-\omega_0 t} + V_S. \qquad (1.68)$$

3. Недодемпфирование ($D < 1$):

$$v_{out}(t) = v_{out}(t)_{однородн} + v_{out\ частн} =$$

$$= e^{-D\omega_0 t}(K_1 \cos\omega t + K_2 \sin\omega t) + V_S, \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - D^2}.$$

Коэффициенты K_1 и K_2 определяются из начальных условий: сначала вычисляется первая производная $dv_{out}(t)/dt$, после чего в выражения для $dv_{out}(t)/dt$ и $v_{out}(t)$ подставляется условие $t = 0$, из полученных уравнений находятся значения искомых коэффициентов:

$$\frac{dv_{out}}{dt} = -D\omega_0 e^{-D\omega_0 t}(K_1 \cos\omega t + K_2 \sin\omega t) + e^{-D\omega_0 t}(-K_1\omega \sin\omega t + K_2\omega\cos\omega t),$$

$$v_{out}(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 + V_S = 0,$$

$$\left.\frac{dv_{out}}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -D\omega_0 K_1 + \omega K_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = -V_S \quad \text{и} \quad K_2 = -\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}V_S.$$

- Решение дифференциального уравнения для случая недодемпфирования имеет вид:

$$v_{out}(t) = -V_S e^{-D\omega_0 t}\left(\cos\omega t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\sin\omega t\right) + V_S. \qquad (1.69)$$

На рис. 1.43 показаны графики переходных процессов при ступенчатом внешнем воздействии для разных коэффициентов затухания.

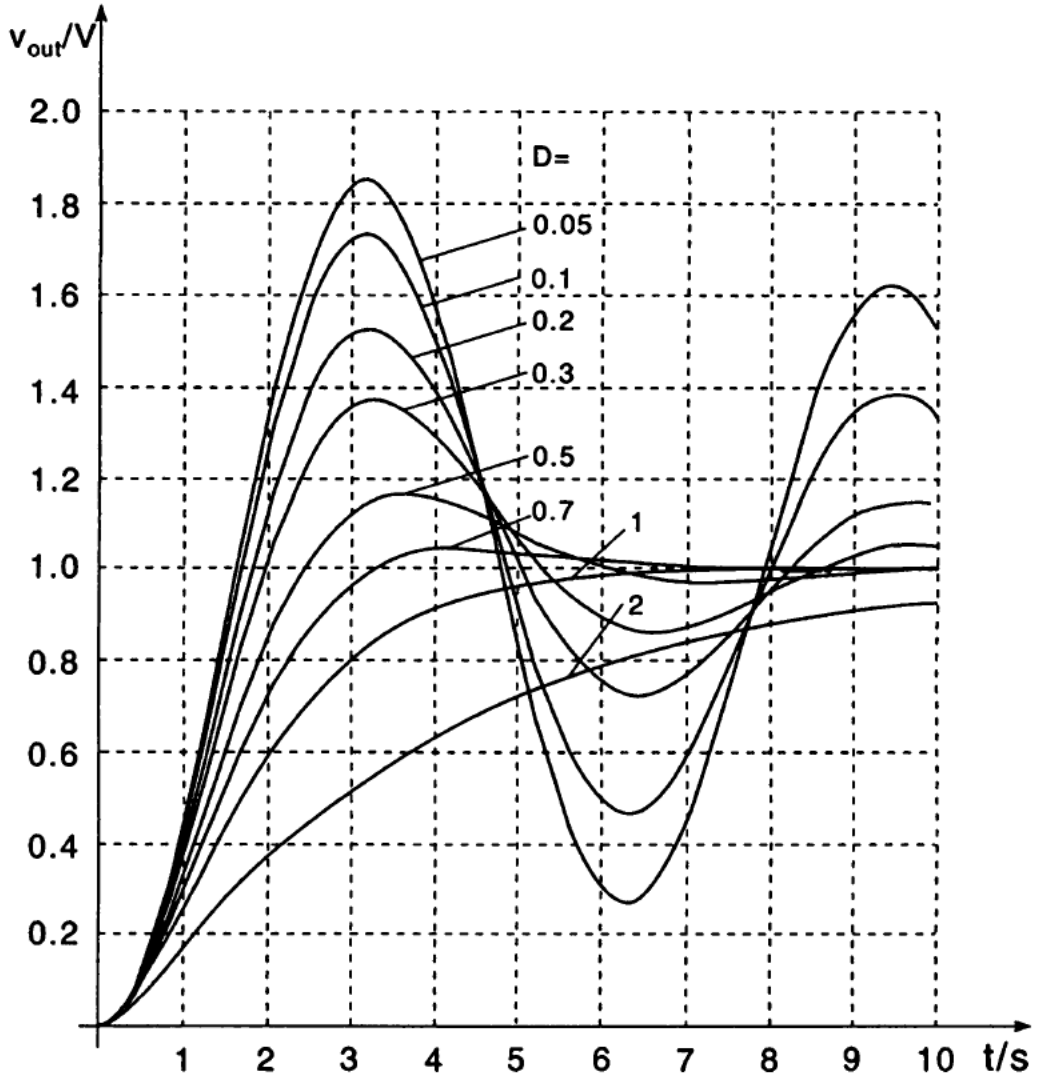


Рис. 1.43. Переходные процессы в *RLC*-фильтре нижних частот при ступенчатом входном воздействии и при разных коэффициентах затухания

В рассматриваемом примере $V_S = 1$ В, а резонансная угловая частота $\omega_0 = 1$ Гц. При низких коэффициентах затухания (недодемпфировании) наблюдается сильное превышение сигнала v_{out} над уровнем установившегося значения. В случае критического демпфирования выходное напряжение быстро достигает стационарного уровня без явлений перерегулирования. Для передемпфирования характерно медленное нарастание выходного напряжения. При $t \to \infty$ все переходные характеристики достигают значения V_S.

Примечание. В электронных системах часто применяется коэффициент затухания $D = 1/\sqrt{2}$. При этом значении выходной сигнал нарастает гораздо быстрее, чем при $D = 1$, а перерегулирование составляет только 4 %.

1.3. Методы расчета линейных схем

1.3.1. Правило знаков

Любая ветвь схемы может играть роль и **генератора**, и **нагрузки**. Генераторами являются компоненты, подающие в схему электроэнергию, это могут быть источники напряжения или тока.

Нагрузкой являются компоненты, потребляющие энергию, обычно это резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы. Такими компонентами могут также быть элементы, в большинстве случаев отдающие энергию. Например, во время процесса зарядки аккумуляторные батареи становятся нагрузкой для зарядного устройства.

Отличить в схемах нагрузочные и генераторные элементы можно по направлению тока и полярности напряжения. В генераторах направление тока и полярность напряжения совпадают, а в нагрузке они направлены в противоположные стороны (рис. 1.44).

Это соглашение используется при дальнейшем анализе схем. Когда точно неизвестна природа того или иного элемента (отдает он энергию или поглощает ее), направление тока и полярность напряжения задаются произвольным образом.

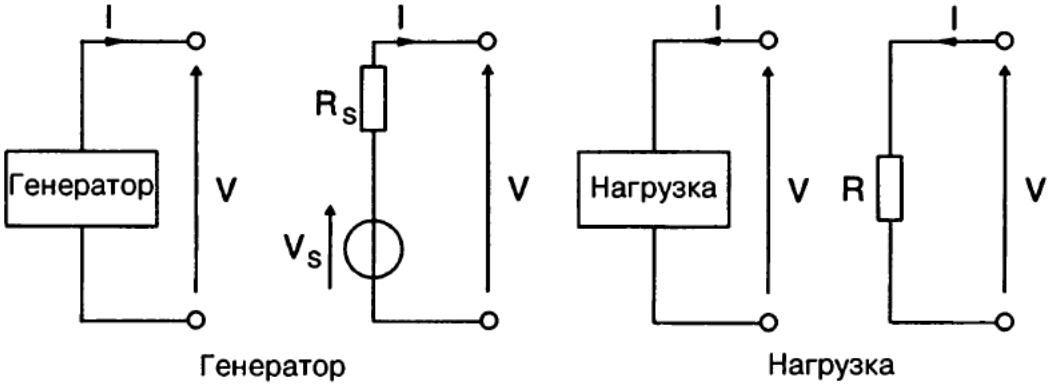


Рис. 1.44. Генератор и нагрузка

1.3.2. Методы анализа электронных схем (по узлам и контурам)

В схемах, где известны значения всех компонентов, при помощи законов Кирхгофа можно получить достаточное количество независимых уравнений, необходимых для расчета всех протекающих токов. Если номиналы некоторых элементов неизвестны, то недостаток информации надо компенсировать соответствующим количеством известных значений токов или напряжений.

На основе схемы, состоящей из n узлов и m контуров, можно получить $(n - 1)$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа (анализ узлов)

и $m-(n-1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа (анализ контуров). Следовательно, всего существует m независимых уравнений. Уравнения считаются независимыми, если они не являются линейной комбинацией остальных уравнений.

Уравнения контуров с идеальными источниками тока не дают дополнительной информации, поскольку падение напряжения на источнике тока не зависит от него самого. Поэтому ветви цепей с источниками не тока не рассматриваются в числе m ветвей.

Метод Гаусса

Решение системы из m уравнений с m переменными выполняется методом последовательного исключения переменных до тех пор, пока не останется одна переменная. Исключение переменных заключается в умножении на соответствующий коэффициент одного из двух уравнений с последующим их вычитанием (или сложением). После нахождения одной из переменных она подставляется в предыдущее уравнение для вычисления следующей переменной. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут определены значения всех переменных. Для облегчения процедуры вычисления всех переменных методом Гаусса удобно составить специальную таблицу, аналогичную табл. 1.1.

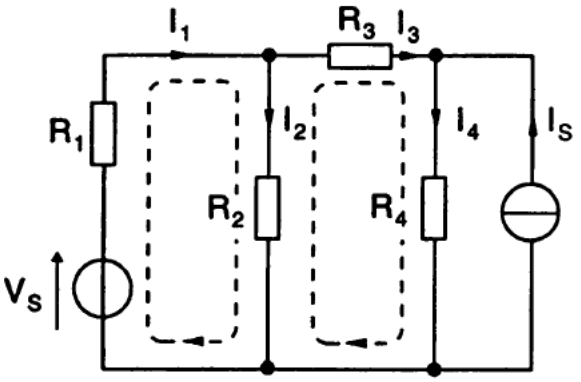
Пример: вычисление методом Гаусса тока I_4, протекающего в схеме на рис. 1.45.

Выражение для нахождения тока, найденное при помощи табл. 1.1:

$$I_4 = \frac{R_2 \cdot (I_S \cdot R_1 + V_S) + (R_1 + R_2) \cdot I_S \cdot R_3}{R_2 \cdot R_1 + (R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}.$$

Таблица 1.1. Решение системы уравнений методом Гаусса

I_1	I_2	I_3	I_4	Правая сторона	Операция	Исключение
1	-1	-1	0	0	+2-я линия	
0	0	1	-1	$-I_S$	$\times(-R_3)$ + + 4-я линия	I_3
R_1	R_2	0	0	V_S		
0	$-R_2$	R_3	R_4	0		
1	-1	0	-1	$-I_S$	$\times(-R_1)$ + + 3-я линия	
0	$-R_2$	0	R_3+R_4	$I_S R_3$		I_1
R_1	R_2	0	0	V_S		
0	$R_1 + R_2$	0	R_1	$I_S R_1 + V_S$	$\times R_2$	I_2
0	$-R_2$	0	R_3+R_4	$I_S R_3$	$\times(R_1 + R_2)$	
0	0	0	$R_2 R_1 +$ $(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)$	$R_2(I_S R_1 + V_S) +$ $+ (R_1 + R_2) I_S R_3$		



Узлы: $n = 3$
Ветви: $m = 4$
Узловые уравнения: $(n-1) = 2$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$
$$I_3 + I_S - I_4 = 0$$

Контурные уравнения: $m - (n-1) = 2$

$$-V_S + I_1R_1 + I_2R_2 = 0,$$
$$-I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = 0$$

Рис. 1.45. Пример анализа схемы при помощи узловых и контурных уравнений

1.3.3. Принцип суперпозиции

Принцип суперпозиции, используемый в физике, применим и для линейных систем, т. е. систем, в которых выходной сигнал всегда пропорционален входному воздействию. В соответствии с этим принципом результирующий сигнал от нескольких входных воздействий определяется суммой индивидуальных воздействий.

При анализе линейных цепей это означает, что сначала определяются токи, появляющиеся в цепи от подключения каждого из источников тока или напряжения, после чего для вычисления результирующего тока все полученные значения токов складываются с учетом соответствующих знаков. При определении отдельных составляющих токов не рассматриваемые в данный момент источники напряжения заменяются на короткозамкнутую линию (перемычку), а все нерассматриваемые источники тока исключаются из схемы (т. е. цепь в данном месте разрывается).

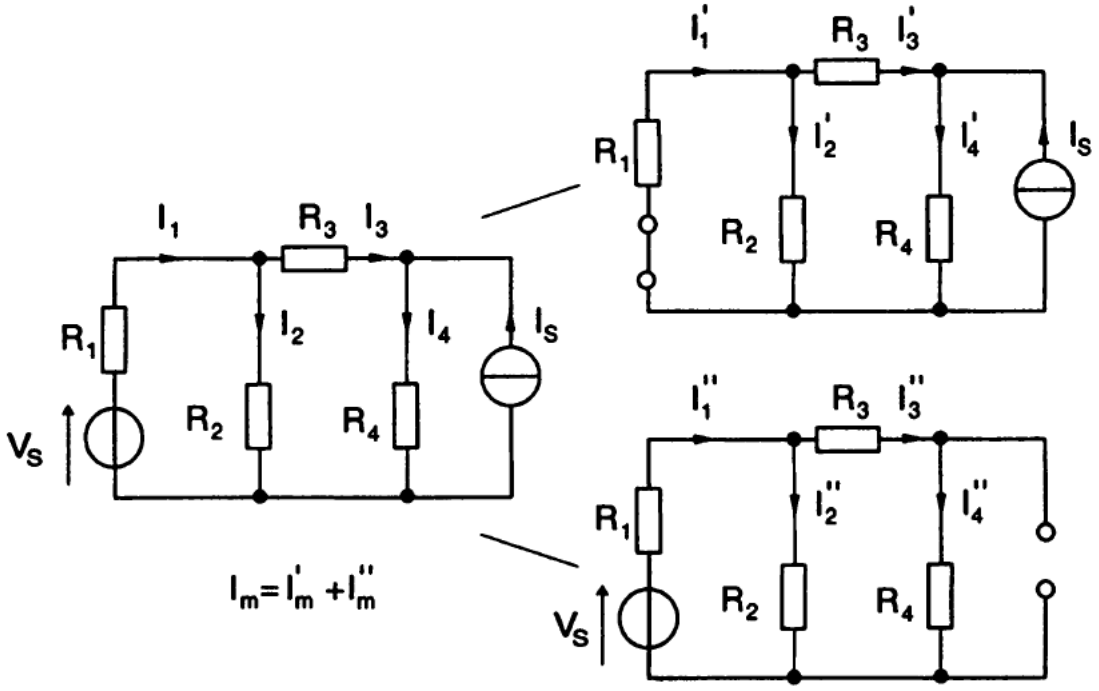


Рис. 1.46. Пояснение принципа суперпозиции

Пример: вычисление тока I_4 (рис. 1.46) при помощи принципа суперпозиции. Закоротив источник напряжения V_S и применив правило деления токов, получим выражение для тока I_4':

$$I_4' = I_S \frac{R_3 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_4 + R_3 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Удалив из схемы источник тока I_S и также применив правило деления токов, найдем значение тока I_4'':

$$I_4'' = I_1'' \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{V_S}{R_1 + \dfrac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4},$$

после чего определим результирующий ток I_4:

$$I_4 = I_4' + I_4''.$$

1.3.4. Метод анализа по контурам

Контурный анализ проводится для каждого независимого контура замкнутой схемы, в результате чего получается система из нескольких уравнений, число которых определяется количеством контуров цепи. Токи в ветвях определяются методом сложения соответствующих токов, протекающих в них (с учетом знаков).

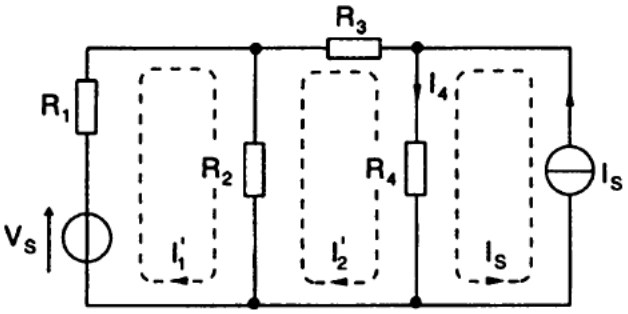


Рис. 1.47. Анализ схемы по контурам

Если в состав контура входит источник тока, то именно его ток определяет ток контура.

- Этот метод часто применяется для вычисления токов в электрических цепях.
- Если в состав схемы входит много источников тока, то полученная система уравнений становится очень простой.

Пример: определение тока I_4, протекающего через резистор R_4, в схеме на рис. 1.47.

Полученная система уравнений имеет вид:

$$-V_S + I_1' \cdot (R_1 + R_2) - I_2' \cdot R_2 = 0,$$

$$-I_1' \cdot R_2 + I_2' \cdot (R_2 + R_3 + R_4) + I_S \cdot R_4 = 0.$$

Из нее найдем ток во втором контуре I_2':

$$I_2' = \frac{V_S \cdot R_2 - I_S \cdot R_4 \cdot (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - R_2^2}.$$

Ток I_4 определим как:

$$I_4 = I_2' + I_S.$$

1.3.5. Метод анализа по узлам

При анализе по узлам каждому узлу приписывается определенный потенциал. При этом один из узлов считается опорным, т. е. его потенциал принимается равным нулю. После этого формируется система из независимых уравнений, в которых токи выражены через разности потенциалов пар узлов, деленных на соответствующие сопротивления: $I_n = \Delta\varphi / R_m$.

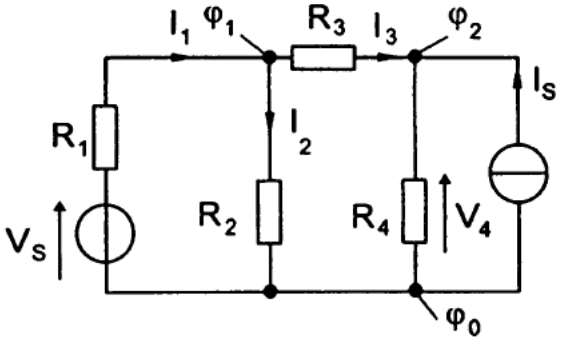


Рис. 1.48. Анализ схемы по узлам

- Этот метод удобен для определения напряжений в электрических цепях.
- Когда в состав схемы входит много источников напряжений, ее анализ значительно упрощается.

Пример: определение напряжения V_4 на резисторе R_4 в схеме на рис. 1.48.

Полученная система уравнений имеет вид:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_S - (\varphi_1 - \varphi_0)}{R_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{R_2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} = 0,$$

$$I_3 + I_S - I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} + I_S - \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_4} = 0,$$

где $\varphi_0 = 0$. Отсюда следует, что:

$$\frac{V_S - \varphi_1}{R_1} - \frac{\varphi_1}{R_2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} = 0,$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_1} + I_S - \frac{\varphi_2}{R_4} = 0.$$

Теперь найдем потенциал φ_2:

$$\varphi_2 = V_4 = \frac{R_4 \left[V_S R_2 + I_S (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) \right]}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4}.$$

1.3.6. Теоремы Тевенина и Нортона

Из **теоремы Тевенина** следует, что любую активную линейную двухполюсную схему, вне зависимости от количества источников электроэнергии и резисторов в ней, можно заменить эквивалентной схемой, в состав которой входит только один источник напряжения и одно сопротивление (рис. 1.49).

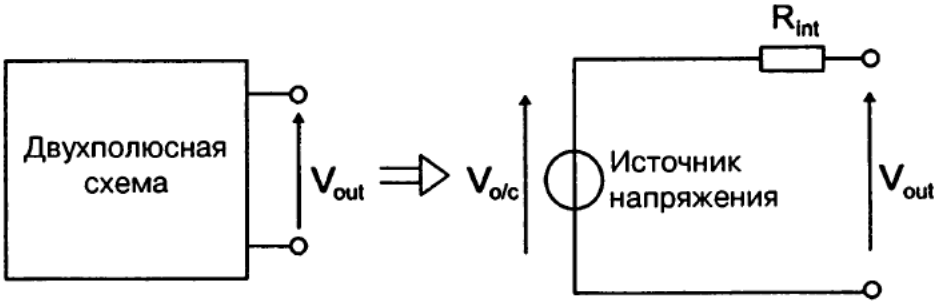


Рис. 1.49. Теорема Тевенина

Из **теоремы Нортона** следует, что любую активную линейную двухполюсную схему, вне зависимости от количества источников электроэнергии и резисторов в ней, можно заменить эквивалентной схемой, в состав которой входят только один источник тока и одно сопротивление (рис. 1.50).

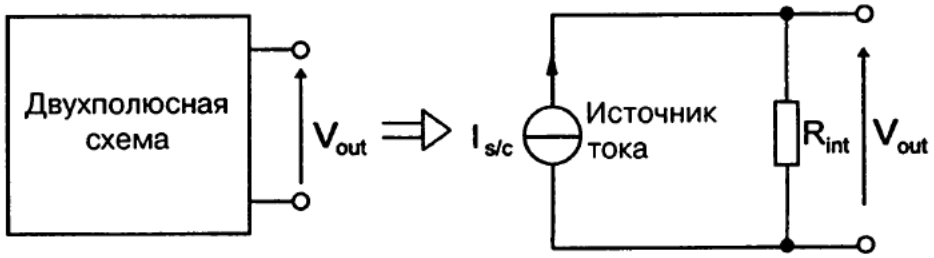


Рис. 1.50. Теорема Нортона

Эквивалентные схемы Тевенина и Нортона назывались в разделе 1.2.1 реальными источниками напряжения и тока, и им соответствует вольт-амперная характеристика, показанная на рис. 1.51.

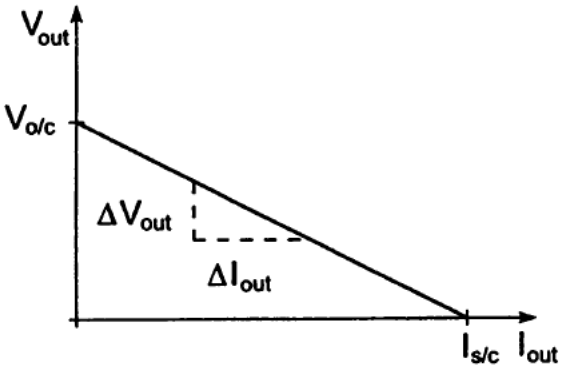


Рис. 1.51. Вольт-амперные характеристики эквивалентных схем Тевенина и Нортона

Вольт-амперная характеристика представляет собой наклонную прямую линию, начинающуюся в точке $V_{o/c}$, $I_{out} = 0$ (o/c означает разомкнутую цепь), соответствующей работе без нагрузки, и заканчивающуюся в точке $V_{out} = 0$, $I_{s/c}$ (s/c означает короткозамкнутую цепь). Наклон линии определяется внутренним сопротивлением R_{int} эквивалентной схемы:

$$R_{int} = \frac{\Delta V_{out}}{\Delta I_{out}} = \frac{V_{o/c}}{I_{s/c}}. \qquad (1.70)$$

1.3.6.1. Определение тока в нагрузке по теореме Тевенина

По теореме Тевенина любую активную двухполюсную цепь можно заменить на эквивалентную схему, состоящую из источника напряжения и внутреннего сопротивления.

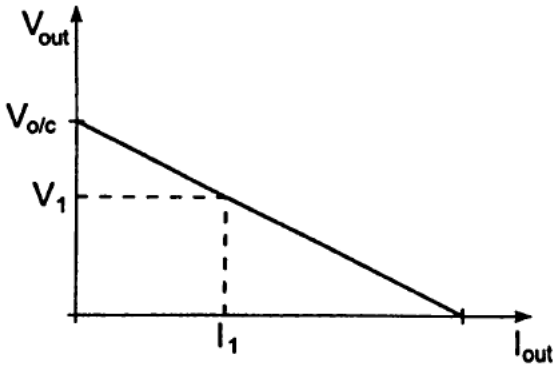


Рис. 1.52. Вольт-амперная характеристика

Вольт-амперная характеристика эквивалентной схемы может быть определена довольно просто. Для этого надо либо:

а) вольтметром измерить напряжение $V_{o/c}$ разомкнутой цепи, а также значение напряжения V_1, соответствующее току I_1 при подключенной нагрузке (рис. 1.52). По полученным значениям вычислить $R_{int} = \frac{V_{o/c} - V_1}{I_1}$, либо:

б) по известным номиналам схемы рассчитать напряжение в разомкнутой цепи $V_{o/c}$ и ток короткозамкнутой цепи $I_{s/c}$. По рассчитанным значениям определить $R_{int} = \frac{V_{o/c}}{I_{s/c}}$.

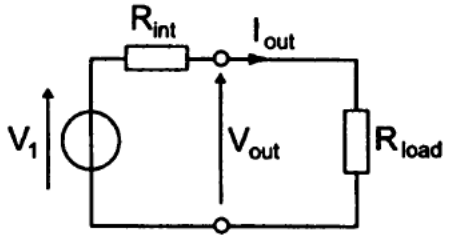


Рис. 1.53. Эквивалентная схема с нагрузкой

По известным значениям $V_{o/c}$ и R_{int} ток и напряжение в нагрузке находятся по следующим выражениям (рис. 1.53):

$$I_{out} = \frac{V_{o/c}}{R_{int} + R_{load}}, \quad V_{out} = V_{o/c} \frac{R_{load}}{R_{int} + R_{load}}. \tag{1.71}$$

Пример: анализ схемы на рис. 1.54 при помощи теоремы Тевенина.

Вычисление $V_{o/c}$ по правилу деления напряжений:

$$V_{o/c} = V_{S1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12\ \text{В} \frac{20\ \text{Ом}}{30\ \text{Ом}} = 8\ \text{В}.$$

Определение $I_{s/c}$ при закорачивании выходных терминалов:

$$I_{s/c} = \frac{V_{S1}}{R_1} = \frac{12\ \text{В}}{10\ \text{Ом}} = 1{,}2\ \text{А}.$$

Вычисление R_{int}:

$$R_{int} = \frac{V_{o/c}}{I_{s/c}} = \frac{V_{S1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{V_{S1}}{R_1}} = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10\ \text{Ом} \times 20\ \text{Ом}}{30\ \text{Ом}} = 6{,}67\ \text{Ом}$$

или:

$$R_{int} = \frac{V_{o/c}}{I_{s/c}} = \frac{8\ \text{В}}{1{,}2\ \text{А}} = 6{,}67\ \text{Ом}.$$

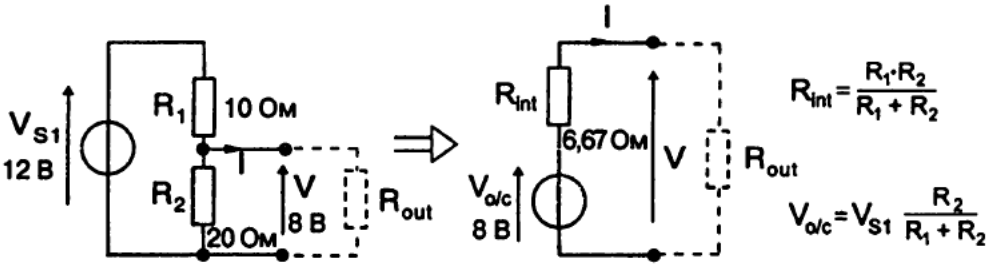


Рис. 1.54. Применение теоремы Тевенина при анализе схемы

1.3.6.2. Вычисление тока в электрической цепи

Теорема Тевенина может быть использована для определения тока внутри электрической схемы. Для этого схему необходимо разделить на две части, в которых требуется найти значения токов (рис. 1.55). После этого для обеих частей надо построить эквивалентные схемы, используя теорему Тевенина. Тогда ток в схеме можно найти по формуле $I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$.

Часто правая часть схемы оказывается пассивной, поэтому ее можно заменить сопротивлением (или в цепи переменного тока на импеданс). В этом случае анализ схемы проводится по алгоритму, описанному в разделе 1.3.6.1.

Пример: определение тока I_3 в схеме на рис. 1.56.

Сначала схема делится на две части в точках *a* и *b*. После этого левая часть заменяется эквивалентным источником напряжения с сопротивлением R_{int}, а правая часть — эквивалентным резистором:

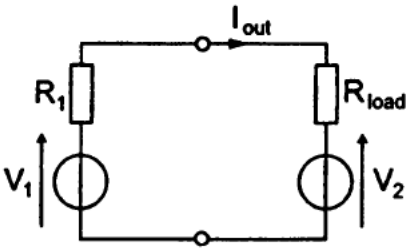


Рис. 1.55. Вычисление тока в схеме по теореме Тевенина

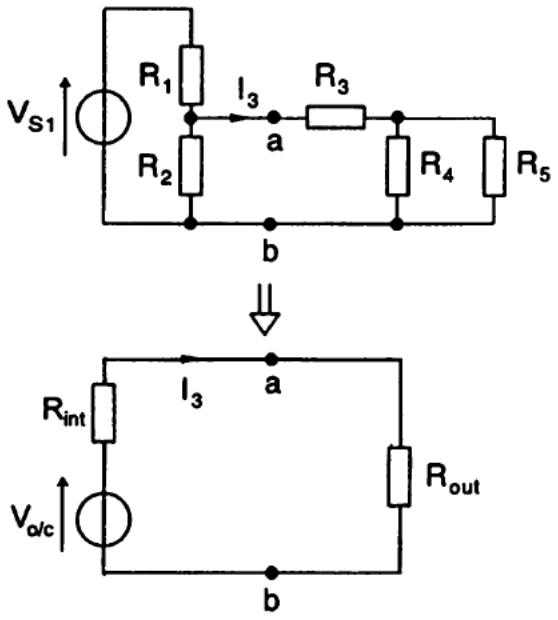


Рис. 1.56. Определение тока I_3 по теореме Тевенина

$$V_{o/c} = V_{S1}\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{int} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{load} = R_3 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}.$$

Тогда для тока I_3 можно записать следующее выражение:

$$I_3 = \frac{V_{o/c}}{R_{int} + R_{load}} = \frac{V_{S1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}}.$$

1.4. Обозначения

C	Емкость, А·с/В
D	Коэффициент затухания
e	Элементарный заряд или заряд электрона, $e = \pm 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ А·с
f	Частота, Гц
G	Проводимость, См = А/В
i	Ток, изменяющийся во времени, А
I	Постоянный ток, А
$I_{s/c}$	Ток в короткозамкнутой цепи, А
I_s	Ток источника тока, А
L	Индуктивность, Гн = В·с/А
n	Число оборотов в минуту, мин$^{-1}$
M	Момент силы, Н·м
P	Мощность, Вт = В·А
Q	Заряд, Кл = А·с
R	Сопротивление, Ом = В/А
R_S	Сопротивление источника или внутреннее сопротивление, Ом = В/А
R_L	Сопротивление нагрузки, Ом = В/А
t	Время, с
T	Длительность периода, с
v	Напряжение, изменяющееся во времени, В
V	Постоянное напряжение, В)
V_s	Напряжение источника напряжения, В
$V_{o/c}$	Напряжение в разомкнутой цепи, В
W	Энергия, Дж = Вт·с = В·А·с
α	Температурный коэффициент сопротивления, К$^{-1}$
β	Температурный коэффициент сопротивления, К$^{-2}$
η	Коэффициент полезного действия
θ	Температура, °С
τ	Постоянная времени, с
φ	Потенциал, В
ω	Угловая частота, с$^{-1}$
ω_0	Резонансная угловая частота, с$^{-1}$

Литература

Bird J. O. *Electrical Circuit Theory & Technology*. — : Butterworth-Heinemann, 1997.
Boylestad R. L. *Introductory Circuit Analysis*. 9th ed. — : Prentice Hall, 1999.
Floyd T. L. *Electric Circuits Fundamentals*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2001.
Floyd T. L. *Electronics Fundamentals: Circuits, Devices, and Applications*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2000.
Floyd T. L. *Electronic Devices*. 5th ed. — : Prentice Hall, 1998.
Grob B. *Basic Electronics*. 8th ed. — : McGraw-Hill, 1996.
Muncaster R. *A-Level Physics*. — : Stanley Thornes Ltd., 1997.
Nelkon M., Parker P. *Advanced Level Physics*. — : Heinemann, 1995.
Tse Chi Kong. *Linear Circuit Analysis*. — : Addison-Wesley, 1998.

ГЛАВА 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

Электрические заряды являются причиной возникновения электрических полей. Физические явления, возникающие при движении зарядов, отличаются от явлений, присущих стационарным зарядам. Первые описываются законами **магнитных полей** или **переменных электрических полей**, а вторые — законами **электростатических полей**. Вокруг движущихся зарядов возникают электрические и магнитные поля. Для существования электростатического поля необходимо, чтобы заряды находились в стационарном состоянии.

2.1. Электростатические поля

Законы электростатики описывают явления, происходящие при взаимодействии *стационарных* электрических зарядов. Электрические поля, возникающие вокруг неподвижных зарядов, называются электростатическими полями.

2.1.1. Закон Кулона

Между электрическими зарядами возникают силы взаимодействия. Заряды одного знака отталкивают друг друга, а разного — притягивают. Сила, действующая между двумя стационарными точечными зарядами Q_1 и Q_2, определяется **законом Кулона**:

$$|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \qquad (2.1)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ — абсолютная диэлектрическая постоянная или проницаемость;
ε_0 — электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ А·с/(В·м);
ε_r — относительная диэлектрическая постоянная или проницаемость;
r — расстояние между зарядами.

Точечные заряды — это заряды бесконечно малого объема.

Считается, что среда между зарядами является диэлектрической и изотропной. В вакууме $\varepsilon_r = 1$. Эта же величина считается приблизительным значением относительной диэлектрической постоянной воздуха. Силу F_2, действующую на точечный заряд Q_2, можно описать вектором:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r. \qquad (2.2)$$

где $\vec{e}_r$ — это единичный вектор $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, направленный радиально от заряда Q_1.

Уравнение записано в сферических координатах, при этом точечный заряд Q_1 находится в центре системы координат.

- Закон Кулона с достаточной степенью точности справедлив и для заряженных сферических объектов, диаметры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. В данном случае r равно расстоянию между центрами сфер.

2.1.2. Напряженность электрического поля

Понятие напряженности электрического поля выводится из закона Кулона:

$$\vec{F}_2 = Q_2 \cdot \underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{e}_r}_{\vec{E}} = Q_2 \cdot \vec{E}\,. \qquad (2.3)$$

Эта формула определяет поле точечного заряда Q_1, направленного радиально от заряда, уменьшающееся пропорционально квадрату расстояния от него. Зная величину напряженности, можно найти величину силы, действующей на заряд Q_2, помещенный в электрическое поле. При этом не обязательно знать параметры источника поля (величину заряда Q_1 в точке $r = 0$).

Напряженностью электрического поля называется отношение силы, действующей на заряд, к величине этого заряда.

- В системе СИ единицей напряженности электрического поля является Н/Кл = В/м.
- Если на неподвижный заряд действует внешняя сила, значит он попал в электрическое поле.

В общем виде, сила, действующая на электрический заряд, помещенный в электрическое поле, определяется выражением:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}. \qquad (2.4)$$

Примечание. Предполагается, что точечный заряд Q достаточно мал, поэтому он не искажает поля, в которое он помещен.

Примечание. В случае распределенных зарядов, их необходимо разделить на элементарные точечные заряды и найти результирующую силу методом интегрирования. В декартовой системе координат это может быть выполнено следующим образом:

$$\vec{F} = \int_Q \vec{E}(x, y, z)\, dQ(x, y, z).$$

Вид этого выражения зависит от системы координат.

Для графического отображения электрических полей используют **силовые линии** (рис. 2.1). Силовыми линиями (линиями напряженности) называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке поля. Плотность силовых линий соответствует величине напряженности поля.

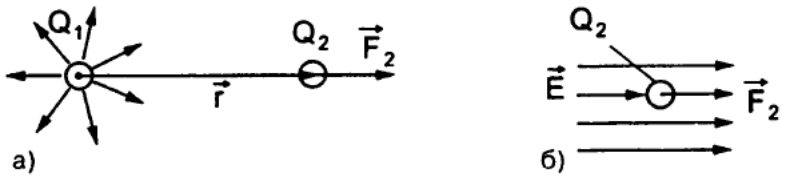


Рис. 2.1. Графическое представление силы, действующей на заряд Q_2:
а) при помощи закона Кулона;
б) при помощи силовых линий

- Силовые линии электрического поля всегда начинаются и заканчиваются на электрических зарядах.
- **Положительным направлением** силовых линий считается направление от положительных зарядов к отрицательным.

Примечание. Если силовые линии поля нарисованы вокруг единичного заряда (как на рис. 2.1, поясняющем определение напряженности электрического поля), то всегда предполагается, что заряд противоположного знака находится на бесконечном расстоянии от рассматриваемого заряда. Такое предположение упрощает расчет параметров электрического поля. Если система состоит из нескольких неподвижных зарядов, то для вычисления результирующего электрического поля необходимо применить принцип суперпозиции (наложения) электрических полей (рис. 2.2). Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности.

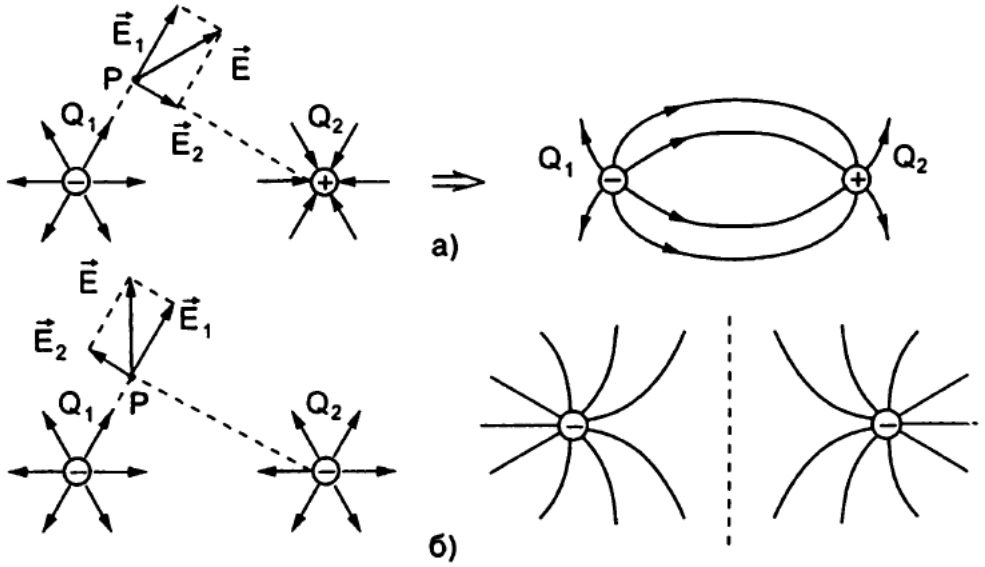


Рис. 2.2. Результирующее электрическое поле двух зарядов:
а) противоположных;
б) одноименных

2.1.3. Напряжение и потенциал

Электрическое напряжение — это мера работы, совершаемой при перемещении в электрическом поле единичного заряда между двумя точками пространства:

$$W = \int \vec{F}\, d\vec{s} = \int Q \cdot \underbrace{\vec{E}\, d\vec{s}}_{V} = Q \cdot V.$$

- **Электрическое напряжение** между двумя точками пространства равно линейному интегралу от напряженности электрического поля между этими двумя точками. Траектория перемещения заряда между точками не имеет никакого значения:

$$V_{12} = \int_{s} \vec{E}\, d\vec{s}. \qquad (2.5)$$

Электрический потенциал φ является скалярной величиной. Потенциал любой точки пространства определяется относительно некоторой опорной точки, потенциал которой равен нулю ($\varphi = 0$). В качестве нулевого потенциала принимается либо его значение в бесконечности, либо значение потенциала Земли. Тогда напряжение V можно определить как разность потенциалов между двумя точками пространства (рис. 2.3а):

$$V_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (2.6)$$

Эквипотенциальной поверхностью называется геометрическое место точек в электростатическом поле, имеющих одинаковый потенциал. В любой точке этой поверхности вектор напряженности поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала. Бесконечно малый элемент эквипотенциальной поверхности $d\vec{A}$ является вектором, перпендикулярным ей. Направление вектора $d\vec{A}$ совпадает с направлением напряженности электрического поля (рис. 2.3б).

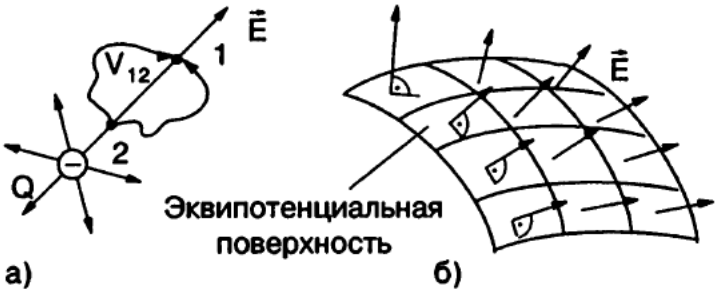


Рис. 2.3. Напряжение V и потенциал φ электростатического поля

2.1.4. Электростатическая индукция

Электростатическая индукция — это смещение свободных носителей зарядов в проводнике при его помещении в электрическое поле. При смещении зарядов напряженность электрического поля в проводнике остается равной нулю.

- У проводников заряды располагаются только по поверхности. Внутри проводников нет ни зарядов, ни поля. (Это утверждение абсолютно верно только для электростатических полей. С некоторым приближением его можно считать справедливым для низкочастотных переменных полей.)

Для изучения напряженности электрического поля можно использовать **параллельные пластины Максвелла** (рис. 2.4). При помещении двух электропроводных параллельных пластин в электрическое поле свободные носители зарядов, находящиеся в них, смещаются к внешним поверхностям. На рис. 2.4а показано, что отрицательные заряды сместились влево, а положительные — вправо. В пространстве между пластинами при этом нет никакого электрического поля. Если теперь пластины разъединить (рис. 2.4б), то они останутся заряженными, но поля между ними по-прежнему не будет. Электрическое поле между ними появится только в том случае, если их вынести за пределы внешнего поля (рис. 2.4в). Это поле может быть обнаружено при измерении разрядного тока.

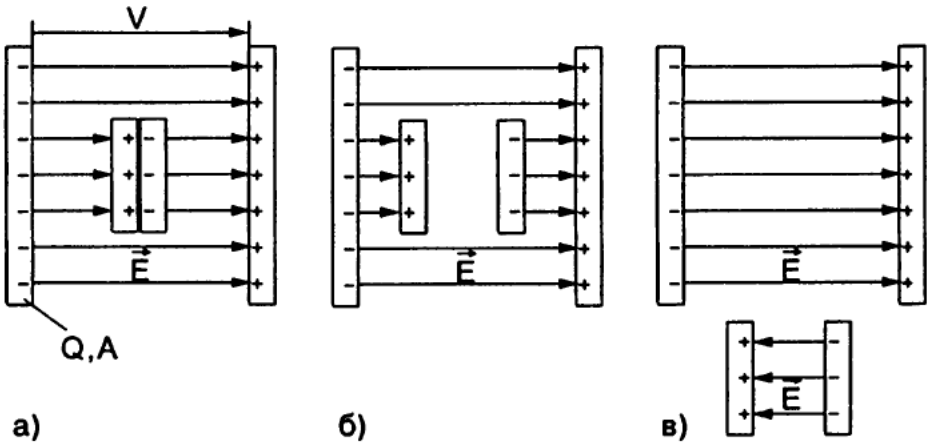


Рис. 2.4. Изучение электрических полей при помощи пластин Максвелла

Для предотвращения электростатической индукции, вызываемой внешними электрическими полями, можно применить **электростатическое экранирование**. Внутри полого проводника не существует электрического поля, поскольку все заряды располагаются только на его внешней поверхности. Это можно считать справедливым даже в случае незамкнутой поверхности полого проводника, если она имеет решетчатую структуру. Такая экранирующая решетка называется в честь ученого, ее предложившего, **клеткой Фарадея** (рис. 2.5а). Для защиты внешнего пространства от полей, созданных заряженными объектами, их также иногда помещают внутрь полого проводника (рис. 2.5б). При этом на внутренней поверхности проводника собираются заряды противоположного знака, суммарная величина которых равна заряду объекта. Заряд с внешней поверхности полого проводника стекает на землю, что приводит к исчезновению поля с наружной стороны такого экрана.

Примечание. Если внутри полого проводника существует переменное поле, то по проводнику заземления течет переменный ток. Тогда заряд на внешней поверхности проводника также будет меняться. Этот переменный ток приведет к возникновению магнитного поля, которое, в свою очередь, индуцирует напряжение. Однако на низких частотах этим явлением можно пренебречь. Частотный диапазон, где это справедливо, точно определить очень сложно, но считается, что при хорошем заземлении он составляет 1...10 МГц.

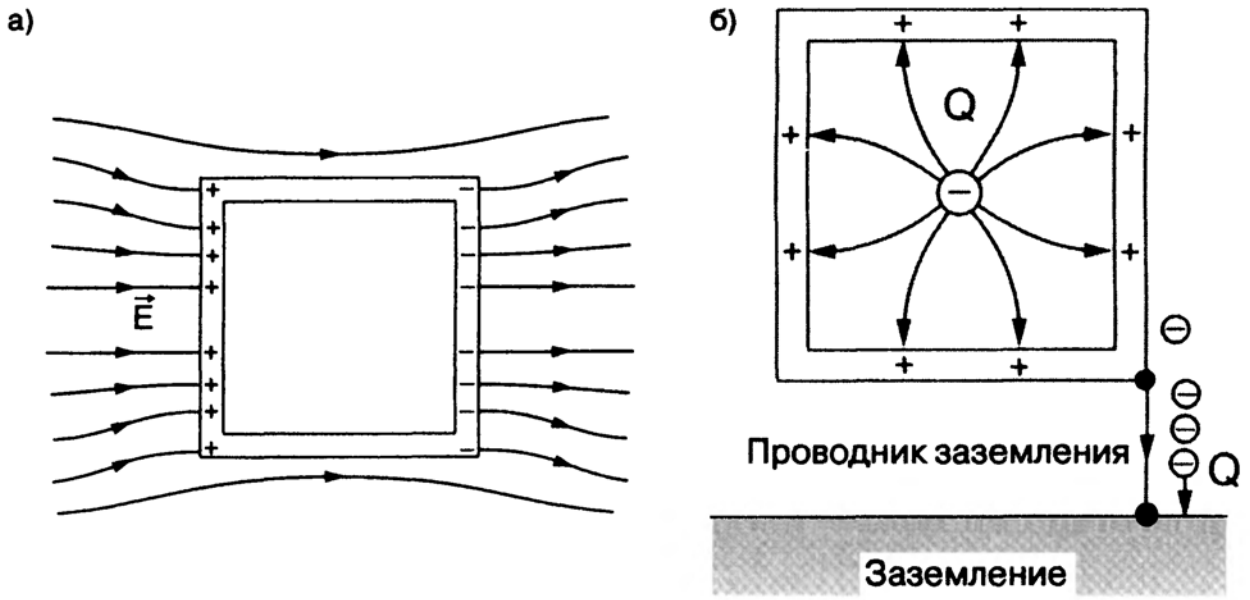


Рис. 2.5. Электростатические экраны

2.1.5. Электрическое смещение

Электрическое смещение — мера зарядов, появившихся на поверхности в результате электростатической индукции. Оно является векторной величиной, характеризующей электрическое поле:

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA_{\perp}} \cdot \vec{e}_{A_{\perp}}. \qquad (2.7)$$

Из этого выражения видно, что $dA_{\perp}$ является элементом эквипотенциальной поверхности. Направление единичного вектора $\vec{e}_{A_{\perp}}$ совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля.

В системе СИ электрическое смещение измеряется в $\frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$.

- Модуль вектора электрического смещения равен плотности зарядов на внешней поверхности проводника. В электростатическом поле этот модуль равен плотности зарядов на эквипотенциальной поверхности, если на ней расположена электропроводная фольга.
- Направление электрического смещения совпадает с направлением напряженности электрического поля

Пример. Точечный заряд Q_{-} помещен в центр полого сферического проводника (рис. 2.6б). Электрическое смещение внутренней поверхности полого проводника равно $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \vec{e}_{\text{r}}$. Очевидно, что при этом на внутренней поверхности сферы соберутся заряды противоположного знака Q_{+}. Внутри полой сферы эквипотенциальные поверхности формируют концентрические оболочки вокруг точечного заряда Q_{-}. Электрическое смещение в любой точке внутри сферы находится из выражения:

$$\vec{D}_{(r)} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_{\text{r}}.$$

В сферических координатах расположение заряда Q_- соответствует началу координат.

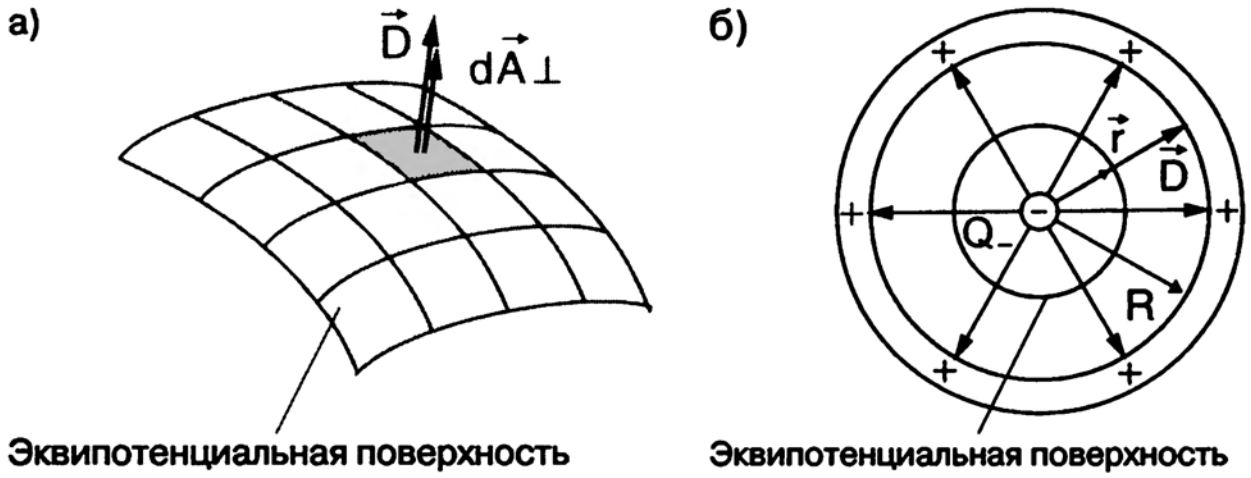


Рис. 2.6. Электрическое смещение:
а) основное определение;
б) внутри полой сферы

2.1.6. Диэлектрики

Среда, в которой может существовать электростатическое поле, называется диэлектрической. Диэлектрическое поле характеризуется напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и электрическим смещением $\vec{D}$. В электростатическом поле:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}, \tag{2.8}$$

где ε — **абсолютная диэлектрическая проницаемость** (также называемая диэлектрической постоянной).

- Для изотропных диэлектриков $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в каждой точке пространства совпадают по направлению. Оба эти вектора перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.
- Коэффициентом пропорциональности между электрическим смещением и напряженностью поля является диэлектрическая константа ε.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость равна произведению **относительной диэлектрической проницаемости** ε_r ($\varepsilon_r \geq 1$) и **электрической постоянной** ε_0:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r. \tag{2.9}$$

Электрическая постоянная равна:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}}. \tag{2.10}$$

Величина относительной диэлектрической проницаемости ε_r зависит от типа материала, через который проходит поле. Для большинства диэлектриков эта величина лежит в пределах от 1 до 100, но может достигать и 10 000.

- Относительная диэлектрическая проницаемость всегда больше или равна единице.
- Относительная диэлектрическая проницаемость вакуума равна единице.
- Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха приблизительно равна единице.
- Относительная диэлектрическая проницаемость изоляционных материалов обычно лежит в пределах от 2 до 3.

2.1.7. Интеграл Кулона

Напряженность электрического поля в произвольной точке пространства может быть вычислена по принципу суперпозиции. Полная напряженность поля равна сумме векторов напряженности полей, созданных отдельными зарядами.

$$\vec{D} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi r_i^2} \cdot \vec{e}_{ri} \quad \text{или} \quad \vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i^2} \cdot \vec{e}_{ri}. \tag{2.11}$$

Любой пространственный заряд можно представить в виде суммы точечных зарядов dQ_i. В этом случае результирующая напряженность электрического поля будет равна интегралу напряженности всех точечных зарядов dQ_i.

$$\vec{D} = \int_Q \frac{dQ_i}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_{ri} \quad \text{или} \quad \vec{E} = \int_Q \frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{e}_{ri}. \tag{2.12}$$

Это выражение часто называют **интегралом Кулона**.

Пример: расчет напряженности электрического поля вокруг заряженного стержня с линейной плотностью зарядов λ при помощи интеграла Кулона.

Предположим, что электрическое поле является радиальным и симметричным относительно оси стержня. Тогда напряженность поля будет симметрична относительно той же оси. Вследствие этого рассматриваемую задачу можно считать двумерной, а пространственно распределенные точечные заряды представить как $dQ = \lambda dx$. Расстояние от заряда dQ до произвольной точки P равно $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, а косинус угла α в декартовых координатах выражается как $\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$ (рис. 2.7). Исходя из этого, можно найти величину напряженности электрического поля E в точке P:

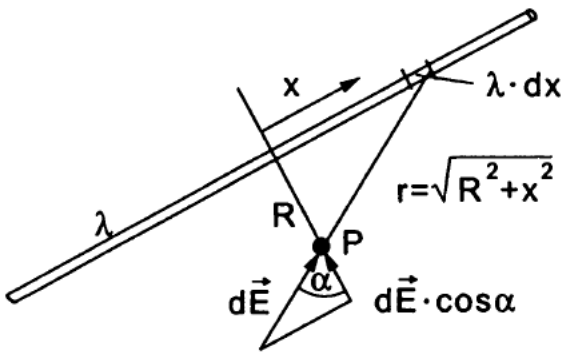


Рис. 2.7. Вычисление напряженности электрического поля при помощи интеграла Кулона

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{dx}{R^2 + x^2} \cdot \underbrace{\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}}_{\cos\alpha} = 2 \cdot \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}.$$

Компоненты поля в направлении оси x взаимно уравновешивают друг друга. Результирующий вектор напряженности в любой точке пространства направлен перпендикулярно к оси стержня.

2.1.8. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля

Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля гласит: Поток электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_A \vec{D}\,d\vec{A} = Q\,. \qquad (2.13)$$

Вектор $d\vec{A}$ направлен по нормали от поверхности.

Пример: вычисление напряженности электрического поля вокруг заряженного стержня с линейной плотностью зарядов λ.

При определении напряженности поля по теореме Остроградского – Гаусса всегда необходимо выбирать соответствующую систему координат. Поскольку в данном случае поле является симметричным и направленным радиально от стержня, здесь целесообразно использовать цилиндрическую координатную систему. Тогда для цилиндрической поверхности вокруг заряженного стержня, показанной на рис. 2.8, будет справедливо:

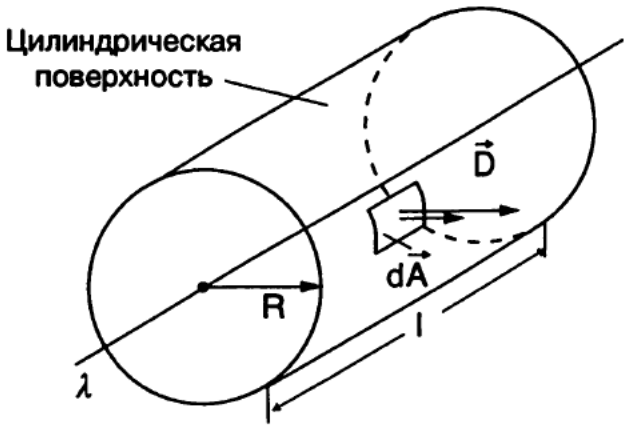


Рис. 2.8. Вычисление напряженности электрического поля вокруг заряженного стержня

$$\oint_A \vec{D}\,d\vec{A} = \vec{D}\cdot 2\pi\vec{R}\cdot l = \lambda\cdot l \;\Rightarrow\; \vec{D}(R) = \frac{\lambda}{2\pi R}\cdot\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}\cdot\vec{e}_r.$$

2.1.9. Емкость

- В системе из двух электродов (часто называемой конденсатором) отношение зарядов на них к напряжению межу ними всегда является постоянным. Величина этого отношения зависит только от геометрических параметров рассматриваемой системы и относительной диэлектрической проницаемости среды между электродами.
- Отношение заряда к разности потенциалов между электродами конденсатора называется его **емкостью**:

$$C = \frac{Q}{V}. \qquad (2.14)$$

В системе СИ единицей измерения емкости является фарад (Ф):

$$1\ \Phi = 1\,\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}}\,.$$

Используя такие характеристики электрического поля как его напряженность и смещение, величину емкости можно определить из выражения:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_A \vec{D} d\vec{A}}{\int_s \vec{E} d\vec{s}} \quad \text{при} \quad \vec{e}_A \| \vec{e}_s. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) справедливо для случаев, когда элемент *ds* перпендикулярен элементу поверхности *dA*. Поэтому при использовании этого выражения для вычисления величины емкости необходимо знать направления напряженности и смещения электрического поля.

Пример: определение емкости коаксиального провода длиной *l* (рис. 2.9).

Для определения емкости надо знать некоторые характеристики электрического поля. Выражение (2.15) используется тогда, когда известно либо напряжение *V*, приложенное к электродам, либо величина заряда *Q* на них. В случае известного заряда *Q* напряженность электрического поля $\vec{E}(r)$ выражается как функция от этого заряда. Очевидно, что при этом заряд *Q* сократится и величина емкости *C* будет зависеть только от геометрии коаксиального провода и диэлектрической проницаемости материала между электродами:

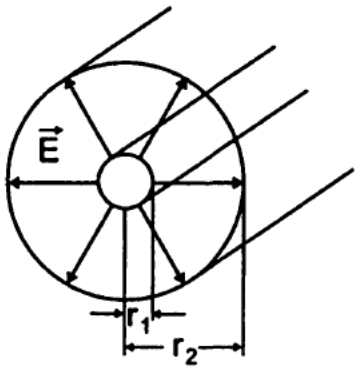


Рис. 2.9. Вычисление емкости коаксиального провода

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_A \vec{D} d\vec{A}}{\int_s \vec{E} d\vec{s}} = \frac{Q}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon r} dr} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad \text{при} \quad \vec{E} = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r.$$

2.1.10. Электростатическое поле на границе двух сред

На рис. 2.10 показано, как изменяются параметры электростатического поля на границе раздела двух сред с разными значениями диэлектрической проницаемости. На границе справедливы следующие соотношения:

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \quad \text{и} \quad \vec{E}_{n2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \vec{E}_{n1}, \tag{2.16}$$

$$\vec{D}_{n2} = \vec{D}_{n1} \quad \text{и} \quad \vec{D}_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \vec{D}_{t1}, \tag{2.17}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1. \tag{2.18}$$

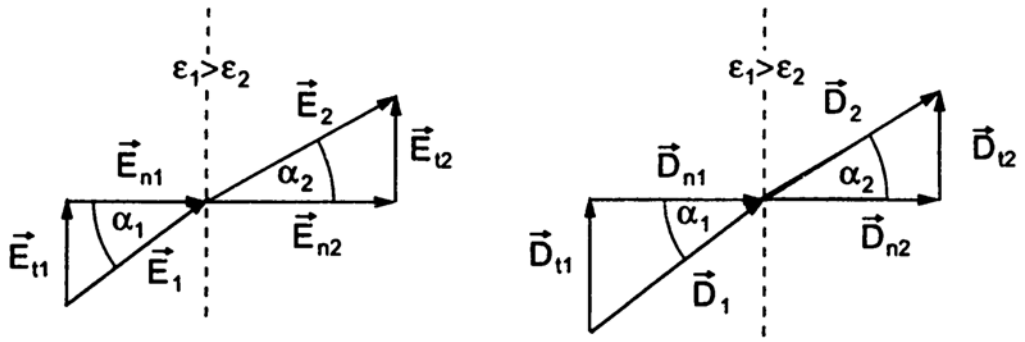
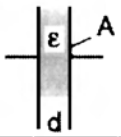
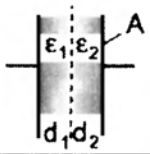
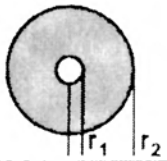


Рис. 2.10. Изменение параметров электростатического поля на границе раздела двух сред

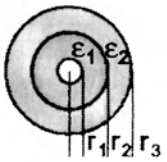
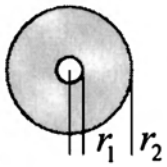
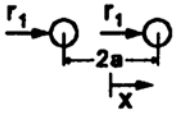
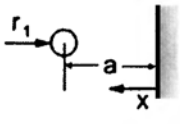
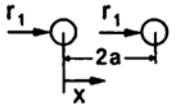
- Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля остается неизменной, тогда как его нормальная составляющая меняется обратно пропорционально изменению диэлектрической проницаемости среды.
- Тангенциальная составляющая вектора электрического смещения является величиной, пропорциональной диэлектрической проницаемости среды, а его нормальная составляющая всегда остается постоянной.

2.1.11. Емкость и напряженность электрического поля систем из проводников различной геометрической формы (обзор)

Таблица 2.1. Емкость и напряженность электрического поля между проводниками с разной геометрией

Конденсатор из двух параллельных пластин 	$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$	$E = \frac{V}{d}$
Конденсатор из двух параллельных пластин с комбинированным диэлектриком 	$C = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$	$E_{1(2)} = \frac{V}{\varepsilon_{1(2)}(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2})}$
Цилиндрический конденсатор 	$C = \frac{2\pi\varepsilon \cdot l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$	$E = \frac{V}{r \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}}$

Окончание таблицы 2.1

Цилиндрический конденсатор с комбинированным диэлектриком 	$C = \dfrac{2\pi l}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_3}{r_2}}$	$E_{1(2)} = \dfrac{V}{\varepsilon_{1(2)} r} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_3}{r_2}}$
Сферический конденсатор 	$C = 4\pi\varepsilon \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	$E = \dfrac{V}{r^2} \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$
Система из двух параллельных проводников 	$C = \dfrac{\pi\varepsilon l}{\ln\left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^2 - 1}\right]} \approx$ $\approx \dfrac{\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{2a}{r_1}}$ при $a >> r_1$	$E = \dfrac{V\dfrac{\sqrt{a^2 - r_1^2}}{a^2 - r_1^2 - x^2}}{\ln\left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^2 - 1}\right]}$
Система «проводник – земля» 	$C = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^2 - 1}\right]} \approx$ $\approx \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{2a}{r_1}}$ при $a >> r_1$	$E = \dfrac{2V\dfrac{\sqrt{a^2 - r_1^2}}{a^2 - r_1^2 - x^2}}{\ln\left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^2 - 1}\right]}$
Система из двух сфер 	$C \approx \dfrac{2\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{2a}}$	$E \approx \dfrac{V\left[\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{(2a-x)^2}\right]}{\dfrac{2}{r_1} - \dfrac{1}{a}}$
Система «сфера – бесконечность» 	$C = 4\pi\varepsilon r_1$	$E = V \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$

2.1.12. Энергия электростатического поля

Для создания электрического поля всегда требуется затратить энергию на разделение положительных и отрицательных зарядов. Для зарядки конденсатора на его электроды подается напряжение. При этом в электрической цепи начинает течь зарядный ток. Энергия, поступающая на конденсатор, запасается в электрическом поле внутри него, а не рассеивается в виде тепла, как при подаче напряжения на резистор. Накапливаемую энергию можно выразить в следующем виде:

$$W = \int_0^{t_1} v(t) \cdot \underbrace{i(t)}_{dQ} dt = \int_0^{Q_1} v(t) \underbrace{dQ}_{C\,dV} = C \int_0^{V_C} v\,dv = \frac{1}{2} C \cdot V_C^2.$$

Также справедливо, что:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \qquad (2.19)$$

При замене интегральных величин Q и V на векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ выражение (2.19) преобразуется к виду:

$$W = \frac{1}{2} \oint_A \vec{D} d\vec{A} \cdot \int_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad \text{при} \quad \vec{e}_s \parallel \vec{e}_A. \qquad (2.20)$$

Единичные векторы $\vec{e}_s$ и $\vec{e}_A$ имеют одинаковое направление, интеграл $\int ds \cdot dA$ соответствует элементу объема dV. Отсюда **объемная плотность энергии** электростатического поля определяется как:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}. \qquad (2.21)$$

2.1.13. Силы, действующие в электростатическом поле

2.1.13.1. Сила, действующая на заряд

В электрическом поле на точечный заряд действует сила, равная:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}. \qquad (2.22)$$

Пример. Проходя сквозь электрическое поле, электрон меняет направление своего движения, как показано на рис. 2.11.

Отклонение электрона объясняется воздействием на него внешней силы. Поскольку электрон является отрицательно заряженной частицей, эти сила и напряженность электрического поля имеют противоположные направления. Составляющая скорости движения электрона $\vec{v}_0$, направленная перпендикулярно линиям поля, остается неизменной при его прохождении сквозь поле. Для пересечения поля в горизонтальном направлении электрону требуется время, равное $t = l/v_0$. Поскольку:

$F = m \cdot a$ (сила = масса × ускорение),

$v = \int a dt$ (скорость равна интегралу ускорения по времени),

вертикальная составляющая скорости и угол отклонения электрона в электрическом поле находятся из выражений:

$$v_1 = \int_0^{l/v_0} \frac{e \cdot E}{m} dt = \frac{e}{m \cdot v_0} \cdot E \cdot l, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{e}{m} \cdot E \cdot l.$$

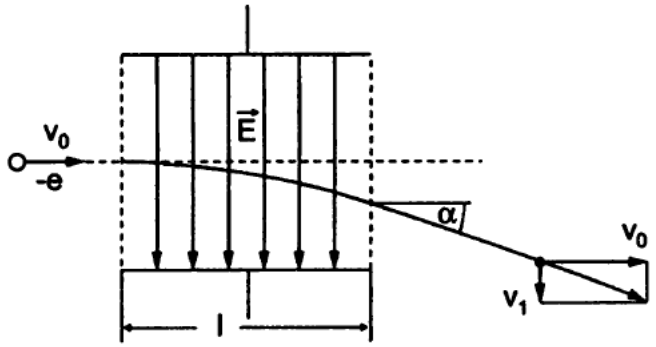


Рис. 2.11. Отклонение электрона при его прохождении через электрическое поле

2.1.13.2. Силы, действующие на границе двух сред

В конденсаторах могут существовать несколько границ раздела разных сред: между диэлектриком и проводящей поверхностью электродов, а также между двумя различными диэлектриками, каждая из которых подвергается воздействию внешних сил. Выражение для этих сил можно получить из закона сохранения энергии, постулирующего, что в системе должен существовать баланс между механической и электрической энергией, а также энергией электростатического поля. Для определения сил, действующих на границе раздела, сначала предполагается, что граница переносится в бесконечность, после чего вычисляется изменение потенциальной энергии, полученное при этом. Суммарное изменение энергий должно равняться нулю:

$$dW_{\text{мех}} + dW_{\text{поля}} + dW_{\text{электр}} = 0. \qquad (2.23)$$

Для того чтобы воспользоваться этим соотношением баланса энергий, необходимо знать, изменения каких его составляющих являются положительными, а каких — отрицательными, т. е. предварительно надо определить, как поведет себя та или иная энергия: будет она увеличиваться или уменьшаться. Рассмотрим следующую ситуацию: к конденсатору с параллельными пластинами подключается источник напряжения. Поскольку пластины конденсатора накапливают заряды разных знаков, они начинают притягиваться друг к другу. Для раздвижения пластин в разные стороны необходимо приложить некоторую механическую энергию. Одновременно с этим уменьшается емкость конденсатора, что приводит к снижению накопленной в нем энергии $\frac{1}{2}CV^2$. Эта энергия и затраченная механическая энергия уравновешиваются энергией, полученной от источника напряжения. Исходя из этого, получаем следующее выражение баланса энергий:

$$F \cdot ds + d(\frac{1}{2} C \cdot V^2) = dQ \cdot V.$$

Поскольку $Q = C \cdot V$, можно вывести уравнение для силы:

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{ds}. \qquad (2.24)$$

- Сила, действующая на пластины конденсатора, пропорциональна изменению его емкости при воображаемом смещении пластин.

На границе раздела справедливы следующие утверждения.

- Сила, действующая на границе двух сред, пропорциональна изменению емкости при воображаемом сдвиге границы.
- Сила, действующая на границе, всегда стремится привести к увеличению емкости системы.

Примечание. Если в вышерассмотренной ситуации источник напряжения к конденсатору не подключается, но заряд на его пластинах Q остается неизменным, то выражение баланса энергий при виртуальном сдвиге пластин принимает следующий вид:

$$F \cdot ds + d\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}\right) = 0.$$

Отсюда выводим уравнение для силы, действующей на пластины конденсатора:

$$F = -\frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{C}\right). \qquad (2.25)$$

Как видно из уравнения (2.25), в этом случае приложенная механическая энергия увеличивает энергию поля. (Тогда как в предыдущей ситуации с подключенным источником напряжения энергия поля уменьшалась!) Конечно же оба уравнения (2.24) и (2.25) при вычислении силы дают один и тот же результат.

Пример: определение силы, действующей на электроды конденсатора с параллельными пластинами (рис. 2.12а).

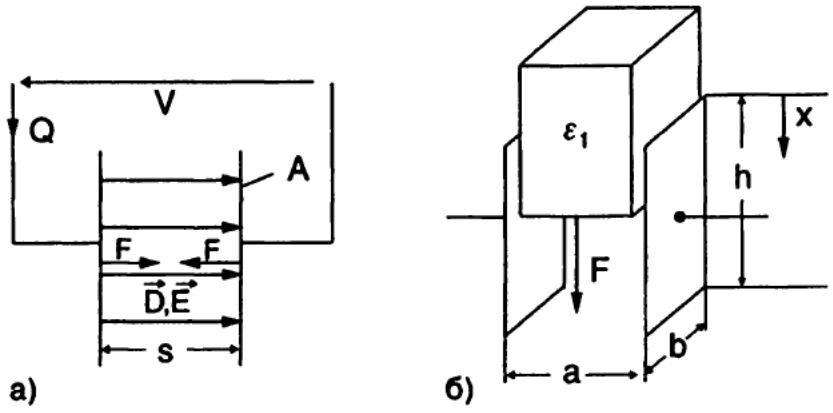


Рис. 2.12. Силы на границах:
а) параллельные линиям потока;
б) перпендикулярные линиям потока

$$F = \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{dC}{ds}, \quad C = \frac{\varepsilon A}{s}, \quad \frac{dC}{ds} = -\frac{\varepsilon A}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{\varepsilon A}{s^2}$$

или:

$$F=\frac{1}{2}Q^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{C}\right),\quad \frac{1}{C}=\frac{s}{\varepsilon A},\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{1}{\varepsilon A}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad F=-\frac{1}{2}Q^2\cdot\frac{1}{\varepsilon A}=-\frac{1}{2}V^2\cdot\frac{\varepsilon A}{s^2}.$$

Как и ожидалось, получили два одинаковых результата. Знак «минус» в выражениях для силы указывает на то, что она препятствует раздвижению пластин конденсатора.

Пример: определение силы, перемещающей диэлектрик внутри конденсатора с параллельными пластинами (рис. 2.12б).

$$F=\frac{V^2}{2}\cdot\frac{dC}{dx},\quad C=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 b}{a}x+\frac{\varepsilon_0 b}{a}(h-x),\quad \frac{dC}{dx}=(\varepsilon_1-1)\frac{\varepsilon_0 b}{a}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad F=\frac{V^2}{2}\cdot(\varepsilon_1-1)\cdot\frac{\varepsilon_0 b}{a}.$$

2.1.14. Характеристики электростатического поля (обзор)

- В проводящей среде электростатическое поле отсутствует.
- В изотропных материалах векторы электрического смещения и напряженности поля имеют одинаковое направление:

$$\vec{D}=\varepsilon\cdot\vec{E}.$$

- Электростатическое поле является **полем зарядов**. Силовые линии поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Положительным считается направление от отрицательного заряда к положительному.
- Поток электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_A \vec{D}\,d\vec{A}=Q.$$

Очевидно, что при отсутствии зарядов этот интеграл равен нулю.

- Пространство считается незаряженным, если дивергенция напряженности электрического поля в нем равна нулю, т. е.:

$$\nabla\cdot\vec{E}=0.$$

- Если плотность зарядов в каком-либо пространстве равна ρ, то дивергенция напряженности электрического поля $\vec{E}$ в нем определяется выражением:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Это уравнение является третьим законом Максвелла.

- В любой точке внутри проводника нет электростатического поля. При вычислении интеграла от напряженности поля внутри замкнутого контура независимо от выбранного пути интегрирования результат всегда будет равен нулю:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0.$$

- Электростатическое поле является **стационарным полем**. Линейный интеграл от напряженности поля равен разности потенциалов начальной и конечной точек интервала интегрирования (или напряжению между этими точками). Полученный результат не зависит от траектории интегрирования:

$$\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s} = V_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

- В любой точке эквипотенциальной поверхности силовые линии электростатического поля всегда направлены перпендикулярно этой поверхности. Вектор напряженности поля указывает направление наибольшего изменения напряжения. Он направлен от точки с большим потенциалом к точке, имеющей меньший потенциал, т. е. от высокого уровня напряжения к более низкому:

$$\vec{E} = -\nabla \cdot V.$$

- Энергия электростатического поля определяется следующим выражением:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E}\, dV.$$

2.1.15. Соотношения между характеристиками электростатического поля

$$\begin{array}{ccc} Q & \Leftarrow Q = \oint_A \vec{D}\, dA \Rightarrow & \vec{D} \\ Q = \Uparrow\!\!\Downarrow C \cdot V & & \vec{D} = \Uparrow\!\!\Downarrow \varepsilon \cdot \vec{E} \\ V & \Leftarrow V = \int_s \vec{E}\, d\vec{s} \Rightarrow & \vec{E} \end{array}$$

2.2. Электрическое поле проводника с установившимся постоянным током

Установившийся постоянный ток — это движение зарядов в электрическом проводнике, при котором не происходит изменения во времени никаких электрических величин. В данном разделе предполагается, что скорость изменения постоянного тока равна нулю, т. е. $di/dt = 0$. Это означает, что протекание по проводнику постоянного тока *не приводит к индукции* никаких напряжений.

2.2.1. Напряжение и потенциал

Приложенное к электрическому проводнику **напряжение** приводит к появлению в нем направленного движения зарядов, т. е. через проводник начинает течь ток *I*. При этом можно измерить напряжение в любой точке поверхности проводника. Напряжение также существует и в каждой точке внутри проводника, но его измерить уже сложнее.

- Уменьшение напряжения вдоль проводника происходит *равномерно*.

Всегда можно выбрать какую-либо точку и принять ее потенциал, равным нулю: $\varphi = 0$. Тогда становится возможным определить потенциал φ в любой точке проводника. Напряжение между двумя точками равно разности их потенциалов:

$$V_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{2.26}$$

Поверхности, имеющие одинаковые потенциалы, так же как и в электростатике, называются **эквипотенциальными.**

2.2.2. Ток

Электрический ток — это суммарный заряд, протекающий через известное поперечное сечение за единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{2.27}$$

- Направление движения положительных зарядов принято считать **направлением положительного тока**. Оно противоположно направлению движения отрицательных зарядов.
- Ток может течь только по замкнутому контуру (см. также раздел 1.1).

2.2.3. Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля характеризует изменение напряжения вдоль заданной траектории. Это векторная величина, направленная в сторону *наибольших* изменений потенциала. Поскольку векторы наибольших изменений напряжения всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, векторы напряженности электрического поля также перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям (рис. 2.13):

$$\vec{E} = \frac{dV}{ds_\perp} \cdot \vec{e}_{A\perp}. \tag{2.28}$$

Единичный вектор $\vec{e}_{A\perp}$ перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, а элемент траектории $ds_\perp$ пересекает ее под прямым углом. Выражение для напряженности поля можно также записать в виде:

$$\vec{E} = -\nabla \cdot V \tag{2.29}$$

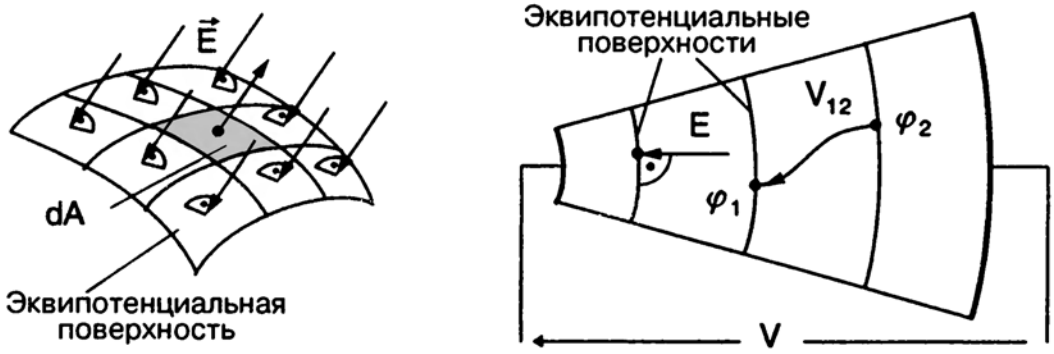


Рис. 2.13. Напряженность электрического поля, эквипотенциальные поверхности и электрическое напряжение

- **Направление** вектора напряженности электрического поля совпадает с направлением наибольшего изменения напряжения.
- **Величина** напряженности электрического поля соответствует изменению напряжения вдоль заданной траектории.

Единицей измерения напряженности электрического поля является вольт, деленный на метр, В/м. Напряжение V равно линейному интегралу от напряженности электрического поля:

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}. \tag{2.30}$$

- **Электрическое напряжение** между двумя точками равно линейному интегралу от напряженности электрического поля между этими точками. Траектория интегрирования при этом не имеет никакого значения.

Если каждая точка электрического поля характеризуется напряженностью, одинаковой по величине и направлению, то поле считается **однородным**. Напряжение в однородном поле определяется как:

$$V_{12} = \vec{E}\ \cdot \vec{s}_{12}. \tag{2.31}$$

2.2.4. Плотность тока

Ток I проходит через весь проводник. Поэтому определяют такую величину, как **плотность тока** J:

$$\vec{J} = \frac{dI}{dA_\perp} \cdot \vec{e}_{A\perp}, \tag{2.32}$$

где $dA_\perp$ — элемент эквипотенциальной поверхности, а $\vec{e}_{A\perp}$ — единичный вектор, направленный перпендикулярно этой поверхности.

- Направление вектора плотности тока совпадает с направлением наибольшего изменения напряжения. Этот вектор всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности (рис. 2.14а).
- Величина плотности тока определяется количеством зарядов, проходящих через элемент эквипотенциальной поверхности за единицу времени.
- Направление вектора плотности тока совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля.

Единицей измерения плотности тока является ампер, деленный на квадратный метр, А/м^2. Ток I равен интегралу от скалярного произведения плотности тока и площади произвольного элемента, через который этот ток протекает:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \tag{2.33}$$

В однородном поле ток I определяется выражением (рис. 2.14б):

$$I = J \cdot A \cdot \cos\alpha, \tag{2.34}$$

где α — угол между нормалью к рассматриваемому элементу поверхности и направлением тока.

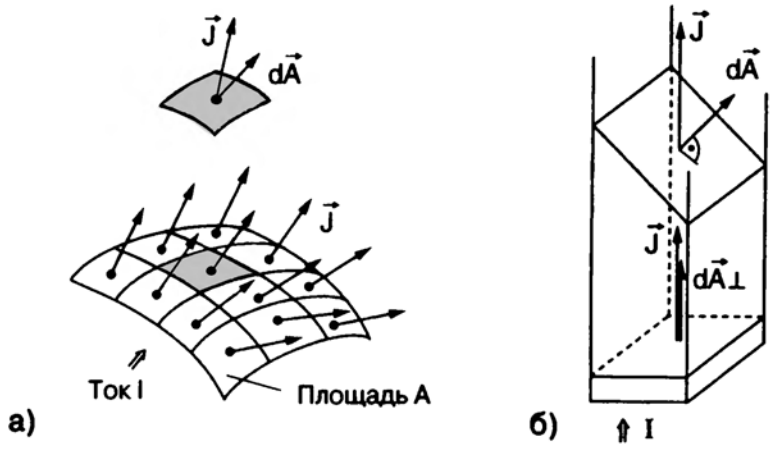


Рис. 2.14. Плотность тока: а) в общем виде; б) в однородном поле

2.2.5. Удельное сопротивление и удельная проводимость

Напряженность электрического поля связана с плотностью тока через **удельное сопротивление** ρ и **удельную проводимость** σ:

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}, \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}. \tag{2.35}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \tag{2.36}$$

- Удельная проводимость является величиной обратной удельному сопротивлению.

Единицей измерения удельного сопротивления является ом, делённый на метр, Ом/м.

Примечание. В качестве единицы удельного сопротивления часто используется Ом·мм^2/м, поскольку длина электрических проводников часто задается в метрах, а поперечное сечение в квадратных миллиметрах. Электрическое сопротивление однородного проводника определяется как:

$$R = \rho \cdot \frac{\text{длина}}{\text{площадь поперечного сечения}}.$$

Единицей измерения удельной проводимости является сименс или мо, деленные на метр, См/м или мо/м.

- Удельное сопротивление и удельная проводимость характеризуют проводящую способность материалов (табл. 2.2)
- Величина удельного сопротивления и удельной проводимости материала **зависит от температуры**.

Примечание. Температурная зависимость удельного сопротивления задается температурным коэффициентом сопротивления α. Изменение удельного сопротивления от температуры вычисляется по формуле:

$$\rho(\theta_2) = \rho(\theta_1) \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)].$$

Пример. Температурные коэффициенты сопротивления меди и алюминия равны 0,004 K^{-1}. Следовательно, при изменении температуры на 100 K их удельное сопротивление изменится на 40 %.

Таблица 2.2. Удельное сопротивление электрических проводников

Материал	Удельная проводимость σ, См/м·10⁻⁶	Удельное сопротивление ρ, Ом·мм²/м
Алюминий	37	0,027
Латунь	14,3...12,5	0,07...0,08
Медь	59	0,017
Золото	45,5	0,022
Железо	10...2,5	0,1...0,4
Серебро	62,5	0,016

2.2.6. Сопротивление и проводимость

Напряжение связано с током через **электрическое сопротивление** *R* и **электрическую проводимость** *G* следующими соотношениями:

$$V = R \cdot I \quad \text{и} \quad I = G \cdot V. \tag{2.37}$$

В системе СИ единицей измерения сопротивления является ом:

$$1\ \text{Ом} = \frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А}},$$

а единицей проводимости — мо или сименс: $1\ \text{См} = \frac{1\ \text{А}}{1\ \text{В}}$. Если напряжение *V* и ток *I* представить в виде интегралов от векторов напряженности *E* и плотности тока *J*, то сопротивление и проводимость можно найти при помощи выражений:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_s \vec{E}\, d\vec{s}}{\int_A \vec{J}\, d\vec{A}} \quad \text{и} \quad G = \frac{I}{V} = \frac{\int_A \vec{J}\, d\vec{A}}{\int_s \vec{E}\, d\vec{s}} \quad \text{при} \quad \vec{e}_A = \vec{e}_s. \tag{2.38}$$

Уравнение (2.38) справедливо в случаях, когда $d\vec{s} \perp d\vec{A}$. Для вычисления интегралов необходимо знать параметры электрического поля, такие как направления векторов напряженности и плотности тока. Сопротивление и проводимость изотропного проводника длиной l с площадью поперечного сечения A при равномерном распределении поля определяются соотношениями:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad \text{и} \quad G = \sigma \cdot \frac{A}{l}.$$

Пример. Вычисление сопротивления проводника в форме четверти кольца. Контакты, нанесенные на кольцевой проводник, также являются идеальными проводниками.

Случай 1 (рис. 2.15а): тангенциальное введение тока. Линии плотности тока повторяют форму проводника. Через любую точку поперечного сечения проводника протекает одинаковый ток. Каждую линию плотности тока можно рассматривать как элементарный ток dI. Сложив эти элементарные токи (проинтегрировав их), можно получить величину суммарного тока $I = \int dI$. Элементарный ток dI находится по величине дифференциальной проводимости dG:

$$dI = V \cdot dG = V \cdot \sigma \frac{dA}{l} = V \cdot \sigma \frac{b}{\pi/2} \cdot \frac{dr}{r},$$

$$G = \frac{I}{V} = \int \frac{dI}{V} = \int \frac{V}{V} dG = \int \sigma \frac{dA}{l} = \sigma \frac{b}{\pi/2} \cdot \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r} = \sigma \cdot \frac{b}{\pi/2} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда находится величина сопротивления проводника:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi/2}{b} \cdot \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}.$$

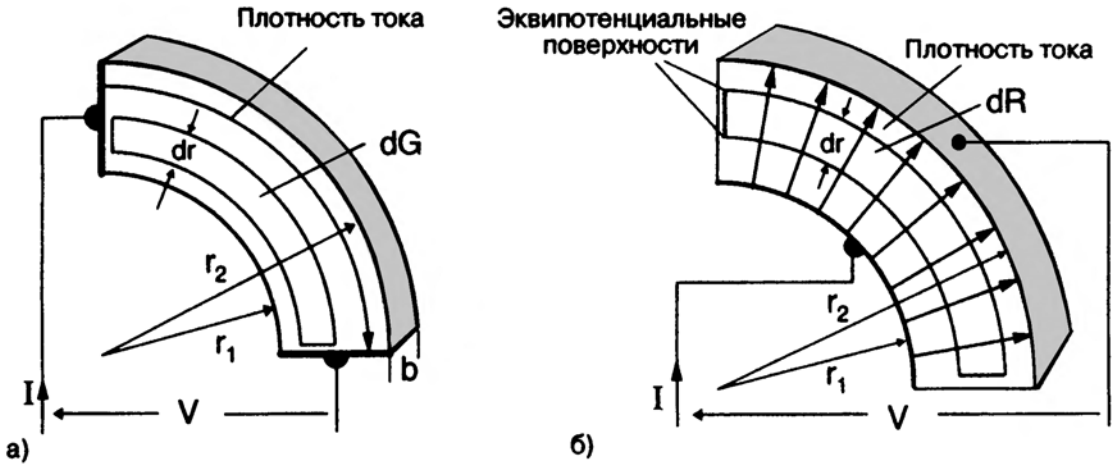


Рис. 2.15. Сопротивление проводника в форме четверти кольца:
а) при тангенциальном введении тока;
б) при радиальном введении тока

Сопротивление проводника можно также определить, исходя из геометрических соотношений. При этом полное сопротивление проводника находится

как сумма сопротивлений параллельных резисторов, имеющих длину $\frac{\pi}{2}\cdot r$ и площадь поперечного сечения $b\cdot dr$. Проводимость каждого такого резистора dG равна $\sigma\frac{b}{\pi/2}\times\frac{dr}{r}$. Полная проводимость проводника определяется суммой проводимостей всех элементарных резисторов. Тогда:

$$G=\int_{r1}^{r2}\sigma\frac{b}{\pi/2}\cdot\frac{dr}{r}=\sigma\cdot\frac{b}{\pi/2}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Примечание. При определении сопротивления проводника необходимо знать направление вектора напряженности электрического поля.

Случай 2 (рис. 2.15б): радиальное введение тока. При этом ток распространяется радиально от внутренней к внешней стороне кольцевого сектора. Плотность тока также уменьшается по направлению от внутренней к внешней стороне проводника. Полный ток через проводник определяется сопротивлением элементарных дисков, имеющих площадь поперечного сечения $\frac{\pi}{2}\cdot r\cdot b$ и длину dr. Полное сопротивление проводника R равно сумме сопротивлений dR последовательно соединенных элементарных дисков:

$$R=\int dR=\int\rho\cdot\frac{dl}{A}=\int_{r1}^{r2}\rho\cdot\frac{dr}{b\cdot(\pi/2)\cdot r}=\rho\cdot\frac{\ln(r_2/r_1)}{b\cdot(\pi/2)}.$$

2.2.7. Законы Кирхгофа

2.2.7.1. Первый закон Кирхгофа (правило токов)

Поскольку электрический ток всегда течет по замкнутому контуру, линии потока плотности тока формируют замкнутую поверхность. Первый закон Кирхгофа гласит, что при протекании через проводник установившегося постоянного тока (рис. 2.16) справедливо следующее соотношение:

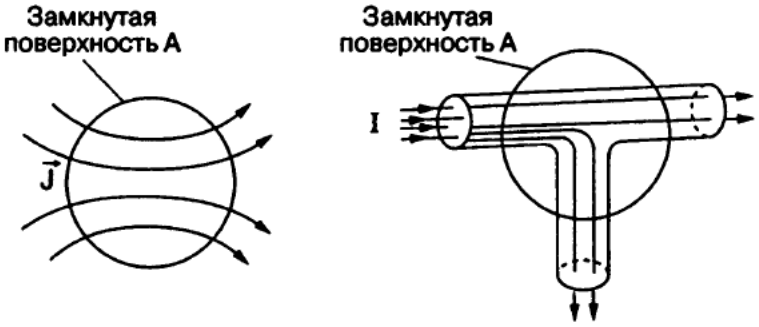


Рис. 2.16. Иллюстрация к первому закону Кирхгофа

$$\oint_A\vec{J}\,d\vec{A}=0. \qquad (2.40)$$

Это утверждение также можно переписать в виде:

$$\nabla\cdot\vec{J}=0\,. \qquad (2.41)$$

- Интеграл от плотности тока вдоль замкнутой поверхности всегда равен нулю.
- Векторы плотности тока $\vec{J}$ не имеют ни начала, ни конца.

2.2.7.2. Второй закон Кирхгофа (правило контуров)

Линейный интеграл между двумя точками пространства от напряженности электрического поля равен напряжению между этими точками, независимо от траектории интегрирования. Если начальная и конечная точки траектории интегрирования совпадают, то результат, очевидно, будет равен нулю:

$$\oint_s \vec{E}\, d\vec{s} = 0. \tag{2.42}$$

Это можно также записать в виде:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0\,. \tag{2.43}$$

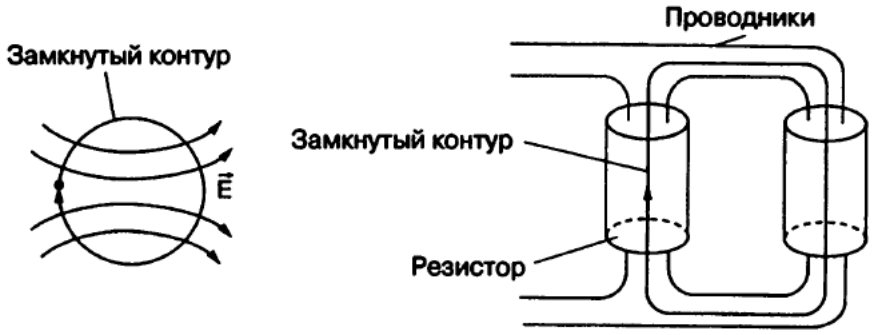


Рис. 2.17. Иллюстрация ко второму закону Кирхгофа

- Линейный интеграл от напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура всегда равен нулю (рис. 2.17).
- Поле проводника с установившимся постоянным током является соленоидальным.

2.2.8. Поле проводника с установившимся постоянным током на границе двух сред

Изменение характеристик поля проводника с установившимся постоянным током на границе двух сред происходит в соответствии со значениями их удельной проводимости (рис. 2.18):

$$\vec{J}_{n2} = \vec{J}_{n1} \quad \text{и} \quad \vec{J}_{t2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \vec{J}_{t1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \vec{J}_{t2}, \tag{2.44}$$

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \quad \text{и} \quad \vec{E}_{n2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \vec{E}_{n1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \vec{E}_{n1}, \tag{2.45}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{tg}\alpha_1. \tag{2.46}$$

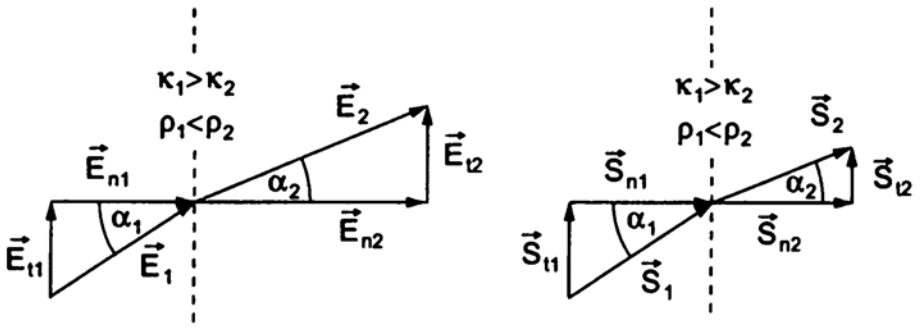


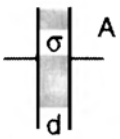
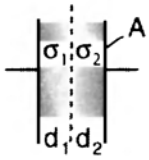
Рис. 2.18. Характеристики электрического поля на границе двух сред

На границе двух сред:

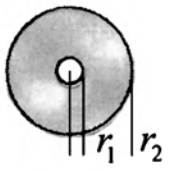
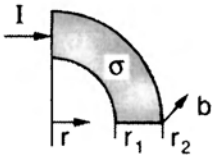
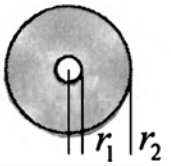
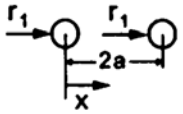
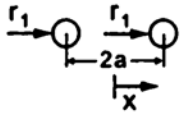
- Нормальная составляющая вектора плотности тока остается постоянной.
- Изменение тангенциальной составляющей вектора плотности тока происходит пропорционально изменению удельной проводимости.
- Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля остается постоянной.
- Изменение нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля происходит пропорционально изменению удельного сопротивления.

2.2.9. Характеристики полей и сопротивлений проводников с различными геометрическими параметрами (обзор)

Таблица 2.3. Характеристики полей и сопротивлений проводников разной геометрической конфигурации

Параллельные пластины с однородным диэлектриком между ними 	$R = \rho \cdot \frac{d}{A}$	$E = \frac{V}{d}$ $S = \frac{I}{A}$
Параллельные пластины с двумя различными диэлектриками между ними 	$R = \frac{1}{A} \cdot (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)$	$E_{1(2)} = \frac{\rho_{1(2)} V}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$ $S = \frac{I}{A}$

Окончание таблицы 2.3

Коаксиальные цилиндры 	$R = \rho \dfrac{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi l}$	$E = \dfrac{V}{r \cdot \ln \dfrac{r_2}{r_1}}$ $S = \dfrac{I}{2\pi r l}$
Дуга 90° 	$R = \rho \cdot \dfrac{\pi}{2b} \dfrac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$	$E = \dfrac{V}{\dfrac{\pi}{2} r}$ $S = \dfrac{I}{br \cdot \ln \dfrac{r_2}{r_1}}$
Концентрические сферы 	$R = \rho \cdot \dfrac{1}{4\pi} \cdot \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} \right)$	$E = \dfrac{V}{r^2} \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ $S = \dfrac{1}{4\pi r^2}$
Сфера – сфера 	$R = \rho \cdot \dfrac{1}{4\pi} \cdot \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{2a} \right)$	$E \approx \dfrac{V \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(2a-x)^2} \right)}{\dfrac{2}{r_1} - \dfrac{1}{a}}$ $S \approx \dfrac{I \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(2a-x)^2} \right)}{4\pi}$
Сфера – бесконечность 	$R = \dfrac{1}{4\pi\sigma r_1}$	$E = V \cdot \dfrac{r_1}{r^2}$ $S = \dfrac{1}{4\pi r^2}$
Параллельные проводники 	$R = \rho \cdot \dfrac{\ln \left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1} \right)^2 - 1} \right]}{\pi\sigma l} \approx$ $\approx \rho \cdot \dfrac{\ln \dfrac{2a}{r_1}}{\pi l}$ при $a >> r_1$	$E = \dfrac{V \dfrac{\sqrt{a^2 - r_1^2}}{a^2 - r_1^2 - x^2}}{\ln \left[\dfrac{a}{r_1} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{r_1} \right)^2 - 1} \right]}$ $S = \dfrac{I \sqrt{a^2 - r_1^2}}{\pi l (a^2 - r_1^2 - x^2)}$

2.2.10. Мощность и энергия проводника с установившимся постоянным током

Вся электрическая энергия проводника с установившимся постоянным током превращается в тепло. Электрическая мощность определяется выражением:

$$P = V \cdot I. \tag{2.47}$$

Если проводник обладает сопротивлением R или проводимостью G, то мощность можно оценить при помощи следующих соотношений:

$$P = V \cdot I = \frac{V^2}{R} = I^2 \cdot R \quad \text{или} \quad P = V \cdot I = \frac{I^2}{G} = V^2 \cdot G. \tag{2.48}$$

Для элемента бесконечно малого объема справедливо:

$$dP = \underbrace{\frac{dV}{ds_\perp}}_{\vec{E}} ds_\perp \cdot \underbrace{\frac{dI}{dA_\perp}}_{\vec{J}} dA_\perp = \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV. \tag{2.49}$$

Отсюда видно, что векторы $ds_\perp$ и $dA_\perp$ перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Из уравнения (2.49) выводится выражение для **плотности мощности** проводника с установившимся постоянным током:

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}. \tag{2.50}$$

Тогда уравнение для мощности можно переписать в виде:

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV. \tag{2.51}$$

Энергия проводника с установившимся постоянным током равна интегралу от мощности по времени:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt. \tag{2.52}$$

Примечание. Предполагается, что все величины, используемые для описания полей проводников с установившимся постоянным током, не зависят от времени. Поэтому, с первого взгляда, применение $P(t)$ в предыдущем уравнении может показаться некорректным. При медленных изменениях электрических величин магнитными эффектами можно пренебречь (например, такими как пинч- и скин-эффекты).

Примечание. В случае периодической закономерности изменения мощности для определения *потерь мощности* используют среднее значение мощности за период, которое определяется как среднее арифметическое от выполненной работы, деленное на период:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \cdot W(T) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)dt. \tag{2.53}$$

2.2.11. Характеристики поля проводника с установившимся постоянным током (обзор)

- Поле проводника с установившимся постоянным током является **потенциальным полем**. Линейный интеграл от напряженности электрического поля равен разности потенциалов (напряжению) между начальной и конечной точками пути интегрирования. Форма траектории интегрирования при этом не имеет никакого значения. Линии потока электрического поля проходят перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{s} = V_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\nabla \cdot V. \tag{2.54}$$

- Поле проводника с установившимся постоянным током является **соленоидальным**. Линейный интеграл от напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура всегда равен нулю (по второму закону Кирхгофа $\sum V = 0$):

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0. \tag{2.55}$$

- Поле проводника с установившимся постоянным током является **замкнутым**. Ток может течь только по замкнутому контуру. Поверхностный интеграл от плотности тока, взятый по замкнутой поверхности, всегда равен нулю (по первому закону Кирхгофа $\sum I = 0$):

$$\oint \vec{J}\,d\vec{A} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0. \tag{2.56}$$

- В поле проводника с установившимся постоянным током электрическая энергия всегда превращается в тепло:

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\,dV\ . \tag{2.57}$$

2.2.12. Соотношения между характеристиками поля проводника с установившимся постоянным током

$$\begin{array}{ccc} I & \Leftarrow I = \int_A \vec{J}\,d\vec{A} \Rightarrow & \vec{S} \\ V = \Uparrow\!\Downarrow R \cdot I & & \vec{J} = \Uparrow\!\Downarrow \sigma \cdot \vec{E} \\ V & \Leftarrow V = \int_s \vec{E}\,d\vec{s} \Rightarrow & \vec{E} \end{array}$$

2.3. Магнитные поля

Магнитные поля создаются проводниками с постоянным и переменным током, движущимися заряженными частицами и телами, а также намагниченными объектами. На движущиеся электрические заряды действуют силы Кулона, а также другие силы, обусловленные магнитными полями. Единицу измерения электрического тока можно выразить через силы, действующие в магнитном поле:

- Ампер — это сила установившегося электрического тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает появление силы между ними, равной $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Взаимосвязь между *переменным* током и магнитным полем рассматривается в разделе 2.13.2 (закон Фарадея). Этот закон лежит в основе многих технических приложений, например электрических двигателей, трансформаторов, реле и электрогенераторов.

Принятые обозначения направлений

В этой книге при рассмотрении магнитных полей применяются трехмерные физические соотношения. Для их иллюстрации были приняты следующие соглашения:

Знак ⊗ указывает на то, что соответствующий вектор направлен от наблюдателя в сторону страницы.

Знак ⊙ указывает на то, что соответствующий вектор направлен к наблюдателю, выходя из страницы.

Указатель направления. Условное направление для скалярных величин, таких как ток, напряжение и магнитный поток.

Вектор. Условное направление для характеристик поля, таких как плотность потока и напряженность магнитного поля.

Векторное произведение. Например, $\vec{F} = (\vec{v} \times \vec{B})$.

Величина вектора. Например, $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \sin\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Вектор $\vec{F}$ *перпендикулярен* плоскости, образованной векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Направление вектора $\vec{F}$ определяется *правилом буравчика*. Если поворачивать буравчик по направлению наименьшего угла от вектора $\vec{v}$ к вектору $\vec{B}$, то направление его движения будет совпадать с направлением вектора $\vec{F}$ (рис. 2.19).

Указатель на источник энергии в электрической цепи. Если направления тока и напряжения для какого-либо элемента электрической цепи совпадают друг с другом, то можно предположить, что этот элемент является источником энергии. Для точной идентификации того, что элемент является источником, необходимо провести дополнительные расчеты данной схемы. И только после того, как расчеты с применением законов Кирхгофа также

дадут положительные результаты относительно тока и напряжения, можно подтвердить, что элемент действительно является источником энергии. Если будут получены отрицательные результаты, то очевидно, что элемент является потребителем энергии.

Указатель на элемент — потребитель энергии в электрической цепи. Если ток и напряжение на каком-либо элементе электрической цепи имеют противоположные направления, то можно считать доказанным, что этот элемент является потребителем энергии.

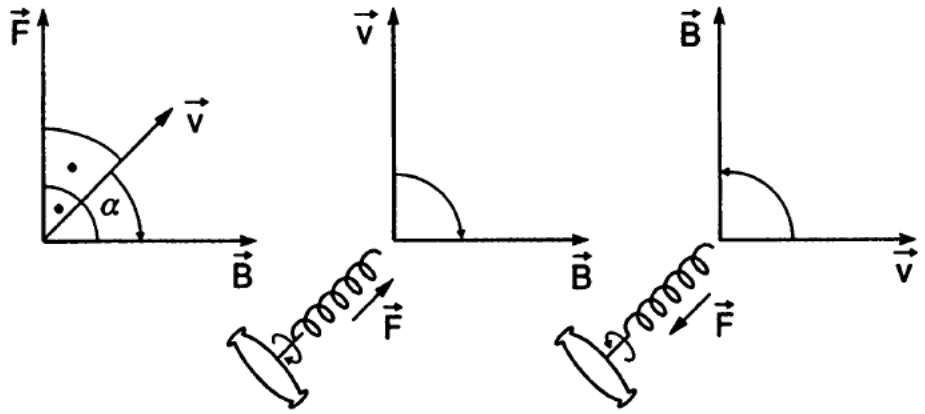


Рис. 2.19. Правило буравчика для определения направления вектора, соответствующего произведению двух векторов, в данном случае $\vec{F} = (\vec{v} \times \vec{B})$

2.3.1. Сила, действующая на движущийся заряд

Между движущимися электрическими зарядами возникают силы, которые не подчиняются закону Кулона. Если два точечных заряда движутся *с постоянными скоростями* по параллельным траекториям, расположенным на расстоянии *r* друг от друга, то между ними возникают силы магнитного взаимодействия, равные:

$$F = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{(Q_1 v_1) \cdot (Q_2 v_2)}{r^2}, \quad \text{где} \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r. \tag{2.58}$$

Здесь μ — абсолютная магнитная проницаемость;

μ_0 — магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$;

μ_r — относительная магнитная проницаемость.

Относительная магнитная проницаемость является постоянной величиной, определяемой типом среды. В вакууме и в воздухе относительная магнитная проницаемость равна 1.

- При одинаковых знаках произведений $(Q_1 \cdot v_1)$ и $(Q_2 \cdot v_2)$ заряды стремятся приблизиться друг к другу, а при противоположных знаках — удалиться друг от друга (рис. 2.20).

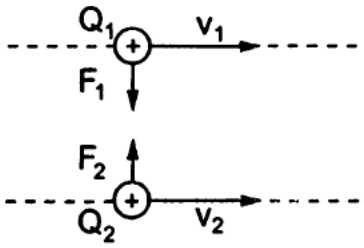


Рис. 2.20. Силы магнитного взаимодействия между двумя движущимися зарядами

2.3.2. Определение плотности магнитного потока

Определение **плотности магнитного потока**, часто называемой вектором магнитной индукции $\vec{B}$, вытекает из выражения для силы магнитного взаимодействия между двумя движущимися зарядами. Согласно этому определению:

$$F = (Q_1 v_1) \cdot \underbrace{\frac{\mu (Q_2 v_2)}{4\pi r^2}}_{B} = Q_1 v_1 \cdot B.$$

Плотность магнитного потока — это векторная характеристика магнитного поля. В системе СИ единицей ее измерения является тесла, $1\ \text{Тл} = \frac{1\ \text{В}\cdot\text{с}}{1\ \text{м}^2}$.

Направление вектора магнитной индукции может быть найдено при помощи магнитного диполя (например, стрелки компаса). Положительным направлением вектора магнитной индукции принято считать направление северного полюса магнитного диполя.

Примечание. Стрелка компаса является магнитным диполем. Северный полюс стрелки компаса всегда показывает на север. Это значит, что географический северный полюс в действительности является магнитным южным полюсом Земли.

На рисунках магнитные поля обычно показываются при помощи **магнитных силовых линий** или **линий магнитной индукции.** Касательная, проведенная в любой точке этих линий, совпадает с направлением, показываемым бесконечно малым магнитным диполем, т. е. с направлением вектора магнитной индукции $\vec{B}$. Плотность силовых линий соответствует величине напряженности магнитного поля.

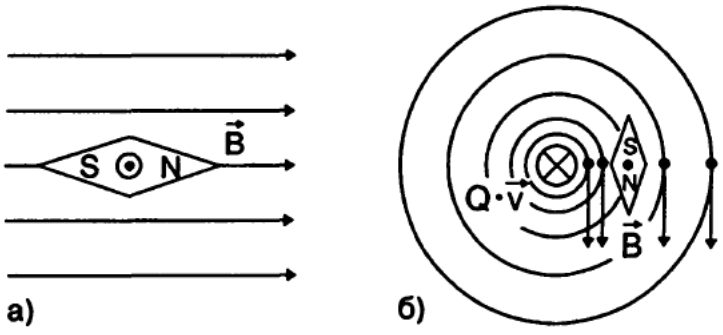


Рис. 2.21. Стрелка компаса в магнитном поле (а) и вектор магнитной индукции вокруг движущегося заряда (б)

Было показано экспериментально, что линии магнитной индукции охватывают проводники с токами, создающими поле, т. е. являются замкнутыми, и направлены по часовой стрелке относительно направления движения зарядов (рис. 2.21).

Правило правой руки. По этому правилу может быть определено направление магнитного поля вокруг движущегося заряда или вокруг проводника с током. Если расположить правую руку так, чтобы отогнутый большой палец указывал на направление движения заряда (или на направление тока), то загнутые оставшиеся пальцы будут показывать направление вращения поля.

Правило буравчика. Направление линий индукции магнитного поля вокруг движущегося заряда или вокруг проводника с током может быть также найдено по правилу буравчика, часто называемому правилом Максвелла. Если буравчик ввинчивать по направлению движения заряда (или по направлению тока в проводнике), то направление движения рукоятки буравчика укажет направление поля. Если известно направление поля, то при помощи следующего уравнения может быть найдена сила, действующая на движущийся заряд:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \qquad (2.59)$$

- Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, известна как **сила Лоренца**.

Сила Лоренца, действующая на проводник с током

Ток I — это направленное движение зарядов. Количество заряда ΔQ, проходящее через проводник, может быть выражено как $\Delta Q = I \cdot \Delta t$, а скорость движения зарядов как $v = \Delta l / \Delta t$. Тогда:

$$\Delta Q \cdot v = \Delta Q \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta l.$$

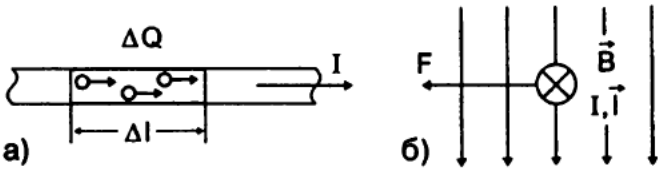


Рис. 2.22. Сила Лоренца:
а) движение зарядов в проводнике;
б) сила, действующая на проводник с током

Сила Лоренца, действующая на прямой проводник с током, может быть найдена как:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Вектор $\vec{l}$ указывает на направление тока I (рис. 2.22).

Пример: определение направления вращения и вращающего момента электрического двигателя.

Величина магнитной индукции поля в воздушном зазоре электродвигателя, созданного постоянным магнитом, равна $B = 0{,}5$ Тл. Активная длина ротора двигателя составляет $l = 10$ см (длина проводника в магнитном поле равна 10 см), а диаметр $d = 10$ см. Через магнитное поле с каждой стороны проходят по четыре проводника (рис. 2.23а). Через каждый проводник течет ток 1 А.

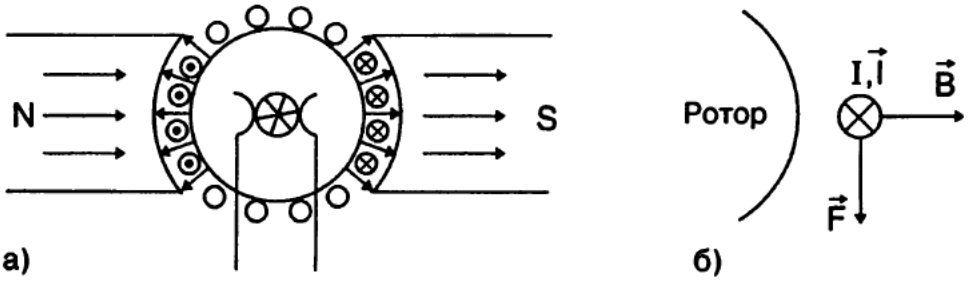


Рис. 2.23. Упрощенная схема электродвигателя (а) и иллюстрация правила нахождения направления поля (б)

Решение. Двигатель вращается против часовой стрелки (рис. 2.23б). Силы, действующие на каждый проводник с током, также направлены против часовой стрелки. Вращающий момент равен:

$$M = F_{\text{суммарн}} \cdot \frac{d}{2} = 8 \cdot I \cdot s \cdot B \cdot \frac{d}{2} = 8 \cdot 1\ \text{А} \cdot 0{,}1\ \text{м} \cdot 0{,}5\ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \cdot \frac{0{,}1\ \text{м}}{2} = 20 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Примечание. Исходя из следующего соотношения, можно преобразовывать электрические единицы в механические и наоборот:

$$1\ \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} = 1\ \text{Вт} \cdot \text{с} = 1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

2.3.3. Закон Био – Савара

Закон Био – Савара устанавливает величину и направление вектора магнитной индукции в произвольной точке магнитного поля, создаваемого движущимся точечным зарядом (рис. 2.24):

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} (\vec{v} \times \vec{e}_r), \qquad (2.61)$$

где $\vec{e}_r$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором r.

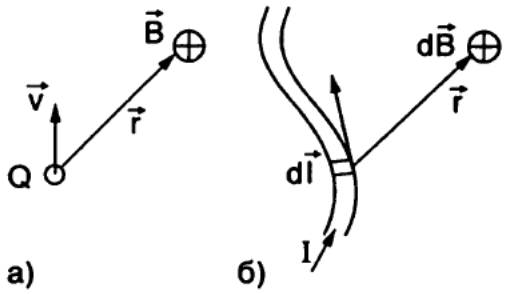


Рис. 2.24. Закон Био – Савара:
а) для движущегося заряда;
б) для проводника с током

Для определения плотности магнитного потока поля, созданного очень тонким проводником с током произвольной формы, каждый бесконечно малый элемент проводника $dl \cdot \vec{l}$ рассматривается как движущийся заряд $Q \cdot \vec{v}$ (см. также раздел 2.3.2). В этом случае каждый элемент проводника создает в пространстве бесконечно малую магнитную индукцию $d\vec{B}$, величина и направление которой также задаются законом Био – Савара:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot (d\vec{l} \times \vec{e}_r). \qquad (2.62)$$

Плотность суммарного магнитного потока $\vec{B}$ находится методом интегрирования по теореме суперпозиции полей: $\vec{B} = \int d\vec{B}$.

Пример: определение магнитного поля бесконечно длинного проводника с током, имеющего бесконечно малый диаметр. Предполагается, что поле расположено радиально симметрично вокруг проводника. Поэтому рассматриваемую систему можно свести к двумерному случаю (рис. 2.25). В этом случае формула Био – Савара несколько упрощается. Также отметим, что по правилам векторной алгебры $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\angle\vec{a},\vec{b}$. Поэтому справедливо следующее выражение:

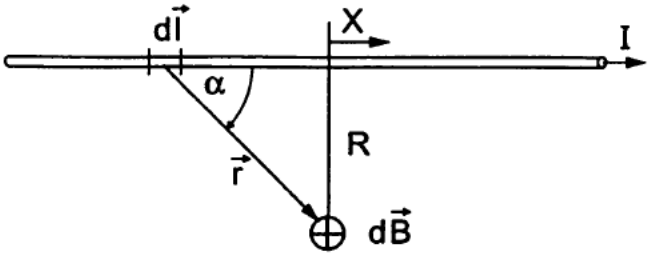


Рис. 2.25. Поле прямого проводника с током

$$dB = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I}{r^2}\cdot dl\cdot\sin\alpha,$$

где $r = \sqrt{x^2+R^2}$ и $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$, тогда:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu}{4\pi}\cdot\underbrace{\frac{I}{x^2+R^2}}_{I/r^2}\cdot\underbrace{\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}}_{\sin\alpha}dx = \frac{\mu\cdot I\cdot R}{2\pi}\cdot\int_0^{+\infty}(x^2+R^2)^{-3/2}dx = \frac{\mu\cdot I}{2\pi R}.$$

Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости, образованной векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, а его величина уменьшается пропорционально расстоянию от проводника.

Примечание. Закон Био – Савара также справедлив для напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Поскольку $\vec{B} = \mu\cdot\vec{H}$, закон Био – Савара можно записать в виде:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Q}{r^2}(\vec{v}\times\vec{e}_r). \qquad (2.63)$$

2.3.4. Напряженность магнитного поля

Напряженность магнитного поля является второй величиной по важности после плотности магнитного потока, характеризующей магнитное поле. В разделе 2.3.2 дано определение вектора магнитной индукции через силу, действующую на движущиеся заряды. Величина магнитной индукции зависит от типа окружающей среды, поскольку в выражение для нее входит магнитная проницаемость μ. Величина же напряженности $\vec{H}$ магнитного поля по определению не зависит от свойств окружающей среды:

$$F = (Q_1v_1)\cdot\underbrace{\mu\cdot\frac{(Q_2v_2)}{4\pi r^2}}_{B} = (Q_1v_1)\cdot\mu\cdot\underbrace{\frac{(Q_2v_2)}{4\pi r^2}}_{H}.$$

Отсюда следует, что:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} \quad \text{или} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}. \tag{2.64}$$

В системе СИ единицей измерения напряженности магнитного поля является ампер, деленный на метр, А/м. Для изотропных сред справедливы следующие утверждения:

- Причиной возникновения напряженности магнитного поля является движущийся заряд или электрический ток.
- Векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ имеют одинаковое направление.
- **Абсолютная магнитная проницаемость** μ является коэффициентом пропорциональности между величиной магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Магнитная проницаемость среды равна произведению магнитной постоянной μ_0 и относительной магнитной проницаемости μ_r:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r. \tag{2.65}$$

Магнитная постоянная равна:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}. \tag{2.66}$$

Относительная магнитная проницаемость может быть меньше единицы (**диамагнетизм**) и больше единицы (**парамагнетизм**).

- Относительная магнитная проницаемость вакуума равна единице. Она такая же для воздуха и большинства газов.

2.3.5. Магнитный поток

Магнитный поток Ф сквозь произвольную поверхность A равен интегралу от плотности магнитного потока, взятого по этой поверхности:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}. \tag{2.67}$$

В системе СИ единицей магнитного потока является вебер: 1 Вб = 1 В·с.

Примечание. Вектор магнитной индукции определяет магнитный поток сквозь единичную поверхность.

Теорема Остроградского — Гаусса для потока магнитной индукции: магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю (рис. 2.26):

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0\,. \tag{2.68}$$

Этот закон может быть также записан в виде:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{2.69}$$

- Магнитный поток всегда формирует замкнутый контур.
- Магнитное поле является полем соленоидального типа.

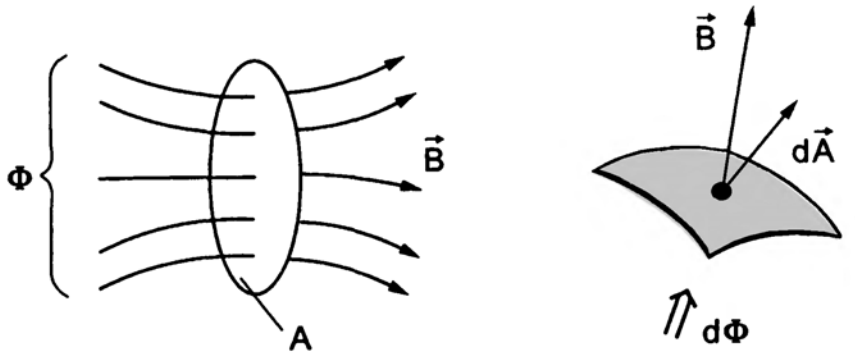


Рис. 2.26. Магнитный поток и плотность магнитного потока

Если проводник состоит из N последовательно соединенных витков (например, имеет вид соленоида), то полный магнитный поток сквозь поверхности, ограниченные всеми N витками, определяется величиной $\psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$, называемой в электротехнике **потокосцеплением**. Когда все витки охвачены одним и тем же потоком, справедливо:

$$\psi = N \cdot \Phi. \tag{2.70}$$

Единицей измерения потокосцепления является вольт на секунду, В·с. Потокосцепление — это величина эффективного потока, используемая в расчетах трансформаторов и электрических машин при помощи законов Фарадея.

2.3.6. Магнитное напряжение и закон Ампера

Магнитное напряжение V равно линейному интегралу от напряженности магнитного поля:

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{H}\, d\vec{s}. \tag{2.71}$$

Магнитное напряжение между двумя точками равно линейному интегралу от напряженности магнитного поля между этими точками. В данном случае результат будет зависеть от пути интегрирования. В зависимости от количества проводников с током, охватываемых замкнутым контуром, результат интегрирования может различаться на величину $n \cdot I$, где $n = \pm 1, 2, \ldots, i$ (рис. 2.27).

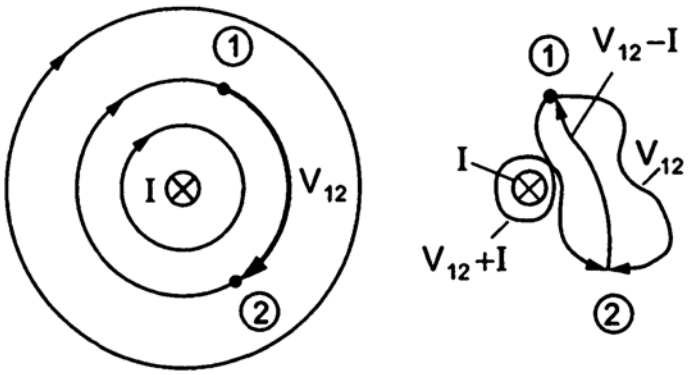


Рис. 2.27. Магнитное напряжение V

В системе СИ единицей измерения магнитного напряжения является ампер, А.

Закон Ампера (закон полного тока)

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вокруг проводников с постоянным электрическим током вдоль замкнутого контура пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \sum I = \Theta = \text{МДС}. \qquad (2.72)$$

- Величина напряженности магнитного поля $\vec{H}$ прямо пропорциональна току I.
- Магнитное напряжение, вычисленное вдоль *замкнутого* контура, равно сумме охватываемых токов. Если рассматриваемый контур охватывает проводник с током I n раз, то магнитное напряжение равно $\sum I = n \cdot I$ (рис. 2.28а).
- При протекании тока I по катушке из N витков циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура, проходящего через все витки, равна произведению $I \cdot N$ (рис. 2.28б).
- Сумма всех токов, охватываемых замкнутым контуром, называется **магнитодвижущей силой** (МДС) или **ампер-витками** Θ.

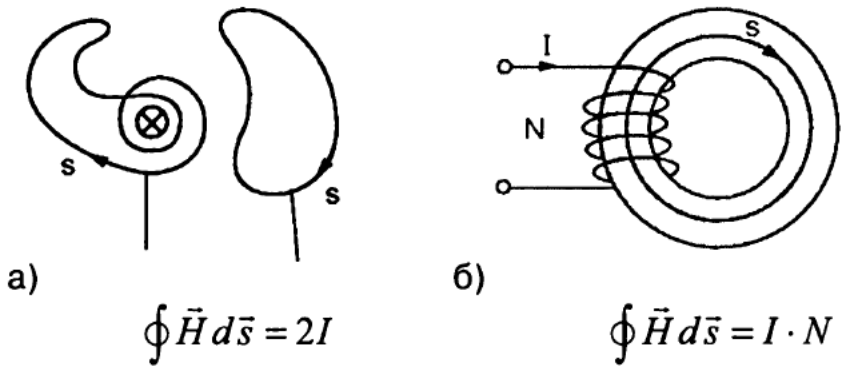


Рис. 2.28. Применение закона Ампера:
а) замкнутый контур охватывает проводник с током разное количество раз;
б) магнитный поток проходит через катушку из N витков

Если сумму токов $\sum I$ выразить через плотность тока и плотность магнитного потока, то закон Ампера для магнитных контуров можно записать в виде:

$$\oint_s \vec{H}\, d\vec{s} = \int_A (\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}) d\vec{A}\,. \qquad (2.73)$$

Это уравнение также известно под названием первой формулы Максвелла:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \qquad (2.74)$$

- Магнитное поле внутри кругового проводника с током не равно нулю.

Закон Ампера позволяет вычислять напряженность магнитного поля в простых геометрических системах. Для этого необходимо точно знать траекторию и направление силовых линий магнитного поля.

Пример: определение напряженности магнитного поля, созданного прямым бесконечно длинным проводником с током с круглым поперечным сечением (рис. 2.29).

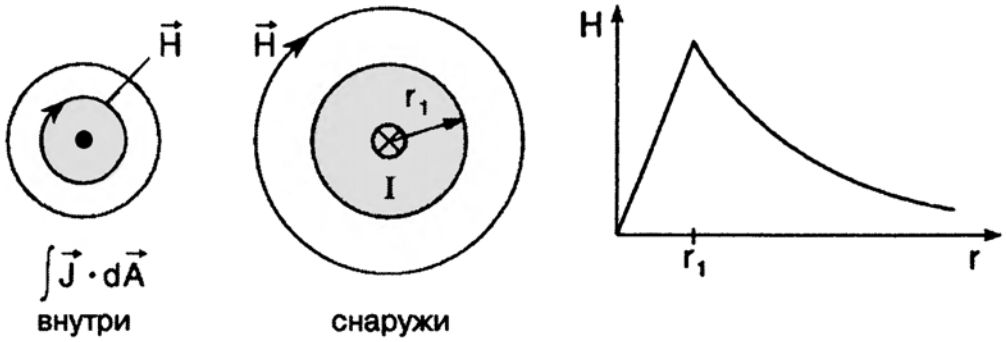


Рис. 2.29. Магнитное поле проводника с током круглого сечения

Плотность тока одинакова в любой точке внутри проводника. Из-за симметричности проводника магнитное поле вокруг него будет также симметричным, и его силовые линии будут образовывать концентрические окружности вокруг центра проводника. Внутри и снаружи проводника напряженность магнитного поля будет разной:

а) внутри проводника: $\oint \vec{H}\,d\vec{s} = \int \vec{J}\,d\vec{A}, \quad J = \dfrac{I}{\pi r_1^2} \quad \Rightarrow \quad H \cdot 2\pi r = \dfrac{I}{\pi r_1^2} \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r \quad \text{при} \quad r \le r_1;$$

б) снаружи проводника: $\oint \vec{H}\,d\vec{s} = I \quad \Rightarrow \quad H \cdot 2\pi r = I \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}. \quad \text{при} \quad r \le r_1.$$

2.3.7. Магнитное сопротивление, магнитная проводимость, индуктивность

Магнитное сопротивление R_m определяется как:

$$R_m = \frac{V}{\Phi}. \tag{2.75}$$

- Величина магнитного сопротивления зависит от геометрической конфигурации и магнитной проницаемости.

Единицей измерения магнитного сопротивления является величина, обратная генри, 1/Гн = А/(В·с). Если напряжение и поток выразить через

напряженность магнитного поля и магнитную индукцию, то уравнение (2.75) преобразуется к виду:

$$R_{\text{m}} = \frac{V}{\Phi} = \frac{\int \vec{H}\, d\vec{s}}{\int \vec{B}\, d\vec{A}} \quad \text{при} \quad \vec{e}_A \| \vec{e}_s. \tag{2.76}$$

Уравнение (2.76) справедливо для случаев, когда векторы $d\vec{s}$ и $d\vec{A}$ перпендикулярны друг другу (при этом $\vec{e}_A = \vec{e}_S$). Для вычисления соответствующих интегралов необходимо знать такие характеристики поля, как направления векторов магнитной индукции и напряженности. Для однородных магнитных материалов и при равномерном распределении полей магнитное сопротивление проводника длиной l с поперечным сечением A определяется следующим выражением:

$$R_{\text{m}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{A}. \tag{2.77}$$

- Магнитное сопротивление пропорционально длине магнитного пути и обратно пропорционально поперечному сечению магнитного сопротивления.

Магнитная проводимость G_{m} является величиной, обратной магнитному сопротивлению:

$$G_{\text{m}} = \frac{1}{R_{\text{m}}}. \tag{2.78}$$

Полное магнитное сопротивление *замкнутого* контура (см. также следующий раздел) определяется как:

$$R_{\text{полн}} = \frac{I \cdot N}{\Phi}. \tag{2.79}$$

Величина, обратная полному сопротивлению, называется полной магнитной проводимостью:

$$A_L = \frac{\Phi}{I \cdot N}. \tag{2.80}$$

Единицей измерения A_L является генри, 1 Гн = 1 $\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}$.

- Величина A_L зависит только от геометрических размеров и характеристик материалов, составляющих замкнутую магнитную цепь.
- В состоянии насыщения в ферромагнитных материалах при увеличении насыщения величина A_L уменьшается, а магнитное сопротивление возрастает.

Примечание. В справочниках по магнитным сердечникам дроссельных катушек приводится зависимость A_L от величины воздушного зазора (A_L чаще всего выражается в нГн). Чем больше воздушный зазор, тем меньше значение A_L. Следует отметить, что большая часть энергии катушки индуктивности запасается в воздушном зазоре, поэтому он является необходимым компонентом всех дросселей (см. также раздел 2.3.16).

Индуктивность

Индуктивность L определяет взаимосвязь тока и напряжения (см. раздел 1.1.7). По закону Фарадея $v = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ (см. раздел 2.3.13.2), ток связан с напряжением выражением $v = L \cdot \frac{di}{dt}$, а величина A_L равна $\frac{\Phi}{i \cdot N}$. Отсюда следует, что:

$$L = N^2 \cdot A_L. \tag{2.81}$$

Единицей измерения индуктивности является генри, 1 Гн = 1 $\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}$.

- Индуктивность L равна произведению величины A_L и квадрата количества витков катушки.
- Индуктивность зависит только от геометрических размеров сердечника и характеристик материала, из которого он изготовлен, а также от количества витков катушки.

Магнитный поток Ф, ток I и индуктивность L связаны следующим соотношением: $L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$, которое вытекает из выражений: $A_L = \frac{\Phi}{I \cdot N}$ и $L = N^2 \cdot A_L$. Это соотношение можно записать в виде:

$$L \cdot I = N \cdot \Phi. \tag{2.82}$$

2.3.8. Характеристики материалов в магнитном поле

Магнитная проницаемость μ определяется произведением магнитной постоянной μ_0 и относительной магнитной проницаемости μ_r:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r, \tag{2.83}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}. \tag{2.84}$$

Относительная магнитная проницаемость μ_r может быть меньше единицы (**диамагнетизм**) или больше единицы (**парамагнетизм**).

- Относительная магнитная проницаемость вакуума равна единице. Она имеет приблизительно то же значение для воздуха и большинства газов.
- Парамагнитные материалы концентрируют магнитный поток, а диамагнитные — разбрасывают его.

Материалы, у которых $\mu_r \gg 1$, называются **ферромагнетиками**. Они обладают следующими важными свойствами:

- Они концентрируют существующее магнитное поле, что используется, например, для построения защитных экранов (рис. 2.30).
- На их основе возможно реализовать дроссельные катушки с большими значениями индуктивности.

- Подача на обмотку дросселя с ферромагнитным сердечком напряжения приводит к появлению значительного магнитного потока. При этом ток через катушку может быть очень небольшим (рис. 2.31).
- При пропускании через обмотку дросселя с ферромагнитным сердечком тока можно получить магнитное поле, обладающее большой напряженностью и плотностью магнитного потока (рис. 2.31).

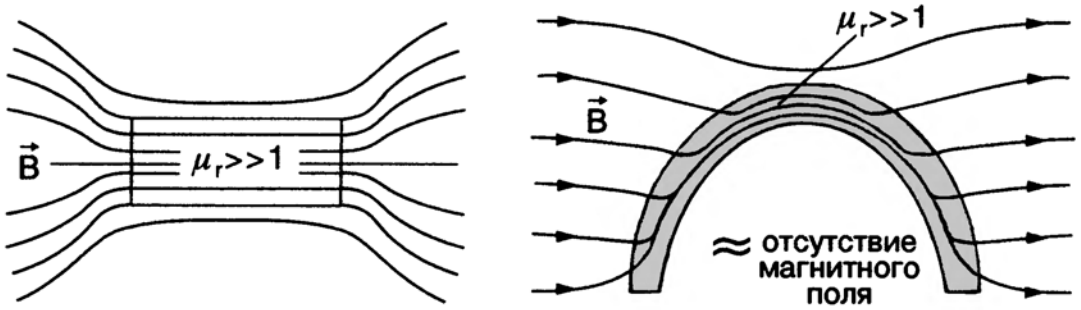
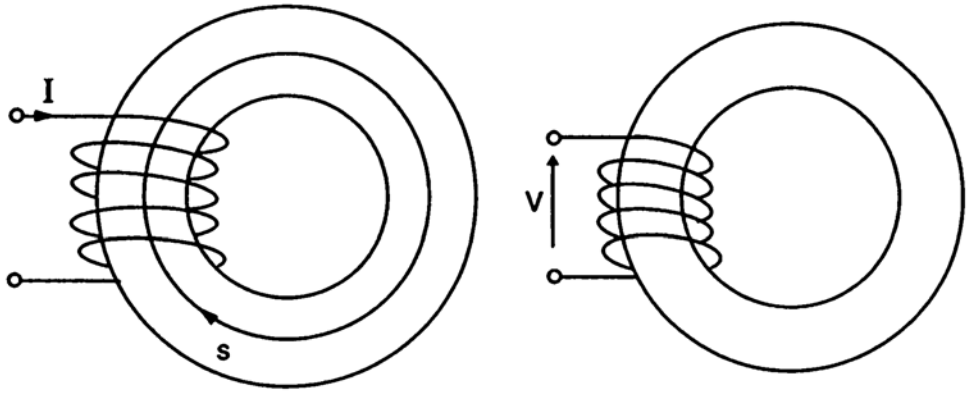


Рис. 2.30. Концентрация магнитного поля при помощи ферромагнитных материалов, у которых $\mu_r \gg 1$



$\Rightarrow$ подача I

$H \cdot s = I \cdot N; \quad B = \mu \cdot H$

$\Rightarrow$ появление H

$\Rightarrow$ B и Ф очень велики

$\Rightarrow$ подача V

$V = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = L \cdot I$

$\Rightarrow$ появление Ф

$\Rightarrow$ H и I очень малы

Рис. 2.31. Влияние ферромагнитных сердечников при пропускании через катушку дросселя тока или подаче на нее напряжения

2.3.8.1. Ферромагнитные материалы

Ферромагнетики. Ферромагнитные материалы широко применяются в технике. Их относительная магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля. Типичные значения относительной магнитной проницаемости ферромагнетиков лежат в пределах 1000...100 000. **Домены.** Ферромагнитные материалы содержат маленькие кристаллические магнитные диполи, часто называемые доменами. В отсутствие внешнего магнитного поля

ориентация доменов может быть различной, в результате чего собственное магнитное поле материала часто отсутствует. При попадании ферромагнетика в магнитное поле его домены начинают выстраиваться в одном направлении, что приводит к сокращению магнитного пути и усилению плотности магнитного потока. При значительном увеличении напряженности магнитного поля происходит явление насыщения, означающее, что практически все домены приобретают одинаковую ориентацию.

Магнитный гистерезис. Гистерезис (рис. 2.32) вызван отставанием изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H, являющимся следствием необратимых изменений при намагничивании и перемагничивании материала. **Петля гистерезиса** — это кривая изменения магнитной индукции ферромагнетика, помещенного во внешнее магнитное поле, при изменении напряженности последнего от $+H_s$ до $-H_s$, где H_s — напряженность магнитного поля, соответствующая насыщению. Дальнейшее увеличение напряженности магнитного поля приводит лишь к незначительному увеличению магнитной индукции.

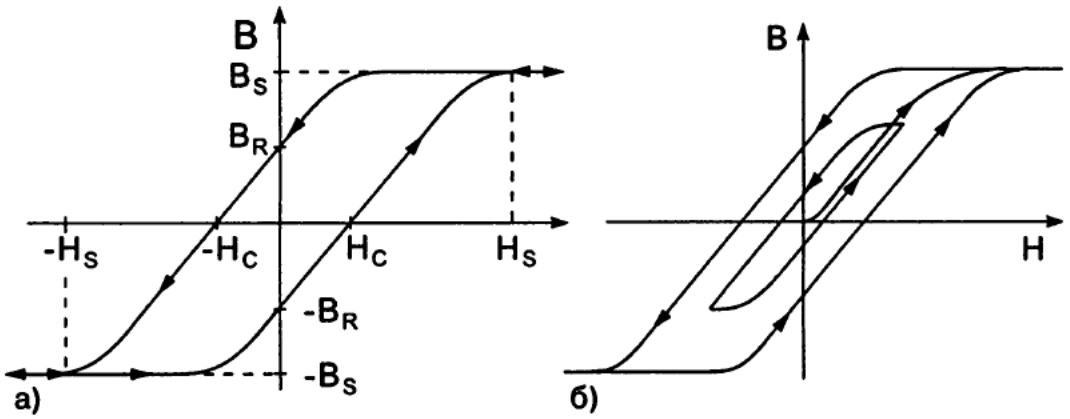


Рис. 2.32. Петля магнитного гистерезиса:
а) характеристики петли;
б) потери на гистерезис

Величина $\pm B_s$ магнитной индукции, достигаемая при значении напряженности магнитного поля, равной $\pm H_s$, называется **индукцией насыщения**. Величина индукции насыщения для стали обычно лежит в пределах 1...2 Тл, а для ферритов — 0,3...0,4 Тл. Величина магнитной индукции $\pm B_R$, сохраняющейся в образце после уменьшения напряженности поля от $\pm H_s$ до 0, называется **остаточной индукцией**. Ее существование является основой создания постоянных магнитов. Для этого замкнутое ферромагнитное кольцо с постоянным поперечным сечением намагничивается до состояния насыщения, после чего ток, текущий через катушку, отключается. Если в кольце будет воздушный зазор, то остаточная индукция будет меньше (см. раздел 2.3.11). Напряженность H_c обратного поля, доводящего магнитную индукцию до нуля, называется **коэрцитивной силой**. Площадь петли гистерезиса соответствует **потерям на гистерезис**. Величина потерь прямо пропорциональна работе, совершенной при намагничивании ферромагнетиков. Размерность площади петли гистерезиса равна

единице работы, деленной на единицу объема: dW/dV. Потери на гистерезис связаны с выделением тепла в процессе полного цикла перемагничивания, соответствующего петле гистерезиса. Для намагничивания сердечника объемом V требуется совершить следующую работу:

$$W = \frac{dW}{dV} \cdot V. \tag{2.85}$$

При этом потери энергии на частоте f составят:

$$P = \frac{dW}{dV} \cdot V \cdot f. \tag{2.86}$$

Как указывалось выше, потери на гистерезис могут быть определены по площади петли гистерезиса (если они не известны из других источников, например из соответствующих таблиц). При высокочастотном намагничивании ферромагнетиков из-за больших потерь на гистерезис может произойти перегрев материала. В этом случае уровень намагничивания понизится. Потери на гистерезис уменьшаются квадратично уровню намагничивания, т. е. при уменьшении максимальной напряженности поля в два раза потери снизятся в четыре раза (рис. 2.32б).

Примечание. **Общие потери в ферромагнетиках** включают в себя не только потери на гистерезис, но и потери, связанные с вихревыми токами.

Мягкие ферромагнетики — это материалы с узкой петлей гистерезиса. Поскольку площадь петли у таких ферромагнетиков мала, им свойственны и малые потери на гистерезис. Мягкие ферромагнетики имеют широкое применение, например в трансформаторах и электрических машинах.

Жесткие ферромагнетики обладают большой площадью петли гистерезиса. Им свойственны высокие значения остаточной индукции и коэрцитивной силы. Они используются для изготовления постоянных магнитов.

Размагничивание. Существует несколько способов размагничивания сердечника.

- Нагрев до температуры Кюри. Температура Кюри — это такая температура, при которой значительное повышение скорости теплового движения молекул приводит к изменению структуры кристаллической решетки материала, его теплоемкости, электропроводности и других физических характеристик. При этой температуре домены перестают быть одинаково ориентированными, что ведет к потере ферромагнитных свойств.
- Медленное высокочастотное снижение уровня размагничивания. Такой режим позволяет снять намагниченность материала постепенно.
- Воздействие механических вибраций. Механические колебания приводят к дезориентации доменов. Сильные удары вызывают размагничивание материалов. Современные жесткие ферромагнетики часто очень чувствительны к механическим воздействиям.

2.3.9. Магнитные поля на границах двух сред

Изменение характеристик магнитного поля при его прохождении границы раздела двух разных материалов зависит от их магнитной проницаемости (рис. 2.33):

$$\vec{H}_{t2} = \vec{H}_{t1} \quad \text{и} \quad \vec{H}_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \vec{H}_{n1}. \tag{2.87}$$

$$\vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1} \quad \text{и} \quad \vec{B}_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \vec{B}_{t1}. \tag{2.88}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1. \tag{2.89}$$

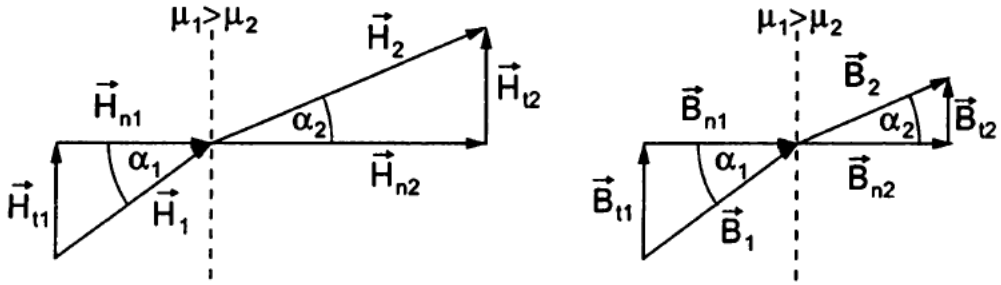


Рис. 2.33. Характеристики магнитного поля на границе раздела двух сред

При переходе через границу:

- Тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля остается постоянной.
- Нормальная составляющая напряженности магнитного поля обратно пропорциональна магнитной проницаемости материалов.
- Тангенциальная составляющая плотности магнитного потока прямо пропорциональна магнитной проницаемости материалов.
- Нормальная составляющая плотности магнитного потока остается постоянной.

2.3.10. Магнитные цепи

Магнитной цепью называется совокупность тел или областей пространства, в которых сосредоточено магнитное поле. Магнитный поток Ф в магнитной цепи играет роль, аналогичную силе тока I в электрической цепи, магнитное напряжение V соответствует электрическому напряжению V, а магнитное сопротивление R_m — омическому сопротивлению R. Поэтому магнитная цепь, так же как и электрическая, может быть изображена в виде эквивалентной схемы (рис. 2.34).

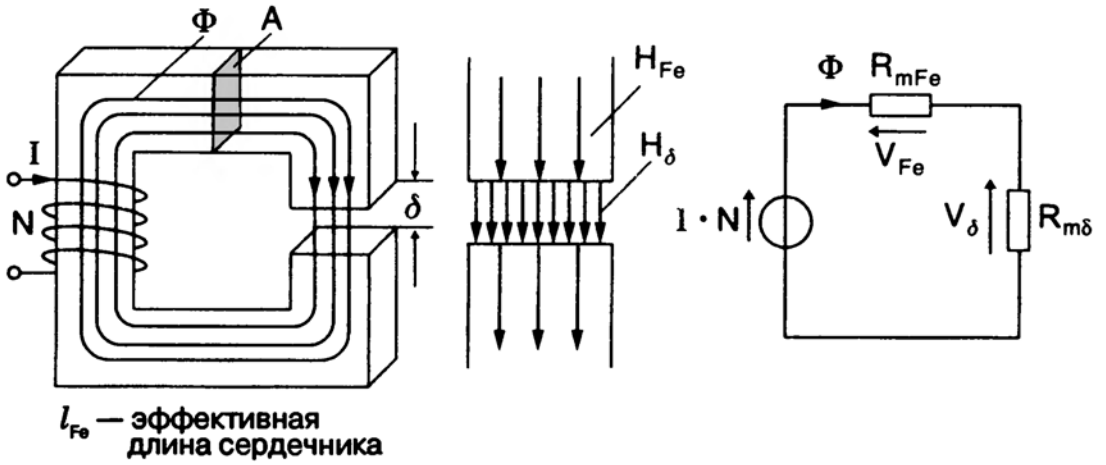


Рис. 2.34. Магнитная цепь

Для магнитной цепи с воздушным зазором, показанной на рис. 2.34, справедливы следующие соотношения.

- **Магнитный поток Ф** циркулирует по замкнутым контурам.
- При постоянной площади поперечного сечения сердечника A **вектор магнитной индукции** $\vec{B}$ в любой точке равен: $B = Ф/A$. Это справедливо и для самого сердечника, и для воздушного зазора в нем: $B_{Fe} = B_δ$ (здесь предполагается, что расширение поля в воздушном зазоре и его сужение на углах ферромагнетика являются незначительными).
- **Напряженность магнитного поля** $\vec{H}$ в воздушном зазоре в μ_r раз больше напряженности магнитного поля в сердечнике:

$$B = \mu \cdot H \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_{Fe} = \mu_0 \cdot H_\delta \quad \Rightarrow \quad \mu_r \cdot H_{Fe} = H_\delta. \qquad (2.90)$$

- **Падение магнитного напряжения** V на каком-либо участке магнитной цепи равно произведению магнитного потока на магнитное сопротивление этого участка:

$$V = Ф \cdot R_m. \qquad (2.91)$$

- **Магнитодвижущая сила** $I \cdot N$ равна сумме падений магнитного напряжения на участках цепи:

$$I \cdot N \approx H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_\delta \cdot \delta. \qquad (2.92)$$

- Величина **магнитных сопротивлений** различных участков цепи определяется следующими соотношениями:

$$R_{m\,Fe} \approx \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l_{Fe}}{A} \quad \text{и} \quad R_{m\delta} \approx \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{A}. \qquad (2.93)$$

- Величина **магнитной проводимости** A_L равна:

$$A_L = \frac{\mu_0 \cdot A}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta\right)}. \qquad (2.94)$$

- **Индуктивность** L магнитной цепи можно оценить по формуле:

$$L = N^2 \cdot A_L = N^2 \frac{\mu_0 \cdot A}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta\right)}. \quad (2.95)$$

- **Потокосцепление** ψ определяется как:

$$\psi = N \cdot \Phi = L \cdot I. \quad (2.96)$$

Примечание. В формуле для расчета индуктивности длина магнитного сердечника l_{Fe} делится только на μ_r. Поскольку типичные значения для μ_r обычно лежат в пределах 1000...10 000, можно утверждать, что индуктивность в основном зависит только от длины воздушного зазора.

Примечание. Часто на практике расширением поля в воздушном зазоре пренебрегать нельзя. Расширение может привести к значительному снижению индуктивности по сравнению со случаем равномерного распределения поля. Наиболее критичным это расширение становится в случаях, когда воздушный зазор выходит за пределы катушки (рис. 2.35а). По этой причине в большинстве дросселей воздушный зазор находится внутри обмотки (рис. 2.35б). На практике для электротехнических расчетов лучше воспользоваться значениями A_L, приведенными в документации на выбранный тип дроссельной катушки, чем пытаться самим определить ее, исходя из геометрии сердечника.

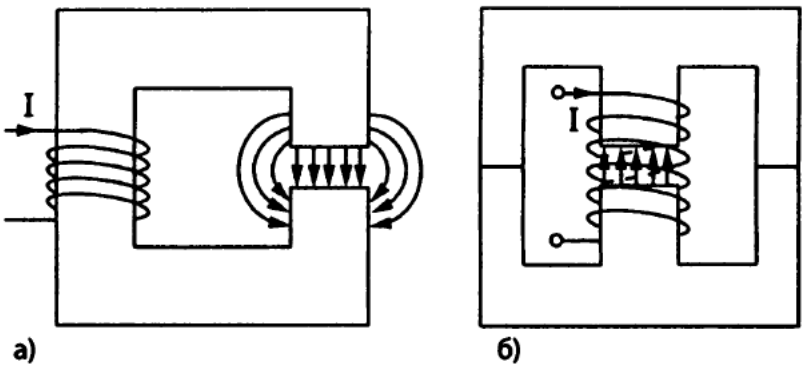


Рис. 2.35. Воздушный зазор находится за пределами обмотки, большое расширение поля (а); воздушный зазор внутри обмотки, незначительное расширение поля (б)

Пример. Следующие данные взяты из документации на дроссель: $A_L = 250$ нГн, минимальная площадь поперечного сечения сердечника: $A_{min} = 280$ мм^2, максимальная магнитная индукция $B_{max} = 0{,}3$ Тл. Необходимо найти максимальную индуктивность L данного дросселя при токе $I = 2$ А и требуемое количество витков обмотки.

Решение. Поскольку $L = N^2 \cdot A_L$, а $L \cdot I = N \cdot \Phi$, получаем:

$$N^2 \cdot A_L \cdot I = N \cdot \Phi.$$

Величина максимального потока равна:

$$\Phi_{max} = B_{max} \cdot A_{min}.$$

Исходя из этого, можно найти максимальное количество витков катушки:

$$N = \frac{\Phi_{max}}{A_L \cdot I} = \frac{B_{max} \cdot A_{min}}{A_L \cdot I} = 168.$$

При этом величина максимальной индуктивности будет равна:

$$L = N^2 \cdot A_L = 7 \text{ мГн}.$$

2.3.11. Магнитные цепи постоянного магнита

Как правило, постоянные магниты используются для создания в воздушном зазоре магнитного поля. Примеры такого применения постоянных магнитов: электрические двигатели, электрические измерители и громкоговорители. На рис. 2.36 показана схема, используемая для анализа магнитной цепи постоянного магнита. Здесь воздушный зазор магнита играет роль нагрузки, а магнитным сопротивлением материала можно пренебречь. Если к данной цепи применить закон Ампера, то получим следующее соотношение:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_м \cdot l_м + H_\delta \cdot \delta = 0,$$

из которого следует, что:

$$H_м = -H_\delta \cdot \frac{\delta}{l_м}. \qquad (2.97)$$

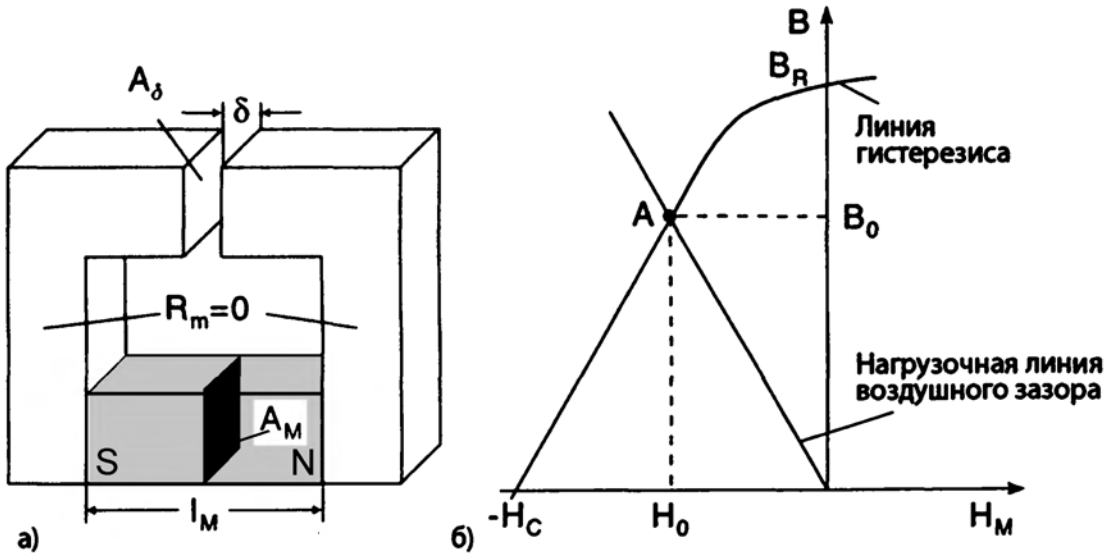


Рис. 2.36. Магнитная цепь постоянного магнита

- Здесь магнитодвижущая сила равна нулю! Поэтому падения магнитного напряжения на постоянном магните и на воздушном зазоре равны и противоположны друг другу.

Магнитный поток Ф формирует замкнутый контур. Поток Ф через постоянный магнит равен потоку в воздушном зазоре. Отсюда следует, что:

$$\Phi = \text{const} = B_{\text{м}} \cdot A_{\text{м}} = B_{\delta} \cdot A_{\delta}$$

и:

$$B_{\text{м}} = B_{\delta} \cdot \frac{A_{\delta}}{A_{\text{м}}}. \qquad (2.98)$$

Для воздушного зазора также справедливо, что:

$$B_L = \mu_0 \cdot H_{\delta}. \qquad (2.99)$$

Из уравнений (2.97)—(2.99) следует выражение для **нагрузочной линии** воздушного зазора:

$$B_{\text{м}}(H_{\text{м}}) = B_{\delta} \cdot \frac{A_{\delta}}{A_{\text{м}}} = H_{\delta} \cdot \mu_0 \frac{A_{\delta}}{A_{\text{м}}} = -H_{\text{м}} \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_{\delta}}{A_{\text{м}}} \cdot \frac{l_{\text{м}}}{\delta} \qquad (2.100)$$

или:

$$B_{\text{м}} = -H_{\text{м}} \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_{\delta}}{A_{\text{м}}} \cdot \frac{l_{\text{м}}}{\delta}. \qquad (2.101)$$

Последовательное соединение активного элемента (постоянного магнита) и пассивного элемента (воздушного зазора) ведет к перекрещиванию двух нагрузочных линий при их построении на графике. Точка пересечения двух линий называется **рабочей точкой** (H_0, B_0).

- Для постоянного магнита воздушный зазор является нагрузкой. Чем выше магнитное сопротивление воздушного зазора, тем меньше плотность магнитного потока в нем.
- При малых значениях магнитного сопротивления воздушного зазора рабочая точка находится на кривой гистерезиса магнитного материала в зоне остаточной индукции, при больших значениях сопротивления она перемещается в область действия коэрцитивных сил.

Исходя из положения рабочей точки, по уравнениям (2.97) и (2.98) можно определить величину магнитной индукции и напряженности магнитного поля:

$$B_{\delta} = B_0 \cdot \frac{A_{\text{м}}}{A_{\delta}} \quad \text{и} \quad H_{\delta} = -H_0 \cdot \frac{l_{\text{м}}}{\delta}. \qquad (2.102)$$

Примечание. Знак «минус» в выражении (2.102) указывает на то, что в постоянном магните магнитная индукция и напряженность магнитного поля имеют противоположные направления.

Расчет постоянного магнита

Требуется определить размеры постоянного магнита при известных геометрических параметрах воздушного зазора: A_{δ} и l_{δ}, если энергия в воздушном зазоре равна W_{δ}.

Постоянный магнит обладает наибольшей энергией в рабочей точке при максимальном значении произведения B_0 на H_0. В случае, когда гистерезисная кривая постоянного магнита имеет вид прямой линии, этот максимум

достигается в точке $B_0 = B_R/2$ и $H_0 = H_C/2$. Для выбранной рабочей точки (B_0, H_0) можно определить необходимый объем $V_м$ магнита:

$$W_\delta = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{H_\delta}_{B_0 \cdot \frac{A_м}{A_\delta}} \cdot \underbrace{B_\delta}_{H_0 \cdot \frac{l_м}{\delta}} = \frac{1}{2} B_0 H_0 V_м \quad \Rightarrow \quad V_м = \frac{2W_\delta}{B_0 H_0}.$$

Из уравнения (2.101) найдем отношение площади поперечного сечения магнита $A_м$ к его длине $l_м$:

$$\frac{A_м}{l_м} = \frac{H_0}{B_0} \cdot \mu_0 \frac{A_\delta}{\delta}.$$

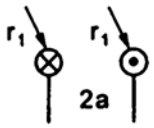
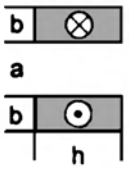
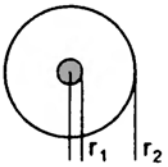
Теперь можно рассчитать размеры нашего магнита:

$$A_м = \frac{1}{B_0} \cdot \sqrt{2W_\delta \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_\delta}{\delta}} \quad \text{и} \quad l_м = \frac{1}{H_0} \cdot \sqrt{2W_\delta \cdot \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_\delta}}. \qquad (2.103)$$

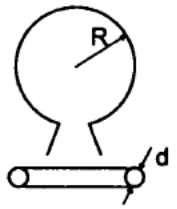
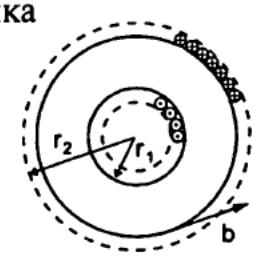
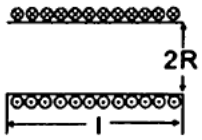
Примечание. Правильный выбор рабочей точки важен не только для увеличения энергии в воздушном зазоре и уменьшения объема магнита. Например, величина рабочего тока во многом определяет скорость размагничивания постоянного магнита в электрических двигателях.

2.3.12. Индуктивность различных геометрических конфигураций (обзор)

Таблица 2.4. Индуктивность различных геометрических конфигураций

Параллельные проводники с круглым сечением 	$L = \frac{\mu}{\pi} \cdot l \left(\ln \frac{2a}{r_1} + \frac{1}{4} \right)$
Параллельные прямоугольные проводники 	$L = \frac{2\mu}{\pi} \cdot l \cdot \ln \left(1 + \frac{b}{b+h} \right)$ при $\begin{cases} a \ll b \\ a \ll h \end{cases}$ $L = \frac{\mu}{\pi} \cdot l \frac{2b}{h+b}$ при $\begin{cases} a \ll b \\ a \ll h \\ b \ll h \end{cases}$
Коаксиальный проводник 	$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$ без внутреннего проводника и покрытия

Окончание таблицы 2.4

Тороид 	$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{R}{d/2} + \frac{1}{4}\right)$
Катушка вокруг тороидального сердечника 	$L = N^2 \cdot \mu_\tau \mu_0 \cdot \frac{b}{2\pi} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$
Соленоид 	$L = N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\pi R^2}{l}$

2.3.13. Электромагнитная индукция

2.3.13.1. Электромагнитная индукция в движущемся проводнике с током

Если проводник движется в магнитном поле, то на его концах индуцируется напряжение. Это явление получило название **электромагнитной индукции** (рис. 2.37). Появление ЭДС электромагнитной индукции в данном случае можно объяснить тем, что на каждый свободный заряд Q, перемещающийся вместе с проводником в магнитном поле, действует сила Лоренца. На рис. 2.37 эта сила обозначена как $\vec{F}_M$. Как видно из рисунка, силы Лоренца, действующие на положительные и отрицательные заряды, имеют противоположные направления. Очевидно, что именно эти силы заставляют разноименные заряды отталкиваться друг от друга. В то же самое время на положительные и отрицательные носители зарядов действуют силы Кулона $\vec{F}_E$, препятствующие их разделению. В стационарном состоянии эти силы уравновешивают друг друга, т. е.:

$$\vec{F}_M = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{F}_E = -Q \cdot \vec{E}.$$

Из этого выражения следует, что:

$$-(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{E}. \qquad (2.104)$$

- Напряженность электрического поля в движущемся проводнике с током равна векторному произведению скорости перемещения и магнитной индукции.

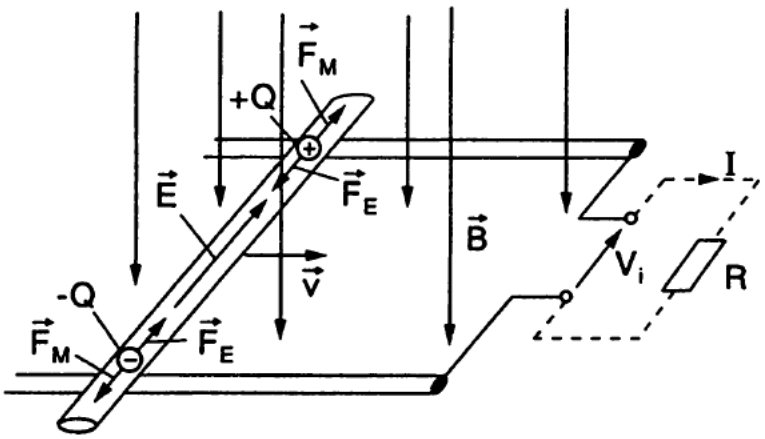


Рис. 2.37. Проводник, перемещающийся в магнитном поле

Возникающее в проводнике электрическое напряжение v_i равно линейному интегралу от напряженности электрического поля, взятому вдоль всей длины l движущегося проводника:

$$v_i = \int_l \vec{E} d\vec{l} = \int_l -(\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}. \qquad (2.105)$$

Если проводник прямой, а векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{s}$ перпендикулярны друг другу, то уравнение (2.105) значительно упрощается:

$$v_i = l \cdot v \cdot B. \qquad (2.106)$$

Если к концам проводника подсоединить резистор R, то можно пронаблюдать процесс выравнивания зарядов, заключающийся в протекании по цепи тока I в показанном на рис. 2.37 направлении. Полученный замкнутый контур с движущимся проводником представляет собой генератор.

2.3.13.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Вокруг переменного магнитного поля вследствие изменения магнитного потока всегда возникает электрическое поле.

- Линейный интеграл от напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура численно равен и противоположен по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром (рис. 2.38а):

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} dA. \qquad (2.107)$$

Выражение (2.107) можно также записать в виде:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \qquad (2.108)$$

Если проводящую рамку поместить в переменное магнитное поле, то вследствие изменения магнитного потока, проходящего сквозь рамку, в ней будет наводиться ЭДС, величина которой равна напряжению на ее концах v_i (рис. 2.38б):

$$v_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2.109)$$

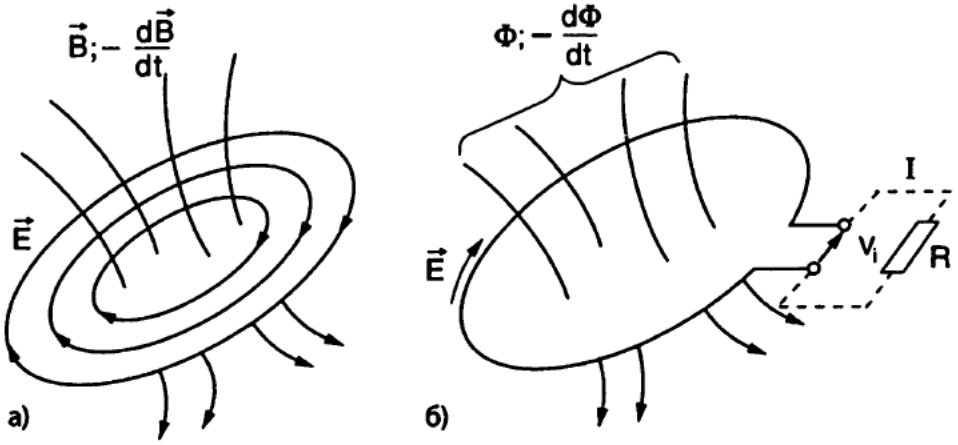


Рис. 2.38. Закон электромагнитной индукции Фарадея

- Индуцированное напряжение на концах проводящей рамки пропорционально скорости изменения магнитного потока, проходящего через нее.
- При уменьшении магнитного потока, т. е. при отрицательной скорости его изменения, индуцированное напряжение будет иметь направление, показанное на рис. 2.38б. При усилении магнитного поля знак индуцированной ЭДС изменится на противоположный.

При подключении к выводам рамки резистора R через образованный замкнутый контур потечет ток I, направление которого показано на рис. 2.38б.

Правило Ленца. Ток, возникающий в замкнутом контуре в результате электромагнитной индукции, имеет всегда такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, уменьшает те изменения магнитного потока, которые вызвали его появление.

Примечание. Правило Ленца полезно при определении направления индуцированного напряжения. Ток, протекающий при этом в нагрузочной цепи, приводит к появлению магнитного поля, направление вектора индукции которого противоположно вектору индукции исходного поля. Исходя из этого, направление индукционного тока может быть определено по правилу правой руки. А зная направление тока, всегда можно определить напряжение на сопротивлении нагрузки и его полярность.

- При использовании замкнутой рамки, изготовленной из идеального проводника, в ней индуцируется ток, величина которого достаточна для компенсации любых изменений магнитного потока, проходящего сквозь нее.

Если поток Ф охватывает проводник с током N раз, то величина индуцированного напряжения увеличивается во столько же раз (рис. 2.38б):

$$v_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2.110)$$

Закон Фарадея остается справедливым при использовании вместо рамки **катушки,** состоящей из N витков идеального проводника. Подача на катушку напряжения приведет к изменению магнитного потока, проходящего сквозь нее:

$$N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = v(t). \qquad (2.111)$$

Из выражений (2.110) и (2.111) видно, что v_i и v имеют противоположные знаки, поскольку v_i вырабатывает энергию, а v приводит к ее потреблению. Поток Ф равен интегралу от напряжения, взятому за определенный интервал времени:

$$N \cdot \Phi(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)dt + \Phi(0). \qquad (2.112)$$

- Величина магнитного потока в рамке или катушке индуктивности зависит *только* от интеграла от приложенного напряжения в заданном временном интервале $\int v\,dt$.

Пример: применение закона Фарадея к двум катушкам, намотанным на один сердечник, т. е. связанным одним и тем же магнитным потоком (рис. 2.39).

В момент времени t_0 на первую катушку подано напряжение V_0. В момент времени t_1 замыкается ключ B, а в момент t_2 размыкается ключ A. На рис. 2.39а показана рассматриваемая система, а на рис. 2.39б приведены временные диаграммы изменения соответствующих напряжений, токов и магнитного потока. Для проведения расчетов использовалась эквивалентная схема, изображенная на рис. 2.39в.

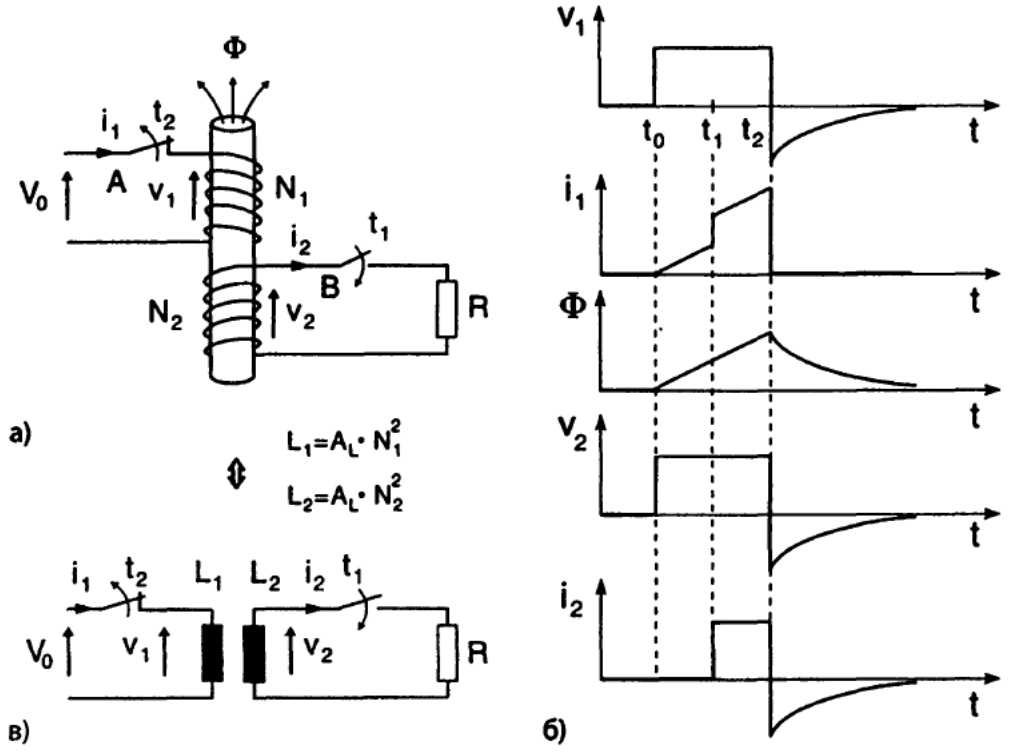


Рис. 2.39. Напряжения, токи и магнитный поток в двух катушках, намотанных на один сердечник

Решение

$t_0 < t < t_1$ v_1 определяется V_0	$t_1 < t < t_2$ v_1 определяется V_0	$t > t_2$ Поскольку поток Ф непрерывен, $i_{2(t_2)} = -\frac{N_2 \cdot \Phi(t_2)}{L_2}$
$v_1 = V_0$	$v_1 = V_0$	$i_2 = i_{2(t_2)} e^{-\frac{t}{L_2/R}}$
$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t_1} v_1\,dt$	$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_1}^{t_2} v_1\,dt + i_{1(t_1)} + \frac{V_2}{R}\frac{N_2}{N_1}$	$v_2 = i_2 \cdot R$
$\Phi = \frac{1}{N_1}\int_{t_0}^{t_1} v_1\,dt$	$\Phi = \frac{1}{N_1}\int_{t_1}^{t_2} v_1\,dt + \Phi_{(t_1)}$	$\Phi = \frac{1}{N_2}\int_{t_2}^{t} v_2\,dt + \Phi_{(t_2)}$
$v_2 = -N_2\frac{d\Phi}{dt} = v_1\frac{N_2}{N_1}$	$v_2 = -N_2\frac{d\Phi}{dt} = v_1\frac{N_2}{N_1}$	$i_1 = 0$
$i_2 = 0$	$i_2 = \frac{V_2}{R}$	$v_1 = v_2\frac{N_1}{N_2}$

Определение индуцируемого напряжения

Изменение магнитного потока сквозь проводящую рамку может происходить либо из-за переменной плотности магнитного потока, либо из-за изменения площади этой рамки:

$$v_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}\times\vec{A}) = -\left(\vec{B}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{A}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right). \qquad (2.113)$$

Индуцируемое напряжение, появление которого вызвано перемещением проводника (рис. 2.37), также может быть описано при помощи уравнения (2.113), поскольку при этом происходит уменьшение площади проводящего контура:

$$-\vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt} = \int_l \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\times\vec{B}\right)d\vec{l}.$$

В данном случае закон Фарадея можно записать в виде:

$$v_i = -\left[\int_l (\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l} + \vec{A}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]. \qquad (2.114)$$

Пример. Катушка с числом витков $N = 200$ вращается с угловой скоростью $\omega = 314$ с$^{-1}$ (радиан в секунду) в однородном магнитном поле с плотностью магнитного потока $B = 50$ мТл. Размеры каждого витка составляют 10×10 см (рис. 2.40а). Требуется определить напряжение на выводах катушки.

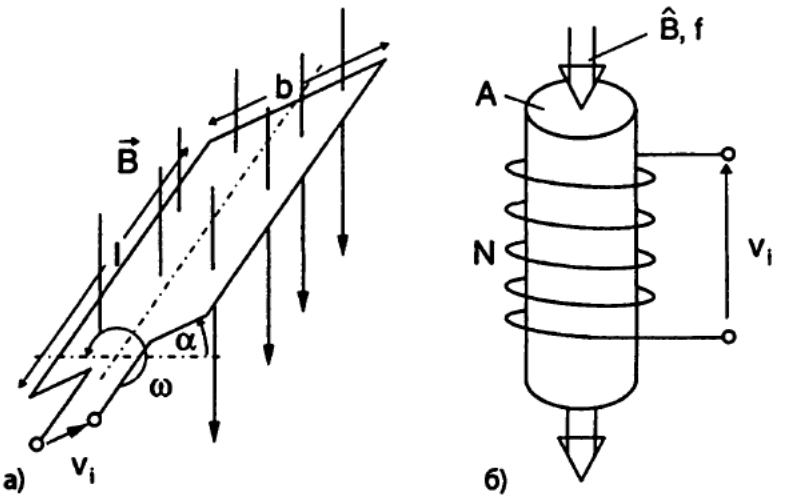


Рис. 2.40. Вращение проводящей рамки в однородном магнитном поле (а); изменение потока внутри катушки (б)

Решение

а) Применение уравнения (2.113):

$$v_i = -N \cdot \left(\vec{B}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \underbrace{\vec{A}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} \right) = -N \cdot B \cdot \frac{d\left(A\cos\omega t\right)}{dt} =$$

$$= -\underbrace{N \cdot B \cdot A \cdot \omega}_{31{,}4\ \text{В}} \cdot \underbrace{\sin\omega t}_{50\ \text{Гц}} = -31{,}4\ \text{В} \cdot \sin\omega t.$$

б) Применение уравнения (2.114):

$$v_i = -N \cdot \left(\int_l (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} + \underbrace{\vec{A}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} \right) =$$

$$= -N \cdot \underbrace{\omega \cdot \frac{b}{2}}_{v} \cdot B \cdot \sin(\omega t) \cdot 2 \cdot l = -31{,}4\ \text{В} \cdot \sin\omega t.$$

Направление индуцируемого напряжения в подвижном проводнике (рис. 2.40) проще всего определить по уравнению (2.104): $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$. Поскольку $\vec{v} \times \vec{B}$ является векторным произведением, направление вектора E, а следовательно, и v_i может быть определено по правилу буравчика.

Пример. Катушка из $N = 5$ витков перемещается в магнитном поле с плотностью потока $B = 1{,}5$ Тл и частотой $f = 50$ Гц. Площадь поперечного сечения катушки равна 200 мм² (рис. 2.40б). Требуется найти пиковое значение напряжения v_i.

$$v_i = -N \cdot \left(\underbrace{\vec{B}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{=0} + \vec{A}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -N \cdot A \cdot \frac{d(\hat{B}\sin\omega t)}{dt} =$$

$$= -N \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \omega\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_i = 0{,}47\ \text{В}.$$

2.2.13.3. Самоиндукция

Протекание тока I через проводящую рамку приводит к возникновению магнитного потока Ф сквозь поверхность, ограниченную ею. При отключении тока одновременно пропадает и магнитное поле. В момент исчезновения тока наблюдается высокая скорость изменения магнитного потока. Изменение потока приводит к возникновению напряжения на концах проводника. Этот процесс появления ЭДС индукции в результате изменения тока в цепи называется явлением **самоиндукции.**

- По закону Ленца возникающее в результате самоиндукции напряжение противоположно порождающему его изменению напряжения.

Поскольку $v_i = -N\frac{d\Phi}{dt}$, а $L \cdot I = N \cdot \Phi$, получаем следующее соотношение:

$$v_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \qquad (2.115)$$

По этому уравнению можно определить величину индуцированного напряжения. В момент выключения тока скорость его изменения имеет отрицательное значение. Коэффициентом пропорциональности между скоростью изменения тока и индуцированной ЭДС является индуктивность цепи (рис. 2.41а).

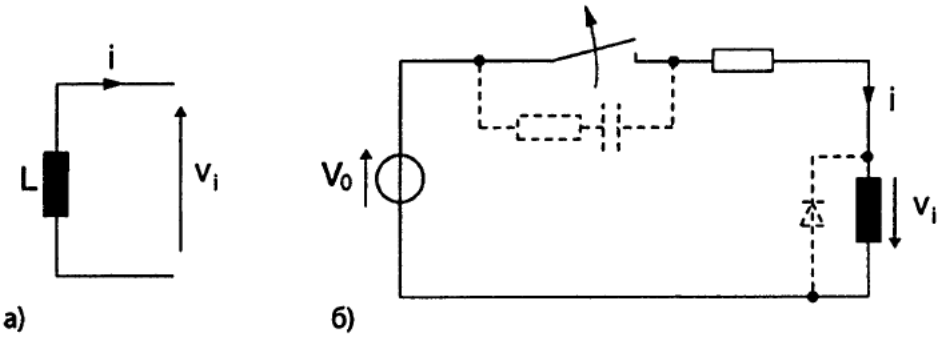


Рис. 2.41. Напряжение, индуцируемое на индуктивном элементе:
а) полярность индуцированного напряжения;
б) способы защиты элементов цепи от перенапряжения

Примечание. Отключение тока в цепи с индуктивными элементами иногда приводит к появлению больших скачков напряжения, вызванных эффектом самоиндукции. Например, в схеме, показанной на рис. 2.41б, в момент выключения тока все индуцируемое напряжение оказывается приложенным к ключу, что может привести к появлению электрической дуги и выходу переключателя из строя. Если провести энергетический анализ схемы, то станут ясны причины разрушения ключа: при размыкании ключа вся энергия, запасенная в магнитном поле индуктивного элемента, направляется к ключу, где превращается в тепло, что вызывает его перегрев и выход из строя. Для защиты ключа от скачков перенапряжения ставятся: либо дугогасящая *RC*-цепочка параллельно переключателю, либо диод параллельно индуктивному элементу.

2.3.14. Взаимная индукция

Явление **взаимной индукции** заключается в наведении ЭДС индукции во всех проводниках, находящихся вблизи других проводников, токи в которых меняются с течением времени. Когда магнитный поток или его часть одной катушки проходит через другую катушку, между ними устанавливается **магнитная связь**. На рис. 2.42 часть Φ_{21} потока Φ_1 от первой катушки проходит через вторую катушку. Возникшую магнитную связь можно описать следующим выражением:

$$\Phi_{21} = k_1 \cdot \Phi_1, \tag{2.116}$$

где k — **коэффициент связи**.

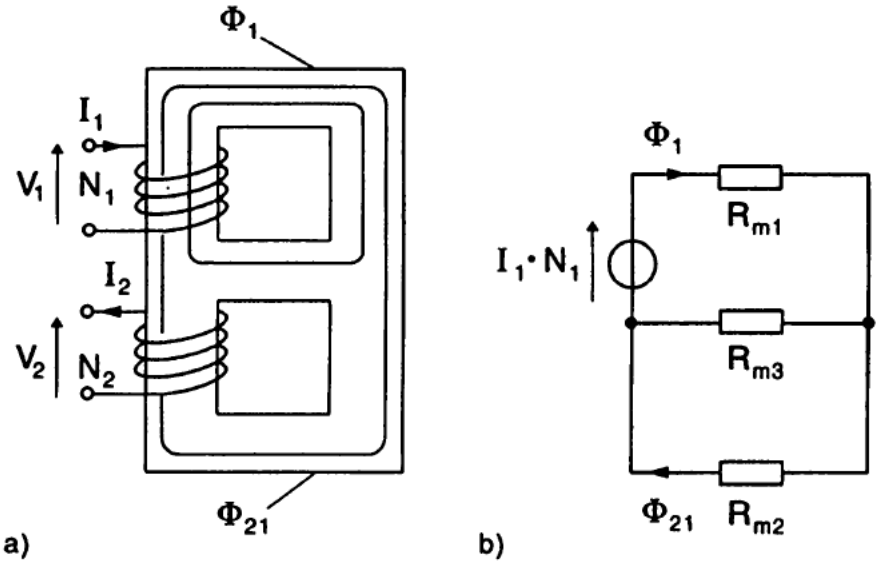


Рис. 2.42. Катушки, объединенные магнитной связью:
а) геометрическая конфигурация системы;
б) эквивалентная схема

Соответственно, и часть потока второй катушки Φ_{12} также пройдет сквозь первую катушку:

$$\Phi_{12} = k_2 \cdot \Phi_2. \tag{2.117}$$

Коэффициенты связи определяются:

- либо расчетным путем, исходя из геометрических параметров магнитной цепи в соответствии с ее эквивалентной схемой (рис. 2.42б):

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} = k_1 = \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}},$$

- либо экспериментальным методом. Для этого на катушку N_1 подается переменное напряжение V_1' и измеряется напряжение V_2', или на катушку N_2 подается переменное напряжение V_2'' и измеряется напряжение V_1''.

Поскольку $V_2 = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{k_1 d\Phi_1}{dt}$, а $V_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$, коэффициенты k_1 и k_2 могут быть найдены при помощи выражений:

$$k_1 = \frac{V_2'}{V_1'} \cdot \frac{N_1}{N_2} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{V_1''}{V_2''} \cdot \frac{N_2}{N_1}.$$

- Максимальное значение коэффициентов связи равно единице. Чем меньше величина коэффициентов связи, тем слабее взаимная индукция.

Взаимная индуктивность

Потоки Φ_{21} и Φ_{12} пропорциональны соответственно токам I_1 и I_2. Коэффициенты пропорциональности M_{12} и M_{21} называются взаимной индуктивностью двух катушек, и их можно выразить в виде:

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2} \quad \text{и} \quad M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}.$$

Для изотропных магнитных материалов справедливо следующее соотношение:

$$M_{21} = M_{12} = M.$$

Взаимную индуктивность M можно вычислить при помощи выражения, зная коэффициенты связи k_1 и k_2 и индуктивности катушек L_1 и L_2:

$$M = \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 \cdot L_2} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}\ , \tag{2.118}$$

где k — **коэффициент полной связи**, $k = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$.

Знание взаимной индуктивности требуется при расчете электрических цепей по правилам Кирхгофа. Для системы из двух магнитно связанных катушек, показанных на рис. 2.42, справедливы следующие соотношения:

$$v_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot R_1 - M \frac{di_2}{dt},$$

$$v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - i_2 \cdot R_2 + M \frac{di_1}{dt}. \tag{2.119}$$

При синусоидальных токах и напряжениях систему уравнений (2.119) можно записать в комплексном виде:

$$v_1 = +i_1 \cdot (j\omega L_1 + R_1) - i_2 \cdot j\omega M,$$

$$v_2 = -i_2 \cdot (j\omega L_2 + R_2) + i_1 \cdot j\omega M. \tag{2.120}$$

2.3.15. Принцип действия трансформатора

Принцип действия трансформатора основан на явлении взаимной индукции. **Трансформатор** состоит из двух катушек, намотанных на один сердечник. Коэффициент полной связи между обмотками трансформатора k приблизительно равен единице. Как показано на рис. 2.43а, входное напряжение V_1 подается на первичную обмотку трансформатора. Это приводит к появлению в ней переменного магнитного поля. Скорость изменения магнитного потока в первой катушке описывается выражением $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1}$. Магнитный поток Ф, проходя через сердечник трансформатора, обеспечивает индуктивную связь между катушками, в результате чего во вторичной обмотке индуцируется напряжение: $V_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$.

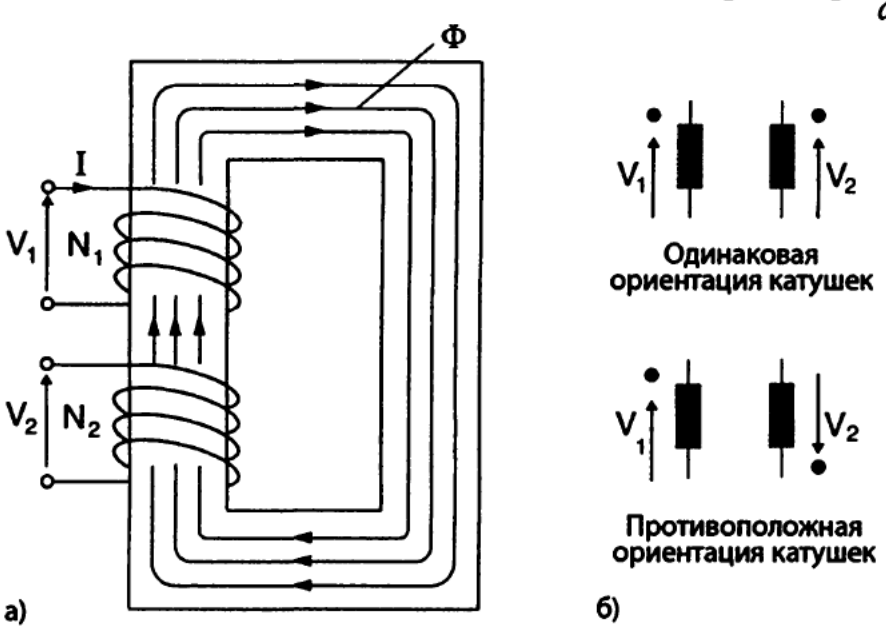


Рис. 2.43. Принцип действия трансформатора:
а) магнитная связь между обмотками;
б) представление ориентации обмоток на схеме

При таком включении катушек, как показано на рис. 2.43а, напряжение во вторичной обмотке определяется следующим выражением:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}. \qquad (2.121)$$

- Напряжение во вторичной обмотке зависит только от напряжения, поданного в первичную обмотку, и соотношения витков двух катушек.
- Напряжения в трансформаторе всегда пропорциональны количеству витков в обмотках.

На рис. 2.43б отображено, как на схемах показываются варианты включения обмоток трансформатора. Направление тока в обмотках указывается точками. Когда направления токов в обмотках по отношению к магнитному потоку совпадают, точки изображаются на одинаковых выводах катушек индуктивности. При разных направлениях токов точки ставятся на противоположных выводах.

2.3.16. Энергия магнитного поля

Также как и электростатическое поле, магнитное поле обладает определенной энергией, накапливающейся в индуктивных элементах. Энергия, запасенная в контуре с индуктивностью L, равна:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot I \cdot \Phi. \qquad (2.122)$$

Это уравнение можно выразить через основные характеристики магнитного поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$:

$$W = \frac{1}{2} \oint_s \vec{H} d\vec{s} \cdot \int_A \vec{B} d\vec{A} = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad \text{при} \quad \vec{e}_s \| \vec{e}_A. \qquad (2.123)$$

Единичный вектор $\vec{e}_s$ совпадает по направлению с единичным вектором нормали к поверхности $\vec{e}_A$, поэтому интеграл $\int dsdA$ является элементом объема dV. Объемная **плотность энергии** магнитного поля определяется как:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \vec{H} \cdot \vec{B}. \qquad (2.124)$$

2.3.16.1. Энергия магнитной цепи с воздушным зазором

На рис. 2.44 показана магнитная цепь с воздушным зазором. Магнитные цепи, способные запасать энергию, часто называются **дроссельными катушками** или **дросселями**. Количество энергии, хранящейся в дросселе:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2. \qquad (2.125)$$

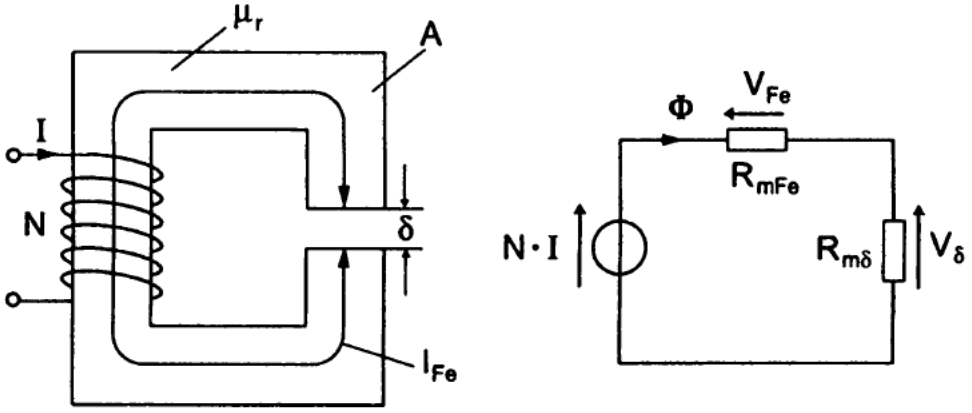


Рис. 2.44. Магнитная цепь с воздушным зазором

Энергия магнитного поля запасается как в сердечнике дросселя, так и в воздушном зазоре:

$$W = W_{Fe} + W_\delta = \frac{1}{2} B_{Fe} \cdot H_{Fe} \cdot V_{Fe} + \frac{1}{2} B_\delta \cdot H_\delta \cdot V_\delta. \qquad (2.126)$$

При одинаковой площади поперечного сечения вдоль всего магнитного пути, т. е. при $B_{Fe} = B_\delta$, напряженность магнитного поля в воздушном зазоре всегда выше, чем в сердечнике, в μ_r раз. Поскольку значения относительной магнитной

проницаемости обычно лежат в диапазоне 1000...10000, можно с высокой степенью точности утверждать, что магнитная энергия преимущественно сосредоточена в воздушном зазоре. Сердечник же в основном служит для концентрации магнитного потока, что необходимо для создания высокой напряженности поля в воздушном зазоре. При помощи рассматриваемой конструкции дросселя можно получить сильное магнитное поле в очень ограниченном пространстве.

- Энергия магнитного поля дросселя преимущественно сосредоточена в воздушном зазоре.
- Дроссели всегда имеют воздушный зазор.

Примечание. В некоторых современных дросселях нет настоящих воздушных зазоров. В них используются порошковые сердечники из карбонильного железа, в которых роль воздушного зазора выполняют поры между частицами непрочно связанного материала.

- Для хранения значительного количества магнитной энергии требуется большой воздушный зазор.

Проведем оценку выражения (2.123):

$$W = \frac{1}{2}\underbrace{\oint_s \vec{H}\,d\vec{s}}_{V_{Fe}+V_\delta} \cdot \underbrace{\int_A \vec{B}\,d\vec{A}}_{\Phi} = \frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{V_{Fe}}_{\Phi\cdot R_{mFe}} + \underbrace{V_L}_{\Phi\, R_{fm}}\right)\cdot\Phi.$$

Из последнего выражения следует, что:

- Деление магнитной энергии происходит пропорционально магнитному сопротивлению цепи.

2.3.17. Силы, действующие в магнитном поле

Для любых сил, действующих в магнитном поле, справедливо, что:

- Они всегда стремятся сократить траекторию силовых линий (рис. 2.45).

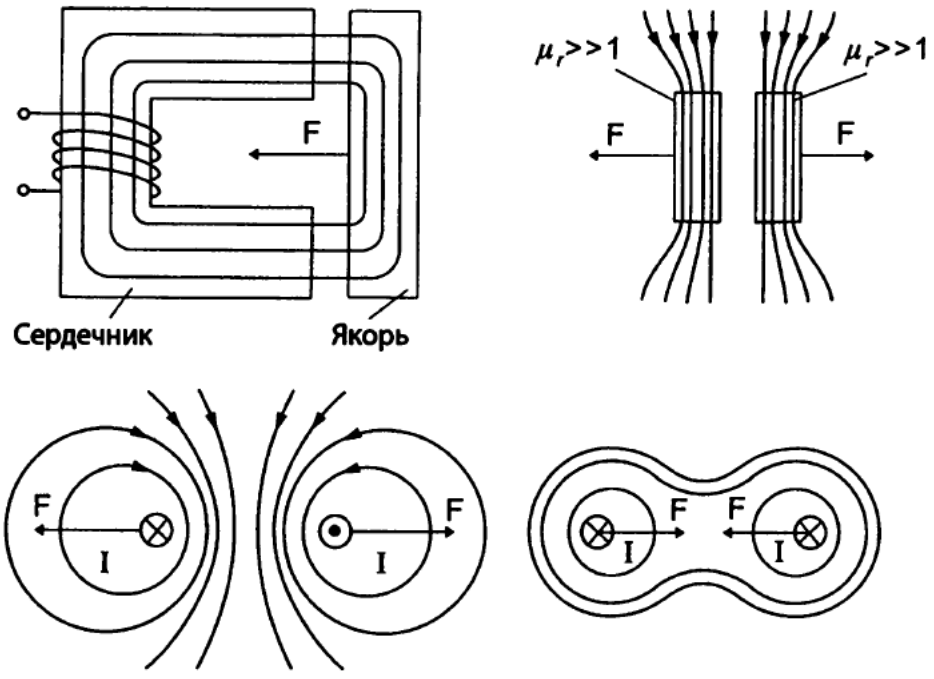


Рис. 2.45. Силы, действующие в магнитном поле

2.3.17.1. Сила, действующая в магнитном поле на проводник с током

См. также раздел 2.3.2. Сила, действующая на прямой проводник с током в однородном магнитном поле, определяется выражением:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}). \qquad (2.127)$$

Вектор $\vec{l}$ совпадает по направлению с током I (рис. 2.46).

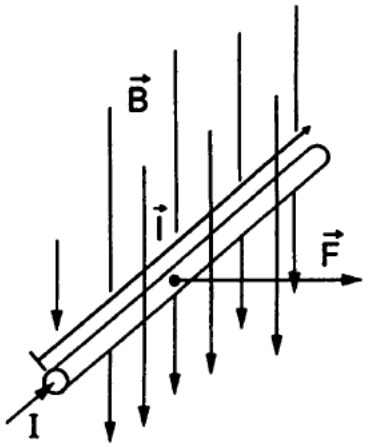


Рис. 2.46. Сила, действующая в магнитном поле на проводник с током

2.3.17.2. Сила, действующая на границе раздела разных сред

На границе между двумя материалами с разной магнитной проницаемостью, объединенными магнитной связью, действует сила, которую можно вычислить, используя закон сохранения энергии. Предполагается, что граница раздела смещается на бесконечно малое расстояние, и при этом условии определяется результирующее изменение потенциальной энергии. Из закона энергетического баланса между механической, электрической энергией и энергией магнитного поля следует, что сумма изменений всех видов энергий должна равняться нулю, т. е.:

$$dW_{\text{механ}} + dW_{\text{поля}} + dW_{\text{электр}} = 0. \qquad (2.128)$$

Для проведения оценки энергетического баланса необходимо знать знаки изменений всех типов энергии, т. е. сначала надо определить, какая энергия увеличивается, а какая уменьшается. Для примера рассмотрим схему реле, показанную в верхнем левом углу рис. 2.45. Представим, что в какой-то момент времени к катушке подключается источник постоянного тока I_0. При этом появится сила, действующая на якорь реле, стремящаяся притянуть его к сердечнику. Одновременно к якорю приложена противодействующая механическая сила, старающаяся оставить его на месте. При движении якоря к сердечнику происходит уменьшение индуктивности реле (уменьшение магнитной проводимости), а следовательно, и снижение энергии магнитного поля $\frac{1}{2}LI^2$. Соответственно, электрическая энергия источника тока

уравновешивается изменениями механической энергии и энергии магнитного поля. Поскольку $N \cdot \Phi = \int dt$ и $L \cdot I = N \cdot \Phi$, уравнение энергетического баланса принимает вид:

$$\underbrace{F\,ds}_{dW_{\text{механ}}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2}LI_0^2\right)}_{dW_{\text{поля}}} = \underbrace{d(I_0 \cdot \underbrace{V \cdot t}_{N\cdot\Phi})}_{dW_{\text{электр}}} = d(I_0 \cdot \underbrace{N \cdot \Phi}_{L\cdot I_0}) = d(L \cdot I_0^2).$$

Из него следует, что:

$$F = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{dL}{ds}. \tag{2.129}$$

- Сила, действующая на границе двух материалов в магнитной цепи, пропорциональна изменению индуктивности при сдвиге этой границы на некоторое бесконечно малое расстояние.
- Эта сила направлена в сторону увеличения индуктивности.

2.3.18. Характеристики магнитного поля (обзор)

- Плотность магнитного потока $\vec{B}$ и напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в изотропных материалах имеют одинаковое направление:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}. \tag{2.130}$$

- Силовые линии магнитного потока всегда замкнуты.
- На границе раздела двух сред с разной магнитной проницаемостью μ нормальная составляющая плотности потока остается той же самой, а нормальная составляющая напряженности магнитного поля изменяется (при уменьшении μ она увеличивается).
- Магнитное поле является полем соленоидального типа. Поверхностный интеграл от плотности магнитного потока, взятый по всей площади замкнутой поверхности, всегда равен нулю:

$$\oint_A \vec{B}\,d\vec{A} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{2.131}$$

- Величина магнитного потока напрямую связана с интегралом от приложенного напряжения, взятым за определенный интервал времени:

$$N \cdot \Phi = \int_0^{t_1} v\,dt + \Phi(0). \tag{2.132}$$

- Напряженность магнитного поля напрямую связана с электрическим током. Закон Ампера для магнитной цепи выглядит следующим образом:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = i \cdot N. \tag{2.133}$$

- Полная форма закона Ампера является первым уравнением Максвелла. Его можно записать в виде:

$$\oint_s \vec{H}\,d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}\right) d\vec{A} \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \tag{2.134}$$

- Изменяющийся во времени магнитный поток индуцирует напряжение в проводящем контуре, сквозь поверхность которого он проходит. Если поток проходит сквозь контур N раз, то индуцируемое напряжение увеличивается в такое же количество раз:

$$v_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \tag{2.135}$$

- Электрический ток связан с магнитным потоком следующим соотношением:

$$L \cdot I = N \cdot \Phi. \tag{2.136}$$

- Энергия магнитного поля равна:

$$W = \int_V \vec{B} \cdot \vec{H}\, dV. \tag{2.137}$$

2.3.19. Взаимосвязь характеристик магнитного поля

Формулы магнитной цепи

$$\Phi \quad \Leftarrow \quad \Phi = \int_A \vec{B}\, d\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}$$

$$I \cdot N = \Updownarrow R_m \cdot \Phi \qquad\qquad \vec{B} = \Updownarrow \mu \cdot \vec{H}$$

$$I \cdot N \quad \Leftarrow \quad I \cdot N = \oint_s \vec{H}\, d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}$$

Закон Фарадея

$$v_i(t) = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad \Phi(t_1) = \frac{1}{N}\int_0^{t_1} v(t)dt + \Phi(0). \tag{2.138}$$

2.4. Уравнения Максвелла

Многочисленные физические явления, описанные в разделах, посвященных электростатическим полям, стационарным полям, созданным проводниками с постоянным током, и магнитным полям, можно выразить при помощи четырех уравнений, называемых полной системой уравнений Максвелла.

Первое уравнение Максвелла (закон Ампера)

$$\oint_s \vec{H}\, d\vec{s} = \int_A (\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}) d\vec{A} \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \tag{2.139}$$

Магнитное поле создается упорядоченно движущимися зарядами, т. е. электрическим током. Из первого уравнения Максвелла следует, что

циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру S равна сумме токов (полному току), охватываемых этим контуром (рис. 2.47). Результат интегрирования не зависит от того, являются ли токи, токами проводимости или токами смещения, вызванными переменными электрическими полями (например, токи смещения возникают между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки).

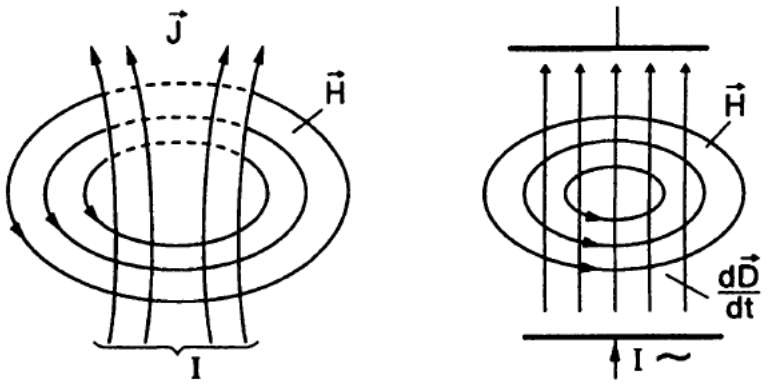


Рис. 2.47. Иллюстрация к первому уравнению Максвелла

Второе уравнение Максвелла (закон Фарадея)

$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\,d\vec{A} \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \tag{2.140}$$

Переменное магнитное поле в любой точке пространства создает вихревое электрическое поле. Согласно второму уравнению Максвелла, циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру S равна изменению потока магнитной индукции, заключенного в данный контур, взятого с отрицательным знаком (рис. 2.48).

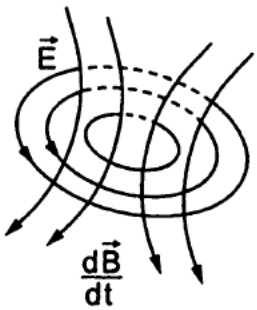


Рис. 2.48. Иллюстрация ко второму уравнению Максвелла

Третье уравнение Максвелла
(закон Остроградского – Гаусса для магнитного поля)

$$\oint_A \vec{B}\,d\vec{A} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{B} = 0. \tag{2.141}$$

Поток магнитной индукции $\vec{B}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность A всегда равен нулю.

Четвертое уравнение Максвелла
(закон Остроградского – Гаусса для электрического поля)

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{D} = \rho, \tag{2.142}$$

где ρ — объемная плотность свободных зарядов. Поток электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность, охватывающую свободный заряд $q = \int_V \rho dV$, равен величине этого заряда.

2.5. Обозначения

a	Ускорение, м/с^2
A	Площадь, м^2
A_L	Магнитная проводимость полной магнитной цепи, Гн = В·с/А (обычно задается в мГн)
$A_\perp$	Элемент площади эквипотенциальной поверхности, м^2
$\vec{A}$	Вектор площади, перпендикулярный поверхности, м^2
$\vec{B}$	Плотность магнитного потока или вектор магнитной индукции, Тл = В·с/м^2
B_R	Остаточная магнитная индукция (намагниченность), Тл = В·с/м^2
C	Емкость, Ф = А·с/В
$\vec{D}$	Электрическое смещение, А·с/м^2
d	Расстояние, м
e	Элементарный заряд, $e = \pm 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ А·с
$\vec{e}$	Единичный вектор (нижний индекс указывает на соответствующую величину, например $\vec{e}_r = \vec{r} / \lvert\vec{r}\rvert$)
$\vec{E}$	Напряженность электрического поля, В/м
f	Частота, Гц
F	Сила, Н
G	Проводимость, См = А/В
G_m	Магнитная проводимость, Гн = В·с/А
$\vec{H}$	Напряженность магнитного поля, А/м
H_C	Коэрцитивная сила, А/м
i	Переменный ток, А
I	Постоянный ток, А
$\vec{J}$	Плотность тока, А/м^2
k	Коэффициент связи

l	Длина, м
L	Индуктивность, Гн = В·с/А
m	Масса, кг
M	Взаимная индуктивность, Гн = В·с/А
M	Момент силы, Н·м
M	В индексах указывает на магнит
N	Число витков
N	Магнитный северный полюс
P	Мощность, Вт = В·А
Q	Заряд, Кл = А·с
r, R	Радиус, расстояние в полярных координатах, м
R	Сопротивление, Ом = В/А
R_m	Магнитное сопротивление, 1/Гн = А/В·с
s	Путь, м
S	Магнитный южный полюс
t	Время, с
T	Период, с
υ	Переменное напряжение, В
V	Напряжение, В
V_i	Индуцированное напряжение, В
υ	Скорость, м/с
V	Объем, м^3
V	Магнитное напряжение, А
W	Энергия, Вт·с = В·А·с
δ	Длина воздушного зазора, м
δ	В индексах указывает на воздушный зазор
ε	Диэлектрическая проницаемость, А·с/В·м
ε_0	Электрическая постоянная, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$, А·с/В·м
ε_r	Относительная диэлектрическая проницаемость
θ	Температура, К, °С
η	Концентрация носителей зарядов, А·с/м^3
σ	Удельная электрическая проводимость, См/м
λ	Линейная плотность зарядов, А·с/м
μ	Магнитная проницаемость, В·с/А·м
μ_0	Магнитная постоянная, равная $1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/А·м
μ_r	Относительная магнитная проницаемость, В·с/А·м
ρ	Объемная плотность зарядов, А·с/м^3

ρ	Удельное сопротивление, Ом·м, Ом·мм^2/м
σ	Поверхностный заряд, А·с/м^2
φ	Потенциал, В
Φ	Магнитный поток, Вб = В·с
ψ	Потокосцепление, В·с
ω	Угловая скорость или частота, с$^{-1}$
Θ	Магнитодвижущая сила (МДС)

Литература

Duffin W. J. *Electricity and Magnetism*. 4th ed. — : McGraw-Hill, 1990.
Floyd T. L. *Electric Circuits Fundamentals*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2001.
Floyd T. L. *Electronics Fundamentals: Circuits, Devices, and Applications*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2000.
Floyd T. L. *Electronic Devices*. 5th ed. — : Prentice Hall, 1998.
Giancoli D. C. *Physics for Scientists and Engineers*. Vol. 1. 3rd ed. — : Prentice Hall, 2000.
Grob B. *Basic Electronics*. 8th ed. — : McGraw-Hill, 1996.
Muncaster R. *A-Level Physics*. — : Stanley Thornes Ltd., 1997.
Nelkon M., Parker, P. *Advanced Level Physics*. — : Heinemann, 1995.
Rao N. N. *Elements of Engineering Electromagnetics*. 5th ed. — : Prentice Hall, 1999.
Someda C. G. *Elecromagnetic Waves*. — : Chapman-Hall, 1997.

ГЛАВА 3

ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Для описания переменных физических величин используются тригонометрические функции, комплексные числа и комплексные функции. Для облегчения понимания материала иногда применяется графическое представление физических величин через соответствующие векторы. В следующем разделе приводятся основные математические соотношения, необходимые для этого.

3.1. Математические основы описания цепей переменного тока

3.1.1. Тригонометрические функции

Для описания цепей переменного тока чаще всего используются функции синуса и косинуса. Функция синуса имеет следующий вид:

$$v = \hat{v}\sin\varphi\,,$$

где $\hat{v}$ — это **пиковое значение** или **амплитуда**. **Фаза** φ часто меняется с течением времени:

$$v(t) = \hat{v}\sin(\omega t + \varphi_0)\,.$$

Величина $v(t)$ называется **мгновенным** или **фактическим значением** функции, ω — **угловой частотой**, а φ_0 — **фазовым сдвигом**. Синус является периодической функцией с периодом, равным 2π (рис. 3.1).

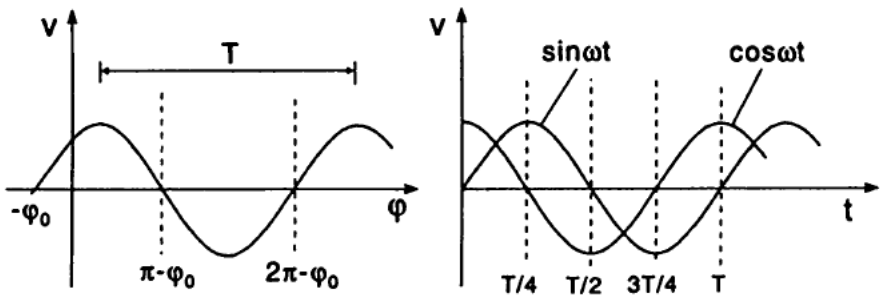


Рис. 3.1. Периодическая функция: ее период и фазовый сдвиг; функции синуса и косинуса

Периодом T называется интервал времени между двумя идентичными значениями функции. **Частота** f функции синуса является величиной, обратной периоду:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f. \tag{3.1}$$

Функция косинуса аналогична функции синуса. Ее можно записать как:

$$\upsilon = \hat{\upsilon}\cos\varphi.$$

Функции синуса и косинуса связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin\varphi = \cos(\pi/2 - \varphi), \tag{3.2}$$

$$\cos\varphi = \sin(\pi/2 + \varphi). \tag{3.3}$$

Функции синуса и косинуса совместно с экспоненциальными функциями с мнимыми степенями называются **гармоническими функциями.**

3.1.1.1. Сложение синусоидальных сигналов

Сумма (разность) двух синусоидальных сигналов *одинаковой частоты* является также синусоидальным сигналом той же самой частоты (рис. 3.2).

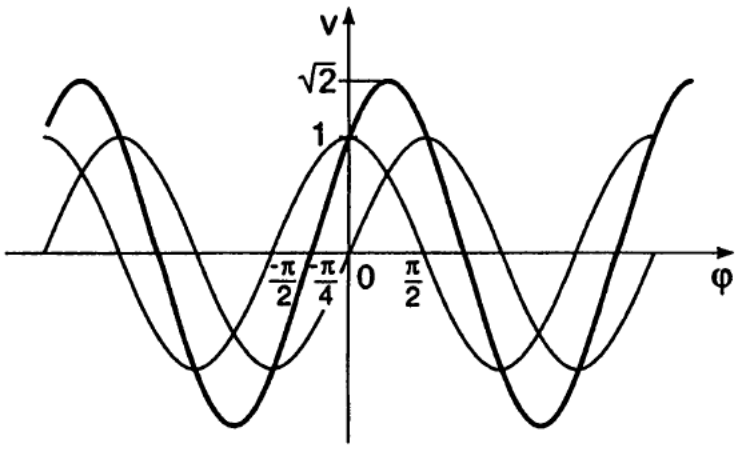


Рис. 3.2. Сложение двух синусоидальных сигналов

Результат сложения двух **косинусных функций**:

$$\upsilon_1(t) = \hat{\upsilon}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \upsilon_2(t) = \hat{\upsilon}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

представляет собой сумму сигналов $\upsilon_s = \upsilon_1 + \upsilon_2$ такую, что:

$$\upsilon_s(t) = \hat{\upsilon}_s \cdot \cos(\omega t + \varphi_s),$$

где:

$$\hat{\upsilon}_s = \sqrt{\hat{\upsilon}_1^2 + \hat{\upsilon}_2^2 + 2\hat{\upsilon}_1\hat{\upsilon}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\hat{\upsilon}_1\sin\varphi_1 + \hat{\upsilon}_2\sin\varphi_2}{\hat{\upsilon}_1\cos\varphi_1 + \hat{\upsilon}_2\cos\varphi_2}. \tag{3.4}$$

Результат сложения двух **синусных функций**:

$$\upsilon_1 = \hat{\upsilon}_1\sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \upsilon_2 = \hat{\upsilon}_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

представляет собой сумму сигналов $v_s = v_1 + v_2$ такую, что:

$$v_s = \hat{v}_s \sin(\omega t + \varphi_s), \tag{3.5}$$

где $\hat{v}_s$ и φ_s такие же, как в уравнении (3.4).

Пример. Найти сумму двух синусоидальных сигналов $v_1(t) = \sin(\omega t)$ и $v_2(t) = \sin(\omega t + \pi/2)$.

В соответствии с уравнением (3.4) амплитуда и фазовый сдвиг результирующего сигнала равны:

$$v_s = \sqrt{1+1+2\cdot\cos(0-\pi/2)} = \sqrt{2} \approx 1{,}41;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\hat{v}_2}{\hat{v}_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_s = \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad 45°.$$

На основе этого сумму двух исходных сигналов можно представить:

$$v_s(t) = \sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \frac{\pi}{4}).$$

Рис. 3.2 иллюстрирует данный пример.

Примечание. Вычисления значительно упрощаются при представлении сигналов в векторном виде. Этот метод описан в разделе 3.1.7.

Примечание. В общем виде сумма гармонических функций *разных частот* не является гармоническим сигналом, и она не может быть отображена в векторном виде.

3.1.2. Комплексные числа

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является частью множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, в состав которого также входит множество мнимых чисел. **Мнимую единицу** j формально определяют как число, дающее в квадрате «–1», т. е.:

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1.$$

Примечание. В математической литературе мнимая единица часто обозначается как i. Однако в электротехнике вместо буквы i употребляют букву j, чтобы избежать путаницы с символом силы тока.

Степени мнимой единицы

$$j^1 = j \quad j^{-1} = \frac{1}{j} = -j,$$

$$j^2 = -1 \quad j^{-2} = \frac{1}{j^2} = -1,$$

$$j^3 = -j \quad j^{-3} = \frac{1}{j^3} = j,$$

$$j^4 = 1 \quad j^{-4} = \frac{1}{j^4} = 1,$$

$$j^5 = j \quad j^{-5} = \frac{1}{j^5} = -j.$$

Мнимые числа

Мнимое число — это произведение действительного числа на мнимую единицу. Примеры: $5j$, $2\pi j$, jb.

- Произведение двух мнимых чисел является действительным числом, поскольку $j \cdot j = -1$.

Комплексное число представляет собой сумму действительного и мнимого чисел:

$$z = x + jy.$$

Примечание. Для обозначения того, что z является комплексным числом, в этой главе оно будет выделяться подчеркиванием: $\underline{z}$.

- Число x называется **действительной частью** комплексного числа z:

$$x = \mathrm{Re}\,(z)$$

- Число y называется **мнимой частью** комплексного числа z:

$$y = \mathrm{Im}\,(z).$$

- Мнимая часть является действительным числом.
- Два комплексных числа считаются равными, если равны их мнимые и действительные части.
- Любое действительное число можно представить в виде комплексного числа, у которого мнимая часть равна нулю.

Два числа $z = x + jy$ и $z^* = x - jy$ называются **сопряженными комплексными числами**, для которых справедливо:

$$(z^*)^* = z.$$

Для любого числа w, принадлежащего множеству действительных чисел R:

$$w^* = w.$$

Произведение сопряженных комплексных чисел называется **квадратом модуля (абсолютного значения)** комплексного числа:

$$z \cdot z^* = |z|^2.$$

Поскольку $z \cdot z^* = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z)^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$:

$$\sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{|z|^2} = |z|.$$

- Абсолютное значение комплексного числа всегда либо больше, либо равно нулю.

3.1.2.1. Арифметические действия с комплексными числами

Сложение и **вычитание** комплексных чисел заключается в сложении или вычитании их мнимых и действительных частей.

Если $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$, то:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел выполняется по правилу перемножения двух биномов с учетом того, что $j \cdot j = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Деление на комплексное число сводится к делению на действительное число. Для этого и числитель, и знаменатель умножаются на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}.$$

Основные правила сложения и умножения действительных чисел также справедливы и для комплексных чисел:

$$z + 0 = z,$$

$$z \cdot 1 = z,$$

$$z \cdot 0 = 0,$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{(переместительный закон)},$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{(сочетательный закон)},$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \text{(распределительный закон)}.$$

Деление на ноль для комплексных чисел, также как и для действительных, неопределенно.

3.1.2.2. Представление комплексных чисел

Геометрическая интерпретация комплексных чисел в декартовых координатах

Действительная и мнимая части комплексного числа z интерпретируются как координаты точки на плоскости, называемой комплексной плоскостью (рис. 3.3). Координаты $z = (x, y)$ определяют фазор или вектор в комплексной плоскости.

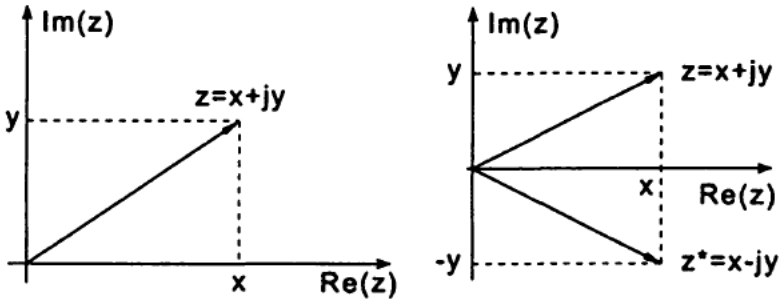


Рис. 3.3. Комплексная плоскость и сопряженные комплексные числа

Тригонометрическая форма комплексного числа (или представление комплексных чисел в полярных координатах)

Комплексное число в полярных координатах характеризуется длиной фазора r и углом φ между ним и осью действительных чисел.

В системе полярных координат $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$.

Величина $r = |z|$ называется **абсолютным значением** или **модулем** комплексного числа z, а угол φ — его **фазой** или **аргументом**.

- Для заданного комплексного числа аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$ (k — целое). Главным значением аргумента считается величина угла, измеряемого против часовой стрелки от положительной оси действительных чисел до соответствующего фазора (рис. 3.4).

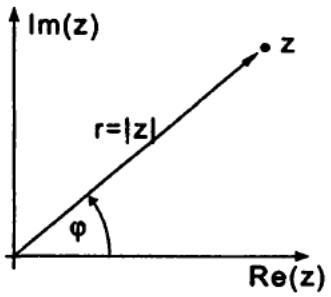


Рис. 3.4. Тригонометрическое представление комплексного числа

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi,$$

$$z = r(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) =$$

$$= |z|(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi),$$

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos\varphi, \quad \mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin\varphi.$$

Поскольку сопряженные комплексные числа расположены на комплексной плоскости симметрично относительно оси действительных чисел, они отличаются только знаком аргумента (рис. 3.3):

$$z^* = |z| \cdot (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi) = |z| \cdot (\cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi)) .$$

При этом абсолютные значения обоих чисел равны между собой:

$$|z| = |z^*| .$$

Показательная форма комплексного числа

Из формулы Эйлера:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

вытекает компактное представление комплексных чисел:

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = |z| \cdot e^{j\varphi} ,$$

где $r = |z|$ является абсолютным значением комплексного числа;

φ — его фазой или аргументом.

- r является действительным числом.
- $e^{j\varphi}$ является комплексным числом с абсолютным значением, равным единице.

$$|z| = |z \cdot e^{j\varphi}| = |z| \cdot |e^{j\varphi}| = r \cdot |e^{j\varphi}| = r \cdot 1 = r .$$

Комплексная экспоненциальная функция с мнимым показателем является периодической функцией с периодом, равным 2π. Все значения этой функции располагаются в комплексной плоскости на единичной окружности (рис. 3.5).

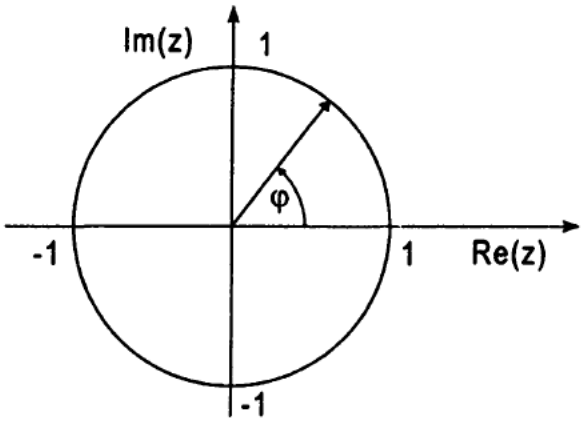


Рис. 3.5. Значения экспоненциальной функции с мнимым показателем

Из рис. 3.5 видно, что:

$$e^{j\cdot 0} = e^{j\cdot 0^\circ} = 1, \quad e^{j\pi} = e^{j\cdot 180^\circ} = -1, \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j\cdot 90^\circ} = j, \quad e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{j\cdot 270^\circ} = -j.$$

Примечание. В некоторой литературе применяется представление комплексной функции через версоры. Например:

$$|z|\cdot e^{j\varphi} = |z|\cdot \angle\varphi\,,$$

что читается так: «z является модулем *версора* φ». Следовательно, выражение 5 Ом·$e^{j\pi/2}$ может быть записано как 5 Ом $\angle\frac{\pi}{2}$ или 5 Ом $\angle$ 90°.

3.1.2.3. Преобразования из одной формы представления комплексных чисел в другую

Преобразование $(x,y)\to(r,\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Примечание. В калькуляторах функция арктангенса часто обозначается как tg^{-1}.

Таблица 3.1. Особые случаи преобразования $(x,y)\to(r,\varphi)$

Действительная часть x	Мнимая часть y	Аргумент φ	z
$x=0$	$y=0$	неопределенно	$z=0$
$x=0$	$y>0$	$\varphi=\frac{\pi}{2}$	положительное мнимое число
$x=0$	$y<0$	$\varphi=\frac{3\pi}{2}$	отрицательное мнимое число
$x>0$	$y=0$	$\varphi=0$	положительное действительное число
$x<0$	$y=0$	$\varphi=\pi$	отрицательное действительное число

Преобразование $(r,\varphi)\to(x,y)$

$$x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi.$$

Примечание. В современных инженерных калькуляторах эта функция используется для преобразования полярных координат в декартовы и наоборот.

3.1.3. Вычислительные операции с комплексными числами

3.1.3.1. Сложение и вычитание комплексных чисел

Поскольку при сложении комплексных чисел складываются их мнимые и действительные части, операцию сложения можно проводить в векторном виде, применяя правило **сложения** векторов (рис. 3.6). Операция **вычитания** также может осуществляться в векторном виде сложением двух фазоров, при этом ориентация вычитаемого фазора должна быть изменена на противоположную (рис. 3.6).

Примечание. На этом сходство между обычными векторами и фазорами заканчивается. Произведение двух комплексных чисел не похоже ни на векторное произведение двух векторов, ни на их скалярное произведение. Но при этом квадрат модуля комплексного числа определяется скалярным произведением вектора на самого себя.

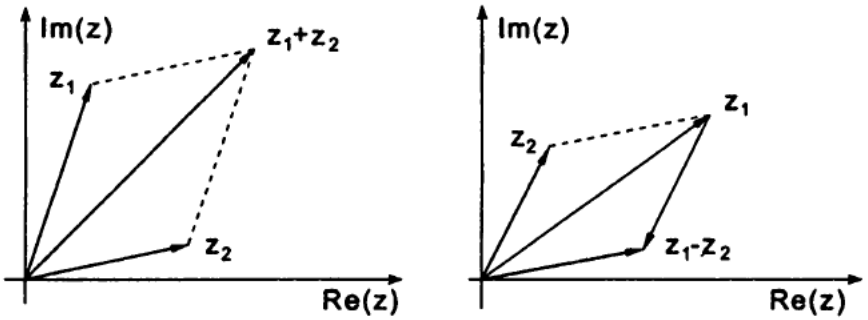


Рис. 3.6. Геометрическое сложение и вычитание комплексных чисел

В электротехнике часто требуется определять **модуль суммы комплексных переменных** (рис. 3.7). Это можно сделать по теореме косинусов:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\ .$$

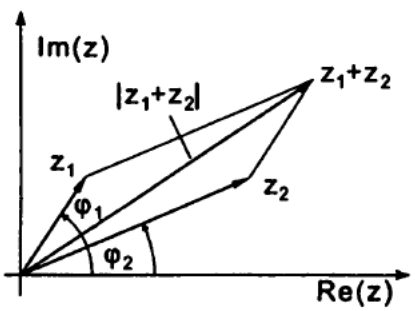


Рис. 3.7. Абсолютное значение суммы двух комплексных чисел

3.1.3.2. Умножение комплексных чисел

При умножении комплексного числа z на **положительное действительное число** α его абсолютное значение увеличивается в α раз. При этом ориентация фазора не меняется. Если число α меньше единицы, то модуль фазора уменьшается в α раз. При отрицательном значении α фазор меняет направление на противоположное.

Результат перемножения **двух комплексных чисел** в тригонометрическом и показательном виде выглядит следующим образом:

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

- Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их абсолютных значений, а аргумент произведения определяется суммой аргументов сомножителей:

$$r = r_1 \cdot r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Исключением является комплексное число с абсолютным значением, равным единице: $|z| = 1$. Это число можно представить в виде:

$$z = e^{j\varphi}.$$

При перемножении такого числа с комплексным числом z_1 получается следующий результат:

$$z_1 \cdot z = |z_1| \cdot \underbrace{|z|}_{=1} \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi)} = |z_1| e^{j(\varphi_1+\varphi)}.$$

Модуль произведения остается прежним, меняется только аргумент. При этом фазор **поворачивается** на угол φ. Если аргумент числа e^{φ} является функцией от времени, например линейной, то число z_1 можно записать как:

$$z_1 = e^{j\omega t}.$$

Параметр ω называется **угловой частотой**. Умножение комплексного числа z на фазор $e^{j\omega t}$ эквивалентно **вращению** комплексного фазора z с угловой скоростью ω. Фазор $|z|e^{j\omega t}$ называется **вращающимся фазором**.

$\alpha \cdot z = \alpha x + j\alpha y$	представление в декартовых координатах,
$= \alpha \cdot \|z\| \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$	тригонометрическая форма,
$= \alpha \cdot \|z\| \cdot e^{j\varphi}$	показательная форма.

3.1.4. Арифметические действия с комплексными числами (обзор)

Таблица 3.2. Арифметические действия с комплексными числами

$z_1 \cdot z_2 \neq 0$	Представление в декартовых координатах
z	$z = x + jy$
$\mathrm{Re}(z)$	x
$\mathrm{Im}(z)$	y
z^*	$z = x - jy$
$z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
$z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
$\lvert z_1 + z_2 \rvert$	$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
$z_1 \cdot z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 - x_2y_1)$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 z_2^*}{\lvert z_2 \rvert^2}$
$1/z$	$\frac{z^*}{\lvert z \rvert^2}$
z^n	Переход к показательной форме
$\sqrt[n]{z}$	Переход к показательной форме

$z_1 \cdot z_2 \neq 0$	Тригонометрическая форма	Показательная форма
z	$z = \lvert z \rvert \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$	$z = \lvert z \rvert \cdot e^{j\varphi}$
$\mathrm{Re}(z)$	$\lvert z \rvert \cdot \cos\varphi$	$\lvert z \rvert \cdot \cos\varphi$
$\mathrm{Im}(z)$	$\lvert z \rvert \cdot \sin\varphi$	$\lvert z \rvert \cdot \sin\varphi$
z^*	$z = \lvert z \rvert \cdot (\cos\varphi - j\sin\varphi)$	$z = \lvert z \rvert \cdot e^{-j\varphi}$
$z_1 + z_2$	Переход к декартовым координатам	
$z_1 - z_2$	Переход к декартовым координатам	
$\lvert z_1 + z_2 \rvert$	$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$	
$z_1 \cdot z_2$	$\lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$	$\lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$	$\frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
$1/z$	$\frac{1}{\lvert z \rvert}(\cos\varphi - j\sin\varphi)$	$\frac{1}{\lvert z \rvert} e^{-j\varphi}$
z^n	$\lvert z \rvert^n (\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$	$\lvert z \rvert^n e^{jn\varphi}$
$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{\lvert z \rvert}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right]$	$\sqrt[n]{\lvert z \rvert} e^{j\frac{\varphi}{n}}$

3.1.5. Комплексная экспоненциальная функция

Для действительных чисел экспоненциальная функция может быть выражена в виде следующего степенного ряда:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Этот ряд является сходящимся для всех действительных чисел. Следовательно, он определяет функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Это справедливо и для комплексных чисел. Степенной ряд является сходящимся для всех комплексных чисел. В общем виде значение функции будет комплексным, т. е. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Примечание. Экспоненциальная функция e^z иногда записывается как $\exp(z)$. Эта запись более предпочтительна в случаях длинных показателей функции.

3.1.5.1. Экспоненциальная функция с мнимым показателем

Экспоненциальная функция с чисто мнимым показателем является особой функцией, поскольку для нее благодаря формуле Эйлера:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

определены и мнимые, и действительные части ее значений. Эта функция является периодической с периодом, равным 2π. Первая и вторая **производные** от такой функции определяются следующими выражениями:

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega \cdot e^{j\omega t}, \quad \frac{d^2}{dt^2}e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot e^{j\omega t}.$$

Подобно функциям синуса и косинуса экспоненциальная функция с мнимым показателем является **гармонической функцией**, и при ее **интегрировании** получаются следующие значения:

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}, \quad \int\left(\int e^{j\omega t}dt\right)dt = \frac{-1}{\omega^2} \cdot e^{j\omega t}.$$

Умножение фазора z на $e^{j\varphi}$ приводит к **повороту** фазора на угол φ (рис. 3.8).

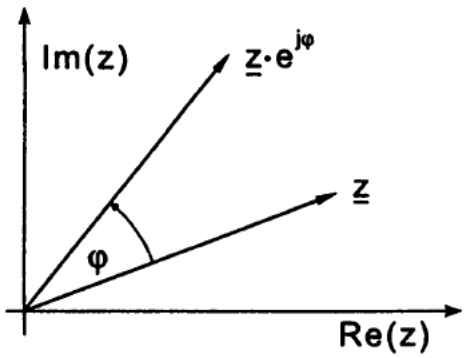


Рис. 3.8. Поворот фазора в результате его умножения на $e^{j\varphi}$

3.1.5.2. Экспоненциальная функция с комплексным показателем

Экспоненциальную функцию с комплексным показателем можно разделить на две экспоненты: с действительным и мнимым показателями:

$$e^{s} = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} \cdot e^{j\omega}.$$

Сомножитель $e^{j\omega}$ является гармонической функцией, а член e^{σ} можно рассматривать как коэффициент усиления. Теперь проанализируем функцию e^{st}:

$$f(t) = e^{st} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}.$$

При $\sigma = 0$ член $e^{\sigma t} = 1$. В этом случае $f(t)$ является гармонической функцией от времени. При $\sigma < 0$ член $e^{\sigma t}$ приводит к **затуханию колебаний.** При $\sigma > 0$ член $e^{\sigma t}$ **увеличивает колебания** по экспоненте (рис. 3.9).

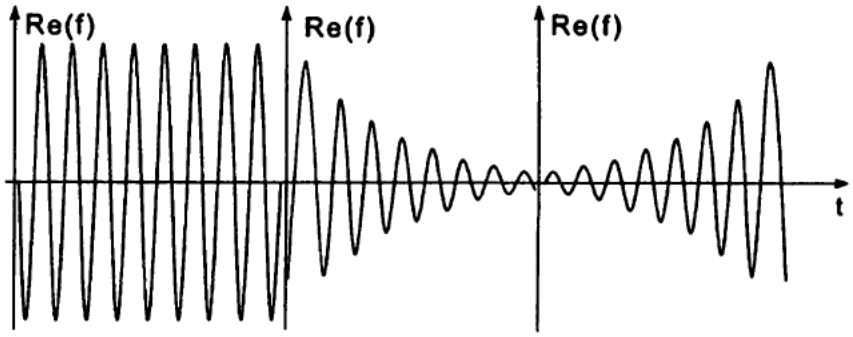


Рис. 3.9. Действительная часть функции $e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$ при $\sigma = 0$, $\sigma < 0$ и $\sigma > 0$

3.1.6. Тригонометрические функции с комплексными аргументами

Так же как и в экспоненциальных функциях, **аргументы функций синуса и косинуса** могут быть **комплексными** числами. Такие функции выражаются через экспоненциальные функции при помощи следующих соотношений:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}), \tag{3.6}$$

$$\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}). \tag{3.7}$$

Домножив выражение (3.7) на j и сложив результат с уравнением (3.6), получим **формулу Эйлера**:

$$e^{jz} = \cos z + j\sin z,$$

из которой следует, что:

$$\cos^{2} z + \sin^{2} z = 1.$$

Очевидно, что это выражение ничем не отличается от аналогичного уравнения для действительных аргументов.

Примечание. Используя выражения (3.6) и (3.7), можно значительно упростить тригонометрические вычисления. При этом часто удается избежать необходимости применения формул сложения, что особенно важно при вычислении интегралов, поскольку такая замена позволяет все свести к перемножению экспоненциальных функций.

3.1.7. Переход от синусоидальных сигналов к фазорам

Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме можно отобразить на геометрической плоскости, что часто используется для объяснения многих физических явлений.

3.1.7.1. Комплексные величины

Гармоническая функция от действительной переменной $v(t) = \hat{v} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ может быть записана в виде действительной части комплексной функции:

$$v(t) = \hat{v} \cdot \mathrm{Re}\{e^{j(\omega t+\varphi)}\} = \mathrm{Re}\{\underbrace{\hat{v} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}}_{\substack{\text{комплексная}\\ \text{функция}\\ \text{от времени}}}\}.$$

Формально, член в фигурных скобках считается **комплексной функцией от времени** и в этой главе обозначается как $\underline{v}$:

$$\underline{v}(t) = \hat{v} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = \underbrace{\hat{v} \cdot e^{j\varphi}}_{\substack{\text{комплексная}\\ \text{амплитуда}}} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{v}} \cdot e^{j\omega t}.$$

Комплексное значение амплитуды $\underline{\hat{v}}$ определяется как произведение амплитуды $\hat{v}$ на фазовый множитель $e^{j\varphi}$.

- Абсолютное значение комплексной амплитуды равно амплитуде функции от действительной переменной: $|\underline{\hat{v}}| = \hat{v}$.

Комплексное среднеквадратичное значение $\underline{V}$ определяется по аналогии со среднеквадратичным значением (СКЗ) V синусоидального сигнала. Амплитуда и комплексное СКЗ синусоидального сигнала могут быть представлены в виде **фазоров** на комплексной плоскости.

Примечание. Аналогично этому временную функцию от действительной переменной можно представить в виде мнимой части комплексной функции. Обе модели приводят к одинаковым результатам, но их нельзя применять одновременно.

Временна́я функция как действительная часть комплексной функции		
Синусоида	↦	Фазор
$\hat{v} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	↦	$\hat{v} \cdot e^{j\varphi}$
$\hat{v} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	↦	$\hat{v} \cdot e^{j(\varphi-\pi/2)}$
Фазор	↦	Синусоида
$\hat{v} \cdot e^{j\varphi}$	↦	$\hat{v} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Временна́я функция как мнимая часть комплексной функции		
Синусоида	↦	Фазор
$\hat{v} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	↦	$\hat{v} \cdot e^{j\varphi}$
$\hat{v} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	↦	$\hat{v} \cdot e^{j(\varphi+\pi/2)}$
Фазор	↦	Синусоида
$\hat{v} \cdot e^{j\varphi}$	↦	$\hat{v} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Амплитуду $\hat{v}$ можно заменить на СКЗ V.

Таблица 3.3. Функции и их комплексные аналоги

Название	Обозначение	Пример
Переменное напряжение	$v(t)$	$= \hat{v} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
Амплитуда	$\hat{v}$	
Переменное напряжение в комплексном виде	$\underline{v}(t)$	$= \hat{v} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$
Комплексное значение амплитуды	$\underline{\hat{v}}$	$= \hat{v} \cdot e^{j\varphi}$
СКЗ	V	$= \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}}$
Комплексное СКЗ	$\underline{V}$	$= \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}}$

3.1.7.2. Взаимосвязь синусоидальных сигналов и фазоров

Функция синуса может быть представлена в виде вертикальных проекций **вращающегося фазора**.

На векторной диаграмме фазор вращается с постоянной угловой частотой ω против часовой стрелки. В каждый момент времени на временну́ю ось наносится величина вертикальной проекции фазора (рис. 3.10). Фазор описывается четырьмя характеристическими значениями:

- Многие физические величины могут быть представлены в виде фазоров: например напряжение $\underline{v}$, ток $\underline{i}$, поток $\underline{\Phi}$ и т. д.
- Абсолютное значение фазора определяется его длиной, которая может соответствовать либо амплитуде, либо СКЗ.
- Фазовый сдвиг φ_0 задает наклон фазора относительно нулевой линии (обычно горизонтальной).
- Угловая частота фазора равна угловой частоте представляемой физической величины. В большинстве случаев она определена явно.

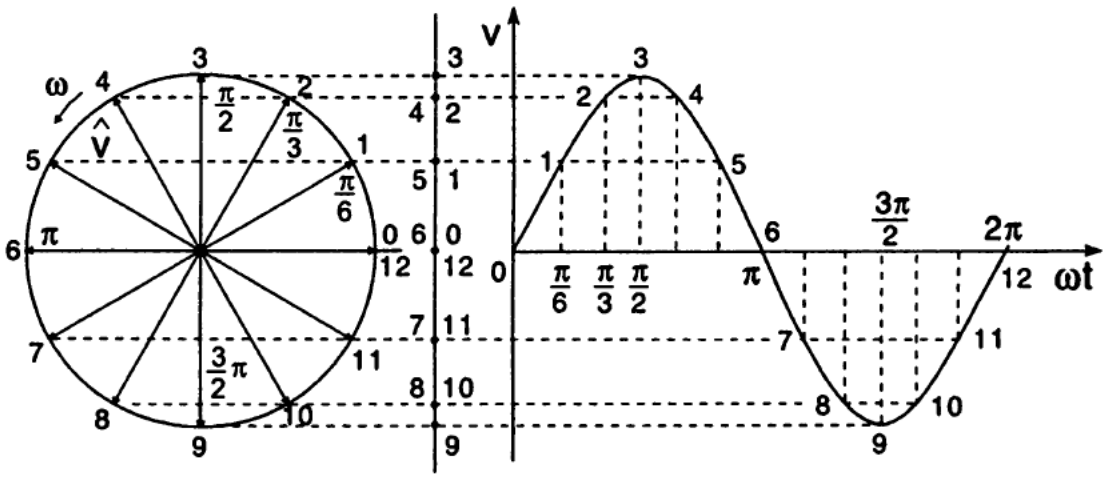


Рис. 3.10. Векторная диаграмма вращения фазора и временная диаграмма функции синуса

При равенстве угловых скоростей вращения всех рассматриваемых фазоров (т. е. при равенстве частот синусоидальных сигналов) играют роль только относительные фазовые сдвиги между ними. В этом случае строится стационарная векторная диаграмма, без учета вращения фазоров.

Примечание. Аналогично этому функция косинуса представляется в виде горизонтальной проекции вращающегося фазора.

3.1.7.3. Сложение и вычитание фазоров

- При сложении (вычитании) двух синусоидальных сигналов *одинаковой* частоты результирующий сигнал имеет ту же самую частоту.

Сумма и разность синусоидальных сигналов могут быть найдены из векторной диаграммы (рис. 3.11).

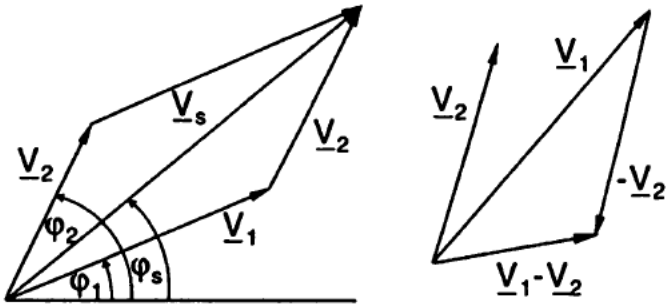


Рис. 3.11. Сумма и разность синусоидальных сигналов, построенных в виде фазоров на векторной диаграмме

Сумма двух напряжений $\upsilon_s = \upsilon_1 + \upsilon_2$, представленных в виде функций косинуса:

$$\upsilon_1 = \hat{\upsilon}_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \upsilon_2 = \hat{\upsilon}_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

определяется следующим выражением:

$$\upsilon_s = \hat{\upsilon}_s \cos(\omega t + \varphi_s). \tag{3.8}$$

Для вычисления амплитуды и фазового сдвига результирующего сигнала используется представление сигналов в виде фазоров:

$$\upsilon_1 \mapsto \underline{\upsilon}_1 = \hat{\upsilon}_1 \cdot e^{j(\omega+\varphi_1)} \mapsto \underline{\hat{\upsilon}}_1 \cdot e^{j\varphi_1}, \quad \upsilon_2 \mapsto \underline{\upsilon}_2 = \hat{\upsilon}_2 \cdot e^{j(\omega+\varphi_2)} \mapsto \underline{\hat{\upsilon}}_2 \cdot e^{j\varphi_2}.$$

Операция сложения обозначается как: $\underline{\upsilon}_s = \underline{\upsilon}_1 + \underline{\upsilon}_2$. Амплитуда результирующего сигнала $\upsilon_s(t)$ равна комплексной амплитуде суммы двух сигналов:

$$\hat{\upsilon}_s = \left|\underline{\upsilon}_1 + \underline{\upsilon}_2\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{\underline{\upsilon}_s\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{\underline{\upsilon}_s\right\}}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi_s = \frac{\mathrm{Im}\left\{\underline{\upsilon}_1 + \underline{\upsilon}_2\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\underline{\upsilon}_1 + \underline{\upsilon}_2\right\}}.$$

Исходя из этого, получаем следующие выражения:

$$\hat{\upsilon}_s = \sqrt{\hat{\upsilon}_1^2 + \hat{\upsilon}_2^2 + 2\hat{\upsilon}_1\hat{\upsilon}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi_s = \frac{\hat{\upsilon}_1 \sin\varphi_1 + \hat{\upsilon}_2 \sin\varphi_2}{\hat{\upsilon}_1 \cos\varphi_1 + \hat{\upsilon}_2 \cos\varphi_2}. \tag{3.9}$$

Примечание. В общем виде сумма гармонических функций *разных* частот не является гармонической функцией и ее нельзя представить в виде стационарных фазоров.

3.2. Синусоидальные сигналы

При рассмотрении таких физических величин, как ток и напряжение, необходимо различать следующие варианты сигналов (рис. 3.12).

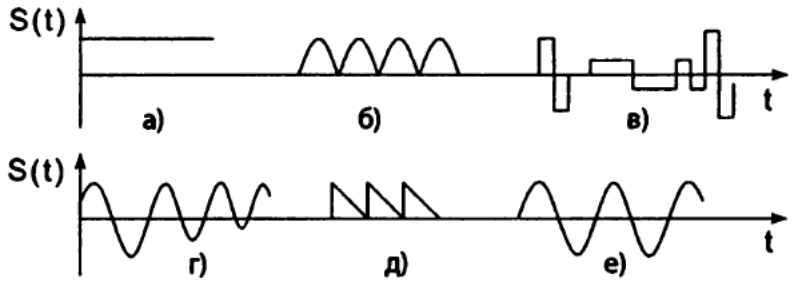


Рис. 3.12. Сравнение разных сигналов:
а) постоянный;
б) пульсирующий;
в) переменный непериодический;
г) смешанный;
д) периодический негармонический;
е) синусоидальный

Постоянный сигнал — это сигнал, не меняющийся во времени, т. е. $v(t) = \text{const}$.

Примеры: постоянные ток и напряжение, магнитный поток от постоянного магнита.

Пульсирующий сигнал — это сигнал с разными, но одинаковыми по знаку мгновенными значениями.

Примеры: модулированное напряжение, зашумленное постоянное напряжение.

Переменный сигнал — это изменяющийся во времени сигнал, среднее значение которого в течение длительного периода времени близко к нулю.

Примеры: телефонные сигналы, переменное напряжение в сети 230 В

Смешанный сигнал — сигнал с изменяющимися мгновенными значениями и амплитудой, СКЗ которого не обязательно равно нулю. Его также называют **переменным сигналом общего вида**.

Периодический сигнал — это сигнал, мгновенные значения которого повторяются через определенный интервал времени T.

Периодический сигнал в любой момент времени t должен удовлетворять условию: $s(t) = s(t + T)$, где T называется **периодом** сигнала $s(t)$.

Синусоидальный сигнал — это переменный сигнал, описываемый функцией синуса, мгновенные значения которого повторяются через определенные интервалы времени. Такие сигналы часто называются **гармоническими**. Примерами гармонических сигналов являются все элементарные сигналы в цепях переменного тока. Периодические переменные сигналы (и с определенными допущениями некоторые непериодические) могут считаться гармоническими, и для их описания часто применяются методы Фурье-анализа.

3.2.1. Характеристики синусоидальных сигналов

Ток и напряжение в цепях переменного тока можно представить в виде гармонических сигналов:

$$v(t) = \hat{v} \cdot \sin \omega t \quad \text{или} \quad v(t) = \hat{v} \cdot \cos \omega t.$$

Оба сигнала выглядят одинаково. Мгновенное значение одного из сигналов в момент времени $t = 0$ равно нулю, а другого — максимуму (рис. 3.13). **Мгновенное значение** сигнала $v\ (t)$ меняется в диапазоне значений от $-\hat{v}$ до $+\hat{v}$. Максимальное положительное значение сигнала $v\ (t)$ называется **амплитудой** или **пиковым значением**. Параметр ω называется **угловой** или **круговой частотой**.

Частота сигнала определяется следующими выражениями:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Единицей измерения частоты является герц (Гц), а круговой частоты — $с^{-1}$ или рад/с.

Период сигнала равен:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Он определяется как расстояние между двумя соседними максимумами (минимумами) сигнала.

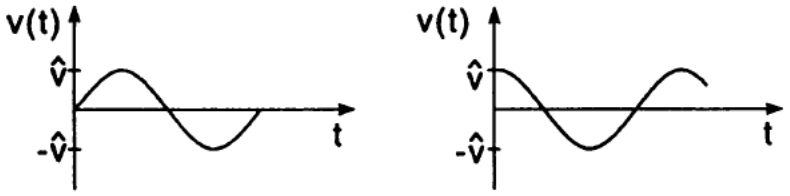


Рис. 3.13. Гармонические сигналы

Пример. При помощи осциллографа измеряется синусоидальное переменное напряжение с амплитудой 300 В и частотой 50 Гц. Определить мгновенное значение сигнала через 12 мс после пересечения нулевой линии.

Решение:

$$v(t) = \hat{v} \cdot \sin \omega t, \quad \hat{v} = 300 \text{ В}, \quad \omega = 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1} \approx 314{,}16 \text{ с}^{-1}.$$

Пусть сигнал пересекает нулевую линию в момент времени $t = 0$. Тогда:

$$v(12 \text{ мс}) = \hat{v} \cdot \sin(\omega \cdot 12 \cdot 10^{-3} \text{ с}) = 300 \text{ В} \cdot \sin(3{,}770) = -176 \text{ В}.$$

Предположение, что сигнал пересекает нулевую линию в момент времени $t = 0$, справедливо только при рассмотрении одного сигнала. В случае нескольких сигналов необходимо знать **фазовый сдвиг** каждого из них:

$$v(t) = \hat{v} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Фазовый сдвиг φ_0 определяется в момент времени $t = 0$.

При определении взаимного расположения нескольких сигналов положительная разность фаз между ними рассматривается как **опережение**, а отрицательная — как **отставание**.

Примечание. Обычно фаза напряжения задается относительно фазы тока, т. е. $\varphi = \varphi V - \varphi I$. Аналогично определяется фаза комплексного импеданса и комплексной мощности. Исключение составляет комплексная полная проводимость: ее фаза выражается относительно напряжения.

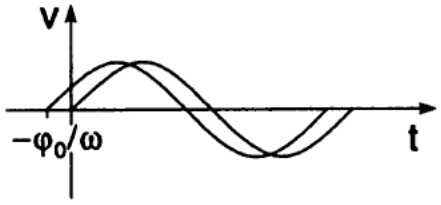


Рис. 3.14. Гармонические сигналы со сдвигом фаз

Пример. Сдвиг фаз между двумя синусоидальными сигналами тока i_1 и i_2 одинаковой амплитуды составляет 30°, т. е. ток i_2 опережает ток i_1. Определить мгновенное значение тока i_2 в момент, когда ток i_1 пересекает нулевую линию.

Решение:

$$i_1 = \hat{i} \cdot \sin \omega t, \quad i_2 = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + 30°), \quad i_2(t = 0) = \hat{i} \cdot \sin(30°) = 0{,}5\hat{i}.$$

При описании переменных сигналов часто используются следующие величины.

Среднее или **среднеарифметическое значение** определяется как:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T v(\tau) d\tau. \qquad (3.10)$$

Это значение равно площади под кривой временной функции, вычисляемой в течение *одного периода*. Поскольку функция является периодической, значение $\bar{v}$ не зависит от начальной точки t_0. Для гармонических функций значение $\bar{v}$ равно нулю.

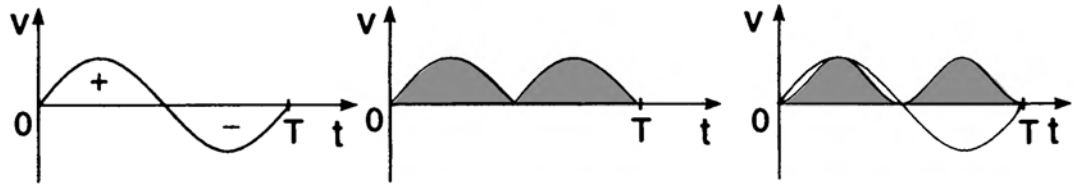


Рис. 3.15. Определение среднего, среднего по модулю и среднеквадратичного значений гармонических сигналов

Среднее по модулю значение определяется как:

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T |v(\tau)|\,d\tau. \tag{3.11}$$

Это значение равно средней величине сигнала.

Примечание. Среднее по модулю значение используется при вычислении величины заряда конденсатора, при работе с выпрямленными сигналами или в расчетах электролитических процессов. Выбор типа выпрямительных диодов также основывается на среднем по модулю значении тока, поскольку падение напряжения на диоде практически всегда постоянно.

Для синусоидального напряжения справедливо:

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{v}\cdot|\sin\omega t|\,dt = \frac{2}{T}\hat{v}\cdot\int_0^{T/2}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\hat{v}\left[-\cos\omega t\right]_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} = \frac{2}{\pi}\hat{v} \approx 0{,}637\hat{v}.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для синусоидального тока.

Среднеквадратичное значение (СКЗ) напряжения характеризует мощность в цепи переменного тока. В схеме на рис. 3.16 используется источник постоянного напряжения на 1 В, что приводит к рассеянию на резисторе R мощности P. Источник переменного напряжения в той же самой цепи для выделения на резисторе той же средней мощности должен выдавать напряжение, СКЗ которого равно 1 В. СКЗ не зависит от формы сигнала переменного напряжения.

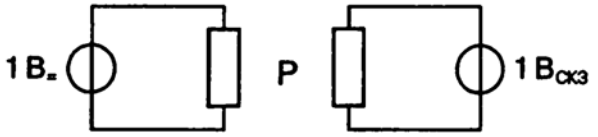


Рис. 3.16. Принцип определения СКЗ

По определению СКЗ функции равно:

$$V_{\text{СКЗ}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}. \tag{3.12}$$

Для синусоидального напряжения справедливо:

$$V_{\text{СКЗ}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (\hat{v}\sin\omega t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\hat{v}^2\int_0^T \sin^2\omega t\,dt} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\hat{v}.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для синусоидального тока.

Квадрат СКЗ определяется следующим выражением:

$$V_{\text{СКЗ}}^2 = \frac{\hat{v}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\text{СКЗ}}^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{\hat{v}^2}{R},$$

что справедливо для синусоидальных сигналов.

Это означает, что средняя рассеиваемая мощность от источника переменного напряжения равна только половине мощности рассеяния от источника постоянного напряжения, напряжение на выводах которого имеет то же самое значение, что и пиковое значение переменного напряжения.

В общем виде для переменных сигналов справедливо, что:

- СКЗ всегда меньше или равно пиковому значению.

Примечание. СКЗ тока или напряжения необходимо учитывать при выборе типа резистивных компонентов для обеспечения корректного теплового режима работы схемы. А при определении напряжения пробоя конденсатора или обратного напряжения полупроводниковых элементов надо знать **пиковые** значения соответствующих сигналов.

3.2.2. Характеристики несинусоидальных сигналов

Коэффициент амплитуды (пик-фактор) равен отношению пикового значения к СКЗ переменного сигнала любой формы:

$$k_c = \frac{\hat{v}}{V_{\text{СКЗ}}}.$$

Коэффициент формы равен отношению СКЗ к среднему по модулю значению сигнала:

$$k_f = \frac{V_{\text{СКЗ}}}{|\overline{v}|}.$$

Коэффициенты формы и амплитуды служат для грубого описания формы переменного сигнала. Чем «ровнее» форма кривой, тем больше коэффициент формы приближается к единице. В табл. 3.4 приведены значения коэффициентов формы и амплитуды для некоторых сигналов.

Таблица 3.4. Коэффициенты формы и амплитуды для некоторых типов сигналов

Сигнал	k_c	k_f
Синусоидальный	1,414	1,111
Треугольный	1,732	1,155
Прямоугольный	1,000	1,000
Пилообразный	1,732	1,155
Полупериодного выпрямителя синусоидальных сигналов	2,000	1,571
Двухполупериодного выпрямителя синусоидальных сигналов	1,414	1,111
Трехфазного выпрямителя синусоидальных сигналов	1,190	1,017

Примечание. Отклонение стрелки измерителя с **подвижной катушкой** со встроенным выпрямительным мостом пропорционально среднему по модулю значению переменного сигнала, в то время как измеритель с **подвижным сердечником** (например, электродинамический вольтметр) отображает СКЗ исследуемого сигнала. Однако калибровка шкал обоих приборов производится по СКЗ синусоидальных сигналов. Следовательно, при измерении несинусоидальных сигналов измеритель с подвижной катушкой обладает систематической погрешностью, которую можно компенсировать, зная коэффициент формы исследуемого переменного сигнала.

Пример. Напряжение прямоугольной формы с пиковыми значениями ±1 В измеряется при помощи измерителя с подвижной катушкой. Для сигнала данной формы СКЗ и среднее по модулю значение равны 1 В. Отклонение стрелки прибора пропорционально среднему по модулю значению измеряемого сигнала. Требуется определить погрешность измерений.

Решение. СКЗ переменного синусоидального напряжения со средним по модулю значением, равным 1 В, можно определить по формуле $k_f \cdot |\overline{v}| \approx 1{,}11$ В. Следовательно, измеритель с подвижной катушкой будет показывать 1,11 В, т. е. погрешность при этом составит 11 %.

Примечание. В системах связи для оценки степени отклонения сигнала от синусоидальной формы часто используется коэффициент нелинейных искажений (суммарный коэффициент гармоник).

3.3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи переменного тока

3.3.1. Комплексное сопротивление

Комплексное сопротивление цепи переменного тока определяется так же, как и сопротивление в цепи постоянного тока:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{\hat{v} \cdot e^{j\varphi_v}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}} \cdot e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}. \qquad (3.13)$$

Поскольку $\underline{Z}$ является комплексным числом, его можно представить в экспоненциальной форме:

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}. \qquad (3.14)$$

Фазовый угол φ_Z соответствует **фазовому сдвигу напряжения** относительно **тока**, протекающего в цепи. Полное сопротивление цепи переменного тока может быть выражено в декартовых координатах:

$$\underline{Z} = R + jX, \qquad (3.15)$$

где:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_z = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right] = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right). \tag{3.16}$$

Здесь R называется **активным** (резистивным) **сопротивлением**, X — **реактивным** (индуктивным или емкостным) **сопротивлением**, а Z — **полным сопротивлением** или **импедансом**.

Единицей измерения импеданса является ом.

- **Комплексное сопротивление** цепи переменного тока — это отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока (или их СКЗ) с учетом фазового сдвига напряжения относительно тока, протекающего через данный импеданс.
- **Импеданс** цепи переменного тока — это отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока (или их СКЗ) без учета величины фазового сдвига между ними.

Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$Z = \frac{V}{I}, \tag{3.17}$$

$$R = Z \cdot \cos\varphi_z, \quad X = Z \cdot \sin\varphi_z. \tag{3.18}$$

На рис. 3.17 показано, как комплексное сопротивление отображается в виде фазора на комплексной плоскости.

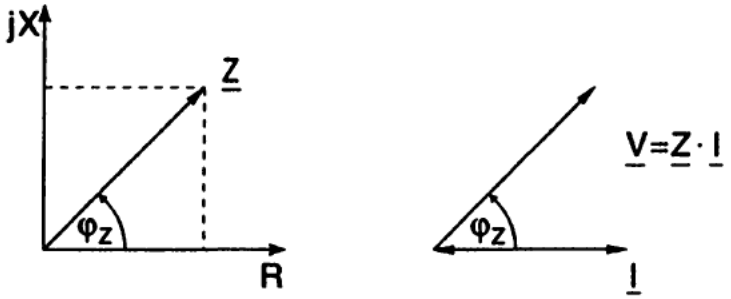


Рис. 3.17. Отображение фазора комплексного сопротивления на комплексной плоскости и векторная диаграмма, показывающая фазовый сдвиг напряжения относительно тока в цепи переменного тока

В соответствии с выражением $\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ зависимость напряжения от тока может быть отображена на векторной диаграмме (рис. 3.17). Комплексное сопротивление цепи переменного тока является причиной возникновения фазового сдвига φ_z между напряжением и током. Отношение абсолютных значений напряжения и тока равно импедансу цепи Z.

Пример. Ток $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$ проходит через элемент цепи переменного тока с комплексным сопротивлением $\underline{Z}$. Найти зависимость напряжения от времени.

Решение. Произведя замену $i(t) \to \underline{I}$, получим:

$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot e^{j\varphi_Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot \underline{I} \cdot e^{j\varphi_Z} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}(t) = Z \cdot \hat{i} \cdot e^{j(\varphi_Z + \varphi_I)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \mathrm{Re}(\underline{v}) = Z \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_Z + \varphi_I).$$

Пример. На элемент с комплексным сопротивлением $(4 + j \cdot 3)$ Ом подано синусоидальное напряжение с амплитудой 1 В (рис. 3.18). Найти абсолютное значение и фазу тока.

Решение. Импеданс элемента равен $Z = \sqrt{4^2 + 3^2}$ Ом = 5 Ом, тогда амплитуда тока, протекающего через него, $\hat{i} = \hat{v} / Z = 200$ мА. СКЗ тока определяется как $I = \hat{i} / \sqrt{2} = 141$ мА. Фазовый сдвиг напряжения относительно тока равен $\varphi_Z = \mathrm{arctg}\,(3/4) = 0{,}64$ (37°). Следовательно, ток отстает от напряжения на 37°, т. е. $\varphi_I = -37°$.

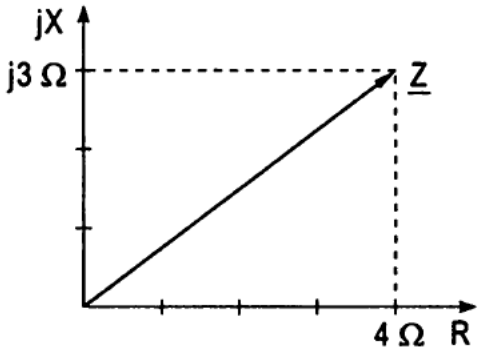


Рис. 3.18. Диаграмма комплексного сопротивления

3.3.2. Комплексное сопротивление пассивных компонентов

Эта тема более углубленно рассматривается в разделе 3.4.

3.3.2.1. Резистор

Зависимость между током и напряжением на резистивном элементе определяется законом Ома:

$$v(t) = R \cdot i(t).$$

Если ток, протекающий через резистор, представить в комплексном виде, то получим, что:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{R \cdot \underline{i}}{\underline{i}} = R. \qquad (3.19)$$

- Комплексное сопротивление резистивного элемента является действительным числом, равным R.

3.3.2.2. Индуктивный элемент

Напряжение, индуцируемое на индуктивном элементе, пропорционально скорости изменения тока *di/dt*:

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Представив ток в комплексном виде $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$, получим:

$$\underline{v}(t) = L \cdot \hat{i} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega L \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t}.$$

Отсюда находим значение комплексного сопротивления:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = j\omega L. \qquad (3.20)$$

- Комплексное сопротивление индуктивного элемента является положительным мнимым числом, пропорциональным индуктивности элемента и угловой частоте.

3.3.2.3. Емкостный элемент

Напряжение на конденсаторе пропорционально интегралу тока, протекающего в его цепи:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Заменив в этом выражении $i(t)$ на $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$, получим:

$$\underline{v}(t) = \frac{1}{C} \int \hat{i} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t}.$$

Отсюда видно, что:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}. \qquad (3.21)$$

- Комплексное сопротивление емкостного элемента является отрицательным мнимым числом, обратно пропорциональным емкости и угловой частоте.

3.3.3. Комплексная проводимость

Комплексная проводимость цепи переменного тока определяется по аналогии с проводимостью в цепи постоянного тока:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{v}} = \frac{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_I)}}{\hat{v} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_V)}} = \frac{\hat{i}}{\hat{v}} \cdot e^{j(\varphi_I - \varphi_V)}. \qquad (3.22)$$

Поскольку $\underline{Y}$ является комплексной величиной, ее можно представить в показательном виде:

$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_Y}. \qquad (3.23)$$

Здесь φ_y соответствует **фазовому сдвигу тока** в цепи переменного тока относительно **напряжения**. В декартовых координатах выражение для комплексной проводимости записывается как:

$$\underline{Y} = G + jB, \tag{3.24}$$

где:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi_Y = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}(\underline{Y})}{\operatorname{Re}(\underline{Y})}\right] = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{G}\right). \tag{3.25}$$

Здесь G называется **активной (электрической) проводимостью**, B — **реактивной проводимостью**, а Y — **полной проводимостью цепи переменного тока**.

Единицей измерения полной проводимости является сименс (См) или мо (mho, ℧).

- **Комплексная проводимость** цепи переменного тока — это отношение амплитуды тока к амплитуде напряжения (или их СКЗ) с учетом фазового сдвига тока относительно напряжения.
- **Полная проводимость** цепи переменного тока — это отношение амплитуды тока к амплитуде напряжения (или их СКЗ) без учета фазового сдвига тока относительно напряжения.

Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$Y = \frac{I}{V}, \tag{3.26}$$

$$G = Y \cdot \cos\varphi_Y, \quad B = Y \cdot \sin\varphi_Y. \tag{3.27}$$

На рис. 3.19 показано, как комплексная проводимость отображается в виде фазора на комплексной плоскости.

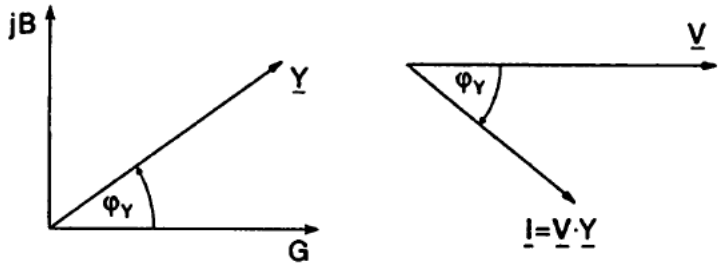


Рис. 3.19. Отображение фазора комплексной проводимости на комплексной плоскости и векторная диаграмма, показывающая фазовый сдвиг тока относительно напряжения в цепи переменного тока

В соответствии с выражением $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{V}$, зависимость тока от напряжения может быть отображена на векторной диаграмме (рис. 3.19). Комплексная проводимость цепи переменного тока является причиной возникновения фазового сдвига φ_Z между током и напряжением. Отношение абсолютных значений тока и напряжения равно проводимости цепи Y.

Между комплексной проводимостью и комплексным сопротивлением цепи переменного тока существует следующая зависимость:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \tag{3.28}$$

исходя из которой можно получить следующее соотношение:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{Z^2}}_{=G} - j\underbrace{\frac{X}{Z^2}}_{=jB}. \tag{3.29}$$

Отсюда находим выражения для активной и реактивной проводимостей цепи переменного тока:

$$G = \frac{R}{Z^2}, \quad B = -\frac{X}{Z^2}. \tag{3.30}$$

- Положительная реактивная проводимость цепи эквивалентна ее отрицательному импедансу и наоборот.

Из выражения (3.28) также вытекают следующие соотношения:

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \text{и} \quad \varphi_Y = -\varphi_Z. \tag{3.31}$$

- Фаза комплексной проводимости равна фазе отрицательного импеданса.

3.3.4. Комплексная проводимость пассивных компонентов

Из уравнения (3.28) выводятся выражения для комплексных проводимостей резистивных, индуктивных и емкостных компонентов цепей переменного тока:

- для резистора: $\underline{Y} = G = 1/R$;
- для индуктивного элемента: $\underline{Y} = -j\frac{1}{\omega L}$;
- для конденсатора: $\underline{Y} = j\omega C$.

3.3.5. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость (обзор)

Терминология

Обозначение	Термин
$\underline{Z} = R + jX$	**Комплексное сопротивление**
Z	Импеданс (полное сопротивление)
X	Реактивное сопротивление
R	Активное (резистивное) сопротивление
$\underline{Y} = G + jB$	**Комплексная проводимость**
Y	Полная проводимость
B	Реактивная проводимость
G	Активная (электрическая) проводимость

Комплексные сопротивление и проводимость пассивных компонентов

Таблица 3.5. Комплексные сопротивление и проводимость пассивных компонентов

Общий вид	Резистивный элемент R	Индуктивный элемент L	Емкостной элемент C
$\underline{Z} = R + jX$	R	$j\omega L$	$-j\frac{1}{\omega C}$
R	R	0	0
X	0	ωL	$-\frac{1}{\omega C}$
$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	R	ωL	$\frac{1}{\omega L}$
$\varphi_Z = \text{arctg}\,(X/R)$	0	$+\pi/2$	$-\pi/2$
$\underline{Y} = G + jB$	$1/R$	$-j\frac{1}{\omega L}$	$j\omega C$
G	$1/R$	0	0
B	0	$-\frac{1}{\omega L}$	ωC
$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$	$1/R$	$\frac{1}{\omega L}$	ωC
$\varphi_Y = \text{arctg}\,(B/G)$	0	$-\pi/2$	$+\pi/2$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad Y = \frac{1}{Z}, \quad \varphi_Y = -\varphi_Z,$$

$$\underline{Y} = G + jB, \quad G = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{-X}{Z^2}.$$

3.4. Импеданс пассивных компонентов

Пассивные линейные цепи состоят из резисторов, индуктивных элементов и конденсаторов. В этом разделе рассматривается поведение перечисленных пассивных компонентов в цепях синусоидального тока. В табл. 3.5 приведены краткие сведения о комплексных сопротивлениях и проводимостях пассивных компонентов.

Ток в цепи и напряжение на **резисторе** R совпадают по фазе. **Импеданс и проводимость** чисто резистивной цепи определяются следующими выражениями:

$$Z = |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{v}}{\underline{i}}\right| = R,$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} = G.$$

Напряжение, индуцируемое на **индуктивном элементе**, пропорционально скорости изменения тока в цепи di/dt:

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

В случае **синусоидального тока** справедливо:

$$v(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{i} \sin \omega t) = \hat{i} \cdot \omega L \cdot \cos \omega t = i \cdot \omega L \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

- Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на 90° или $\pi/2$ (рис. 3.20).

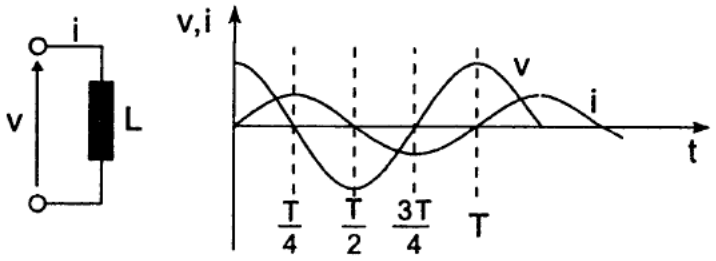


Рис. 3.20. Ток через индуктивный элемент и напряжение на нем

Реактивное сопротивление индуктивного элемента равно:

$$X_L = \omega L.$$

При подключении идеального индуктивного элемента к источнику постоянного напряжения его импеданс будет равен нулю. При увеличении частоты синусоидального напряжения импеданс индуктивного элемента возрастает. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость индуктивного элемента определяются соотношениями:

$$\underline{Z} = jX_L = j\omega L, \tag{3.32}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}. \tag{3.33}$$

Напряжение **на конденсаторе** пропорционально интегралу тока, протекающего в его цепи:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt.$$

Дифференцируя обе части уравнения, получаем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}.$$

В случае **синусоидального напряжения** справедливо:

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt}(\hat{v} \cdot \sin \omega t) = \hat{v} \cdot \omega C \cdot \cos \omega t = \hat{v} \cdot \omega C \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

- Напряжение на конденсаторе отстает от тока на 90° или $\pi/2$ ($\varphi_v = -90°$) (рис. 3.21).

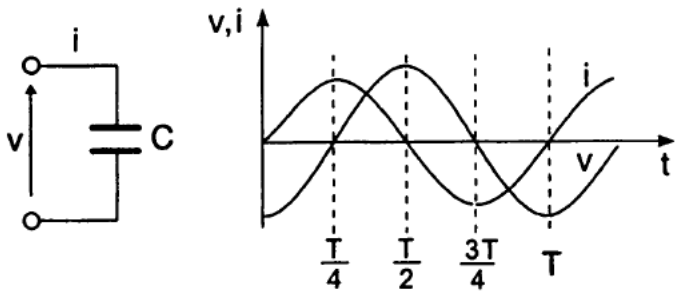


Рис. 3.21. Ток в цепи емкостного элемента и напряжение на нем

Реактивное сопротивление конденсатора равно:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}.$$

При подключении идеального емкостного элемента к источнику постоянного напряжения его импеданс будет равен бесконечности. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость емкостного элемента определяются выражениями:

$$\underline{Z} = jX_C = -j\frac{1}{\omega C}, \tag{3.34}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = jB_C = j\omega C. \tag{3.35}$$

3.5. Соединения пассивных компонентов

3.5.1. Последовательные соединения

3.5.1.1. Общий случай

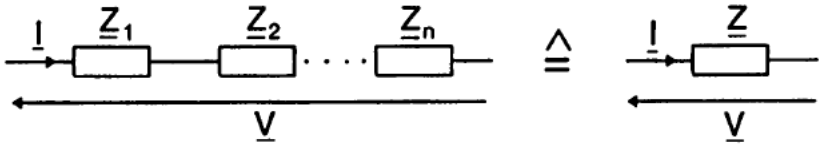


Рис. 3.22. Последовательное соединение пассивных компонентов

На рис. 3.22 показан общий случай последовательного соединения пассивных компонентов. Для токов и напряжений в цепях переменного тока по аналогии с цепями постоянного тока можно записать:

$$\underline{V} = \underline{I} \cdot \underline{Z}.$$

Как видно из записи, все величины являются комплексными. Через все элементы течет один и тот же ток. Суммарное комплексное сопротивление цепи определяется следующим выражением:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots + \underline{Z}_n.$$

Поскольку при суммировании комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части, получаем:

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(Z_i) + j\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} R_i + j\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

3.5.1.2. Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Через оба элемента течет один и тот же ток. На резисторе ток и напряжение совпадают по фазе, тогда как на индуктивном элементе напряжение опережает ток на 90° или $\pi/2$. Напряжение на выводах последовательного соединения резистора и индуктора равно сумме напряжений на отдельных элементах (рис. 3.23).

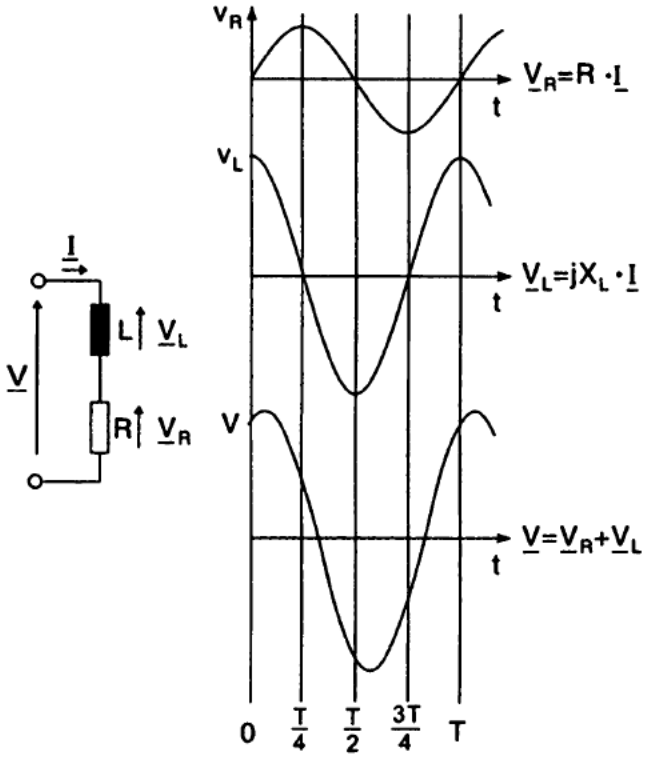


Рис. 3.23. Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Из векторной диаграммы (рис. 3.24а) и теоремы Пифагора следует, что:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_L^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

где X_L — реактивное сопротивление индуктивного элемента. Из этого выражения получаем:

$$\frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Отношение V/I называется **импедансом** цепи. Следовательно:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Этот результат можно было получить напрямую из векторной диаграммы, где на комплексной плоскости построен фазор комплексного сопротивления цепи (рис. 3.24б).

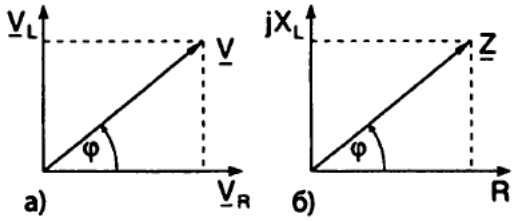


Рис. 3.24. Фазоры среднеквадратичных значений напряжений (а) и фазор комплексного сопротивления цепи (б)

Величину фазового сдвига определяют, исходя из треугольника фазоров:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R}.$$

Комплексное сопротивление цепи определяется суммой сопротивлений отдельных элементов:

$$\underline{Z} = R + jX_L = R + j\omega L. \qquad (3.36)$$

Итак:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi},$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \qquad (3.37)$$

3.5.1.3. Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Через цепь, состоящую из двух элементов, течет одинаковый ток. Ток, протекающий через резистор, и напряжение на нем совпадают по фазе, тогда как на конденсаторе напряжение отстает от тока на 90° или $\pi/2$. Напряжение на концах последовательного соединения рассматриваемых элементов равно сумме падений напряжения на них (рис. 3.25).

Из векторной диаграммы, построенной для данной цепи, и теоремы Пифагора следует, что:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_C^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2},$$

где X_C — реактивное сопротивление емкостного элемента. Импеданс Z рассматриваемой цепи определяется следующим выражением:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

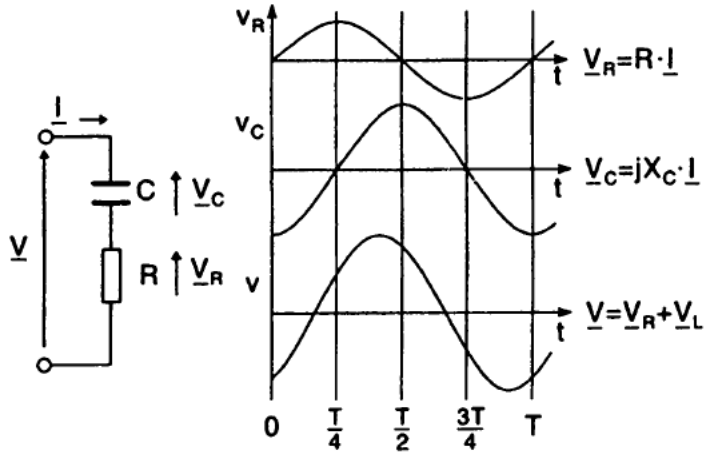


Рис. 3.25. Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Этот результат можно было получить напрямую из векторной диаграммы, где на комплексной плоскости построен фазор комплексного сопротивления цепи (рис. 3.26б).

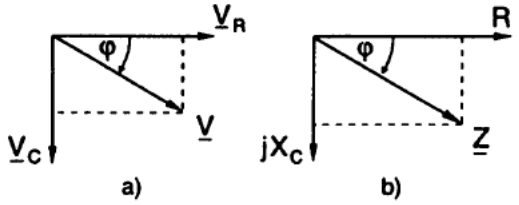


Рис. 3.26. Фазоры среднеквадратичных значений напряжений (а) и фазор комплексного сопротивления цепи (б)

- Величина разности фаз напряжения и тока лежит в диапазоне 0...–90° ($-\pi/2$). Чем больше резистивная составляющая импеданса цепи, тем меньше фазовый сдвиг.

Величину фазового сдвига определяют, исходя из треугольника фазоров:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_C}{V_R} = \frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\omega RC}.$$

Комплексное сопротивление цепи определяется суммой реактивного и резистивного сопротивлений:

$$\underline{Z} = R + jX_C = R - j\frac{1}{\omega C}. \qquad (3.38)$$

Итак:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi},$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_C}{R}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right). \qquad (3.39)$$

3.5.1.4. Последовательное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов

Примечание. Во всех реальных катушках индуктивности и конденсаторах происходят потери электрической энергии, которые при моделировании их последовательных соединений отображаются в виде резистивных элементов, последовательно с ними включенных.

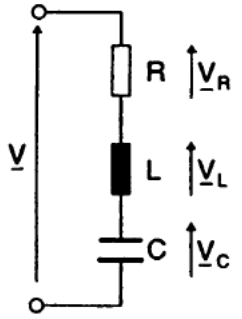


Рис. 3.27. Последовательное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов

Схема, показанная на рис. 3.27, называется **последовательным резонансным контуром**. Через все ее элементы протекает одинаковый ток. Ток, протекающий через резистор, и напряжение на нем совпадают по фазе, тогда как на конденсаторе напряжение отстает от тока на 90° или $\pi/2$, а на индуктивном элементе — опережает на 90° или $\pi/2$. Следовательно, напряжение на конденсаторе и напряжение на индуктивном элементе имеют противоположные знаки. Напряжение на концах последовательного соединения резистивного, емкостного и индуктивного элементов определяется суммой падений напряжений на них.

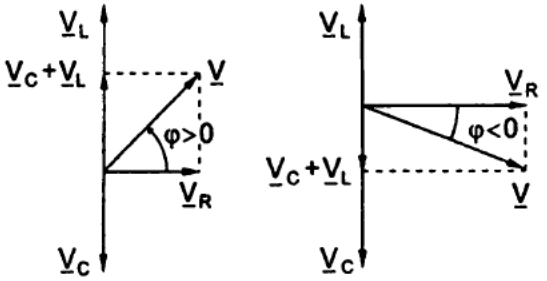


Рис. 3.28. Фазоры среднеквадратичных значений напряжений последовательного резонансного контура

Из векторной диаграммы (рис. 3.28) следует, что:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L + V_C)^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2(X_L + X_C)^2},$$

где X_C — реактивное сопротивление емкостного элемента, X_L — реактивное сопротивление индуктивного элемента. Импеданс контура определяется следующими выражениями:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}.$$

Реактивные сопротивления X_L и X_C имеют противоположные знаки. Знак разности фаз напряжения и тока в цепи определяется значениями емкости и индуктивности (рис. 3.29).

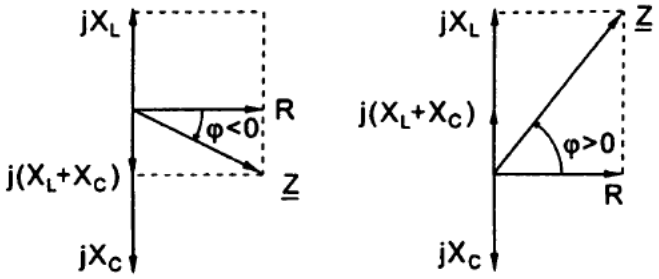


Рис. 3.29. Векторные диаграммы комплексного сопротивления последовательного резонансного контура, построенные для разных соотношений между X_L и X_C

- В последовательном резонансном контуре фазовый сдвиг напряжения относительно тока лежит в диапазоне –90...+90° ($\pm\pi/2$). Если в рассматриваемой схеме реактивное сопротивление емкостного элемента больше сопротивления индуктивного элемента, то она ведет себя как *RC*-цепь, если наоборот, то как *RL*-цепь.

Из векторной диаграммы можно найти величину фазового сдвига:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_L + V_C}{V_R} = \frac{X_L + X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}.$$

Комплексное сопротивление контура определяется суммой комплексных сопротивлений отдельных элементов:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j(X_L + X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \qquad (3.40)$$

Итак:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right). \qquad (3.41)$$

Значения реактивных сопротивлений элементов контура зависят от частоты тока, протекающего в их цепях. Реактивное сопротивление индуктивного элемента увеличивается пропорционально росту частоты, в то время как сопротивление емкостного элемента при этом падает. Резонанс в цепи последовательно соединенных индуктивного и емкостного элементов называется **резонансом напряжений**. На **резонансной частоте** реактивные сопротивления

обоих элементов равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому на этой частоте они взаимно уничтожаются, и сопротивление цепи определяется только его резистивной составляющей. При наступлении резонанса в цепи напряжения на индуктивном и емкостном элементах сравниваются друг с другом:

$$|V_L| = |V_C|, \quad |X_L| = |X_C|, \quad X_L + X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}.$$

Поскольку при резонансе в цепи реактивные сопротивления емкостного и индуктивного элементов равны друг другу, можно записать следующее выражение для резонансной частоты:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- На частотах ниже резонансной схема ведет себя как *RC*-цепь, а на частотах выше резонансной — как *RL*-цепь (рис. 3.30).

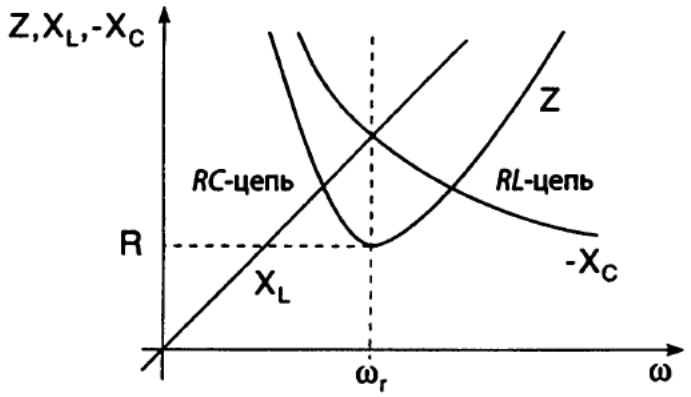


Рис. 3.30. Зависимость реактивного сопротивления и импеданса последовательного резонансного контура от частоты

3.5.2. Параллельные соединения

3.5.2.1. Общий случай

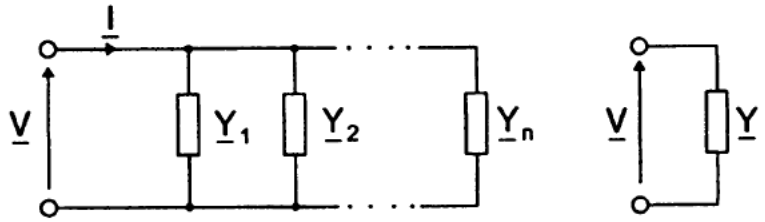


Рис. 3.31. Параллельное соединение пассивных компонентов

На рис. 3.31 показан общий случай параллельного соединения пассивных компонентов. Для токов и напряжений в цепях переменного тока по аналогии с цепями постоянного тока можно записать:

$$\underline{I} = \underline{V} \cdot \underline{Y}.$$

Как видно из записи, все величины являются комплексными. На каждом из элементов цепи происходит одинаковое падение напряжения, поэтому полная комплексная проводимость цепи определяется следующим выражением:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots + \underline{Y}_n.$$

Поскольку при суммировании комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части, получаем:

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} G_i + j \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

где G_S —активная составляющая полной проводимости цепи, а B_S — ее реактивная составляющая.

Комплексное сопротивление параллельного соединения нескольких пассивных компонентов определяется выражением:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \ldots \frac{1}{\underline{Z}_n}.$$

В случае двух параллельных элементов справедливо соотношение:

$$\underline{Z} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}. \qquad (3.42)$$

Если комплексное сопротивление каждого из элементов цепи представить в виде $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$, то выражение (3.42) преобразуется к виду:

$$\underline{Z} = \frac{R_1(R_2^2 + X_2^2) + R_2(R_1^2 + X_1^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{X_1(R_2^2 + X_2^2) + X_2(R_1^2 + X_1^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

3.5.2.2. Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

К каждому элементу цепи (рис. 3.32) приложено одинаковое напряжение. На резистивном элементе ток и напряжение совпадают по фазе, в то время как на индуктивном элементе ток отстает от напряжения на 90° или $\pi/2$. Полный ток цепи определяется суммой токов, протекающих в обеих ветвях.

Из векторной диаграммы (рис. 3.33а) и теоремы Пифагора следует, что:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{V^2 G^2 + V^2 B_L^2} = V \cdot \sqrt{G^2 + B_L^2},$$

где B_L — реактивная проводимость индуктивного элемента. Отсюда:

$$\frac{I}{V} = \sqrt{G^2 + B_L^2}.$$

Отношение I/V называется **полной проводимостью цепи** Y:

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B_L^2}. \qquad (3.43)$$

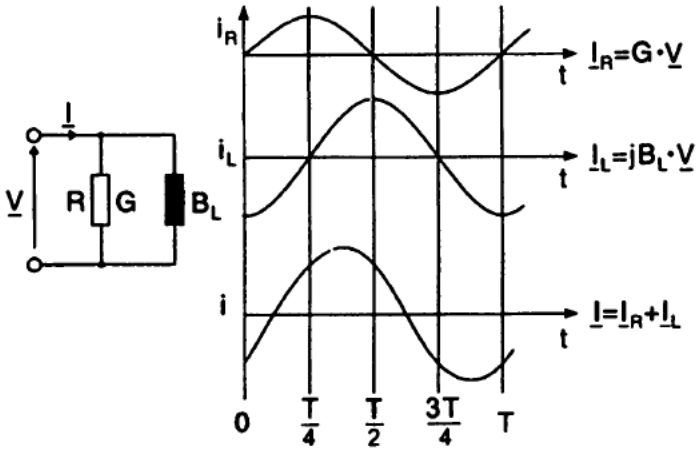


Рис. 3.32. Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

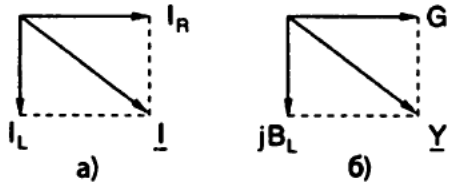


Рис. 3.33. Фазоры среднеквадратичных значений токов (а) и фазор комплексной проводимости цепи (б)

Такой же результат получается напрямую из векторной диаграммы, где на комплексной плоскости построен фазор комплексной проводимости цепи (рис. 3.33б).

- Величина разности фаз между током и напряжением лежит в диапазоне 0...–90° (–π/2). Она тем больше, чем больше величина индуктивности.

Из векторных диаграмм находится и величина фазового сдвига:

$$\operatorname{tg}\varphi_Y = \frac{I_L}{I_R} = \frac{B_L}{G} = -\frac{R}{\omega L}.$$

Комплексная проводимость цепи определяется суммой проводимостей отдельных элементов:

$$\underline{Y} = G + jB_L = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}. \qquad (3.44)$$

Итак:

$$\underline{Y} = |\underline{Y}|e^{j\varphi_Y},$$

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B_L^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2},$$

$$\varphi_Y = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_L}{G}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\omega L}\right). \qquad (3.45)$$

3.5.2.3. Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

К каждому элементу цепи (рис. 3.34) приложено одинаковое напряжение. На резистивном элементе ток и напряжение совпадают по фазе, в то время как на емкостном элементе ток опережает напряжение на 90° или π/2. Полный ток цепи определяется суммой токов, протекающих в обоих ветвях.

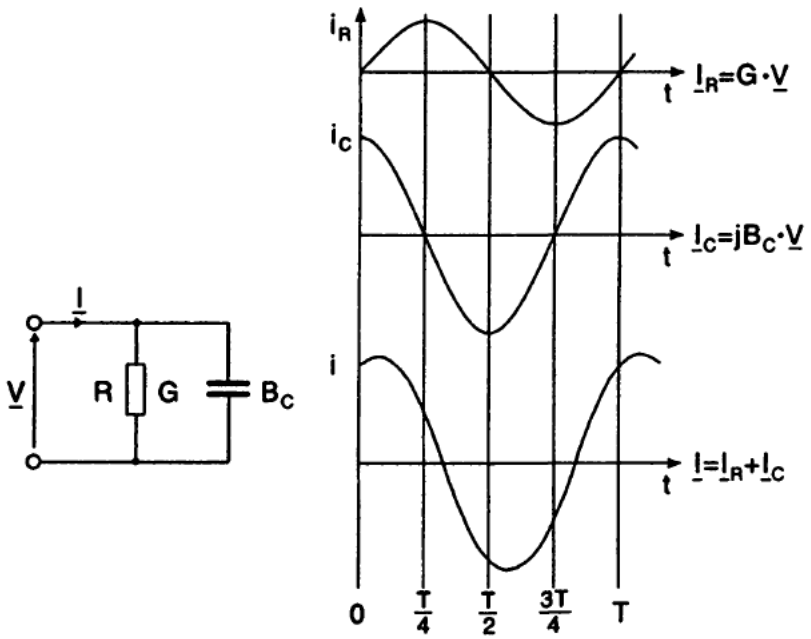


Рис. 3.34. Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

Из векторной диаграммы (рис. 3.35а) и теоремы Пифагора следует, что:

$$I=\sqrt{I_R^2+I_C^2}=\sqrt{V^2G^2+V^2B_C^2}=V\cdot\sqrt{G^2+B_C^2},$$

где B_C — реактивная проводимость емкостного элемента. Отсюда:

$$\frac{I}{V}=\sqrt{G^2+B_C^2}.$$

Отношение I/V называется **полной проводимостью цепи** Y:

$$Y=|\underline{Y}|=\sqrt{G^2+B_C^2}.$$

Такой же результат получается напрямую из векторной диаграммы, где на комплексной плоскости построен фазор комплексной проводимости цепи (рис. 3.35б).

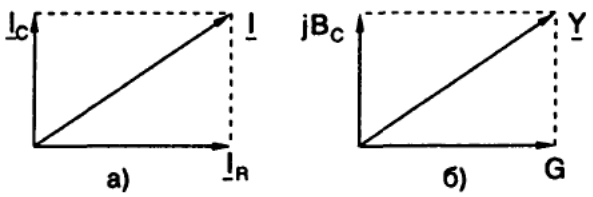


Рис. 3.35. Фазоры среднеквадратичных значений токов (а) и фазор комплексной проводимости цепи (б)

- Величина разности фаз между током и напряжением лежит в диапазоне 0...–90° (–π/2). Она тем меньше, чем меньше величина емкости.

Из векторных диаграмм (рис. 3.35) можно найти величину сдвига фаз тока относительно напряжения:

$$\operatorname{tg}\varphi_Y=\frac{I_C}{I_R}=\frac{B_C}{G}=\omega RC.$$

Комплексная проводимость цепи определяется следующим выражением:

$$\underline{Y} = G + jB_C = \frac{1}{R} + j\omega C. \tag{3.46}$$

Итак:

$$\underline{Y} = |\underline{Y}| e^{j\varphi_Y},$$

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2},$$

$$\varphi_Y = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_C}{G}\right) = \operatorname{arctg}(\omega RC). \tag{3.47}$$

3.5.2.4. Параллельное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов

Примечание. Во всех реальных катушках индуктивности и конденсаторах происходят потери электрической энергии, которые при моделировании их параллельных соединений отображаются в виде резистивных элементов, включенных параллельно с ними.

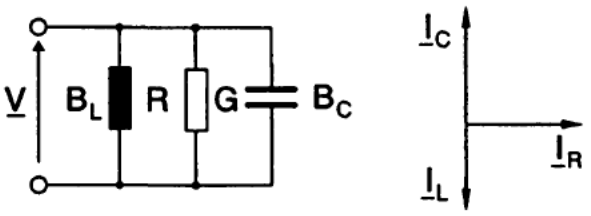


Рис. 3.36. Параллельное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов

Схема, показанная на рис. 3.36, называется **параллельным резонансным контуром**. На каждый элемент цепи подается одинаковое напряжение. Ток, протекающий через резистор, и напряжение на нем совпадают по фазе, тогда как на конденсаторе ток опережает напряжение на 90° или $\pi/2$, а на индуктивном элементе отстает от него на 90° или $\pi/2$. Следовательно, ток через конденсатор и ток через индуктивный элемент имеют противоположные знаки. Полный ток в цепи равен сумме токов в отдельных ветвях.

Из векторной диаграммы следует, что:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L + I_C)^2} = \sqrt{V^2G^2 + V^2(B_L + B_C)^2} = V \cdot \sqrt{G^2 + (B_L + B_C)^2},$$

где B_C — реактивная проводимость емкостного элемента, а B_L — реактивная проводимость индуктивного элемента. Полная проводимость контура определяется выражениями:

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + (B_L + B_C)^2}, \quad B_L = -\frac{1}{\omega L}, \quad B_C = \omega C.$$

Реактивные проводимости B_C и B_L имеют противоположные знаки. От соотношения значений индуктивности и емкости элементов зависит величина и знак разности фаз между током и напряжением в цепи (рис. 3.37).

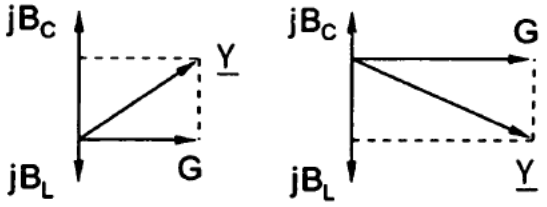


Рис. 3.37. Векторные диаграммы для разных значений B_C и B_L

- В параллельном резонансном контуре фазовый сдвиг напряжения относительно тока лежит в диапазоне –90...+90° ($\pm\pi/2$). Если в рассматриваемой схеме реактивная проводимость емкостного элемента больше реактивной проводимости индуктивного элемента, то она ведет себя как *RC*-цепь, а если наоборот, то как *RL*-цепь.

Из векторной диаграммы можно найти величину фазового сдвига:

$$\operatorname{tg}\varphi_Y = \frac{I_L + I_C}{I_R} = \frac{B_L + B_C}{G} = \frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{G} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Комплексная проводимость контура определяется суммой комплексных проводимостей отдельных элементов:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = G + j(B_L + B_C) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \qquad (3.48)$$

Итак:

$$\underline{Y} = \left|\underline{Y}\right| e^{j\varphi_Y},$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L + B_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\right) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2},$$

$$\varphi_Y = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_L + B_C}{G}\right) = \operatorname{arctg}\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]. \qquad (3.49)$$

Значения реактивных проводимостей элементов цепи зависят от частоты тока, протекающего в их цепях. Реактивная проводимость индуктивного элемента уменьшается пропорционально росту частоты, в то время как проводимость емкостного элемента при этом увеличивается. Резонанс в цепи параллельно соединенных индуктивного и емкостного элементов называется **резонансом токов**. На **резонансной частоте** реактивные проводимости обоих элементов равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому на этой частоте они взаимно уничтожаются, и проводимость цепи определяется только

ее резистивной составляющей. При наступлении резонанса в цепи справедливы следующие соотношения:

$$|I_L| = |I_C|, \quad |B_L| = |B_C|, \quad B_L + B_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_r L} = \omega_r C.$$

Отсюда выводится выражение для резонансной частоты:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- На частотах выше резонансной схема ведет себя как параллельная *RC*-цепь, а на частотах ниже резонансной — как параллельная *RL*-цепь (рис. 3.38).

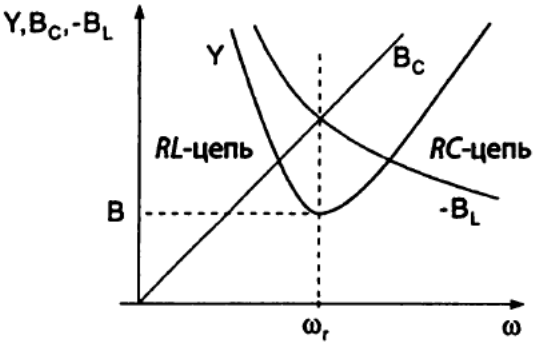


Рис. 3.38. Зависимость реактивной проводимости и полной проводимости параллельного резонансного контура от частоты

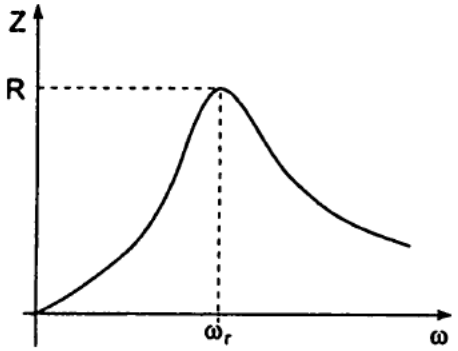
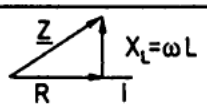
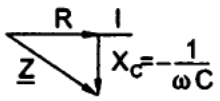
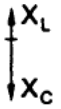


Рис. 3.39. Зависимость импеданса параллельной резонансной цепи от частоты

3.5.3. Обзор последовательных и параллельных соединений пассивных элементов

Таблица 3.6. Последовательные соединения

	Векторные диаграммы	Z	$\mathrm{tg}\,\varphi_Z$
RL		$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	$\frac{\omega L}{R}$
RC		$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$-\frac{1}{\omega RC}$
*LC**		$\left\|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right\|$	$\pm\infty$
	См. последовательные резонансные цепи	$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$
Значения фазовых углов приведены относительно полного тока.			

*Идеальный случай ($R = 0$). Для частот ниже резонансной фазовый сдвиг $\varphi = -90°$, а для частот выше резонансной — $\varphi = 90°$.

Таблица 3.7. Последовательные резонансные цепи

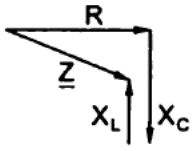
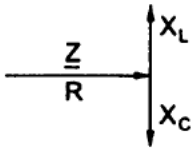
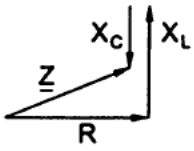
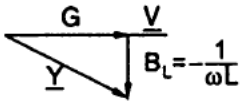
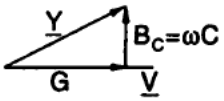
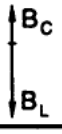
Частота	Векторные диаграммы	$\underline{Z}$	φ_Z
$f < f_r$		Резистивно-емкостный	–90...0°
$f = f_r$		Чисто резистивный	0°
$f > f_r$		Резистивно-индуктивный	0...90°
Резонансная частота: $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$			

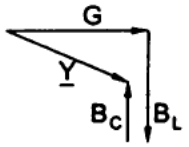
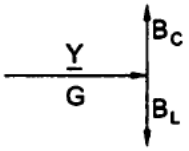
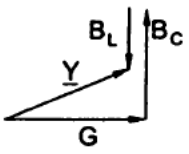
Таблица 3.8. Параллельные соединения

	Векторные диаграммы	$\underline{Y}$	$\operatorname{tg}\varphi_Y = \frac{B}{G}$
RL		$\frac{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}{\omega RL}$	$\frac{-R}{\omega L}$
RC		$\frac{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}{R}$	ωRC
LC*		$\left\lvert\frac{\omega^2 LC-1}{\omega L}\right\rvert$	$\pm\infty$
RLC	См. параллельные резонансные цепи	$\frac{\sqrt{R^2(\omega^2 LC-1)^2+(\omega L)^2}}{\omega RL}$	$\frac{R(\omega^2 LC-1)}{\omega L}$
Значения фазовых углов приведены относительно полного напряжения			

Примечание. $Z = 1/Y$, $R = 1/G$, $\varphi_Z = -\varphi_Y$.

*Идеальный случай ($R = \infty$).

Таблица 3.9. Параллельные резонансные цепи

Частота	Векторные диаграммы	$\underline{Z}$	φ_Z
$f<f_r$		Резистивно-индуктивный	90...0°
$f=f_r$		Чисто резистивный	0°
$f>f_r$		Резистивно-емкостный	0...–90°
Резонансная частота: $f_r=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.			

3.6. Преобразования электрических цепей

3.6.1. Преобразование параллельных цепей в последовательные и наоборот

Любая цепь, состоящая из последовательного соединения резистивного и реактивного элементов, может быть преобразована в параллельную цепь из активной и реактивной проводимостей (рис. 3.40). Схемы, показанные на рис. 3. 40, называются **эквивалентными**, поскольку при подаче на них одинакового переменного напряжения в них начинают течь одинаковые переменные токи (см. также раздел 1.3.6.1).

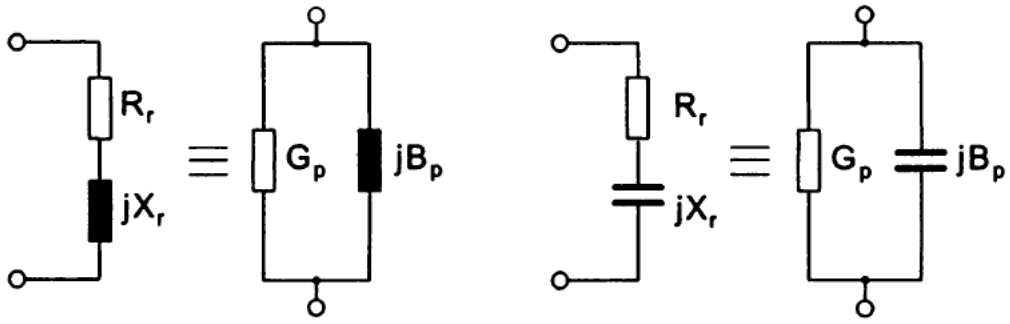


Рис. 3.40. Преобразование последовательной схемы в эквивалентную параллельную и наоборот

Условие эквивалентности двух схем заключается в равенстве их импедансов:

$$R_s + jX_s = \underline{Z} = \frac{1}{G_p + jB_p}.$$

Домножив числитель и знаменатель этого выражения на комлексно-сопряженную со знаменателем величину, получим:

$$R_s + jX_s = \underline{Z} = \frac{G_p - jB_p}{G_p^2 + B_p^2} = \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2} - j\frac{B_p}{G_p^2 + B_p^2}.$$

Таким образом, при преобразовании **параллельной схемы в эквивалентную последовательную схему** необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

$$R_s = \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2}, \quad X_s = \frac{-B_p}{G_p^2 + B_p^2}. \tag{3.50}$$

При преобразовании последовательной схемы в эквивалентную параллельную схему добиваются равенства комплексных проводимостей двух цепей, т. е.:

$$G_p + jB_p = \underline{Y} = \frac{1}{R_s + jX_s}.$$

Домножив числитель и знаменатель этого выражения на комлексно-сопряженную со знаменателем величину, получим:

$$G_p + jB_p = \underline{Y} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} = \frac{R_s}{G_s^2 + X_s^2} - j\frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}.$$

Таким образом, при преобразовании **последовательной схемы в эквивалентную параллельную схему** необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

$$G_p = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2}, \quad B_p = \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}. \tag{3.51}$$

Эти условия можно также записать в виде:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} = \frac{Z^2}{R_s}, \quad X_p = \frac{Z^2}{X_s}.$$

- Поскольку любое изменение частоты приводит к изменению импеданса рассматриваемых схем, такие преобразования справедливы **только при фиксированной угловой частоте** ω.
- Приведенные условия эквивалентности схем справедливы только для синусоидальных токов и напряжений.

Примечание. При анализе электрических цепей вместо замены схем на соответствующие эквивалентные схемы можно использовать основные правила сложения последовательных и параллельных импедансов.

3.6.2. Преобразования «звезда – треугольник» и «треугольник – звезда»

При анализе сложных электрических цепей часто используются следующие методы: метод контурных токов и метод узловых потенциалов. В зависимости от выбранного метода применяется преобразование либо «звезда – треугольник», либо «треугольник – звезда».

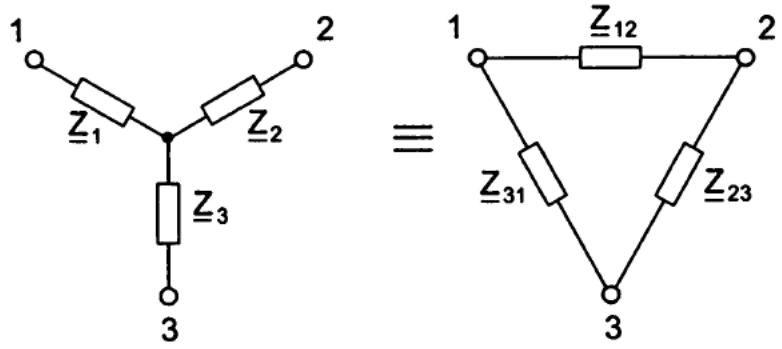


Рис. 3.41. Преобразования «звезда–треугольник» и «треугольник–звезда»

При использовании **преобразования «треугольник – звезда»** справедливы следующие соотношения (рис. 3.41):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \qquad (3.52)$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}.$$

Используя выражение для комплексного сопротивления элемента цепи $\underline{Z}_i = R_i + j \cdot X_i$, после некоторых преобразований системы уравнений (3.52) получаем:

$$R_1 = \frac{(R_{12}R_{31} - X_{12}X_{31})R + (R_{12}X_{31} + R_{31}X_{12})X}{R^2 + X^2},$$

$$X_1 = \frac{(R_{12}X_{31} + R_{31}X_{12})R - (R_{12}R_{31} - X_{12}X_{31})X}{R^2 + X^2},$$

$$R_2 = \frac{(R_{12}R_{23} - X_{12}X_{23})R + (R_{23}X_{12} + R_{12}X_{23})X}{R^2 + X^2},$$

$$X_2 = \frac{(R_{23}X_{12} + R_{12}X_{23})R - (R_{12}R_{23} - X_{12}X_{23})X}{R^2 + X^2},$$

$$R_3 = \frac{(R_{23}R_{31} - X_{23}X_{31})R + (R_{31}X_{23} + R_{23}X_{31})X}{R^2 + X^2},$$

$$X_3 = \frac{(R_{31}X_{23} + R_{23}X_{31})R - (R_{23}R_{31} - X_{23}X_{31})X}{R^2 + X^2}$$

при $R = R_{12} + R_{23} + R_{31}$ и $X = X_{12} + X_{23} + X_{31}$.

Для **преобразования «звезда — треугольник»** (рис. 3.41) справедливо:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3},$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}, \qquad (3.53)$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}.$$

Используя выражение для комплексного сопротивления элемента цепи $\underline{Z}_i = R_i + j \cdot X_i$, после некоторых преобразований системы уравнений (3.53) получаем:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{(R_1R_2 - X_1X_2)R_3 + (R_1X_2 + R_2X_1)X_3}{R_3^2 + X_3^2},$$

$$X_{12} = X_1 + X_2 + \frac{(R_1X_2 + R_2X_1)R_3 - (R_1R_2 - X_1X_2)X_3}{R_3^2 + X_3^2},$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{(R_2R_3 - X_2X_3)R_1 + (R_2X_3 + R_3X_2)X_1}{R_1^2 + X_1^2},$$

$$X_{23} = X_2 + X_3 + \frac{(R_2X_3 + R_3X_2)R_1 - (R_2R_3 - X_2X_3)X_1}{R_1^2 + X_1^2},$$

$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{(R_1R_3 + X_1X_3)R_2 + (R_3X_1 + R_1X_3)X_2}{R_2^2 + X_2^2},$$

$$X_{31} = X_1 + X_3 + \frac{(R_1X_3 + R_1X_3)R_2 - (R_1R_3 - X_1X_3)X_2}{R_2^2 + X_2^2}.$$

Пример. Для анализа Т-образной мостовой схемы, часто используемой при построении фильтров, можно применить преобразование «звезда – треугольник» (рис. 3.42).

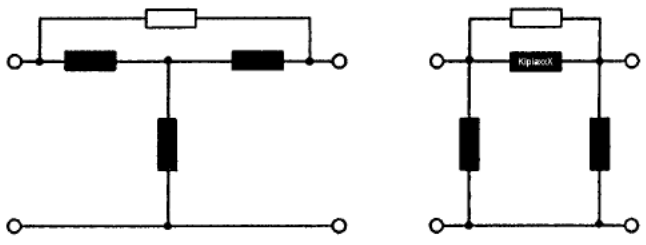


Рис. 3.42. Применение преобразования «звезда–треугольник»

Поскольку любое изменение частоты приводит к изменению импеданса рассматриваемых схем, такие преобразования справедливы **только при фиксированной угловой частоте** ω.

Приведенные условия эквивалентности схем справедливы только для синусоидальных токов и напряжений.

3.6.3. Схемы замещения

Две схемы называются **взаимно заменяемыми**, если *на всех частотах* импеданс одной из них пропорционален полной проводимости другой, т. е.:

$$\underline{Z}_2 = R_D^2 \cdot \underline{Y}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_1 = G_D^2 \cdot \underline{Z}_2, \tag{3.54}$$

где R_D^2 и G_D^2 являются вещественными константами, известными как **константы замещения**. В табл. 3.10 приведены варианты замещения некоторых элементов электрических цепей.

Таблица 3.10. Варианты замещения элементов электрических цепей

Пассивный элемент	Замещающий элемент
Сопротивление R	Сопротивление R_D^2/R
Индуктивный элемент L	Конденсатор $C = L/R_D^2$
Конденсатор C	Индуктивный элемент $L = R_D^2 C$
Источник напряжения V_S, R_S	Источник тока $I_S = V_S/R_S$, $G_S = 1/R_S$
Источник тока I_S, G_S	Источник напряжения $V_S = I_S G_S$, $R_S = 1/G_S$
Короткозамкнутая цепь	Разомкнутая цепь

Для активных элементов электрических цепей также существуют варианты замещения. Схемой замещения для источника напряжения с выходным напряжением V_S и внутренним сопротивлением R_S является источник тока с выходным током $I_S = V_S/R_S$, параллельно с которым включен элемент с проводимостью $G_S = 1/R_S$.

Такие электрические величины, как напряжение и ток, сопротивление и проводимость, являются взаимосвязанными. Если в какой-либо цепи через два элемента течет одинаковый ток, то в ее схеме замещения на два элемента будет подаваться одинаковое напряжение и наоборот. В табл. 3.11 приведены пары взаимозаменяемых схем.

Таблица 3.11. Варианты схем замещения

Схема	Соответствующая схема замещения
Последовательная цепь	Параллельная цепь
Последовательный резонансный контур	Параллельный резонансный контур
Т-образная цепь	П-образная цепь
Контур	Узел
Цепь в виде треугольника	Цепь в виде звезды
Цепь, управляемая напряжением	Цепь, управляемая током
Источник тока	Источник напряжения

- Если схема состоит из источника напряжения с внутренним сопротивлением R_S и нагрузочного сопротивления R_L, то константа замещения определяется следующим выражением: $R_D = R_S \cdot R_L$. При построении схем замещения источники тока и напряжения могут быть заменены на соответствующие эквивалентные схемы. При моделировании короткозамкнутых или разомкнутых цепей константа замещения R_D выбирается произвольным образом.

Примечание. Константы замещения выбираются, исходя из возможности реализации требуемых параметров схем при использовании доступных компонентов.

Пример. На рис. 3.43 показана схема, состоящая из источника напряжения в 1 МГц с внутренним сопротивлением 50 Ом, подключенного к нагрузке 50 Ом. Требуется разработать эквивалентную схему с меньшим количеством индуктивных элементов.

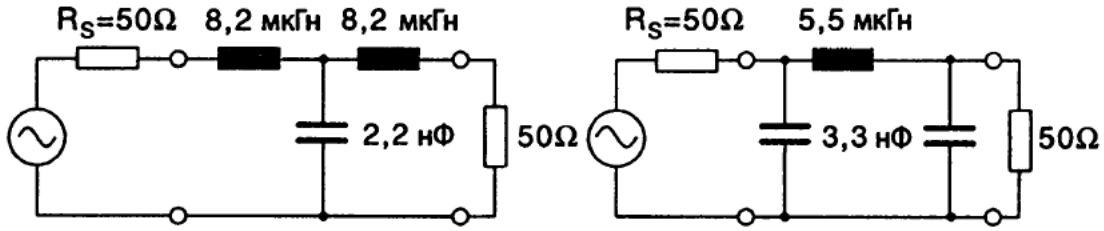


Рис. 3.43. Исходная схема и ее схема замещения

Решение. В схеме замещения два последовательных индуктивных элемента заменяются на два параллельных конденсатора, а конденсатор — на последовательно включенный индуктивный элемент. Константа замещения при этом равна: $R_D^2 = R_S \cdot R_L = 2500$ Ом^2, а параметры эквивалентной схемы:

$$C_D = \frac{L}{R_D^2} = \frac{8{,}2\ \text{мкГн}}{2500\ \text{Ом}^2} = 3{,}3\ \text{нФ}, \quad L_D = C \cdot R_D^2 = 2{,}2\ \text{нФ} \cdot 2500\ \text{Ом}^2 = 5{,}5\ \text{мкГн}.$$

3.7. Простые электрические цепи

3.7.1. Делители комплексных напряжений и токов

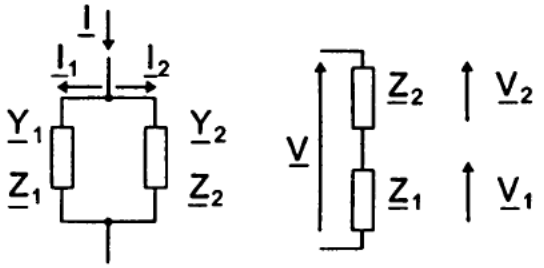


Рис. 3.44. Деление тока и напряжение при помощи комплексных сопротивлений

В **делителях тока** на оба комплексных сопротивления (рис. 3.44) подается одинаковое переменное напряжение, поэтому можно записать следующие соотношения:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}. \tag{3.55}$$

- Ток, поступающий на схему, делится пропорционально комплексной проводимости отдельных ветвей.

В **делителях напряжения** через оба комплексных сопротивления течет одинаковый переменный ток, поэтому для нахождения коэффициента деления используют выражение:

$$\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \tag{3.56}$$

- Напряжение, поданное на схему, делится пропорционально комплексным сопротивлениям ее элементов.

Если на делитель напряжений подается напряжение $\underline{V}$, то его выходное напряжение определяется выражением:

$$\underline{V}_2 = \underline{V} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \tag{3.57}$$

Примечание. В случае, когда все комплексные сопротивления являются чисто резистивными, справедливы правила деления токов и напряжений, применяемые в цепях постоянного тока.

Примечание. Поскольку значения реактивных составляющих комплексных сопротивлений зависят от частоты, **частотно-зависимым** является и выражение для коэффициента деления делителя напряжений (3.56). Схемы, обеспечивающие частотно-зависимую связь входного и выходного напряжений, называются **фильтрами**.

При проведении измерений желательно, чтобы коэффициент деления используемого делителя напряжений не зависел от частоты. Уравнение (3.56) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Очевидно, что коэффициент деления не зависит от частоты только тогда, когда он представлен вещественным числом. Для выполнения этого условия величина экспоненциального множителя должна быть вещественным числом. Это означает, что для фазовых углов φ, лежащих в диапазоне $-90...+90°$, $\varphi_1 = \varphi_2$. Отсюда следует, что:

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{X_1}{X_2}. \tag{3.58}$$

- Вывод: коэффициент деления делителя напряжений не зависит от частоты, если равны отношения активных и реактивных составляющих комплексных

сопротивлений его элементов. Другими словами, в частотно-независимом делителе напряжений должны быть равны постоянные времени, определяемые комплексными сопротивлениями цепи: $\tau = R \cdot C$ или $\tau = L/R$.

Применение. При проведении измерений при помощи осциллографа требуется обеспечивать наиболее достоверное представление сигнала.

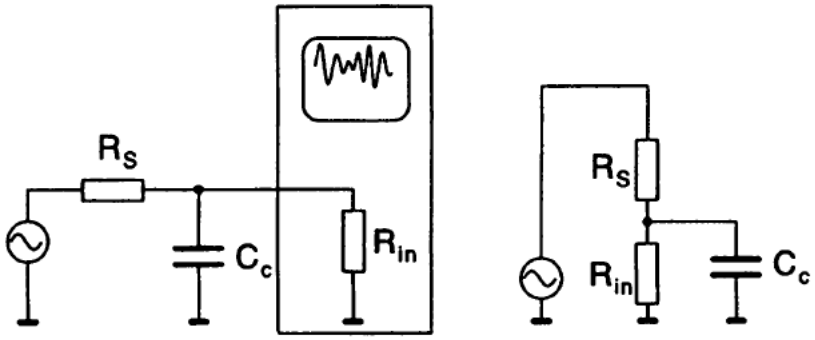


Рис. 3.45. Подключение осциллографа к источнику напряжения с внутренним сопротивлением R_S и эквивалентная схема такого подключения

При подключении источника переменного напряжения с внутренним сопротивлением R_S к осциллографу его нагрузкой является входное сопротивление R_{in} осциллографа. Соединительный кабель вносит в схему дополнительную емкость C_c, показанную на рисунке в виде конденсатора, параллельного резистору R_{in}. Из схемы на рис. 3.45 видно, что на высоких частотах при подключении осциллографа к источнику с большим внутренним сопротивлением коэффициент деления получившегося делителя напряжений будет падать. Этого можно избежать, применяя **щуп с делителем напряжений с частотной коррекцией** (рис. 3.46).

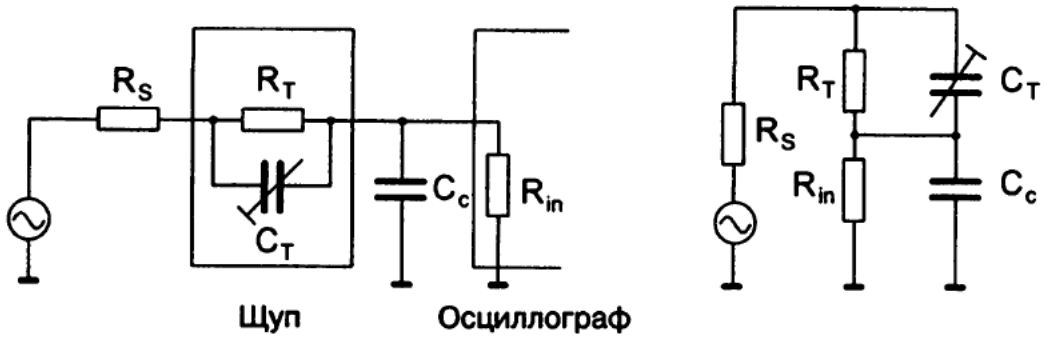


Рис. 3.46. Подключение щупа осциллографа и эквивалентная схема измерительной цепи

Регулируя емкость щупа, можно обеспечить равенство постоянных времени (фазовых углов) двух параллельных *RC*-цепей: $R_1C_1 = R_2C_2$. Это дает возможность реализовать коэффициент деления входного сигнала, не зависящий от его частоты. Коэффициент деления щупа (часто 10:1) компенсируется в осциллографе соответствующим повышением усиления сигнала. Одновременно с этим щуп увеличивает входное сопротивление измерительной системы во столько же раз, чему равен его коэффициент деления.

3.7.2. Нагруженный делитель комплексных напряжений

Выражение (3.56) справедливо только для ненагруженного делителя напряжений, т. е. при разомкнутой цепи нагрузки. В реальной жизни, делитель с одной стороны подключается к источнику напряжения с внутренним сопротивлением R_S, а с другой стороны к нему подсоединяется нагрузка с импедансом Z_L (рис. 3.47). **Входной импеданс** делителя напряжений и импеданс Z_L являются нагрузкой для источника напряжения. А **выходной импеданс** делителя напряжений состоит из внутреннего сопротивления источника и комплексного сопротивления самого делителя.

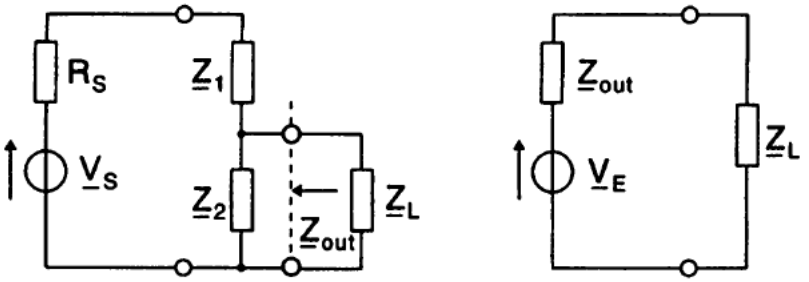


Рис. 3.47. Нагруженный делитель напряжений, подключенный к источнику питания, и его эквивалентная схема

Таким образом, входное и выходное комплексные сопротивления делителя напряжений определяются следующими выражениями:

$$\underline{Z}_{in} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \left\| \underline{Z}_L = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}, \right.$$

$$\underline{Z}_{\sqrt{out}} = \underline{Z}_2 \left\| (\underline{Z}_1 + R_S) = \frac{\underline{Z}_2 \cdot (\underline{Z}_1 + R_S)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_S}. \right.$$

В ненагруженном состоянии напряжение в разомкнутой цепи нагрузки делителя напряжений, подключенного к источнику питания с напряжением $\underline{V}_s$, равно:

$$\underline{V}_\infty = \underline{V}_S \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_S}.$$

При замыкании цепи нагрузки через делитель напряжений потечет ток короткого замыкания:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{V}_S}{\underline{Z}_1 + R_S}.$$

Выходной импеданс делителя напряжений определяется следующим соотношением:

$$\underline{Z}_{out} = \frac{\text{напряжение разомкнутой цепи}}{\text{ток короткозамкнутой цепи}} = \frac{\underline{V}_\infty}{\underline{I}_0}. \qquad (3.59)$$

Напряжение источника питания, показанное на эквивалентной схеме, дошедшее до нагрузки, находится из выражения:

$$\underline{V}_E = \underline{V}_S \cdot \frac{\underline{Z}_2 \| \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 \| \underline{Z}_L + \underline{Z}_1 + R_S}.$$

3.7.3. Согласование импедансов

В системах связи для исключения переотражений сигналов необходимо обеспечивать выполнение следующего условия: источник сигналов и нагрузка должны иметь одинаковый импеданс.

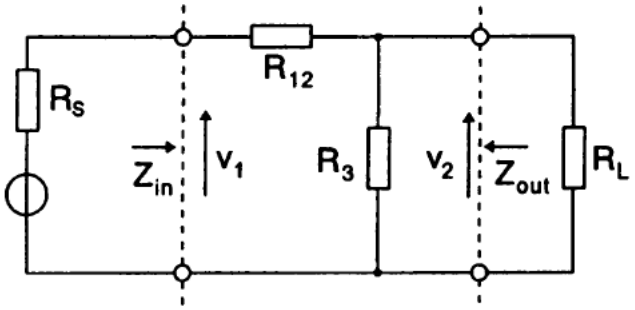


Рис. 3.48. Согласование импедансов при $R_S > R_L$

Для согласования импедансов можно использовать схему, показанную на рис. 3.48. Эта схема хорошо работает тогда, когда **внутренний импеданс** источника сигнала **больше импеданса нагрузки**. Параметры дополнительных элементов подбираются таким образом, чтобы входной импеданс схемы с подсоединенной нагрузкой равнялся внутреннему импедансу источника. С другой стороны, выходной импеданс схемы должен быть равен импедансу нагрузки. Если импедансы нагрузки и источника сигнала определяются действительными числами, то справедливы следующие соотношения:

$$Z_{in} = R_{12} + R_3 \| R_L = R_{12} + \frac{R_3 \cdot R_L}{R_3 + R_L}, \quad Z_{out} = \frac{R_3(R_{12} + R_S)}{R_3 + R_{12} + R_S}.$$

Для согласования импедансов должны выполняться условия:

$$Z_{in} = R_S \quad \text{и} \quad Z_{out} = R_L,$$

из которых выводятся выражения для нахождения параметров дополнительных сопротивлений:

$$R_{12} = R_S \cdot \sqrt{1 - \frac{R_L}{R_S}} \quad \text{и} \quad R_3 = \frac{R_L}{\sqrt{1 - \frac{R_L}{R_S}}} \quad \text{при} \quad R_S > R_L. \qquad (3.60)$$

Отношение напряжений:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{R_S}{R_L}\left(1+\sqrt{1-\frac{R_L}{R_S}}\right)=\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{R_L}{R_S}}} \qquad (3.61)$$

при выполнении условия $R_S > R_L$ всегда больше единицы, поэтому рассматриваемая схема ослабляет входной сигнал. На рис. 3.50 показана модификация схемы согласования импедансов, в которой сопротивление R_{12} заменено на два симметрично расположенных резистора R_1 и R_2.

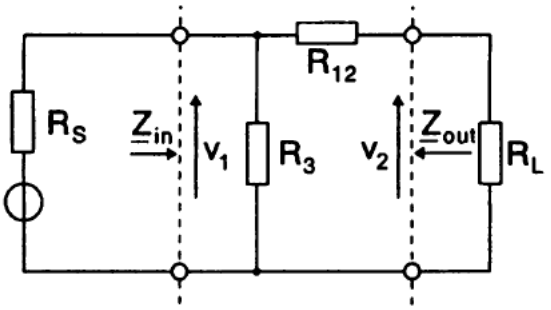


Рис. 3.49. Согласование сопротивлений при $R_S < R_L$

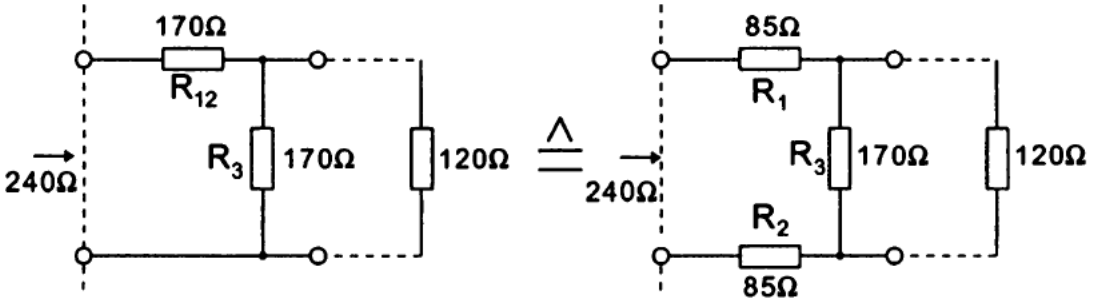


Рис. 3.50. Две схемы согласования источника сигнала с внутренним сопротивлением 240 Ом с нагрузкой 120 Ом

На рис. 3.49 показана схема согласования импедансов, хорошо работающая при выполнении условия: **сопротивление нагрузки превышает сопротивление источника сигнала**. Здесь резистор R_3 включен параллельно входным, а не выходным выводам схемы.

Входной и выходной импедансы рассматриваемой схемы определяются выражениями:

$$Z_{in}=R_3 \parallel (R_{12}+R_L)=\frac{R_3\cdot(R_{12}+R_L)}{R_3+R_{12}+R_L}, \quad Z_{out}=R_{12}+(R_3 \parallel R_S)=R_{12}+\frac{R_3\cdot R_S}{R_3+R_S}.$$

Из условий согласования импедансов $Z_{in}=R_S$ и $Z_{out}=R_L$ выводятся соотношения для нахождения сопротивлений R_{12} и R_3:

$$R_{12}=R_L\cdot\sqrt{1-\frac{R_S}{R_L}} \quad \text{и} \quad R_3=\frac{R_S}{\sqrt{1-\frac{R_S}{R_L}}} \quad \text{при} \quad R_S > R_L. \qquad (3.62)$$

Отношение напряжений:

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 + \frac{R_{12}}{R_L} = 1 + \sqrt{1 - \frac{R_S}{R_L}} \qquad (3.63)$$

всегда больше единицы. Это означает, что данная схема также ослабляет входной сигнал. На рис. 3.51 показана модификация схемы согласования импедансов, в которой сопротивление R_{12} заменено двумя симметрично расположенными резисторами R_1 и R_2.

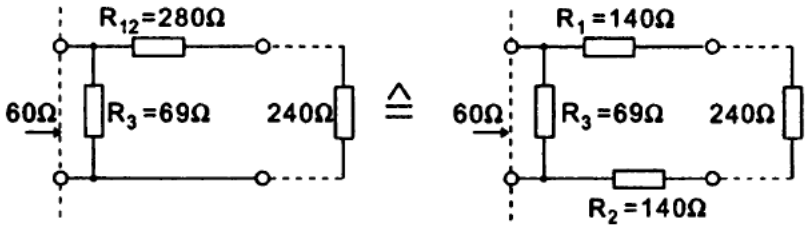


Рис. 3.51. Две схемы согласования источника сигнала с внутренним сопротивлением 60 Ом с нагрузкой 240 Ом

Примечание. Для уменьшения потерь на резистивных компонентах при согласовании импедансов часто применяют трансформаторы.

3.7.4. Делитель напряжения с заданными входным и выходным сопротивлениями

Существует две схемы делителей напряжений: **Т-образная** и **П-образная**. Входной импеданс обеих схем равен сопротивлению нагрузки R_L при заданном значении внутреннего сопротивления источника напряжения (рис. 3.52).

При известном коэффициенте ослабления схемы $a = \frac{V_1}{V_2} > 1$ параметры элементов **Т-образного** делителя напряжений определяются следующими выражениями:

$$R_1 = R_2 = R_L \cdot \frac{a-1}{a+1} \quad \text{при} \quad a > 1 \quad \text{и} \quad R_S = R_L,$$

$$R_3 = R_L \cdot \frac{2a}{a^2 - 1}.$$

Аналогичные соотношения для **П-образного** делителя записываются в виде:

$$R_1 = R_2 = R_L \cdot \frac{a+1}{a-1} \quad \text{при} \quad a > 1 \quad \text{и} \quad R_S = R_L,$$

$$R_3 = R_L \cdot \frac{a^2 - 1}{2a}.$$

Примечание. Обе схемы делителей являются взаимозаменяемыми. В данном случае константа замещения равна $R_S R_L$.

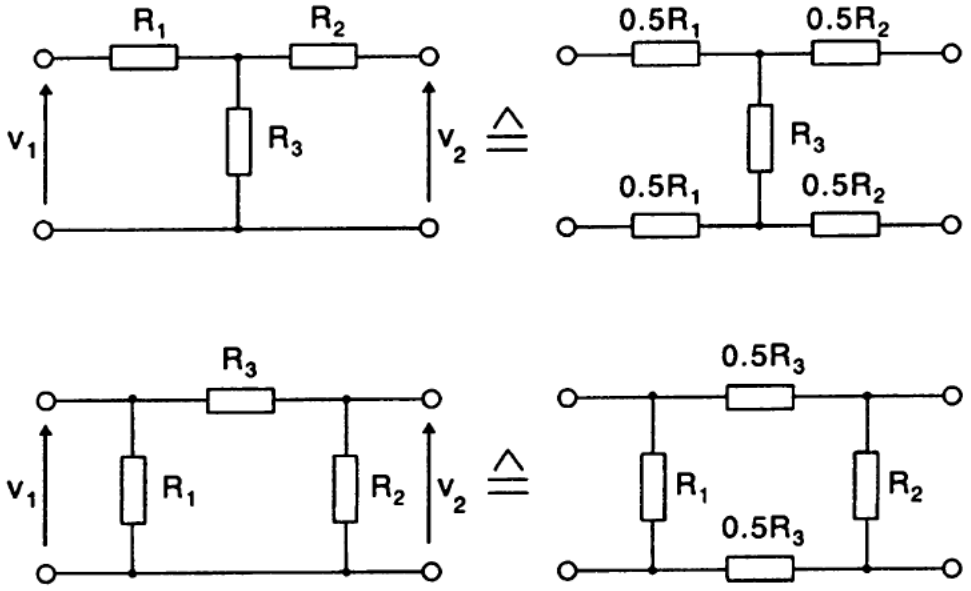


Рис. 3.52. Т-образная и П-образная схемы делителей напряжения и их симметричные модификации

Пример. Источник напряжения обладает внутренним сопротивлением 600 Ом, и сопротивление нагрузки составляет также 600 Ом. Требуется разработать Т-образный и П-образный делители напряжений, обеспечивающие ослабление входного сигнала в 5 раз (т. е. $a = 5$).

Решение показано на рис. 3.53.

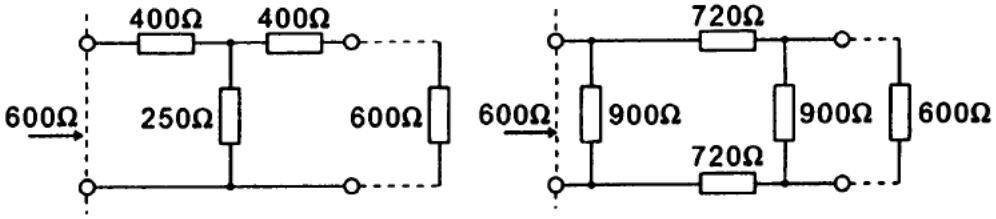


Рис. 3.53. Т-образная и П-образная схемы делителей напряжений в соотношении 1:5 (внутреннее сопротивление источника напряжения и нагрузка равны 600 Ом)

3.7.5. Фазовращатели

Фазовый сдвиг между двумя синусоидальными сигналами равен:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{мнимая часть переменной величины}}{\text{действительная часть переменной величины}}.$$

В таблице 3.12 приведены условия получения фазовых сдвигов 45°, 90° и 180°.

Таблица 3.12. Условия получения определенных фазовых сдвигов

Фазовый сдвиг	Условия
$45° = +\pi/4$	$\mathrm{Re}(\underline{V}_2) = \mathrm{Im}(\underline{V}_2)$
$-45° = -\pi/4$	$\mathrm{Re}(\underline{V}_2) = -\mathrm{Im}(\underline{V}_2)$
$90° = +\pi/2$	$\underline{V}_2 = j\underline{V}_1 \cdot k$
$-90° = -\pi/2$	$\underline{V}_2 = -j\underline{V}_1 \cdot k$
$180° = +\pi$	$\underline{V}_2 = -\underline{V}_1 \cdot k$
Re — действительная часть, Im — мнимая часть, k — положительная вещественная константа, зависящая от R-, L- и C-компонентов цепи.	

3.7.5.1. RC-фазовращатель

Для получения фазового сдвига между входным и выходным напряжением, равного 45°, можно использовать схему, показанную на рис. 3.54.

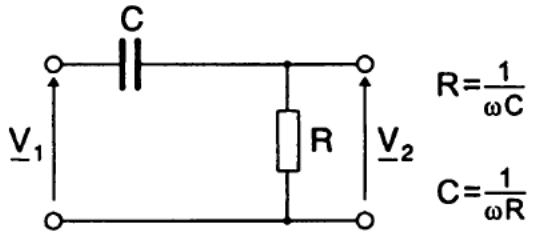


Рис. 3.54. RC-фазовращатель на 45°

Выходное напряжение рассматриваемой схемы равно:

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \cdot \frac{R}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \underline{V}_1 \cdot \frac{\omega RC}{\omega RC - j}.$$

Разделив это выражение на мнимую и действительную части, получим:

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \cdot \frac{\omega RC(\omega RC + j)}{(\omega RC)^2 + 1} = \underline{V}_1 \cdot \frac{\omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}.$$

Для получения фазового сдвига 45° необходимо условие $\mathrm{Re}(\underline{V}_2) = \mathrm{Im}(\underline{V}_2)$, т. е.

$$\omega^2 R_{45}^2 C^2 = \omega R_{45} C \quad \Rightarrow \quad R_{45} = \frac{1}{\omega C}. \tag{3.64}$$

В рассматриваемом случае отношение напряжений определяется выражением:

$$\frac{|\underline{V}_2|}{|\underline{V}_1|} = \left| \frac{R_{45}}{R_{45} - j\dfrac{1}{\omega C}} \right| = \left| \frac{1}{1 - j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

Примечание. Величина $\omega = \dfrac{1}{RC}$ называется **частотой излома** амплитудо-частотной характеристики или **критической частотой**, а произведение RC — **постоянной времени** RC-цепи.

Фазовый сдвиг на 90° не может быть получен при помощи простой *RC*-цепи, поскольку для этого сопротивление *R* необходимо сделать нулевым, что невозможно. Такой сдвиг реализуется на двухкаскадной *RC*-цепи, показанной на рис. 3.55. Из рисунка видно, что эта схема представляет собой делитель напряжений, для которого после некоторых преобразований можно вывести следующее соотношение:

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \cdot \frac{R^2}{\underline{Z}_C^2 + 2R\underline{Z}_C + R^2}. \tag{3.65}$$

Для того чтобы $\underline{V}_2$ было сдвинуто относительно $\underline{V}_1$ на 90°, должно выполняться условие $\underline{V}_1 = jk\underline{V}_2$. Домножив и числитель, и знаменатель уравнения (3.65) на j, получим выражение:

$$\underline{V}_2 = j\underline{V}_1 \frac{R^2}{j\underbrace{(\underline{Z}_C^2 + R^2)}_{\text{действительная часть}} + j2\underbrace{R\underline{Z}_C}_{\text{мнимая часть}}}.$$

Для выполнения условия $\underline{V}_1 = jk\underline{V}_2$ выражение в круглых скобках последнего уравнения должно быть равно 0. Тогда можно сделать вывод:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_C^2 + R^2 = 0 \\ \underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad R_{90} = \frac{1}{\omega C}. \tag{3.66}$$

В этом случае отношение выходного напряжения ко входному определяется соотношением:

$$\frac{|\underline{V}_2|}{|\underline{V}_1|} = \frac{\omega RC}{2} = \frac{1}{2}. \tag{3.67}$$

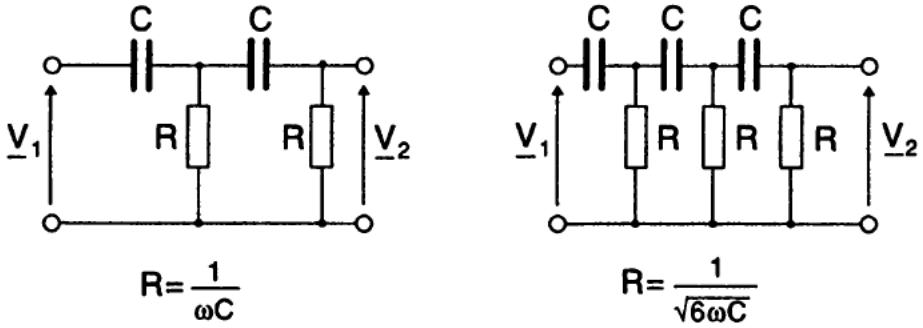


Рис. 3.55. Фазовращатель на 90° (слева) и на 180° (справа)

Фазовый сдвиг на 180° можно получить при помощи трехкаскадной *RC*-цепи (правая часть рис. 3.55). При этом должно выполняться условие $\underline{V}_1 = -k\underline{V}_2$. Анализ схемы, аналогичный анализу предыдущей схемы, ведет к получению соотношения:

$$R_{180} = \frac{1}{\sqrt{6}\omega C}.$$

В этом случае отношение выходного напряжения ко входному определяется соотношением:

$$\frac{|\underline{V}_2|}{|\underline{V}_1|} = \frac{1}{29}. \tag{3.68}$$

Примечание. Для получения указанных фазовых сдвигов могут также применяться фазовые фильтры и мосты переменного тока.

3.7.5.2. Альтернативные фазовращающие цепи

Схема, показанная на рис. 3.56, обеспечивает фазовый сдвиг тока I_2 относительно напряжения, приложенного к цепи, равный 90°.

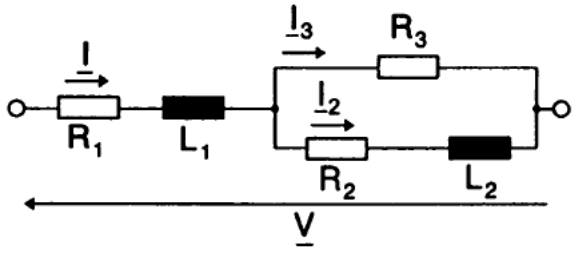


Рис. 3.56. Схема, осуществляющая фазовый сдвиг тока I_2

Полное напряжение цепи определяется выражением:

$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = (\underline{I}_2 + \underline{I}_3)(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2).$$

На резисторе R_3 происходит такое же падение напряжения, как на последовательном соединении элементов R_2 и L_2, поэтому можно записать следующие соотношения:

$$\underline{I}_3 \cdot R_3 = \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_2 \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_3},$$

$$\underline{V} = \underline{I}_2\left(R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_3} + j\frac{\omega R_1 L_2}{R_3} + j\omega L_1 + j\frac{\omega R_2 L_1}{R_3} - \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_3} + R_2 + j\omega L_2\right).$$

Для того чтобы ток отставал от напряжения на 90°, выражение в круглых скобках должно быть чисто мнимым, т. е. сумму всех действительных компонентов при этом можно приравнять нулю:

$$R_1 R_3 + R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 + R_2 R_3 = 0.$$

Отсюда получаем, что при

$$R_3 = \frac{\omega^2 L_1 L_2 - R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.69}$$

отставание тока в нижней ветви составляет $\pi/2$.

Схема, показанная на рис. 3.57, в которой резистор R_3 заменен на конденсатор, обладающий малыми потерями, также позволяет получить в нижней ветви фазовый сдвиг тока отно-

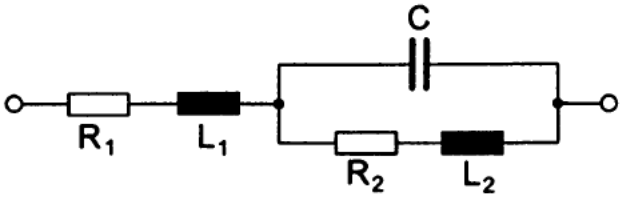


Рис. 3.57. Схема, осуществляющая фазовый сдвиг тока в индуктивном элементе L_2

сительно полного напряжения цепи. При значении емкости конденсатора, равной:

$$C = \frac{R_1 + R_2}{\omega^2 (L_1 R_2 + L_2 R_1)}, \tag{3.70}$$

отставание тока от напряжения составляет 90°.

Интерес представляет схема, показанная на рис. 3.58. Эта схема подключается к источнику синусоидального напряжения. Сопротивление R_2 выбирается таким, чтобы при размыкании ключа не происходило отклонения стрелки амперметра.

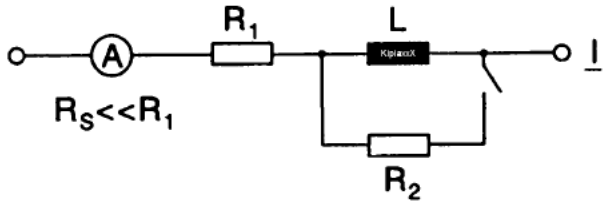


Рис. 3.58. Парадокс цепи переменного тока

Постоянные показания амперметра означают, что и при замкнутом, и при разомкнутом состояниях ключа в цепи течет одинаковый ток. Комплексный импеданс схемы определяется следующими выражениями:

- при разомкнутом ключе:

$$\underline{Z}_\infty = R_1 + j\omega L \quad \Rightarrow \quad Z_\infty^2 = R_1^2 + (\omega L)^2,$$

- при замкнутом ключе:

$$\underline{Z}_0 = R_1 + \frac{j\omega L \cdot R_2}{j\omega L + R_2} = \frac{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}{j\omega L + R_2} \quad \Rightarrow \quad Z_0^2 = \frac{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}{\omega^2 L^2 + R_2^2}.$$

Из условия равенства импедансов находим значение сопротивления R_2:

$$R_2 = \frac{(\omega L)^2}{2R_1}. \tag{3.71}$$

Замыкание ключа приводит к изменению фазы тока, но не его величины.

3.7.6. Мосты переменного тока

3.7.6.1. Условия равновесия мостовых схем

На рис. 3.59 показано несколько вариантов представлений мостовых схем.

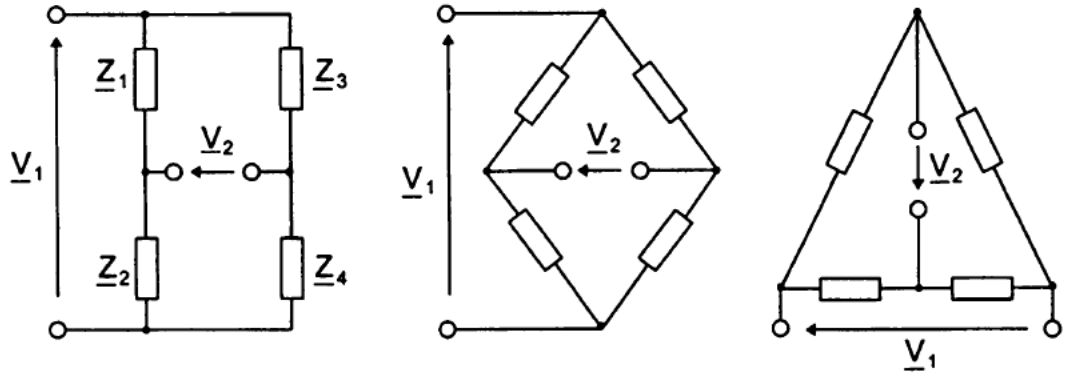


Рис. 3.59. Варианты представления мостовых схем

В ненагруженном состоянии через импедансы моста $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ течет один и тот же ток, и они представляют собой делитель напряжения. То же самое справедливо и для импедансов $\underline{Z}_3$ и $\underline{Z}_4$. Выходное напряжение $\underline{V}_2$ определяется разностью напряжений на выводах делителей напряжений. Мост считается **уравновешенным**, когда:

$$\underline{V}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}. \tag{3.72}$$

Выражение (3.72) называется **условием равновесия мостовой схемы.**

Отношение импедансов в уравнении (3.72) является комплексным, поэтому на практике должны выполняться два условия:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad \text{и} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4.$$

- Для достижения равновесия мостов переменного тока необходимо выполнение двух условий: одно касается абсолютных значений, а другое фаз комплексных сопротивлений в плечах схем.

Примечание. Условия равновесия мостовых схем переменного тока справедливы для одной заданной частоты, поэтому измерительные мосты работают только с синусоидальными сигналами. Однако существуют специальные частотно-независимые мостовые схемы.

3.7.6.2. Применение измерительного моста переменного тока

Условие равновесия моста (3.72) можно использовать для определения величины импеданса, стоящего в одном из его плечей.

На рис. 3.60 показан **мост Вина**, используемый для измерения параметров конденсатора, необходимых для построения его эквивалентной схемы. В одну из диагоналей моста включается нуль-индикатор (например, гальванометр или наушник) для определения достижения условий, наиболее близких состоянию равновесия. Мнимая часть неизвестного импеданса находится путем регулировки резистора R_4 до получения минимальных показаний индикатора. При этом:

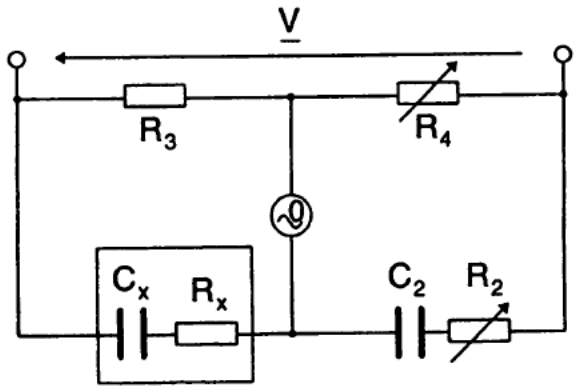


Рис. 3.60. Мост Вина для измерения емкости конденсатора C_x и сопротивления его потерь R_x

$$\frac{X_{C_x}}{X_{C_2}} = \frac{\dfrac{1}{\omega\ C_x}}{\dfrac{1}{\omega\ C_2}} = \frac{C_2}{C_x} = \frac{R_3}{R_4}.$$

После этого определяется действительная часть неизвестного импеданса. Для этого производят настройку резистора R_2 до достижения выполнения условия:

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

При проведении второго этапа балансировки правая часть последнего уравнения не должна меняться. После этого вычисляются параметры исследуемого конденсатора:

$$C_x = C_2 \cdot \frac{R_4}{R_3}, \quad R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}.$$

3.8. Мощность в цепи переменного тока

3.8.1. Мгновенная мощность

Мгновенная мощность в цепи синусоидального тока определяется выражением:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t).$$

3.8.1.1. Мощность в резистивной цепи

Ток и напряжение в чисто резистивной цепи совпадают по фазе (рис. 3.61). При синусоидальном напряжении мгновенная мощность равна:

$$p(t) = \hat{v} \sin \omega t \cdot \hat{i} \sin \omega t = \hat{v} \cdot \hat{i} \cdot \sin^2 \omega t = VI(1 - \cos 2\omega t),$$

где V и I — среднеквадратичные значения напряжения и тока. Мгновенная мощность в резистивной цепи является периодической функцией, значения которой всегда положительны, а частота в два раза превышает частоту напряжения.

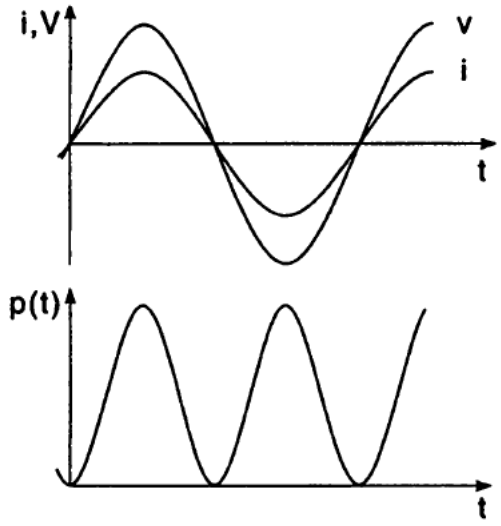


Рис. 3.61. Ток, напряжение и мгновенная мощность в резистивной цепи

3.8.1.2. Мощность в цепи с реактивными элементами

Напряжение на конденсаторе опережает ток на 90° ($\varphi = -\pi/2$). Здесь φ —фазовый угол напряжения относительно тока. В этом случае мгновенная мощность $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительные и отрицательные полуволны сигнала мощности равны по величине (рис. 3.62, слева). Одну часть полупериода конденсатор запасает энергию, а другую — отдает ее назад. В случае резистивно-емкостной нагрузки получается несколько другой результат (рис. 3.62, справа): часть энергии потребляется резистивным компонентом нагрузки, а оставшаяся часть возвращается обратно к источнику напряжения. Мощность в индуктивной и резистивно-индуктивной цепях изменяется аналогичным образом.

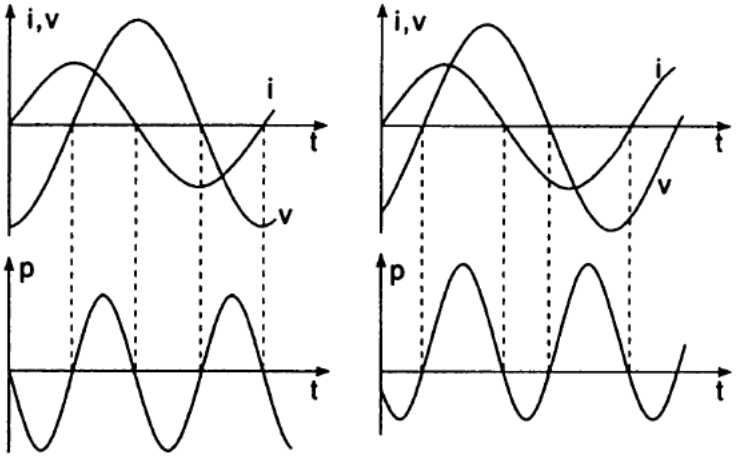


Рис. 3.62. Ток, напряжение и мгновенная мощность на конденсаторе и на резистивно-емкостной нагрузке

В случае синусоидального тока для мгновенной мощности в цепи можно записать следующее выражение:

$$p(t) = \underbrace{VI \cdot \cos\varphi}_{\text{постоянная часть}} - \underbrace{VI \cdot \cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{переменная часть}},$$

где φ — разность фаз между сигналами напряжения и тока.

- Мгновенная мощность состоит из постоянной и переменной составляющих, частота последней в два раза превышает частоту тока или напряжения.

Выражение для мгновенной мощности можно также записать в виде:

$$p(t) = \underbrace{VI \cdot \cos\varphi \cdot [1 - \cos 2\omega t]}_{\text{резистивная составляющая}} - \underbrace{VI \cdot \sin\varphi \cdot \sin 2\omega t}_{\text{реактивная составляющая}}. \qquad (3.73)$$

Первый член этого выражения, называемый **резистивным компонентом**, всегда положительный, а второй — **реактивный компонент** — может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 3.63).

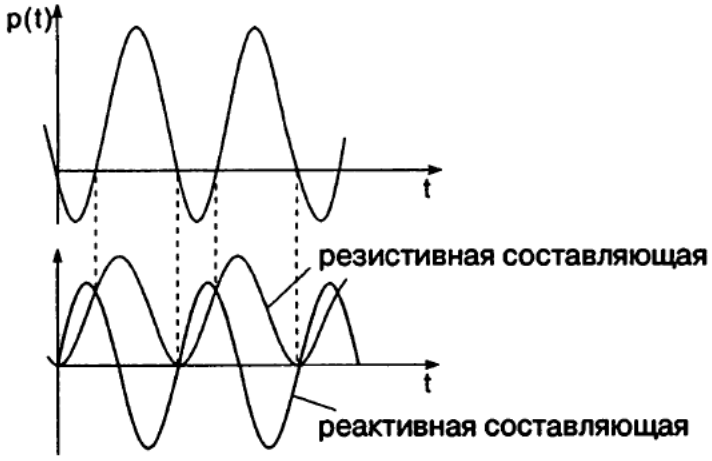


Рис. 3.63. Разделение сигнала мгновенной мощности на резистивную и реактивную составляющие

3.8.2. Средняя мощность

Выражение для средней мощности в цепи переменного тока имеет вид:

$$P = \overline{p} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} p(t)dt. \qquad (3.74)$$

В теории электрических цепей под термином «мощность» обычно подразумевается средняя мощность.

3.8.2.1. Эффективная мощность

Выражение для **эффективной мощности** в цепи синусоидального тока имеет вид:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi, \qquad (3.75)$$

где V и I —среднеквадратичные значения напряжения и тока. Входящий в выражение (3.75) множитель $\cos\varphi$ называется **коэффициентом мощности**. Единицей измерения эффективной мощности является ватт (Вт).

- В чисто резистивных цепях ($\varphi = 0$) коэффициент мощности равен 1, а эффективная мощность определяется выражением $P = V \cdot I$.
- В чисто реактивных цепях ($\varphi = \pm 90°$) коэффициент мощности, а, следовательно, и эффективная мощность равны 0.
- В резистивно-емкостных и резистивно-индуктивных цепях ($-90° < \varphi < 90°$) эффективная мощность всегда положительная.

Эффективная электрическая мощность может быть преобразована в другие формы мощности (тепловую, механическую и т. д.).

Если электрическая цепь с комплексным импедансом представлена в виде эквивалентного параллельного соединения активного и реактивного сопротивлений, то коэффициент мощности определяется по току (рис. 3.64). В этом случае величина $I \cdot \cos\varphi$ называется **эффективным** (действующим) или синфазным **значением силы тока**:

$$I_{real} = I \cdot \cos\varphi. \qquad (3.76)$$

Тогда справедливы соотношения:

$$P = I_{\text{real}} \cdot V, \quad P = \frac{V^2}{R_{\text{p}}}. \tag{3.77}$$

- Эффективная мощность определяется произведением действующего значения тока и среднеквадратичного значения напряжения. Это справедливо только в параллельных цепях при одинаковом напряжении на выводах каждого элемента.

Если электрическая цепь с комплексным импедансом представлена в виде эквивалентного последовательного соединения активного и реактивного сопротивлений, то коэффициент мощности определяется по напряжению (рис. 3.64). В этом случае величина $V \cdot \cos\varphi$ называется **эффективным (действующим)** или **синфазным значением напряжения**:

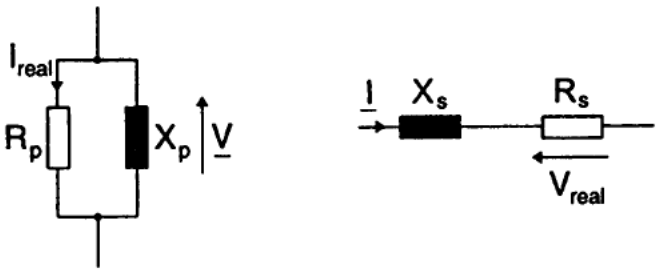


Рис. 3.64. Действующие значения тока и напряжения в эквивалентных схемах комплексных цепей

$$V_{\text{real}} = V \cdot \cos\varphi. \tag{3.78}$$

Тогда справедливы соотношения:

$$P = V_{\text{real}} \cdot I, \quad P = I^2 \cdot R_{\text{S}}. \tag{3.79}$$

- Эффективная мощность определяется произведением действующего значения напряжения и среднеквадратичного значения тока. Это справедливо только в последовательных цепях при одинаковом токе через все элементы.

Примечание. Эффективная мощность *не является* произведением действующих значений тока и напряжения. Эти величины выводятся из разных эквивалентных схем.

3.8.2.2. Реактивная мощность

Реактивная мощность определяется как:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin\varphi, \tag{3.80}$$

где V и I — среднеквадратичные значения напряжения и тока, а φ — разность фаз между напряжением и током. Множитель $\sin\varphi$ называется **коэффициентом опережения или отставания тока по отношению к напряжению** или **коэффициентом реактивной мощности**. В индуктивных нагрузках происходит отставание тока от напряжения, а в емкостных — опережение. Единицей измерения реактивной мощности является реактивный вольт-ампер (вар).

- В чисто резистивных цепях ($\varphi = 0$) реактивная мощность равна 0.
- Реактивная мощность в резистивно-индуктивных цепях всегда положительная, а в резистивно-емкостных — отрицательная.
- Реактивная мощность *не может* быть преобразована в другие формы энергии.

Если электрическая цепь с комплексным импедансом представлена в виде эквивалентного параллельного соединения активного и реактивного сопротивлений, то коэффициент реактивной мощности относится к току (рис. 3.65). В этом случае величина $I \cdot \sin\varphi$ называется **реактивным** или **несинфазным значением силы тока**:

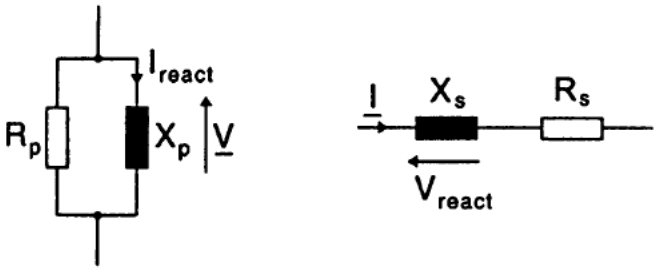


Рис. 3.65. Реактивные значения тока и напряжения в эквивалентных схемах комплексных цепей

$$I_{react} = -I \cdot \sin\varphi_Y. \tag{3.81}$$

Тогда справедливы соотношения:

$$Q = -I_{react} \cdot V, \quad Q = \frac{V^2}{X_p}. \tag{3.82}$$

- Реактивная мощность определяется произведением отрицательного значения реактивного тока и среднеквадратичного значения напряжения. Это справедливо только в параллельных цепях при одинаковом напряжении на выводах каждого элемента.

Примечание. Отрицательный знак в выражении (3.81) появился из-за того, что в параллельной эквивалентной схеме фаза определяется по отношению к напряжению ($\varphi_Y = -\varphi_Z$).

Если электрическая цепь с комплексным импедансом представлена в виде эквивалентного последовательного соединения активного и реактивного сопротивлений, то коэффициент мощности относится к напряжению. В этом случае величина $V \cdot \sin\varphi$ называется **реактивным** или **несинфазным значением напряжения**:

$$V_{react} = V \cdot \sin\varphi. \tag{3.83}$$

Тогда справедливы соотношения:

$$Q = V_{react} \cdot I, \quad Q = I_2 \cdot X_S. \tag{3.84}$$

- Реактивная мощность определяется произведением реактивного напряжения и среднеквадратичного значения тока. Это справедливо только в последовательных цепях при одинаковом токе через все элементы.

Примечание. Реактивная мощность *не является* произведением реактивных значений тока и напряжения. Эти величины выводятся из разных эквивалентных схем.

3.8.2.3. Кажущаяся мощность

Кажущаяся мощность определяется как:

$$S = V \cdot I, \tag{3.85}$$

где V и I —среднеквадратичные значения напряжения и тока. Единицей измерения кажущейся мощности является вольт-ампер (В·А). Если φ — разность фаз между напряжением и током, то справедливы следующие соотношения:

$$P = S \cdot \cos\varphi, \quad Q = S \cdot \sin\varphi. \tag{3.86}$$

Эти соотношения легко представить в геометрическом виде (рис. 3.66).

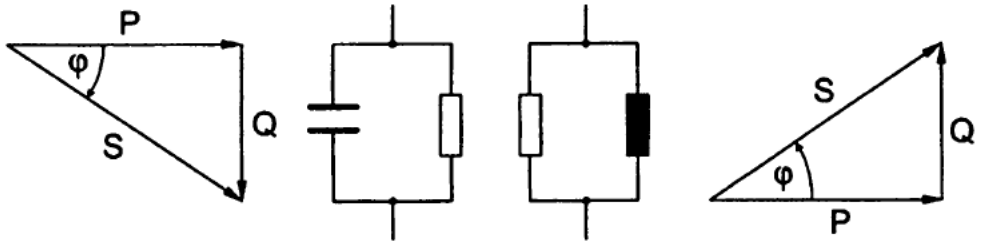


Рис. 3.66. Векторные представления эффективной, реактивной и кажущейся мощностей в резистивно-емкостных и резистивно-индуктивных цепях

Из рис. 3.66 видно, что:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{3.87}$$

- Нельзя складывать кажущиеся мощности от элементов цепей **с разными коэффициентами мощности**. Значения эффективной и реактивной мощности должны складываться независимо друг от друга. На основе этих правил можно получить значение полной кажущейся мощности цепи.

3.8.3. Комплексная мощность

Комплексная мощность определяется как:

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^*. \tag{3.88}$$

- Комплексная мощность равна произведению комплексного напряжения и комплексно-сопряженного значения тока:

$$\underline{S} = V \cdot e^{j\varphi_V} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_I} = V \cdot I \cdot e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = V \cdot I \cdot e^{j\varphi},$$

где φ — фазовый сдвиг напряжения относительно тока. Из последнего выражения следует, что:

$$\underline{S} = \underbrace{V \cdot I \cdot \cos\varphi}_{P} + j \cdot \underbrace{V \cdot I \cdot \sin\varphi}_{Q}.$$

Исходя из этого, комплексную мощность можно представить в виде:

$$\underline{S} = P + jQ, \quad S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{3.89}$$

- **Эффективная мощность** является **действительной частью** комплексной мощности.
- **Реактивная мощность** является **мнимой частью** комплексной мощности.
- **Кажущаяся мощность** является **модулем** комплексной мощности.

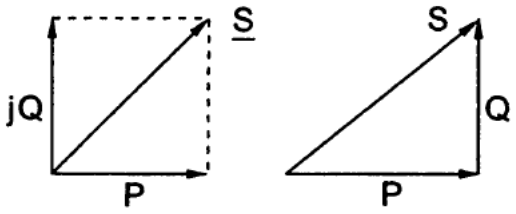


Рис. 3.67. Фазорное представление комплексной мощности

Как и все другие комплексные величины, комплексная мощность может быть представлена на комплексной плоскости в виде фазора (рис. 3.67).

3.8.4. Мощность в цепях переменного тока (обзор)

Таблица 3.13. Основные соотношения для вычисления мощности в цепях переменного тока

Нагрузка	$P = S\cos\varphi$	$Q = S\sin\varphi$	S	$\cos\varphi$
Чисто индуктивная	0	Положительная	Q	0
Резистивно-индуктивная	Положительная	Положительная	$\sqrt{P^2+Q^2}$	0...1
Чисто резистивная	Положительная	0	P	1
Резистивно-емкостная	Положительная	Отрицательная	$\sqrt{P^2+Q^2}$	0...1
Чисто емкостная	0	Отрицательная	Q	0

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \tag{3.90}$$

$$P = S \cdot \cos\varphi, \tag{3.91}$$

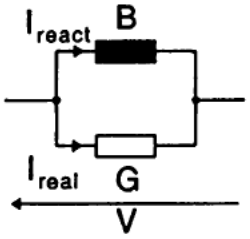
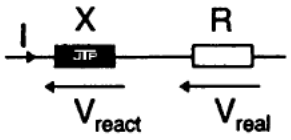
$$Q = S \cdot \sin\varphi, \tag{3.92}$$

$$Q = P \cdot \operatorname{tg}\varphi, \tag{3.93}$$

$$P = Q \cdot \cos\varphi, \tag{3.94}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P}. \tag{3.95}$$

Таблица 3.14. Параметры эквивалентных схем

	Параллельная эквивалентная схема	Последовательная эквивалентная схема
Конфигурация		
Комплексное сопротивление		$\underline{Z} = R + jX$
Комплексная проводимость	$\underline{Y} = G + jB$	
Полное сопротивление		$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
Полная проводимость	$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$	
Эффективное сопротивление		$R = Z\cos\varphi = V_{real}/I$
Эффективная проводимость	$G = Y\cos\varphi_Y = I_{real}/V$	
Реактивное сопротивление		$X = -Z\sin\varphi = -V_{react}/I$
Реактивная проводимость	$B = -Y\sin\varphi_Y = -I_{react}/V$	
Комплексная мощность	$\underline{S} = \underline{Y}^* V^2 = (G - jB)V^2$	$\underline{S} = \underline{Z}I^2 = (R + jX)I^2$
Эффективная мощность	$P = I_{real}V = I_{real}{}^2/G = V^2G$	$P = V_{real}I = V_{real}{}^2/R = I^2R$
Реактивная мощность	$Q = -I_{react}V = I_{react}{}^2/B = -V^2B$	$Q = V_{react}I = V_{react}{}^2/X = I^2X$
Кажущаяся мощность	$S = VI = V\sqrt{I_{real}^2 + I_{react}^2}$	$S = VI = I\sqrt{V_{real}^2 + V_{react}^2}$
Коэффициент мощности	$\cos\varphi = G/Y$	$\cos\varphi = R/Z$
Эффективное значение тока	$I_{real} = I\cos\varphi_Y = G \cdot V$	
Эффективное значение напряжения		$V_{real} = V\cos\varphi = RI$
Реактивная составляющая тока	$I_{react} = -I\sin\varphi_Y = -BV$	
Реактивная составляющая напряжения		$V_{react} = -V\sin\varphi = -XI$

3.8.5. Цепи компенсации реактивных составляющих тока

Коэффициент мощности определяет вклад эффективной мощности P в величину кажущейся мощности S.

Несмотря на то что реактивная составляющая тока не участвует в распространении полезной мощности, она, тем не менее, передается от источника питания в нагрузку. Поэтому для повышения эффективности использования мощности источника питания необходимо стремиться минимизировать эту составляющую тока. Для этого применяются методы **коррекции коэффициента мощности** (рис. 3.68).

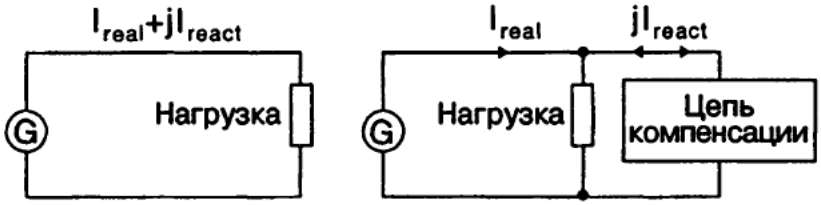


Рис. 3.68. Принцип коррекции коэффициента мощности

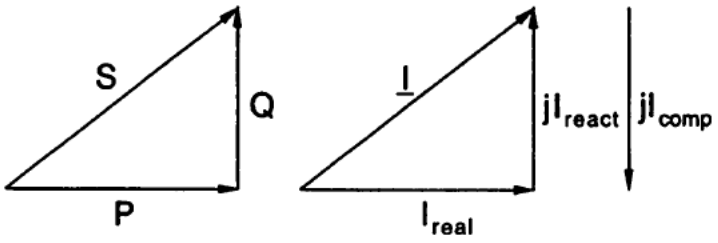


Рис. 3.69. Векторные диаграммы, поясняющие компенсацию реактивного тока

Как видно из рисунка, цепь компенсации, представляющая собой реактивное сопротивление, ставится параллельно нагрузке. При резистивно-индуктивной нагрузке в качестве реактивного элемента чаще всего используется конденсатор. При этом реактивный ток через конденсатор должен быть равен по величине току в нагрузке. Эффект коррекции заключается в том, что реактивный ток перенаправляется от нагрузки к компенсационному элементу, при этом не нагружая источник питания (рис. 3.69). Если реактивный ток через компенсационный элемент превышает ток в нагрузке, то наблюдается явление **перекомпенсации**. На практике компенсационная цепь рассчитывается такой, чтобы обеспечить величину коэффициента мощности, равную 0,9.

Пример. Необходимо рассчитать компенсационную цепь для двигателя на 230 В/16 А с коэффициентом мощности 0,8.

Решение: Очевидно, что в компенсационной цепи должен стоять конденсатор. Величина действующего тока, протекающего через двигатель, равна 16 А, cos φ = 12,8 А. Величина реактивной составляющей тока при этом равна $I_{react} = \sqrt{I^2 - I_{real}^2} = \sqrt{16^2 - 12{,}8^2} = 9{,}6$ А. Поскольку конденсатор должен поглощать этот ток, его реактивное сопротивление следует выбирать равным $X_C = 230$ В/9,6 А = 24 Ом. Значит, на частоте 50 Гц емкость конденсатора должна быть равна $C = 1/X_C \cdot \omega = (24 \text{ Ом} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1})^{-1} = 133$ мкФ. Для коррекции коэффициента мощности до величины 0,9 необходимо компенсировать реактивный ток, равный 6,2 А. Для этого достаточно конденсатора емкости 86 мкФ.

Примечание. В ненагруженном состоянии коэффициент мощности трансформаторов и двигателей значительно снижается. Причиной возникновения реактивных токов являются увеличение и уменьшение напряженности магнитных полей.

3.9. Трехфазные цепи

3.9.1. Многофазные системы

На рис. 3.70 показана система, состоящая из нескольких расположенных по кругу катушек. В центре круга расположен постоянный магнит, вращающийся с фиксированной угловой скоростью. Во всех катушках индуцируются переменные напряжения одинаковой частоты, но сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол.

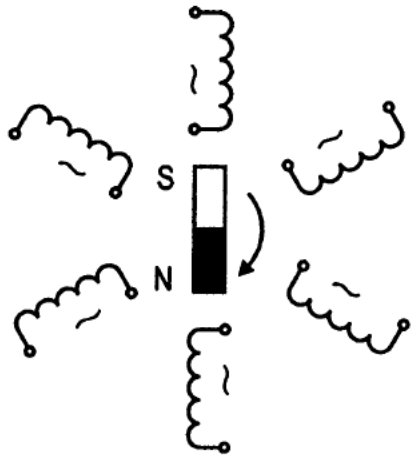


Рис. 3.70. Принципиальная схема многофазной системы

Такие устройства, состоящие из генераторов переменного напряжения, соединительных линий и нагрузочных цепей, называются **многофазными системами**. Если в системе индуцируются n напряжений, то она называется ***n*-фазной**. Многофазная система, в которой напряжения на всех линиях равны по амплитуде, а также по частоте и сдвинуты по фазе одно относительно другого на одинаковый угол, называется **симметричной**.

Потребителями трехфазного симметричного напряжения являются двигатели переменного тока со смещенными обмотками (например, синхронные и асинхронные двигатели), в которых вращающийся магнит заменен на ротор, возбуждаемый постоянным током, а источниками — генераторы со смещенными обмотками (например, синхронные генераторы), индуцирующие напряжение на обмотках за счет вращающегося магнитного поля. Системы бесперебойного питания также являются трехфазными. В них трехфазное напряжение формируется при помощи инверторов, построенных на основе полупроводниковых переключающих элементов.

Трехфазные цепи играют важную роль в системах электроснабжения. Приведем основные преимущества трехфазных систем:

- меньшее количество силовых линий по сравнению с тремя однофазными линиями (три, четыре или пять линий вместо шести),
- при симметричной нагрузке генератор обеспечивает постоянный уровень мощности в подключенных электрических цепях,
- простота конструкции электродвигателей.

3.9.2. Трехфазные цепи

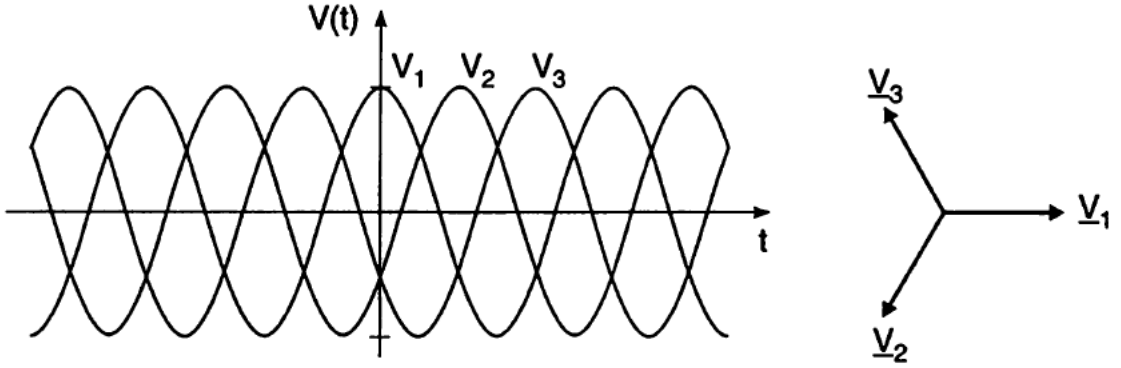


Рис. 3.71. Временные диаграммы напряжений в симметричной трехфазной цепи и векторная диаграмма их среднеквадратичных значений

В трехфазных цепях для передачи электроэнергии вместо шести линий требуется только три или четыре. На рис. 3.72 показано схематичное представление источников напряжений и линий передач трехфазной цепи.

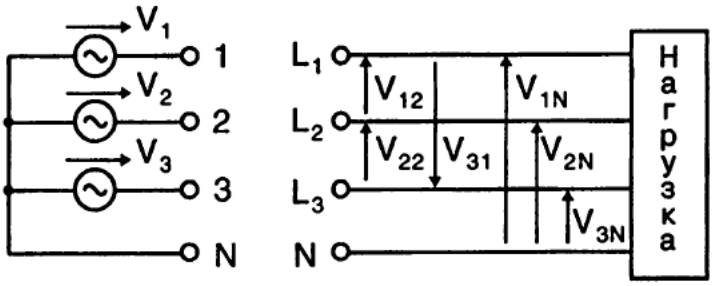


Рис. 3.72. Представление источников напряжений и линий передач трехфазной цепи

Напряжения V_{12}, V_{31} и V_{32} между проводниками линии передач L_1, L_2 и L_3 называются **линейными напряжениями**. Напряжения в проводниках относительно **нейтрального провода** N называются **фазовыми напряжениями**. Напряжения V_1, V_3 и V_2, снимаемые с обмоток генератора, также являются **фазовыми напряжениями**. **Линейными токами** называются токи, текущие в проводниках линии передач, а **фазовыми токами** — токи в обмотках генератора.

Примечание. В Европе используются трехфазные системы с напряжениями 230 В / 400 В.

В симметричных трехфазных цепях мгновенные значения фазовых напряжений определяются выражениями:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \hat{v}\cdot\cos\omega t, \\ v_2(t) &= \hat{v}\cdot\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right), \\ v_3(t) &= \hat{v}\cdot\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Эти значения смещены друг относительно друга на 120° (2π/3) (рис. 3.73). Комплексные среднеквадратичные значения фазовых напряжений имеют следующий вид:

$$\underline{V}_1 = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}},$$

$$\underline{V}_2 = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j2\pi/3},$$

$$\underline{V}_3 = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} \cdot e^{+j2\pi/3}. \qquad (3.97)$$

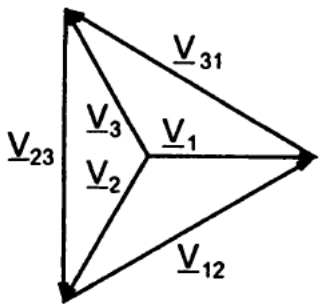


Рис. 3.73. Векторная диаграмма фазовых напряжений для цепи, показанной на рис. 3.72

3.9.2.1. Свойства комплексного оператора $\underline{a}$

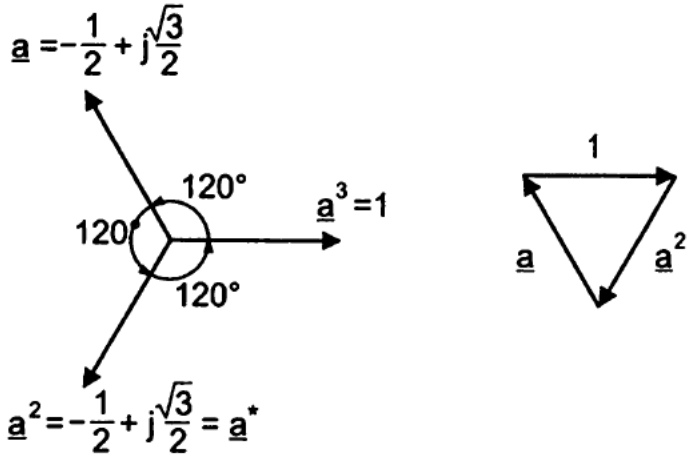


Рис. 3.74. Комплексные операторы $\underline{a}$, $\underline{a}^2$, $\underline{a}^3$

В этой главе для удобства изложения материала комплексный оператор $e^{j2\pi/3}$ заменен на оператор $\underline{a}$ (рис. 3.74). При умножении этого оператора на вектор в комплексной плоскости происходит поворот вектора на угол 2π/3 (120°). Приведем некоторые свойства оператора $\underline{a}$:

$$\underline{a} = e^{j2\pi/3} = \frac{1}{2}(-1 + j\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\underline{a}^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = \frac{1}{2} \cdot (-1 - j\sqrt{3}) = \underline{a}^*,$$

$$\underline{a}^3 = e^{j2\pi} = 1. \qquad (3.98)$$

При использовании оператора $\underline{a}$ комплексные СКЗ фазовых напряжений записываются в виде:

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_1, \quad \underline{V}_2 = \underline{V}_1 \cdot \underline{a}^2, \quad \underline{V}_3 = \underline{V}_1 \cdot \underline{a}. \qquad (3.99)$$

- Однократное применение оператора $\underline{a}$ приводит к повороту на угол 2π/3 (120°), двойное — на 4π/3 (240°), а тройное — на 2π (360°):

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0. \qquad (3.100)$$

Из рис. 3.75 можно получить следующие соотношения:

$$1-\underline{a}^2=\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}=-j\sqrt{3}\cdot\underline{a},$$

$$\underline{a}^2-\underline{a}=-j\sqrt{3}, \qquad (3.101)$$

$$\underline{a}-1=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}=-j\sqrt{3}\cdot\underline{a}^2.$$

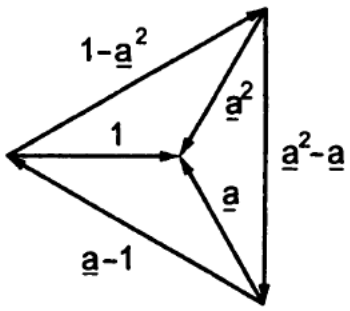


Рис. 3.75. Суммирование и вычитание комплексных операторов

3.9.3. Трехфазные генераторы, включенные по схеме «треугольник»

Соединение «треугольник» — это такая схема включения трехфазных генераторов, в которой к концу каждой обмотки подсоединяют начало следующей обмотки. При этом образуется замкнутый контур, состоящий из трех источников напряжений с различными фазами (рис. 3.76).

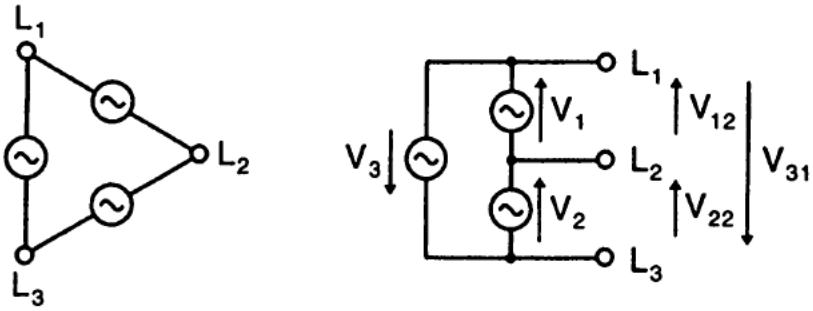


Рис. 3.76. Два представления соединения «треугольник»

Выводы фазовых обмоток монтируются на контактной колодке со стандартной маркировкой. На рис. 3.77 показаны фазовые обмотки трехфазного генератора, включенные по схеме «треугольник», и его контактная колодка. Для показанной схемы соединения «треугольник» справедливо:

$$\underline{V}_{12}=\underline{V}_1,\quad \underline{V}_{23}=\underline{V}_2,\quad \underline{V}_{31}=\underline{V}_3.$$

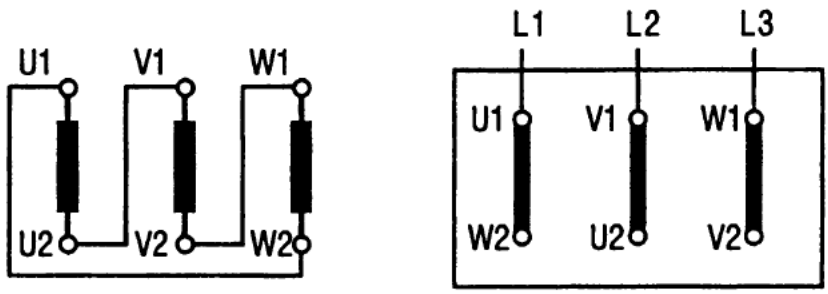


Рис. 3.77. Трехфазный генератор, включенный по схеме «треугольник», и его контактная колодка

- В генераторах, включенных по схеме «треугольник», линейные напряжения равны фазовым напряжениям (напряжениям на выводах генератора).

  Сумма фазовых напряжений определяется выражением (рис. 3.78):

$$\underline{V}_s = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = \underline{V}_1 \cdot \underbrace{(1 + \underline{a}^2 + \underline{a})}_{=0} = 0.$$

Подставляя в него уравнение (3.100), получаем, что эта сумма равна нулю.

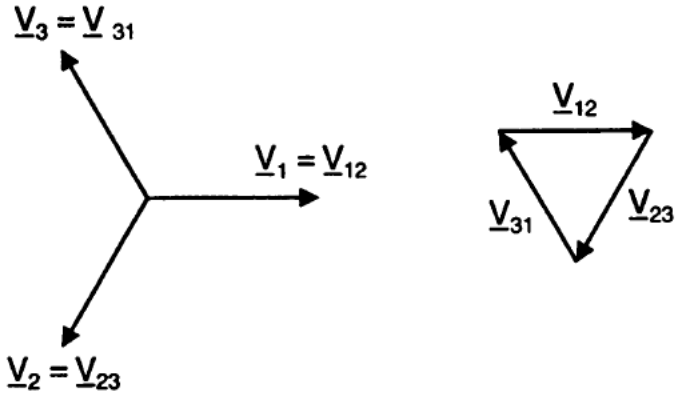


Рис. 3.78. Векторная диаграмма комплексных среднеквадратичных значений напряжений в генераторе, включенном по схеме «треугольник»

- В идеальном симметричном генераторе напряжений, включенном по схеме «треугольник», сумма фазовых напряжений равна нулю, поэтому ток в этом контуре отсутствует.

3.9.4. Трехфазные генераторы, включенные по схеме «звезда»

В генераторах, включенных **по схеме «звезда»**, одни из концов фазовых обмоток подсоединены к **нейтральной точке соединения «звезда»** (рис. 3.79 и 3.80).

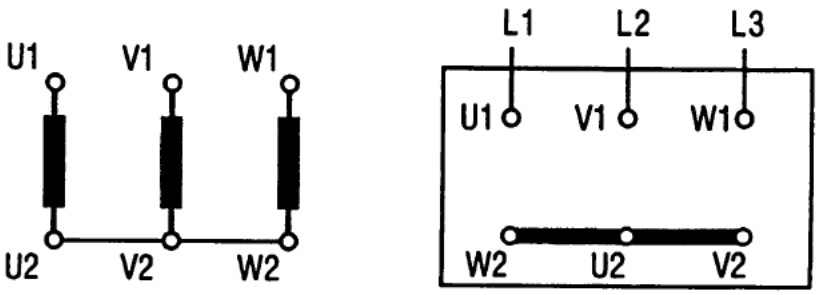


Рис. 3.79. Трехфазный генератор, включенный по схеме «звезда», и его контактная колодка

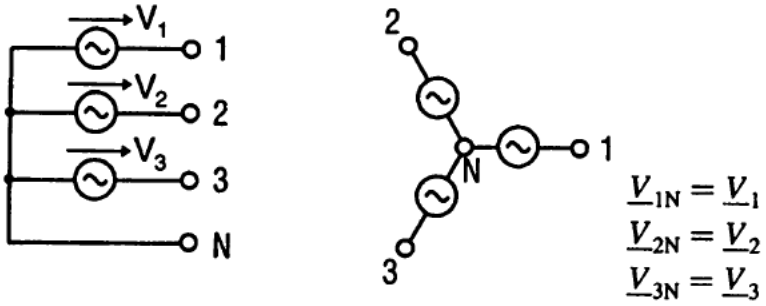


Рис. 3.80. Два представления соединения «звезда»

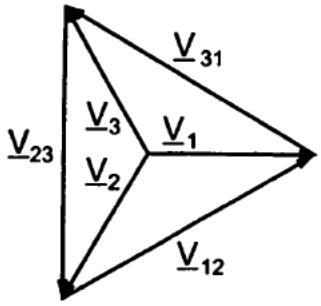


Рис. 3.81. Векторная диаграмма комплексных среднеквадратичных значений напряжений в генераторе, включенном по схеме «звезда»

Из диаграммы, показанной на рис. 3.81, выводятся следующие выражения для расчета **линейных напряжений** в рассматриваемой трехфазной системе:

$$\underline{V}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = \underline{V}_1 \cdot (1 - \underline{a}^2) = -j\sqrt{3}\underline{a}\underline{V}_1 = -j\sqrt{3}\underline{V}_3,$$

$$\underline{V}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = \underline{V}_1 \cdot (\underline{a}^2 - \underline{a}) = -j\sqrt{3}\underline{V}_1, \qquad (3.102)$$

$$\underline{V}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = \underline{V}_1 \cdot (\underline{a} - 1) = -j\sqrt{3}\underline{a}^2\underline{V}_1 = -j\sqrt{3}\underline{V}_2.$$

- В симметричных генераторах, соединенных по схеме «звезда», линейные напряжения превышают фазовые напряжения в $\sqrt{3}$ раза:

$$V_{1N} = V_{2N} = V_{3N},$$

$$V_{12} = V_{21} = V_{31} = \sqrt{3} \cdot V_{1N} = \sqrt{3} \cdot V_{2N} = \sqrt{3} \cdot V_{3N}.$$

- В трехфазных генераторах, включенных по схеме «звезда», и линейные, и фазовые напряжения **сдвинуты по фазе друг относительно друга** на $2\pi/3$ (120°):

$$\underline{V}_{23} = \underline{a}^2 \cdot \underline{V}_{12}, \quad \underline{V}_{31} = \underline{a} \cdot \underline{V}_{12}.$$

- В трехфазных генераторах, включенных по схеме «звезда», **фазовый сдвиг** между линейными напряжениями и соответствующими им фазовыми напряжениями, находящимися в векторной диаграмме напротив них, составляет $\pi/2$ (90°):

$$\underline{V}_{12} = -j\sqrt{3}\underline{V}_3, \quad \underline{V}_{23} = -j\sqrt{3}\underline{V}_1, \quad \underline{V}_{31} = -j\sqrt{3}\underline{V}_2.$$

Примечание. Поскольку напряжение, сдвинутое по фазе на 90°, может быть измерено без применения фазовращателей, последнее свойство часто используется при определении реактивной мощности в трехфазных цепях.

3.10. Симметричные трехфазные системы (обзор)

На рис. 3.82 показаны трехфазные системы с трехфазными источниками напряжений и нагрузочными цепями, а в табл. 3.15 приведены основные расчетные соотношения для них. Рассматриваются четыре разные схемы включения трехфазных систем, но считается, что в каждой из них линейные напряжения равны V, а все комплексные сопротивления нагрузки равны $\underline{Z}$.

При резистивной нагрузке, включенной по схеме треугольник, потребляемая мощность в три раза превышает мощность, потребляемую в аналогичных цепях, включенных по схеме звезда.

Примечание. Последнее свойство используется в трехфазных электродвигателях при их запуске **в режиме переключения со звезды на треугольник**, т. е. двигатель сначала включают в конфигурации звезды, после чего ее меняют на конфигурацию треугольник. Такой способ запуска двигателя позволяет избежать больших переходных токов.

Таблица 3.15. Симметричные трехфазные цепи (см. рис.3.82)

Комбинация генератор – нагрузка	**Звезда – звезда**	**Звезда – треугольник**	**Треугольник – звезда**	**Треугольник – треугольник**
Фазовые напряжения	$\frac{V}{\sqrt{3}}$	$\frac{V}{\sqrt{3}}$	V	V
Напряжение на нагрузке $\underline{Z}$	V_{1N}, V_{2N}, V_{3N} $\frac{V}{\sqrt{3}}$	V_{12}, V_{23}, V_{31} V	V_{1N}, V_{2N}, V_{3N} $\frac{V}{\sqrt{3}}$	V_{12}, V_{23}, V_{31} V
Ток через нагрузку $\underline{Z}$	V_{1N}, V_{2N}, V_{3N} $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V}{Z}$	V_{12}, V_{23}, V_{31} $\frac{V}{Z}$	V_{1N}, V_{2N}, V_{3N} $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V}{Z}$	V_{12}, V_{23}, V_{31} $\frac{V}{Z}$
Токи в линиях	I_1, I_2, I_3 $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V}{Z}$	I_1, I_2, I_3 $\sqrt{3} \cdot \frac{V}{Z}$	I_1, I_2, I_3 $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V}{Z}$	I_1, I_2, I_3 $\sqrt{3} \cdot \frac{V}{Z}$
Полная эффективная мощность	$\frac{V^2}{Z} \cdot \cos\varphi$	$3 \cdot \frac{V^2}{Z} \cdot \cos\varphi$	$\frac{V^2}{Z} \cdot \cos\varphi$	$3 \cdot \frac{V^2}{Z} \cdot \cos\varphi$
Напряжения в линиях $V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$				

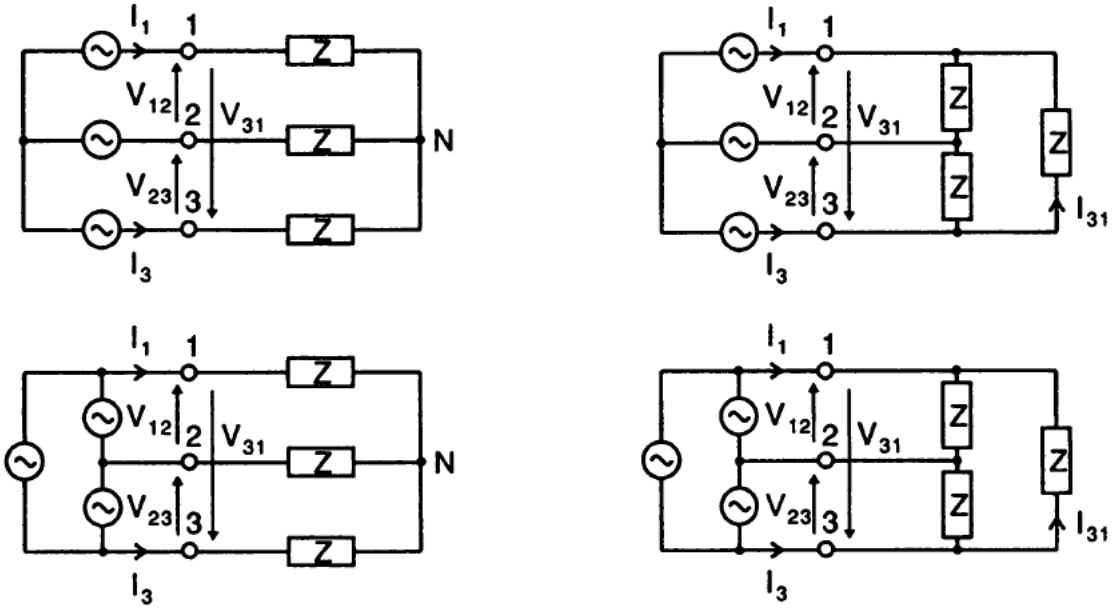


Рис. 3.82. Симметричные трехфазные системы

3.10.1. Мощность в трехфазных системах

См. раздел 4.4.3.1, в котором описывается измерение мощности в трехфазных системах.

Средняя активная мощность в трехфазных системах определяется выражением:

$$P = V \cdot I \cdot \sqrt{3}. \tag{3.103}$$

Мгновенное значение активной мощности равно:

$$p(t) = \frac{v_1^2(t)}{R_1} + \frac{v_2^2(t)}{R_2} + \frac{v_3^2(t)}{R_3},$$

где R_i — резистивные компоненты комплексного сопротивления нагрузки. При симметричных нагрузочных цепях $R_1 = R_2 = R_3 = R$ мгновенное значение мощности можно вычислить при помощи следующего соотношения:

$$p(t) = \frac{\hat{V}^2}{R} \cdot \left[\cos^2 \omega t + \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) + \cos^2\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right) \right] =$$

$$= \frac{\hat{V}^2}{2R} \cdot \left[1 + \cos 2\omega t + 1 + \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) + 1 + \cos\left(2\omega t + \frac{4}{3}\pi \right) \right] =$$

$$= \frac{3\hat{V}^2}{2R}. \tag{3.104}$$

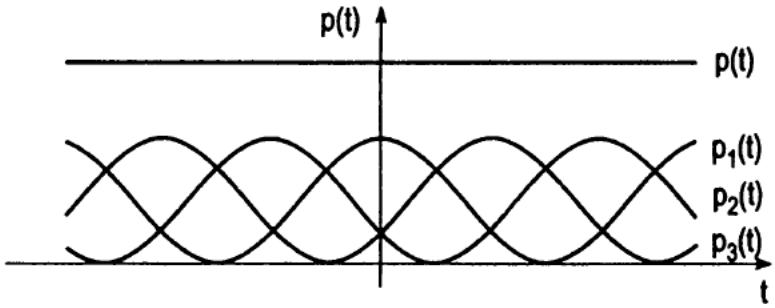


Рис. 3.83. Мгновенные значения потребляемой мощности в каждой из обмоток трехфазной системы $p_i(t)$ и полная мощность $p(t)$

- Как видно из рис. 3.83, **полная активная мощность** в трехфазных системах, несмотря на изменения мгновенных мощностей в каждой из обмоток, всегда остается постоянной.

Это свойство широко применяется при разработке электрических машин, поскольку из него следует постоянство механического момента в процессе вращения ротора, что значительно уменьшает вибрации.

Многофазные системы с постоянной потребляемой мощностью называются **уравновешенными** (симметричными), в противном случае — **неуравновешенными**.

Примечание. Симметричными могут быть системы, состоящие из любого количества фаз.

3.11. Обозначения

a	Отношение напряжений
$\underline{a}$	Комплексный оператор $e^{j2\pi/3}$
B	Реактивная проводимость, См
B	Полоса пропускания, Гц
C	Конденсатор, емкость, Ф
f	Частота, Гц
f_r	Резонансная частота
G	Проводимость
G_S	Проводимость источника
i	Переменный ток
$\hat{i}$	Пиковое значение тока
I	СКЗ тока
I_c	Компенсационный ток
I_{react}	Реактивная составляющая тока
I_{real}	Резистивная (активная) составляющая тока
Im ()	Мнимая часть
k_f	Коэффициент формы
k_c	Коэффициент амплитуды (пик-фактор)

L_1, L_2, L_3	Фазовые линии
N	Нейтральный проводник
p	Нижний индекс: параллельное соединение
p	Мгновенное значение мощности, Вт
P	Средняя мощность, Вт
Q	Реактивная мощность, вар
r	Нижний индекс: резонанс
r	Абсолютное значение комплексного числа в полярных координатах
R	Резистор, сопротивление
R_D^2	Константа замещения, Ом^2
R_L	Сопротивление нагрузки
R_s	Последовательный резистор (в разделе 3.6.1)
R_S	Сопротивление источника
R_{45}, R_{90}	Сопротивление при фазовом сдвиге тока относительно напряжения, равном 45° или 90°
$R\|\|C$	Параллельное соединение резистора и конденсатора
Re ()	Действительная часть
s	Нижний индекс: последовательное соединение
S	Кажущаяся мощность, В·А
$\underline{S}$	Комплексная мощность
T	Период
v	Переменное напряжение
$\underline{v}$	Комплексное переменное напряжение
$\hat{v}$	Пиковое значение напряжения
$\underline{\hat{v}}$	Комплексная амплитуда напряжения
$\overline{v}$	Среднее значение напряжения
$\lvert\overline{v}\rvert$	Среднее значение выпрямленного напряжения
V	СКЗ напряжения
$\underline{V}$	Комплексное СКЗ напряжения
V_1	Входное напряжение
V_2	Выходное напряжение
V_{12}, V_{23}, V_{31}	Линейные напряжения
V_{1N}, V_{2N}, V_{3N}	Фазовые напряжения
V_C	Напряжение на емкостном элементе
V_L	Напряжение на индуктивном элементе
V_R	Напряжение на резистивном элементе
V_{react}	Реактивная составляющая напряжения
V_{real}	Резистивная (активная) составляющая напряжения
V_S	Напряжение источника
X	Реактивное сопротивление
X_C	Сопротивление емкостного элемента
X_L	Сопротивление индуктивного элемента

Y	Полная проводимость
$\underline{Y}$	Комплексная проводимость
z^*	Комплексно сопряженное число
Z	Полное сопротивление (импеданс)
$\underline{Z}$	Комплексное сопротивление
Z_{in}	Входной импеданс
Z_{out}	Выходной импеданс
φ	Разность фаз, рад
φ_0	Фазовый сдвиг
φ_I	Фаза тока
φ_S	Фаза результирующего сигнала
φ_V	Фаза напряжения
φ_Y	Разность фаз, получаемая на элементе проводимости
φ_Z	Разность фаз, получаемая на импедансе
ω	Угловая частота, $с^{-1}$
ω_r	Резонансная частота, $с^{-1}$

Литература

Bird J. O. *Electrical Circuit Theory and Technology*. — : Butterworth-Heinemann, 1999.
Boylestad R. L. *Introductory Circuit Analysis*. 9th ed. — : Prentice Hall, 1999.
Chapra S. C., Canale R. P. *Numerical Methods for Engineers*. 3rd ed. — : McGraw-Hill, 1998.
De Wolf D. A. *Essentials of Electromagnetics for Engineering*. — : Cambridge Univ. Press, 2000.
Dorf R. C. *The Electrical Engineering Handbook*, Sect. I. — : CRC press, 1993.
Floyd T. L. *Electric Circuits Fundamentals*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2001.
Floyd T. L. *Electronics Fundamentals: Circuits, Devices, and Applications*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2000.
Floyd T. L. *Electronic Devices*. 5th ed. — : Prentice Hall, 1998.
Grob B. *Basic Electronics*. 8th ed. — : McGraw-Hill, 1996.
Hughes E. *Electrical Technology*. 7th ed. — : Longman, 1995.
Jones G. R., Laughton M. A., Say M. G. *Electrical Engineers Reference Book*. 14th ed. — : Butterworth, 1993.
Kovetz A. *Electromagnetic Theory*. — : Oxford Univ. Press, 2000.
Muncaster R. *A-Level Physics*. — : Stanley Thornes Ltd., 1997.
Nelkon M., Parker P. *Advanced Level Physics*. — : Heinemann, 1995.
O'Neil P. V. *Advanced Engineering Mathematics*. 4th ed. — : Brooks/Cole Publ. Co, 1997.

ГЛАВА 4

ИЗМЕРЕНИЕ ТОКА, НАПРЯЖЕНИЯ И МОЩНОСТИ

В этой главе рассматриваются основные методы определения электрических величин при помощи электрических измерительных приборов

4.1. Электрические измерительные приборы

Электрические измерительные устройства преобразуют непрерывную электрическую величину в механическое перемещение указателя по известной функции преобразования. Они классифицируются по принципу действия, который может быть магнитоэлектрическим, электромагнитным, электродинамическим, электростатическим и индукционным.

4.1.1. Магнитоэлектрический измеритель

В **магнитоэлектрическом измерителе** происходит взаимодействие поля, созданного постоянным магнитом, и катушки, через которую течет измеряемый ток (рис. 4.1). В результате этого взаимодействия возникает механический момент, действующий на катушку, уравновешиваемый возвратной пружиной, определяющей положение указателя на приборной шкале. См. также раздел 2.3.17.1, в котором описаны силы, действующие на проводник с током в магнитном поле.

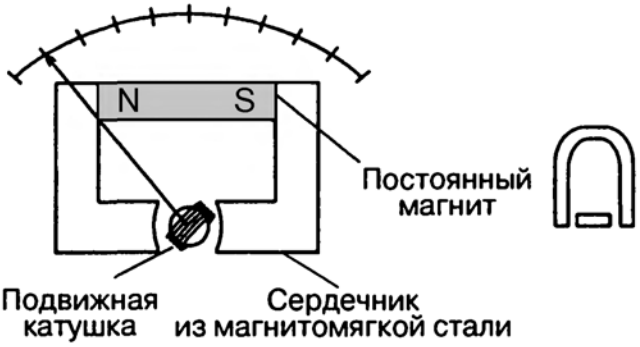


Рис. 4.1. Принцип действия магнитоэлектрического измерителя и его обозначение на схемах

- Шкала магнитоэлектрического измерителя при измерении постоянного тока является практически линейной.
- На шкале магнитоэлектрического измерителя отображается **среднее арифметическое значение** тока. Если через катушку течет чисто синусоидальный ток, то указатель прибора показывает ноль.
- Показания магнитоэлектрического измерителя с выпрямителем соответствуют **величине выпрямленного тока**.

- Магнитоэлектрический измеритель является самым чувствительным аналоговым преобразователем

Примечание. **Гальванометры** являются наиболее чувствительными магнитоэлектрическими измерителями.

4.1.2. Магнитоэлектрический логометр

Принцип действия **магнитоэлектрического логометра** аналогичен принципу действия магнитоэлектрического измерителя, только в нем вместо одной катушки используются две, расположенные на сердечнике под углами 30...60° друг относительно друга. В результате взаимодействия токов в катушках с неравномерным полем постоянного магнита на катушки начинают действовать механические моменты, имеющие противоположные направления (рис. 4.2). В зависимости от *отношения* токов, протекающих через катушки, устанавливается то или иное положение указателя на шкале прибора, поэтому такие преобразователи часто называются **измерителями отношений**.

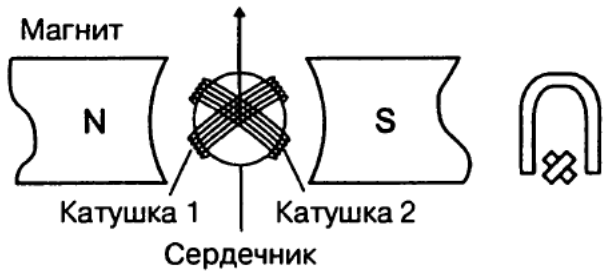


Рис. 4.2. Принцип действия магнитоэлектрического логометра и его обозначение на схемах

- Показания магнитоэлектрического логометра соответствуют **отношению токов** в двух катушках.
- Шкала магнитоэлектрического логометра не является линейной, но обладает довольно широким диапазоном линейности в центре шкалы.

4.1.3. Электродинамический измеритель

Магнитоэлектрический и **электродинамический измерители** имеют практически одинаковый принцип действия, за исключением того, что в последнем устройстве поле создается измеряемым током, протекающим через одну из катушек (рис. 4.3). Электродинамические измерители раньше назывались **динамометрами**.

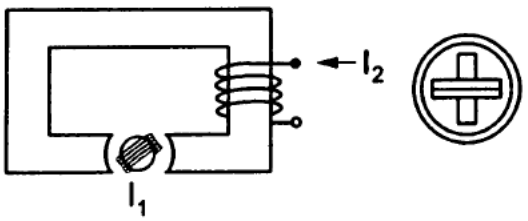


Рис. 4.3. Принцип действия электродинамического измерителя и его обозначение на схемах

- Отклонение указателя электродинамического измерителя пропорционально **произведению** токов в катушках.
- Если через обе катушки пропустить синусоидальные токи одинаковой частоты, то показания измерителя будут пропорциональны произведению токов, зависящему от разности фаз этих токов. Максимальное отклонение указателя прибора соответствует нулевой разности фаз ($\Delta\varphi = 0$), а при $\Delta\varphi = 90°$ — показания измерителя равны нулю.

При последовательном соединении двух катушек через каждую из них течет одинаковый ток.

- На шкале электродинамического измерителя отображается **среднеквадратичное значение** (СКЗ) тока. При этом форма измеряемого сигнала не сильно влияет на показания прибора. Как правило, шкала электродинамического измерителя является квадратичной.

В основном электродинамические преобразователи используются для **измерения мощности**. При этом через одну из катушек пропускают измеряемый ток, а через вторую — ток, пропорциональный напряжению.

- Электродинамические преобразователи применяются для измерения как постоянного, так и переменного токов, и их показания практически не зависят от формы исследуемых сигналов.

4.1.4. Электромагнитный измеритель

По катушке **электромагнитного измерителя** пропускают ток, создающий магнитное поле. На подвижной части системы закреплен стальной сердечник. Взаимодействие сердечника и магнитного поля вызывает появление механического момента, поворачивающего указатель на тот или иной угол (рис. 4.4). При соответствующем выборе формы воздушного зазора можно обеспечить широкий диапазон измерений.

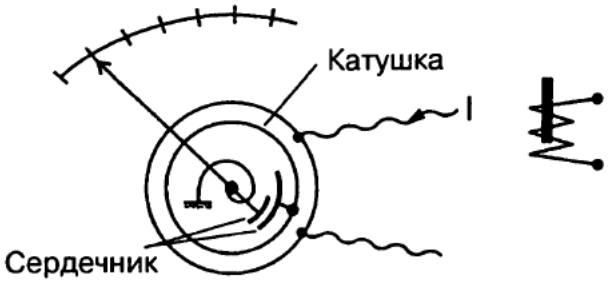


Рис. 4.4. Принцип действия электромагнитного измерителя и его обозначение на схемах

Примечание. Иногда проводится неравномерная градуировка шкалы прибора. Область высоких значений сигналов либо растягивается — для повышения точности снятия показаний, либо, наоборот, сужается — для количественной оценки уровня перегрузки.

- Отклонение указателя электромагнитного измерителя не зависит от направления измеряемого тока. Такие измерители используются для измерения как постоянного, так и переменного токов низких частот (например, токов в сетях электропитания).
- На шкале электромагнитного измерителя отображается **среднеквадратичное значение** (СКЗ) тока.
- Электромагнитным измерителям свойственно **высокое внутреннее потребление мощности**.
- Электромагнитные преобразователи способны выдерживать **большие перегрузки**.

Примечание. Показания электромагнитных приборов при измерении токов не зависят от формы этих токов. Применять такие устройства для измерения напряжения необходимо с некоторой осторожностью (см. раздел 3.2.2). Большая индуктивность электромагнитных измерителей ослабляет сигналы высоких

частот. Поэтому для расширения диапазона измерений здесь практически никогда не используются шунтирующие резисторы. Вместо этого применяются либо катушки с несколькими выводами, либо токовые трансформаторы.

4.1.5. Другие электромеханические измерители

Измерители с вращающимся магнитом. В таких устройствах маленький магнит вращается в поле, созданном катушкой с измеряемым током. Уравновешивающий момент, действующий на указатель, обеспечивается дополнительным магнитом. Такие измерители обладают низкой точностью. Однако в отличие от магнитоэлектрических преобразователей здесь не надо подводить ток к подвижным частям устройства.

Электростатические измерители. Такие преобразователи состоят из двух электродов, изолированных друг от друга, — неподвижного и вращающегося на оси, образующих конденсатор. К электродам подводится напряжение, под действием которого они заряжаются. При этом между ними возникают электростатические силы, определяющие угол отклонения указателя прибора. Электростатические преобразователи используются для измерения напряжений (постоянного и переменного вплоть до ВЧ-диапазона). Их достоинством является низкая потребляемая мощность. Показания электростатических измерителей соответствуют СКЗ напряжения.

Термопреобразователи. В таких измерителях используется тепловое расширение проводников с током, объединенных в **биметаллические системы**. Преобразователи этой группы часто называют **тепловыми измерителями**. Их характерные черты — высокая потребляемая мощность и большое время установления сигнала. Тепловые измерители определяют СКЗ сигнала.

Индукционные преобразователи. Такие устройства состоят из двух катушек, расположенных под углом 90° друг относительно друга. Через катушки пропускают переменные токи одинаковой частоты. При этом создается переменное магнитное поле, индуцирующее вихревые токи в алюминиевом цилиндре, закрепленном на оси, что приводит к появлению механического момента, действующего на ось. Показания индукционных измерителей пропорциональны произведению *переменных* токов, протекающих в катушках. В домашних счетчиках электроэнергии используются индукционные преобразователи с алюминиевым диском, постоянно вращающимся в поле постоянного магнита (рис. 4.5).

Электродинамические логометры. Прародителями этих преобразователей являются магнитоэлектрические логометры, только здесь внешнее магнитное поле создается дополнительной неподвижно закрепленной катушкой с током. Отклонение указателя прибора зависит от **отношения** токов в подвижных катушках и от **разности фаз** между измеряемым и индуцируемым токами. Электродинамические логометры в основном используются для измерения коэффициентов мощности. Поскольку катушки логометра свободно вращаются в пределах 360°, его шкала измерения может быть круговой.

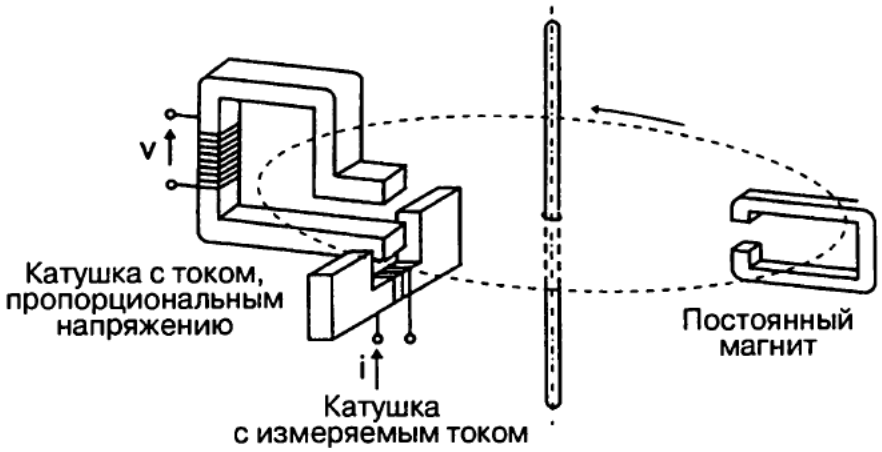


Рис. 4.5. Конструкция индукционного счетчика электроэнергии

Вибрационные измерители. Несколько соответствующим образом подобранных стальных пластин собраны в пластинчатую пружину и помещены в переменное магнитное поле, созданное катушкой с током. Пластина, чья резонансная частота совпадает с частотой измеряемого тока, начинает вибрировать с максимальной амплитудой (рис. 4.6).



Рис. 4.6. Шкала вибрационного измерителя частоты

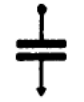
4.1.6. Электрические измерители (обзор)

В табл. 4.1 дан обзор электромеханических приборов, применяемых для измерения электрических величин.

Таблица 4.1. Обзор электрических измерительных приборов

Обозначение	Прибор	Измеряемые величины		Масштабирующая функция
	Магнитоэлектрический с подвижной катушкой	I, V	–	$\alpha = c \cdot \bar{i}$ среднее значение
	Магнитоэлектрический с выпрямителем	I, V	~/–	$\alpha = c \cdot \lvert\bar{i}\rvert$ выпрямленное значение
	Магнитоэлектрический с подвижной рамкой и термопреобразователем	I	~/–	$\alpha = c \cdot I^2$ СКЗ

Окончание табл. 4.1

	Электромагнитный	I, (V)	~/–	$\alpha = f(I^2)$ СКЗ
	Магнитоэлектрический с подвижным магнитом	I, V	–	$\alpha = c \cdot \bar{I}$ среднее арифметическое значение
	Магнитоэлектрический измеритель отношений	R	–	$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$
	Электродинамический	P	~/–	$\alpha = f(I_1 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_{12})$
	Электростатический	V	~/–	$\alpha = f(V^2)$ СКЗ
	Термопреобразователь с биметаллической пластиной	I	~/–	$\alpha = f(I^2)$ СКЗ
	Индукционный	W	~	$\sigma = c \cdot \int I_1 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_{12}\, dt$
	Электродинамический измеритель отношений	cos φ	~	$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}, \varphi_{13}, \varphi_{23}\right)$

Масштабирующая функция α отображает зависимость между измеряемыми величинами и отклонением стрелки прибора, c — калибровочный коэффициент соответствующего прибора.

4.2. Измерение постоянного тока и напряжения

4.2.1. Магнитоэлектрические измерители

Магнитоэлектрические приборы являются самыми распространенными устройствами, применяемыми для измерения постоянного тока. Их основные достоинства — сравнительно низкая потребляемая мощность и высокая точность. Измеряемый ток пропускается через подвижную катушку преобразователя. Типовые значения измеряемых токов, при которых указатель прибора отклоняется на всю шкалу, лежат в пределах 10 мкА...10 мА. Магнитоэлектрические измерители, как правило, обладают достаточно высоким внутренним сопротивлением. Поскольку благодаря этому свойству ток, протекающий через катушку, пропорционален приложенному напряжению, такие устройства могут также использоваться в качестве вольтметров.

Поэтому шкалы магнитоэлектрических измерителей часто калибруются в вольтах:

$$V_{\text{м}} = I_{\text{м}} \cdot R_{\text{м}}, \tag{4.1}$$

где $V_{\text{м}}$ — напряжение, вызывающее отклонение указателя прибора на полную шкалу;

$I_{\text{м}}$ — измеряемый ток при отклонении указателя прибора на всю шкалу;

$R_{\text{м}}$ — внутреннее сопротивление прибора.

4.2.2. Расширение пределов измерения приборов по току

Для расширения диапазона измерения прибора по току параллельно катушке магнитоэлектрического преобразователя ставят **шунтирующий резистор** R_{Sh}. Номинал этого резистора определяет диапазон измерений (рис. 4.7).

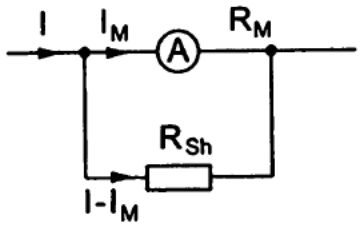


Рис. 4.7. Расширение диапазона измерения по току при помощи шунтирующего резистора

Пример: Максимальный предел измерения прибора составляет $I_{\text{м}} = 50$ мкА. Необходимо его увеличить до 10 мА. Внутреннее сопротивление прибора равно $R_{\text{м}} = 2$ кОм.

Решение: Величина падения напряжения при отклонении указателя прибора на всю шкалу равна 100 мВ. Следовательно, сопротивление шунтирующего резистора можно рассчитать следующим образом: $R_{\text{Sh}} = 100$ мВ/9950 мкА = = 10,05 Ом.

В общем виде:

$$R_{Sh} = \frac{I_M \cdot R_M}{I - I_M}, \tag{4.2}$$

где I — новый верхний предел измерения тока.

При разработке прибора с несколькими диапазонами измерений для каждого из них необходимо предусмотреть свой шунтирующий резистор с последовательно включенным переключателем. Однако, поскольку шунтирующие резисторы обладают очень низким сопротивлением, сопротивлением переключателей в замкнутом состоянии в этом случае пренебрегать нельзя. Избежать влияния переключателей можно при помощи схемы, показанной на рис. 4.8.

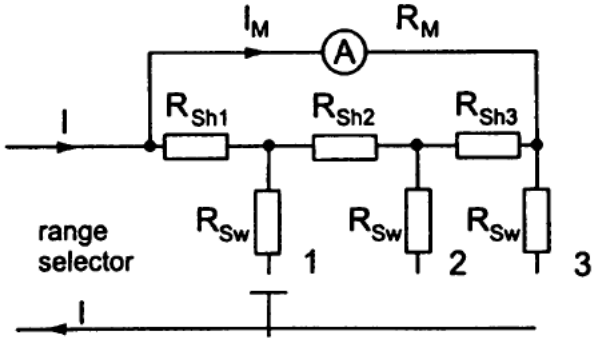


Рис. 4.8. Расширение диапазона измерения по току, при котором сопротивление замкнутых ключей не оказывает никакого влияния на результаты измерений

В зависимости от положения ключей можно получить следующие значения шунтирующего сопротивления: R_{Sh1}, $R_{Sh1} + R_{Sh2}$ или $R_{Sh1} + R_{Sh2} + R_{Sh3}$. Последовательная цепочка шунтирующих резисторов включается параллельно самому прибору. При этом результирующее сопротивление измерителя определяется следующим выражением:

$$R_{Sum} = R_{Sh1} + R_{Sh2} + R_{Sh3} + R_M.$$

Рассчитаем параметры измерителя для разных положений переключателя.

Ключ в положении 3. Падение напряжения на приборе равно падению напряжения на цепочке из всех шунтирующих резисторов. Пусть I_3 — это максимальный измеряемый ток при нахождении переключателя в положении 3. Тогда справедливы соотношения:

$$I_M \cdot R_M = V_M = (I_3 - I_M) \cdot (R_{Sh1} + R_{Sh2} + R_{Sh3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_{Sum} = \frac{I_M \cdot R_M}{I_3 - I_M} + R_M.$$

Ключ в положении 1. Здесь I_1 — максимальный измеряемый ток при нахождении переключателя в положении 1. Тогда можно приравнять следующие падения напряжений:

$$(I_1 - I_M) \cdot R_{Sh1} = I_M \cdot (R_{Sh2} + R_{Sh3} + R_M) = I_M \cdot (R_{Sum} - R_{Sh1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{Sh1} = \frac{I_M}{I_1} \cdot R_{Sum}.$$

Ключ в положении 2. Здесь I_2 — максимальный измеряемый ток при нахождении переключателя в положении 2. Тогда:

$$R_{Sh2} = \frac{I_M}{I_2} \cdot R_{Sum} - R_{Sh1}.$$

Ключ в положении 3:

$$R_{Sh3} = \frac{I_M}{I_3} \cdot R_{Sum} - (R_{Sh1} + R_{Sh2}).$$

Пример: Верхний предел измерения прибора составляет $I_M = 500$ мкА, а внутреннее сопротивление $R_M = 1$ кОм. Необходимо рассчитать сопротивления шунтирующих резисторов для трех новых диапазонов измерений: $I_1 = 100$ мА, $I_2 = 30$ мА и $I_3 = 10$ мА.

Решение: Суммарное сопротивление измерителя при подключении шунтирующей цепочки составляет $R_{Sum} = 1052{,}63$ Ом. Сопротивления шунтов при этом равны: $R_{Sh1} = 5{,}26$ Ом, $R_{Sh2} = 12{,}28$ Ом, а $R_{Sh3} = 35{,}09$ Ом.

4.2.3. Расширение пределов измерения приборов по напряжению

При измерении больших значений напряжения последовательно с катушкой магнитоэлектрического преобразователя ставят дополнительные резисторы. Чтобы при напряжении V указатель прибора отклонялся на всю шкалу, сопротивление последовательного резистора R_1 должно быть равным:

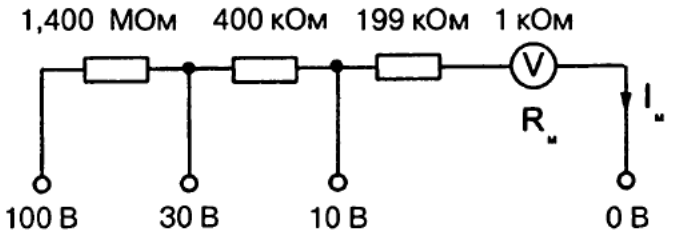


Рис. 4.9. Вольтметр с дополнительными последовательными резисторами

$$R_1 = \frac{V}{I_м} - R_м. \qquad (4.3)$$

Здесь $I_м$ — ток при отклонении указателя прибора на всю шкалу, а $R_м$ — внутреннее сопротивление прибора. Внутреннее сопротивление вольтметра (самого измерителя и последовательного сопротивления) часто соотносят с верхним пределом измерения по напряжению.

Внутреннее сопротивление, отнесенное к напряжению, — это величина, обратная току прибора при отклонении его указателя на всю шкалу, измеряемая в Ом/В.

Пример. Необходимо рассчитать вольтметр на основе магнитоэлектрического преобразователя ($I_м$ = 50 мкА, $R_м$ = 1 кОм) с тремя диапазонами измерений: 10 В, 30 В и 100 В.

Решение: Внутреннее сопротивление прибора, отнесенное к напряжению, равно 20 кОм/В. Поэтому полное сопротивление для диапазона измерений 10 В составляет 200 кОм, для диапазона 30 В — 600 кОм, а для диапазона 100 В — 2 МОм. На рис. 4.9 показаны значения сопротивлений отдельных резисторов, определяющих тот или иной диапазон измерений.

4.2.4. Защита от перегрузок

Для защиты магнитоэлектрического измерителя от перегрузок (рис. 4.10) его шунтируют двумя параллельными встречно включенными диодами. При превышении напряжения на измерителе уровня 0,7 В избыточный ток уводится через диоды. Для борьбы с перегрузками также используются последовательно включенные плавкие предохранители.

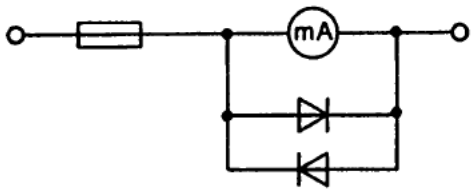


Рис. 4.10. Защита магнитоэлектрического измерителя от перегрузок

4.2.5. Систематические погрешности при измерении тока и напряжения

Измерение тока

Ток, протекающий в цепи без измерителя, равен $I = V/R$. При включении в цепь амперметра с внутренним сопротивлением R_M ток в цепи уменьшится: $I = V/(R + R_M)$ (рис. 4.11).

- Абсолютная погрешность измерения тока снижается при уменьшении внутреннего сопротивления амперметра.

Величина систематической относительной погрешности измерений тока определяется как:

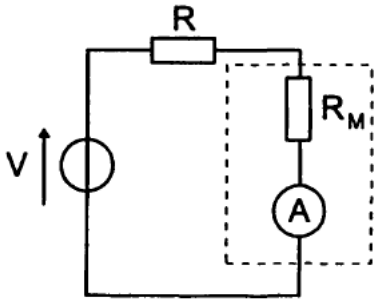


Рис. 4.11. Систематические погрешности при измерении тока

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{R_M}{R_M + R} \approx -\frac{R_M}{R}, \quad R_M << R. \tag{4.4}$$

Пример: Если внутреннее сопротивление амперметра по крайней мере в 100 раз меньше сопротивления токового контура, то можно получить систематическую погрешность измерений менее 1%.

Измерение напряжения

При подключении к цепи, состоящей из источника напряжения $V_{o/c}$ и сопротивления R_{int}, вольтметра, его сопротивление R_M будет являться нагрузкой для основной схемы, что приведет к некоторому снижению напряжения на ее выводах. При этом измеренное напряжение равно V (рис. 4.12).

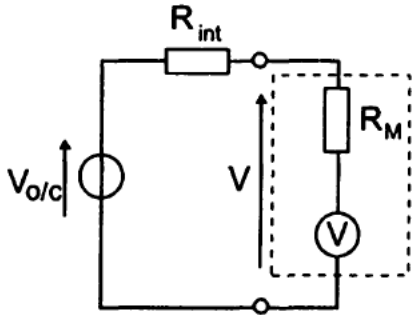


Рис. 4.12. Систематические погрешности при измерении напряжения

Погрешность измерения напряжения снижается при увеличении внутреннего сопротивления вольтметра.

Величина систематической относительной погрешности измерений напряжения определяется как:

$$\frac{V - V_{o/c}}{V_{o/c}} = \frac{R_M}{R_{int} + R_M} - 1 = \frac{-R_{int}}{R_{int} + R_M} \approx -\frac{R_{int}}{R_M}, \quad R_M >> R_{int}. \tag{4.5}$$

Пример: Если внутреннее сопротивление вольтметра по крайней мере в 100 раз больше внутреннего сопротивления источника напряжений, то можно получить систематическую погрешность измерений менее 1%.

4.3. Измерение переменного тока и напряжения

4.3.1. Магнитоэлектрические измерители с выпрямителем

На рис. 4.13 показаны измерительные системы на основе магнитоэлектрических преобразователей с выпрямителями, наиболее часто используемые в цепях переменного тока.

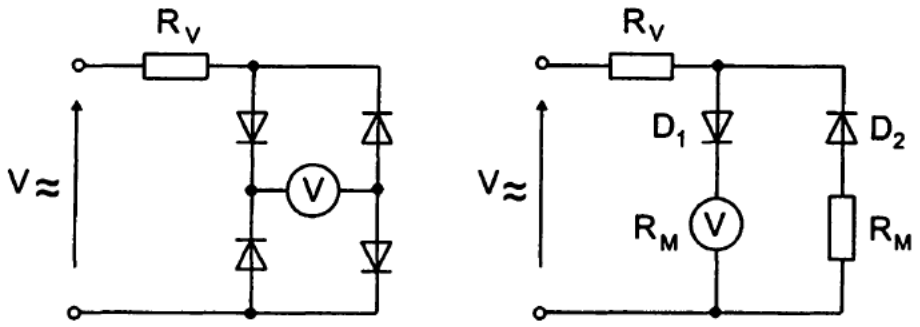


Рис. 4.13. Магнитоэлектрические преобразователи с выпрямителями: *слева* — с мостовым выпрямителем; *справа* — с однополупериодным выпрямителем

Диоды выпрямляют измеряемый ток. При небольших значениях измеряемого напряжения пороговые напряжения диодов влияют на результаты измерений. Этот эффект меньше заметен в правой схеме на рис. 4.13. В этой схеме последовательно с измерителем стоит только один диод. Цепочка из резистора R_M и диода D_2 обеспечивает протекание переменного тока через измерительную систему.

- Магнитоэлектрические приборы с выпрямителями измеряют выпрямленные ток и напряжение.

Примечание. Калибровка шкал приборов обычно проводится в единицах СКЗ синусоидального напряжения. Результаты измерений несинусоидальных сигналов должны корректироваться в соответствии с их коэффициентами формы (см. раздел 3.2.2)

Пример: При помощи магнитоэлектрического прибора измеряется прямоугольное напряжение с пиковыми значениями ±1 В. Для сигнала такой формы СКЗ и значение выпрямленного напряжения равны 1 В. Отклонение указателя прибора пропорционально величине выпрямленного напряжения.

С другой стороны, если величина выпрямленного синусоидального напряжения равна 1 В, то его СКЗ с учетом коэффициента формы составляет: $k_f \cdot |\overline{v}| \approx 1{,}11$ В. Для выпрямленного напряжения на шкале магнитоэлектрического измерителя будет показано СКЗ сигнала, т. е. 1,1 В. Следовательно, систематическая погрешность измерения в этом случае составит 11 %.

- В области малых значений переменного напряжения шкалы магнитоэлектрических приборов являются нелинейными.

Примечание. Измеряемое переменное напряжение может быть усилено при помощи трансформаторов. При этом снижается влияние характеристической кривой диода. Однако трансформаторы ограничивают частотный диапазон сигналов: нижний предел до значений 30 Гц, а верхний — до 10 кГц.

На рис. 4.14 показана схема, преобразующая при помощи резистора R входное переменное напряжение в пропорциональный ток. Выходной ток операционного усилителя (ОУ) обеспечивает равенство напряжений на инвертирующем и неинвертирующем входах. При таком включении показания прибора не зависят от нелинейностей диодов. Соответствующий выбор сопротивления резистора R позволяет измерять очень малые значения переменного напряжения (порядка 1 мВ):

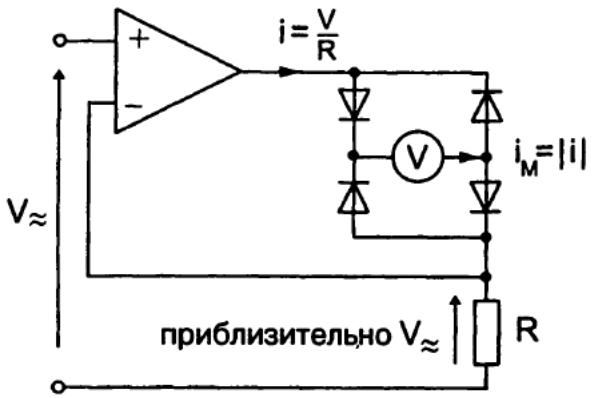


Рис. 4.14. Преобразование напряжения в ток для измерения низких сигналов переменного напряжения

$$i_{\text{м}} = \frac{|V_{\approx}|}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V_{\approx}}{I_{\text{м}}}, \tag{4.6}$$

где $V_{\approx}$ — максимальное измеряемое переменное напряжение, а $I_{\text{м}}$ — ток прибора при отклонении указателя на всю шкалу. Диапазон измерений может быть расширен при использовании перед схемой преобразователя напряжение-ток делителя напряжений.

При измерении высокочастотных переменных напряжений нельзя допускать, чтобы через измеритель протекал переменный ток. Для этого в ВЧ-щуп прибора встраивается выпрямитель пиковых значений, показанный на рис. 4.15. Этот выпрямитель пропускает на вход измерителя только постоянную составляющую сигнала напряжения. Шкалу прибора удобно калибровать в единицах двойной амплитуды.

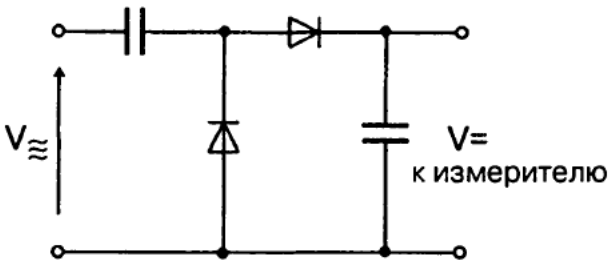


Рис. 4.15. Выпрямитель пиковых значений, используемый для измерения ВЧ-сигналов

4.3.2. Электромагнитные измерители

Электромагнитные преобразователи являются самыми простыми устройствами для измерения переменных напряжений и токов. Они определяют СКЗ сигналов, и поэтому могут использоваться в случае несинусоидальных токов. Поскольку электромагнитные измерители обладают большой индуктивностью, их надо аккуратно применять в качестве вольтметров, так как они могут ослаблять некоторые гармоники сигналов. Поэтому в такие приборы желательно встраивать частотно-компенсирующие схемы.

4.3.3. Расширение диапазона измерения при помощи измерительных трансформаторов

Для расширения диапазонов измерений переменного тока и напряжения могут использоваться не только последовательные и параллельные резисторы, описанные раннее, но и трансформаторы. Измерительные трансформаторы обладают большим диапазоном коэффициентов преобразований, а также обеспечивают электрическую развязку системы измерения от сети электропитания.

Трансформаторы напряжения в зависимости от соотношения витков в обмотках повышают или понижают измеряемое напряжение. Типовые значения напряжений во вторичных обмотках трансформаторов составляют 100 В для обычных сетей и $100/\sqrt{3}$ В для трехфазных сетей. На идентификационные пластины, прикрепляемые к трансформаторам, обычно наносятся значения напряжений на обмотках, например 380 В/100 В. Выводы первичных обмоток трансформаторов напряжения обычно обозначаются буквами U или V, а вторичных — u или v. Неиспользуемые выводы вторичных обмоток трансформаторов напряжения могут оставаться свободными. Первичные обмотки обычно выполняются из большого числа витков тонкого медного провода, что обеспечивает протекание в них малого тока при высоком напряжении.

Токовые трансформаторы понижают измеряемый ток. Коэффициент понижения обратно пропорционален соотношению витков в обмотках трансформатора. Обычно токи во вторичных обмотках трансформаторов лежат в пределах 1...5 А. На идентификационной пластине обычно указывается отношение токов в обмотках трансформатора, например 25 А/5 А. Выводы первичных обмоток токовых трансформаторов обозначаются буквами K и L, а выводы вторичных обмоток — k и l. Неиспользуемые выводы вторичных обмоток токовых трансформаторов должны быть короткозамкнуты. Первичные обмотки токовых трансформаторов обычно состоят из нескольких витков толстого медного провода, намотанных вокруг сердечника, связанного со вторичной обмоткой. Существует особая конструкция разъемных токовых трансформаторов, размещаемых вокруг проводников с током. На основе таких трансформаторов изготавливают специальные амперметры, называемые токоизмерительными клещами.

Примечание. При помощи измерительных трансформаторов можно производить операцию сложения токов и напряжений. При сложении токов соответствующие вторичные обмотки токовых трансформаторов подключаются параллельно с соблюдением полярности сигналов, при сложении напряжений вторичные обмотки трансформаторов напряжений соединяются последовательно.

Для измерительных трансформаторов определяют либо **погрешность по току**, либо **погрешность по напряжению**. Эти величины соответствуют максимальным отклонениям тока (напряжения) во вторичных обмотках от реальных значений этих величин. Поскольку трансформаторы обладают

незначительными потерями, фазовые сдвиги между входными и выходными электрическими величинами (токами или напряжениями) очень малы. Величины этих сдвигов определяют **фазовую погрешность**. Значение этой погрешности необходимо знать при одновременном измерении двух электрических величин, например при определении мощности. Для того чтобы выходные сигналы трансформаторов не выходили за пределы допустимых погрешностей, они должны работать на **номинальную нагрузку**. Можно провести аналогию между вторичной обмоткой токового трансформатора и источником тока, исходя из которой следует, что номинальная нагрузка должна обладать очень низким сопротивлением (практически нулевым). Из сравнения работы вторичной обмотки трансформатора напряжения и источника напряжения получаем, что в этом случае сопротивление номинальной нагрузки должно быть очень большим (практически бесконечным).

В измерительных трансформаторах величина нагрузки часто задается через максимальное значение кажущейся мощности, измеряемой в В·А. Для токовых трансформаторов эти значения лежат в пределах 1...60 В·А, а для трансформаторов напряжения — 10...300 В·А.

4.3.4. Измерение среднеквадратичных значений (СКЗ) сигналов

Шкалы большинства приборов для измерения электрических величин в цепях переменного тока откалиброваны в единицах СКЗ (RMS). Если это не так, то их показания являются корректными только для сигналов, при которых производилась калибровка (обычно для синусоидальных сигналов).

Существует несколько типов приборов, измеряющих СКЗ сигналов:

- магнитоэлектрические измерители;
- тепловые преобразователи;
- электродинамические измерители с двумя последовательно соединенными катушками;
- электростатические измерители (для определения СКЗ напряжений).

Магнитоэлектрический измеритель с термопреобразователем. В таком приборе измеряемый ток нагревает резистор, температура которого определяется при помощи теплового детектора. А уже к этому детектору подключается магнитоэлектрический измеритель, откалиброванный в СКЗ тока (рис. 4.16).

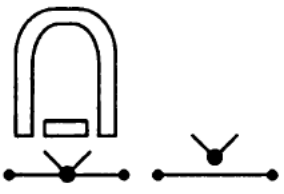


Рис. 4.16. Обозначение магнитоэлектрического измерителя с термопреобразователем, определяющего СКЗ сигнала. *Справа* — тепловой детектор, изолированный от измерительного контура

Измеритель с аналоговым блоком для вычисления СКЗ. В таком приборе реализовано аппаратное вычисление СКЗ при помощи электронных схем (рис. 4.17).

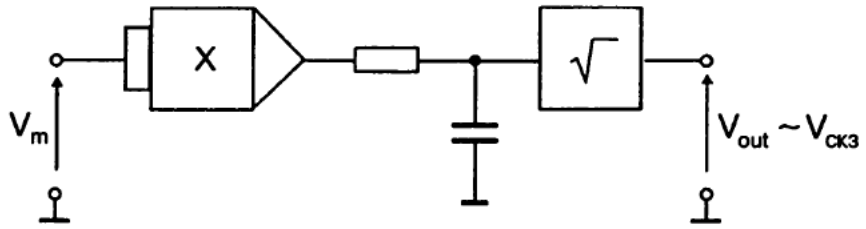


Рис. 4.17. Принцип аппаратного вычисления СКЗ измеряемой величины

Цифровой измеритель. Основой такого прибора является микропроцессор, управляющий процессом дискретизации измеряемой величины и последующей обработкой полученных замеров.

Примечание. В состав измерителей СКЗ сигналов должны входить цепи частотной коррекции. Это связано с тем, что, как правило, вольтметры подключаются параллельно источникам измеряемого сигнала, т. е. являются для них нагрузкой, параметры которой зависят от частоты, что может сказаться на значениях получаемых результатов измерений.

4.4. Измерение мощности

4.4.1. Измерение мощности в цепях постоянного тока

Мощность, потребляемую нагрузкой, можно оценить, измерив ток, протекающий через нее, и падение напряжения на ней.

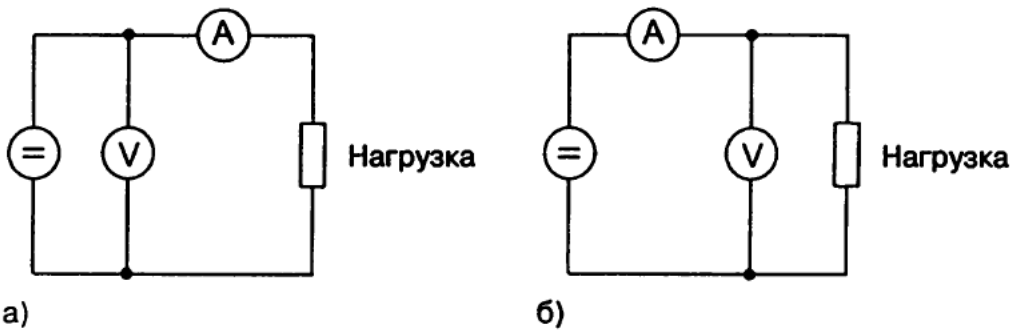


Рис. 4.18. Определение мощности в цепях постоянного тока:
а) схема, обеспечивающая точное измерение тока;
б) схема, обеспечивающая точное измерение напряжения

На рис. 4.18а показана схема включения вольтметра и амперметра для определения потребляемой мощности, обеспечивающая **точное измерение тока**. В этой схеме измеренное значение напряжения всегда превышает действительное падение напряжения на нагрузке на величину падения напряжения на амперметре.

На рис. 4.18б показана схема включения вольтметра и амперметра для определения потребляемой мощности, обеспечивающая **точное измерение напряжения**. В этой схеме измеренный ток всегда превышает действительное значение тока через нагрузку на величину тока, текущего через вольтметр.

Примечание. При измерении мощности источника, а не мощности, потребляемой нагрузкой, схемы, показанные на рис. 4.18а и 4.18б, меняются ролями, что отражено в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Измерение электрических величин в цепях постоянного тока

Измеряемая величина	Нагрузка	Подходящая схема
Мощность потребления нагрузки	Высокоомная	Точное измерение тока (а)
	Низкоомная	Точное измерение напряжения (б)
Мощность источника питания	Высокоомная	Точное измерение тока (б)
	Низкоомная	Точное измерение напряжения (а)

Для **прямого определения мощности** используются электродинамические измерители, называемые ваттметрами. В таких приборах, одна из катушек обеспечивает **линию для измерения тока**, а вторая — **линию для измерения напряжения**. Принципиальные схемы измерения при помощи ваттметров аналогичны схемам измерения при помощи двух измерителей: вольтметра и амперметра. То же самое можно сказать и о систематических погрешностях в них.

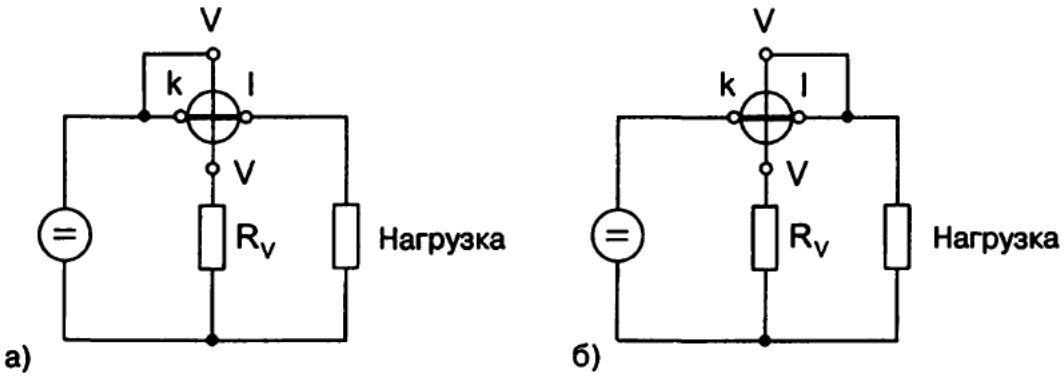


Рис. 4.19. Определение мощности в цепях постоянного тока при помощи ваттметра:
а) схема, обеспечивающая точное измерение тока;
б) схема, обеспечивающая точное измерение напряжения

На рис. 4.19а показана схема включения ваттметра, обеспечивающая **точное измерение тока,** а на рис. 4.19б — **точное измерение напряжения**. Комментарии к этим схемам аналогичны комментариям схем измерения мощности при помощи двух измерителей.

Примечание. Показания ваттметра соответствуют **произведениям токов** в линии для измерения тока и **напряжений** на линии измерения напряжений. Для получения корректных результатов измерений необходимо следить, чтобы

ни ток, ни напряжение в соответствующих линиях измерения не превышали установленных допустимых значений.

Примечание. Для измерения мощности в цепях, где ток может менять свое направление, необходимо либо использовать ваттметры с нулевым положением в центре шкалы, либо в измерительные линии встраивать переключающие тумблеры.

4.4.2. Измерение мощности в цепях переменного тока

В цепях переменного тока с синусоидальными токами и напряжениями определяются несколько типов мощностей:

- кажущаяся мощность $S = V \cdot I$, измеряемая в В·А;
- активная мощность $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$, измеряемая в Вт;
- реактивная мощность $Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$, измеряемая в варах.

Здесь V и I — СКЗ напряжения и тока синусоидальных сигналов. **Кажущаяся мощность** определяется так же, как и в цепях постоянного тока, при помощи вольтметра и амперметра (см. рис. 4.18). При этом справедливы те же самые комментарии.

Активная мощность определяется при помощи электродинамических или индукционных измерителей, в которых учитывается фазовый сдвиг между током и напряжением. Так же как и в цепях постоянного тока, здесь используются два варианта схем измерения: с точным измерением тока и с точным измерением напряжения (рис. 4.19).

Реактивная мощность определяется ваттметром с двумя измерительными катушками, в одной из которых сигнал сдвинут по фазе на 90° при помощи фазовращательной схемы.

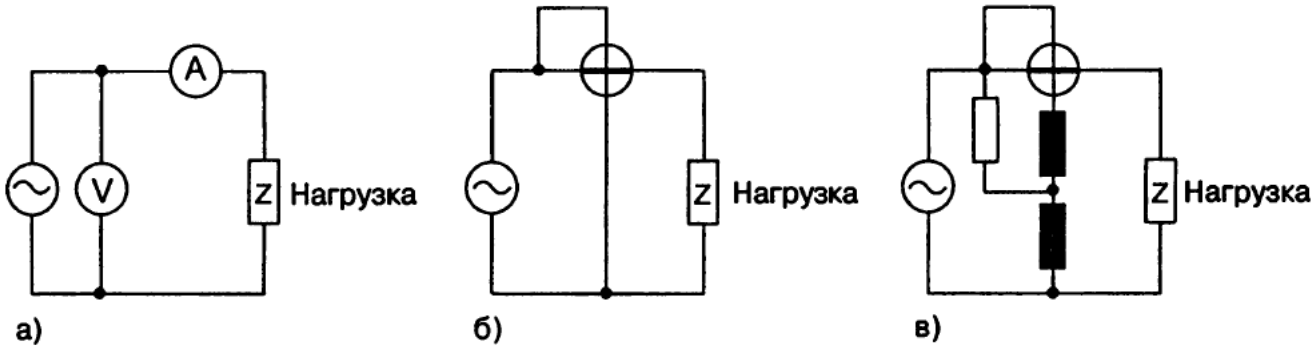


Рис. 4.20. Схемы для измерения:
а) кажущейся мощности;
б) активной мощности;
в) реактивной мощности

Примечание. При измерении мощности в цепях, содержащих реактивные компоненты, необходимо всегда контролировать ток в линии измерения тока, в противном случае ваттметр может войти в режим перегрузки.

Примечание. Надо очень осторожно подходить к измерению несинусоидальных токов и напряжений! В этом случае при определении мощности необходимо помнить о следующих моментах:

- Любая фазовращательная схема рассчитывается только для *одного* значения частоты.
- В ваттметре на линии измерения напряжения происходит сильное ослабление гармоник сигналов.

Эти моменты важны при измерении мощности в цепях нагрузки, в состав которых входят тиристоры, токовые выпрямители и другие аналогичные им элементы. Определение коэффициента мощности в таких цепях связано с большими ошибками, что иногда приводит к бессмысленности полученных результатов.

4.4.2.1. Метод трёх вольтметров

Последовательно с комплексной нагрузкой ставится резистор с известным значением сопротивления (рис. 4.21).

После снятия показаний трех вольтметров можно вычислить значение **активной мощности:**

$$P = \frac{V_{\text{total}}^2 - V_R^2 - V_Z^2}{2R}. \tag{4.7}$$

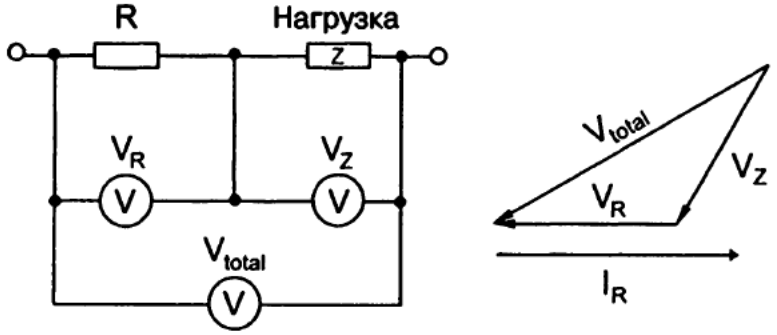


Рис. 4.21. Метод трех вольтметров для определения мощности в цепи нагрузки и соответствующая векторная диаграмма

Метод трех амперметров аналогичен методу трех вольтметров, только в этом случае известное сопротивление ставится параллельно комплексной нагрузке (рис. 4.22).

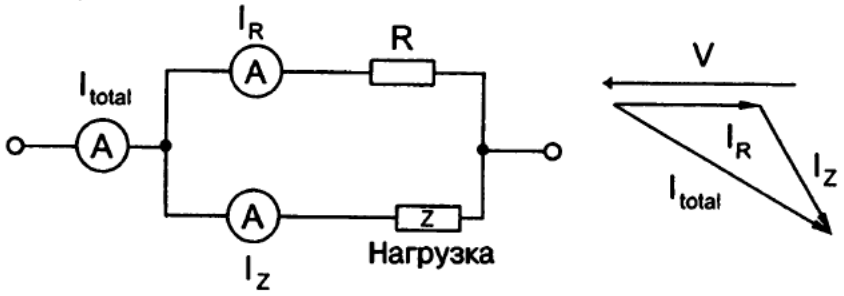


Рис. 4.22. Метод трех амперметров для определения мощности в цепи нагрузки и соответствующая векторная диаграмма

Выражение для определения активной мощности по трем измеренным значениям токов имеет вид:

$$P = \frac{R}{2} \cdot (I_{\text{total}}{}^2 - I_R^2 - I_Z^2). \qquad (4.8)$$

Используя следующие соотношения, по показаниям трех вольтметров можно определить величину реактивной мощности Q:

$$\cos\varphi = \frac{V_{\text{total}}{}^2 - V_R^2 - V_Z^2}{2 \cdot V_R \cdot V_Z}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}, \quad S = V_Z \cdot \frac{V_R}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \cdot V_Z \cdot \frac{V_R}{R}.$$

4.4.2.2. Измерение коэффициента мощности

Коэффициент мощности может быть вычислен по значениям кажущейся мощности, измеренной при помощи вольтметра и амперметра, и активной мощности, измеренной при помощи ваттметра.

Для **прямого определения коэффициента мощности** используется электродинамический измеритель отношений, показанный на рис. 4.23.

Недостатком такой измерительной схемы является ее узкий частотный диапазон (49,5...50,5 Гц), связанный с ограничениями по величине индуктивности фазосдвигающего элемента.

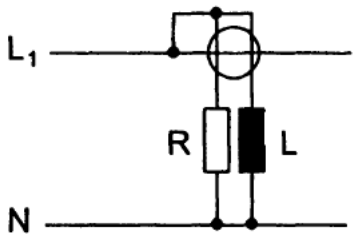


Рис. 4.23. Измерение коэффициента мощности при помощи электродинамического измерителя отношений

Показания такого измерителя с большой степенью точности пропорциональны tg φ, где φ — фазовый угол между током и напряжением в цепи нагрузки. Однако шкала прибора чаще всего калибруется в единицах cos φ (например, +0,4 указывает на емкостной характер нагрузки, а –0,4 — на индуктивный). Как правило, в таких измерителях нет режима сброса или установки в нулевое положение, поэтому в них нельзя идентифицировать ситуацию отсутствия в цепи тока. Некоторые электродинамические измерители имеют круговую шкалу (360°).

4.4.3. Измерение мощности в многофазных системах

В этом разделе описаны методы измерения:

- **кажущейся мощности** при помощи трех вольтметров и трех амперметров,
- **активной мощности** при помощи одного, двух или трех ваттметров,
- **реактивной мощности** при соответствующем фазовом сдвиге напряжения.

В трехфазных системах не требуется дополнительных фазовращающих схем, поскольку в них фазовый угол между линейным напряжением двух соседних проводников и фазовым напряжением третьего проводника составляет 90°.

4.4.3.1. Измерение активной мощности в многофазных системах

Для измерения мощности в **четырехпроводной системе** с **несимметричной нагрузкой** требуются три ваттметра (рис. 4.24). Полная активная мощность равна сумме мощностей, измеренных в отдельных линиях:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = V_{1N} \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 + V_{2N} \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 + V_{3N} \cdot I_3 \cdot \cos\varphi_3.$$

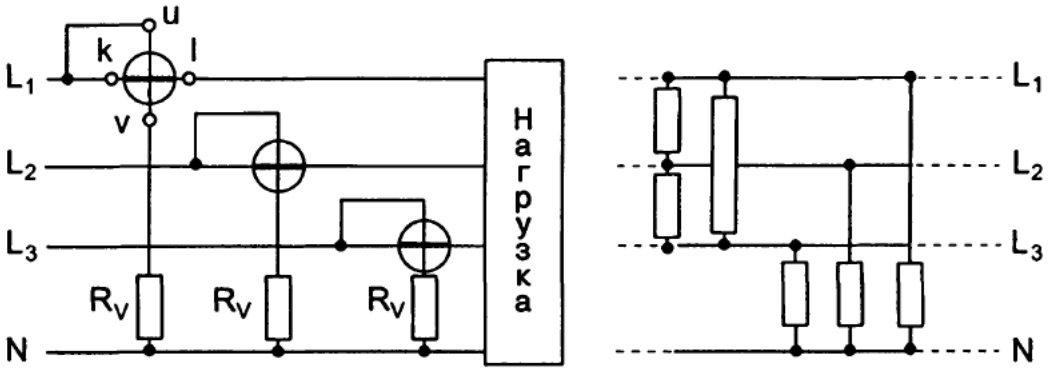


Рис. 4.24. Измерение активной мощности в четырехпроводной системе с несимметричной нагрузкой

Примечание. Для определения полной мощности можно обойтись одним ваттметром, последовательно измеряя им мощность в каждой отдельной линии.

В случае симметричной нагрузки справедливы следующие соотношения:

$$V_{1N} = V_{2N} = V_{3N}, \quad I_1 = I_2 = I_3, \quad \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3.$$

Поэтому при измерении мощности в **четырехпроводной системе** с **симметричной нагрузкой** можно обойтись *одним* ваттметром, откалиброванным соответствующим образом (рис. 4.25). Если показания такого ваттметра равны P_M, то полная мощность в системе определяется выражением:

$$P = 3 \cdot P_M.$$

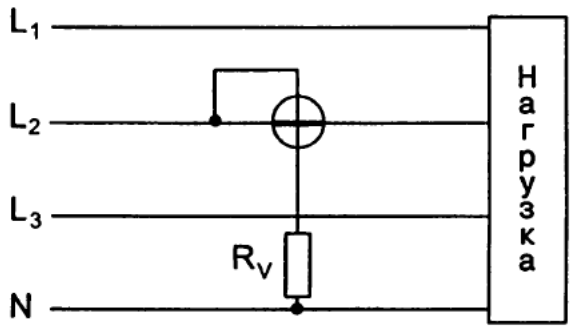


Рис. 4.25. Измерение активной мощности в четырехпроводной системе с симметричной нагрузкой

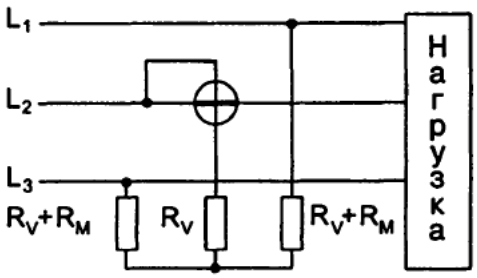


Рис. 4.26. Измерение активной мощности в трехпроводной системе с симметричной нагрузкой и искусственной нулевой точкой

В **трехпроводной системе** нейтральный проводник отсутствует и для проведения измерения мощности создается **искусственная нулевая точка**. Сопротивление $R_V + R_M$ равно полному сопротивлению линии измерения напряжения ваттметра (рис. 4.26).

Если в схему, показанную на рис. 4.24, добавить искусственную нулевую точку, то ее можно применить для измерения мощности в трехпроводной системе с несимметричной нагрузкой. Для этих же целей была разработана схема, показанная на рис. 4.27. В ней для измерения мощности используются два ваттметра.

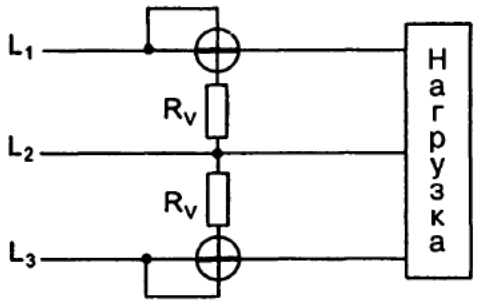


Рис. 4.27. Измерение активной мощности в трехпроводной системе с несимметричной нагрузкой при помощи двух ваттметров

Напряжение в линии измерения напряжения ваттметра в такой схеме превышает напряжение, измеренное в схеме с нейтральным проводником, в $\sqrt{3}$ раз. Активная мощность в нагрузке равна сумме показаний обоих ваттметров:

$$P = P_{M1} + P_{M3}.$$

Примечание. При больших фазовых сдвигах показания ваттметров могут быть отрицательными, поэтому необходимо принимать во внимание знаки получаемых значений. В таких случаях рекомендуется использовать ваттметры с нулевыми точками, расположенными в центре шкал, или применять тумблеры для переключения полярности.

4.4.3.2. Измерение реактивной мощности в многофазных системах

В трехфазных системах измерить **реактивную мощность** можно без применения фазосдвигающих цепей, поскольку в них фазовый угол между линейным напряжением двух соседних проводников и фазовым напряжением третьего проводника составляет 90°.

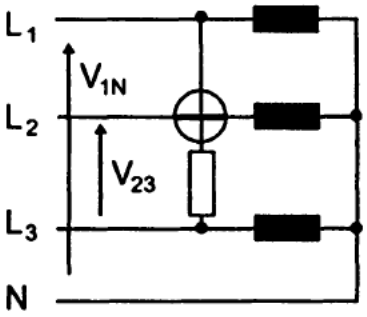


Рис. 4.28. Схема измерения реактивной мощности в четырехпроводной системе с симметричной нагрузкой

На рис. 4.28 показана схема измерения **реактивной мощности в четырехпроводной системе с симметричной нагрузкой**. Напряжение V_{23} между проводниками L_2 и L_3 сдвинуто относительно напряжения V_{1N} на 90°, и больше его в $\sqrt{3}$ раза. Следовательно, полная (симметричная) реактивная мощность определяется выражением:

$$Q_{total} = 3 \cdot \frac{Q}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot Q.$$

Корректные результаты измерений получаются либо при подборе сопротивлений последовательных резисторов, либо при применении измерительного трансформатора с соответствующим коэффициентом преобразования.

На рис. 4.29 показана схема измерения **реактивной мощности в трехпроводной системе с несимметричной нагрузкой** при помощи трех ваттметров. Эта схема отличается от схемы для измерения активной мощности тем, что в ней напряжения, подаваемые на линии измерения напряжения ваттметров, сдвинуты по фазе на 90°.

Значения напряжений при этом должны быть изменены на коэффициент $\sqrt{3}$:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3).$$

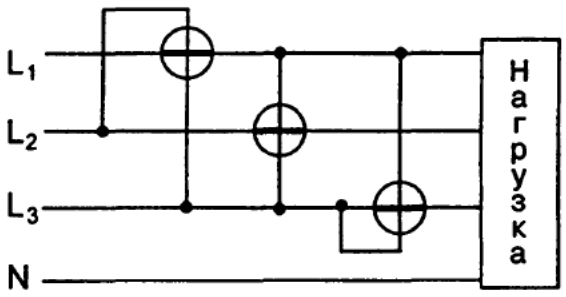


Рис. 4.29. Схема измерения реактивной мощности в трехпроводной системе с несимметричной нагрузкой (последовательные резисторы не показаны)

4.5. Погрешности измерения

4.5.1. Систематические и случайные погрешности измерения

Не существует абсолютно точных результатов измерений. Источники погрешностей могут находиться:

- в самом приборе,
- в методе измерения,
- в окружающей среде (температурные и паразитные поля),
- в способе снятия показаний.

Все погрешности делятся на **систематические** и **случайные**.

Систематические погрешности возникают вследствие применения несоответствующих методов измерения и неточности используемых приборов. Такие погрешностям свойственна повторяемость, поэтому их влияние может быть скомпенсировано.

Случайные погрешности не имеют точно выраженных закономерностей. Они меняются при повторении серии измерений и поэтому не поддаются корректировке.

- **Приведенная погрешность измерений** обычно определяется в процентах относительно максимального измеряемого значения. Если началу шкалы прибора соответствует ненулевое значение измеряемого сигнала, то в качестве относительной величины берется сумма или разность конечных значений шкалы.

Примечание. Для приборов с сильно нелинейными шкалами измерений, со шкалами без нулевой точки, а также для резонансных измерителей эта погрешность не определяется. В таких случаях оценку точности измерений проводят по классам точности приборов, указанным в их документации, или считают результаты измерений истинными.

4.5.2. Гарантированный предел допустимой погрешности

Производители измерительной техники гарантируют, что при соблюдении определенных условий эксплуатации погрешность результатов измерений, полученных при помощи их приборов, не будет превышать установленного значения. Это значение называется максимально допустимой приведенной погрешностью измерений. Именно эта погрешность определяет **класс точности прибора**, отображаемый на шкале прибора (табл. 4.3).

Таблица 4.3. Классы точности приборов

Класс точности (VDE 0410), %						
0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5	5,0

Пример: Класс точности прибора —1,5. Максимальное измеряемое значение равно 300 В. Определить относительную погрешность при измерении напряжения 100 В.

Решение: Максимально допустимая абсолютная погрешность измерений равна 4,5 В. При измерении напряжения 100 В величина относительной погрешности составляет $\frac{4,5\ \text{В}}{100\ \text{В}} = 4,5\,\%$.

- Диапазон измерений следует выбирать таким, чтобы измеряемое значение превышало 2/3 шкалы.

4.6. Обозначения на измерительных приборах

В табл. 4.4 приведены символы, наносимые на шкалы измерительных приборов, и их обозначения (см. также раздел 4.1.6)

Таблица 4.4. Обозначения на измерительных приборах

—	Измерение в цепях постоянного тока
~	Измерение в цепях переменного тока
≂	Измерение в цепях и постоянного, и переменного тока
≋	Измерение в трехфазных цепях на одной фазе
≋	Измерение в трехфазных цепях на двух фазах
≋	Измерение в трехфазных цепях на трех фазах
☆	Измерительная цепь изолирована от корпуса и испытана на напряжение 500 В
☆2	Измерительная цепь изолирована от корпуса и испытана на напряжение более 500 В (здесь 2 кВ)
☆0	Прибор испытанию прочности изоляции не подлежит
⊥	Вертикальное положение шкалы
⌐	Горизонтальное положение шкалы

Окончание таблицы 4.4

	Наклонное положение шкалы под определенным углом к горизонту
1.5	Класс точности при нормировании погрешности в процентах от диапазона измерений
	Класс точности при нормировании погрешности в процентах от длины шкалы
	Класс точности при нормировании погрешности в процентах от истинного значения измеряемой величины
	Выпрямительный (полупроводниковый) преобразователь
	Электронный измерительный прибор
	Отдельно стоящее шунтирующее сопротивление
	Отдельно стоящее последовательное сопротивление
	Экранирование от электростатических полей
	Экранирование от магнитных полей
ast	Астатический прибор
	Максимально допустимое значение паразитных полей (здесь 5 мТл)
	Зажим для заземления
	Указатель подстройки нуля шкалы
	Внимание! См. дополнительные указания в паспорте и инструкции по эксплуатации
	Осторожно! Прочность изоляции цепи относительно корпуса не соответствует нормам
	Опасно! Корпус прибора под высоким напряжением

4.7. Методы измерений (обзор)

В табл. 4.5 приведены номера разделов, в которых описаны методы измерения электрических величин, указанных в первой колонке.

Таблица 4.5. Методы измерений электрических величин

Измеряемая величина	Раздел
Постоянный ток	4.2.2
Постоянное напряжение	4.2.3
Переменный ток	4.3.2
Переменное напряжение	4.3.1
СКЗ	4.3.4
Мощность в цепи постоянного тока	4.4.1

Окончание таблицы 4.5

Активная мощность	4.4.2
Реактивная мощность	4.4.2
Коэффициент мощности	4.4.2.2
Мощность в многофазных цепях	4.4.3.1
Реактивная мощность	4.4.3.1
Импеданс	3.7.6.2

4.8. Обозначения

c	Постоянная величина для прибора
cos φ	Коэффициент мощности
$\overline{I}$	Среднее арифметическое значение тока
ΔI	Систематическая погрешности при измерении тока
I_1, I_2, I_3	Фазовые токи
I_M	Максимальное значение измеряемого тока
I_R	Ток через резистивный элемент
I_Z	Ток через комплексное сопротивление
k_f	Коэффициент формы
P	Активная мощность
P_{M1}, P_{M2}	Измеренные значения мощности
Q	Реактивная мощность
R_A	Внутреннее сопротивление амперметра
R_i	Внутреннее сопротивление источника напряжения
R_M	Внутреннее сопротивление прибора
R_{Sh}	Шунтирующий резистор
R_{Sum}	Суммарное сопротивление
R_V	Последовательное сопротивление
S	Кажущаяся мощность
$\lvert\overline{v}\rvert$	Выпрямленное значение
V_{1N}, V_{2N}, V_{3N}	Фазовые напряжения
$V_{o/c}$	Разомкнутая цепь, вывод напряжения
V_M	Максимальное значение измеряемого напряжения
V_R	Напряжение на резисторе
V_Z	Напряжение на комплексном сопротивлении
φ_{13}	Фазовый угол между I_1 и I_2
σ	Функция шкалы

Литература

BENTLY J. P. *Principles of Measurement*. 3rd ed. — : Longman, 1997.
FLOYD T. L. *Electric Circuits Fundamentals*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2001.

ГЛАВА 5

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ

На практике разработчикам измерительных систем не столь важно внутреннее устройство того или иного блока, их больше интересует поведение его выходных сигналов (чаще всего напряжения) в ответ на определенные входные воздействия (рис. 5.1). Поведение сигналов определяется функцией преобразования блока T:

$$v_{out} = T(v_{in}).$$



Рис. 5.1. Система с функцией преобразования T

Такие системы часто называют **черными ящиками**.

5.1. Линейные системы

С достаточной степенью точности многие системы могут считаться **линейными**. Для линейных систем справедливо следующее соотношение:

$$T(\alpha \cdot v_{in}) = \alpha \cdot T(v_{in}). \qquad (5.1)$$

- Выходные сигналы линейных систем пропорциональны входным сигналам.
- Все входные сигналы линейных систем преобразуются независимо друг от друга (рис. 5.2):

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2). \qquad (5.2)$$

Такой подход называется **принципом суперпозиции**.

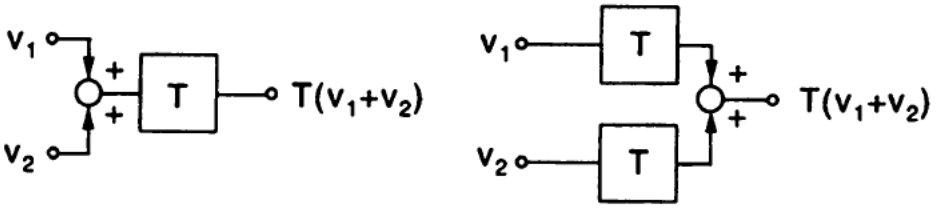


Рис. 5.2. Принцип суперпозиции в линейных системах

- Подача на вход линейной системы гармонического сигнала приводит к появлению на ее выходе также гармонического сигнала **той же самой частоты**, но, возможно, другой амплитуды и фазы.

Примечание. Если в ответ на гармонический входной сигнал на выходе системы появляется негармонический сигнал, то такая система называется **нелинейной**. Выходной сигнал такой системы содержит частотные компоненты, отличные от частоты входного сигнала.

5.1.1. Передаточные функции, амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики

Поведение линейной системы при подаче на ее вход гармонических сигналов разной частоты описывается **передаточной функцией** $G(\omega)$:

$$\text{передаточная функция} = \frac{\text{выходной сигнал}}{\text{входной сигнал}}$$

Независимой переменной в передаточной функции является угловая частота гармонического входного сигнала:

$$G(\omega) = \frac{v_{out}}{v_{in}} \quad \text{только для гармонических сигналов.} \qquad (5.3)$$

Для сигналов, пересекающих нулевой уровень, более подходящей является следующая запись уравнения (5.3):

$$v_{out}(\omega) = G(\omega) \cdot v_{in}(\omega). \qquad (5.4)$$

Поскольку на передаточную функцию влияют и фаза, и амплитуда входного сигнала, она часто определяется комплексными значениями.

Пример: На рис. 5.3 показан фильтр нижних частот.

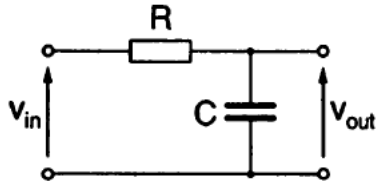


Рис. 5.3. Фильтр нижних частот как делитель напряжений

Его передаточная функция определяется выражением:

$$G(\omega) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Поскольку передаточная функция в общем виде является комплексной, ее часто называют **частотной характеристикой системы**. Очевидно, что ее можно разделить на амплитудную и фазовую составляющие:

$$G(\omega) = |G(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (5.5)$$

Величина $|G(\omega)|$ называется **амплитудно-частотной характеристикой системы** (АЧХ), а $\varphi(\omega)$ — **фазочастотной характеристикой** (ФЧХ). Часто АЧХ представляют в логарифмической форме, тогда она принимает вид:

$$A(\omega) = 20 \lg |G(\omega)| \text{ дБ}. \qquad (5.6)$$

Это соотношение представляет собой отношение двух величин, выраженное в **децибелах**.

Таблица 5.1. Типичные значения АЧХ и усиления сигнала

Типичные значения	
Усиление $v = \|G(\omega)\|$	АЧХ $A(\omega)$
1	0 дБ
$\sqrt{2}$	$\approx$ 3 дБ
$1/\sqrt{2}$	≈ -3 дБ
2	$\approx$ 6 дБ
4	$\approx$ 12 дБ
10	20 дБ
0,1	-20 дБ

Пример. Требуется определить коэффициент передачи системы, если ее усиление составляет 14 дБ.

Решение: Поскольку $A(\omega) = 20 \lg |G(\omega)|$, при помощи табл. 5.1 определяем:

$$14 \text{ дБ} = 20 \text{ дБ} - 6 \text{ дБ} \rightarrow v = 10/2 = 5, \quad |G(\omega)| = 10^{A(\omega)/20} = 10^{14/20} = 5.$$

Примечание. На практике часто используется следующая запись частотной характеристики:

$$G(\omega) = e^{-(\tilde{A}(\omega) + jB(\omega))} = e^{-\tilde{A}(\omega)} \cdot e^{-jB(\omega)}. \qquad (5.7)$$

Здесь $\tilde{A}(\omega)$ называется **коэффициентом ослабления,** а $B(\omega)$ — **фазовым множителем** системы.

АЧХ и ФЧХ системы часто представляются в виде графиков, горизонтальная ось которых является логарифмической осью частоты (рис. 5.4).

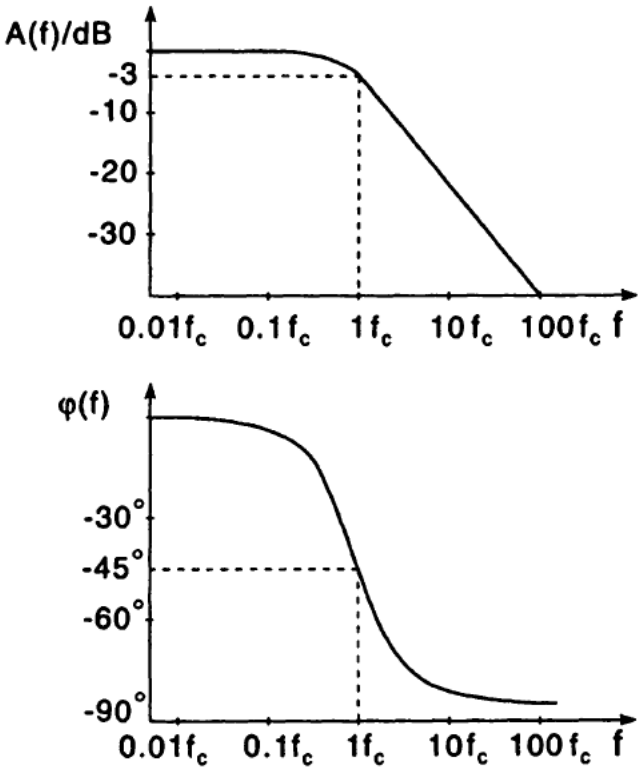


Рис. 5.4. АЧХ и ФЧХ фильтра нижних частот из примера

5.2. Фильтры

Фильтрами называются схемы, передаточные функции которых по-разному меняют амплитуды и фазы отдельных частотных составляющих входного сигнала. Существуют следующие виды фильтров:

- фильтры нижних частот (ФНЧ),
- фильтры верхних частот (ФВЧ),
- полосно-пропускающие (полосовые) фильтры (ФПП или ФП),
- полосовые режекторные фильтры или фильтры-пробки (ФПР),
- фазовые фильтры (ФФ).

В идеальном случае в пределах полосы пропускания сигналы сквозь фильтры проходят без искажений, а вне этой зоны — в полосе заграждения — максимально ослабляются.

5.2.1. Фильтры нижних частот

На рис. 5.5 и 5.6 показаны условные обозначения и частотные характеристики фильтров нижних частот.



Рис. 5.5. Условные обозначения фильтров нижних частот

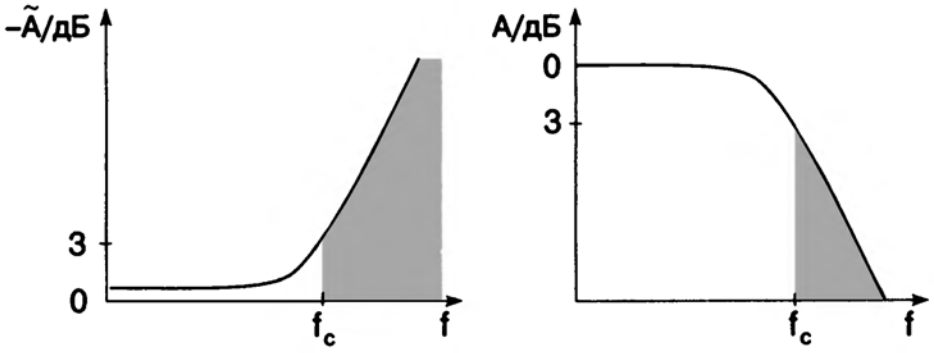


Рис. 5.6. Характеристическая кривая ослабления сигнала и АЧХ фильтра нижних частот. Полоса заграждения фильтра окрашена в серый цвет

- На **частоте среза** фильтра f_c амплитуда выходного сигнала меньше амплитуды входного сигнала в $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ раза. На этой частоте происходит спад АЧХ до уровня -3 дБ, а коэффициент ослабления сигнала составляет 3 дБ.
- **Полоса пропускания** фильтра заканчивается на частоте f_c.
- **Полоса заграждения** фильтра начинается с частоты f_c.

5.2.2. Фильтры верхних частот

На рис. 5.7 и 5.8 показаны условные обозначения и частотные характеристики фильтров верхних частот.



Рис. 5.7. Условные обозначения фильтров верхних частот

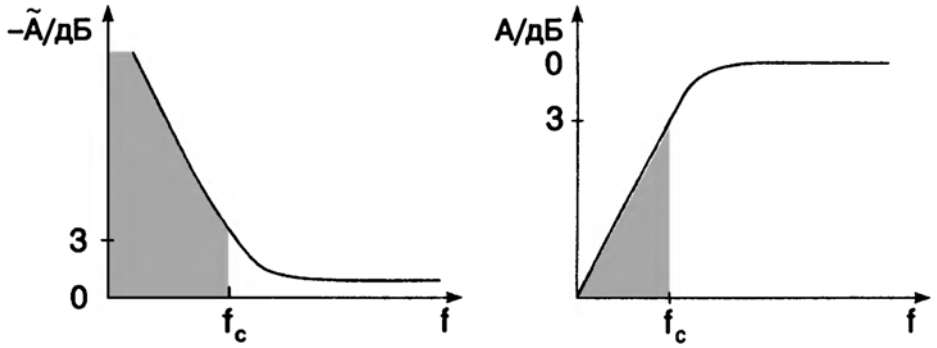


Рис. 5.8. Характеристическая кривая ослабления сигнала и АЧХ фильтра верхних частот. Полоса заграждения фильтра окрашена в серый цвет

- На **частоте среза** фильтра f_c амплитуда выходного сигнала меньше амплитуды входного сигнала в $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ раза. На этой частоте происходит спад АЧХ до уровня -3 дБ, а коэффициент ослабления сигнала составляет 3 дБ.
- **Полоса пропускания** фильтра начинается с частоты f_c.
- **Полоса заграждения** фильтра заканчивается на частоте f_c.

5.2.3. Полосовые фильтры

На рис. 5.9 и 5.10 показаны условные обозначения и частотные характеристики полосовых фильтров.

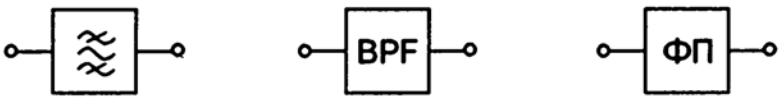


Рис. 5.9. Условные обозначения полосовых фильтров

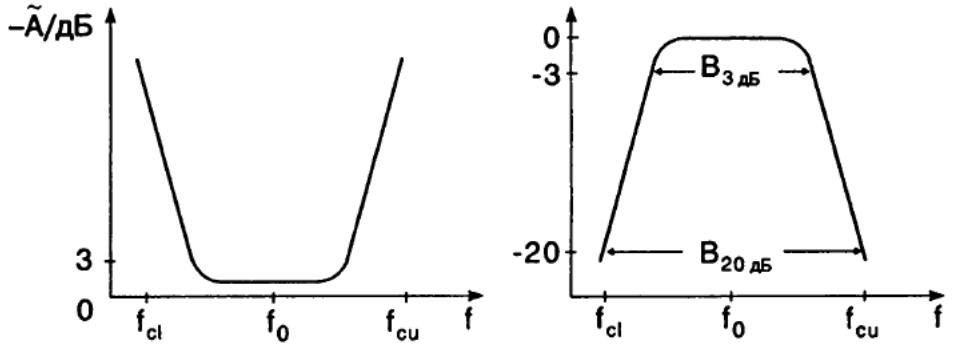


Рис. 5.10. Характеристическая кривая ослабления сигнала и АЧХ полосового фильтра

У полосового фильтра существует две частоты среза: **верхняя критическая частота** f_{cl} и **нижняя критическая частота** f_{cu}.

Центральной частотой f_0 называется частота, равная среднему арифметическому двух критических частот:

$$f_0 = \frac{f_{cl} + f_{cu}}{2}.$$

Полоса пропускания B определяется разностью двух критических частот.

Относительная полоса пропускания — это отношение полосы пропускания к центральной частоте, выраженное в процентах:

$$B_{rel} = \frac{B}{f_0} \cdot 100\,\%.$$

Добротность Q или **Q-фактор** определяется как отношение центральной частоты к полосе пропускания:

$$Q = \frac{f_0}{B}.$$

Коэффициент формы F является характеристикой крутизны наклонов переднего и заднего фронтов АЧХ фильтра и определяется как отношение полос пропускания фильтра на уровнях 3 и 20 дБ:

$$F = \frac{B_{3\,дБ}}{B_{20\,дБ}}.$$

Чем ближе эта величина к единице, тем круче спад (нарастание) АЧХ фильтра.

Примечание. Для гармонических сигналов справедливо следующее соотношение:

$$f_0 = \sqrt{f_{cl} \cdot f_{cu}}.$$

5.2.4. Режекторные фильтры

Режекторные фильтры являются дополнениями полосовых фильтров (рис. 5.11). Они служат для подавления сигналов в определенном частотном диапазоне.



Рис. 5.11. Условные обозначения режекторных фильтров

5.2.5. Фазовые фильтры

При прохождении сигналов через фазовые фильтры не происходит изменения их амплитуды во всем частотном диапазоне. Однако фаза выходных сигналов при этом зависит от частоты.

5.3. Простые фильтры

5.3.1. Фильтры нижних частот

На рис. 5.12 показан фильтр нижних частот первого порядка, **передаточная функция** которого определяется следующим выражением:

$$G(\omega)=\frac{1/j\omega C}{1/j\omega C+R}=\frac{1}{1+j\omega RC}. \qquad (5.8)$$

Примечание. При определении передаточной функции эта схема рассматривается как делитель напряжения.

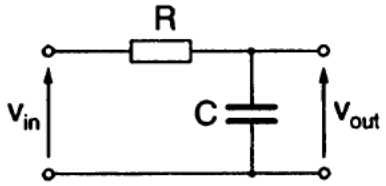


Рис. 5.12. Фильтр нижних частот первого порядка

АЧХ фильтра является модулем передаточной функции:

$$|G(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}, \qquad (5.9)$$

а **ФЧХ** определяется разностью фаз входного и выходного напряжений $\varphi(\omega)=\varphi_{Vout}-\varphi_{Vin}$:

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right]=-\operatorname{arctg}(\omega RC). \qquad (5.10)$$

На рис. 5.13 показаны АЧХ и ФЧХ фильтра нижних частот первого порядка.

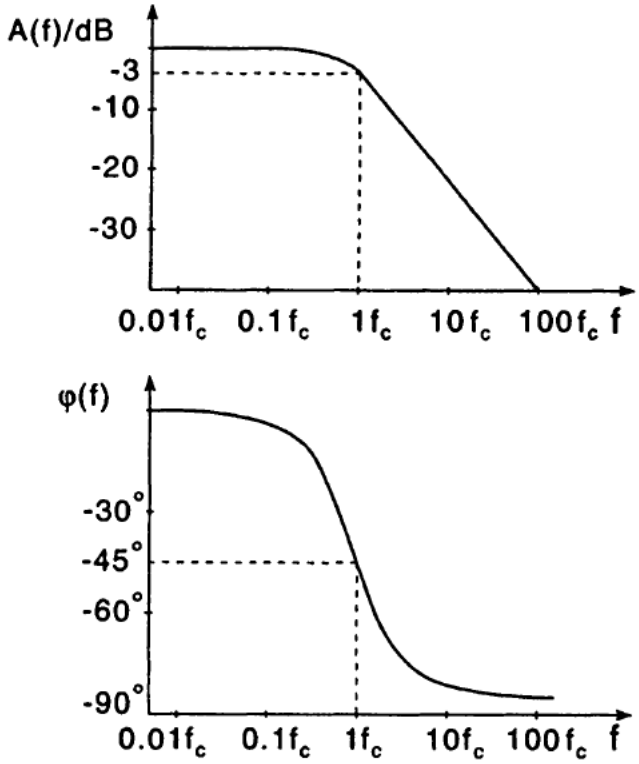


Рис. 5.13. АЧХ и ФЧХ фильтра нижних частот первого порядка

При угловой частоте $\omega_c = 1/RC$:

$$|G(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3 \text{ дБ}.$$

Частота $f_c = \omega_c/2\pi$ называется **критической частотой** или **частотой излома АЧХ** ФНЧ, а также его частотой среза. На этой частоте фаза выходного сигнала определяется выражением:

$$\varphi(\omega_c) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad -45°.$$

На критической частоте коэффициент ослабления сигнала ФНЧ составляет 3 дБ. При этом фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами равен 45°.

5.3.1.1. Время нарастания сигнала

Реакция ФНЧ на ступенчатое входное воздействие оценивается через величину, называемую **временем нарастания** выходного сигнала, определяемую как интервал времени, в течение которого сигнал увеличивается с 10 до 90 % от установившегося уровня (рис. 5.14). Между временем нарастания сигнала t_r и критической частотой f_c существует следующая взаимосвязь:

$$t_r \approx \frac{1}{3f_c} \approx \frac{2}{\omega_c}. \qquad (5.11)$$

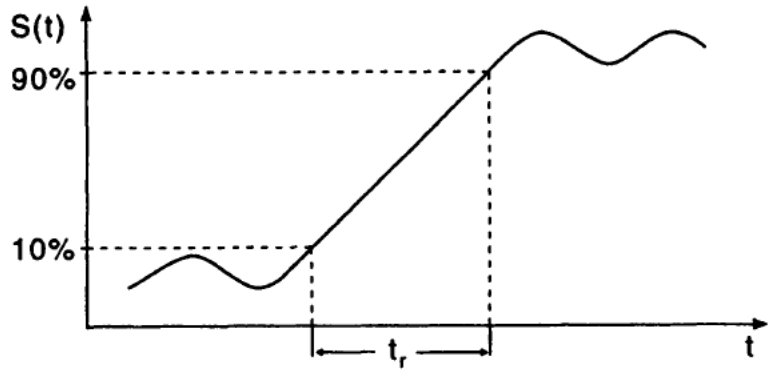


Рис. 5.14. Определение времени нарастания сигнала

Пример. Осциллограф, частота среза АЧХ которого равна 30 МГц, характеризуется временем нарастания сигнала $t_r \approx \frac{1}{3 \cdot 30 \cdot 10^6} \approx 10$ нс.

5.3.2. Нормирование частотных характеристик

Практически все ФНЧ, имеющие структуру, показанную на рис. 5.12, обладают одинаковыми передаточными функциями, отличающимися только параметром ω_c. Для стандартизации описания ФНЧ проводят **нормирование частотных характеристик по критической частоте**:

Нормирование:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}, \tag{5.12}$$

Процедура, обратная нормированию:

$$\omega = \Omega \cdot \omega_c, \quad f = \Omega \cdot f_c. \tag{5.13}$$

Величина Ω является безразмерной и называется **частотой нормализации**. Очевидно, что для любого ФНЧ нормализованная критическая частота равна 1. Следовательно, нормализованную передаточную функцию ФНЧ можно записать как:

$$G(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}.$$

Тогда АЧХ ФНЧ имеет следующий вид:

$$|G(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}.$$

На рис. 5.15 показаны нормализованные АЧХ и ФЧХ фильтра нижних частот.

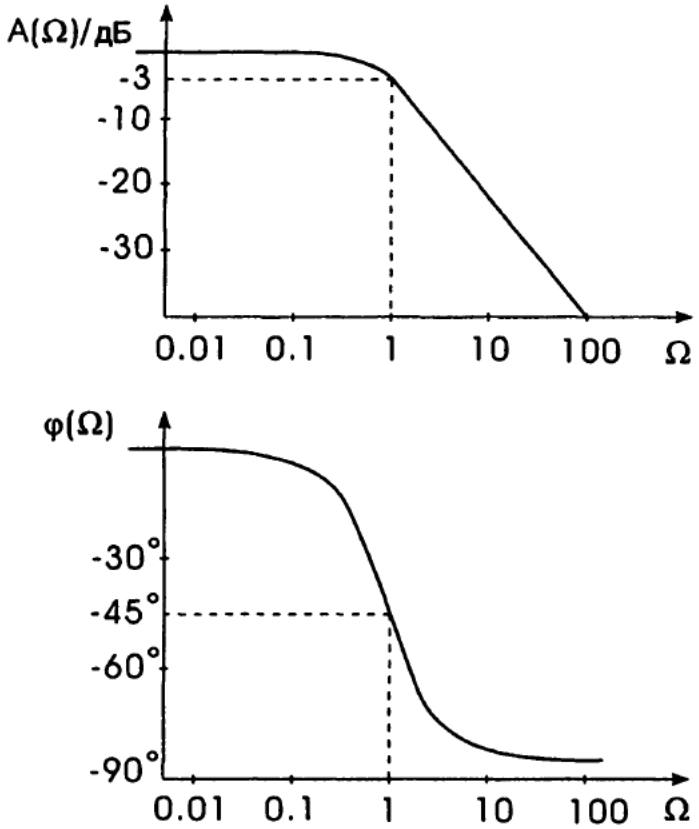


Рис. 5.15. Нормализованные АЧХ и ФЧХ фильтра нижних частот

5.3.2.1. Аппроксимация АЧХ ФНЧ

Нормализованная АЧХ ФНЧ имеет вид:

$$A(\Omega) = 20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} = 20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}.$$

Для угловых частот, намного превышающих критическую частоту, величина Ω всегда гораздо больше единицы, поэтому справедлива следующая аппроксимация:

$$A(\Omega) \approx 20\lg\frac{1}{\Omega} = -20\lg\Omega \quad \text{при} \quad \Omega >> 1.$$

- На частотах, меньших частоты среза, АЧХ фильтра является практически постоянной величиной.
- На частотах, больших критической частоты, происходит спад АЧХ со скоростью –20 дБ на декаду (–20 дБ/дек) (декада — увеличение частоты в 10 раз) или –6 дБ на октаву (–6 дБ/окт) (рис. 5.16).
- На критической частоте $\Omega_c = 1$, значение АЧХ равно –3 дБ.

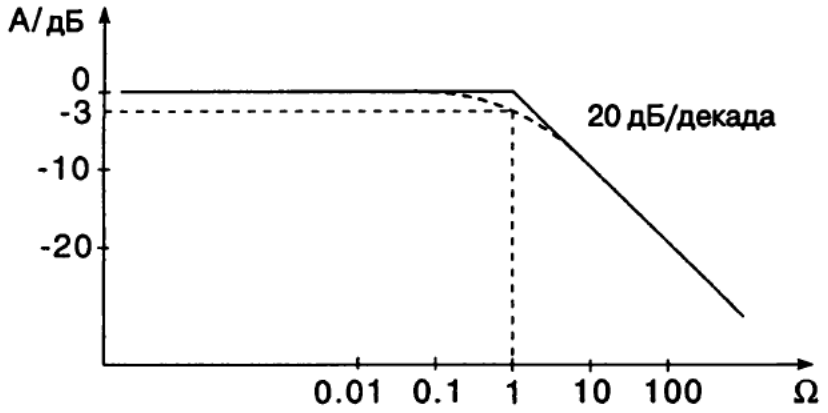


Рис. 5.16. Аппроксимация АЧХ ФНЧ

5.3.3. Фильтры верхних частот

На рис. 5.17 показан фильтр верхних частот первого порядка, **передаточная функция** которого определяется следующим выражением:

$$G(\omega)=\frac{R/j\omega C}{1/j\omega C+R}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}. \qquad (5.14)$$

Примечание. При определении передаточной функции эта схема рассматривается как делитель напряжения.

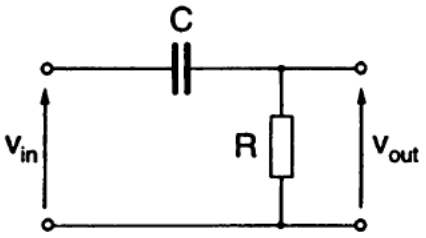


Рис. 5.17. Фильтр верхних частот первого порядка

АЧХ фильтра является модулем передаточной функции:

$$\left|G(\omega)\right|=\frac{(\omega RC)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}. \qquad (5.15)$$

В нормализованной форме она имеет вид:

$$G(\Omega)=\frac{j\Omega}{1+j\Omega},\quad \left|G(\Omega)\right|=\left|\frac{\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}}\right|. \qquad (5.16)$$

ФЧХ фильтра определяется выражением:

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}\{G(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(\omega)\}}\right]=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right). \qquad (5.17)$$

В нормализованной форме его можно записать как:

$$\varphi(\Omega)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Omega}\right). \qquad (5.18)$$

На рис. 5.18 представлены нормализованные АЧХ и ФЧХ фильтра верхних частот.

На частоте $\omega_c = 1/RC$:

$$\left|G(\omega_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cong -3\ \text{дБ}.$$

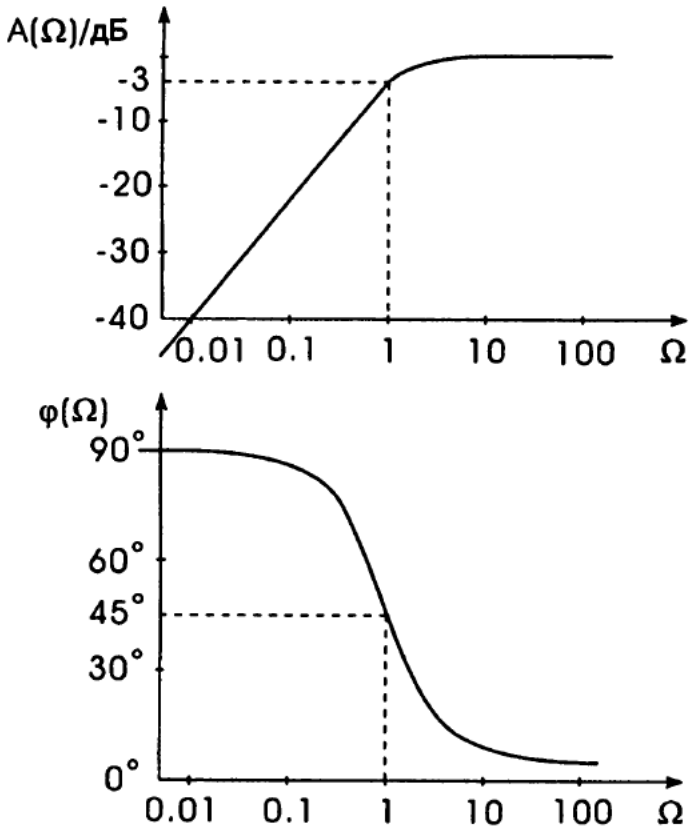


Рис. 5.18. Нормализованные АЧХ и ФЧХ фильтра верхних частот

Частота $f_c = \omega_c/2\pi$ называется **критической частотой** или **частотой излома АЧХ ФВЧ**. На этой частоте фаза выходного сигнала определяется выражением:

$$\varphi(\omega_c) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

- На критической частоте коэффициент ослабления сигнала ФВЧ составляет 3 дБ, фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами равен 45°.

5.3.3.1. Аппроксимация АЧХ ФВЧ

- Для любого ФВЧ нормализованная критическая частота равна 1.
- На частотах, меньших критической частоты, происходит рост АЧХ со скоростью 20 дБ/дек или 6 дБ/окт (рис. 5.19).
- На частотах, больших критической частоты, АЧХ фильтра является практически постоянной величиной.

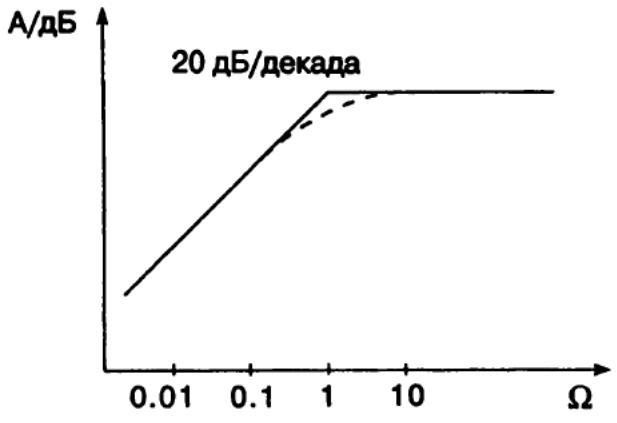


Рис. 5.19. Аппроксимация АЧХ ФВЧ

5.3.4. Фильтры более высоких порядков

Фильтры более высоких порядков получаются при последовательном **(каскадном)** соединении нескольких фильтров первого порядка. На рис. 5.20 показан фильтр нижних частот второго порядка. **Порядок фильтров** определяется количеством независимых энергозапасающих элементов (таких как конденсаторы или катушки индуктивности). Как правило, чем выше порядок фильтра, тем резче спад его АЧХ.

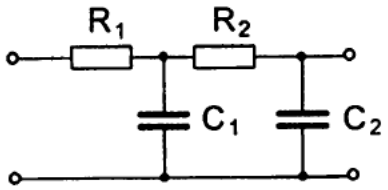


Рис. 5.20. Каскадный фильтр нижних частот второго порядка

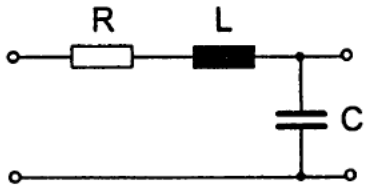


Рис. 5.21. *RLC*-фильтр нижних частот второго порядка

На рис. 5.21 показан *RLC*-фильтр нижних частот второго порядка, передаточная функция которого имеет вид:

$$G(\omega)=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C}+R+j\omega L}=\frac{1}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}. \qquad (5.19)$$

Поскольку эта схема является последовательным резонансным контуром, для нее можно определить резонансную частоту ω_r. Проведем частотную нормализацию передаточной функции, для чего необходимо найти значение частоты нормализации:

$$\omega_r=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}},\quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_r}.$$

В нормализованной форме передаточная функция имеет вид:

$$G(\Omega)=\frac{1}{1+jR\sqrt{\dfrac{C}{L}}\ \Omega-\Omega^2}. \qquad (5.20)$$

Величина $D=\frac{R}{2}\sqrt{C/L}$ называется **коэффициентом затухания (демпфирования)** (см. также раздел 1.2.6). Подставляя этот коэффициент в уравнение (5.20), получим еще одно выражение для нормализованной передаточной функции:

$$G(\Omega)=\frac{1}{1+2jD\Omega-\Omega^2}. \qquad (5.21)$$

На рис. 5.22 показаны частотные характеристики *RLC*-фильтра нижних частот при разных коэффициентах затухания. Как видно из рисунка, коэффициент *D* существенно влияет на форму АЧХ и ФЧХ фильтра.

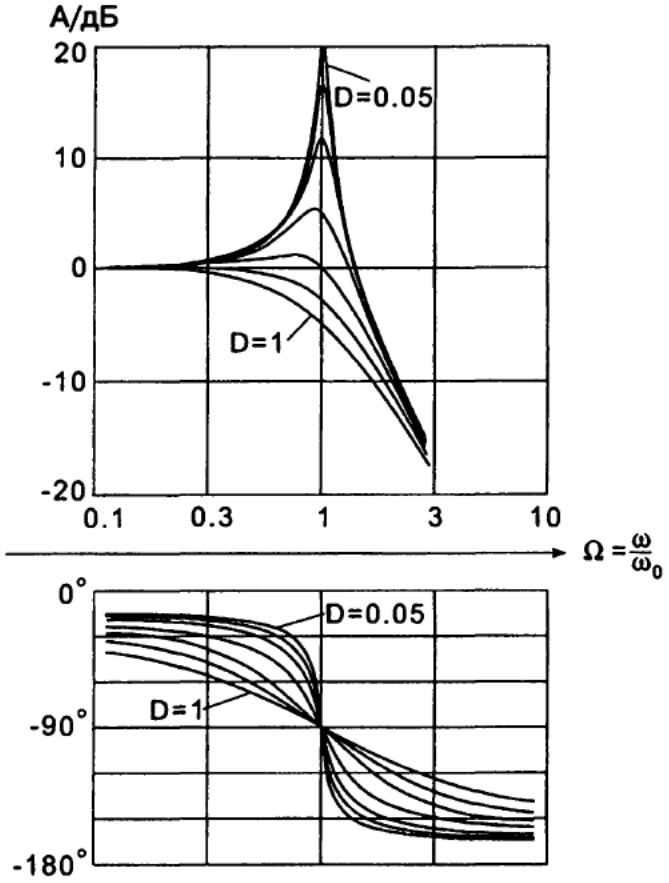


Рис. 5.22. АЧХ и ФЧХ *RLC*-фильтра нижних частот, показанного на рис. 5.21, при разных значениях коэффициента затухания

При низких коэффициентах затухания ФНЧ демонстрируют ярко выраженные резонансные характеристики и ведут себя аналогично полосовым фильтрам. Чем ниже коэффициент затухания фильтра, тем круче становится его ФЧХ.

5.3.5. Полосовые фильтры

На рис. 5.23 показан последовательный резонансный контур, работающий как полосовой фильтр.

Рассматривая эту схему как комплексный делитель напряжения, находим ее передаточную функцию:

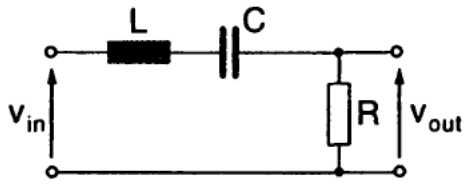


Рис. 5.23. Пример полосового фильтра

$$G(\omega)=\frac{R}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega RC}{j\omega RC-\omega^2 LC+1}.$$

Проведя нормирование по резонансной частоте $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, получим:

$$G(\omega)=\frac{j\Omega RC\frac{1}{\sqrt{LC}}}{j\Omega RC\frac{1}{\sqrt{LC}}-\Omega^2+1} \quad \text{при} \quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Подставляя сюда **коэффициент затухания** $D = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$, находим выражение для нормализованной передаточной функции:

$$G(\Omega) = \frac{2jD\Omega}{2jD\Omega - \Omega^2 + 1}. \qquad (5.22)$$

Нормализованная АЧХ примет следующий вид:

$$|G(\Omega)| = \frac{2D\Omega}{\sqrt{4D^2\Omega^2 + (1-\Omega^2)^2}}. \qquad (5.23)$$

На резонансной частоте ω_0, которая также является центральной частотой полосового фильтра, передаточная функция фильтра равна 1:

$$G(\Omega = 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad |G(\omega = \omega_0)| = 1.$$

Выходные сигналы полосового фильтра на верхней и нижней критических частотах ниже сигнала на центральной частоте на 3 дБ:

$$\frac{|G(\Omega_{\text{дБ}})|}{|G(\Omega = 1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad |G(\Omega_{\text{дБ}})| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При дальнейшем анализе частотных характеристик фильтра индексы критических частот упускаются:

$$|G(\Omega)| = \frac{2D\Omega}{\sqrt{4D^2\Omega^2 + (1-\Omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда получаем уравнение:

$$4D^2\Omega^2 = (1 - \Omega^2)^2,$$

имеющее четыре решения, два из которых являются положительными:

$$\omega_{\text{lwr}} = \sqrt{D^2 + 1} - D, \quad \omega_{\text{upr}} = \sqrt{D^2 + 1} + D,$$

где ω_{lwr} и ω_{upr} соответствуют нижней и верхней критическим частотам.
Нормализованная полоса пропускания фильтра равна $2D$.

$$D = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad B = \frac{R}{2\pi L}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (5.24)$$

Из выражения (5.24) видно, что при уменьшении сопротивления R полоса пропускания фильтра сужается. Нормализованная ФЧХ полосового фильтра имеет вид:

$$\varphi(\Omega) = \text{arctg}\left[\frac{\text{Im}(G(\Omega))}{\text{Re}(G(\Omega))}\right] = \text{arctg}\left(\frac{1-\Omega^2}{2D\Omega}\right). \qquad (5.25)$$

На рис. 5.24 показаны частотные характеристики RLC полосового фильтра при разных коэффициентах затухания.

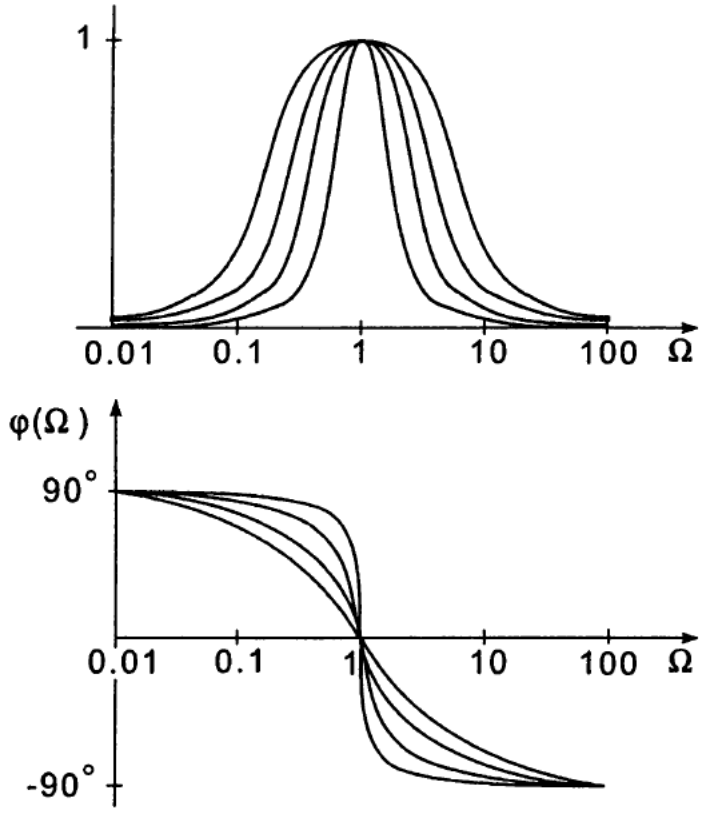


Рис.5.24. **Частотные** характеристики *RLC* полосового фильтра при разных коэффициентах затухания

Примечание. Для фильтров данного типа центральная частота является гармоническим средним верхней и нижней критических частот. В нормализованной форме можно записать, что:

$$\sqrt{\Omega_{lwr} \cdot \Omega_{upr}} = \sqrt{(\sqrt{D^2+1}-D)\cdot(\sqrt{D^2+1}+D)} = 1.$$

5.3.6. Варианты реализации фильтров

Существует множество способов реализации электрических фильтров. Приведем некоторые из них.

***RC*-фильтры** состоят только из резисторов и конденсаторов. Их основной недостаток — высокий коэффициент ослабления сигналов.

***LRC*-фильтры** помимо конденсаторов и резисторов включают в себя катушки индуктивности. Иногда из их состава исключаются резисторы, а их роль выполняют потери на емкостных и индуктивных элементах. Такие фильтры обладают хорошей добротностью и крутизной частотных характеристик и широко используются в ВЧ-технике.

Активные фильтры компенсируют внутренние потери при помощи операционных усилителей (ОУ). Они часто не содержат внутри себя индуктивных элементов. Их частотный диапазон применения определяется верхней критической частотой ОУ (см. также раздел 7.7).

Фильтры с переключаемыми конденсаторами являются разновидностью активных фильтров. Резистивные элементы моделируются процессами ВЧ-зарядки и разрядки конденсаторов. Преимущество таких фильтров — возможность изменения их параметров с частотой переключения сигналов.

Кварцевые и керамические фильтры являются механическими резонаторами с низкими потерями. Кварцевые фильтры обладают очень высокими стабильностью и добротностью.

Механические фильтры широко используются в телефонии, где ценятся за крутые наклоны частотных характеристик.

Фильтры на поверхностных акустических волнах (ПАВ-фильтры) преобразуют электрические сигналы в поверхностные акустические волны, распространяющиеся по кристаллической подложке. При соответствующей обработке поверхности подложки можно получить фильтр с требуемыми параметрами. Такие фильтры применяются в ВЧ- и СВЧ-технике.

Цифровые фильтры работают с дискретными сигналами. В них нет погрешностей, связанных с процессами старения, производственными допусками и изменением окружающей температуры. Благодаря прогрессу в области производства полупроводниковой техники, частотный диапазон применения цифровых фильтров постоянно расширяется, а цены на них при этом снижаются.

5.4. Обозначения

A	Коэффициент усиления напряжения
$A(\omega)$	Частотная характеристика усиления, дБ
$\tilde{A}(\omega)$	Ослабление, дБ
B	Полоса пропускания, Гц
$B_{3\ дБ}$	Полоса пропускания на уровне 3 дБ, Гц
B_{rel}	Относительная полоса пропускания
$B(\omega)$	Логарифмическая ФЧХ
D	Коэффициент затухания
F	Коэффициент формы (для фильтра)
f_0	Центральная частота, резонансная частота, Гц
f_c	Критическая частота или частота излома АЧХ
f_{cl}	Нижняя критическая частота
f_{cu}	Верхняя критическая частота
$G(\omega)$	Передаточная функция
$\lvert G(\omega)\rvert$	АЧХ
$G(\Omega)$	Нормализованная по частоте передаточная функция
Im ()	Мнимая часть

Q	Добротность
Re ()	Действительная часть
T	Функция преобразования системы
t_r	Время нарастания сигнала
v_{in}	Входное напряжение
V_{out}	Выходное напряжение
$\varphi(\omega)$	ФЧХ
ω_0	Резонансная угловая частота
ω_c	Угловая критическая частота
ω_{lwr}	Нижняя критическая частота
ω_{upr}	Верхняя критическая частота
Ω	Частота нормализации
$\Omega_{3\,дБ}$	Частота нормализации, при которой амплитуда передаточной функции уменьшается на 3 дБ
Ω_{lwr}	Нижняя нормализованная критическая частота
Ω_{upr}	Верхняя нормализованная критическая частота

Литература

Chen C. T. *Linear System Theory and Design*. 3rd ed. — : Oxford Univ. Press, 1998
Dorf R. C. *The Electrical Engineering Handbook*. — : CRC Press, 1999
Kennedy G., Davis B. *Electric Communication Systems*. — : McGraw-Hill, 1992
Zverev A. I. *Handbook of Filter Synthesis*. — : John Wiley & Sons, 1967

ГЛАВА 6

СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

6.1. Сигналы

6.1.1. Определения

В электронике и системах связи принята следующая классификация сигналов.

Периодические сигналы — это сигналы, повторяющие сами себя через определенные промежутки времени T (рис. 6.1).

Величина T называется **периодом** сигнала $f(t)$.

- Для периодических сигналов в любой момент времени t существует такое значение T, при котором выполняется следующее соотношение:

$$f(t) = f(t + T).$$

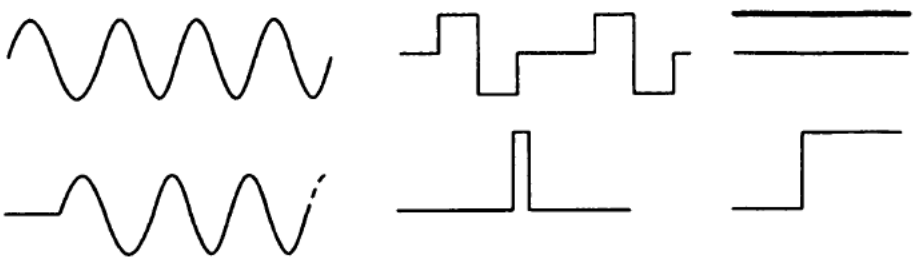


Рис. 6.1. Примеры периодических (*верхний ряд*) и непериодических (*нижний ряд*) сигналов

Непериодические сигналы — все сигналы, не подходящие под определение периодических сигналов.

Детерминированные сигналы — сигналы, значения которых до момента времени $t = 0$ равны нулю. Это понятие тесно связано с определением детерминированных систем.

Нормализованная **мощность** сигнала определяется как:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt. \tag{6.1}$$

Аналогично этому определяется нормализованная **энергия** сигнала:

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \tag{6.2}$$

Силовые сигналы в соответствии с выражением (6.1) обладают конечным значением нормализованной мощности P. Для ненулевых силовых сигналов выполняется равенство: $E = \infty$.

Энергетические сигналы в соответствии с выражением (6.2) обладают конечным значением нормализованной энергии E. Для них справедливо, что $P = 0$.

- Все периодические сигналы являются силовыми сигналами, но не все силовые сигналы — периодическими.

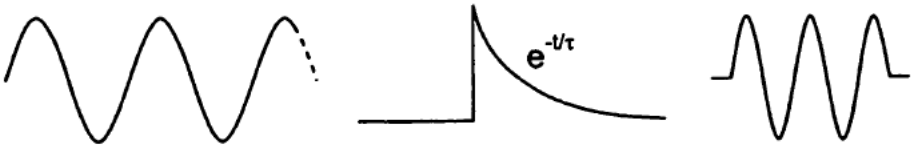


Рис. 6.2. Силовой сигнал и два энергетических сигнала

Пример. Сигнал, показанный в центре рис. 6.2, является энергетическим.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ e^{-t/T} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty} = \frac{\tau}{2} < \infty.$$

6.1.2. Свойства симметричности сигналов

Функция называется **четной**, если в любой момент времени t справедливо соотношение:

$$f(t) = f(-t).$$

Такие функции обладают **осевой симметрией** относительно оси ординат (ось y) и относятся к классу **симметричных функций** (рис. 6.3).

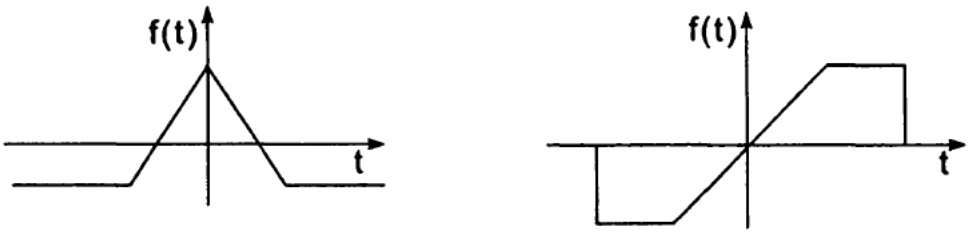


Рис. 6.3. Примеры четной (*слева*) и нечетной (*справа*) функций

Функция называется **нечетной**, если в любой момент времени t справедливо соотношение:

$$f(t) = -f(-t).$$

Такие функции обладают **центральной симметрией** относительно начала координат (ось y) и относятся к классу **кососимметричных функций** (рис. 6.3).

Пример. Косинус является четной функцией, а синус — нечетной.

Примечание. Эти свойства являются взаимно исключающими, т. е. функция может быть либо четной, либо нечетной.

Сигнал обладает **полной (двухполупериодной) симметрией**, если в любой момент времени выполняется соотношение:

$$f(t+\frac{T}{2}) = f(t).$$

Это значит, что реальный период сигнала равен $T/2$.

Сигнал обладает **полуволновой (однополупериодной) симметрией**, если в любой момент времени выполняется соотношение:

$$f(t+\frac{T}{2}) = -f(t).$$

Это значит, что такой сигнал обладает осевой симметрией относительно временной оси со смещением во времени на $T/2$ (рис. 6.4).

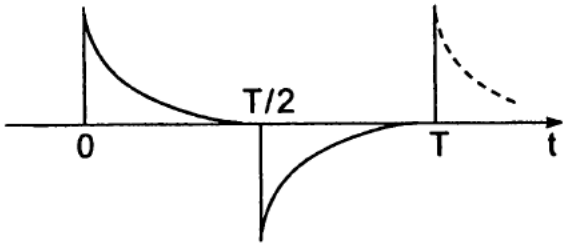


Рис. 6.4. Пример сигнала с полуволновой симметрией

Пример. Сигнал треугольной формы без постоянной составляющей обладает полуволновой симметрией.

6.2. Ряды Фурье

- Любой периодический сигнал с периодом T можно представить в виде суммы гармонических сигналов. При этом самая низкая (**основная**) частота будет равна $1/T$. Все остальные частоты составляющих сигнала (**гармоник**) являются произведениями этой частоты на целые числа.

6.2.1. Тригонометрическая форма записи рядов Фурье

Если сигнал $f(t)$ является периодическим с периодом T, то его можно представить в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) \right], \qquad (6.3)$$

где ω называется **основной** (угловой) **частотой** сигнала:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f.$$

Коэффициенты Фурье a_n и b_n определяются следующими выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt \qquad \text{при} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.4)$$

- Величина $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ является средним значением сигнала за один период, т. е. **постоянной составляющей** сигнала. Отметим, что b_0 всегда равен нулю.
- Тригонометрическое представление ряда Фурье зависит от значения сигнала в выбранный начальный момент времени $t = 0$.

Примечание. Поскольку сигнал $f(t)$ является периодическим, безразлично, какие выбирать пределы интегрирования: от 0 до T или от $-T/2$ до $+T/2$.

Примечание. В литературе часто встречается следующая запись периодических сигналов в виде рядов Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(n\omega t) + b_n\cdot\sin(n\omega t)\right].$$

Очевидно, что в этом случае:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Примечание. Математические условия сходимости рядов Фурье, записанных в уравнениях (6.3), следующие.

- Сигнал представляется конечным числом независимых точек.
- Среднее значение сигнала за один период является конечной величиной.
- Сигнал имеет конечное число максимумов и минимумов.

Как правило, эти условия выполняются для всех реальных сигналов.

6.2.1.1. Свойства симметрии

- Для переменных сигналов без постоянной составляющей $a_0 = 0$.
- В состав четных функций не входят синусные составляющие. Это означает, что все $b_n = 0$.
- В состав нечетных функций не входят косинусные составляющие. Это означает, что все $a_n = 0$.
- Сигналы с полной симметрией состоят только из четных гармоник с частотами 0, 2ω, 4ω и т. д.
- Сигналы с полуволновой симметрией состоят только из нечетных гармоник с частотами ω, 3ω, 5ω и т. д.

6.2.2. Амплитудно-фазовая форма представления рядов Фурье

При сложении функций синуса и косинуса одинаковой частоты получается гармоническая функция той же самой частоты:

$$a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) = A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Отсюда вытекает амплитудно-фазовая форма представления рядов Фурье (рис. 6.5):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n), \qquad (6.5)$$

где:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6.6)$$

Здесь a_n и b_n — коэффициенты Фурье, определяемые при помощи уравнений (6.4). Совокупность всех A_n называется **амплитудным спектром**, а совокупность всех φ_n — **фазовым спектром**.

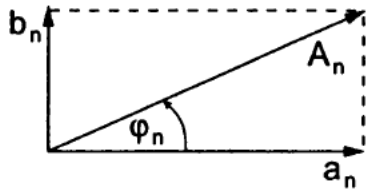


Рис. 6.5. Амплитудно-фазовая форма представления рядов Фурье

- Амплитудный спектр в отличие от фазового спектра не зависит от выбора начальной точки $t = 0$.

6.2.3. Экспоненциальная форма представления рядов Фурье

При помощи следующих соотношений:

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}), \quad \sin(n\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \qquad (6.7)$$

тригонометрическую форму представления рядов Фурье можно преобразовать в **экспоненциальную (комплексную) форму**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega t}. \qquad (6.8)$$

Комплексные коэффициенты Фурье определяются следующими соотношениями:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt. \qquad (6.9)$$

Совокупность всех коэффициентов c_n называется **комплексным спектром**. В этом представлении рядов Фурье присутствуют, как положительные, так и отрицательные частотные составляющие: $+n\omega$ и $-n\omega$, что ведет к появлению **положительного** и **отрицательного частотных спектров**.

- Коэффициент c_0 соответствует постоянной составляющей сигнала. Он эквивалентен коэффициенту $a_0/2$ в предыдущих формах представления рядов Фурье.
- Спектральный компонент гармоники с угловой частотой $n\omega$ определяется выражением: $c_n \cdot e^{jn\omega t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega t}$.
- Спектральные коэффициенты c_n и c_{-n} являются комплексно-сопряженными числами (для сигналов, описываемых действительными числами), т. е. $c_n^* = c_{-n}$.
- Модули комплексных коэффициентов Фурье равны половинам амплитуд соответствующих элементов в амплитудно-фазовом представлении рядов Фурье: $2|c_n| = A_n$.

Пример. На рис. 6.6 показаны двухсторонние спектры функций синуса и косинуса. Используя выражения (6.7), обе функции можно представить в виде:

$$\cos\omega_0 t = \underbrace{+\frac{1}{2}}_{c_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-1}} e^{-j\omega_0 t},$$

$$\sin\omega_0 t = \underbrace{-\frac{j}{2}}_{c_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{j}{2}}_{c_{-1}} e^{-j\omega_0 t}.$$

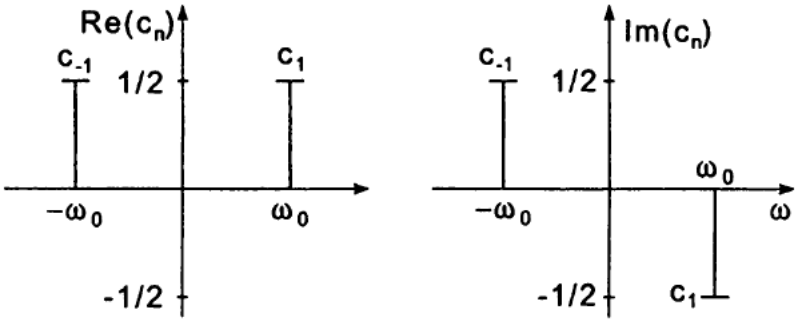


Рис. 6.6. Частотные спектры функций косинуса и синуса, включающие положительные и отрицательные частотные составляющие

6.2.3.1. Свойства симметричности

- Спектральные коэффициенты c_n четных функций являются действительными числами.
- Спектральные коэффициенты c_n нечетных функций являются мнимыми числами.

6.2.4. Представления рядов Фурье (обзор)

В табл. 6.1 и 6.2 приведен обзор представлений рядов Фурье и соответствующих им коэффициентов, а также формулы преобразования одной формы представления в другую.

Таблица 6.1. Обзор представлений рядов Фурье

Форма представления	Коэффициенты
Тригонометрическая: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(n\omega t)+b_n\cdot\sin(n\omega t)\right]$	$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt,$ $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt$ при $n=0, 1, 2, \ldots$
Амплитудно-фазовая: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\omega t+\varphi_n)$	$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$ $a_n=-\operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ при $n=0, 1, 2, \ldots$
Комплексная: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{jn\omega t}$	$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jn\omega t}dt$

Таблица 6.2. Преобразования форм представления рядов Фурье

	Коэффициенты Фурье	Спектральные коэффициенты	Комплексные коэффициенты Фурье
$a_n=$	a_n	$A_n\cdot\cos\varphi_n$	$c_n+c_n^*=2\cdot\mathrm{Re}\,(c_n)$
$b_n=$	b_n	$A_n\cdot\sin\varphi_n$	$j(c_n-c_n^*)=2\cdot\mathrm{Im}\,(c_n)$
$A_n=$	$\sqrt{a_n^2+b_n^2}$	A_n	$2\cdot\lvert c_n\rvert$
$\varphi_n=$	$-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$	φ_n	$-\arg\,(c_n)$
$c_n=$	$\begin{cases}\frac{a_0}{2}, & n=0\\ \frac{a_n}{2}-j\frac{b_n}{2}, & n>0\\ \frac{a_n}{2}+j\frac{b_n}{2}, & n<0\end{cases}$	$\frac{A_n}{2}\cdot e^{-j\varphi_n}$	c_n

6.2.5. Интегралы для вычисления коэффициентов Фурье

Среднее значение функций синуса и косинуса за один период равно нулю:

$$\int_0^T \cos n\omega t\, dt = 0, \tag{6.10}$$

$$\int_0^T \sin n\omega t\, dt = 0. \tag{6.11}$$

Функции синуса и косинуса являются **ортогональными**:

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin k\omega t\, dt = 0 \quad \text{при} \quad n \neq k, \tag{6.12}$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \cos k\omega t\, dt = 0, \tag{6.13}$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos k\omega t\, dt = 0 \quad \text{при} \quad n \neq k. \tag{6.14}$$

При вычислении интегралов от произведений функций синуса и косинуса одинаковой частоты $n\omega$ часто используются следующие соотношения:

$$\int_0^T \sin^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2}, \tag{6.15}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2}. \tag{6.16}$$

Из условий ортогональности функций синуса и косинуса следует, что:

$$\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos k\omega t\, dt = \delta_{nk} \cdot \frac{T}{2},$$

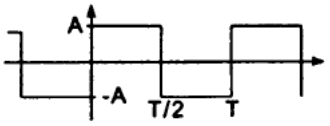
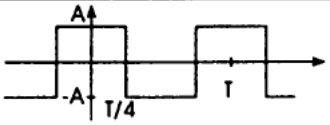
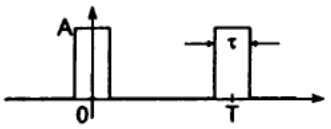
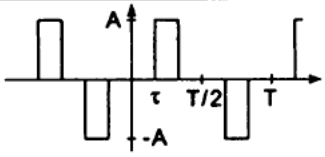
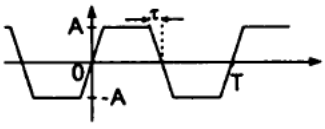
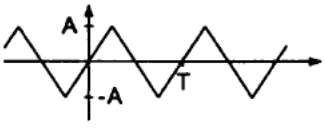
$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin k\omega t\, dt = \delta_{nk} \cdot \frac{T}{2}.$$

Коэффициенты δ_{nk} называются **коэффициентами Кронекера**. Для $n = k$ они всегда равны 1, в противном случае — 0.

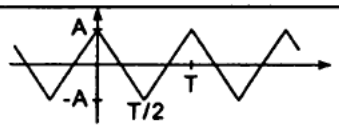
6.2.6. Ряды Фурье некоторых полезных функций

В табл. 6.3 приведены представления некоторых функций через ряды Фурье, а в табл. 6.4 даны их амплитудные спектры.

Таблица 6.3. Представление некоторых функций через ряды Фурье

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
(1)  Кососимметричная прямоугольная функция, коэффициент заполнения равен 0,5, постоянная составляющая отсутствует: $$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t \ldots\right)$$
(2)  Симметричная прямоугольная функция, коэффициент заполнения равен 0,5, постоянная составляющая отсутствует: $$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \ldots\right)$$
(3)  Прямоугольные импульсы, коэффициент заполнения равен τ/T: $$f(t) = A \cdot \frac{\tau}{T} + A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin\pi\frac{\tau}{T} \cdot \cos\omega t + \frac{1}{2}\sin\pi\frac{2\tau}{T} \cdot \cos 2\omega t + \ldots\right)$$
(4)  Биполярные прямоугольные импульсы с полуволновой симметрией, здесь $\varphi = 2\pi\tau/T$: $$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{1}\sin\omega t + \frac{\cos 3\varphi}{3}\sin 3\omega t + \frac{\cos 5\varphi}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$
(5)  Трапецеидальный сигнал, время нарастания равно времени спада = τ, здесь $\varphi = 2\pi\tau/T$: $$f(t) = \frac{A}{a} \cdot \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin a}{1^2}\sin\omega t + \frac{\sin 3a}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{\sin 5a}{5^2}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$
(6)  Кососимметричный треугольный сигнал с полуволновой симметрией, постоянная составляющая отсутствует: $$f(t) = A \cdot \frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \ldots\right)$$

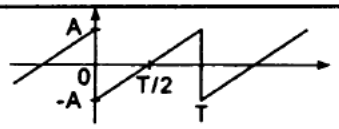
(7)



Симметричный треугольный сигнал с полуволновой симметрией, постоянная составляющая отсутствует:

$$f(t) = A \cdot \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \ldots\right)$$

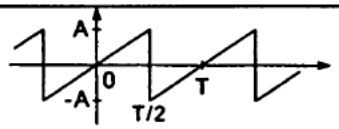
(8)



Кососимметричный пилообразный сигнал, постоянная составляющая отсутствует:

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots\right)$$

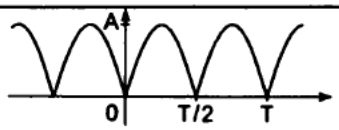
(9)



Кососимметричный пилообразный сигнал, постоянная составляющая отсутствует:

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \ldots\right)$$

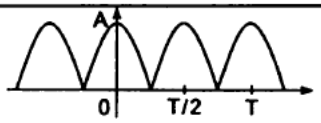
(10)



Синусоидальный сигнал после двухполупериодного выпрямления, с полной симметрией, T — период основной частоты:

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} - A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t + \ldots\right)$$

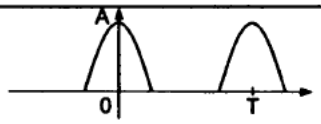
(11)



Косинусоидальный сигнал после двухполупериодного выпрямления с полной симметрией, T — период основной частоты:

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} + A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \ldots\right)$$

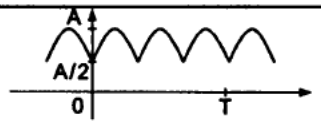
(12)



Косинусоидальный сигнал после однополупериодного выпрямления:

$$f(t) = A \cdot \frac{1}{\pi} + A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\pi\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \ldots\right)$$

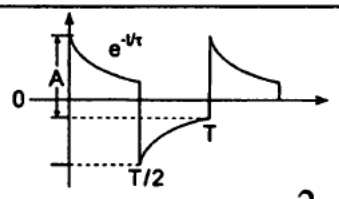
(13)



Выпрямленный ток трехфазной сети, T — период частоты сети:

$$f(t) = A \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\omega t - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\omega t - \ldots\right)$$

(14)



Прямоугольный сигнал на выходе RC-цепи, τ — постоянная времени цепи, $\gamma = T/2\pi\tau$:

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma\cos\left[(2n+1)\omega t\right] + (2n+1)\sin\left[(2n+1)\omega t\right]}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$$

Таблица 6.4. Амплитудные спектры сигналов из табл. 6.3 (A_n)

Номер сигнала	Коэффициент A	Гармоника								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 и 2	$4/\pi$	1	0	1/3	0	1/5	0	1/7	0	1/9
3($\tau/T = 1/3$)	$2/\pi$	0,87	0,43	0	0,22	0,17	0	0,12	0,11	0
3($\tau/T = 1/5$)	$2/\pi$	0,59	0,48	0,32	0,15	0	0,098	0,14	0,12	0,065
6 и 7	$8/\pi^2$	1	0	1/9	0	1/25	0	1/49	0	1/81
8 и 9	$2/\pi$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
10 и 11	$4/\pi$	0	1/3	0	1/15	0	1/35	0	1/63	0
12	$2/\pi$	π	1/3	0	1/15	0	1/35	0	1/63	0
13	$3\sqrt{3}/\pi$	0	0	1/8	0	0	1/35	0	0	1/80

6.2.7. Применение рядов Фурье

6.2.7.1. Спектр прямоугольного сигнала

Пример: Пусть на выходе ТТЛ (транзистор-транзисторная логика) схемы вырабатывается сигнал, показанный на рис. 6.7. Коэффициент заполнения такого сигнала равен 0,5. Требуется определить амплитудный спектр сигнала.

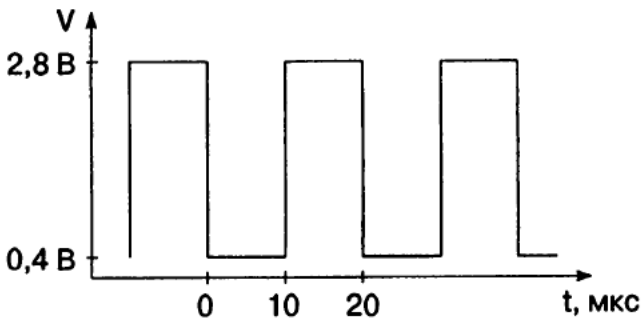


Рис. 6.7. Идеальные прямоугольные импульсы на выходе ТТЛ-схемы

Решение. Сигналы (1) и (2) из табл. 6.3 наиболее близки к сигналу на рис. 6.7. Задание начального момента времени $t = 0$ определяет выбор того или иного представления рядов Фурье. Полный размах рассматриваемого сигнала равен 2,4 В. Это значит, что $A = 1{,}2$ В, а постоянная составляющая — 1,6 В.

Поскольку период сигнала $T = 20$ мкс, $\omega = 2\pi \cdot 50$ кГц. При выборе сигнала (2) из табл. 6.3 получаем:

$$g(t) = 1{,}6\ \text{В} + 1{,}2\ \text{В} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \ldots \right).$$

Отсюда находятся амплитуды индивидуальных спектральных компонентов:

f, кГц	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
A_n, В	1,6	1,53	0	0,51	0	0,31	0	0,22	0	0,17

На рис. 6.8 приведено графическое представление полученного амплитудного спектра. Маленькие черные кружки указывают на то, что данный

спектральный компонент равен нулю. Понятие **«линейчатый спектр»** относится к данному типу отображения амплитудного спектра.

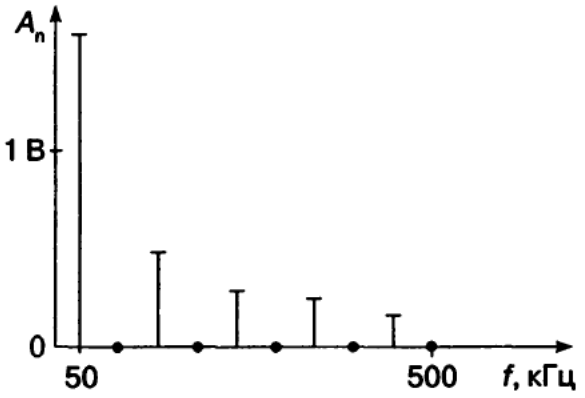


Рис. 6.8. Амплитудный спектр прямоугольного сигнала, показанного на рис. 6.7 (без учета постоянной составляющей)

На рис. 6.9 показано наложение гармоник с частотами ω, 3ω и 5ω на прямоугольный сигнал. Как видно из табл. 6.4, амплитуда основной частоты всегда выше амплитуды результирующего прямоугольного сигнала.

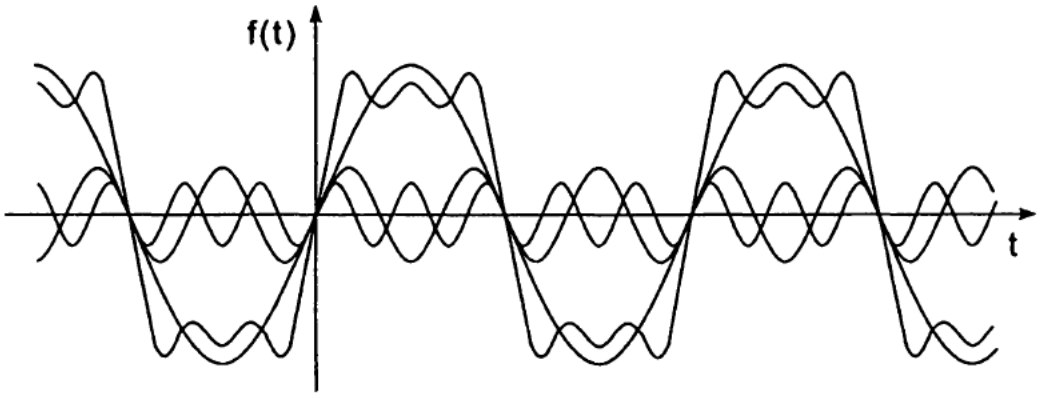


Рис. 6.9. Наложение на прямоугольный сигнал первых пяти гармоник

6.2.7.2. Спектр пилообразного сигнала

Пример. Требуется определить амплитудный спектр пилообразного сигнала, показанного на рис. 6.10.

Решение. Данный сигнал представляет собой инвертированный сигнал (8) из табл. 6.3, постоянная составляющая которого равна 1,5 В. Амплитуда такого сигнала $A = 1{,}5$ В, а основная частота $f = 1/T = 4$ кГц.

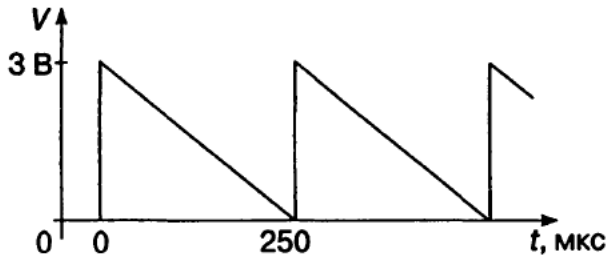


Рис. 6.10. Пилообразный сигнал с постоянной составляющей

Представление пилообразного сигнала через ряды Фурье имеет вид:

$$g(t) = 1{,}5\ \text{В} - 1{,}5\ \text{В} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \ldots \right).$$

Откуда находим:

f, кГц	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
A_n, В	1,5	0,95	0,48	0,32	0,24	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11

На рис. 6.11 приведено графическое представление полученного амплитудного спектра. В отличие от прямоугольного сигнала спектр пилообразного сигнала содержит не только нечетные гармоники, но и четные.

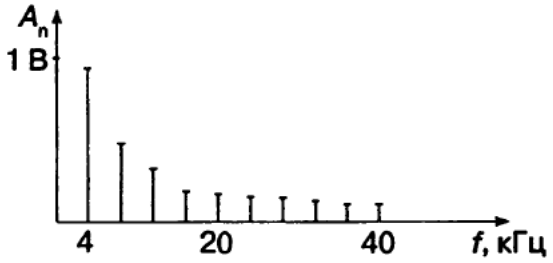


Рис. 6.11. Амплитудный спектр пилообразного сигнала, показанного на рис. 6.10

6.2.7.3. Спектр составного сигнала

Пример. Требуется определить амплитудный спектр составного сигнала, показанного на рис. 6.12.

Решение. Рассматриваемый сигнал представляет собой суперпозицию двух сигналов: прямоугольного с амплитудой 2 В и треугольного с амплитудой 1 В. Оба сигнала соответствуют либо сигналам (1) и (6), либо (2) и (7) из табл. 6.3. Используя эту таблицу, находим:

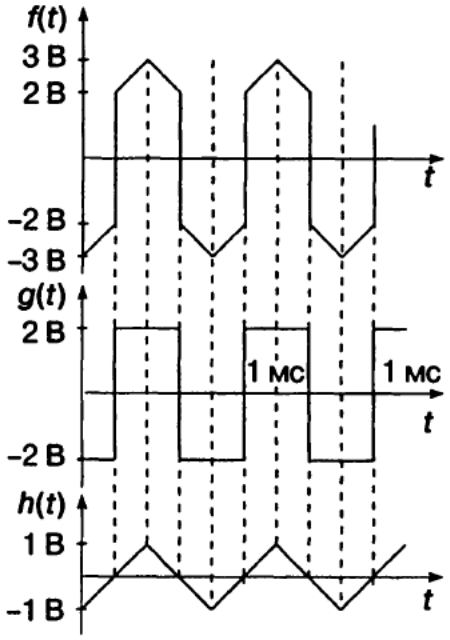


Рис. 6.12. Составной сигнал, образованный наложением прямоугольного и треугольного сигналов

$$g(t) = 2\text{ В}\cdot\frac{4}{\pi}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t + \ldots\right],$$

$$h(t) = 1\text{ В}\cdot\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \ldots\right],$$

$$f(t) = 1\text{ В}\ \frac{8}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\cos\omega t + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\pi}\right)\cos 3\omega t + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2\pi}\right)\cos 5\omega t + \ldots\right].$$

Коэффициенты Фурье для каждой частоты складываются (с учетом знаков). Основная частота сигнала равна 1 кГц. Находим амплитудный спектр составного сигнала:

f, кГц	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_n, В	2,55	0	0,92	0	0,54	0	0,38	0	0,29

6.3. Системы

6.3.1. Характеристики систем

Часто на практике бывает неважно знать внутреннее устройство систем. В этом случае система рассматривается как **черный ящик** (рис. 6.13), и разработчиков интересует лишь изменения выходных сигналов (чаще всего напряжений) в ответ на определенные входные воздействия, что определяется функцией преобразования T:

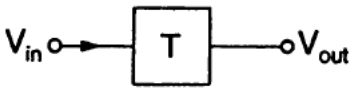


Рис. 6.13. Система, изображенная в виде черного ящика

$$v_{out} = T(v_{in}).$$

6.3.1.1. Линейные системы

Многие реальные системы могут с достаточной степенью точности считаться **линейными системами.** Для таких систем выполняется следующее соотношение:

$$T(\alpha \cdot v_{in}) = \alpha \cdot T(v_{in}). \qquad (6.17)$$

- Выходной сигнал линейных систем всегда пропорционален входному сигналу.

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2). \qquad (6.18)$$

- Каждый из двух входных сигналов при прохождении через линейную систему может рассматриваться независимо от второго сигнала (рис. 6.14).

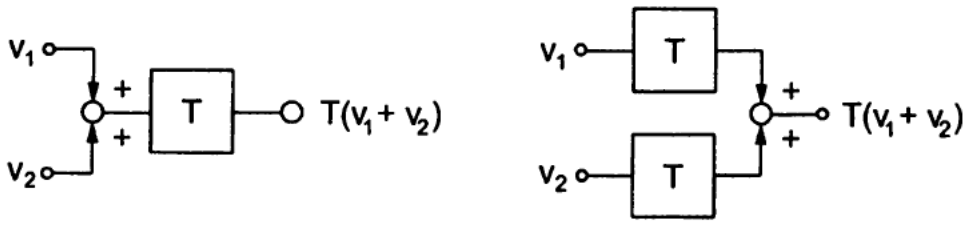


Рис. 6.14. Принцип суперпозиции в линейных системах

Уравнение (6.18) описывает **принцип суперпозиции двух** сигналов, а рис. 6.14 иллюстрирует его.

6.3.1.2. Детерминированные системы

В отсутствие сигнала возбуждения на входе на выходе **детерминированных систем** нет никакого сигнала.

Математически это можно записать в виде:

$$x(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < t_0.$$

Отсюда следует, что:

$$T[x(t)] = 0 \quad \text{при} \quad t < t_0. \tag{6.19}$$

Примечание. Из данного определения детерминированных систем вытекает определение детерминированных сигналов. До момента времени $t = 0$ значения детерминированных сигналов всегда равны нулю, они могут быть ненулевыми только в моменты времени $t \geq 0$ (рис. 6.15).

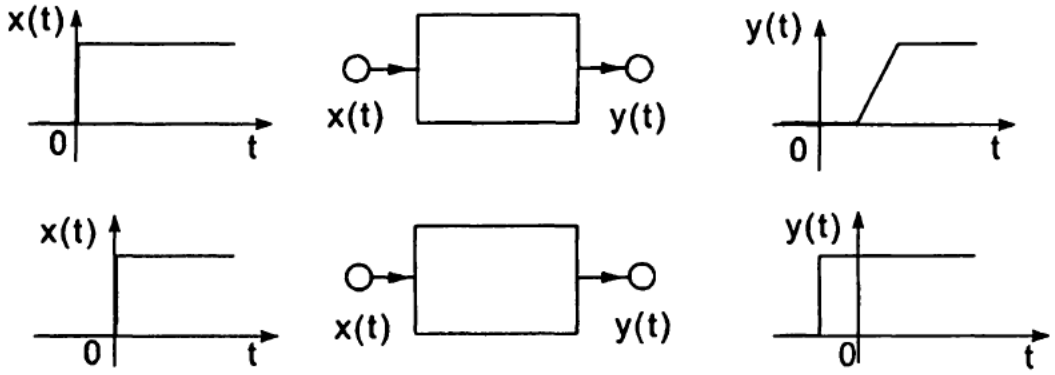


Рис. 6.15. Детерминированная (*сверху*) и недетерминированная (*снизу*) системы

6.3.1.3. Стационарные системы

Внутренние характеристики **стационарных систем** не меняются с течением времени. Их реакция на определенное входное воздействие всегда одинакова и не зависит от времени начала этого воздействия. Математически это можно выразить в виде:

$$y(t) = T[x(t)].$$

Отсюда следует, что:

$$T[x(t - t_0)] = y(t - t_0). \tag{6.20}$$

Из рис. 6.16 видно, что при смещении во времени входного сигнала происходит аналогичный сдвиг выходного сигнала.

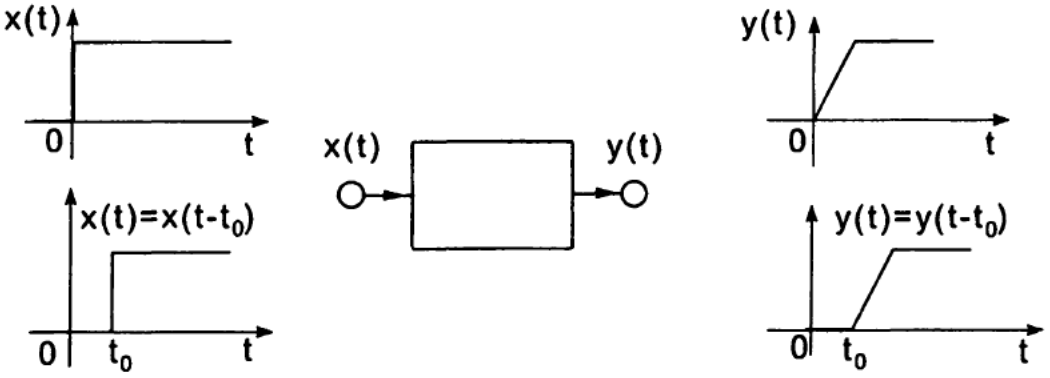


Рис. 6.16. Реакция стационарной системы на входные воздействия

6.3.1.4. Устойчивые системы

Система считается **устойчивой**, если при подаче на ее вход сигналов с конечной амплитудой сигналы на ее выходе также будут обладать конечной амплитудой. Математически это можно выразить в виде соотношения:

$$|x(t)| < M < \infty \quad \Rightarrow \quad |T[x(t)]| < N < \infty \quad \text{для всех } t. \tag{6.21}$$

6.3.1.5. Линейные стационарные системы

На практике особый интерес представляют линейные стационарные системы. Обычно предполагается, что системы являются детерминированными.

- Системы, состоящие из резисторов, катушек индуктивности, конденсаторов, трансформаторов и усилителей, работающих в линейной области рабочего диапазона (например, транзисторных каскадов в зоне малых сигналов), считаются линейными стационарными. Однако при наличии в системах положительных обратных связей они часто перестают быть линейными.

6.3.2. Элементарные сигналы

Для математического моделирования поведения различных систем оценивается их реакция на типовые тестовые сигналы, наиболее распространенные из которых описываются далее. Обозначения, используемые в других книгах, могут отличаться от приводимых здесь.

6.3.2.1. Ступенчатая функция

Ступенчатая функция $s(t)$ до момента времени $t = 0$ равна нулю, а после него для всех значений $t > 0$ — единице (рис. 6.17):

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0 \\ 1 & \text{для } t \geq 0\,. \end{cases} \tag{6.22}$$

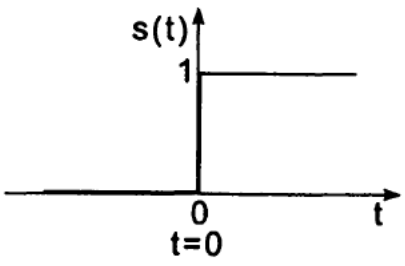


Рис. 6.17. Ступенчатая функция

- Ступенчатая функция относится к силовым сигналам.

6.3.2.2. Прямоугольный импульс

Прямоугольный импульс rect (t) является прямоугольным сигналом единичной площади, симметричным относительно момента времени $t = 0$ (рис. 6.18):

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } |t| \geq 1/2 \\ 1 & \text{для } |t| < 1/2 . \end{cases} \qquad (6.23)$$

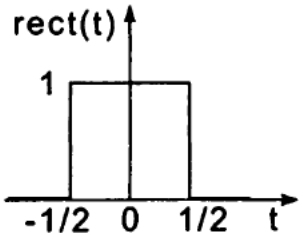


Рис. 6.18. Прямоугольный импульс

- Прямоугольный импульс относится к энергетическим сигналам.

6.3.2.3. Треугольный импульс

Треугольный импульс $\Lambda(t)$ является треугольным сигналом единичной площади, симметричным относительно $t = 0$ (рис. 6.19):

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } |t| \geq 1 \\ 1 - |t| & \text{для } |t| < 1 . \end{cases} \qquad (6.24)$$

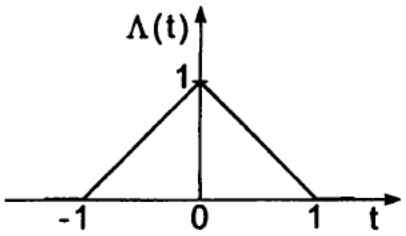


Рис. 6.19. Треугольный импульс

- Треугольный импульс относится к энергетическим сигналам.

6.3.2.4. Импульс Гаусса

Импульс Гаусса $\Gamma(t)$ является импульсом единичной площади, симметричным относительно $t = 0$ (рис. 6.20):

$$\Gamma(t) = e^{-\pi t^2} . \qquad (6.25)$$

- Импульс Гаусса относится к энергетическим сигналам.

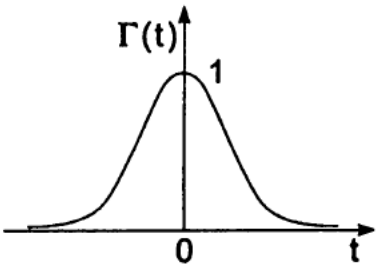


Рис. 6.20. Импульс Гаусса

6.3.2.5. Импульсная функция (дельта-функция)

Дельта-функция является предельным случаем семейства прямоугольных импульсов единичной площади:

$$\text{rect}_n = n \cdot \text{rect}(n \cdot t).$$

Последовательность прямоугольных импульсов единичной площади при $n \to \infty$ сходится к дельта-функции $\delta(t)$, обладающей следующими свойствами:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Поскольку при $t = 0$ дельта-функция не определена, она не является функцией в традиционном смысле этого слова. Ее часто называют **импульсной**

функцией или **импульсом Дирака** (рис. 6.21). Дельта-функция характеризуется следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \quad \delta(t) = \delta(-t). \tag{6.26}$$

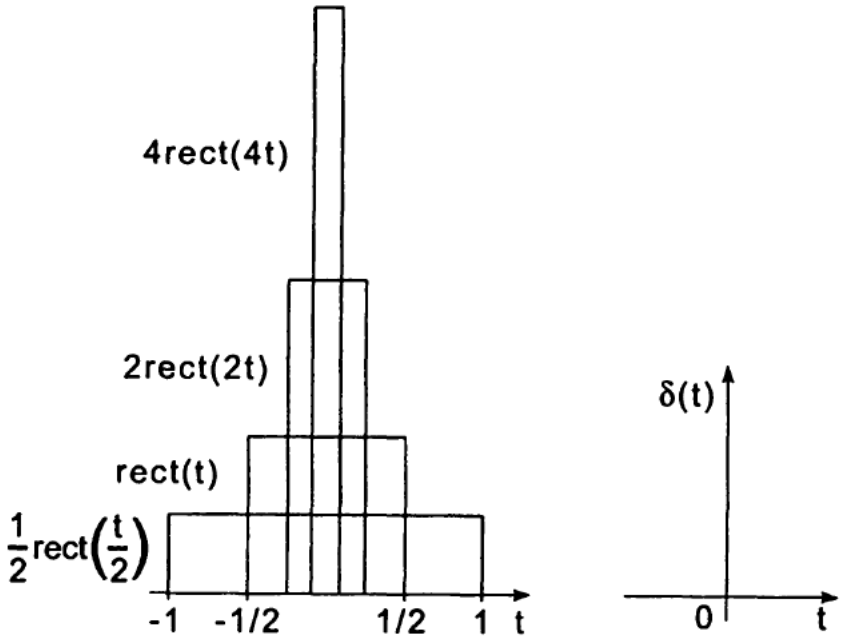


Рис. 6.21. Дельта-функция как предельный случай семейства прямоугольных импульсов

Из выражений (6.26) следует, что:

- дельта-функция обладает единичной площадью;
- дельта-функция выделяет из интеграла функции значение этой функции в момент времени, когда аргумент дельта-функции равен нулю;
- дельта-функция является четной функцией.

Примечание. Дельта-функция может также рассматриваться как предел последовательности функций Гаусса, высота импульсов которых при уменьшении ширины увеличивается, но при этом их площадь всегда остается равной единице.

Производная ступенчатой функции является дельта-функцией:

$$[s(t)]' = \delta(t), \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = s(t). \tag{6.27}$$

Пример. На рис. 6.22 (верхний левый график) показана функция:

$$f(t) = s(t-1) + s(t-2) - 2 \cdot s(t-3).$$

Производная этой функции равна:

$$f'(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) - 2 \cdot \delta(t-3).$$

В правом верхнем углу рис. 6.22 показана функция $f(t) = s(t-2)\cdot\frac{t}{2}$. Ее производная вычисляется по правилу нахождения производной произведения двух функций:

$$f'(t) = \left[s(t-2)\cdot\frac{t}{2}\right]' = \delta(t-2)\cdot\frac{t}{2} + s(t-2)\cdot\frac{1}{2} = \delta(t-2) + \frac{1}{2}\cdot s(t-2).$$

Графики производных изображены под графиками рассматриваемых функций.

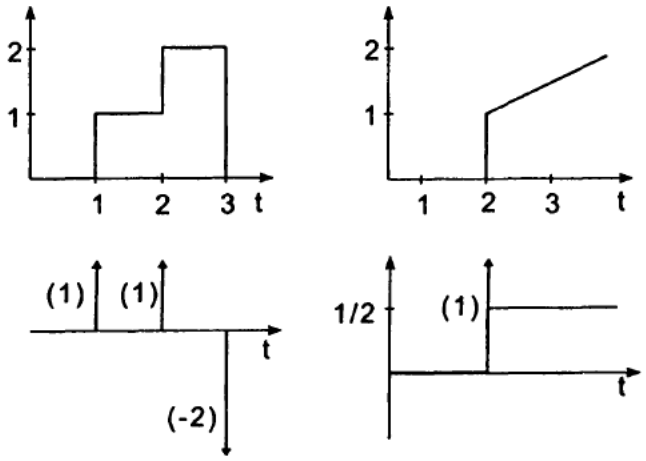


Рис. 6.22. Два сигнала (*верхний ряд*) и их производные (*нижний ряд*)

6.3.3. Сдвиг и масштабирование временных сигналов

Функция $f(t) = s(t-t_0)$ является **сдвинутой во времени** ступенчатой функцией, представляющей собой ступеньку, смещенную по оси времени на величину t_0 (рис. 6.23).

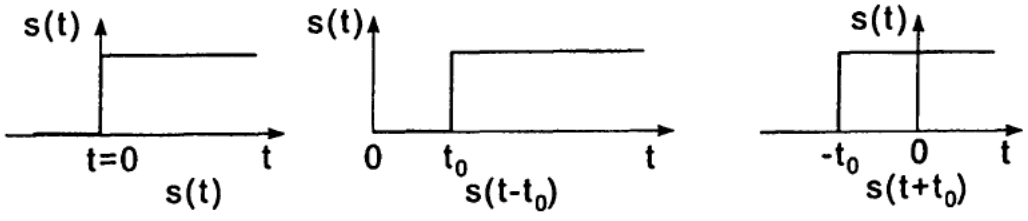


Рис. 6.23. Ступенчатая функция с временным сдвигом

Сигнал $f(t) = \text{rect}(t/a)$ при $a > 0$ представляет собой прямоугольный импульс, **масштабированный по оси времени**, где a называется **масштабным временным коэффициентом** (рис. 6.24). При значениях $a > 1$ исходный импульс расширяется, а при $a < 1$ — сужается.

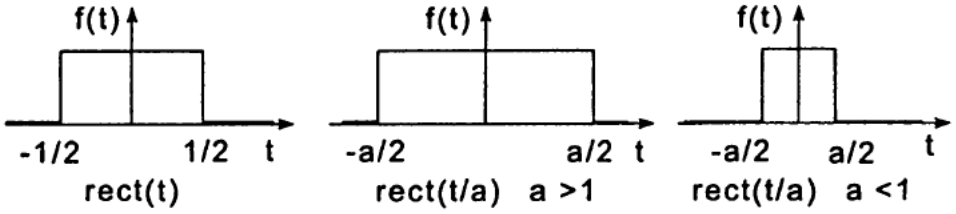


Рис. 6.24. Временно́е масштабирование прямоугольного импульса

Пример. На рис. 6.25 показан треугольный импульс, масштабированный и сдвинутый по оси времени в соответствии со следующим выражением:

$$f(t)=\frac{3}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{t}{2}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right).$$

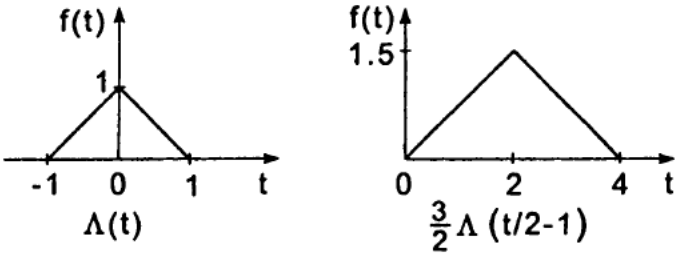


Рис. 6.25. Сдвиг и масштабирование во времени треугольного импульса

6.3.4. Реакция систем на различные входные воздействия

- При подаче на вход линейной стационарной системы гармонического сигнала ее выходной сигнал будет также гармоническим, при этом его частота останется такой же, как у входного воздействия, а амплитуда и фаза могут измениться.

Примечание. Система называется **нелинейной,** если при подаче на ее вход гармонического сигнала сигнал на ее выходе не является гармоническим, т. е. содержит составляющие, частоты которых не входят в частотный спектр входного сигнала.

Для математического моделирования различных систем, как правило, используется описание их выходных реакций в ответ на определенные входные воздействия.

6.3.4.1. Реакция систем на импульсное возмущение

Реакция системы на импульсное возмущение (импульсная характеристика системы) определяется изменением выходного сигнала в ответ на дельта-функцию, поданную на ее вход (рис. 6.26):

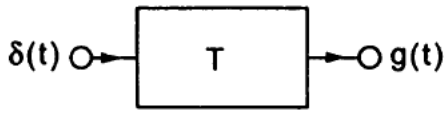


Рис. 6.26. Реакция линейной стационарной системы на импульсное возмущение

$$g(t) = T[\delta(t)].$$

- Функция $g(t)$ называется **весовой функцией** системы.

Пример. На рис. 6.27 показана реакция *RC*-фильтра нижних частот на импульсное возмущение. Как видно из рисунка, она представляет собой убывающую экспоненциальную функцию.

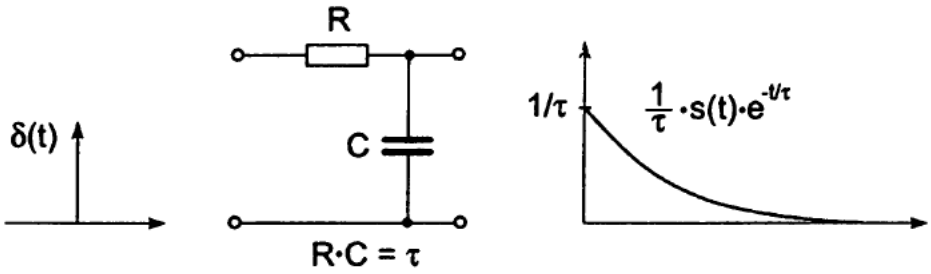


Рис. 6.27. Реакция *RC*-фильтра нижних частот на импульсное возмущение

При подаче на вход фильтра импульсного сигнала происходит мгновенная зарядка его конденсатора, после чего он постепенно разряжается через резистор с постоянной времени $\tau = RC$. Ненулевой выходной сигнал умножается на ступенчатую функцию только начиная с момента времени $t = 0$.

Примечание. Поскольку на практике реализовать настоящую дельта-функцию невозможно, для оценки импульсной характеристики реальной системы на ее вход подаются узкие прямоугольные импульсы. Однако, чем уже импульсы, тем меньше их энергетическая емкость. Амплитуда входных импульсов не может увеличиваться бесконечно, поскольку амплитуда выходных сигналов реальных систем не должна выходить за определенные пределы. Поэтому на практике чаще исследуют реакцию систем не на импульсное возмущение, а на ступенчатое входное воздействие.

6.3.4.2. Реакция систем на ступенчатое входное воздействие

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие (переходная характеристика) определяется изменением выходного сигнала в ответ на ступенчатую функцию, поданную на ее вход (рис. 6.28).



Рис. 6.28. Реакция линейной стационарной системы на ступенчатое воздействие

$$h(t) = T[s(t)].$$

Реакция системы на ступенчатую функцию численно равна интегралу от импульсной характеристики:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau.$$

Примечание. При определении импульсной характеристики сначала находят реакцию системы на ступенчатое воздействие, после чего вычисляют импульсную характеристику как производную от выходного сигнала при скачкообразном изменении сигнала на входе.

Пример. Реакция *RC*-цепи, показанной на рис. 6.29, на ступенчатое возмущение описывается выражением:

$$h(t) = s(t) \cdot (1 - e^{-t/T}).$$

Дифференцируя это выражение, получаем импульсную характеристику системы:

$$(t) = h'(t) = s'(t) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + s(t) \cdot (1 - e^{-t/\tau})' =$$

$$= \underbrace{\delta(t) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}_{(1-1)} + s(t) \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = s(t) \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Дельта-функция эффективно отфильтровывает все элементы суммы, за исключением элемента, соответствующего моменту времени $t = 0$.

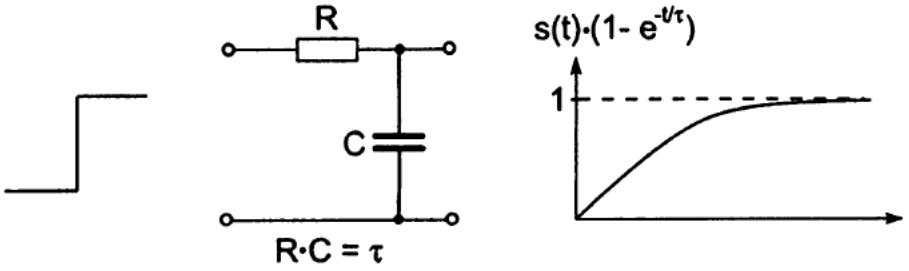


Рис. 6.29. Реакция *RC*-цепи на ступенчатое возмущение

6.3.4.3. Реакция систем на произвольное входное воздействие

Выходной сигнал $y(t)$ системы, показанной на рис. 6.30, с импульсной характеристикой $g(t)$ при подаче на ее вход сигнала $x(t)$ определяется выражением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau . \qquad (6.28)$$

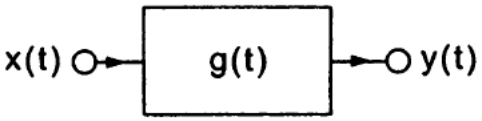


Рис. 6.30. Входной и выходной сигналы системы с импульсной характеристикой $g(t)$

Процедура, описываемая выражением (6.28), называется **операцией свертки двух функций** $x(t)$ и $g(t)$, которая часто обозначается как:

$$y(t) = x(t) * g(t).$$

Примечание. Реакция системы на определенное входное воздействие часто называется **откликом** системы.

Примечание. Отклик системы на дельта-функцию ($x(t) = \delta(t)$) определяется ее импульсной характеристикой:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = g(t).$$

Примечание. На практике для вычисления реакции системы на то или иное входное воздействие метод сверток используется редко. Чаще всего отклик системы определяют в частотной области через спектральные характеристики входного сигнала и самой системы. Однако в системах с временной дискретизацией сигналов, например таких как цифровые фильтры, вычисление интеграла свертки заменяется процедурой суммирования, которая в современных сигнальных процессорах выполняется быстро и очень точно.

6.3.4.4. Правила свертки

Пусть $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ являются произвольными функциями. Для всех них справедливы следующие утверждения:

$$0 * f(t) = 0, \quad \delta(t) * f(t) = f(t). \tag{6.29}$$

Дельта-функция при вычислении свертки функций играет роль единицы при умножении чисел. При выполнении операции свертки пользуются следующими законами: переместительным, сочетательным и распределительным.

Переместительный закон

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t). \tag{6.30}$$

- При вычислении свертки входного сигнала и импульсной характеристики их можно менять местами (рис. 6.31).

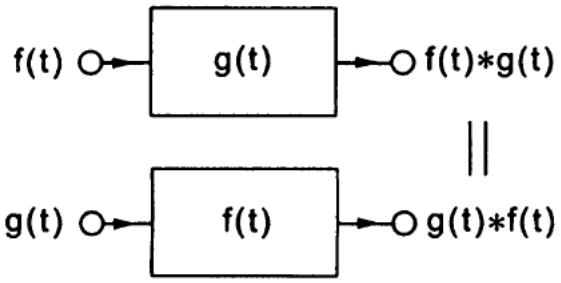


Рис. 6.31. Переместительный закон свертки функций

Сочетательный закон

$$f(t) * g(t) * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]. \tag{6.31}$$

- Два последовательно соединенных элемента могут быть объединены в одну систему, импульсная характеристика которой будет определяться сверткой импульсных характеристик отдельных элементов (рис. 6.32).

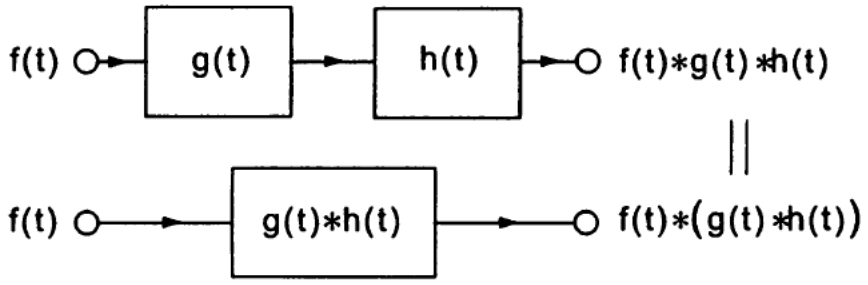


Рис. 6.32. Сочетательный закон свертки функций

Распределительный закон

$$(f(t) + g(t)) * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t) \tag{6.32}$$

- Если на вход системы поступают два сигнала, то каждый из них обрабатывается независимо от другого. Результирующий выходной сигнал определяется суммированием отдельных выходных сигналов, что возможно благодаря принципу суперпозиции (рис. 6.33).

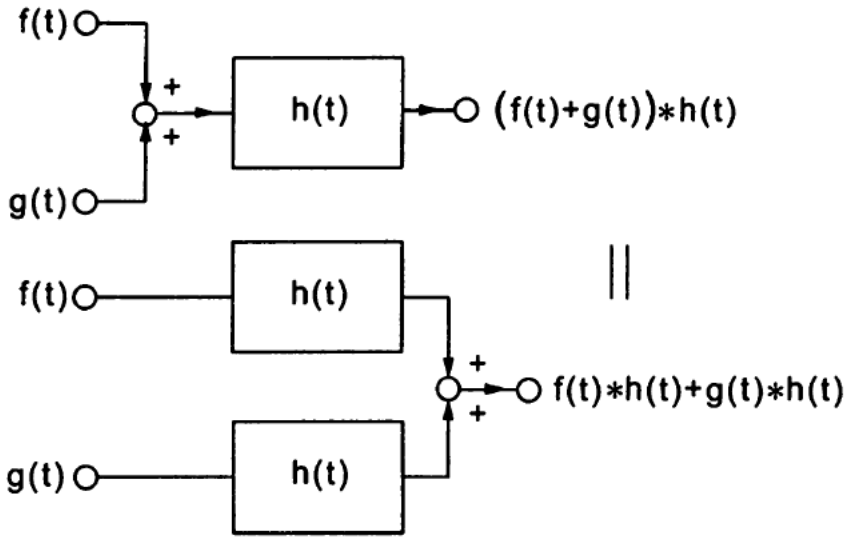


Рис. 6.33. Распределительный закон свертки функций

6.3.4.5. Передаточная функция

При подаче на вход линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $g(t)$ сигнала $x(t) = e^{j\omega t}$ ее выходной сигнал в соответствии с уравнением (6.28) определяется выражением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}_{G(\omega)}.$$

Из выражения видно, что входной сигнал, проходя через систему, умножается на комплексный коэффициент $G(\omega)$:

$$y(t) = G(\omega) \cdot x(t) \quad \text{при} \quad x(t) = e^{j\omega t}.$$

Коэффициент $G(\omega)$ называется **передаточной функцией** системы (рис. 6.34):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \qquad (6.33)$$

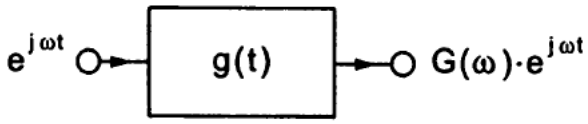


Рис. 6.34. Отклик системы на комплексный гармонический входной сигнал

- Передаточная функция системы определяется преобразованием Фурье ее импульсной характеристики.

Примечание. При определении передаточных функций линейных стационарных систем с известными внутренними структурами пользуются комплексным исчислением.

6.3.4.6. Определение отклика системы через частотные характеристики

Часто отклик системы на произвольное входное воздействие определяется не во времени через вычисление свертки по уравнению (6.28), а через вычисление частотных спектров сигналов.

Операция свертки во временной области эквивалентна операции умножения в частотной области:

$$y(t) = x(t) * g(t), \quad Y(\omega) = X(\omega) \cdot G(\omega). \tag{6.34}$$

Здесь $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ являются частотными спектрами входного и выходного сигналов, а $G(\omega)$ — передаточной функцией системы.

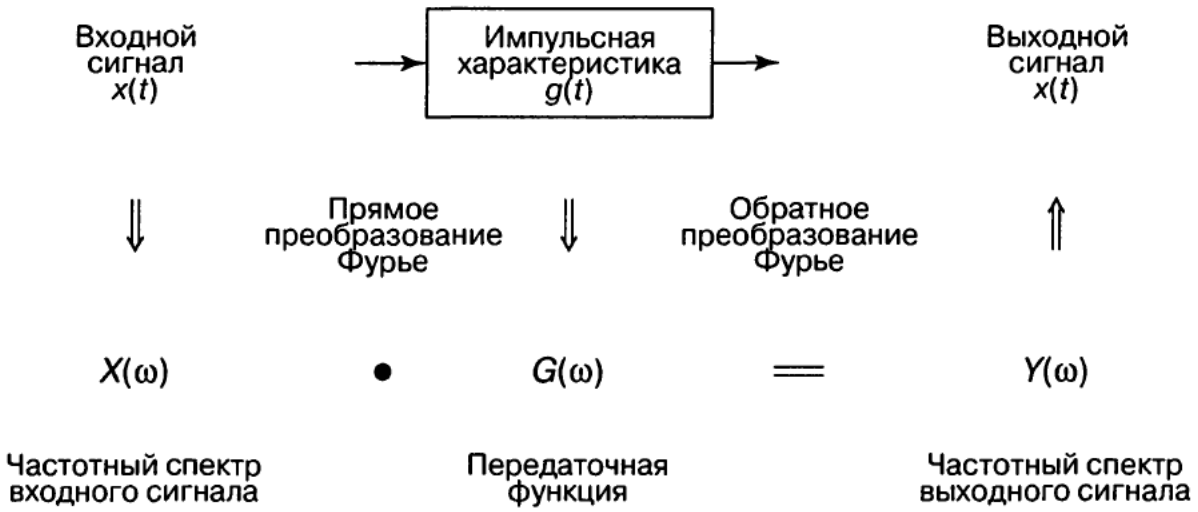


Рис. 6.35. Вычисление отклика системы во временной и частотной областях

На рис. 6.35 схематично показана процедура вычисления отклика системы, заключающаяся в следующих действиях:

- нахождение **спектра входного сигнала** $X(\omega)$ при помощи преобразования Фурье, примененного к входному сигналу $x(t)$;
- определение **передаточной функции** $G(\omega)$ системы методами комплексного исчисления;
- вычисление **спектра выходного сигнала** $Y(\omega)$ через перемножение спектра входного сигнала $X(\omega)$ и передаточной функции $G(\omega)$;
- нахождение **выходного сигнала** $y(t)$ при помощи обратного преобразования Фурье, примененного к спектру выходного сигнала $Y(\omega)$.

Примечание. Несмотря на то что этот метод определения реакции системы гораздо более трудоемкий, чем способ через определение свертки, при моделировании процессов в системах связи он используется чаще.

6.3.5. Вычисление отклика системы на импульсную и ступенчатую функции

6.3.5.1. Нормализация электрических цепей

В теории электрических цепей в целях упрощения все сигналы рассматриваются как безразмерные. Но при таком подходе при определении реакции конкретных физических систем на импульсную и ступенчатую функции возникают определенные проблемы, для разрешения которых применяются методы **нормализации**.

Нормализация по импедансу. Находятся нормализованные значения всех сопротивлений R_n, равные отношениям этих сопротивлений R к эталонному сопротивлению $R_г$. Величина эталонного сопротивления выбирается такой, чтобы значения большинства нормализованных сопротивлений в цепи были близки к единице. Часто в качестве эталона принимается либо сопротивление источника сигнала, либо сопротивление нагрузки.

Нормализация по частоте. Находятся нормализованные значения всех частот, равные отношениям этих частот к эталонной частоте, в качестве которой используется некоторая собственная частота цепи, например частота излома АЧХ или резонансная частота.

Эти два независимых типа нормализации задают нормализацию всех остальных величин в цепи. При этом необходимо помнить, что комплексные импедансы индуктивных и емкостных элементов цепи определяются следующими выражениями: $j\omega L_n$ и $1/j\omega C_n$.

Пример: Требуется нормализовать схему, показанную на рис. 6.36.

Решение. В качестве эталонного выбирается сопротивление $R_г = 200$ Ом, а в качестве эталонной частоты — угловая частота $\omega_г = 1/\sqrt{LC} = 10^5$ с$^{-1}$. Исходя из этого находятся значения нормализованных параметров цепи: $R_n = 1$, $C_n = 2$ и $L_n = 0{,}5$.

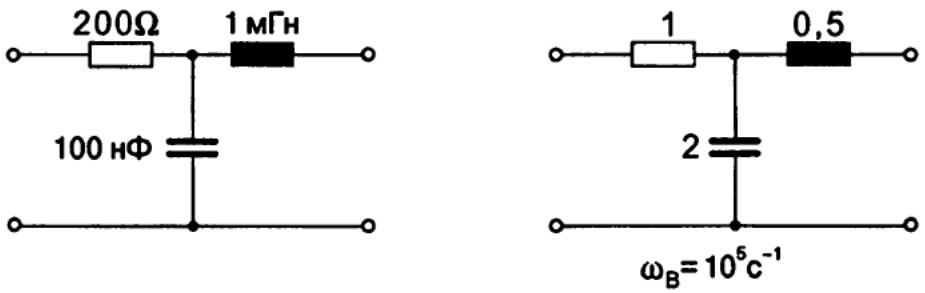


Рис. 6.36. Исходная схема и соответствующая ей нормализованная схема

В табл. 6.5 приведены соотношения нормализации для некоторых параметров электрических цепей.

Таблица 6.5. Соотношения нормализации некоторых параметров электрических цепей

Параметр	Нормализованное значение	Нахождение исходной величины
R	$R_n = \frac{R}{R_r}$	$R = R_n \cdot R_r$
ω	$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_r}$	$\omega = \omega_n \cdot \omega_r$
t	$t_n = t \cdot \omega_r$	$t = \frac{t_n}{\omega_r}$
C	$C_n = C \cdot \omega_r \cdot R_r$	$C = \frac{C_n}{\omega_r \cdot R_r}$
L	$L_n = L \cdot \frac{\omega_r}{R_r}$	$L = L_n \cdot \frac{R_r}{\omega_r}$

R_r — эталонное сопротивление;
ω_r — эталонная угловая частота.

6.3.5.2. Отклик системы первого порядка на импульсную и ступенчатую функции

К линейным системам первого порядка относятся *RC*- и *RL*-цепи с *одним* независимым энергозапасающим элементом (конденсатором или катушкой индуктивности). В общем виде, передаточная функция таких систем определяется следующим выражением:

$$G(\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{b_0 + j\omega}, \quad a_i \text{ и } b_0 \text{ — действительные числа.} \qquad (6.35)$$

Для устойчивости системы должно выполняться условие: $b_0 > 0$. Функция $G(\omega)$ является рациональной и дробной функцией от ω. Ее можно также записать в виде:

$$G(\omega) = a_1 + (a_0 - a_1 b_0) \cdot \frac{1}{b_0 + j\omega}.$$

Каждый член выражения преобразуется индивидуально (см. табл. 6.7):

$$a_1 \bullet\!\!-\!\!\circ\, a_1 \cdot \delta(t),$$

$$\frac{1}{b_0 + j\omega} \bullet\!\!-\!\!\circ\, s(t) \cdot e^{-b_0 t}.$$

Следовательно, выражение для **импульсной характеристики** системы первого порядка имеет вид:

$$g(t) = a_1 \cdot \delta(t) + s(t) \cdot \left(a_0 - a_1 b_0\right) \cdot e^{-b_0 t}. \qquad (6.36)$$

Коэффициенты a_0, a_1 и b_0 аналогичны коэффициентам в формуле (6.35).

Переходная характеристика системы равна интегралу от импульсной характеристики:

$$h(t) = s(t) \cdot \left(\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 - a_1 b_0}{b_0} \cdot e^{-b_0 t} \right). \qquad (6.37)$$

Пример: определение импульсной и переходной характеристик электрической цепи, показанной на рис. 6.37.

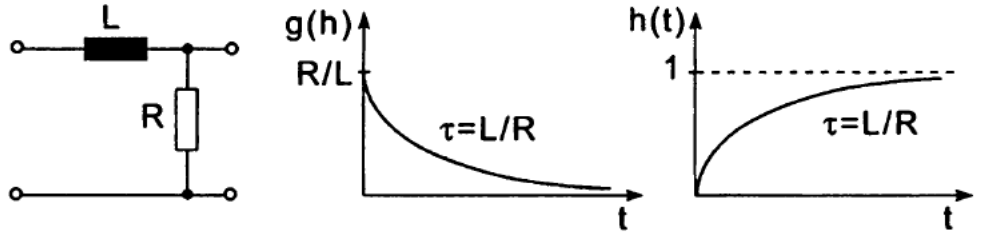


Рис. 6.37. Электрическая схема и ее характеристики: импульсная и переходная

Решение. Передаточная функция электрической цепи определяется выражением:

$$G(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{R/L}{R/L + j\omega},$$

из которого видно, что $a_0 = R/L$, $a_1 = 0$, $b_0 = R/L$.

Подставив значения этих коэффициентов в выражение (6.36), получаем импульсную характеристику цепи:

$$g(t) = s(t) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При помощи уравнения (6.37) определяем переходную характеристику цепи:

$$h(t) = s(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Пример: Определение импульсной и переходной характеристик электрической цепи, показанной на рис. 6.38.

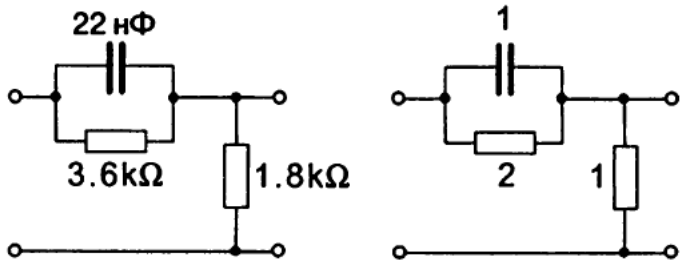


Рис. 6.38. Схема и ее нормализованное представление

Решение. В качестве эталонных величин выбираем следующие: $R_г = 1{,}8$ кОм и $\omega_г = 1/(R_г C) = (1{,}8\ \text{кОм} \cdot 22\ \text{нФ})^{-1} = 25\ \ 252\ \text{с}^{-1}$. Нормализованная схема показана в правой части рис. 6.38. Передаточная функция этой схемы имеет вид:

$$G_n(\omega) = \frac{1}{1 + 2\left\| \frac{1}{j\omega}\right.} = \frac{1/2 + j\omega}{3/2 + j\omega}.$$

Из этого выражения видно, что $a_0 = 1/2$, $a_1 = 1$, $b_0 = 3/2$. При помощи уравнения (6.36) находим импульсную характеристику цепи:

$$g_n(t_n) = \delta(t_n) - s(t_n) \cdot e^{-\frac{3}{2}t_n}.$$

В соответствии с уравнением (6.37) переходная характеристика цепи определяется выражением:

$$h(t_n) = s(t_n) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t_n} \right).$$

Полученные характеристики показаны на рис. 6.39.

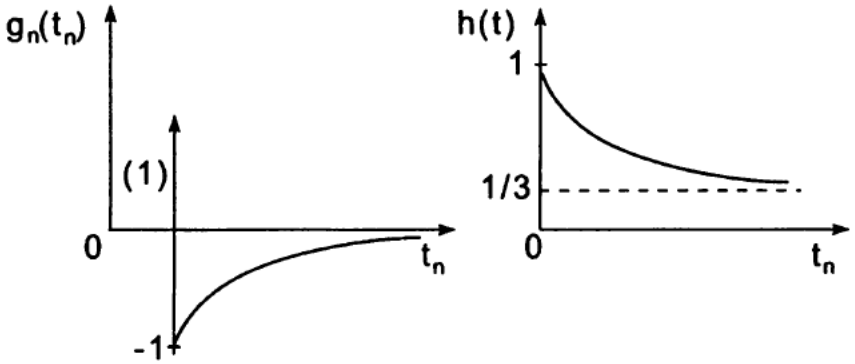


Рис. 6.39. Нормализованные импульсная и переходная характеристики цепи на рис. 6.38

Ось времени импульсной характеристики определяется в единицах нормализованного времени t_n. Проведя операцию, обратную нормализации, найдем реальное время: $t = t_n/\omega_г = t_n R_г C = 39{,}6$ мкс. Постоянная времени экспоненциального сигнала равна $\frac{2}{3} R_г C = 26{,}4$ мкс.

6.3.5.2. Отклик системы второго порядка на импульсную и ступенчатую функции

К системам второго порядка относятся *RLC*-цепи с *двумя* независимыми энергозапасающими элементами: конденсаторами и (или) катушками индуктивности. В общем виде передаточная функция таких систем определяется следующим выражением:

$$G(\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega - a_2\omega^2}{b_0 + b_1 j\omega - \omega^2}, \quad a_i, b_i \text{ — действительные числа.} \qquad (6.38)$$

Для устойчивости системы должно выполняться условие: $b_0 > 0$, $b_1 > 0$.

Передаточную функцию можно записать в виде:

$$G(\omega) = a_2 + \frac{c_0 + c_1 j\omega}{b_0 + b_1 j\omega - \omega^2}, \; c_0 = a_0 - a_2 b_0, \quad c_1 = a_1 - a_2 b_1.$$

Часто знаменатель этой функции полезно представлять в виде:

$$b_0 + b_1 j\omega - \omega^2 = (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2),$$

$$p_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}.$$

Примечание. Корни p_1 и p_2 являются либо действительными числами, либо комплексно-сопряженными. Значения p_1 и p_2 называются полюсами передаточной функции.

Примечание. Случай, когда $p_1 = p_2$, рассматриваться не будет.

Передаточную функцию можно представить в виде суммы двух дробных частей, преобразуемых отдельно друг от друга. Тогда **импульсная характеристика** системы будет определяться как:

$$\begin{array}{l} G(\omega) = a_2 + \dfrac{Z_1}{(j\omega - p_1)} + \dfrac{Z_2}{(j\omega - p_2)} \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ g(t) = a_2\delta(t) + Z_1 \cdot s(t) \cdot e^{p_1 t} + Z_2 \cdot s(t) \cdot e^{p_2 t}. \end{array} \tag{6.39}$$

Здесь:

$$Z_1 = \frac{c_0 + c_1 p_1}{p_1 - p_2}, \quad Z_2 = \frac{c_0 + c_1 p_2}{p_2 - p_1}, \quad p_1 \neq p_2,$$

$$c_0 = a_0 - a_2 b_0, \quad c_1 = a_1 - a_2 b_1,$$

$$p_1 = -\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}, \; p_2 = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}.$$

Отсюда находится **переходная характеристика** системы:

$$h(t_n) = a_2 \cdot s(t_n) + \frac{Z_1}{p_1} \cdot s(t_n) \cdot \left[\left(e^{p_1 t_n} - 1 \right) + \frac{Z_2}{p_2} \cdot \left(e^{p_2 t_n} - 1 \right) \right], \tag{6.40}$$

где коэффициенты a_i и b_i определяются выражением (6.38).

Пример: определение импульсной характеристики электрической цепи, показанной на рис. 6.40.

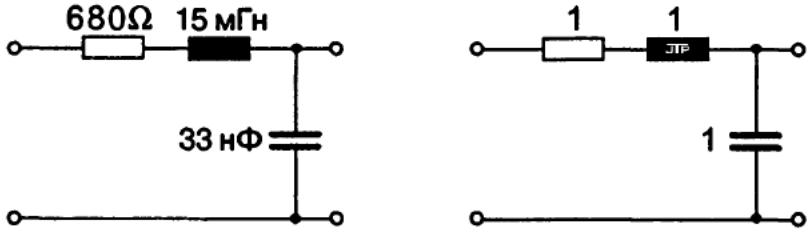


Рис. 6.40. Схема и ее нормализованное представление

Решение. В качестве эталонных величин выбираем следующие: $R_г = 680$ Ом и $\omega_г = 1/\sqrt{LC} \approx 45\,000$ с$^{-1}$. Нормализованные величины находятся с небольшой погрешностью округления. Нормализованная схема показана в правой части рис. 6.40. Передаточная функция этой схемы имеет вид:

$$G_n(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega}}{\frac{1}{j\omega} + 1 + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega - \omega^2}.$$

Следовательно, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$. Это значит, что $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_1 = \frac{1}{j\sqrt{3}}$, $Z_2 = -Z_1$.

Подставив эти значения в (6.39), находим импульсную характеристику цепи:

$$g_n(t) = s(t) \cdot \left(\frac{1}{j\sqrt{3}} \cdot e^{p_1 t} - \frac{1}{j\sqrt{3}} \cdot e^{p_2 t} \right).$$

Действительная часть экспоненты может быть вынесена за скобки:

$$g_n(t) = s(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{\frac{1}{j}\left(e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t} \right)}_{2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}.$$

Переменная t — это нормализованное время. Импульсная характеристика цепи может быть представлена в виде экспоненциально убывающих колебаний:

$$g_n(t_n) = s(t_n) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t_n} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t_n \right).$$

При достаточно большом коэффициенте затухания колебаний сигнала не будет (рис. 6.41). При значениях нормализованных величин $R_n = 4$, $L_n = 1$ и $C_n = 1/3$ передаточная функция определяется выражением:

$$G_n(\omega) = \frac{3}{3 + 4j\omega - \omega^2}.$$

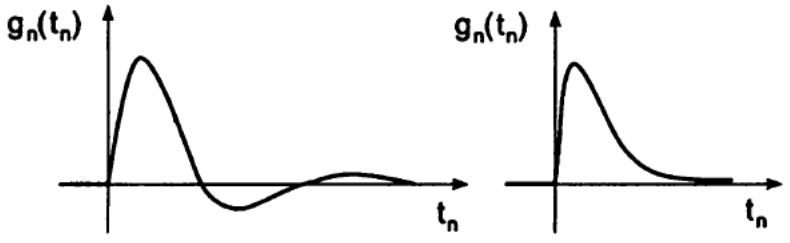


Рис. 6.41. Нормализованная импульсная характеристика схемы на рис. 6.40 и нормализованная импульсная характеристика схемы с сильным демпфированием

Корни знаменателя являются действительными числами: $p_{1,2} = -2 \pm 1$. При вычислении импульсной характеристики выясняется, что среди экспоненциальных членов нет мнимых. Это означает, что в сигнале нет периодической составляющей, а импульсная характеристика определяется разностью двух затухающих экспоненциальных функций (см. правую часть рис. 6.41):

$$g_n(t_n) = s(t_n) \cdot Z_1 \cdot (e^{p_1 t_n} - e^{p_2 t_n}) = s(t_n) \cdot \frac{3}{2} \cdot (e^{-t_n} - e^{-3t_n}).$$

6.3.6. Идеальные системы

Идеальные системы обладают идеализированными характеристиками, которые описывают поведение реальных систем лишь с некоторой степенью приближения. Поэтому идеальные системы используются в качестве моделей для изучения основных свойств реальных систем.

6.3.6.1. Системы, не вносящие искажений в сигналы

Неискажающие системы передают сигналы без изменения их формы. При этом допускаются изменения амплитуд сигналов и их временные сдвиги (рис. 6.42). Для произвольного входного сигнала $x(t)$, поступающего на вход такой системы, должно выполняться следующее соотношение:

$$y(t) = k \cdot x(t - t_0) \quad \text{для детерминированных систем при} \quad t_0 \geq 0,$$

где k — произвольный действительный **коэффициент амплитуды**; t_0 — время задержки.

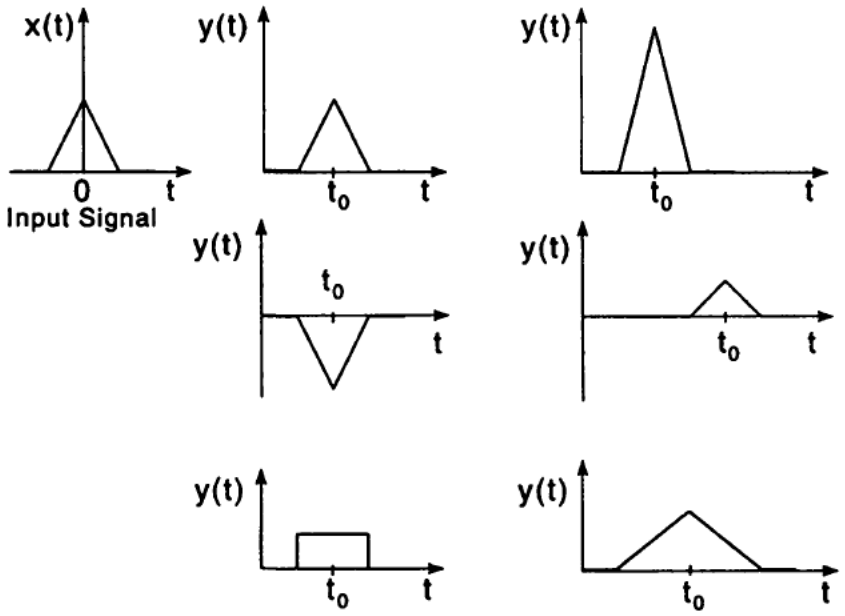


Рис. 6.42. Примеры выходных сигналов неискажающих систем при подаче на их входы треугольных импульсов (*два верхних ряда*) и сигналы систем, допускающих искажения (*нижний ряд*)

Передаточная функция неискажающей системы имеет вид:

$$G(\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Отсюда следует, что АЧХ и ФЧХ такой системы определяются выражениями (рис. 6.43):

$$|G(\omega)| = k, \quad \varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0. \tag{6.41}$$

- Неискажающие системы характеризуются постоянными коэффициентами ослабления (усиления) сигналов.
- Неискажающие системы обладают линейными ФЧХ.
- Неискажающие системы также называют **фазовыми фильтрами**.

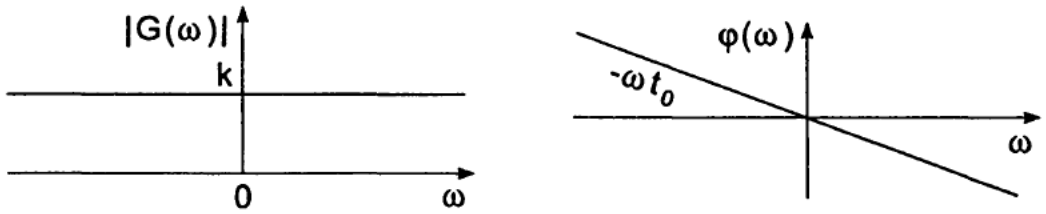


Рис. 6.43. АЧХ и ФЧХ неискажающей системы

При описании систем часто используются следующие характеристики.
Коэффициент затухания:

$$a(\omega) = -20 \lg |G(\omega)|, \text{ дБ}. \tag{6.42}$$

Коэффициент фазы (фазовая постоянная):

$$b(\omega) = -\varphi(\omega). \tag{6.43}$$

Задержка по фазе:

$$\tau_p = \frac{b(\omega)}{\omega}. \tag{6.44}$$

Групповая задержка:

$$\tau_g = \frac{db(\omega)}{d\omega}. \tag{6.45}$$

Неискажающая система во всем частотном диапазоне обладает **постоянным коэффициентом затухания** и **постоянной групповой задержкой**. Это означает, что все частотные составляющие сигналов имеют одинаковую задержку и, следовательно, входные и выходные сигналы обладают одной и той же фазой. В противном случае на выходе системы появляются линейные **фазовые искажения**. Если в системе нарушается постоянство коэффициента затухания, то в ней наблюдаются линейные **амплитудные искажения**.

Примечание. **Нелинейные искажения** отличаются от **линейных искажений**. На выходах систем с нелинейными искажениями возникают частотные компоненты, не входящие в частотные спектры исходных входных сигналов.

6.3.6.2. Идеальные фильтры нижних частот

Сигналы, частота которых входит в полосу пропускания **идеальных ФНЧ**, заканчивающуюся на частоте $f_c(\omega_c)$, проходят через фильтр без искажений. При этом составляющие сигнала с частотой, превышающей критическую частоту, полностью подавляются. **Передаточная функция идеального ФНЧ** имеет вид:

$$G(\omega) = \begin{cases} k \cdot e^{-j\omega t_0} & \text{при } |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (6.46)$$

где k — действительный коэффициент амплитуды;
t_0 — групповая временная задержка (время задержки сигнала) ФНЧ (рис. 6.44).

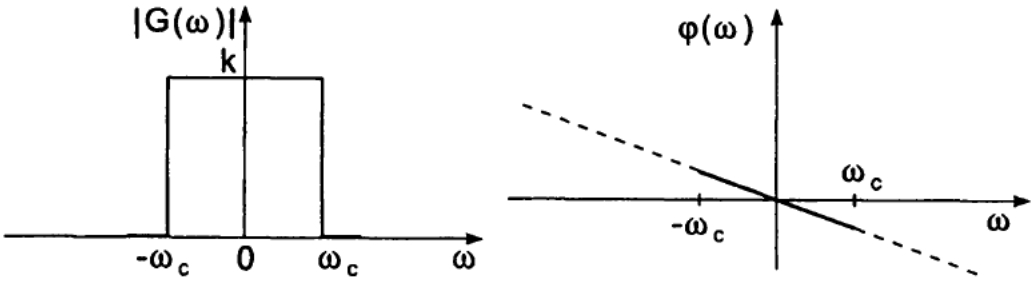


Рис. 6.44. Передаточная функция идеального ФНЧ

Импульсная характеристика идеального ФНЧ определяется выражением:

$$g(t) = k \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\omega_c \left(t - t_0\right)\right] = 2kf_c \cdot \operatorname{sinc}\left[2\pi \cdot f_c \left(t - t_0\right)\right]. \qquad (6.47)$$

Примечание. Функция sinc (x) определяется как:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (6.48)$$

- Идеальные ФНЧ относятся к недетерминированным системам.

Максимальное значение импульсной характеристики достигается в момент времени $t = t_0$: $g(t_0) = k\omega_c/\pi = 2kf_c$. Следовательно, t_0 является временем задержки на распространение сигнала (рис. 6.45).

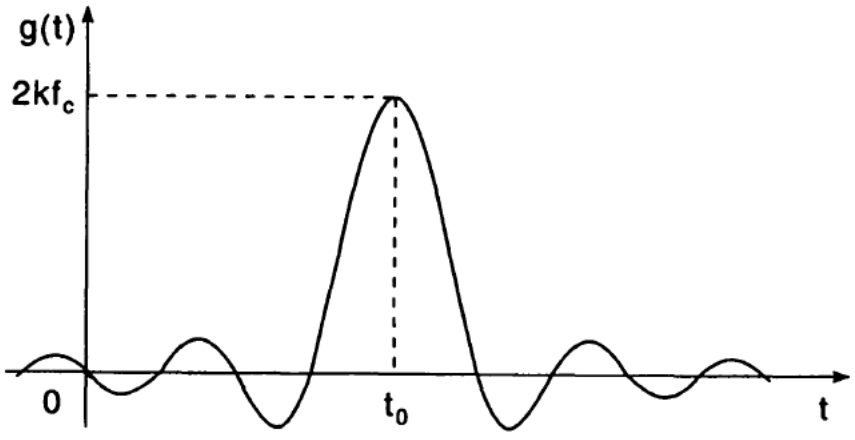


Рис. 6.45. Импульсная характеристика ФНЧ

На рис. 6.46 показана **переходная характеристика идеального ФНЧ**:

$$h(t) = \frac{k}{2} + \frac{k}{\pi} \cdot \mathrm{Si}\left[\omega_c \left(t - t_0\right)\right]. \tag{6.49}$$

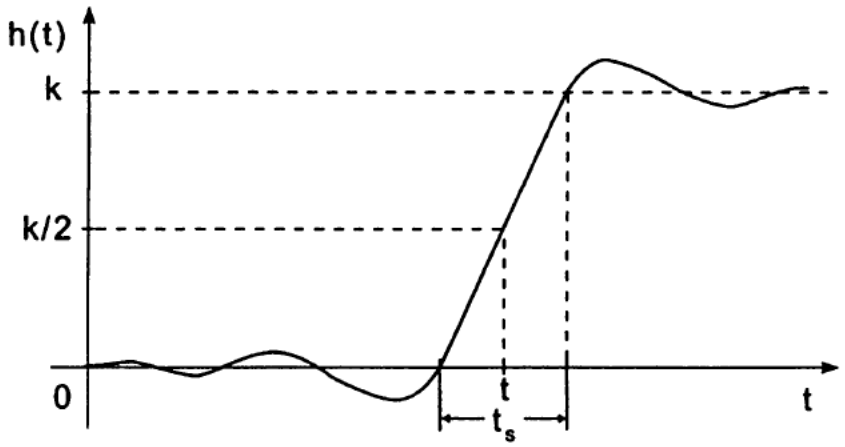


Рис. 6.46. Переходная характеристика идеального ФНЧ

Примечание. При построении переходной характеристики предполагается, что до момента $t = 0$ она может принимать ненулевые значения.

Примечание. Функция Si (x) определяется как:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau. \tag{6.50}$$

Функцию Si (x) нельзя представить в аналитическом виде. Ее можно лишь аппроксимировать в виде степенной последовательности:

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35\,280} \ldots = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \ldots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1) \cdot (2i+1)!} \ldots .$$

Перерегулирование — это отклонение сигнала более чем на 8,6 % от установившегося значения. В системах с ограниченным частотным диапазоном перерегулирование часто называют эффектом Гиббса.

Установившимся значением выходного сигнала считается величина $h_\infty = k$. В момент времени $t = t_0$, переходная характеристика пересекает уровень $k/2$, равный половине конечного значения выходного сигнала. Как правило, именно в этой точке наблюдается ее максимальная крутизна (максимальная скорость нарастания выходного сигнала).

Время установления сигнала — интервал времени от начала появления входного сигнала до момента, когда сигнал пересекает уровень установившегося значения. Для идеального ФНЧ время установления сигнала t_s определяется выражением:

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c}. \tag{6.51}$$

- Чем выше критическая частота, тем короче время установления выходного сигнала идеального ФНЧ.

Произведение длительности сигнала на ширину полосы пропускания

Длительность импульсной характеристики $g(t)$ идеального ФНЧ описывается шириной импульса. Для определения ширины импульса подбирается такой прямоугольный импульс, площадь которого равна $g(t)$, а высота — максимальной амплитуде импульсной характеристики. Ширина полученного прямоугольного импульса соответствует искомой **ширине импульса** $\Delta t_{\text{р}}$:

$$\Delta t_{\text{р}} = \frac{1}{g_{\max}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt.$$

Отсюда находится ширина импульса импульсной характеристики идеального ФНЧ:

$$\Delta t_{\text{р}} = \frac{1}{2f_{\text{с}}}. \qquad (6.52)$$

Для идеального ФНЧ ширина импульсной характеристики равна времени установления сигнала.

- Ширина импульсной характеристики ФНЧ обратно пропорциональна его полосе пропускания.

Произведение длительности импульса на ширину полосы пропускания является постоянной величиной:

$$f_{\text{с}} \cdot \Delta t_{\text{р}} = \frac{1}{2}.$$

Эту концепцию можно обобщить. Определив **полосу пропускания** как:

$$B = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left|G(\omega)\right|^2 d\omega},$$

а ширину импульса в виде:

$$\Delta T = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left|g(t)\right|^2 dt},$$

и используя условие нормализации:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t)\right|^2 dt = 1,$$

получаем так называемый принцип неопределённости:

$$B \cdot \Delta T \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (6.53)$$

Это соотношение справедливо для всех типов ФНЧ. Чем меньше величина произведения длительности импульса на ширину полосы пропускания, тем больше импульсная характеристика фильтра приближается к функции Гаусса.

- Для фильтров полоса пропускания и ширина импульсной характеристики являются обратно пропорциональными величинами.

6.3.6.3. Полосовой фильтр

Идеальный полосовой фильтр пропускает без искажения сигналы, частота которых находится в пределах частотного диапазона $\Delta f(\Delta\omega)$. Частотные составляющие сигнала, попадающие в зону заграждения фильтра, полностью подавляются. **Передаточную функцию полосовых фильтров** можно записать в виде:

$$G(\omega)=\begin{cases} k\cdot e^{-j\omega t_0} & \text{для} \quad |\omega-\omega_0|<\dfrac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{6.54}$$

где ω_0 — центральная (угловая) частота полосового фильтра;

$\Delta\omega$ — его полоса пропускания.

Это выражение справедливо при условии, что центральная частота больше половины полосы пропускания ($\omega_0 > \Delta\omega/2$).

Импульсная характеристика идеального полосового фильтра имеет вид:

$$g(t) = k\cdot\Delta f\cdot\mathrm{sinc}[\pi\Delta f(t-t_0)]\cdot 2\cos[2\pi f_0(t-t_0)] =$$

$$= k\cdot\frac{\Delta\omega}{2\pi}\cdot\mathrm{sinc}\left[\Delta\omega\cdot(t-t_0)\right]\cdot 2\cos\left[2\omega_0(t-t_0)\right]. \tag{6.55}$$

Импульсная характеристика полосового фильтра похожа на сигнал с центральной частотой f_0, огибающая которого соответствует импульсной характеристике ФНЧ с критической частотой, равной $\Delta f/2$ (рис. 6.47).

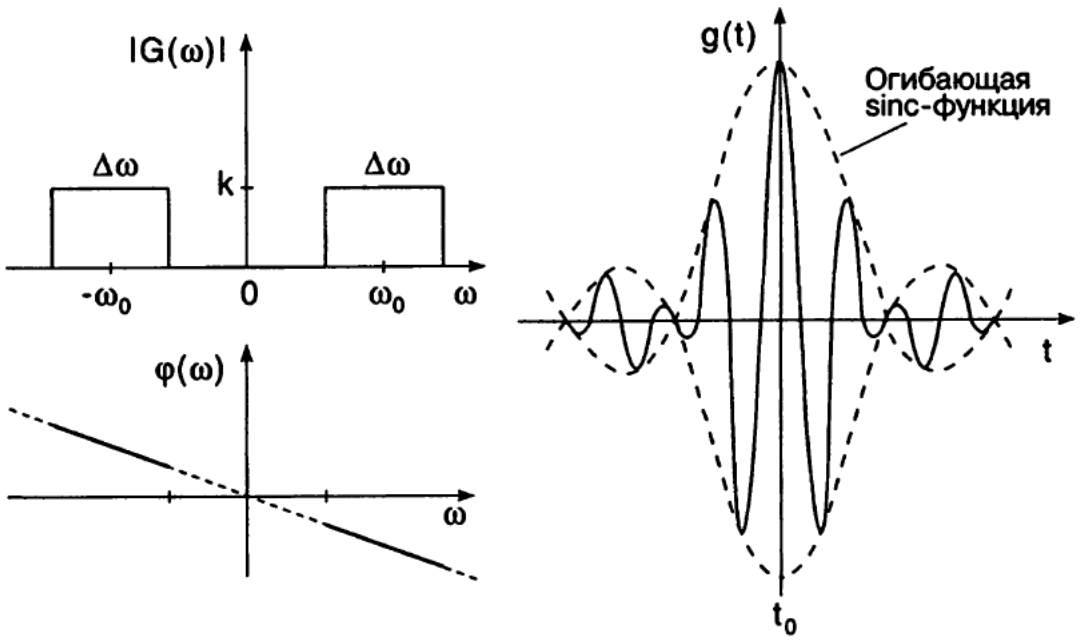


Рис. 6.47. Передаточная функция и импульсная характеристика идеального полосового фильтра

- Идеальный полосовой фильтр является **недетерминированной системой**.

6.4. Преобразования Фурье

6.4.1. Принцип преобразований Фурье

Принцип преобразования Фурье заключается в однозначном и обратимом преобразовании сигнала $f(t)$, определенного во временной области, в сигнал $F(\omega)$, определенный в частотной области (рис. 6.48).

Преобразование Фурье представляет временную функцию как суперпозицию бесконечного числа гармонических экспоненциальных функций. Подобно тому как ряд Фурье описывает периодическую функцию в виде *суммы* бесконечного числа дискретных гармоник, преобразование Фурье является *интегралом* от бесконечно большого числа гармоник. Расширяя эту концепцию до непрерывного спектра, можно утверждать, что при помощи преобразований Фурье даже непериодический сигнал может быть отображен в частотной области.

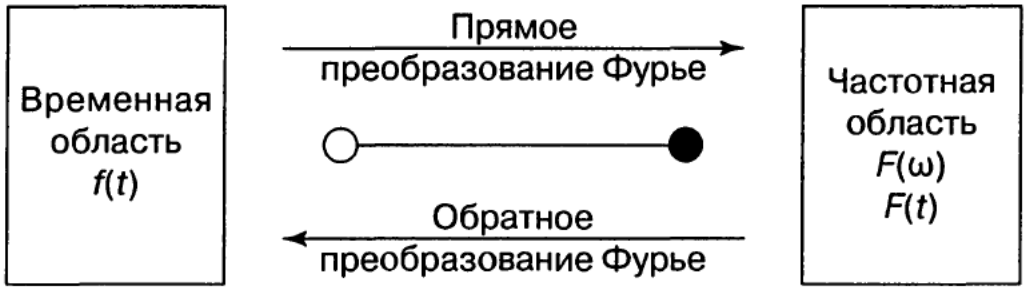


Рис. 6.48. Принцип преобразования Фурье

Работу фильтров и систем передачи проще оценивать в частотной области, поскольку если во временной области для этого требуется находить решение линейного дифференциального уравнения, то в частотной области — алгебраического.

Обратное преобразование Фурье позволяет переводить сигнал из частотной области во временную.

6.4.2. Основные определения

Преобразование Фурье временной функции $f(t)$ в сигнал $F(f)$ определяется:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt. \qquad (6.56)$$

Выражение для обратного преобразования Фурье **имеет вид**:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \qquad (6.57)$$

Эти выражения также можно записать как:

$$F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(f)\}$$

или при помощи соответствующего символа ○—●:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(f) \quad \text{или} \quad f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega).$$

Этот символ может читаться в обоих направлениях, что иллюстрирует обратимость преобразований. Черный кружок соответствует **частотной области**.

Примечание. Часто вместо (6.56) используется следующее выражение для **прямого преобразования Фурье**, где частота f заменена на угловую частоту ω:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \qquad (6.58)$$

Аналогично получается выражение для **обратного преобразования Фурье**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \qquad (6.59)$$

В этой главе используются обе формы представления преобразования Фурье.

Примечание. В литературе часто используется представление преобразования Фурье как $F(j\omega)$. Оно ничем не отличается от $F(\omega)$.

6.4.3. Представление преобразования Фурье в комплексном виде

Преобразование Фурье $S(f)$ действительного временного сигнала является комплексной функцией, которую можно представить в виде суммы **действительной** и **мнимой** частей:

$$S(f) = R(f) + j \cdot X(f).$$

Для действительных временных функций справедливы соотношения:

$$R(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(2\pi f t) dt, \qquad (6.60)$$

$$X(f) = \mathrm{Im}\{S(f)\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(2\pi f t) dt, \qquad (6.61)$$

$$R(f) = R(-f), \quad X(f) = -X(-f).$$

Отсюда можно сделать вывод, что **действительные части** преобразований Фурье **действительных временных функций** являются **четными функциями**, а **мнимые части — нечетными**.

Поскольку преобразование Фурье является комплексной функцией, его можно представить в экспоненциальной форме:

$$S(f) = |S(f)| \cdot e^{j\varphi(f)},$$

где:

$$|S(f)| = \sqrt{R^2(f) + X^2(f)}, \quad \varphi(f) = \mathrm{arctg}\left[\frac{X(f)}{R(f)}\right].$$

- Для **действительных** временных функций справедливо, что **модули** их преобразований Фурье являются **четными** функциями, а **фазы — нечетными**.

Примечание. Преобразования Фурье полезно также применять с *комплексными* временными функциями, например $f(t) = e^{j\omega t}$. При этом необходимо помнить, что свойства симметрии справедливы только для действительных функций.

6.4.3.1. Свойства симметрии

- Для действительных временных функций справедливо, что преобразования Фурье **четных** временных функций являются **действительными функциями**, а **нечетных — мнимыми.**

Пример. Косинус является четной функцией. Ее преобразование Фурье имеет вид: $\frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$. Оно является действительной функцией. В свою очередь, синус — это нечетная функция, преобразование Фурье которой имеет вид: $-\frac{j}{2}\delta(f-f_0)+\frac{j}{2}\delta(f+f_0)$. Очевидно, что это мнимая функция. На рис. 6.49 показаны функции синуса и косинуса в частотной области.

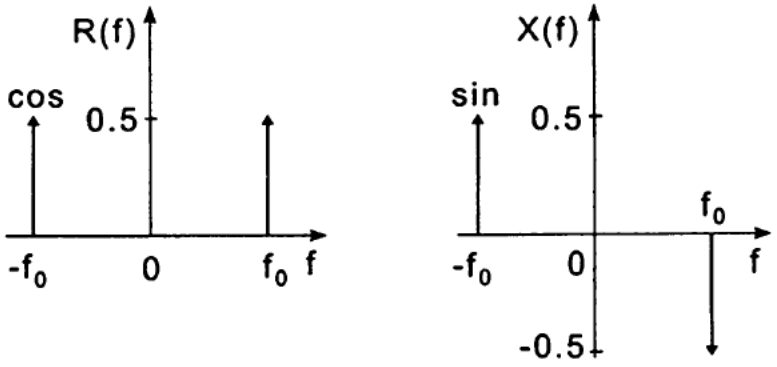


Рис. 6.49. Функции синуса и косинуса в частотной области

6.4.4. Свойства преобразований Фурье (обзор)

Пусть $s(t)$ и $r(t)$ — это произвольные временные функции, тогда $S(f)$ и $R(f)$ (или $S(\omega)$ и $R(\omega)$) являются их преобразованиями Фурье. В табл. 6.6 представлены основные свойства преобразований Фурье.

Таблица 6.6. Свойства преобразований Фурье

$s(t)$	○—●	$S(f)$ $S(\omega)$
Преобразование Фурье		
$s(t)$	○—●	$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt$
Обратное преобразование Фурье		
$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\cdot e^{j2\pi ft}df$	○—●	$S(f)$
$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$	○—●	$S(\omega)$

Окончание таблицы 6.6

Комплексно-сопряжённое значение		
$s^*(t)$	○—●	$S^*(-f)$
Двойственность		
$S(t)$	○—●	$s(-f)$
	○—●	$2\pi \cdot s(-\omega)$
Умножение		
$r(t) \cdot s(t)$	○—●	$R(f) * S(f)$
	○—●	$\frac{1}{2\pi} R(\omega) * S(\omega)$
Свертка		
$r(t) * s(t)$	○—●	$R(f) \cdot S(f)$
Суперпозиция		
$a \cdot r(t) + b \cdot s(t)$	○—●	$a \cdot R(f) + b \cdot S(f)$
Временной сдвиг	○—●	$S(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$
$s(t - t_0)$	○—●	$S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Частотный сдвиг		
$s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$	○—●	$S(f - f_0)$
$s(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	○—●	$S(\omega - \omega_0)$
Временно́е масштабирование		
$s(t/a)$	○—●	$\lvert a \rvert \cdot S(a \cdot f)$
Дифференцирование		
$\frac{d}{dt} s(t)$	○—●	$j2\pi f \cdot S(f)$
	○—●	$j\omega \cdot S(\omega)$
Интегрирование		
$\int_{-\infty}^{t} s(\tau) d\tau$	○—●	$\frac{1}{j2\pi f} \cdot S(f) + \frac{1}{2} \cdot S(0) \cdot \delta(f)$
	○—●	$\frac{1}{j\omega} \cdot S(\omega) + \pi \cdot S(0) \cdot \delta(\omega)$

Для постоянных во времени сигналов члены с дельта-функциями отбрасываются.

6.4.5. Преобразования Фурье элементарных сигналов

6.4.5.1. Спектр дельта-функции

Преобразование Фурье дельта-функции имеет вид:

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=e^{0}=1,$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1. \tag{6.62}$$

- Все частотные компоненты, входящие в состав дельта-импульса, имеют одинаковые амплитуды (рис. 6.50).

Из свойства двойственности времени и частоты следует, что постоянным во времени сигналам в частотном спектре соответствуют дельта-импульсы:

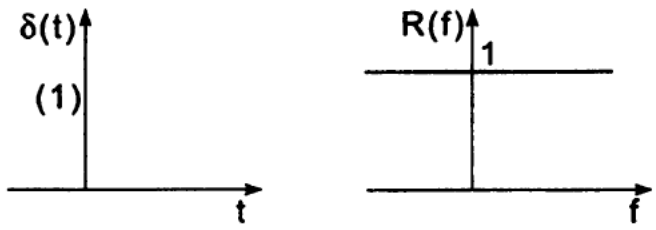


Рис. 6.50. Дельта-импульс и действительная часть ее преобразования Фурье

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(f) \quad \text{или} \quad 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta(\omega). \tag{6.63}$$

6.4.5.2. Спектры знаковой и ступенчатой функций

Знаковая функция похожа на ступенчатую функцию и определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0.\end{cases}$$

Ее преобразование Фурье имеет вид:

$$\operatorname{sign}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\frac{1}{\pi f} \quad \text{или} \quad \operatorname{sign}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{j\omega}. \tag{6.64}$$

Знаковая функция — это нечетная функция, поэтому ее спектр является мнимым (рис. 6.51).

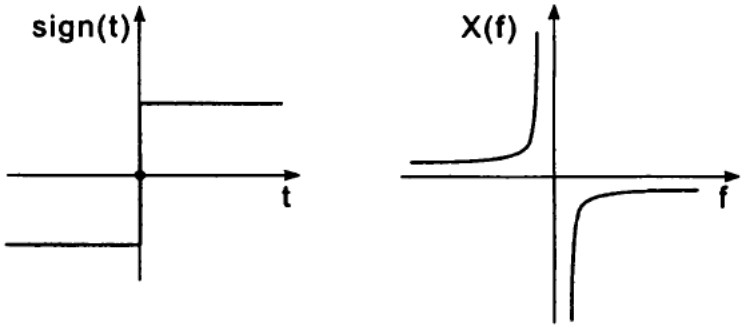


Рис. 6.51. Знаковая функция и мнимая часть ее преобразования Фурье

В отличие от знаковой функции ступенчатая функция имеет постоянную составляющую, что также видно из ее спектра. Ступенчатую функцию можно выразить через знаковую функцию:

$$s(t) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{sign}(t) \; + \; \frac{1}{2}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \qquad\qquad \circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\frac{-j}{2\pi f} \; + \; \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\theta\lambda\theta \quad \frac{1}{j\omega} \; + \; \pi\delta(\omega).$$

Примечание. Представление ступенчатой функции через знаковую функцию не определено для момента времени $t = 0$ (рис. 6.52). Поэтому обратное преобразование спектра разрывной функции в точках разрыва обычно считается равным среднему из левого и правого пределов функции (в данном случае оно равно нулю).

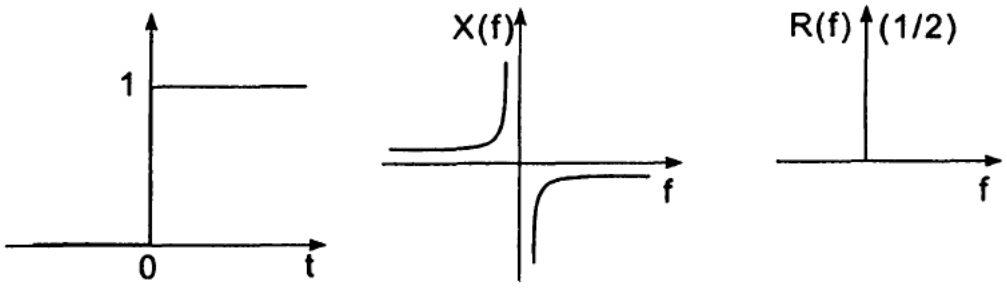


Рис. 6.52. Ступенчатая функция (*слева*), а также действительная (*справа*) и мнимая (*посередине*) части ее преобразования Фурье

6.4.5.3. Спектр прямоугольного импульса

Спектр прямоугольного импульса (рис. 6.53) определяется выражением:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{-1}{j2\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}). \qquad (6.65)$$

Используя следующее представление функции синуса:

$$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}),$$

получим уравнение:

$$S(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f} = \mathrm{sinc}(\pi f). \qquad (6.66)$$

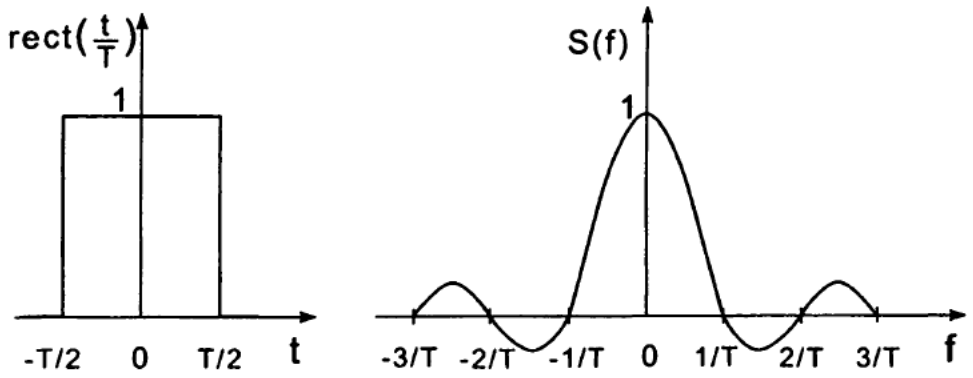


Рис. 6.53. Прямоугольный импульс и его амплитудный спектр

Применяя теорему подобия для импульсов произвольной ширины, можно вывести соотношения:

$$\begin{aligned} &\text{rect}\,(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \text{sinc}\,(\pi f), \\ &\text{rect}\,(t/T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T\cdot\text{sinc}\,(\pi T f) \\ \text{или}\quad &\text{rect}\,(t/T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T\cdot\text{sinc}\,(\omega T/2). \end{aligned} \tag{6.67}$$

6.4.5.4. Спектр треугольного импульса

Треугольный импульс $\Lambda\,(t)$ может быть представлен в виде свертки двух одинаковых прямоугольных импульсов:

$$\Lambda\,(t) = \text{rect}\,(t) * \text{rect}\,(t).$$

Операция свертки во временной области соответствует операции умножения в частотной области:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) = \quad &\text{rect}(t) \quad * \quad \text{rect}(t) \\ &\circ\!\!\downarrow\!\!\bullet \qquad\quad \circ\!\!\downarrow\!\!\bullet \\ &\text{sinc}\,(\pi f)\cdot\text{sinc}\,(\pi f). \end{aligned} \tag{6.68}$$

Отсюда следует, что (рис. 6.54):

$$\Lambda\,(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \text{sinc}^2(\pi f). \tag{6.69}$$

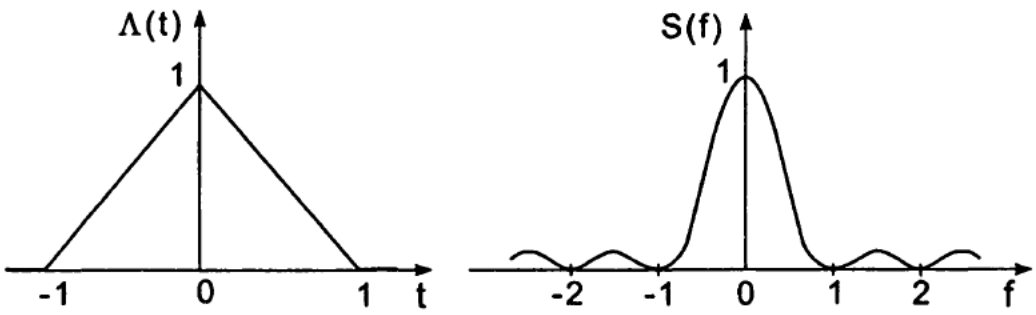


Рис. 6.54. Треугольный импульс и его амплитудный спектр

6.4.5.5. Спектр импульса Гаусса

Импульс Гаусса и его амплитудный спектр описываются следующими выражениями:

$$\Gamma(t) = e^{-\pi t^2}, \quad S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Применив к $e^{j\omega t}$ формулу Эйлера, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot \cos \omega t \, dt - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot \sin \omega t \, dt}_{=0}.$$

Подынтегральное выражение второго интеграла равно произведению четной (гауссовой) и нечетной (синусоидальной) функций. Следовательно, оно тоже является нечетной функцией, а ее интеграл равен нулю. Подынтегральное выражение первого интеграла является четной функцией, и ее интеграл в диапазоне [—∞...0] равен интегралу в диапазоне [0...∞]. Поэтому можно записать, что:

$$S(f) = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot \cos(2\pi f t) dt.$$

Из таблицы интегралов находим значение этого определенного интеграла:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-a^2 t^2} \cdot \cos bt \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-b^2/4a^2}.$$

Поскольку $a^2 = \pi$, $b = 2\pi f$:

$$\Gamma(t) = e^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-\pi f^2} = \Gamma(f). \tag{6.70}$$

Очевидно, что эта функция преобразуется в свой спектр простой заменой переменных времени и частоты.

6.4.5.6. Спектр гармонических функций

Преобразование Фурье комплексной гармонической функции $e^{j2\pi f_0 t}$ имеет вид:

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f - f_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

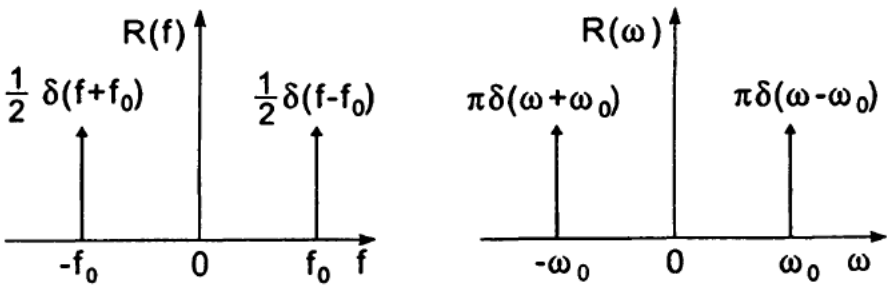


Рис. 6.55. Преобразование Фурье функции косинуса

Гармонические функции косинуса (рис. 6.55) и синуса (рис. 6.56) могут быть представлены в виде суммы двух периодических экспоненциальных функций:

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}\cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\cdot\delta(f+f_0)$$

или $$\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)+\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0).$$

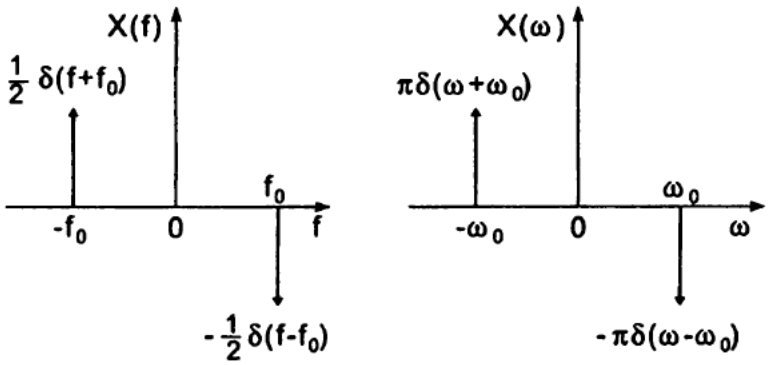


Рис. 6.56. Преобразование Фурье функции синуса

$$\sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}\cdot e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}\cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\frac{-j}{2}\cdot\delta(f-f_0) + \frac{j}{2}\cdot\delta(f+f_0)$$

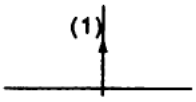
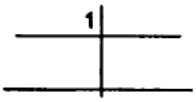
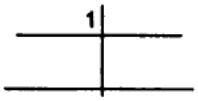
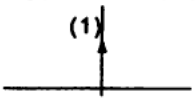
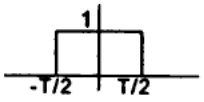
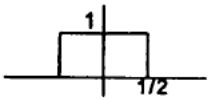
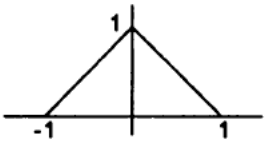
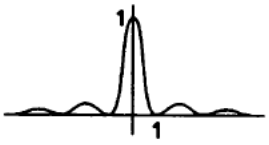
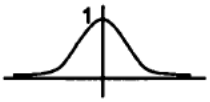
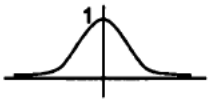
или $$-j\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)$$

Появление в спектре пары дельта-импульсов указывает на наличие в сигнале периодической составляющей. Поскольку все периодические функции могут быть представлены рядами Фурье в виде сумм функций синуса и косинуса, их спектры всегда состоят из дискретных спектральных линий, т. е. из дельта-импульсов, расположенных в частотной области.

6.4.6. Обзор преобразований Фурье

На графиках в табл. 6.7 показаны временные функции $s(t)$, амплитуды которых соответствуют преобразованиям Фурье $|S(f)|$.

Таблица 6.7. Преобразования Фурье элементарных сигналов

Сигнал $s(t)$	○—●	Спектр $S(f)$, $S(\omega)$
Дельта-импульс		
$\delta(t)$	○—●	1
		
Постоянный во времени сигнал		
1	○—●	$\delta(f)$, $2\pi\delta(\omega)$
		
Прямоугольный импульс		
rect(t/T)	○—●	$T \cdot \mathrm{sinc}\,(\pi T f)$ $T \cdot \mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$
		
Si-импульс		
sinc (t)	○—●	rect (f) rect $(\omega/2\pi)$
		
Треугольный импульс		
$\Lambda\,(t)$	○—●	$\mathrm{sinc}^2(\pi f) = \dfrac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$ $\mathrm{sinc}^2(\dfrac{\omega}{2}) = \dfrac{4\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$
		
Импульс Гаусса		
$e^{-\pi t^2}$	○—●	$e^{-\pi f^2}$ $e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$
		

Продолжение таблицы 6.7

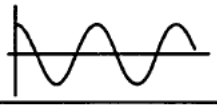
Последовательность дельта-импульсов $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T})$ $2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$ 
Ступенчатая функция $s(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f)-j\frac{1}{2\pi f}$ $\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ 
Знаковая функция $\text{sign}(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad -j\frac{1}{\pi f}$ $\frac{2}{j\omega}$ 
Косинусоидальный сигнал $\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$ $\cos\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad \pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 
Синусоидальный сигнал $\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{j}{2}\delta(f+f_0)-\frac{j}{2}\delta(f-f_0)$ $\sin\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 

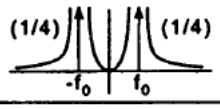
Окончание таблицы 6.7

Односторонний косинус

$$s(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{4}\delta(f-f_0)+\frac{1}{4}\delta(f+f_0)+\frac{j}{2\pi}\frac{f}{f_0^2-f^2}$$

$$s(t)\cdot\cos\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0)+j\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$



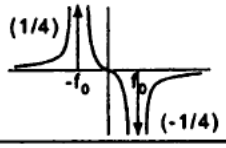


Односторонний синус

$$s(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{j}{4}\delta(f+f_0)-\frac{j}{4}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2\pi}\frac{f_0}{f_0^2-f^2}$$

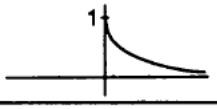
$$s(t)\cdot\sin\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{\pi}{2j}\delta(\omega+\omega_0)-\frac{\pi}{2j}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$$

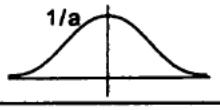




Односторонний экспоненциальный импульс

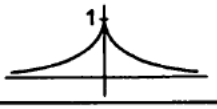
$$s(t)\cdot e^{-at} \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{a+j\omega} \quad \text{для} \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$$

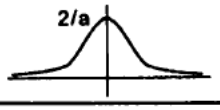




Двухсторонний экспоненциальный импульс

$$s(t)\cdot e^{-a|t|} \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad \text{для} \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$$

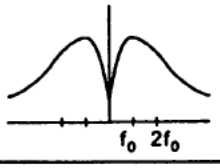




Затухающий косинусоидальный сигнал

$$s(t)\cdot e^{-at}\cdot\cos\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2} \quad \text{для} \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$$

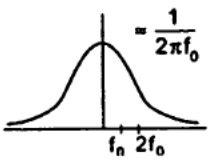




Затухающий синусоидальный сигнал

$$s(t)\cdot e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2} \quad \text{для} \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$$





6.5. Нелинейные системы

6.5.1. Основные определения

Нелинейными называются системы, в которых входные и выходные сигналы связаны нелинейными соотношениями.

Примечание. Можно смело утверждать, что идеально линейных систем в жизни не существует, следовательно, все реальные системы обладают определенными допусками по выходным сигналам. Поэтому линейные системы часто являются просто хорошими аппроксимациями реальных систем.

На практике более полезным может оказаться следующее определение нелинейных систем:

- При подаче на вход нелинейной системы гармонического сигнала на ее выходе появится негармонический сигнал.

6.5.2. Характеристики нелинейных систем

Выпрямительные диоды, стабилитроны, туннельные диоды и варисторы (резисторы, сопротивление которых зависит от напряжения) с их явно нелинейными вольт-амперными характеристиками являются яркими представителями нелинейных устройств. Сюда же относятся и проводники, чьи свойства определяются температурой, например резисторы с положительными или отрицательными температурными коэффициентами, а также нити накала электрических лампочек.

Часто (но не всегда) стремятся создавать системы с широкими линейными рабочими диапазонами, в которых допускается наличие некоторых нелинейностей. Все отклонения сигналов от требуемых уровней линейности характеризуются погрешностями нелинейности.

6.5.2.1. Характеристическое уравнение

Нелинейные характеристики могут быть описаны при помощи полиномиальных уравнений вида:

$$v_2 = a \cdot v_1 + b \cdot v_1^2 + c \cdot v_1^3 + \ldots \qquad (6.71)$$

Порядок полиномиального характеристического уравнения называется **порядком нелинейной системы**.

Пример: Выходной сигнал нелинейной системы второго порядка, на вход которой подается гармонический сигнал $v_1 = \hat{v}_1 \cdot \cos \omega t$, определяется так:

$$v_2 = a \cdot \hat{v}_1 \cdot \cos \omega t + b \cdot \hat{v}_1^2 \cdot \cos^2 \omega t.$$

Используя следующее соотношение:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\omega t), \qquad (6.72)$$

получаем уравнение для выходного напряжения:

$$v_2 = \frac{b}{2} \cdot \hat{v}_1^2 + a \cdot \hat{v}_1 \cdot \cos \omega t + \frac{b}{2} \cdot \hat{v}_1^2 \cdot \cos 2\omega t.$$

В состав выходного сигнала входят компоненты, частота которых в два раза превышает частоту входного сигнала. Такие составляющие сигнала называются **гармониками**.

- В общем виде, справедливо, что выходной сигнал нелинейной системы n-го порядка содержит гармоники, частота которых в n раз больше частоты входного сигнала. Амплитуда каждой гармоники определяется соответствующими коэффициентами характеристического уравнения.

Примечание. Частотой первой гармоники считается основная угловая частота ω. Частота второй гармоники равна 2ω.

Описание нелинейных систем при помощи коэффициентов характеристических уравнений не всегда бывает очень удобным. Больший интерес представляет изучение влияния различных нелинейностей, для чего определяется суммарный коэффициент нелинейных искажений.

6.5.2.2. Суммарный коэффициент нелинейных искажений

Суммарный коэффициент нелинейных искажений (СКН) сигнала определяется в виде следующего отношения:

$$\text{СКН} = \frac{\text{СКЗ гармоник}}{\text{СКЗ полного сигнала}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}. \qquad (6.73)$$

Здесь A_n являются коэффициентами Фурье амплитудного спектра рассматриваемого сигнала. Коэффициенты, равные $\sqrt{2}$, относящиеся к амплитуде и СКЗ каждой составляющей сигнала, сокращаются.

Пример. СКН сигнала $v(t) = 2\ \text{В} \cdot \cos \omega t + 0{,}2\ \text{В} \cdot \sin 3\omega t - 0{,}4\ \text{В} \cdot \sin 4\omega t$ равен:

$$\text{СКН}^2 = \frac{0{,}2^2 + 0{,}4^2}{2^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2} = 0{,}0476 \quad \Rightarrow \quad \text{СКН} = 0{,}218 \approx 22\ \%.$$

Примечание. Обычно проще вычислить k^2, после чего взять из полученного значения квадратный корень, чем вести расчеты напрямую.

- СКН чисто гармонического сигнала (синусоидального) равен нулю.

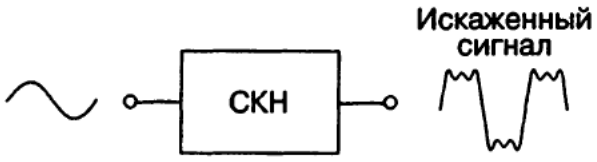


Рис. 6.57. Представление СКН системы передачи сигналов

СКН определяет величину искажений гармонического входного сигнала нелинейной системой (рис. 6.57) или передачу негармонического сигнала (табл. 6.8).

Примечание. Если в состав входного сигнала входят гармонические составляющие, то СКН выходного сигнала определить невозможно.

- СКН выходного сигнала зависит от размаха выходного напряжения. СКН системы определяется при строго заданных условиях измерений.

Таблица 6.8. Типичные значения СКН

СКН	Пример
33 %	Нелинейные искажения прямоугольных колебаний
10 %	Различаемый голосовой сигнал
1 %	Максимальный СКН HiFi-усилителя, когда слышны помехи
0,1 %	СКН качественного HiFi-усилителя, когда помехи не слышны

Чаще всего интерес представляет только амплитуда определенной гармоники. В этом случае используется **СКН *n*-го порядка**:

$$\text{СКН}_n = \frac{\text{СКЗ } n\text{-й гармоники}}{\text{СКЗ полного сигнала}}. \qquad (6.74)$$

Ослабление СКН и **ослабление СКН *n*-го порядка** (табл. 6.9) определяются как:

$$a_k = -20 \log (\text{СКН}), \qquad (6.75)$$

$$a_{kn} = -20 \log (\text{СКН}_n). \qquad (6.76)$$

Таблица 6.9. Ослабление СКН

СКН, %	Ослабление СКН, дБ
10	20
1	40
0,1	60

Желательно, чтобы ослабление СКН генераторов гармонических колебаний, спектральных анализаторов и измерителей уровня было как можно большим (т. е. искажения сигналов были очень маленькие).

6.5.2.3. Коэффициент интермодуляционных искажений

Интермодуляционные (перекрестные) искажения также относятся к явлениям, связанным с нелинейностью систем.

Пример: На вход нелинейной системы второго порядка, описываемой характеристическим уравнением: $v_2 = a \cdot v_1 + b \cdot v_1^2$, подается **двухтоновый**

сигнал $v_1(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$. При этом выходной сигнал определяется выражением:

$$
\begin{aligned}
v_2 = \quad & \frac{b}{2} && \text{постоянная составляющая} \\
& + a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) && \text{компоненты основных частот} \\
& + \frac{b}{2}(\cos 2\omega_1 t + \cos 2\omega_2 t) && \text{компоненты сдвоенных частот} \\
& + b \cdot \cos (\omega_1 + \omega_2) t && \text{компоненты суммы частот} \\
& + b \cdot \cos (\omega_1 - \omega_2) t && \text{компоненты разности частот}
\end{aligned}
$$

Можно сформулировать следующее утверждение: выходной сигнал нелинейной системы n-го порядка состоит из компонентов, частоты которых определяются выражением:

$$|p \cdot f_1 \pm q \cdot f_2|, \quad \text{где} \quad p, q = 0, 1, \ldots, n \quad \text{и} \quad p + q \le n. \tag{6.77}$$

Пример. На вход нелинейной системы третьего порядка подается двухтоновый сигнал с частотами 5 и 7 кГц. Выходной сигнал состоит из компонентов со следующими частотами:

p	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3	5 кГц
q	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0	7 кГц
$\lvert p \cdot f_1 + q \cdot f_2 \rvert$	0	7	14	21	5	12	19	10	17	21	(кГц)
$\lvert p \cdot f_1 - q \cdot f_2 \rvert$						2	9		3		(кГц)

На рис. 6.58 в логарифмическом масштабе показаны составляющие интермодуляционных искажений для рассматриваемого примера.

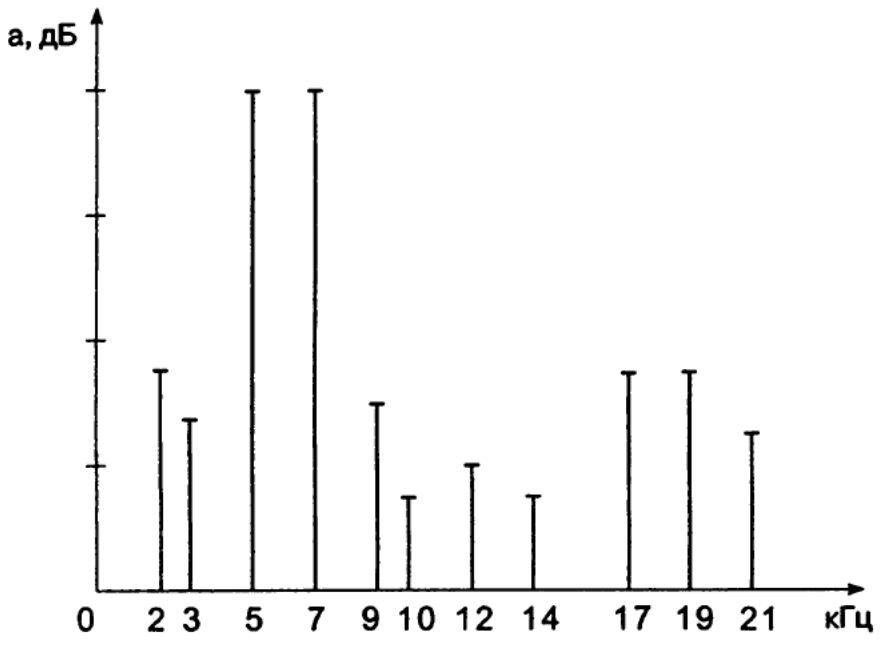


Рис. 6.58. Составляющие интермодуляционных искажений в нелинейной системе при подаче на ее вход двухмодального сигнала с частотами 5 и 7 кГц (логарифмический масштаб)

Хотя узкополосные системы из-за ограничений по полосе пропускания задерживают определенные гармоники, в них также возникают интермодуляционные искажения. Наиболее серьезные проблемы возникают при подавлении перекрестных составляющих третьего порядка с частотами $2f_1 - f_2$ и $2f_2 - f_1$ (в нашем примере это 3 и 9 кГц), поскольку они наиболее близки к частоте полезного сигнала. В системах с небольшими нелинейными искажениями для составляющих интермодуляционных помех второго и третьего порядка можно записать следующие соотношения:

$$v_2^{(2)} = \text{const} \cdot v_1^2, \quad v_2^{(3)} = \text{const} \cdot v_1^3. \tag{6.78}$$

Значения констант определяются коэффициентами характеристического уравнения.

- При увеличении входного сигнала амплитуда составляющих растет приблизительно по квадратичной зависимости. Для искажений третьего порядка эта зависимость является кубической.

  Логарифмируя обе части уравнения (6.78), получаем:

$$\underbrace{20 \lg v_2^{(2)}}_{L_2^{(2)}} = \text{const} + 2 \cdot \underbrace{20 \lg v_1}_{L_1},$$

где L_1 — уровень входного напряжения; $L_2^{(n)}$ — уровень выходного напряжения интермодуляционных искажений n-го порядка:

$$L_2^{(1)} = \text{const} + L_1, \quad L_2^{(2)} = \text{const} + 2 \cdot L_1, \quad L_2^{(3)} = \text{const} + 3 \cdot L_1.$$

В логарифмическом представлении уровни выходного напряжения всех частотных составляющих сигнала растут линейно с увеличением уровня входного напряжения, при этом меняется только наклон получаемых зависимостей.

Допустимые пределы интермодуляционных искажений равны логарифмам отношений полезного сигнала к интермодуляционным составляющим. На рис. 6.59 они обозначены как IM2 и IM3. С увеличением размаха выходного напряжения IM2 и IM3 уменьшаются. Мощность входного сигнала, при которой допустимый предел интермодуляционных искажений становится равным нулю, называется точкой пересечения (IP). При заданной мощности входного сигнала L_1 по известному значению точки пересечения можно определить предел интермодуляционных искажений, для чего используется соотношение:

$$\text{IM3}(L_1) = 2 \cdot (\text{IP3} - L_1). \tag{6.79}$$

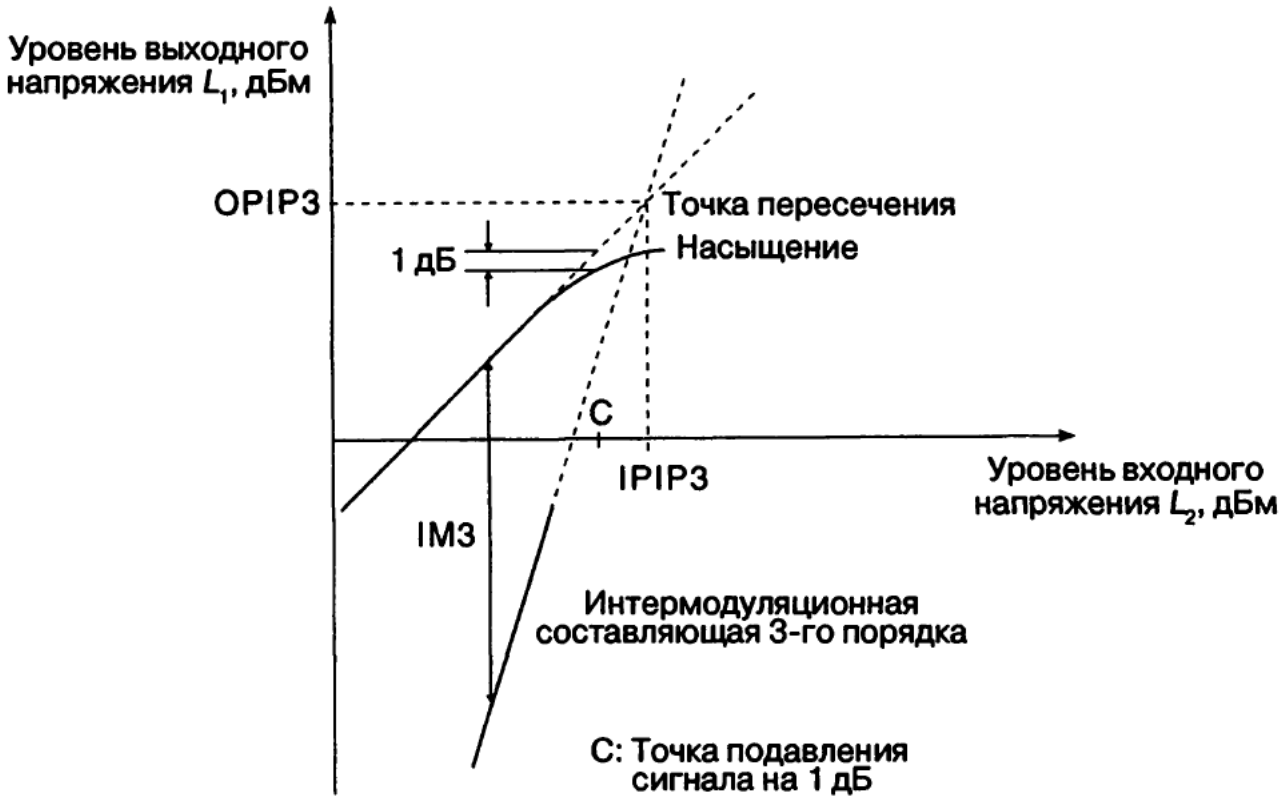


Рис. 6.59. Определение допустимого предела интермодуляционных искажений, точки пересечений и точки подавления сигнала на 1 дБ (точка С). Децибелметр (дБм) — логарифмическая единица измерения мощности сигнала по отношению к 1 милливатту (1 мВт = 0 дБм; 0,001 мВт = –30 дБм)

Пример. При заданном уровне входного напряжения –15 дБм допустимый предел интермодуляционных искажений IM СВЧ-усилителя равен 34 дБ. Насколько надо понизить уровень входного напряжения, чтобы допустимый предел интермодуляционных искажений составил 40 дБ?

Решение. В соответствии с уравнением (6.79) точка пересечения системы соответствует 2 дБм. Это значит, что требуемый допустимый предел интермодуляционных искажений будет достигнут при снижении уровня входного напряжения до –18 дБм, т. е. на 3 дБ.

Примечание. Точку пересечения можно определять по мощности как входного, так и выходного сигналов. Поэтому существуют две точки пересечения с координатными осями: *входная* (IPIP) и *выходная* (OPIP).

На практике в реальных системах никогда не удается достичь точки пересечения, поскольку выходной сигнал входит в насыщение еще до нее. Для нахождения ограничений на размах выходного напряжения вводится точка подавления сигнала на 1 дБ. Эта точка определяет мощность входного сигнала, при которой действительная мощность выходного сигнала на 1 дБ ниже теоретически ожидаемого значения.

6.6. Обозначения

a	Временной масштабирующий коэффициент
a_0, a_1, a_2	Коэффициенты полиномиального числителя
$a(\omega)$	Коэффициент затухания, дБ
$a_0/2$	Постоянная составляющая сигнала
a_k	Ослабление СКН, дБ
a_{kn}	Ослабление СКН n-го порядка, дБ
a_n	Коэффициенты Фурье
A_n	Коэффициенты Фурье амплитудного спектра
b_0, b_1	Коэффициенты полиномиального знаменателя
b_n	Коэффициенты Фурье
$b(\omega)$	ФЧХ
B	Полоса пропускания
c_n	Комплексные коэффициенты Фурье
C_n	Нормализованное значение емкости
E	Энергия сигнала
Δf	Полоса пропускания идеального ФНЧ
f_c	Критическая частота
$f(t)$	Временная функция
$F(f)$, $F(\omega)$	Преобразование Фурье
$\mathbf{F}\{\}$	Преобразование Фурье
$\mathbf{F}^{-1}\{\}$	Обратное преобразование Фурье
$g(t)$	Импульсная характеристика, весовая функция системы
$g_n(t)$	Нормализованная импульсная характеристика
$G(\omega)$	Передаточная функция
G_n	Нормализованная передаточная функция
$h(t)$	Переходная характеристика
IM	Предел нелинейных искажений, дБ
k_n	СКН n-го порядка
L_1	Уровень входного напряжения, дБм
$L_2^{(n)}$	Уровень выходного напряжения интермодуляционной составляющей n-го порядка
L_n	Нормализованное значение индуктивности
M, N	Верхние границы амплитуды сигнала
p_1, p_2	Нули полиномиального знаменателя, полюса

P	Мощность сигнала
rect (t)	Прямоугольный периодический сигнал, прямоугольный импульс
$R(f)$	Действительная часть преобразования Фурье
R_n	Нормализованное значение сопротивления
R_r	Эталонное сопротивление при проведении нормализации импеданса
$s(t)$	Ступенчатая функция
sign (t)	Знаковая функция
sinc	Sinc-функция
$\|S(f)\|$	Модуль преобразования Фурье
Si	Функция интегрального синуса
t_0	Время задержки
t_n	Нормализованное время
Δt_p	Ширина импульса для ФНЧ
t_s	Время установления сигнала
T	Период гармонического сигнала
T	Функция преобразования системы
ΔT	Ширина импульса
СКН	Суммарный коэффициент нелинейных искажений
$\hat{v}$	Амплитуда напряжения
v_1, v_{in}	Входное напряжение
v_2, v_{out}	Выходное напряжение
$X(f)$	Мнимая часть преобразования Фурье
$X(\omega)$	Преобразование Фурье входного сигнала
$Y(\omega)$	Преобразование Фурье выходного сигнала
$\delta(t)$	Импульсная функция, дельта-импульс, $с^{-1}$
$\varphi(f)$	Фазовая составляющая преобразования Фурье
φ_n	Коэффициенты Фурье фазового спектра
$\varphi(\omega)$	ФЧХ
$\Gamma(t)$	Импульс Гаусса
$\Lambda(t)$	Треугольный импульс
$\Delta\omega$	Полоса пропускания идеального ФНЧ
ω_0	Угловая центральная частота, $с^{-1}$
ω_c	Угловая критическая частота
ω_n	Нормализованная частота
ω_r	Эталонная частота при проведении частотной нормализации
τ	Переменная интегрирования
τ_g	Время групповой задержки
τ_p	Время фазовой задержки

Литература

Carlson G. E. *Signal and Linear Systems Analysis*. 2nd ed. — : John Wiley & Sons, 1997.
Chapra S. C., Canale R. P. *Numerical Methods for Engineers*. 3rd ed. — : McGraw-Hill, 1998.
Chen C. T. *Linear System Theory and Design*. 3rd ed. — : Oxford Univ. Press, 1998.
Dorf R. C. *The Electrical Engineering Handbook:* Sect. II. — : CRC press, 1993.
Dorf R. C., Bishop R. H. *Modern Control Systems*. 8th ed. — : Addison-Wesley, 1997.
Kennedy G., Davis B. *Electric Communication Systems*. — : McGraw-Hill, 1992.
Lindner D. K. *Introduction to Signals and Systems*. — : McGraw-Hill, 1999.
O'Neil P. V. *Advanced Engineering Mathematics*. 4th ed. — : Brooks: Cole Publ. Co, 1997.
Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Digital Signal Processing*. — : Prentice Hall, 1975.
Oppenheim A. V., Schafer R. W., Buck J. R. *Discrete-Time Signal Processing*. 2nd ed. — : Prentice Hall, 1999.
Oppenheim A. V., Willsky A. S. *Signals & Systems*. 2nd ed. — : Prentice Hall, 2000.

ГЛАВА 7

РАЗРАБОТКА АНАЛОГОВЫХ СХЕМ

Эта глава посвящена описанию электрических схем, используемых для обработки аналоговых сигналов. **Аналоговыми сигналами** считаются непрерывные сигналы, которые могут в заданных пределах принимать любые значения.

7.1. Методы анализа электрических схем

Все вычисления, проводимые при проектировании электрических схем, направлены на определение конфигурации схем и расчет значений их компонентов. Часто при разработке схем приходится принимать упрощающие предположения, поэтому практически все эквивалентные схемы являются только моделями реальных схем, лишь приближенно описывающими характеристики требуемых функций. Методы анализа схем позволяют определять параметры цепей с точностью 10—20 %. Поскольку характеристики однотипных полупроводниковых элементов могут различаться порой в два раза, а резисторов и конденсаторов — на 5—10 %, проектирование схем необходимо проводить с учетом больших допусков на отдельные компоненты. При разработке схем часто применяются методы из теории автоматического регулирования, например такие как построение систем с отрицательными обратными связями.

7.1.1. Линеаризация в рабочей точке

Как известно, полупроводниковые элементы обладают сильнонелинейными вольт-амперными характеристиками. Для того чтобы в зоне рабочей точки V_0, I_0 амплитуды тока и напряжения менялись незначительно, проводят линеаризацию функции $V=f(I)$ в точке V_0, I_0. На рис. 7.1 показаны небольшие амплитудные изменения ΔV, ΔI сигналов в зоне рабочей точки. Поскольку амплитуды таких сигналов не сильно отличаются от значений тока и напряжения в рабочей точке, они называются **малыми сигналами**. В случае незначительных изменений сигналов в зоне рабочей точки можно произвести замену реальной нелинейной функции на линейную. Чем меньше величины ΔV, ΔI по сравнению со значениями напряжения и тока в рабочей точке, тем точнее получаются результаты при применении метода линеаризации. Такой подход

очень полезен при анализе схем усилителей низких сигналов, используемых для усиления сигналов (например, звуковых), амплитуда которых мала по сравнению с параметрами рабочей точки полупроводниковой цепи.

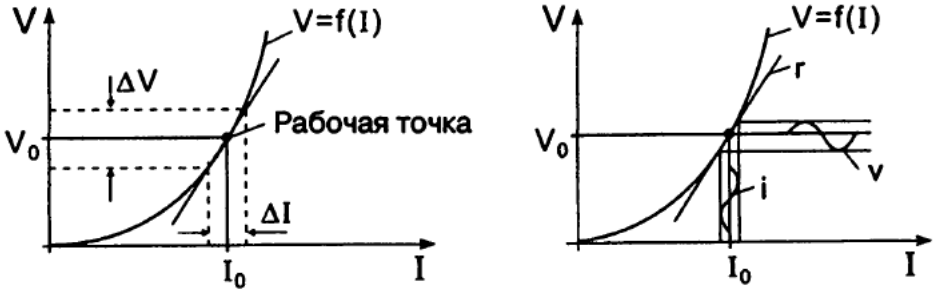


Рис. 7.1. Линеаризация в рабочей точке

Применение метода линеаризации

Для замены нелинейной функции $V = f(I)$ на линейную необходимо определить наклон исходной функции в рабочей точке. Для небольших изменений ΔI тока I в зоне рабочей точки справедливо:

$$\Delta V = \left.\frac{dV}{dI}\right|_{I_0} \cdot \Delta I. \qquad (7.1)$$

Тогда для малых сигналов можно записать соотношение:

$$v = \left.\frac{dV}{dI}\right|_{I_0} \cdot i \quad \text{или} \quad v = r \cdot i. \qquad (7.2)$$

Сопротивление r называется **динамическим** или **дифференциальным** или **сопротивлением малых сигналов**. Его величина определяется положением рабочей точки. Выражение $v = r \cdot i$ означает, что начало отсчёта для малых сигналов $v = 0$, $i = 0$, передвинуто в рабочую точку V_0, I_0.

Примечание. Принцип линеаризации в рабочей точке может быть также применен к другим нелинейным физическим соотношениям.

7.1.2. Эквивалентные схемы по переменному току

Несмотря на то что усилители малых сигналов имеют дело с переменными напряжениями, они обычно работают с источниками постоянного напряжения. Для упрощения расчетов в этой главе будут рассматриваться только величины, имеющие непосредственное отношение к самому сигналу.

В соответствии с **принципом суперпозиции** для определения влияния какого-либо напряжения на параметры линейной цепи все остальные источники тока или напряжения должны быть исключены (источники напряжения заменяются короткозамкнутыми цепями, а источники тока — разомкнутыми). Если полупроводниковая схема линеаризована в рабочей точке, то к ней можно применить принцип суперпозиции, поскольку все соотношения, описывающие поведение

параметров цепи, становятся линейными. Схемы, в которых все источники напряжений заменяются короткозамкнутыми цепями и в них остаются лишь источники малых сигналов, называются **эквивалентными схемами малых сигналов**.

Пример. Напряжение V_2 состоит из переменной и постоянной составляющих (рис. 7.2). Для определения переменной составляющей v_2 напряжения V_2 источник напряжения V_0 заменяется короткозамкнутым участком цепи. Отсюда следует, что если $v_2 = f(v_1)$, то:

$$v_2 = \frac{R_2 \| R_3}{R_1 + (R_2 \| R_3)} \cdot v_1 .$$

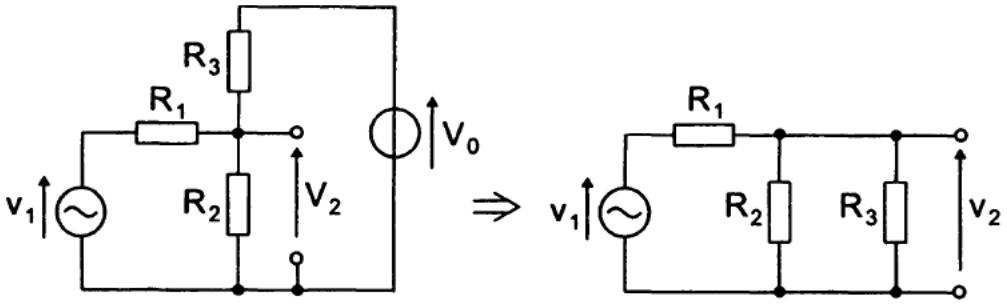


Рис. 7.2. Построение эквивалентной схемы по переменному току

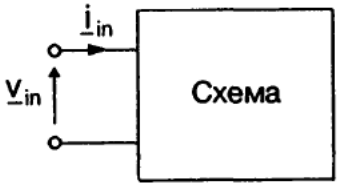
7.1.3. Входной и выходной импеданс

7.1.3.1. Определение входного импеданса

Входной импеданс $\underline{Z}_{in}$ малосигнальной цепи определяется импедансом между входными выводами, используемыми для подключения малых переменных сигналов (рис. 7.3).

В **пассивных цепях** результирующий импеданс $\underline{Z}_{in}$ получается при сложении всех импедансов цепи.

В **активных цепях с нерегулируемыми источниками** входной импеданс $\underline{Z}_{in}$ равен результирующему импедансу на входных выводах, если при этом все внутренние источники напряжений были закорочены, а все участки цепей с источниками тока были разомкнуты.



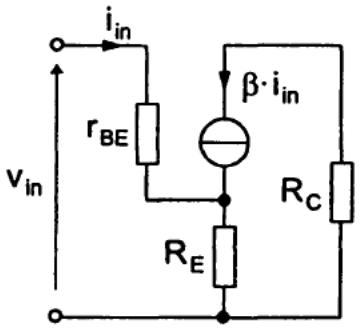
$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{v}_{in}}{\underline{i}_{in}}$$

Рис. 7.3. Определение входного импеданса $\underline{Z}_{in}$

В **активных цепях с регулируемыми источниками** входной импеданс $\underline{Z}_{in}$ определяется в момент, когда к входным выводам подключено напряжение $\underline{v}_{in}$. При этом значение тока $\underline{i}_{in}$ либо измеряется, либо вычисляется методом узловых потенциалов или методом контурных токов. Регулируемые источники — это источники, выходные параметры которых определяются значениями других электрических величин.

При расчете входного импеданса большинства полупроводниковых усилителей используется третий вариант.

Пример: расчет входного импеданса схемы с регулируемым источником тока (рис. 7.4).



$$v_{in} = i_{in} \cdot r_{BE} + (i_{in} + i_{in} \cdot \beta) \cdot R_E =$$

$$= i_{in} \cdot [r_{BE} + (1 + \beta) \cdot R_E],$$

$$Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = r_{BE} + (1 + \beta) \cdot R_E$$

Рис. 7.4. Вычисление входного импеданса

7.1.3.2. Определение выходного импеданса

Для определения **выходного импеданса** $\underline{Z}_{out}$ активная цепь рассматривается либо как источник напряжения, либо как источник тока (рис. 7.5). В обоих схемах $\underline{Z}_{out}$ является внутренним сопротивлением источника. Для вычисления $\underline{Z}_{out}$ используется соотношение:

$$\underline{Z}_{out} = \frac{\text{напряжение разомкнутой цепи}}{\text{ток в короткозамкнутой цепи}} = \frac{\underline{v}_{o/c}}{\underline{i}_{s/c}}. \qquad (7.3)$$

- напряжение разомкнутой цепи измеряется в режиме холостого хода, когда выводы схемы размыкаются, и ток становится равным нулю.
- ток в короткозамкнутой цепи измеряется в режиме короткого замыкания, когда выводы схемы замыкаются накоротко, и напряжение на них становится равным нулю.

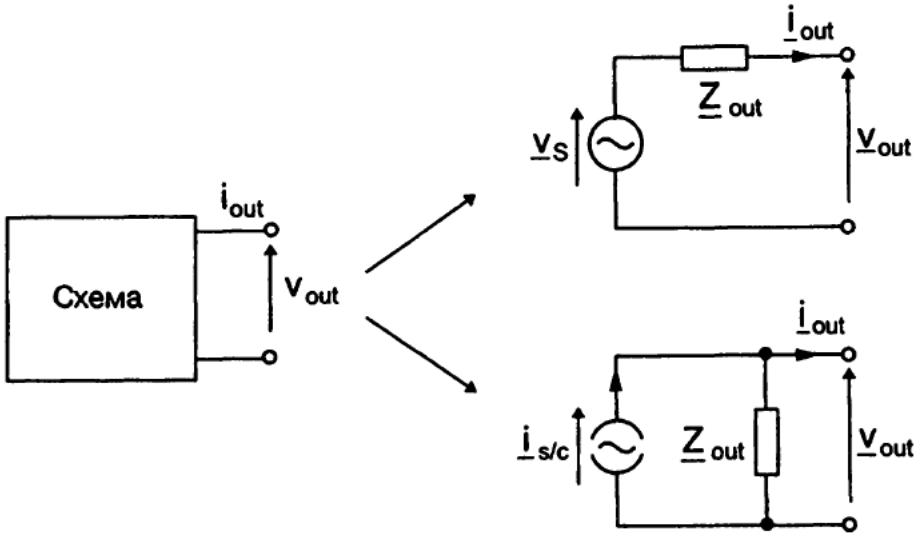


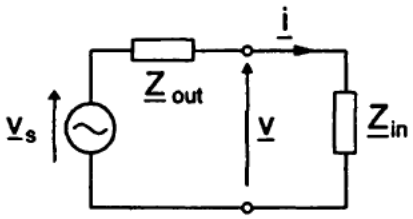
Рис. 7.5. Определение выходного импеданса $\underline{Z}_{out}$

На практике выходной импеданс схемы часто определяется методом подключения к схеме двух разных нагрузок, при этом:

$$\underline{Z}_{\text{out}} = \frac{\underline{\upsilon}_1 - \underline{\upsilon}_2}{\underline{i}_2 - \underline{i}_1}. \qquad (7.4)$$

7.1.3.3. Объединение двухполюсных схем

При объединении двух двухполюсников в одну цепь ток в ней определяется выходным импедансом первой схемы и входным импедансом второй схемы (рис. 7.6).



$$\underline{i} = \frac{\underline{\upsilon}_{\text{o/c}}}{\underline{Z}_{\text{out}} + \underline{Z}_{\text{in}}},$$

$$\underline{\upsilon} = \underline{\upsilon}_{\text{o/c}} \cdot \frac{\underline{Z}_{\text{in}}}{\underline{Z}_{\text{out}} + \underline{Z}_{\text{in}}}$$

Рис. 7.6. Объединение двух двухполюсных схем

При таком объединении могут возникнуть следующие ситуации.

1. $\underline{Z}_{\text{out}} = \underline{Z}_{\text{in}}^{*}$ (т. е. $\underline{Z}_{\text{out}}$ и $\underline{Z}_{\text{in}}$ являются комплексно-сопряжёнными числами). В этом случае схемы считаются **согласованными по мощности**, т. е. $\upsilon = \frac{\upsilon_s}{2}$.

2. $\underline{Z}_{\text{out}} << \underline{Z}_{\text{in}}$.

Импеданс источника напряжения намного меньше импеданса нагрузки. Тогда входное напряжение на импедансе нагрузки приблизительно равно напряжению разомкнутой цепи источника напряжения. В этом случае напряжение υ практически не зависит от импеданса нагрузки.

3. $\underline{Z}_{\text{out}} >> \underline{Z}_{\text{in}}$.

Импеданс источника напряжения намного больше импеданса нагрузки. В этом случае ток в цепи в основном определяется выходным импедансом и почти не зависит от импеданса нагрузки.

7.1.4. Четырехполюсники

Четырехполюсниками называются схемы с четырьмя доступными для внешних подключений выводами, два из которых являются входными (υ_1, i_1), а два — выходными (υ_2, i_2) (рис. 7.7).



Рис. 7.7. Четырехполюсник

Классификация

Четырехполюсники считаются **активными**, если в их состав входят источники тока или напряжения (в том числе регулируемые источники, управляемые, например, входным током). В противном случае они являются **пассивными**.

Четырехполюсники называются **симметричными**, если их входные и выходные выводы можно поменять местами. В противном случае они являются **несимметричными**.

Если напряжения и токи в четырехполюсниках связаны линейными соотношениями, они называются **линейными**; в противном случае — **нелинейными**.

Четырехполюсники считаются **реверсивными** или **двунаправленными**, если отношение входного и выходного напряжений в них не меняется при взаимной замене входных и выходных выводов; в противном случае они являются **однонаправленными**. Все линейные пассивные четырехполюсники относятся к классу двунаправленных устройств.

Четырехполюсники являются **нереактивными**, если они не меняют выходных характеристик схем, стоящих до них, и входных характеристик цепей, к ним подключенных. Примером такого подключения является объединение четырехполюсников в одну цепь, при котором каждая из схем обладает высоким входным импедансом и низким выходным.

7.1.4.1. Уравнения четырехполюсников

Для любого линейного четырехполюсника можно записать **систему уравнений,** однозначно связывающую его электрические характеристики (токи и напряжения). Коэффициенты при токах и напряжениях, входящие в систему уравнений, называются **параметрами четырехполюсника.** Такие системы уравнений четырехполюсников используются для описания работы аналоговых схем в режиме малых сигналов. Они особенно полезны при расчетах основных транзисторных схем. Самыми распространенными формами записи систем уравнений четырехполюсников являются *h*- и *y*-форма (*y*-форма часто называется *g*-формой).

7.1.4.2. Гибридные параметры (*h*-параметры)

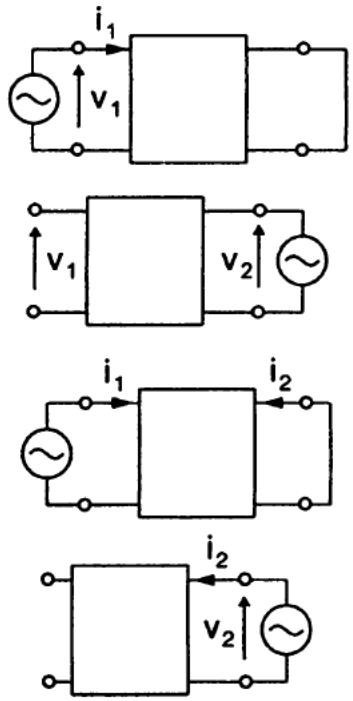


$$v_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot v_2$$

$$i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot v_2$$

Рис. 7.8. Уравнения четырехполюсников в *h*-форме

На рис. 7.8 показан четырехполюсник и его уравнения, записанные в *h*-форме. Коэффициенты, входящие в систему уравнений, называются *h*-параметрами, и для них справедливы следующие соотношения:



Входное сопротивление при закороченных выходных выводах:

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \quad \text{для} \quad v_2 = 0$$

Отношение входного напряжения к выходному при разомкнутых входных выводах:

$$h_{12} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{для} \quad i_1 = 0$$

Коэффициент усиления по току при закороченных выходных выводах:

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{для} \quad v_2 = 0$$

Выходная проводимость при разомкнутых входных выводах:

$$h_{22} = \frac{i_2}{v_2} \quad \text{для} \quad i_1 = 0$$

Для определения *h*-параметров используются данные опытов, полученные н режимах холостого хода и короткого замыкания. На рис. 7.9 показана эквивалентная схема (схема замещения) четырехполюсника в *h*-параметрах.

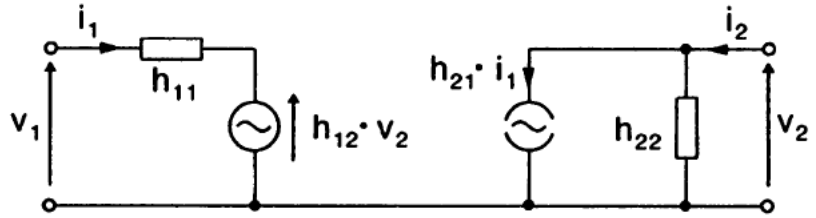


Рис. 7.9. Эквивалентная схема четырехполюсника в *h*-параметрах

7.1.4.3. Параметры проводимости (*y*- или *g*-параметры)

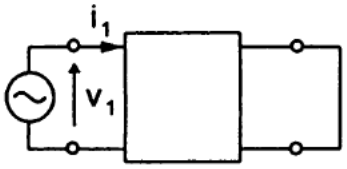


$$i_1 = y_{11} \cdot v_1 + y_{12} \cdot v_2,$$

$$i_2 = y_{21} \cdot v_1 + y_{22} \cdot v_2$$

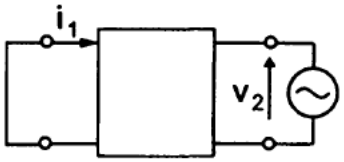
Рис. 7.10. Уравнения четырехполюсников в *y*-форме

На рис. 7.10 показан четырехполюсник и его уравнения, записанные в *y*-форме. Коэффициенты, входящие в систему уравнений, называются *y*-параметрами и для них справедливы следующие соотношения:



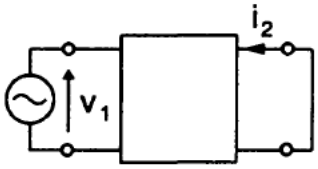
Входное сопротивление при закороченных выходных выводах:

$$y_{11} = \frac{i_1}{v_1} \text{ для } v_2 = 0$$



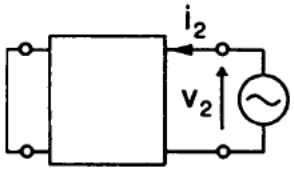
Отношение входного тока к выходному напряжению (активная проводимость) при короткозамкнутых входных выводах:

$$y_{12} = \frac{i_1}{v_2} \text{ для } v_1 = 0$$



Коэффициент усиления по току при закороченных выходных выводах:

$$y_{21} = \frac{i_2}{v_1} \text{ для } v_2 = 0$$



Выходная проводимость при разомкнутых входных выводах:

$$y_{22} = \frac{i_2}{v_2} \text{ для } v_1 = 0$$

Для определения *y*-параметров используются данные опытов, полученных в режимах короткого замыкания входных и выходных выводов. На рис. 7.11 показана эквивалентная схема (схема замещения) четырехполюсника в *y*-параметрах.

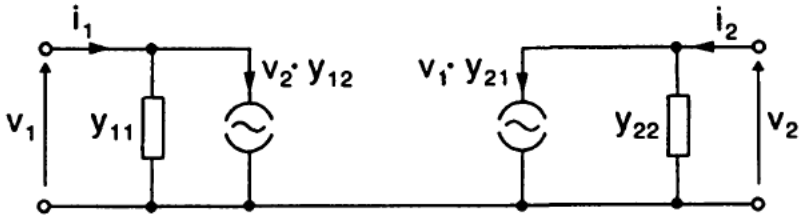
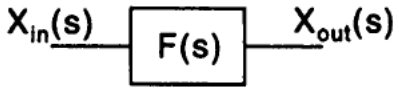


Рис. 7.11. Эквивалентная схема четырехполюсника в *y*-параметрах

7.1.5. Блок-схемы

Блок-схемы используются для отображения комплексных аналоговых цепей. При этом отдельные части цепей представляются в виде **блоков**, соотношения между выходными $X_{out}(s)$ и входными $X_{in}(s)$ сигналами которых однозначно описываются передаточными функциями $F(s)$ (рис. 7.12).



$$X_{out}(s) = F(s) \cdot X_{in}(s)$$

Рис. 7.12. Представление блока

Входные и выходные сигналы, так же как и передаточные функции, представляются в частотной области в виде функций Лапласа, т. е. функций комплексной частоты *s*. Передаточная функция вписывается внутрь блока. Выходные $X_{out}(s)$ и входные $X_{in}(s)$ сигналы могут измеряться в разных физических единицах. При формировании схем блоки соединяются друг с другом

соответствующими связями. Стрелки на соединяющих линиях указывают на направление сигналов. Сложение и вычитание сигналов обозначается на блок-схемах в виде **суммирующих узлов**.

Примечание. Очень просто проводить анализ нереактивных цепей, в которых все блоки не влияют на характеристики блоков, стоящих перед ними (т. е. нет нагрузочного эффекта). Для этого необходимо, чтобы каждый блок обладал высоким входным импедансом и низким выходным или был отделен от других блоков преобразователем импеданса.

7.1.5.1. Правила расчета блок-схем

Передаточную функцию сложных цепей можно определить при помощи правил, проиллюстрированных на рис. 7.13.

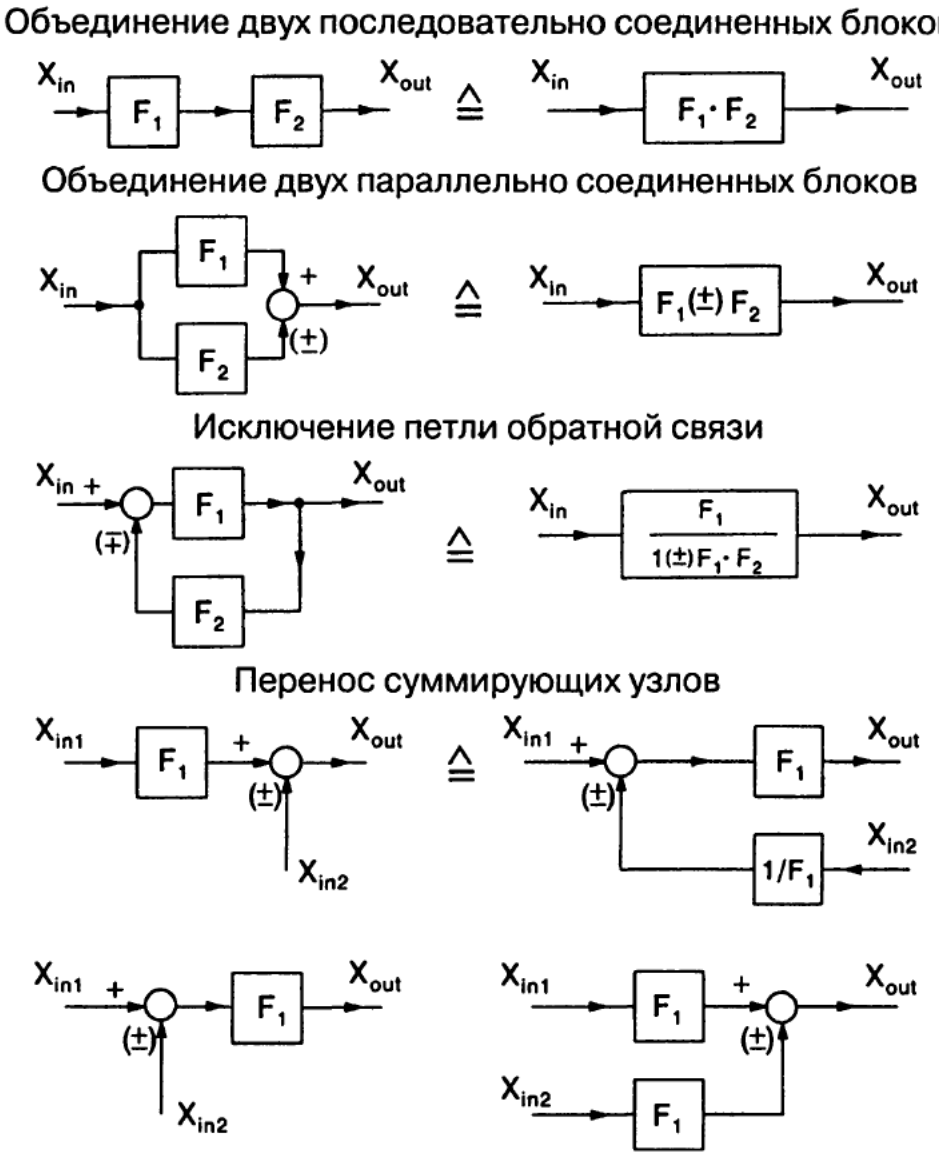


Рис. 7.13. Правила определения передаточной функции сложных цепей

Пример: определение передаточной функции по правилам расчета блок-схем (рис. 7.14).

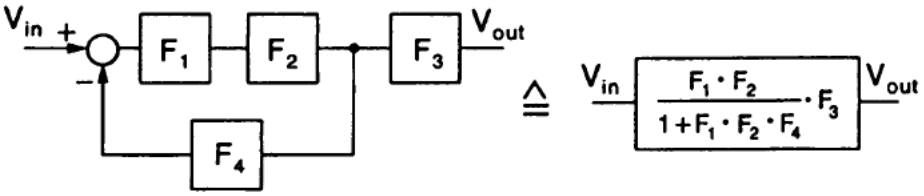


Рис. 7.14. Пример применения правил расчета блок-схем

7.1.6. Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ)

Передаточную функцию любых четырехполюсников, входные и выходные сигналы которых имеют одинаковую размерность, можно представить в виде диаграмм, на которых изображены **амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики** (АЧХ и ФЧХ). АЧХ представляет собой диаграмму с двумя логарифмическими осями, на которой построена зависимость коэффициента усиления схемы от угловой частоты. ФЧХ также является диаграммой с двумя логарифмическими осями, показывающей изменение разности фаз между входным и выходным сигналами с ростом угловой частоты. На рис. 7.15 показан ФНЧ со своими АЧХ и ФЧХ.

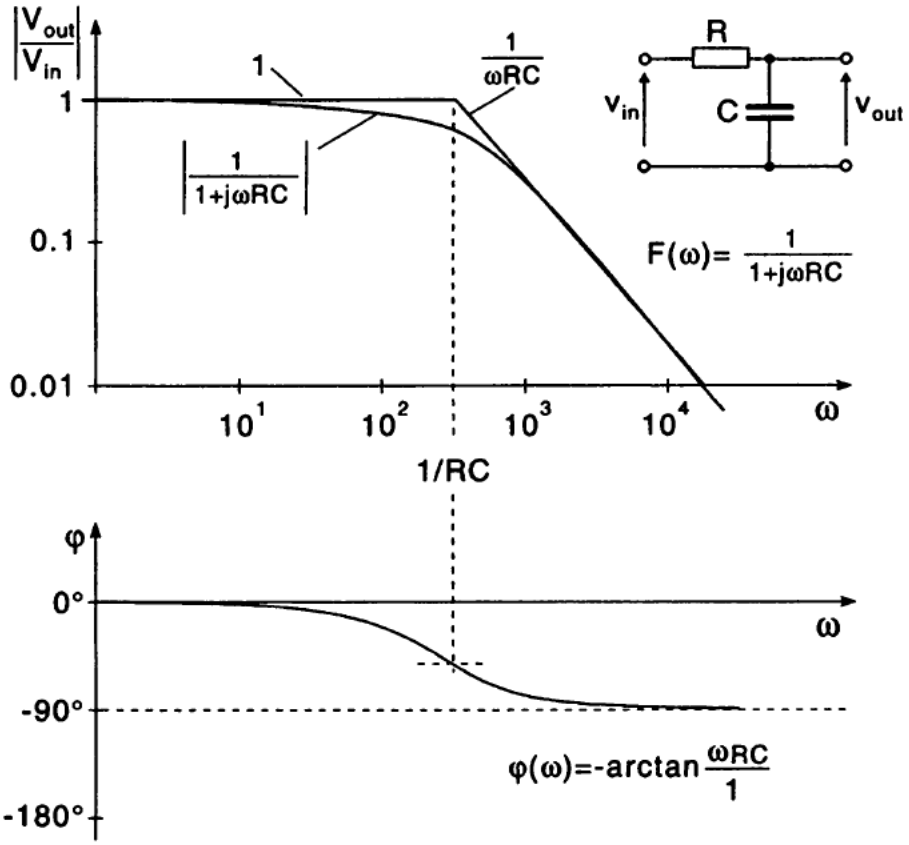


Рис. 7.15. ФНЧ со своими АЧХ и ФЧХ

Примечание. Очень полезно строить АЧХ и ФЧХ нереактивных цепей, состоящих их последовательно соединенных блоков (см. раздел 7.1.5). В этом случае передаточные функции отдельных блоков перемножаются, т. е. модули коэффициентов усиления умножаются друг на друга, а фазовые сдвиги складываются. На диаграммах АЧХ и ФЧХ это можно выполнить графически методом геометрического сложения.

7.2. Кремниевые и германиевые диоды

Диоды являются полупроводниковыми устройствами с одним *p-n*-переходом, который в обычном режиме (режиме выпрямления) позволяет течь току только в одном направлении. Однако диоды могут также использоваться и для других целей, таких как смешение сигналов, смещение напряжений и в качестве переменных конденсаторов.

7.2.1. Вольт-амперные характеристики Si- и Ge-диодов

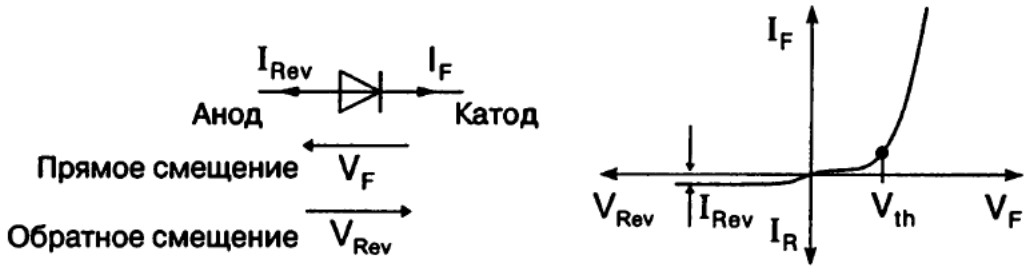


Рис. 7.16. Обозначение и характеристическая диаграмма Si- и Ge-диодов

Обратный ток I_{Rev} кремниевых диодов приблизительно равен 10 пА, а германиевых — 100 нА. **Пороговое напряжение** V_{th} — это напряжение прямого смещения диода, при котором прямой ток достигает величины, равной 10 % от максимального значения постоянного тока. Для кремниевых диодов пороговое напряжение приблизительно равно 0,7 В, а для германиевых — 0,3 В. Поскольку при прямом смещении диодов происходит резкий рост характеристической кривой, в оценочных расчетах предполагается, что падение напряжения на кремниевых диодах составляет 0,7 В, а на германиевых — 0,3 В (рис. 7.16).

Характеристическую кривую можно записать в виде аналитической функции:

$$I_F = I_{Rev} \cdot (e^{\frac{V_F}{V_T}} - 1), \qquad (7.5)$$

где I_{Rev} — обратный ток;

$V_T = \frac{kT}{e}$ — тепловое напряжение;

k — постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

T — абсолютная температура;

e — элементарный заряд.

При температуре $T = 300$ К (около 27 °С) тепловое напряжение V_T приблизительно равно 25 мВ.

На практике часто используются следующие приближения.

1. При **прямом смещении**, когда $e^{V_F/V_T} >> 1$, характеристическая функция диода упрощается до выражения:

$$I_F \approx I_{Rev} \cdot e^{\frac{V_F}{V_T}}. \qquad (7.6)$$

2. При **обратном смещении**, когда $e^{V_F/V_T} >> 1$, обратный ток диода практически не меняется во всем диапазоне обратных напряжений.

7.2.2. Температурная зависимость порогового напряжения

Пороговое напряжение *p-n*-перехода уменьшается с ростом температуры на 2...2,5 мВ/К.

Примечание. Поскольку диоды обладают отрицательным температурным коэффициентом, для увеличения максимального выпрямительного тока их не следует включать параллельно. Любая самая маленькая разность температур между диодами приводит к уменьшению напряжения прямого смещения на более теплом диоде. Следовательно, через более теплый диод начинает течь больший ток, чем через более холодный. Это приводит к еще большему нагреву более теплого диода, а также к увеличению тока через него. В конце концов, через этот диод начинает течь весь ток цепи.

7.2.3. Динамическое или дифференциальное сопротивление

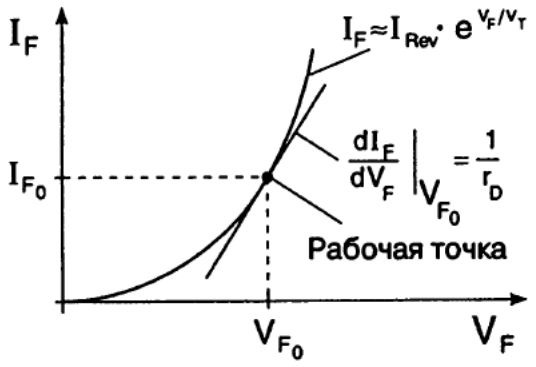


Рис. 7.17. Динамическое сопротивление r_D кремниевых и германиевых диодов

Динамическое сопротивление r_D **диода определяется наклоном его характеристической кривой в рабочей точке**:

$$r_D = \frac{dV_F}{dI_F}\Big|_{V_{F0}}, \tag{7.7}$$

$$\frac{1}{r_D} = \frac{dI_F}{dV_F}\Big|_{I_{F0}} = \frac{1}{V_T}\cdot \underbrace{I_{Rev}\cdot e^{\frac{V_F}{V_T}}}_{I_{F0}} = \frac{I_{F0}}{V_T}. \tag{7.8}$$

- Динамическое сопротивление r_D диода равно тепловому напряжению V_T, деленному на ток прямого смещения I_{F0} в рабочей точке. Следовательно,

динамическое сопротивление r_D обратно пропорционально току прямого смещения:

$$r_D = \frac{V_T}{I_{F_0}}. \tag{7.9}$$

7.3. Усилители малых сигналов на биполярных транзисторах

Малосигнальные усилители используются для усиления небольших переменных сигналов, амплитуда которых намного меньше значений токов и напряжений в их рабочих точках. При этом предполагается, что рабочие частоты являются довольно низкими. Это позволяет исключить из рассмотрения групповые и фазовые задержки распространения сигналов, возникающие из-за наличия в схемах паразитных элементов.

7.3.1. Характеристики транзисторов

7.3.1.1. Биполярные транзисторы: обозначения, токи и напряжения

Существует два типа биполярных транзисторов: *n-p-n* и *p-n-p* (рис. 7.18).

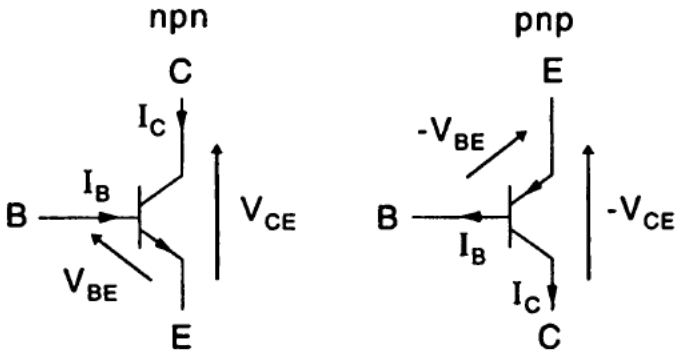


Рис. 7.18. Обозначения, токи и напряжения в биполярных транзисторах

Выводы биполярных транзисторов называются: **база** (B), **коллектор** (C) и **эмиттер** (E). Переходы база–эмиттер и база–коллектор являются *p-n*-переходами. При работе транзистора в нормальном режиме переход база–эмиттер смещен в прямом направлении, а переход база–коллектор — в обратном. Стрелки на рисунке указывают направления прямого смещения *p-n*-переходов. Положительный базовый ток втекает в базу *n-p-n*-транзисторов или вытекает из базы *p-n-p*-транзисторов. Для протекания базового тока через переход база–эмиттер необходимо, чтобы падение напряжения на нем составило приблизительно 0,7 В. Напряжение, поданное на выводы коллектор–эмиттер, приводит к обратному смещению перехода коллектор–база. При этом коллекторный ток в нормальном режиме практически

всегда пропорционален базовому току. Отсюда вытекает основное свойство транзистора: небольшой ток базы управляет большим током коллектора.

Примечание. Определить тип неизвестного транзистора можно при помощи омметра, проверяя полярность переходов база–эмиттер и база–коллектор.

Примечание. Для определения исправности транзисторов:

а) проверяют переходы база–эмиттер и база–коллектор на пробой;

б) при разомкнутой цепи базы измеряют сопротивление (проводимость) участка цепи коллектор–эмиттер. (Если транзистор исправен, то это сопротивление должно быть большим, а проводимость практически равна нулю.)

7.3.1.2. Выходные характеристики

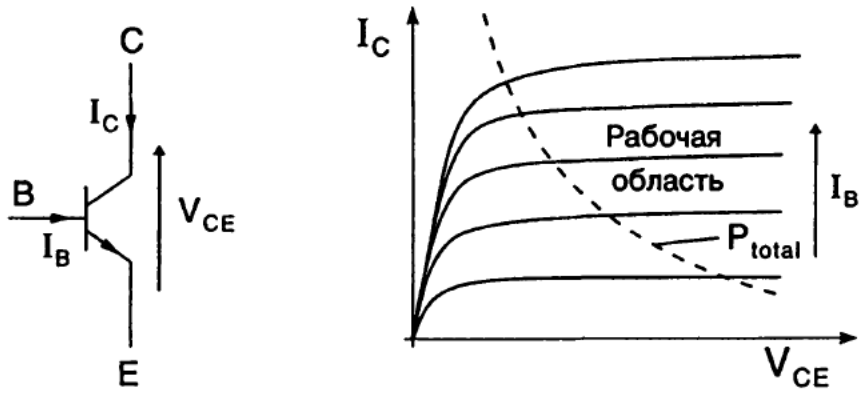


Рис. 7.19. Выходные характеристики транзистора: $I_C = f(V_{CE})$, I_B-параметр

На рис. 7.19 показаны **выходные характеристики** транзистора. Как видно из рисунка, они представляют собой зависимости коллекторного тока от напряжения коллектор–эмиттер. Базовый ток здесь играет роль параметра. Из этих характеристик можно получить всю необходимую информацию, требуемую при разработке электрических схем. В активной области работы транзистора выходные характеристики являются практически горизонтальными, т. е. в пределах этой зоны ток коллектора практически пропорционален току базы. Поэтому именно в этой области должен работать транзистор, используемый как усилитель малых сигналов. Часто к выходным характеристикам также относят гиперболическую функцию максимально допустимой рассеиваемой мощности P_{total}, показывающую границу значений токов и напряжений, ниже которой обеспечивается приемлемый тепловой режим работы транзисторов.

7.3.1.3 Передаточная характеристика

Передаточная характеристика транзистора — это зависимость тока коллектора от напряжения база–эмиттер (рис. 7.20). Хотя коллекторный ток пропорционален базовому току, из-за диодной характеристики перехода база–эмиттер зависимость $I_C = f(V_{BE})$ является экспоненциальной функцией. На диаграмме с логарифмической осью ординат она отображается в виде прямой линии. Часто на одной диаграмме одновременно строятся несколько передаточных характеристик, соответствующих разным температурам.

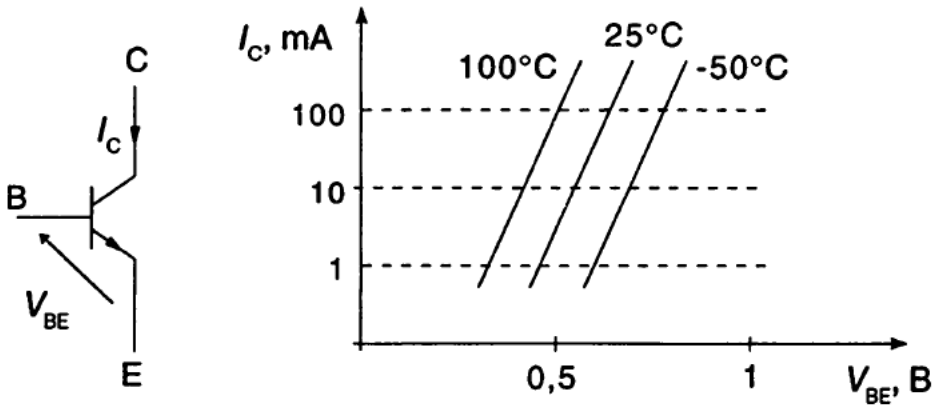


Рис. 7.20. Передаточная характеристика транзистора $I_C = f(V_{BE})$

7.3.1.4. Входная характеристика

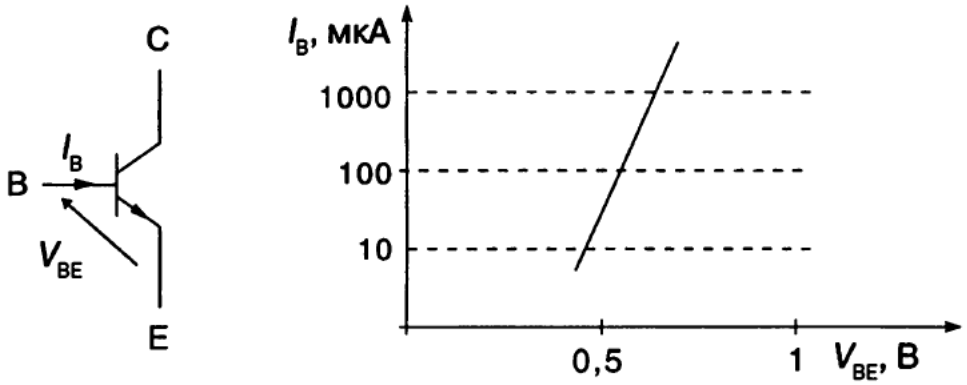


Рис. 7.21. Входная характеристика транзистора $I_B = f(V_{BE})$

Входная характеристика — это диодная характеристика перехода база–эмиттер (рис. 7.21).

7.3.1.5. Статический коэффициент усиления по току β_{DC}

Статический коэффициент усиления по току β_{DC} (или статический коэффициент передачи тока базы или коэффициент усиления по постоянному току) — это отношение коллекторного тока к базовому току, определяемое в активной зоне. В справочных таблицах он обычно указывается для заданных значений постоянного напряжения коллектор–эмиттер и тока коллектора:

$$\beta_{DC} = \frac{I_C}{I_B}. \qquad (7.10)$$

Для транзисторов, работающих в режиме малых сигналов, величина этого коэффициента лежит в диапазоне 100...1000, а для мощных транзисторов — 10...200.

7.3.1.6. Дифференциальный коэффициент усиления по току β

Дифференциальный коэффициент усиления по току β — это коэффициент усиления малых сигналов в зоне рабочей точки. Он равен производной коллекторного тока по базовому току. Небольшие изменения базового тока

ΔI_B приводят к изменениям коллекторного тока $\beta \cdot \Delta I_B$. Таким образом, дифференциальный коэффициент усиления по току показывает, во сколько раз усиливаются малые сигналы. Этот коэффициент также называется **коэффициентом усиления по переменному току** или **коэффициентом усиления по току в режиме малых сигналов**.

Необходимо понимать различия между коэффициентами β и β_0. В то время как β — это общее выражение для дифференциального коэффициента усиления по току, коэффициент β_0 соответствует коэффициенту усиления по току в режиме короткого замыкания (рис. 7.22). Он определяет дифференциальный коэффициент усиления по току на низких частотах (где не требуется учитывать фазовые сдвиги и задержки распространения сигналов, вызванные паразитными элементами цепи) при постоянном напряжении коллектор-эмиттер (V_{CE} = const). Поддержание напряжения коллектор-эмиттер постоянным возможно только при устранении переменной составляющей, что реализуется при замыкании выходных выводов.

$$\beta_0 = \left.\frac{dI_C}{dI_B}\right|_{V_{CE}=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}\right|_{V_{CE}=\text{const}}. \qquad (7.11)$$

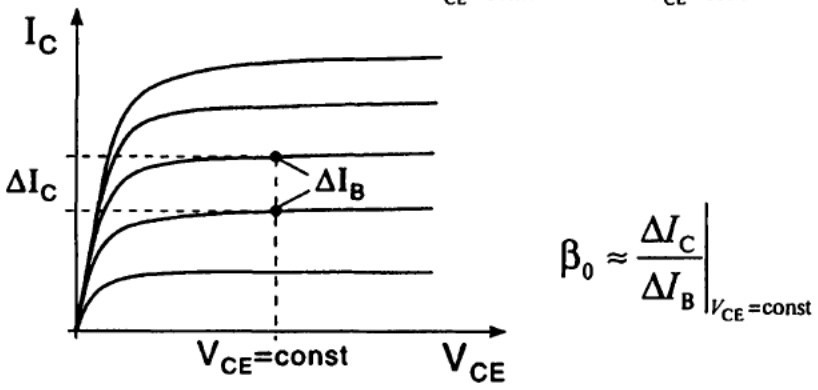


Рис. 7.22. Определение коэффициента усиления по току при закороченных выводах по выходным характеристикам транзистора

Для транзисторов, работающих в режиме малых сигналов, величина этого коэффициента лежит в диапазоне 100...1000, а для мощных транзисторов — 10...200.

Примечание. Если в спецификации на транзистор нет данных о значении коэффициента β_0, то его рекомендуется брать равным 100.

7.3.1.7. Крутизна транзистора g_m

Крутизна (передаточная проводимость) транзистора g_m определяется изменением коллекторного тока I_C в ответ на изменение напряжения база-эмиттер V_{BE}. Эта характеристика соответствует наклону передаточной характеристики:

$$g_m = \left.\frac{dI_C}{dV_{BE}}\right|_{V_{CE}=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta I_C}{\Delta V_{BE}}\right|_{V_{CE}=\text{const}}. \qquad (7.12)$$

Примечание. Поскольку биполярные транзисторы являются *токоуправляемыми* устройствами, при проектировании схем на их основе стараются избегать использования этой характеристики. Крутизна в основном используется при разработке схем на полевых транзисторах, которые относятся к классу компонентов, *управляемых напряжением*. Однако если биполярные транзисторы *обладают очень высоким значением крутизны*, то это непременно указывается в их спецификации, поскольку для таких транзисторов характерно резкое увеличение коллекторного тока в ответ даже на небольшие изменения напряжения база–эмиттер.

7.3.1.8. Тепловой дрейф напряжения

Тепловой дрейф напряжения — это изменение напряжения база–эмиттер ΔV_{BE} в ответ на изменение температуры на этом переходе. С ростом температуры напряжение база–эмиттер уменьшается со скоростью $|\Delta V_{BE}| = 2...2{,}5$ мВ/К.

7.3.1.9. Дифференциальное входное сопротивление r_{BE}

Дифференциальное входное сопротивление в режиме малых сигналов — **это наклон входной характеристической кривой в рабочей точке**. Фактически, это сопротивление **определяется дифференциальным сопротивлением перехода база–эмиттер** (см. раздел 7.2.3):

$$r_{BE} = \frac{dV_{BE}}{dI_B} \approx \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta I_B} \approx \frac{V_T}{I_B}. \qquad (7.13)$$

где V_T — тепловое напряжение (при $T = 300$ К оно составляет около 25 мВ).

7.3.1.10. Дифференциальное выходное сопротивление r_{CE}

Дифференциальное выходное сопротивление в режиме малых сигналов определяется изменением коллекторного тока в ответ на изменение напряжения коллектор–эмиттер при постоянном базовом токе (рис. 7.23). Эта характеристика может быть вычислена по выходной характеристической кривой:

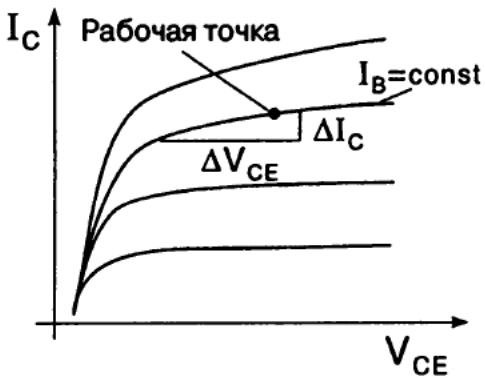


Рис. 7.23. Определение дифференциального выходного сопротивления в режиме малых сигналов по выходной характеристической кривой

$$r_{CE} = \left.\frac{dV_{CE}}{dI_C}\right|_{I_B=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta V_{CE}}{\Delta I_C}\right|_{I_B=\text{const}}. \qquad (7.14)$$

В случае горизонтальной выходной характеристики $r_{CE} \to \infty$.

7.3.1.11. Коэффициент передачи обратного напряжения A_r

Коэффициент передачи обратного напряжения определяется изменением входного напряжения в ответ на изменение выходного напряжения при постоянном токе базы:

$$A_r = \frac{dV_{BE}}{dV_{CE}}\Big|_{I_B=\text{const}} \approx \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta V_{CE}}\Big|_{I_B=\text{const}}. \quad (7.15)$$

При работе на низких частотах величиной этого коэффициента можно пренебречь. На более высоких частотах с ним приходится считаться. Для этого либо берется его значение из спецификации на транзистор, либо между коллектором и эмиттером ставится дополнительный конденсатор (емкость Миллера). Однако в эквивалентной схеме транзистора по переменному току этот конденсатор не учитывается.

7.3.1.12. Граничная и предельная частоты коэффициента передачи тока

Граничная частота коэффициента передачи тока (частота единичного коэффициента усиления) — это частота, на которой модуль коэффициента усиления по току β равен единице.

Предельная частота коэффициента передачи тока (критическая частота) f_β — это частота, на которой модуль коэффициента усиления по току β становится на 3 дБ меньше значения β_0. Эта частота часто называется частотой среза или частотой излома АЧХ. Для транзисторов, чей коэффициент усиления по току в режиме короткого замыкания намного больше единицы ($\beta_0 >> 1$), оценить критическую частоту можно при помощи выражения:

$$f_\beta = \frac{f_T}{\beta_0}. \quad (7.16)$$

Примечание. В схемах без отрицательных обратных связей рабочий частотный диапазон лежит в пределах $0..f_\beta$. Отрицательная обратная связь позволяет значительно расширить частотный диапазон (коэффициент расширения определяется глубиной обратной связи).

7.3.2. Эквивалентные схемы

7.3.2.1. Статическая эквивалентная схема

При проектировании электронных схем полезно пользоваться **статической эквивалентной схемой** биполярных транзисторов.

Биполярный транзистор можно представить в виде двух встречно включенных диодов. В нормальном режиме работы диод база–коллектор смещен в обратном направлении, а диод база–эмиттер — в прямом. Диод база–коллектор можно рассматривать как источник тока, пропорционального току базы. Из вольт-амперной характеристики диодов следует, что падение напряжения на переходе база–эмиттер составляет приблизительно 0,7 В.

Разница между *n-p-n-* и *p-n-p*-транзисторами заключается в том, что соответствующие токи и напряжения в них имеют противоположные направления (рис. 7.24).

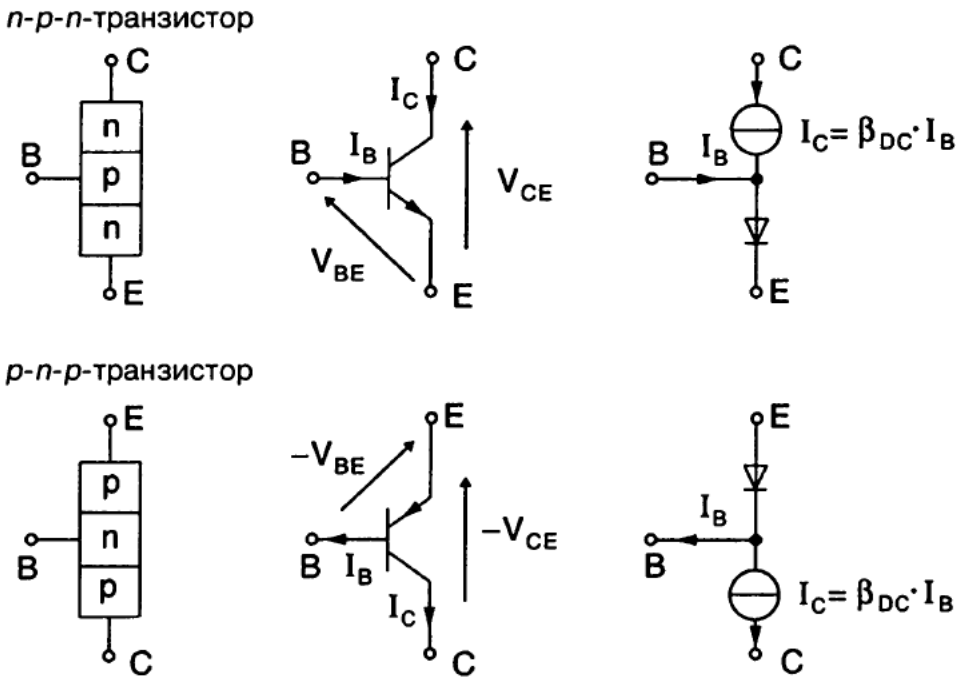


Рис. 7.24. Топология биполярных транзисторов, их обозначения и эквивалентные схемы

7.3.2.2. Эквивалентные схемы по переменному току

На рис. 7.25 показана **эквивалентная схема** биполярного транзистора **по переменному току**, в которой рассматриваются только электрические величины, слабо меняющиеся в районе рабочей точки. При этом рабочая точка должна лежать в пределах активной зоны, определяемой выходными характеристиками транзистора.

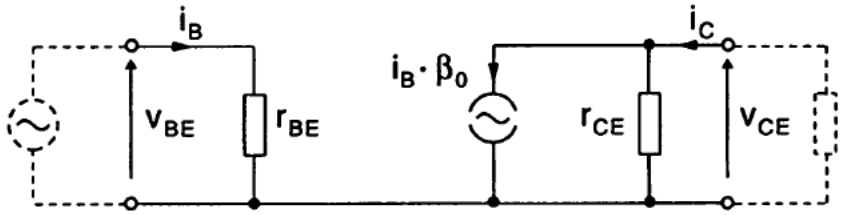


Рис. 7.25. Эквивалентная схема биполярного транзистора по переменному току

Ток базы управляет током коллектора. Сопротивление r_{BE} равно динамическому сопротивлению база-эмиттер. Базовый ток i_B определяет внутренний ток коллектора $i_B \cdot \beta_0$, небольшая часть которого течет через резистор r_{CE} и, следовательно, не доходит до коллекторного вывода транзистора. Поскольку сопротивление r_{CE} имеет большую величину (из вида выходных характеристических кривых видно, что параметр $r_{CE} \to \infty$), при оценочных расчетах его можно не учитывать.

7.3.2.3. Эквивалентная схема Джиаколетто

На рис. 7.26 показана эквивалентная схема биполярного транзистора, известная под названием **эквивалентной схемы Джиаколетто**. Она описывает поведение переменных характеристик транзистора приблизительно до частоты, равной половине граничной частоты.

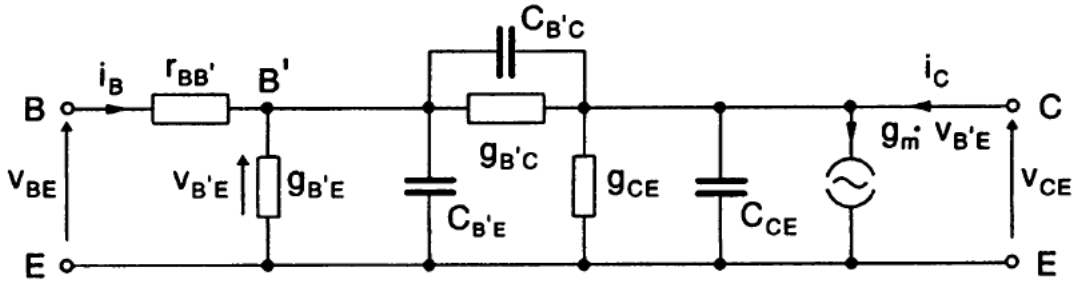


Рис. 7.26. Эквивалентная схема Джиаколетто

Принцип действия этой схемы

Внутренний коллекторный ток $v_{B'E} \cdot g_{mB'E}$ пропорционален внутреннему базовому напряжению $v_{B'E}$. Выходное напряжение v_{CE} через конденсатор обратной связи $C_{B'C}$ возвращается назад в противофазе к внутреннему базовому напряжению $v_{B'E}$. С ростом частоты импеданс конденсатора обратной связи $1/\omega C_{B'C}$ уменьшается, что увеличивает влияние обратной связи. В соответствии с этим, при увеличении частоты растет коэффициент усиления транзистора по току: i_C/i_B.

7.3.3. Пара Дарлингтона (составной транзистор)

На рис. 7.27 показан составной транзистор с объединёнными коллекторами, часто называемый **парой Дарлингтона**. На низких частотах он работает как обычный биполярный транзистор, коэффициент передачи по току которого определяется произведением коэффициентов усиления по току двух отдельных транзисторов.

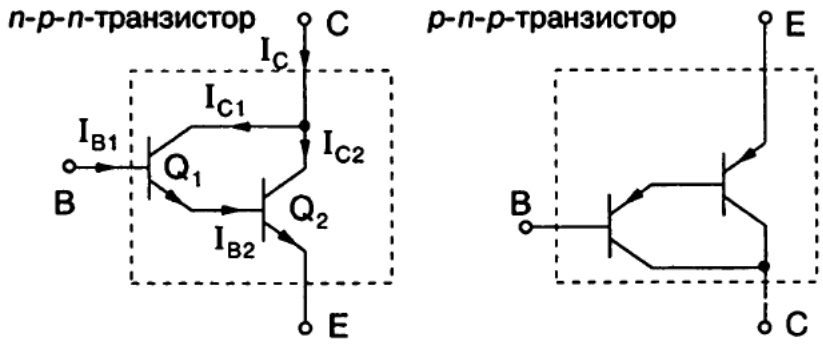


Рис. 7.27. Пара Дарлингтона

Статический коэффициент усиления по току β_{DC} составного транзистора определяется из следующего выражения:

$$I_C = I_{C1} + I_{C2} = I_{B1}\beta_{DC1} + I_{B2}\beta_{DC2} = I_{B1}\beta_{DC1} + I_{B1}(1 + \beta_{DC1})\beta_{DC2} =$$

$$= I_{B1}(\beta_{DC1} + \beta_{DC2} + \beta_{DC1}\beta_{DC2}).$$

При $\beta_{DC1} >> 1$ и $\beta_{DC2} >> 1$ справедливо соотношение:

$$\beta_{DC} \approx \beta_{DC1} \cdot \beta_{DC2}. \qquad (7.17)$$

Динамический коэффициент усиления по току β_0 пары Дарлингтона определяется из следующего выражения:

$$i_C = i_{B1\beta01} + i_{B2\beta02} = i_{B1\beta01} + i_{B1}(1 + \beta_{01})\beta_{02} = i_{B1}(\beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{01\beta02}).$$

Для получения последнего соотношения была использована эквивалентная схема по переменному току составного транзистора (рис. 7.28), из которой исключили сопротивления коллектор–эмиттер.

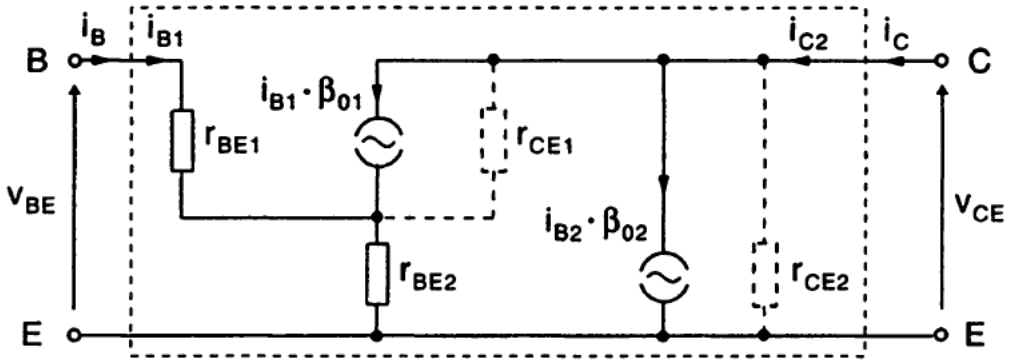


Рис. 7.28. Эквивалентная схема по переменному току составного транзистора

При $\beta_{01} >> 1$ и $\beta_{02} >> 1$ справедливо соотношение:

$$\beta_0 \approx \beta_{01} \cdot \beta_{02}. \qquad (7.18)$$

Дифференциальное входное сопротивление составного транзистора равно:

$$r_{BE} = \frac{v_{BE}}{i_B} = r_{BE1} + \beta_{01} \cdot r_{BE2} \approx r_{BE1} + \frac{\beta_{01}}{\beta_{DC1}} \cdot r_{BE1} \quad \text{при} \quad r_{BE2} = \frac{r_{BE1}}{\beta_{DC1}}.$$

Используя аппроксимацию: $\beta_{01} \approx \beta_{DC1}$, получаем:

$$r_{BE} \approx 2 \cdot r_{BE1} \approx 2\frac{V_T}{I_{B1}}. \qquad (7.19)$$

Входной импеданс пары Дарлингтона почти в два раза больше теплового напряжения V_T, деленного на входной ток I_B в рабочей точке.

Составной транзистор применяется в схемах, работающих с большими токами, где требуется управлять мощной нагрузкой при помощи небольших управляющих сигналов. Высокий коэффициент усиления по току пары Дарлингтона обеспечивает высокий входной импеданс усилителей на их основе. В силовой электронике для переключения больших токов используются соединения из трех или даже четырех составных транзисторов.

7.3.3.1. Комплементарный транзистор Дарлингтона (схема Шиклаи)

Для транзистора, показанного на рис. 7.29, справедливы следующие соотношения:

$$\beta_{DC} \approx \beta_{DC1} \cdot \beta_{DC2}, \quad \beta_0 \approx \beta_{01} \cdot \beta_{02},$$
$$r_{BE} \approx r_{BE1} \approx \frac{V_T}{I_B}. \qquad (7.20)$$

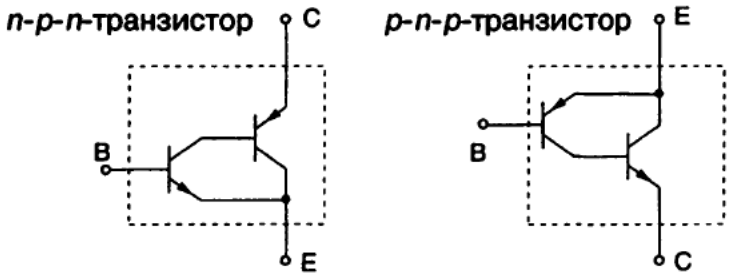


Рис. 7.29. Комплементарный транзистор Дарлингтона

7.3.4. Основные схемы на биполярных транзисторах

Существуют три основные схемы включения биполярных транзисторов, работающих в режиме усиления малых сигналов: **с общей базой, общим эмиттером и общим коллектором** (рис. 7.30). Они различаются способами подключения выводов входных и выходных напряжений, величина которых определяется относительно общей линии. Эта общая линия и дает название всей схеме. Все рассматриваемые схемы имеют разные коэффициенты усиления и разные импедансы.

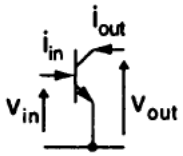
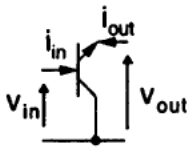
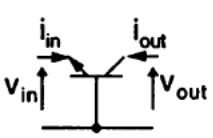
	Схема с общим эмиттером	Схема с общим коллектором	Схема с общей базой
Схема			
Коэффициент усиления по напряжению A_v	> 1	≈ 1	> 1
Коэффициент усиления по току A_i	> 1	> 1	≈ 1
Входной импеданс r_{in}	средний	очень высокий	очень низкий
Выходной импеданс r_{out}	высокий	очень низкий	высокий

Рис. 7.30. Основные схемы на биполярных транзисторах

7.3.5. Схема с общим эмиттером

Схема с общим эмиттером обладает высокими коэффициентами по мощности, току и напряжению. Входное и выходное напряжения имеют противоположные фазы.

Положение рабочей точки, лежащей в активной области выходных характеристик транзистора, включенного по схеме, показанной на рис. 7.31, определяется резисторами R_1, R_2, R_C и R_E. Переменная составляющая сигнала попадает в схему через конденсатор C_1, а выходит из нее через конденсатор C_2. Значения емкостей этих конденсаторов выбираются, исходя из требований на рабочий частотный диапазон.

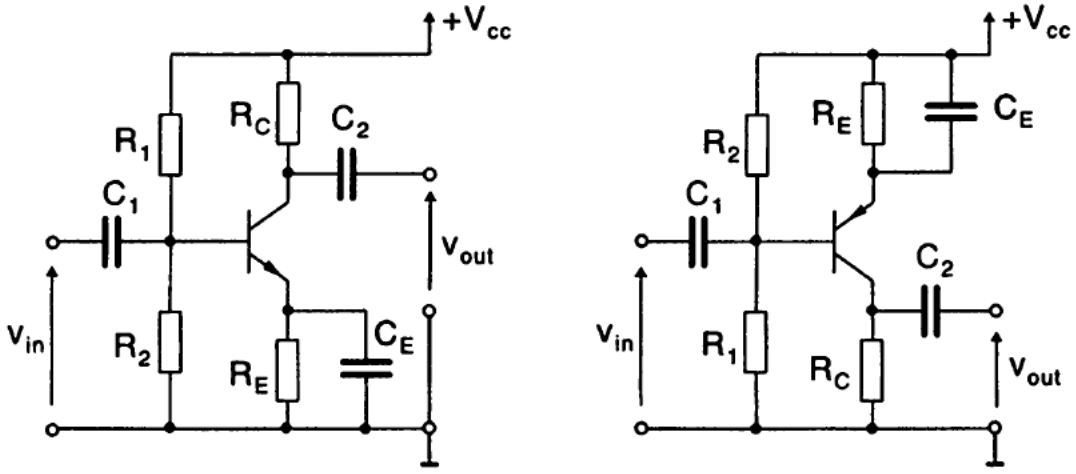


Рис. 7.31. Схемы с общим эмиттером для двух типов транзисторов: *n-p-n* и *p-n-p*

В соответствующем частотном диапазоне конденсатор C_E шунтирует сопротивление эмиттера, поэтому потенциал на эмиттере практически равен нулю. Если в схеме нет этого конденсатора, то ее нельзя, строго говоря, считать схемой с общим эмиттером, но работает она приблизительно так же.

Схема с общим эмиттером ограничена диапазонами низких и средних частот, поскольку при работе на высоких частотах через емкостную паразитную связь между коллектором и эмиттером (часто называемую **емкостью Миллера**) появляется отрицательная обратная связь между противофазными входным и выходным напряжениями, вызывающая значительное ослабление выходного сигнала.

7.3.5.1. Уравнения четырехполюсника для схемы с общим эмиттером

Для описания схемы с общим эмиттером обычно используется *h*-форма записи уравнений четырехполюсника (рис. 7.32):

$$v_{BE} = h_{11E} \cdot i_B + h_{12E} \cdot v_{CE}, \tag{7.21}$$

$$i_C = h_{21E} \cdot i_B + h_{22E} \cdot v_{CE}. \tag{7.22}$$

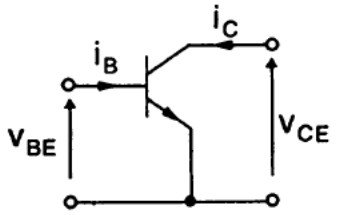


Рис. 7.32. *h*-параметры схемы с общим эмиттером

Входное сопротивление в режиме короткого замыкания:

$$h_{11E} = r_{BE} = \left.\frac{dV_{BE}}{dI_B}\right|_{V_{CE}=\text{const}} = \left.\frac{v_{BE}}{i_B}\right|_{v_{CE}=0} \approx \frac{V_T}{I_B}. \qquad (7.23)$$

Параметр h_{11E} называется входным сопротивлением в режиме короткого замыкания. Он равен переменному входному напряжению v_{BE}, деленному на переменный входной ток i_B (см. также раздел 7.2.3). При измерении или вычислении входного импеданса на низких частотах условие $V_{CE} = \text{const}$ не имеет практически никакого смысла, поскольку на таких частотах выходное напряжение практически никак не влияет на входное напряжение (см. также h_{12E}).

Коэффициент передачи обратного напряжения:

$$h_{12E} = \left.\frac{dV_{CE}}{dV_{BE}}\right|_{I_B=\text{const}} \approx 0. \qquad (7.24)$$

Этот параметр называется коэффициентом передачи обратного напряжения в режиме холостого хода, т. е. при разомкнутой входной цепи (в действительности в этом режиме исчезает только переменная составляющая входного сигнала, а постоянная составляющая остается на месте). На низких частотах этот коэффициент практически равен нулю. На высоких частотах напряжение обратной связи можно смоделировать при помощи эквивалентного конденсатора C_{CB}, соответствующего паразитной емкости между коллектором и базой, но в эквивалентной схеме по переменному току он не отображается (см. также раздел 7.3.1).

Коэффициент усиления по току:

$$h_{21E} = \beta_0 = \left.\frac{dI_C}{dI_B}\right|_{V_{CE}=\text{const}} = \left.\frac{i_C}{i_B}\right|_{v_{CE}=0} \approx \left.\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}\right|_{V_{CE}=\text{const}}. \qquad (7.25)$$

Этот параметр называется коэффициентом усиления по току в режиме короткого замыкания по выходу (закорачивается только переменная составляющая) или коэффициентом усиления по переменному току. Он определяет отношение переменного тока коллектора к току базы при закороченном по переменному току переходе коллектор-эмиттер. При измерении h_{21E} переход коллектор-эмиттер шунтируется конденсатором. Этот коэффициент может быть определен из графика выходной характеристической кривой (см. рис. 7.22).

Выходная проводимость

$$h_{22E} = \frac{1}{r_{CE}} = \left.\frac{dI_C}{dV_{CE}}\right|_{I_B=\text{const}} = \left.\frac{i_C}{v_{CE}}\right|_{i_B=0} \approx \left.\frac{\Delta I_C}{\Delta V_{CE}}\right|_{I_B=\text{const}}. \quad (7.26)$$

Параметр h_{22E} называется выходной проводимостью в режиме холостого хода, т. е. при разомкнутой входной цепи (в действительности в этом режиме исчезает только переменная составляющая входного сигнала, а постоянная составляющая остается на месте). Параметр r_{CE} соответствует выходному импедансу и может быть определен по выходной характеристической кривой (см. рис. 7.23).

7.3.5.2. Эквивалентная схема по переменному току транзисторного каскада с общим эмиттером

На рис. 7.33 и 7.34 показаны две схемы с общим эмиттером: с конденсатором C_E (с заземленным эмиттером) и без него.

Конденсаторы, используемые в схемах, выбираются, исходя из требуемого частотного диапазона. В изображенных схемах: V_{CC} — источник постоянного напряжения, R_{int} — внутреннее сопротивление источника входного переменного напряжения, а R_L — сопротивление нагрузки (например, входное сопротивление следующей схемы). Отметим, что в эквивалентной схеме на рис. 7.34 не показано сопротивление r_{CE}, поскольку оно обладает большим импедансом. Оно также не учитывается в последующих расчетах.

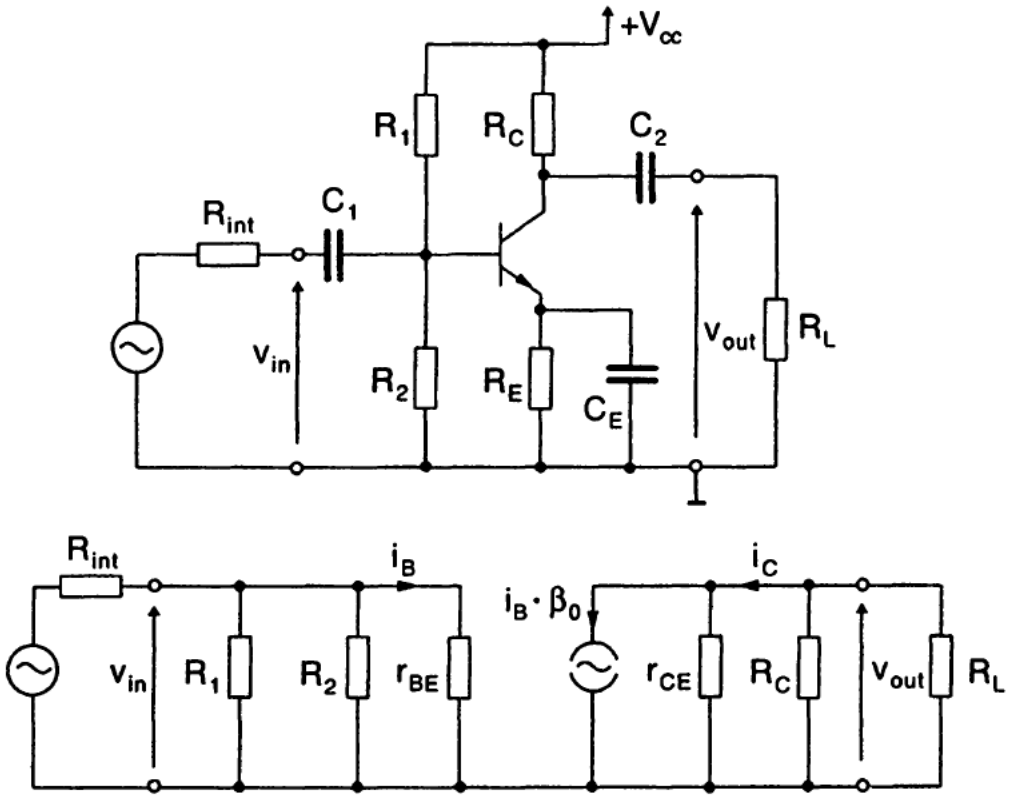


Рис. 7.33. Каскад с общим эмиттером с блокировочным конденсатором и его эквивалентная схема

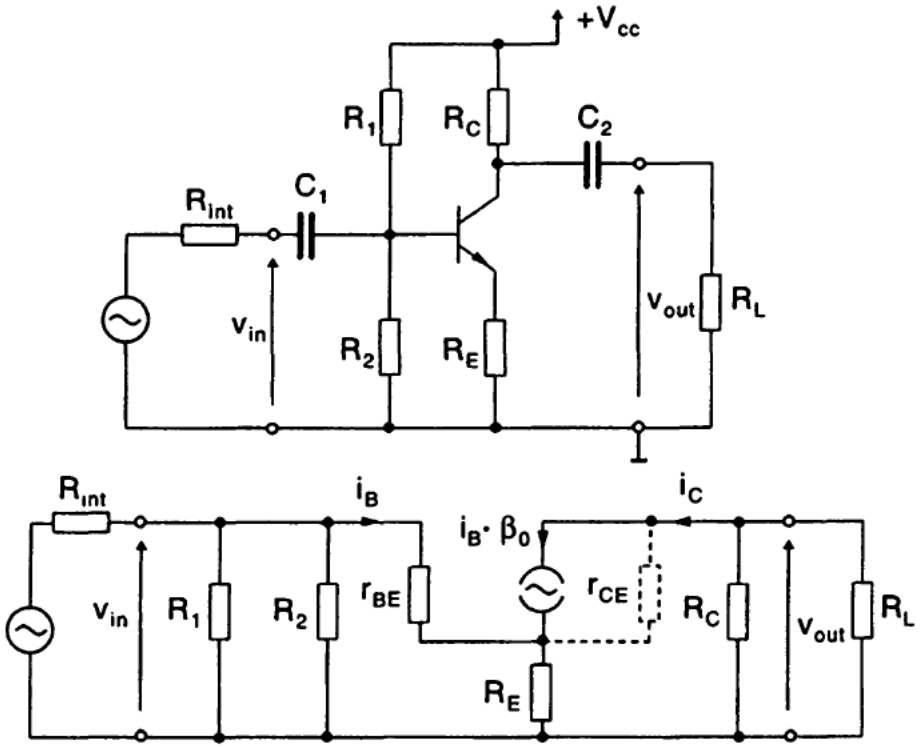


Рис. 7.34. Каскад с общим эмиттером без блокировочного конденсатора и его эквивалентная схема

7.3.5.3. Входной импеданс схемы с общим эмиттером

Схемы, показанные на рис. 7.33 и 7.34, обладают разным входным импедансом.

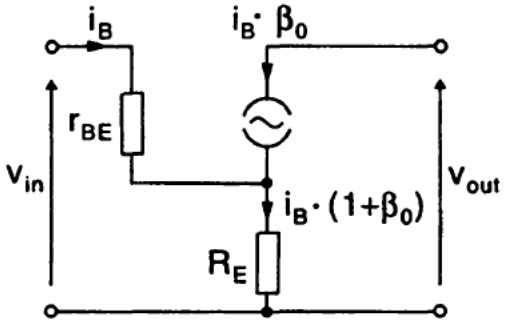
В схеме на рис. 7.33:

$$r_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = R_1 \| R_2 \| r_{BE}. \qquad (7.27)$$

Если импедансы R_1 и R_2 намного больше r_{BE}, то для входного импеданса:

$$r_{in} \approx r_{BE}. \qquad (7.28)$$

В схеме на рис.7.34:



$$v_{in} = i_B[r_{BE} + (1 + \beta_0)R_E],$$

$$\frac{v_{in}}{i_B} = r_{BE} + (1+\beta_0)R_E \approx r_{BE} + \beta_0 R_E.$$

Тогда выражение для входного импеданса принимает вид:

$$r_{in} \approx R_1 \| R_2 \| (r_{BE} + \beta_0 R_E). \qquad (7.29)$$

- Схема *без* блокировочного конденсатора обладает гораздо большим входным импедансом, чем схема *с ним*. Это происходит из-за увеличения R_E в β_0 раз. Однако при этом в такое же число раз уменьшается коэффициент усиления по напряжению (см. раздел 7.3.5.5).

7.3.5.4. Выходной импеданс схемы с общим эмиттером

Для определения **выходного импеданса** r_{out} схема рассматривается либо как источник напряжения, либо как источник тока. В обеих схемах r_{out} является внутренним сопротивлением источника (см. также раздел 7.1.3.2). Для вычисления r_{out} используется соотношение:

$$r_{out} = \frac{\text{напряжение в режиме холостого хода}}{\text{переменный ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}}. \qquad (7.30)$$

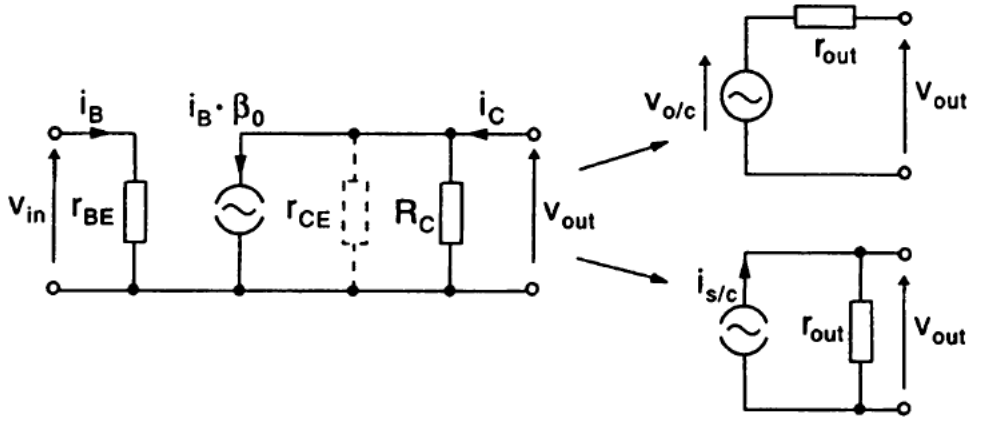


Рис. 7.35. Схема с общим эмиттером: вычисление выходного импеданса

Предположим, что напряжение v_{in} в схеме на рис. 7.35 является известной величиной. Тогда:

$$r_{out} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}} = \frac{-\frac{v_{in}}{r_{BE}}\beta_0 (r_{CE} \| R_C)}{-\frac{v_{in}}{r_{BE}} \cdot \beta_0} = r_{CE} \| R_C. \qquad (7.31)$$

Поскольку сопротивление r_{CE} обладает большим импедансом, его можно не учитывать. Тогда:

$$r_{out} \approx R_C. \qquad (7.32)$$

Для схемы с общим эмиттером без конденсатора C_E (рис. 7.36) и без учета r_{CE} справедливо:

$$r_{out} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}} \approx \frac{-\frac{v_{in}}{r_{BE} + (1+\beta_0)R_E}\beta_0 R_C}{-\frac{v_{in}}{r_{BE} + (1+\beta_0)R_E}\beta_0} = R_C. \qquad (7.33)$$

Схема с общим эмиттером по выходу может считаться источником тока. Чем больше сопротивление R_C, тем выше эффективность схемы. Но поскольку R_C также определяет и рабочую точку, на его выбор накладываются определенные ограничения. На рис. 7.37 показано, как можно при помощи (идеального) трансформатора, встроенного в коллекторную цепь, одновременно получить и высокий импеданс схемы, и полную передачу переменной составляющей коллекторного тока в цепь нагрузки. Выходной импеданс цепи при этом определяется очень высоким сопротивлением r_{CE}.

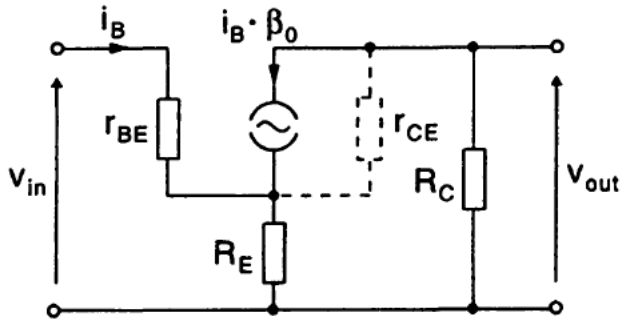


Рис. 7.36. Схема с общим эмиттером без конденсатора C_E

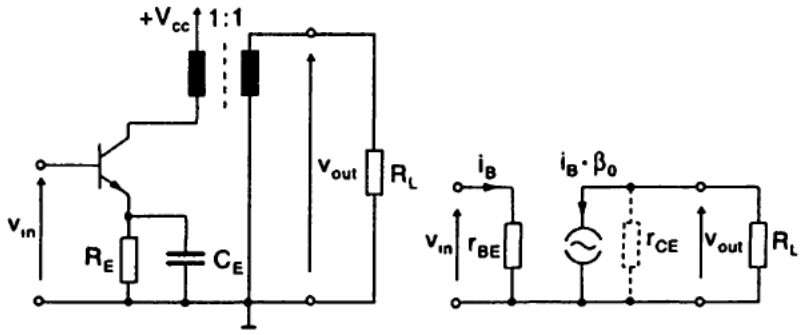


Рис. 7.37. Схема с общим эмиттером с трансформаторной развязкой выходной цепи и цепи нагрузки и соответствующая ей эквивалентная схема по переменному току

7.3.5.5. Коэффициент усиления по переменному напряжению схемы с общим эмиттером

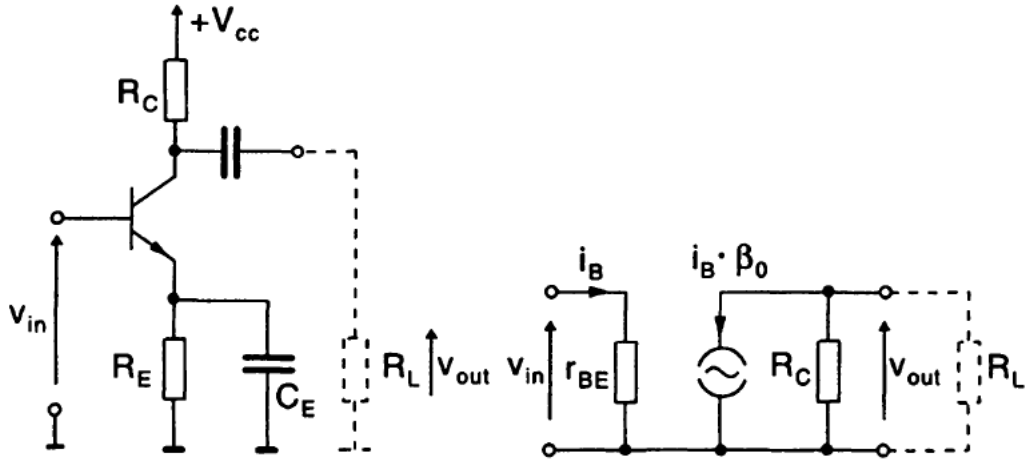


Рис. 7.38. Использование эквивалентной схемы по переменному току каскада с общим эмиттером для вычисления коэффициента усиления по напряжению

Из эквивалентной схемы на рис. 7.38 находится выражение для вычисления коэффициента усиления по переменному напряжению A_v каскада с общим эмиттером, работающего в режиме малых сигналов:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-\frac{v_{in}}{r_{BE}}\beta_0 R_C}{v_{in}} = -\frac{\beta_0 R_C}{r_{BE}}. \qquad (7.34)$$

Коэффициент усиления по напряжению является отрицательной величиной. Это означает, что входное и выходное напряжения имеют противоположные фазы. При подключении нагрузки с сопротивлением R_L к выходу этой схемы ее коэффициент усиления по напряжению уменьшится, поскольку ток $i_B \cdot \beta_0$ разделится на две ветви: через резистор R_C и резистор R_L. При этом он станет равным:

$$A_v = -\frac{\beta_0}{r_{BE}}\left(R_C \| R_L\right). \qquad (7.35)$$

Для схемы с общим эмиттером без конденсатора C_E (рис. 7.39) коэффициент усиления по напряжению вычисляется как:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-\frac{v_{in}}{r_{BE}+(1+\beta_0)R_E}}{v_{in}}\beta_0 R_C = -\frac{\beta_0 R_C}{r_{BE}+(1+\beta_0)R_E} \approx -\frac{R_C}{\frac{r_{BE}}{\beta_0}+R_E}. \qquad (7.36)$$

При $r_{BE}/\beta_0 << R_E$ коэффициент A_v равен R_C/R_E. Если к схеме подключена нагрузка с сопротивлением R_L, то коэффициент A_v определяется выражением:

$$A_v \approx \frac{-R_C \| R_L}{\frac{r_{BE}}{\beta_0}+R_E} \approx -\frac{R_C \| R_L}{R_E}. \qquad (7.37)$$

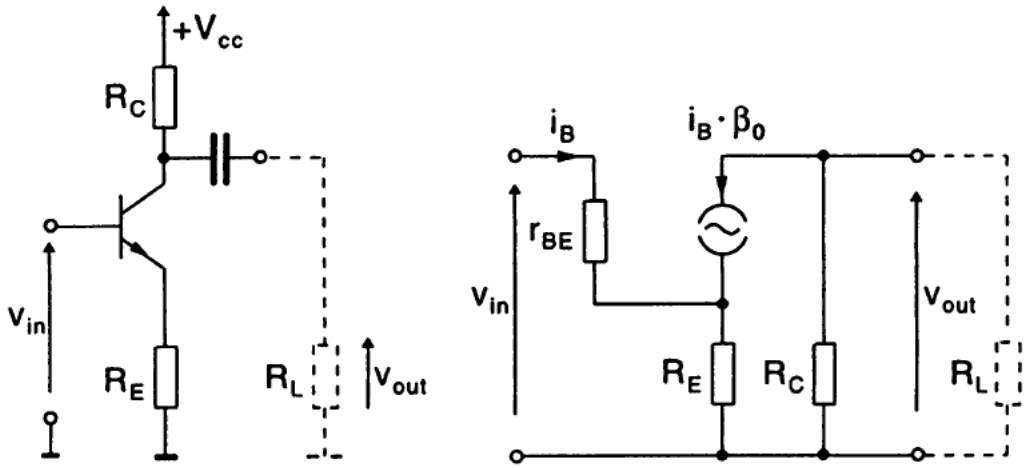


Рис. 7.39. Схема с общим эмиттером без конденсатора C_E

Резистор R_E называется **резистором отрицательной обратной связи**, поскольку падение напряжения на нем, пропорциональное току i_C, вычитается из входного напряжения.

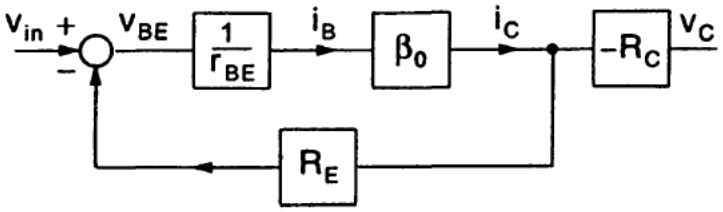


Рис. 7.40. Блок-схема каскада с общим эмиттером без конденсатора C_E

Из блок-схемы каскада с общим эмиттером, показанной на рис. 7.40, получаются результаты, аналогичные уравнению (7.36).

7.3.5.6. Смещение рабочей точки

Рабочая точка, например точка, определяемая параметрами транзистора V_{CE} и I_C, должна не только располагаться в активной зоне выходной характеристической кривой, но и находиться ниже гиперболической функции максимально допустимой рассеиваемой мощности. К тому же рабочая точка не должна менять своего положения в заданном температурном диапазоне при допустимых вариациях коэффициента передачи по току β_{DC}.

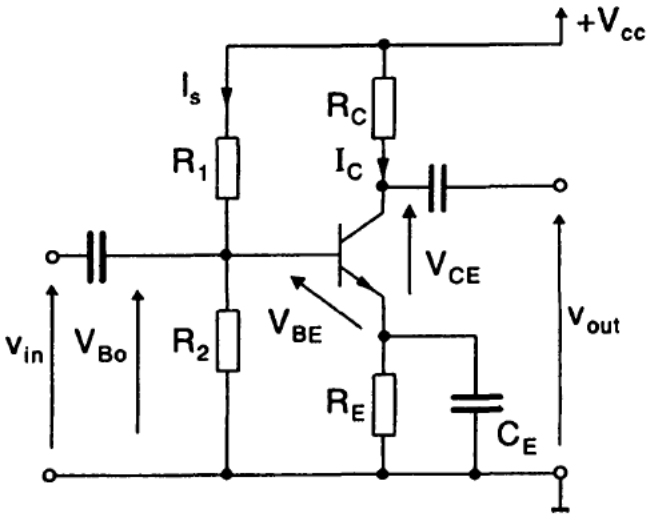


Рис. 7.41. Смещение рабочей точки

Рассмотрим процедуру вычисления положения рабочей точки для схемы, показанной на рис. 7.41.

1. Сначала выбираются параметры V_{CE} и I_C. Напряжение V_{CE} задается немного меньше половины напряжения питания V_{CC}. Верхний предел коллекторного тока I_C определяется максимально допустимой рассеиваемой мощностью P_{total}:

$$V_{CE} \approx 0{,}3...0{,}5\, V_{CC}, \qquad I_C: \quad P_{total} < V_{CE} \cdot I_C.$$

2. Резистор R_E стабилизирует рабочую точку. Его выбирают приблизительно таким, чтобы падение напряжения на нем составляло 1...2 В.

3. Падение напряжения на резисторе R_C равно $V_{RC} = V_{CC} - V_{CE} - V_{RE}$. Следовательно,

$$R_C \approx \frac{V_{CC} - V_{CE} - V_{RE}}{I_C}. \tag{7.38}$$

4. Напряжение на базе определяется резисторами R_1 и R_2, часто называемыми базовым делителем напряжений. Поскольку I_C и R_E уже заданы, выбор базового напряжения нельзя считать абсолютно произвольным.

$$V_{B0} = V_{RE} + V_{BE} = V_{RE} + 0{,}7 \text{ В}. \tag{7.39}$$

Считается, что ток через делитель I_S должен быть приблизительно в 10 раз больше тока через базу. Следовательно, базовый ток не сильно нагружает делитель напряжений, поэтому вариации коэффициента передачи по току β_{DC} не оказывают практически никакого влияния на положение рабочей точки.

Пример: задание рабочей точки в схеме с общим эмиттером.

Решение:

1. Выбор V_{CE}: $V_{CE} = 4{,}5...7{,}5$ В. Задаем $V_{CE} = 6$ В.

Выбор I_C: $I_{Cmax} = 500$ мВт / 6 В = 83 мА. Задаем $I_C = 50$ мА.

2. $R_E = 1$ В / 50 мА = 20 Ом. Задаем $R_E = 22$ Ом, следовательно, $V_{RE} = 1{,}1$ В.

3. $R_C \approx \dfrac{V_{CC} - V_{CE} - V_{RE}}{I_C} = \dfrac{7{,}9\ \text{В}}{50\ \text{мА}} = 158$ Ом. Задаем $R_C = 150$ Ом.

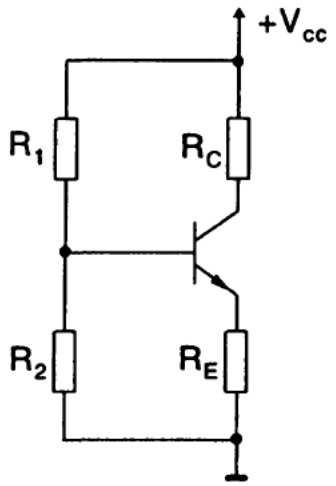
4. $I_S \approx 10 \cdot I_B \approx 10 \cdot I_C/B = 10 \cdot 50$ мА$/200 = 2{,}5$ мА $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_2 \approx (V_{RE} + V_{BE})/I_S = (1{,}1$ В $+ 0{,}7$ В$)/2{,}5$ мА $= 720$ Ом $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 \approx [V_{CC} - (V_{RE} + V_{BE})]/I_S = (15$ В $- 1{,}9$ В$)/2{,}5$ мА $= 5{,}2$ кОм.

Задаем $R_1 = 5{,}6$ кОм, $R_2 = 820$ Ом.

В расчете использованы значения реальных компонентов. Однако полученные результаты нельзя считать единственными. Например, для увеличения входного сопротивления делитель напряжений делают более высокоимпедансным. А для повышения коэффициента усиления по напряжению в режиме холостого хода выбирают большее значение сопротивления R_C (см. последний рисунок). Также нельзя считать приведенный расчет единственным способом решения поставленной задачи. Например, если существует условие $R_C = R_L$, то целесообразно выбрать следующий алгоритм расчета:



$V_{CC} = 15$ В
Транзистор:
$P_{total} = 500$ мВт
$B = 200$

$$R_C = R_L \quad \Rightarrow \quad I_C \approx \left(V_{CC}/2\right)/R_C \quad \Rightarrow \quad R_E \approx (1...2\ \text{В})/I_C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{B0} \approx V_{BE} + V_{RE}, \quad I_S \approx 10 \cdot I_C/B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_2 = V_{B0}/I_S, \quad R_1 = (V_{CC} - V_{B0})/I_S.$$

В общем виде справедливо, что базовый делитель напряжений и R_E определяют величину коллекторного тока, а коллекторный резистор R_C задает напряжение коллектор–эмиттер.

7.3.5.7 Стабилизация рабочей точки

Изменение параметров транзистора и условий окружающей среды ведет к смещению рабочей точки. В связи с этим существенными становятся любые вариации коэффициента усиления по току β_{DC} и тепловой уход напряжения база-эмиттер ΔV_{BE}.

Все шаги по стабилизации рабочей точки сводятся к поддержанию постоянным коллекторного тока.

Стабилизация рабочей точки при помощи токовой обратной связи

Резистор R_E называется резистором обратной связи.

Механизм обратной связи заключается в следующем. Пусть при увеличении температуры напряжение V_{BE} уменьшится на величину ΔV_{BE}. Тогда при постоянном V_{B0} напряжение V_{RE} возрастет. Разность этих двух изменений напряжений на дифференциальном входном импедансе r_{BE} приведет к изменению базового тока на величину ΔI_B, что, в свою очередь, вызовет изменение коллекторного тока $\Delta I_C = \beta_0 \cdot \Delta I_B$ и, соответственно, изменение падения напряжения на резисторе R_E. Изменение ΔI_C с учетом обратной связи используется для определения изменений напряжения V_{RC}, а, следовательно, и V_{CE}:

$$\Delta V_{CE} = -\Delta V_{RC} = -\Delta I_C \cdot R_C.$$

Зависимость $\Delta I_C = f(\Delta V_{BE})$ может быть получена из блок-схемы, показанной на рис. 7.42:

$$\frac{\Delta I_C}{\Delta V_{BE}} = \frac{-1}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}. \qquad (7.40)$$

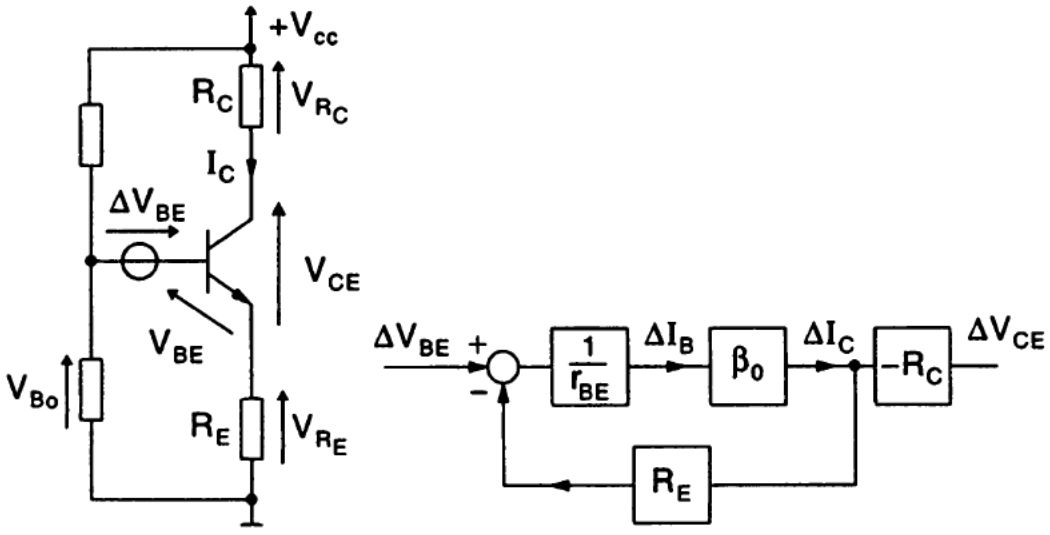


Рис. 7.42. Стабилизация рабочей точки при помощи токовой обратной связи

Изменение напряжения ΔV_{BE} рассматривается как подключение к базе дополнительного источника напряжения. Отношение:

$$\frac{\Delta V_{CE}}{\Delta V_{BE}} = A_{DR} = \frac{1}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E} \cdot R_C \approx \frac{R_C}{R_E}. \qquad (7.41)$$

называется **коэффициентом усиления теплового дрейфа напряжения**. Он показывает, насколько меняется напряжение на коллекторе в результате теплового дрейфа. При увеличении R_E этот коэффициент уменьшается. Типовые значения A_{DR} лежат в интервале 5...10.

Стабилизация рабочей точки улучшается с ростом R_E.

Примечание. Рекомендации, приведенные в разделе 7.3.5.6, касающиеся измерения R_E, напрямую связаны с коэффициентом усиления теплового дрейфа напряжения. При нормальной работе с источниками питания падение напряжения на сопротивлении R_E составляет 1...2 В.

Стабильность коэффициента усиления по току достигается использованием низкоимпедансных базовых делителей напряжения. При этом колебания базового тока не влияют на положение рабочей точки.

Стабилизация рабочей точки при помощи обратной связи по напряжению

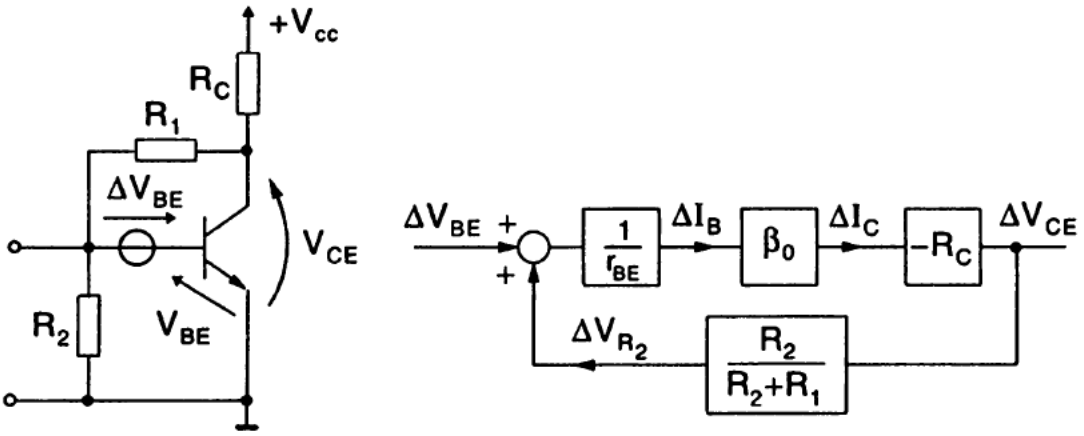


Рис. 7.43. Стабилизация рабочей точки при помощи обратной связи по напряжению

Механизм обратной связи заключается в следующем. Пусть при увеличении температуры напряжение V_{BE} уменьшается на величину ΔV_{BE}, что приводит к росту тока базы I_B. Поскольку I_B увеличивается, ток коллектора I_C также растет, что вызывает уменьшение напряжения на коллекторе. При этом напряжение на базе, определяемое делителем напряжений R_1 и R_2, снижается, поэтому ток базы, возросший при увеличении температуры, снова понижается. Все это показано на блок-схеме на рис.7.43.

$$\frac{\Delta V_{CE}}{\Delta V_{BE}} = \frac{\frac{\beta_0}{r_{BE}} \cdot R_C}{1 + \frac{\beta_0 R_C}{r_{BE}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{\frac{r_{BE}}{\beta_0 R_C} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \qquad (7.42)$$

Примечание. Недостатком обратной связи по напряжению является то, что одновременно с ней существует отрицательная обратная связь по переменному току. Следовательно, коэффициент усиления по переменному току равняется коэффициенту усиления теплового дрейфа напряжения. Для устранения этого недостатка в схему вводится конденсатор C_E, шунтирующий резистор R_E по переменному току. Величина емкости конденсатора C_E выбирается такой, чтобы не мешать усилению полезного переменного сигнала, но создавать большой импеданс для более медленных изменений дрейфа теплового напряжения.

Нелинейная стабилизация рабочей точки

Стабилизация рабочей точки при помощи обратной связи по току может быть улучшена при помощи *p-n*-перехода (диода или транзистора в диодном включении), встроенного в цепь базового делителя напряжений, согласованного по температуре с транзистором Q_1 (рис. 7.44). Любой тепловой дрейф характеристик транзистора Q_1 напрямую компенсируется соответствующим изменением параметров делителя.

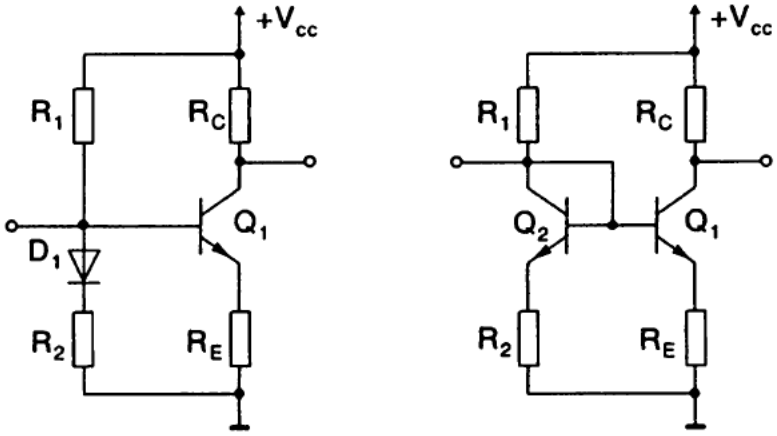


Рис. 7.44. Нелинейная стабилизация рабочей точки

7.3.1.8. Нагрузочная линия

Уравнение $V_{CC} = I_C \cdot (R_C + R_E) + V_{CE}$, полученное методом контурных токов, является линейным. Из него выводится следующее соотношение:

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E} = -\underbrace{\frac{1}{R_C + R_E}}_{\text{наклон}} \cdot V_{CE} + \underbrace{\frac{V_{CC}}{R_C + R_E}}_{\text{константа}}. \qquad (7.43)$$

Уравнение (7.43) называется уравнением **статической линии нагрузки**. Значения параметров V_{CE} и I_C должны лежать на этой линии. Таким образом, положение рабочей точки чаще всего выбирается на линии нагрузки.

Шунтируя сопротивление R_E конденсатором C_E, получают **динамическую линию нагрузки** (рис. 7.45). Ее наклон определяется уравнением $\frac{dI_C}{dV_{CE}} = -\frac{1}{R_C}$. При подключении нагрузки оно принимает вид $\frac{dI_C}{dV_{CE}} = -\frac{1}{R_C \parallel R_L}$. Динамическая линия нагрузки определяет зависимость между переменными параметрами v_{CE} и i_C.

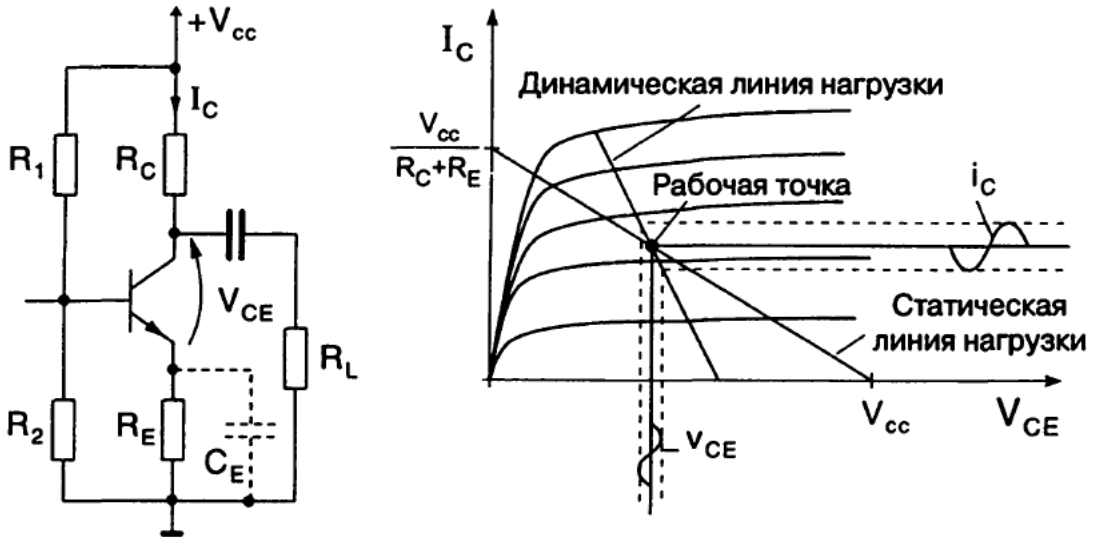


Рис. 7.45. Статическая и динамическая линии нагрузки на выходных характеристиках

7.3.1.9. Работа схемы с общим эмиттером на высоких частотах

Переменное напряжение на коллекторе находится в противофазе с напряжением на базе. На высоких частотах в схеме появляется паразитная обратная связь через емкость между коллектором и базой (емкость Миллера). С ростом частоты влияние этой обратной связи возрастает. Глубина паразитной связи также зависит от внутреннего сопротивления источника входного напряжения. Чем меньше это сопротивление, тем меньше влияние обратной связи.

Обратная связь по току увеличивает критическую частоту схемы. При этом коэффициент усиления по напряжению падает, что уменьшает обратную связь по напряжению. К тому же в выражение для коэффициента усиления по переменному напряжению входит коэффициент передачи по току β, который также зависит от частоты, что еще сильнее снижает его значение.

Критическую частоту можно либо измерить, либо рассчитать по соответствующей модели.

- Большая критическая частота достигается при применении обратной связи по току и небольшом внутреннем сопротивлении источника входного напряжения.

7.3.6. Схема с общим коллектором (эмиттерный повторитель)

Коэффициент усиления по напряжению эмиттерного повторителя практически равен единице, а диапазон выходных напряжений лежит в пределах $0{,}7\ \text{В} \le V_в \le V_C$, т. е. он почти достигает напряжения питания (рис. 7.46).

Напряжение на эмиттере всегда на $\approx 0{,}7$ В меньше напряжения на базе. Поскольку напряжение эмиттера отслеживает напряжение базы и отличается от него на фиксированную величину 0,7 В, эта схема и называется **эмиттерным повторителем**.

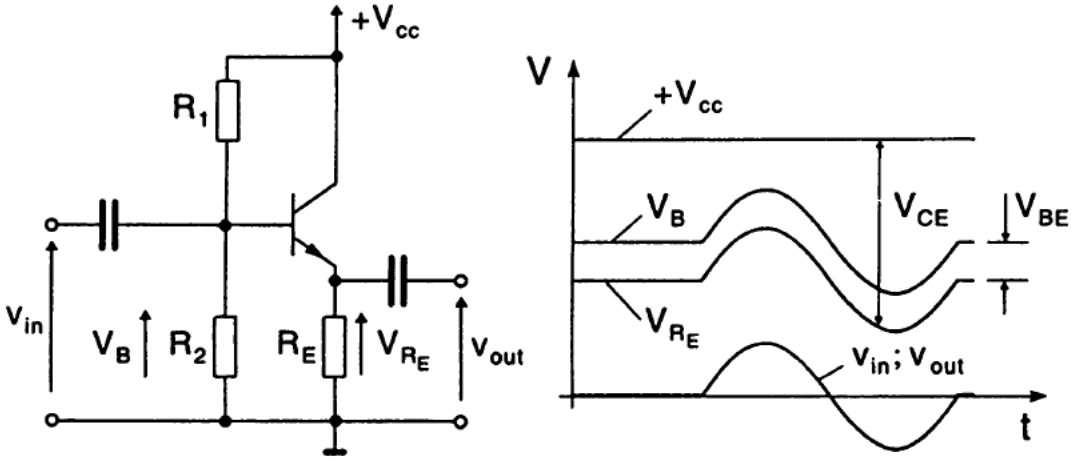


Рис. 7.46. Схема с общим коллектором и напряжения в ней

Схема с общим коллектором обладает очень высоким входным импедансом и очень низким выходным импедансом, поэтому ее часто используют в качестве **преобразователя импеданса**, например в сочетании со схемой с общим эмиттером (рис. 7.47).

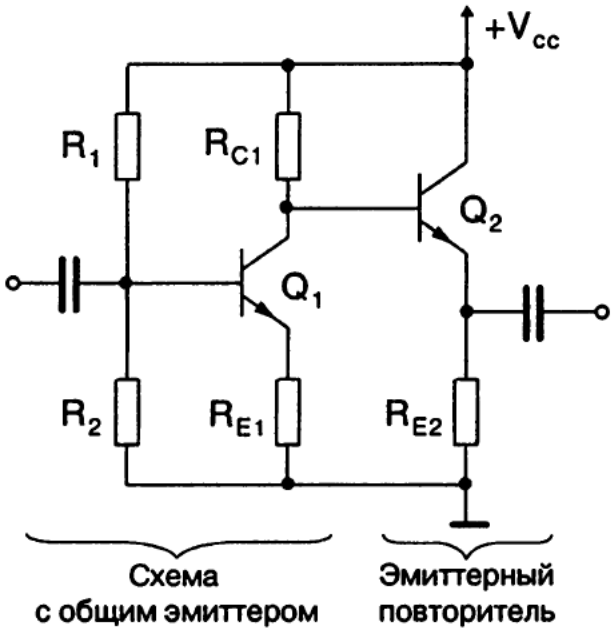


Рис. 7.47. Схема с общим коллектором в качестве преобразователя импеданса для схемы с общим эмиттером

7.3.6.1. Эквивалентная схема каскада с общим коллектором по переменному току

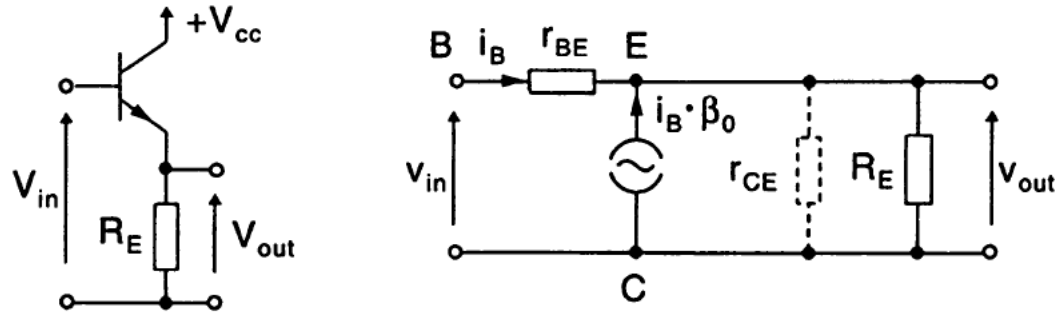


Рис. 7.48. Схема с общим коллектором и ее эквивалентная схема по переменному току

7.3.6.2. Входной импеданс схемы с общим коллектором

Входной импеданс схемы с общим коллектором определяется следующим образом:

$$r_{in} = \frac{v_{in}}{i_B} = \frac{i_B \cdot r_{BE} + i_B \cdot (1+\beta_0) \cdot R_E}{i_B} = r_{BE} + (1+\beta_0) \cdot R_E \approx \beta_0 \cdot R_E. \qquad (7.44)$$

При подключении нагрузки:

$$r_{in} \approx \beta_0 \cdot (R_E \| R_L). \qquad (7.45)$$

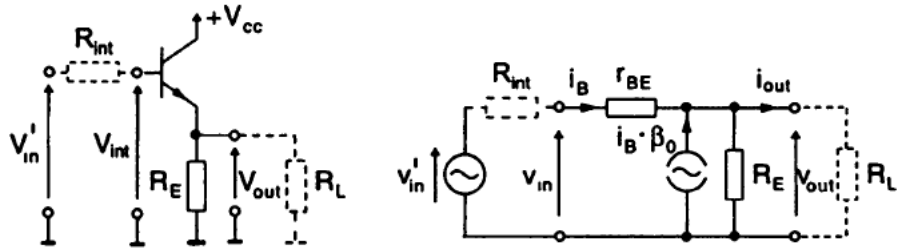


Рис. 7.49. Эквивалентная схема эмиттерного повторителя по переменному току для вычисления входного и выходного сопротивления

7.3.6.3. Выходной импеданс схемы с общим коллектором

Выходной импеданс эмиттерного повторителя определяется выражением:

$$r_{out} = \frac{\text{напряжение в режиме холостого хода}}{\text{переменный ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}}. \qquad (7.46)$$

На вход подается переменное напряжение v_{in}. В соответствии со схемой на рис. 7.49 получаем:

$$v_{o/c} = i_B \cdot (1+\beta_0) \cdot R_E = \frac{v_{in}}{r_{BE} + (1+\beta_0) \cdot R_E} \cdot (1+\beta_0) \cdot R_E \approx v_{in}, \qquad (7.47)$$

$$i_{s/c} = i_B \cdot \beta_0 = \frac{v_{in}}{r_{BE}} \beta_0. \qquad (7.48)$$

После этого находим выражение для выходного импеданса:

$$r_{out} \approx \frac{r_{BE}}{\beta_0}. \qquad (7.49)$$

Если источник питания, подключенный к эмиттерному повторителю, обладает внутренним сопротивлением R_{int}, то последнее выражение преобразуется к виду:

$$r_{out} \approx \frac{r_{BE} + R_{int}}{\beta_0}. \qquad (7.50)$$

Примечание. Выходной импеданс каскада с общим эмиттером можно уменьшить в β_0 раз, поставив на его выход эмиттерный повторитель, как показано на рис. 7.47.

7.3.6.4. Коэффициент усиления по переменному току схемы с общим коллектором

Коэффициент усиления по переменному току схемы с общим коллектором определяется следующим выражением (рис. 7.49):

$$A_i = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \beta_0 \cdot \frac{R_E}{R_E + R_L}. \quad (7.51)$$

Этот параметр является практически бесполезным при проектировании аналоговых схем.

7.3.6.5. Работа схемы с общим коллектором на высоких частотах

Критическая частота f_C схемы с общим коллектором практически совпадает с критической частотой коэффициента передачи по току f_β (см. раздел 7.3.1.12):

$$f_C \approx f_\beta \approx \frac{f_T}{\beta_0}. \quad (7.52)$$

7.3.7. Схема с общей базой

Коэффициент передачи по току **схемы с общей базой** равен 1, а коэффициент усиления по напряжению такой же, как у схемы с общим эмиттером. В данной схеме входное и выходное напряжения имеют одинаковую фазу. Поскольку схема с общей базой обладает низким входным импедансом, для ее согласования с внешними входными цепями часто приходится использовать трансформатор, который при соответствующем выборе соотношения числа витков в обмотках может обладать очень маленьким импедансом и обеспечивать передачу большого тока при небольших напряжениях (рис. 7.50).

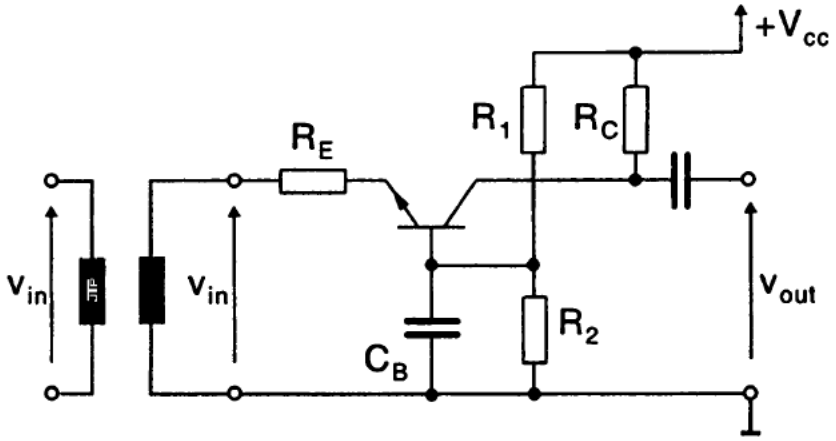


Рис. 7.50. Схема с общей базой с согласующим трансформатором

Схема с общей базой хорошо работает на очень высоких частотах. Поскольку ее коэффициент передачи по току $A_i = 1$, а выходное напряжение совпадает по фазе с входным напряжением, она может использоваться вплоть до граничной частоты коэффициента передачи тока f_T.

Примечание. Несмотря на такие интересные характеристики, схема с общей базой используется не так часто, поскольку ее вытеснили схемы на полевых транзисторах. Это объясняется тем, что схемы с общим истоком (аналоги схем с общим эмиттером) могут работать на частотах, доступных только биполярным транзисторам, включенным по схеме с общей базой.

Принцип действия схемы с общей базой. Напряжение база–эмиттер является управляющим напряжением. Поскольку база транзистора заземлена по переменному току, напряжение на эмиттере задается входным напряжением. То, что ток от источника входного напряжения поступает не на базу, а на эмиттер, имеет свои недостатки. При увеличении входного напряжения напряжение база–эмиттер уменьшается. При этом коллекторный ток снижается, а напряжение на коллекторе возрастает (рис. 7.50).

7.3.7.1. Эквивалентная схема по переменному току каскада с общей базой

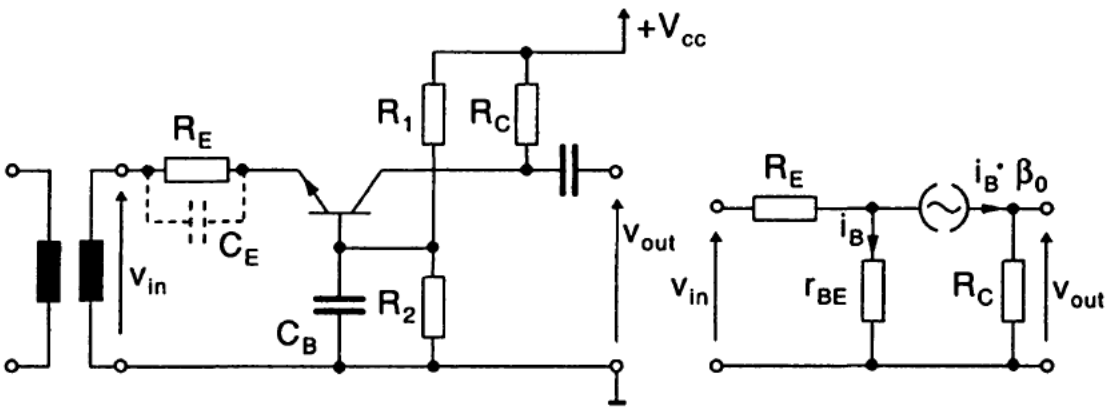


Рис. 7.51. Эквивалентная схема по переменному току каскада с общей базой

7.3.7.2. Входной импеданс схемы с общей базой

Входной импеданс схемы с общей базой определяется следующим образом:

$$r_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{i_B \cdot r_{BE} + i_{in} \cdot R_E}{i_{in}} = \frac{i_{in}\left(R_E + \dfrac{r_{BE}}{1+\beta_0}\right)}{i_{in}} = R_E + \frac{r_{BE}}{1+\beta_0} \approx R_E + \frac{r_{BE}}{\beta_0}. \quad (7.53)$$

Если R_E шунтируется конденсатором (рис. 7.51), то входной импеданс уменьшается:

$$r_{in} \approx \frac{r_{BE}}{\beta_0}. \quad (7.54)$$

7.3.7.3. Выходной импеданс схемы с общей базой

Выходной импеданс схемы с общей базой определяется выражением:

$$r_{out} = \frac{\text{напряжение в режиме холостого хода}}{\text{переменный ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}}, \quad (7.55)$$

$$v_{o/c} \approx i_B \cdot \beta_0 \cdot R_C = v_{in} \frac{\beta_0 R_C}{r_{BE}}, \quad i_{s/c} \approx i_B \cdot \beta_0 = \frac{v_{in}}{r_{BE}} \cdot \beta_0, \quad (7.56)$$

$$r_{out} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}} \approx R_C. \quad (7.57)$$

- Выходные импедансы схем с общей базой и общим эмиттером равны.

7.3.7.4. Коэффициент усиления по переменному напряжению схемы с общей базой

Коэффициент усиления по переменному напряжению схемы с общей базой определяется следующим образом:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{i_B \beta_0 R_C}{i_B (1+\beta_0) R_E + i_B \cdot r_{BE}} \approx \frac{R_C}{R_E + \frac{r_{BE}}{\beta_0}}. \quad (7.58)$$

Если R_E шунтируется конденсатором (рис. 7.51), то коэффициент усиления по переменному напряжению увеличивается:

$$A_v = \frac{\beta_0 \cdot R_C}{r_{BE}}. \quad (7.59)$$

- Коэффициенты усиления по переменному напряжению схем с общей базой и общим эмиттером равны.

7.3.7.5. Работа схемы с общей базой на высоких частотах

Коэффициент передачи по току схемы с общей базой равен 1. Значит, в схеме нет никаких нежелательных отрицательных обратных связей по току. Выходное напряжение совпадает по фазе с входным напряжением, следовательно, в этом случае обратные связи через паразитные емкости также не создают никаких проблем. Именно поэтому схемы с общей базой могут работать вплоть до граничной частоты f_T.

7.3.8. Основные схемы на биполярных транзисторах (обзор)

На рис. 7.52 приведены основные схемы на биполярных транзисторах.

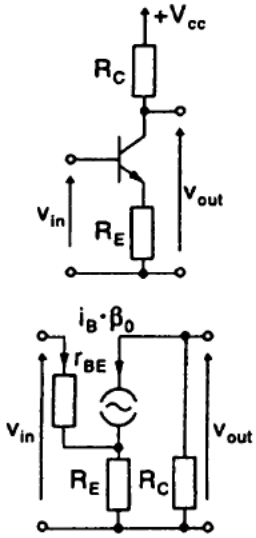
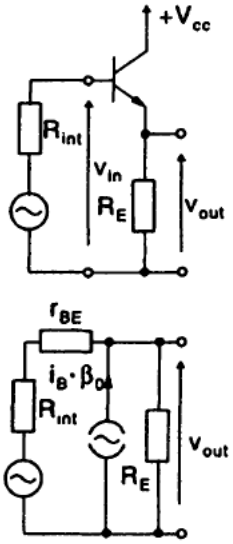
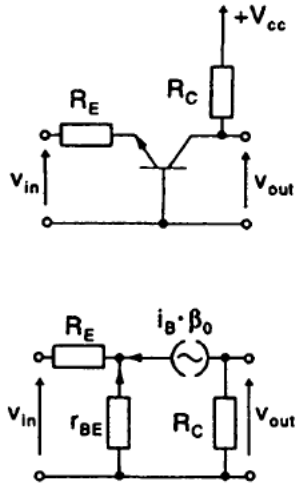
	Схема с общим эмиттером	Схема с общим коллектором (эмиттерный повторитель)	Схема с общей базой
			
$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}}$	$\frac{-\beta_0 R_C}{r_{BE} + (1+\beta_0)R_E}$ $\approx \frac{-R_C}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}$	$\frac{1}{1 + \frac{r_{BE}}{(1+\beta_0)R_E}}$ ≈ 1	$\frac{\beta_0 R_C}{r_{BE} + (1+\beta_0)R_E}$ $\approx \frac{R_C}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}$
$r_{in} =$	$r_{BE} + (1+\beta_0)R_E$	$r_{BE} + (1+\beta_0)R_E$	$R_E + \frac{r_{BE}}{1+\beta_0}$
$r_{out} =$	R_C	$\frac{R_{int} + r_{BE}}{1+\beta_0}$	R_C

Рис. 7.52. Сравнение схем на биполярных транзисторах

7.3.9. Источники тока на биполярных транзисторах

Реальные источники тока можно представить в виде схем, состоящих из идеального источника тока I_S и внутреннего сопротивления источника R_{int} (рис. 7.53).

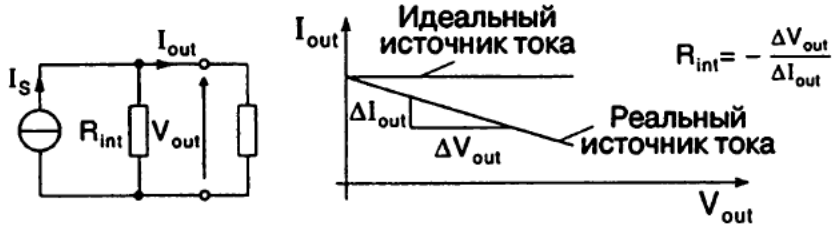


Рис. 7.53. Представление источника тока

В теории электрических цепей источники должны выдавать строго определенный ток:

- не зависящий от напряжения на выходных выводах V_{out} и
- не зависящий от напряжения источника питания V_{CC} (при этом должен подавляться любой фон от сети переменного тока).

Источники тока на биполярных транзисторах

Из уравнения, полученного метом контурных токов: $-V_Z + V_{BE} + I_S \cdot R_E = 0$, находим выражение для тока I_S (рис. 7.54):

$$I_S \approx \frac{V_Z - 0{,}7\ \text{В}}{R_E} \quad \text{при} \quad 0 < V_{out} < (V_{CC} - V_Z). \tag{7.60}$$

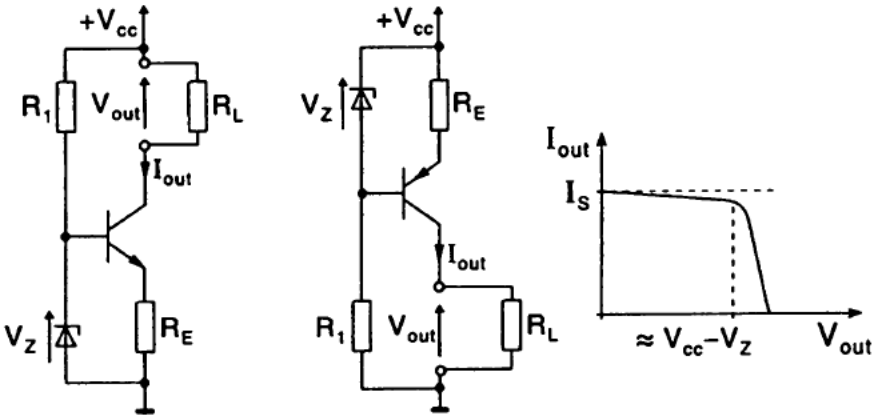


Рис. 7.54. Источник тока на биполярном транзисторе

При использовании стабилитрона и соответствующем выборе сопротивления R_E ток I_S не зависит от напряжения V_{out}. Стабилитрон работает как источник постоянного напряжения. Вместо него могут использоваться другие источники напряжения, такие как эталонные элементы, светодиоды и последовательно соединенные кремниевые диоды.

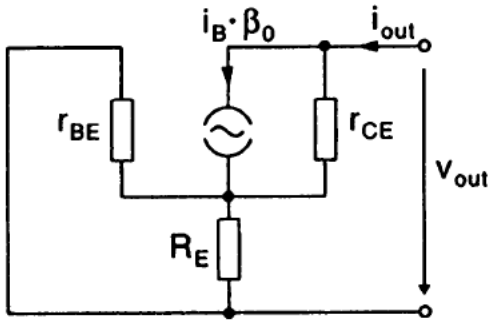


Рис. 7.55. Эквивалентная схема по переменному току источника тока

Внутреннее сопротивление источника тока определяется при помощи его эквивалентной схемы по переменному току (рис. 7.55).

$$r_i = -\frac{v_{out}}{i_{out}} = \frac{R_E(r_{BE} + \beta_0 r_{CE}) + r_{CE}(R_E + r_{BE})}{R_E + r_{BE}}. \tag{7.61}$$

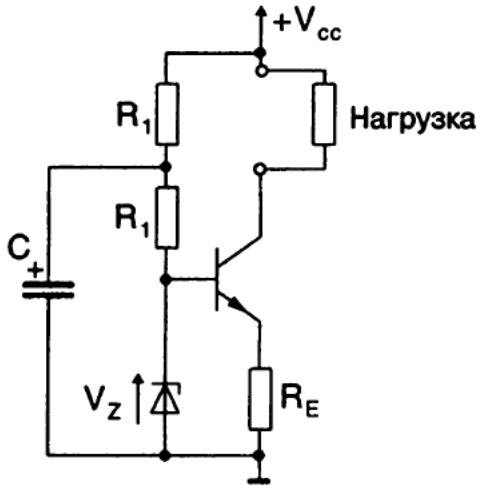
- В зависимости от топологии схемы сопротивление источника лежит в диапазоне:

$$r_{CE} < r_i < \beta_0 \cdot r_{CE}. \tag{7.62}$$

При соответствующем выборе напряжения V_Z (несколько вольт) сопротивление источника будет приблизительно в 10...20 раз больше r_{CE}.

- Как правило, при увеличении V_Z и R_E сопротивление источника также растет.

Стабильность источника тока при колебаниях напряжения питания зависит не только от сопротивления источника тока, но и от сопротивления источника напряжения V_Z. Изменение V_{CC} сказывается на величине V_Z и, следовательно, на значении I_S. Для снижения **пульсаций напряжения в линии электропитания** на 100 Гц стабилизируется V_Z при помощи фильтра нижних частот (рис. 7.56).



$C = 10...100 \cdot \dfrac{10\ \text{мс}}{R_1/2}$ для уменьшения пульсаций напряжения питания на 100 Гц

Рис. 7.56. Источник тока с подавлением пульсаций напряжения в линии электропитания

7.3.10. Дифференциальный усилитель на биполярных транзисторах

Дифференциальный усилитель усиливает разность входных напряжений (рис. 7.57):

$$-v_{out1} = v_{out2} = (v_{in1} - v_{in2}) \cdot A_d = v_d A_d. \qquad (7.63)$$

Дифференциальные усилители используются в основном как суммирующие устройства в схемах с обратными связями.

На дифференциальные усилители, как правило, подается симметричное (±) напряжение питания. Входные напряжения в состоянии покоя равны нулю (выводы заземлены), а напряжения на коллекторах выбираются равными $V_{CC}/2$ для *n-p-n*-транзисторов и $-V_{SS}/2$ для *p-n-p*-транзисторов. Коллекторный ток в рабочей точке равен *половине* тока источника питания I_S ($I_C = I_S/2$). Сопротивление в цепях эмиттера R_E (сопротивление обратной токовой связи) из-за явлений теплового дрейфа характеристик транзисторов обычно выбирается очень маленьким. В случае согласованной пары транзисторов, т. е. при выборе транзисторов с идентичными параметрами, сопротивление R_E может быть совсем удалено из схемы. Если выходное напряжение измеряется между коллекторными выводами, то оно всегда пропорционально напряжению V_d ($V_{out} \propto V_d$) как по переменному, так и по постоянному току.

При анализе работы дифференциальных усилителей следует различать синфазные и дифференциальные сигналы. Если входные напряжения *совпадают по фазе и амплитуде*, то речь идет о *синфазных сигналах*. Если у них *одинаковые амплитуды,* но *противоположные фазы*, то говорят о *дифференциальных сигналах*. Если v_{in1} и v_{in2} *не равны* друг другу, то в них присутствуют как синфазные, так и дифференциальные составляющие.

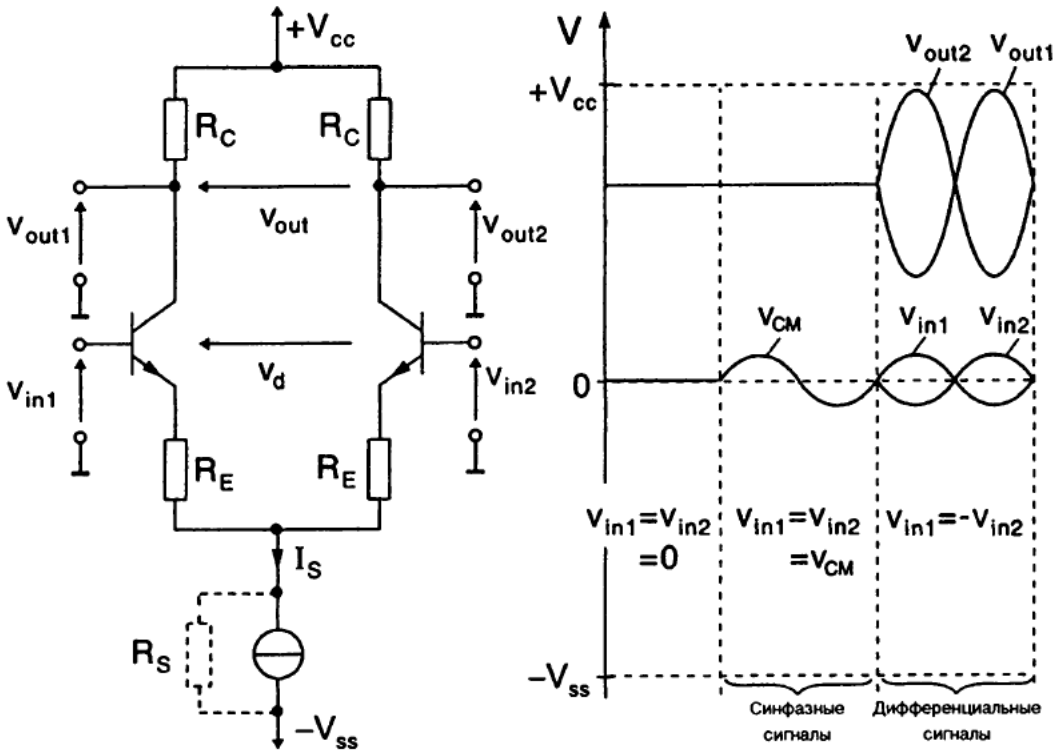


Рис. 7.57. Дифференциальный усилитель на биполярных транзисторах

Поскольку из-за симметрии входных напряжений ток I_S поровну делится между двумя транзисторными ветвями, теоретически, синфазный сигнал $v_{in1} = v_{in2} = v_{CM}$ не должен приводить к появлению выходного напряжения. Но на практике выходное напряжение усилителя никогда не бывает равным нулю.

Отношение:

$$\frac{\text{синфазное выходное напряжение}}{\text{синфазное входное напряжение}} = \frac{v_{out1}}{v_{CM}} = \frac{dV_{out1}}{dV_{CM}} = A_{CM} \qquad (7.64)$$

называется коэффициентом передачи синфазного сигнала. В идеале он равен нулю.

В случае подачи на вход усилителя дифференциального сигнала $v_{in1} = -v_{in2} = v_d/2$ токи I_S в обеих транзисторных ветвях не будут одинаковыми, что приведет к появлению на его выходе напряжения $v_{out1} = -v_{out2}$.

Отношение:

$$\frac{\text{дифференциальное выходное напряжение}}{\text{дифференциальное входное напряжение}} = \frac{v_{out1}}{v_{in1} - v_{in2}} = \frac{v_{out1}}{v_d} = \frac{dV_{out1}}{d(V_{in1} - V_{in2})} = A_d \qquad (7.65)$$

называется коэффициентом передачи дифференциального сигнала.

7.3.10.1. Коэффициент передачи дифференциального сигнала

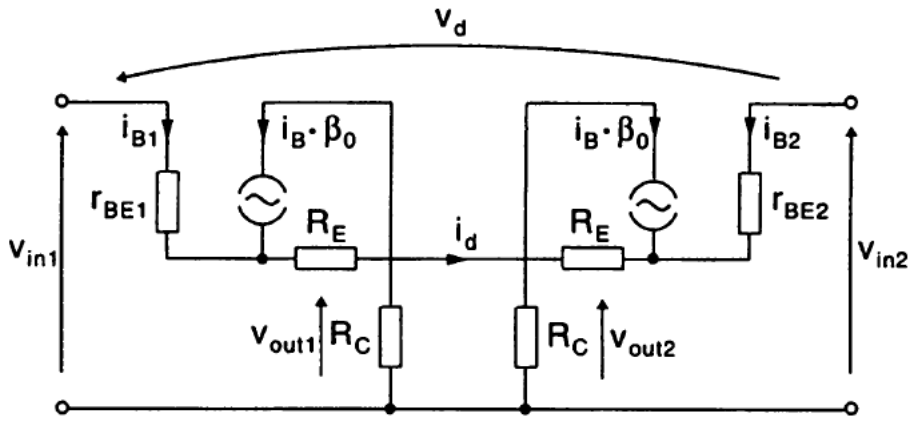


Рис. 7.58. Вычисление коэффициента передачи дифференциального сигнала при помощи эквивалентной схемы дифференциального усилителя по переменному току

Из эквивалентной схемы, показанной на рис. 7.58, следует:

$$v_d = i_{B1} \cdot r_{BE1} + i_d \cdot 2R_E - i_{B2} \cdot r_{BE2}, \tag{7.66}$$

$$v_{out1} = -i_{B1} \cdot \beta_0 \cdot R_C, \tag{7.67}$$

$$i_d = i_{B1} \cdot (1 + \beta_0) = -i_{B2} \cdot (1 + \beta_0). \tag{7.68}$$

Из этих уравнений можно найти выражение для коэффициента передачи дифференциального сигнала:

$$A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{v_{out2}}{v_d} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta_0 \cdot R_C}{r_{BE} + (1+\beta_0) R_E} \tag{7.69}$$

или:

$$A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{v_{out2}}{v_d} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}. \tag{7.70}$$

Чем ниже сопротивление R_E, тем выше коэффициент передачи дифференциального сигнала.

Примечание. Если требуется сделать сопротивление обратной связи R_E очень маленьким, то необходимо следить за тем, чтобы транзисторы были очень хорошо согласованы друг с другом и работали при одинаковой температуре. Для этих целей используются интегрированные транзисторы (два транзистора в одном корпусе). Поскольку такие транзисторы изготавливаются по одинаковой технологии и на одной подложке, они обладают практически одинаковыми параметрами. В этом случае сопротивление R_E можно исключить.

7.3.10.2. Коэффициент передачи синфазного сигнала

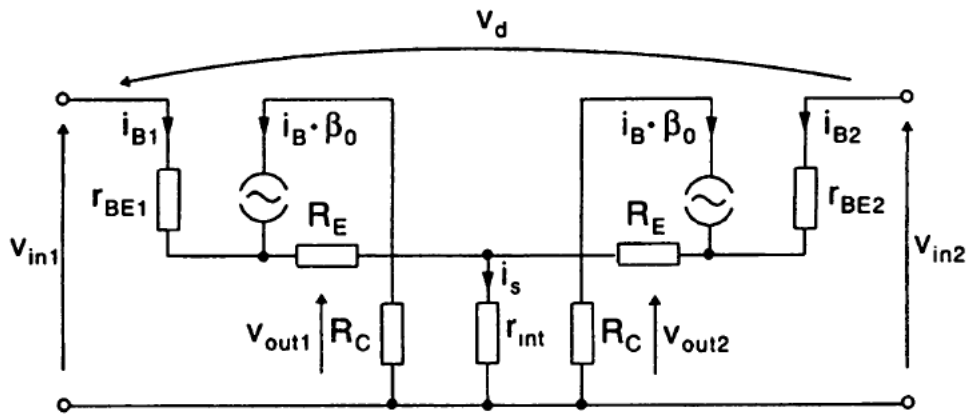


Рис. 7.59. Вычисление коэффициента передачи синфазного сигнала при помощи эквивалентной схемы дифференциального усилителя по переменному току

Из эквивалентной схемы, показанной на рис. 7.59, следует:

$$v_{CM} = i_{B1} \cdot r_{BE1} + i_{B1} \cdot (1 + \beta_0) \cdot R_E - i_S \cdot r_{iS}, \tag{7.71}$$

$$v_{out1} = -i_{B1} \cdot \beta_0 \cdot R_C, \tag{7.72}$$

$$i_S = (i_{B1} + i_{B2}) \cdot (1 + \beta_0) = 2 \cdot i_{B1} \cdot (1 + \beta_0). \tag{7.73}$$

Здесь учитывается внутреннее сопротивление r_{iS} источника тока I_S.

Из этих уравнений можно найти выражение для коэффициента передачи синфазного сигнала:

$$A_{CM} = \frac{v_{out1}}{v_{CM}} = \frac{\beta_0 \cdot R_C}{r_{BE} + (1+\beta_0) R_E + (1+\beta_0) \cdot 2 r_{iS}}. \tag{7.74}$$

При $2r_{iS} >> R_E$ справедливо:

$$A_{CM} = \frac{v_{out1}}{v_{CM}} = -\frac{v_{out2}}{v_{CM}} \approx -\frac{R_C}{2r_{iS}}. \tag{7.75}$$

Чем выше импеданс источника тока, тем меньше коэффициент передачи синфазного сигнала.

7.3.10.3. Коэффициент ослабления синфазного сигнала (КОСС)

КОСС — это отношение коэффициента передачи дифференциального сигнала к коэффициенту передачи синфазного сигнала:

$$\text{КОСС} = \frac{A_d}{A_{CM}}. \tag{7.76}$$

Обычно КОСС выражается в децибелах:

$$\text{КОСС} = \frac{A_d}{A_{CM}} = \frac{r_{iS}}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}. \tag{7.77}$$

7.3.10.4. Входной импеданс дифференциального усилителя

Входной импеданс усилителя в режиме передачи дифференциальных сигналов r_d определяется выражением (рис. 7.58):

$$r_d = \frac{v_d}{i_{B1}} = 2r_{BE} + (1+\beta_0)\cdot 2R_E \tag{7.78}$$

или:

$$r_d \approx 2(r_{BE} + \beta_0 R_E). \tag{7.79}$$

Входной импеданс усилителя в режиме передачи синфазных сигналов r_{CM} определяется выражением (рис. 7.59):

$$r_{CM} = \frac{v_{CM}}{i_{B1}} = r_{BE} + (1+\beta_0)\cdot R_E + 2\cdot(1+\beta_0)\cdot r_{iS} \tag{7.80}$$

или:

$$r_{CM} \approx 2\beta_0 \cdot r_{iS}. \tag{7.81}$$

7.3.10.5. Выходной импеданс дифференциального усилителя

Выходной импеданс усилителя r_{out} совпадает с выходным сопротивлением схемы с общим эмиттером:

$$r_{out} = R_C. \tag{7.82}$$

7.3.10.6. Напряжение смещения дифференциального усилителя

Напряжение смещения V_0 (**напряжение входного смещения**) равно дифференциальному входному напряжению, которое необходимо подать на усилитель, чтобы его выходные напряжения V_{out1} и V_{out2} были равны:

$$V_0 = (V_{in1} - V_{in2})\Big|_{V_{out1}=V_{out2}}. \tag{7.83}$$

7.3.10.7. Ток смещения дифференциального усилителя

Ток смещения I_0 (**ток входного смещения**) равен дифференциальному входному току, который необходимо подать на усилитель, чтобы его выходные напряжения V_{out1} и V_{out2} были равны:

$$I_0 = (I_{in1} - I_{in2})\Big|_{V_{out1}=V_{out2}}. \tag{7.84}$$

7.3.10.8. Дрейф входного напряжения смещения

В дифференциальных усилителях **тепловой дрейф напряжений** на обоих транзисторах благодаря идентичности их характеристик должен взаимно уничтожаться. Однако из-за допустимых технологических разбросов остается некоторое влияние теплового дрейфа параметров транзисторов. **Дрейф напряжения смещения** или **температурный коэффициент входного напряжения смещения** определяется изменением напряжения смещения, вызванным различиями тепловых характеристик транзисторов. Как правило, он на несколько порядков ниже теплового дрейфа напряжения ΔV_{BE}. Единицей измерения дрейфа входного напряжения смещения является мкВ/К.

7.3.10.9. Примеры дифференциальных усилителей

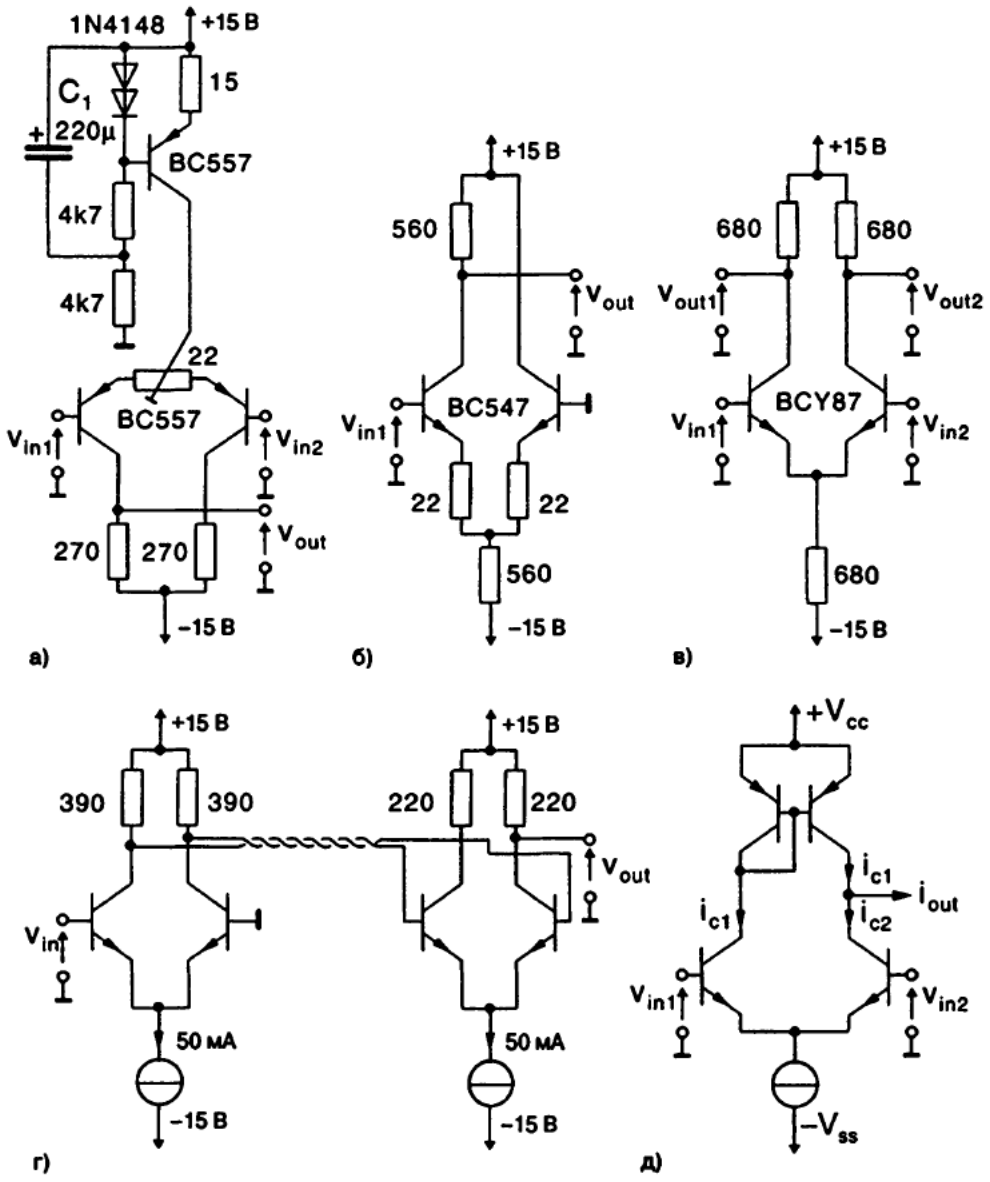


Рис. 7.60. Примеры дифференциальных усилителей

На рис. 7.60 приведены примеры дифференциальных усилителей:

а) дифференциальный усилитель с источником тока. Отличается хорошим подавлением пульсаций напряжения питания. Усилитель обладает обратной связью по току, в цепь которой встроен потенциометр для регулирования симметричности транзисторов;

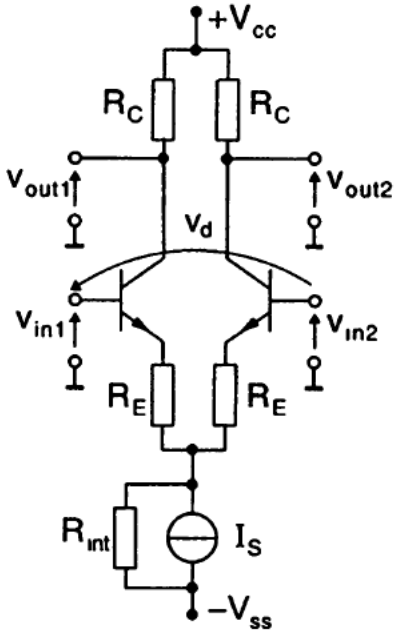
б) дифференциальный усилитель с однополюсным выходом. В этом случае сопротивление из цепи коллектора может быть совсем убрано. Недостаток этой схемы заключается в разном рассеянии мощности на транзисторах, что приводит к потере их тепловой симметрии;

в) дифференциальный усилитель без токовой обратной связи. Здесь используется транзисторная пара BCY87, реализованная в одном корпусе;

г) симметричная передача аналоговых сигналов при помощи двух дифференциальных усилителей. При такой организации линии передачи сигналов устраняются практически все электромагнитные наводки;

д) дифференциальный усилитель со встроенной схемой токового зеркала. Выходной ток такого усилителя определяется выражением: $i_{out} = (v_{in1} - v_{in2}) \cdot \frac{\beta_0}{r_{BE}}$. Эта схема часто используется при разработке интегральных схем (ИС), где требуется обеспечивать согласование тепловых характеристик и малый разброс параметров транзисторов.

7.3.11. Дифференциальные усилители на биполярных транзисторах (обзор)



Коэффициент передачи дифференциального сигнала:

$$A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{v_{out2}}{v_d} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E} \quad \text{при} \quad v_{in1} - v_{in2} = v_d.$$

Коэффициент передачи синфазного сигнала:

$$A_{CM} = \frac{v_{out1}}{v_{CM}} = \frac{v_{out2}}{v_{CM}} \approx -\frac{R_C}{2r_{iS}} \quad \text{при} \quad v_{in1} = v_{in2} = v_{CM}.$$

Коэффициент ослабления синфазного сигнала:

$$\text{КОСС} = \frac{A_d}{A_{CM}} = \frac{r_{iS}}{\frac{r_{BE}}{\beta_0} + R_E}.$$

Входной импеданс в режиме передачи дифференциальных сигналов:

$$r_d \approx 2(r_{BE} + \beta_0 R_E).$$

Выходной импеданс:

$$r_{out} = R_C.$$

7.3.12. Токовое зеркало

Выходной ток схемы токового зеркала I_{out} практически равен входному току I_1. Выход токового зеркала обладает свойствами источника тока, т. е. обладает высокоимпедансным внутренним сопротивлением.

На рис. 7.61 ток I_1 является входным сигналом. Транзисторы T_1 и T_2 должны быть одинаковыми и работать при одной и той же температуре. Из схемы на рис. 7.61 следует:

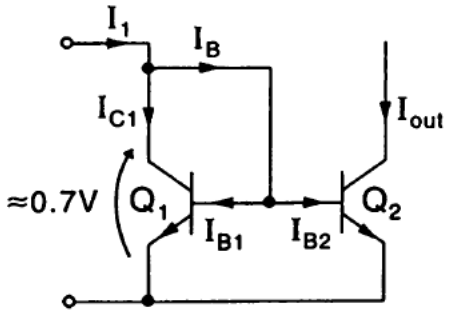


Рис. 7.61. Схема токового зеркала

$$I_1 = I_{C1} + I_B, \quad I_{B1} = I_{B2} = \frac{I_B}{2}, \quad I_{C1} = \beta_{DC} \cdot I_{B1}, \tag{7.85}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \beta_{DC} \cdot I_{B1} + 2I_{B1} = (2+\beta_{DC}) \cdot I_{B1} \\ I_{out} &= \beta_{DC} \cdot I_{B2} = \beta_{DC} \cdot I_{B1} \end{aligned}\right\} \; I_{out} \approx I_1. \tag{7.86}$$

7.3.12.1. Варианты схем токовых зеркал

На рис. 7.62 показаны способы умножения или деления входного тока.

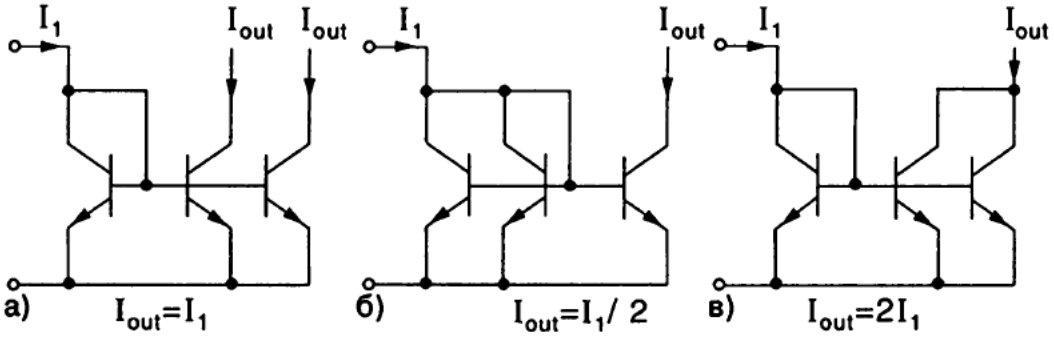


Рис. 7.62. Варианты схем токовых зеркал

7.4. Усилители малых сигналов на полевых транзисторах

Усилители малых сигналов — это схемы, используемые для усиления небольших переменных сигналов, амплитуда которых намного меньше значений токов и напряжений в рабочих точках (например, значений постоянных токов и напряжений, подаваемых на компоненты). Усилители малых сигналов должны работать на сравнительно низких частотах, для того чтобы можно было не учитывать задержки распространения и фазовые изменения сигналов, вызванные паразитными элементами (в противном случае это должно указываться в рабочих условиях).

7.4.1. Характеристики транзисторов и основные соотношения

7.4.1.1. Полевые транзисторы: обозначения, токи и напряжения

Выводы полевых транзисторов называются: **сток** (D), **исток** (S) и **затвор** (G). Полевые транзисторы являются компонентами, управляемыми напряжением. Ток сток–исток определяется напряжением затвор–исток. На низких частотах для управления полевым транзистором практически не требуется никаких затрат мощности. Это значит, что через затвор протекает очень маленький ток.

Следует различать **полевые транзисторы с управляющим *p-n*-переходом** (JFET) и **полевые транзисторы с изолированным затвором** (IGFET), которые также называются **полевыми транзисторами со структурой металл – окисел – полупроводник** (MOSFET) или МОП-транзисторами. МОП-транзисторы бывают как обогащёнными, так и обеднёнными, тогда как JFET-транзисторы — только обедненными. **Обогащенный тип** транзисторов означает, что при $V_{GS} = 0$ канал сток–исток закрыт. **Обедненный тип** транзисторов означает, что при $V_{GS} = 0$ канал сток–исток открыт.

Также следует различать *n*-канальные полевые транзисторы и *p*-канальные. В *n*-канальных транзисторах ток затвора втекает в затвор, т. е. такие транзисторы включаются положительным смещением затвора (положительным напряжением затвор–исток). В *p*-канальных транзисторах ток затвора вытекает из затвора, т. е. такие транзисторы включаются отрицательным смещением затвора (отрицательным напряжением затвор–исток).

Примечание. Можно провести аналогию между *n*-канальными полевыми транзисторами и биполярными транзисторами *n-p-n*-типа, а также между *p*-канальными транзисторами и транзисторами *p-n-p*-типа.

На рис. 7.63 дан обзор основных типов полевых транзисторов.

В **полевом транзисторе с управляющим *p-n*-переходом** в нормальном режиме работы канал затвор–исток представляет собой обратно смещенный кремниевый диод. Прямое смещение этого диода может привести к выходу полевого транзистора из строя из-за сильного увеличения тока (см. характеристики прямо смещенного диода).

В **МОП-транзисторах** затвор изолирован от стока и истока. Максимальное напряжение затвор–исток лежит в диапазоне ±20 В.

МОП-транзисторы часто используются как электронные ключи. Минимальное сопротивление сток–исток $R_{DS(ON)}$ соответствует замкнутому состоянию ключа (состояние «включен»), достигаемому при напряжении $V_{GS} > 10$ В.

Часто параллельно **МОП-транзисторам** ставят кремниевые диоды (диоды обратного тока). В непроводящем состоянии канал исток–сток ведет себя как обратно смещенный кремниевый диод, который может играть роль выпрямителя при использовании в преобразователях частоты и двухтактных усилителях.

В **МОП-транзисторах** существует дополнительный вывод, называемый **подложкой** (B), которая образует с каналом диодное соединение и вследствие этого управляет им подобно затвору.

Примечание. Для контроля исправности МОП-транзистора используется тестер для проверки электрических цепей на обрыв, который подключается к каналу сток–исток, соединенному с источником напряжения 10 В, управляющим напряжением затвор–исток. Если с транзистором все в порядке, то состояние канала должно оставаться неизменным (открытым или закрытым) даже при отключенном управляющем напряжении V_{GS}.

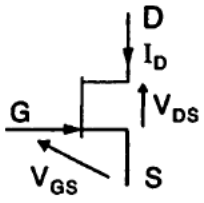
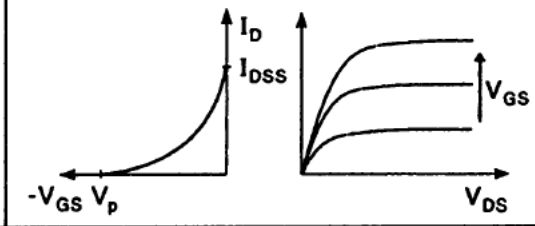
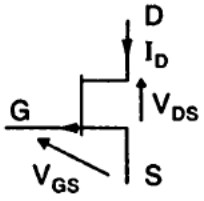
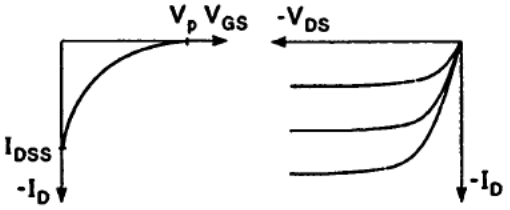
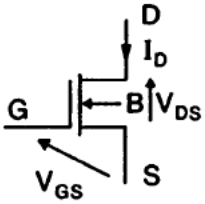
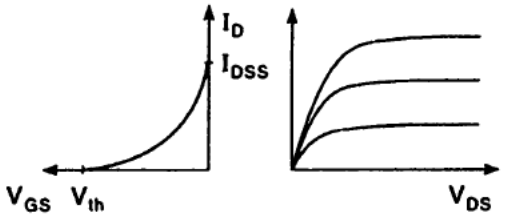
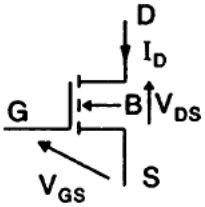
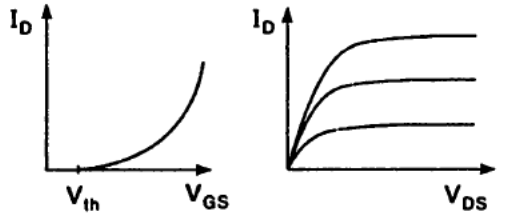
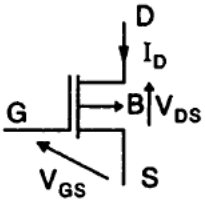
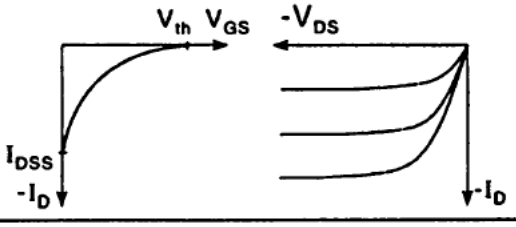
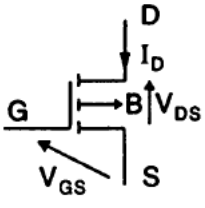
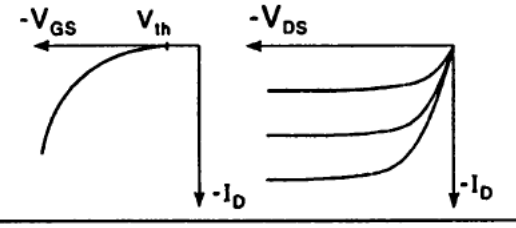
Тип	Обозначение	Характеристики
n-канальный полевой транзистор с управляющим *p-n*-переходом		
p-канальный полевой транзистор с управляющим *p-n*-переходом		
n-канальный обедненный МОП-транзистор		
n-канальный обогащенный МОП-транзистор		
p-канальный обедненный МОП-транзистор		
p-канальный обогащенный МОП-транзистор		

Рис. 7.63. Классификация, напряжения, токи и характеристики полевых транзисторов

7.4.1.2. Характеристические кривые полевого транзистора с управляющим *p-n*-переходом

На рис. 7.64 представлены **передаточная характеристика** $I_D = f(V_{GS})$ и **выходная характеристика** $I_D = f(V_{DS})$ *n*-канального полевого транзистора с управляющим *p-n*-переходом, показывающие взаимосвязь всех его токов и напряжений.

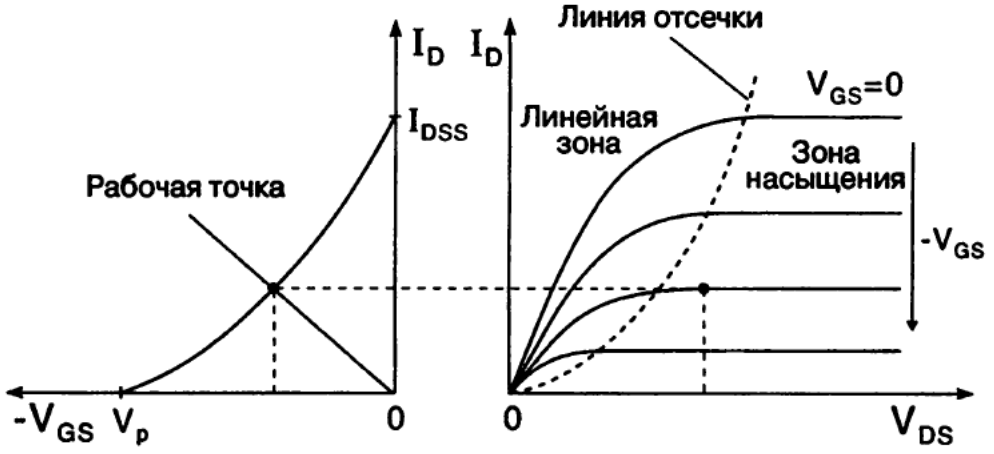


Рис. 7.64. Характеристические кривые *n*-канального полевого транзистора с управляющим *p-n*-переходом

Напряжение V_P называется **напряжением отсечки**. При $V_{GS} = V_P$ ток стока I_D становится практически равным нулю. Величина V_P определяется технологией изготовления и зависит от температуры.

Входным напряжением является напряжение затвор–исток V_{GS}, лежащее в пределах V_P...0 В. При $V_{GS} > 0$ В транзистор теряет высокий импеданс затвора.

Передаточную характеристику можно записать в аналитическом виде:

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2. \qquad (7.87)$$

Выходная характеристика делится на **две зоны: линейную и насыщения**. В зоне насыщения характеристическая кривая практически горизонтальная, и ток стока зависит только от напряжения затвор-исток и почти не зависит от приложенного напряжения сток–исток. В линейной зоне ток стока прямо пропорционален напряжению сток–исток. При этом коэффициент пропорциональности зависит от напряжения V_{GS}. Граница между зонами называется линией отсечки, определяемой выражением:

$$V_k = V_{GS} - V_P, \qquad (7.88)$$

7.4.1.3. Характеристические кривые МОП-транзистора

Пороговое напряжение V_{th} аналогично напряжению отсечки в полевых транзисторах с *p-n*-переходом. Для МОП-транзисторов обогащенного типа оно лежит в положительном диапазоне напряжений затвор–исток, а для транзисторов обедненного типа — в отрицательном. Величина V_{th} определяется в основном производственными допусками. Поскольку в МОП-транзисторах затвор изолирован от проводящего канала, в них могут использоваться довольно высокие напряжения затвор–исток (обычными являются значения ±20 В).

Аналитический вид передаточной характеристики МОП-транзистора такой же, как у полевых транзисторов с *p-n*-переходом:

$$I_D = I_{DSS}\left(1-\frac{V_{GS}}{V_{th}}\right)^2. \qquad (7.89)$$

В МОП-транзисторах обогащенного типа ток I_{DSS} заменяется на $I_D = I_D$ ($V_{GS} = 2V_{th}$) (рис. 7.65).

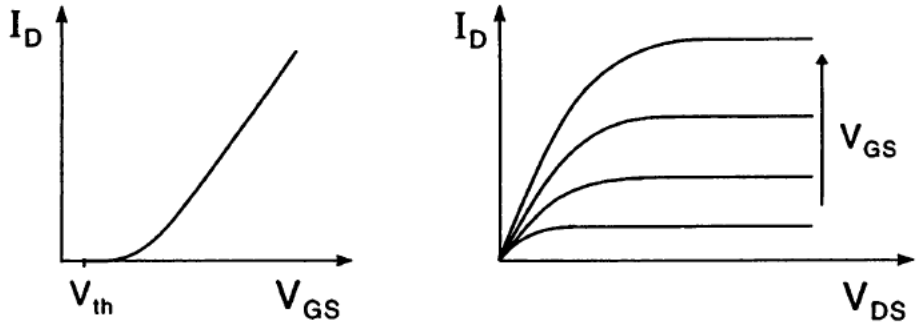


Рис. 7.65. Характеристические кривые *n*-канального МОП-транзистора обогащенного типа

7.4.1.4. Крутизна полевого транзистора

Крутизна (передаточная проводимость) транзистора g_m определяется наклоном передаточной характеристики $I_D = f(V_{GS})$(рис. 7.66):

$$g_m = \left.\frac{dI_D}{dV_{GS}}\right|_{V_{DS}=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta I_D}{\Delta V_{GS}}\right|_{V_{DS}=\text{const}}. \qquad (7.90)$$

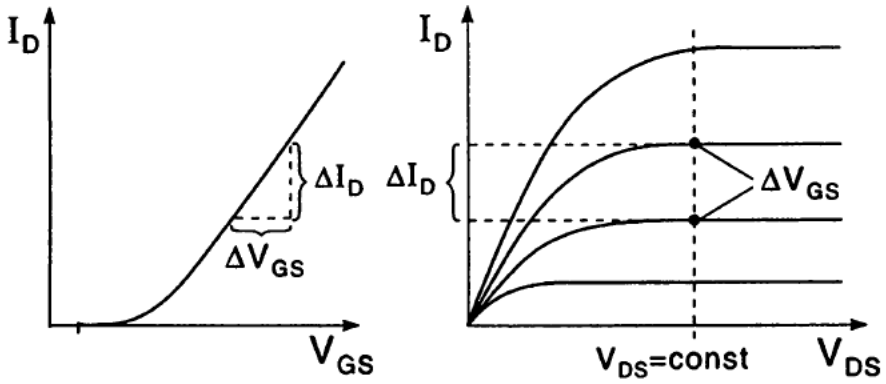


Рис. 7.66. Определение крутизны транзистора по передаточной и выходной характеристикам

На низких частотах условие V_{DS} = const является практически бесполезным.

Единицей измерения g_m является сименс или миллисименс.

7.4.1.5. Динамическое выходное сопротивление

Динамическое выходное сопротивление — это изменение тока стока в ответ на изменение напряжения сток–исток при постоянном напряжении затвор–исток (рис. 7.67).

$$r_{DS} = \left.\frac{dV_{DS}}{dI_D}\right|_{V_{GS}=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta V_{DS}}{\Delta I_D}\right|_{V_{GS}=\text{const}} . \quad (7.91)$$

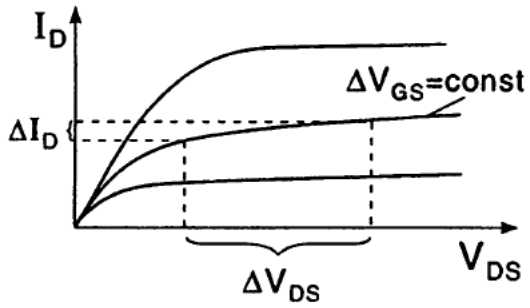


Рис. 7.67. Определение динамического выходного сопротивления

Значения r_{DS} полевых транзисторов (особенно МОП), как правило, очень велики (именно поэтому выходные характеристические кривые практически горизонтальны).

7.4.1.6. Входной импеданс

Входной импеданс полевого транзистора определяется импедансом перехода затвор–исток, который является емкостным. В спецификациях на транзисторы он задается либо как C_{iss}, либо как параметр четырехполюсника C_{11S}. Величина входного импеданса лежит в пределах от нескольких пикофарад до нескольких нанофарад.

7.4.2. Эквивалентные схемы

7.4.2.1. Эквивалентная схема полевого транзистора, работающего на низких частотах

Напряжение затвор–исток управляет током стока. Поскольку значение r_{DS}, как правило, очень большое, при анализе схемы его можно не учитывать.

Для схемы, показанной на рис. 7.68, справедливо:

$$i_D \approx g_m \cdot v_{GS}, \quad I_D \approx \Delta g_m \cdot V_{GS}. \quad (7.92)$$

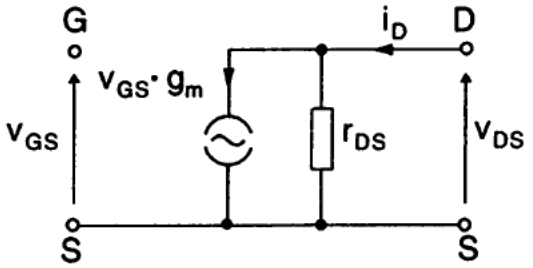


Рис. 7.68. Эквивалентная схема по переменному току полевого транзистора, работающего на низких частотах

7.4.2.2. Эквивалентная схема полевого транзистора, работающего на высоких частотах

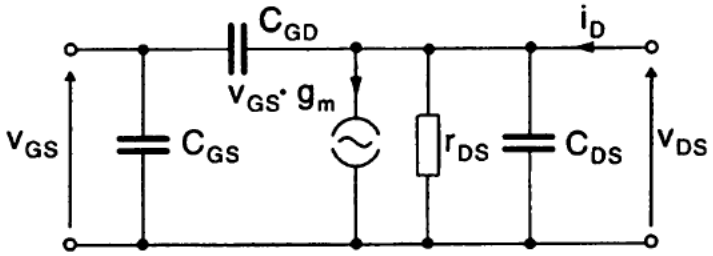


Рис. 7.69. Эквивалентная схема полевого транзистора, работающего на высоких частотах

На высоких частотах начинают играть роль паразитные емкости между всеми выводами транзисторов (рис. 7.69). Емкость затвор–исток является нагрузкой для источника входного напряжения. Емкость затвор–сток в схеме с общим истоком создает обратную связь, глубина которой зависит от внутреннего сопротивления источника входного напряжения. При уменьшении этого сопротивления частотно-зависимая обратная связь ослабевает.

Между параметрами C_{iss}, C_{rss} и C_{oss}, иногда обозначаемыми C_{11s}, C_{12s} и C_{22s}, указываемыми в спецификациях на транзисторы и величинами, используемыми в эквивалентной схеме, существует следующая взаимосвязь:

Входная емкость	$C_{iss} = C_{11s} \approx C_{GS} + C_{GD}$,
Емкость обратной передачи	$C_{rss} = C_{12s} \approx C_{GD}$,
Выходная емкость	$C_{0ss} = C_{22s} \approx C_{DS} + C_{GD}$.

7.4.2.3. Критическая частота передаточной проводимости

Полевые транзисторы обладают очень высокой **критической частотой** передаточной проводимости (крутизны). Например, для популярного транзистора BF245 эта частота составляет около 700 МГц. Именно поэтому полевые транзисторы широко используются для построения высокочастотных усилителей.

В справочных таблицах этот параметр приводится только для транзисторов, применяемых в аналоговых схемах. Для большинства МОП-транзисторов критическая частота не указывается, поскольку они в основном используются для построения быстродействующих переключателей.

7.4.3. Основные схемы на полевых транзисторах

Существует три основные схемы включения полевых транзисторов, используемые для работы в режиме малых сигналов: с общим стоком, с общим истоком и общим затвором (см. рис. 7.70 и раздел 7.3.4).

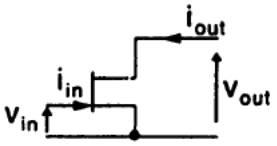
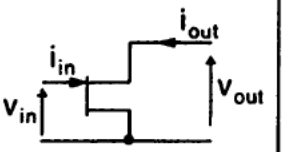
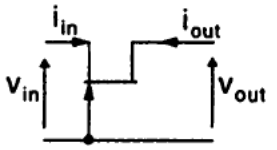
	Схема с общим истоком	Схема с общим стоком	Схема с общим затвором
Схема			
Коэффициент передачи по напряжению A_v	> 1	< 1	> 1
Коэффициент передачи по току A_i	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	1
Входной импеданс, r_{in}	очень высокий	очень низкий	низкий
Выходной импеданс, r_{out}	средний	низкий	средний

Рис. 7.70. Основные схемы на полевых транзисторах

7.4.4. Схема с общим истоком

Схема с общим истоком является схемой усилителя, применяемого для усиления сигналов тока и напряжения (рис. 7.71).

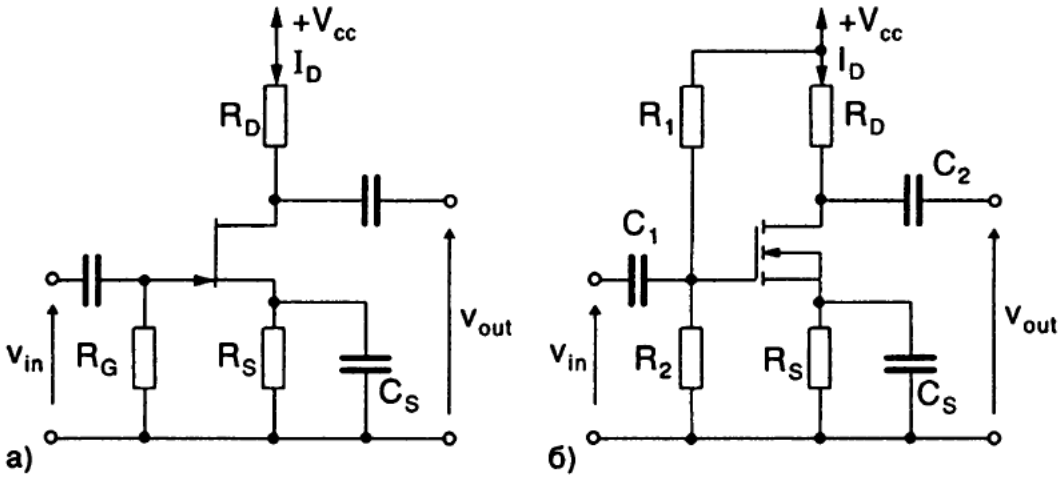


Рис. 7.71. Схемы с общим истоком:
а) на основе полевого транзистора с *p-n* переходом;
б) на основе МОП-транзистора

Схема с общим истоком на основе полевого транзистора с *p-n*-переходом

На рис. 7.71а показана схема с общим истоком на основе полевого транзистора с *p-n*-переходом. Рабочая точка транзистора выбирается в зоне насыщения выходной характеристической кривой. Следовательно, для *n*-канальных полевых транзисторов обедненного типа напряжение V_{GS} должно быть отрицательным. Между затвором и землей включается высокоимпедансный резистор R_G. Ток истока, проходя через сопротивление R_S, приводит к положительному смещению напряжения истока. Исток соединен с землей через конденсатор C_S. Резистор R_{DC} определяет постоянную составляющую напряжения сток–исток. Выходным

напряжением v_{out} является напряжение стока относительно земли. Его фаза противоположна фазе входного напряжения v_{in} (см. также раздел 7.4.4.8).

Схема с общим истоком на основе МОП-транзистора

На рис. 7.71б показана схема с общим истоком на основе МОП-транзистора обогащенного типа. Эта схема напоминает схему с общим эмиттером. Напряжение на затворе относительно напряжения на истоке должно быть положительным. Стабилизация рабочей точки осуществляется при помощи резистора R_S (см. также раздел о стабилизации рабочей точки полевых транзисторов с p-n-переходом).

7.4.4.1. Параметры четырехполюсника для схемы с общим истоком

Параметры четырехполюсника для схемы с общим истоком часто задаются через y-параметры (рис. 7.72 и табл. 7.1).

$$i_G = y_{11S} \cdot v_{GS} + y_{12S} \cdot v_{DS}$$

$$i_D = y_{21S} \cdot v_{GS} + y_{22S} \cdot v_{DS}$$

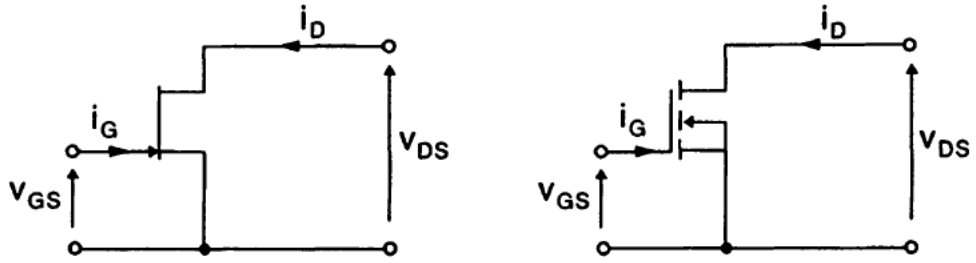


Рис. 7.72. Определение параметров четырехполюсника для схемы с общим истоком

Таблица 7.1. Параметры четырехполюсника для схемы с общим истоком

		Низкие частоты	Высокие частоты
Входная проводимость при закороченных выходных выводах:	$Y_{11s} = \left.\frac{dI_G}{dV_{GS}}\right\|_{V_{DS}=\text{const}} = \left.\frac{i_G}{v_{GS}}\right\|_{V_{DS}=\text{const}} \approx$	0	ωC_{11S}
Обратная проводимость при закороченных входных выводах:	$Y_{12s} = \left.\frac{dI_G}{dV_{DS}}\right\|_{V_{GS}=\text{const}} = \left.\frac{i_G}{v_{DS}}\right\|_{V_{GS}=\text{const}} \approx$	0	ωC_{12S}
Прямая проводимость при закороченных выходных выводах:	$Y_{21s} = \left.\frac{dI_D}{dV_{GS}}\right\|_{V_{DS}=\text{const}} = \left.\frac{i_D}{v_{GS}}\right\|_{V_{DS}=\text{const}} \approx$	g_m	g_m
Выходная проводимость при закороченных входных выводах:	$Y_{22s} = \left.\frac{dI_D}{dV_{DS}}\right\|_{V_{GS}=\text{const}} = \left.\frac{i_D}{v_{DS}}\right\|_{V_{GS}=\text{const}} \approx$	0	ωC_{22S}

7.4.4.2. Эквивалентная схема по переменному току каскада с общим истоком

Сопротивление R_G обычно выбирается очень большим, поэтому его из эквивалентной схемы можно исключить.

На рис.7.73а показана эквивалентная схема, справедливая для моделирования большинства случаев работы каскада с общим истоком на низких частотах.

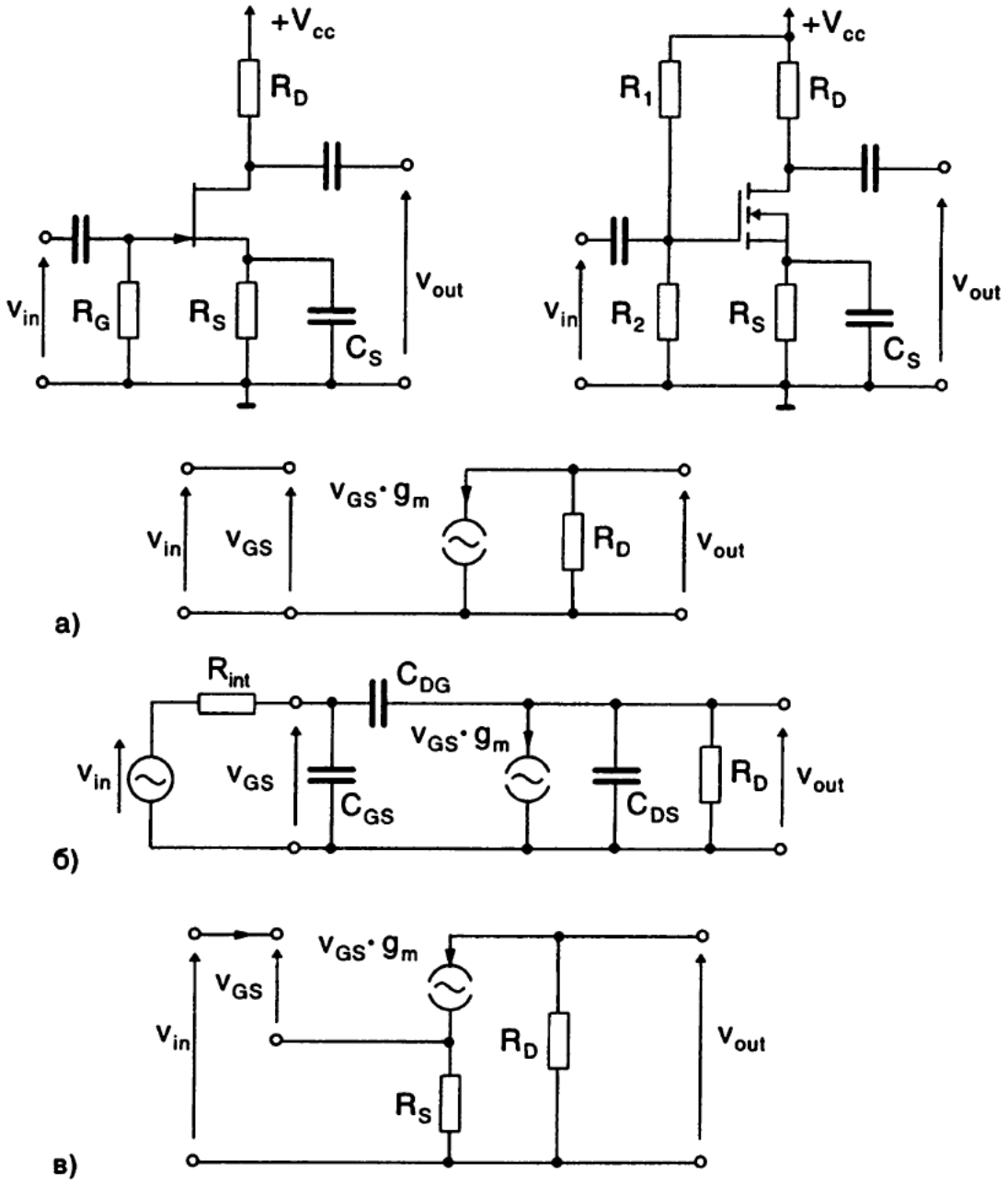


Рис. 7.73. Эквивалентные схемы каскада с общим истоком:
а) для низких частот;
б) для высоких частот;
в) для низких частот при отсутствии конденсатора C_S

Эквивалентная схема, представленная на рис. 7.73б, используется для высоких частот, когда паразитными реактивными сопротивлениями $1/\omega C_{GD}$,

$1/\omega C_{GS}$ и $1/\omega C_{DS}$ пренебречь невозможно, поскольку они становятся сравнимы с внутренним сопротивлением источника напряжения R_{int} и (или) нагрузкой. Эта схема применяется также в случаях, когда сопротивление источника R_{int} настолько большое, что начинает сказываться влияние обратной связи через конденсатор C_{GD} (эффект Миллера).

Эквивалентная схема на рис.7.73в справедлива в отсутствие блокировочного конденсатора C_S.

7.4.4.3. Входной импеданс схемы с общим истоком

Входной импеданс схемы с общим истоком определяется выражением:

$$z_{in} = \frac{1}{Y_{11S}} \approx \begin{cases} \infty & \text{для низких частот} \\ \omega C_{11S} = \omega C_{iss} & \text{для высоких частот.} \end{cases} \quad (7.93)$$

7.4.4.4. Выходной импеданс схемы с общим истоком

Выходной импеданс схемы с общим истоком равен отношению:

$$z_{out} = \frac{\text{переменное напряжение в режиме холостого хода}}{\text{переменный ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}} = \frac{v_{o/c} S R_D}{v_{o/c} S}.$$

Следовательно:

$$z_{out} = \begin{cases} \dfrac{v_{o/c} g_m R_D}{v_{o/c} g_m} = R_D & \text{для низких частот} \\ \dfrac{v_{o/c} g_m \left(R_D \left\| \dfrac{1}{j\omega C_{22S}} \right. \right)}{v_{o/c} g_m} = R_D \left\| \dfrac{1}{j\omega C_{22S}} \right. & \text{для высоких частот.} \end{cases} \quad (7.94)$$

7.4.4.5. Коэффициент передачи по переменному напряжению

В соответствии со схемой на рис. 7.73а коэффициент передачи по переменному напряжению каскада с общим истоком определяется соотношением:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{v_{GS} \cdot g_m \cdot R_D}{v_{GS}} = -g_m \cdot R_D. \quad (7.95)$$

Если к схеме подключена нагрузка R_L, то A_v становится равным:

$$A_v = -g_m \cdot (R_D \| R_L). \quad (7.96)$$

Входное и выходное напряжения имеют противоположные фазы.

Поскольку крутизна характеристик полевого транзистора значительно меньше крутизны биполярного транзистора, коэффициент передачи по переменному напряжению схемы с общим истоком значительно меньше аналогичного коэффициента схемы с общим эмиттером.

В соответствии со схемой на рис. 7.73в коэффициент A_v в режиме малых сигналов равен:

$$A_v = -\frac{g_m \cdot R_D}{1 + g_m \cdot R_S}. \quad (7.97)$$

На высоких частотах выходное напряжение через **емкость обратной связи** C_{GD} возвращается в противофазе ко входу схемы. Чем выше значение R_{int}, тем больше снижается усиление. Более того, на высоких частотах импеданс выходной емкости достигает величины импеданса стока, что ведет к еще большему уменьшению коэффициента усиления по напряжению. Более точный анализ поведения коэффициента передачи по напряжению на высоких частотах проводят при помощи либо измерений, либо подходящих систем моделирования.

7.4.4.6. Определение рабочей точки

Определение рабочей точки полевого транзистора обедненного типа

Выбор сопротивлений R_D, R_S и R_G, определяющих положение рабочей точки (ОР), осуществляется по выходной характеристической кривой и кривой проводимости транзистора (рис. 7.74). Координаты рабочей точки V_{DS0} и I_{D0} выбираются следующим образом.

- $I_{D0} = 0{,}3...0{,}5\, I_{DSS}$, $V_{DS0} \approx 0{,}3...0{,}5\, V_{CC}$.
- Рабочую точку следует располагать в зоне насыщения, при этом должно учитываться напряжение на затворе.
- Рабочая точка должна быть ниже кривой допустимой мощности рассеяния P_{total}.

С учетом всего этого получаем:

$$R_S = \frac{-V_{GS0}}{I_{D0}}, \quad R_D = \frac{V_{CC} - V_{DS0}}{I_{D0}}. \tag{7.98}$$

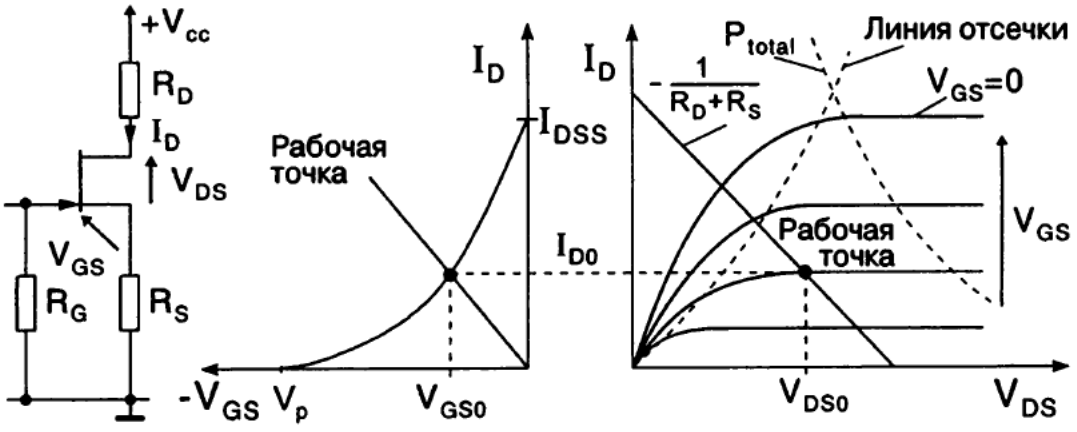


Рис. 7.74. Смещение рабочей точки полевого транзистора обедненного типа

Резистор R_D определяет коэффициент усиления по напряжению. Для большего усиления надо выбирать меньшие значения I_{D0} и бóльшие значения V_{CC}.

Сопротивление R_G служит для связи затвора с землей. Из-за большого импеданса затвора R_G должен быть порядка нескольких мегаом.

Температурная зависимость V_P и производственные допуски приводят к сдвигу рабочей точки вдоль линии, наклон которой равен $-1/R_S$. Это означает, что существует довольно обширная область допустимых положений рабочей точки.

Определение рабочей точки полевого транзистора обогащенного типа

Координаты рабочей точки V_{DS0} и I_{D0} выбираются, исходя из выходной характеристической кривой следующим образом.

- $V_{DS0} \approx 0{,}3...0{,}5\ V_{CC}$.
- Рабочую точку следует располагать в зоне насыщения.
- Рабочая точка должна быть ниже кривой допустимой мощности рассеяния P_{total}.(рис. 7.75).

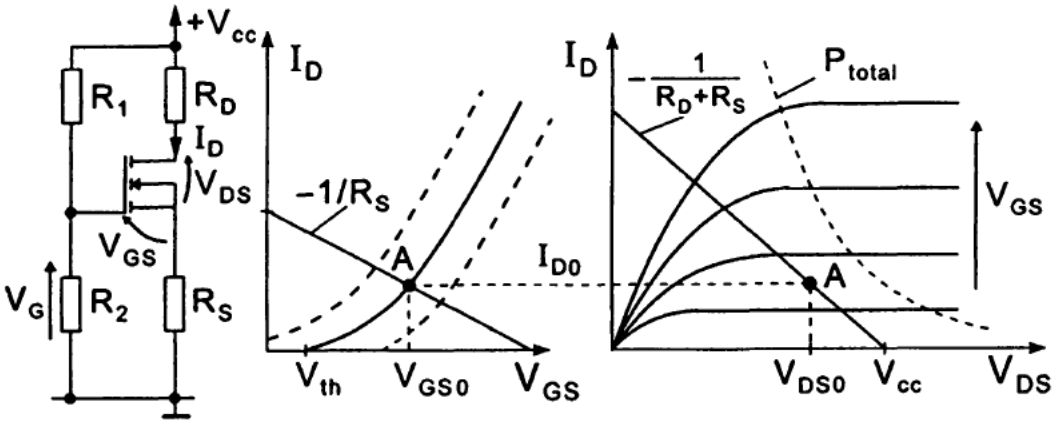


Рис. 7.75. Смещение рабочей точки полевого транзистора обогащенного типа

Ток стока определяется делителем напряжения R_1, R_2, а также резистором в цепи истока R_S. При выборе этих трех сопротивлений рассматриваются различные комбинации параметров на кривой проводимости $I_D = f(V_{GS})$. Наклон линии смещения $-1/R_S$ задается таким, чтобы, несмотря на изменения порогового напряжения V_{th}, рабочая точка оставалась в зоне разрешенных значений на выходной характеристической кривой. При помощи кривой проводимости могут быть также определены значения параметров R_S и V_G. С учетом всего этого получаем:

$$R_S = \frac{V_G - V_{GS0}}{I_{D0}}, \quad R_D = \frac{V_{CC} - V_{DS0}}{I_{D0}} - R_S, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{V_{CC} - V_G}{V_G}. \tag{7.99}$$

Делитель напряжения R_1/R_2, как правило, выбирается в мегаомном диапазоне.

7.4.4.7. Схема с общим стоком (истоковый повторитель)

Схема с общим стоком (истоковый повторитель) аналогична схеме эмиттерного повторителя, но обладает меньшим коэффициентом передачи по напряжению $A_v < 1$, поскольку полевые транзисторы обладают меньшей проводимостью (крутизной) по сравнению с биполярными транзисторами. Если истоковый повторитель стоит сразу после схемы с общим истоком (рис. 7.76), то из схемы с общим стоком можно убрать делитель напряжения R_1, R_2.

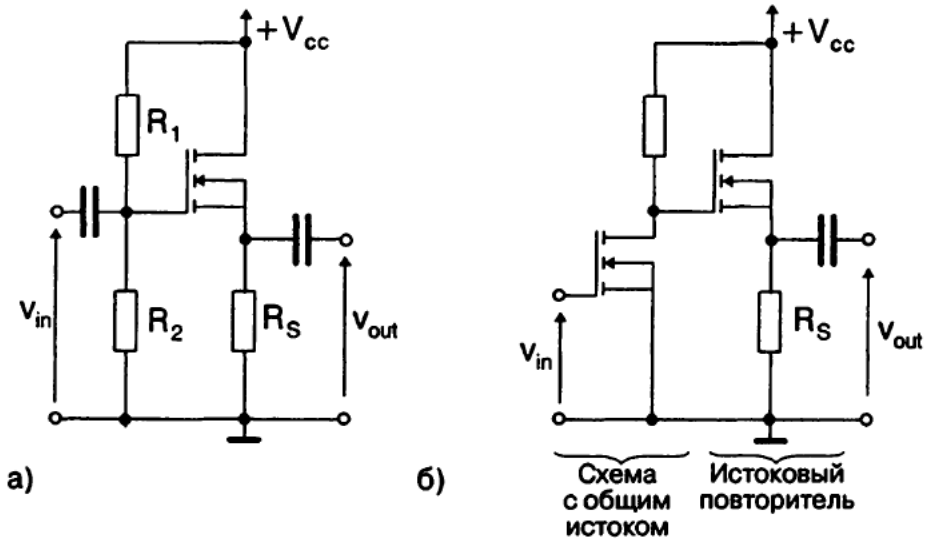


Рис. 7.76. Схема с общим стоком (истоковый повторитель)

Схема с общим стоком обладает очень высоким входным и низким выходным импедансом, поэтому часто используется в качестве преобразователя импеданса.

7.4.4.8. Эквивалентная схема по переменному току каскада с общим стоком

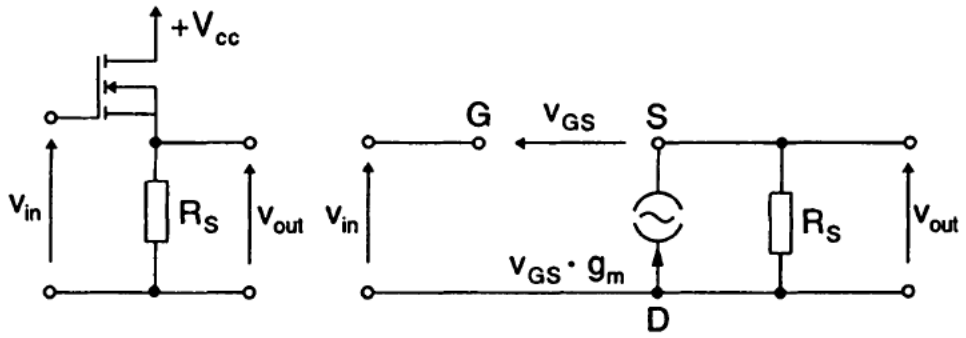


Рис. 7.77. Эквивалентная схема по переменному току каскада с общим стоком

7.4.4.9. Входной импеданс схемы с общим стоком

Схема с общим стоком обладает очень высоким входным импедансом:

$$r_{in} \to \infty. \qquad (7.100)$$

7.4.4.10. Выходной импеданс схемы с общим стоком

Выходной импеданс схемы с общим стоком определяется отношением:

$$r_{out} = \frac{\text{переменное напряжение в режиме холостого хода}}{\text{переменный ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}}.$$

Из рис.7.77 следует, что в режиме холостого хода:

$$v_{in} = v_{GS} + v_{GS} \cdot g_m \cdot R_S, \quad v_{o/c} = v_{GS} \cdot g_m \cdot R_S, \quad v_{o/c} = \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S} v_{in},$$

а в режиме короткого замыкания $i_{s/c} = v_{in} \cdot g_m$.

Исходя из этого, получаем:

$$r_{out} = \frac{R_S}{1 + g_m \cdot R_S}. \quad (7.101)$$

7.4.4.11. Коэффициент передачи по переменному напряжению схемы с общим стоком

Из схемы на рис. 7.77 находим, что:

$$v_{in} = v_{GS} + v_{GS} \cdot g_m \cdot R_S, \quad v_{out} = v_{GS} \cdot g_m \cdot R_S.$$

Тогда коэффициент передачи по переменному напряжению каскада с общим стоком определяется соотношением:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S}. \quad (7.102)$$

7.4.4.12. Работа схемы с общим стоком на высоких частотах

Схема с общим стоком может работать до критической частоты проводимости f_{y21S}.

7.4.5. Схема с общим затвором

Схема с общим затвором аналогична схеме с общей базой на биполярных транзисторах (рис. 7.78). Коэффициент передачи по току этой схемы равен 1, а коэффициент усиления по напряжению такой же, как у схемы с общим истоком. Схема с общим затвором обладает низким входным импедансом, а ее выходной импеданс равен R_D. Поскольку входное и выходное напряжения такой схемы совпадают по фазе, в ней отсутствуют нежелательные частотнозависимые обратные связи. Следовательно, она может использоваться в качестве высокочастотного усилителя напряжений. Рабочая точка в схеме с общим затвором определяется и стабилизируется при помощи резистора R_S.

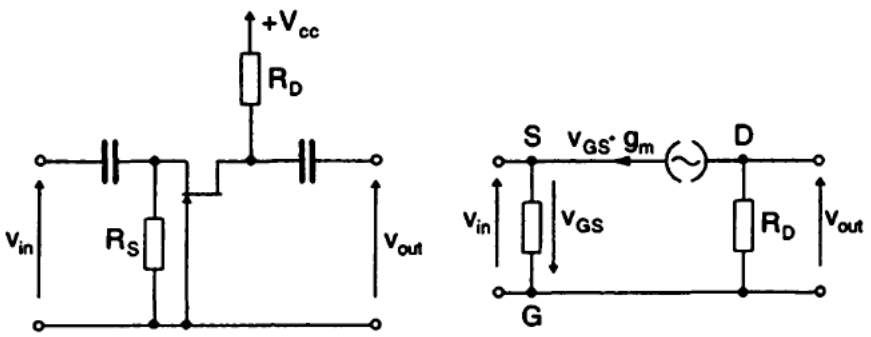


Рис. 7.78. Схема с общим затвором и ее эквивалентная схема по переменному току

7.4.5.1. Входной импеданс схемы с общим затвором

Входной импеданс схемы с общим затвором равен:

$$r_{\text{in}} = \frac{1}{g_{\text{m}}} \Big\| R_{\text{S}} \approx \frac{1}{g_{\text{m}}}. \tag{7.103}$$

7.4.5.2. Выходной импеданс схемы с общим затвором

Выходной импеданс схемы с общим затвором определяется выражением:

$$r_{\text{out}} = R_{\text{D}}. \tag{7.104}$$

7.4.5.3. Коэффициент передачи по переменному напряжению схемы с общим затвором

Коэффициент передачи по переменному напряжению каскада с общим затвором определяется соотношением:

$$A_v = g_{\text{m}} \cdot R_{\text{D}}. \tag{7.105}$$

7.4.6. Основные схемы на полевых транзисторах (обзор)

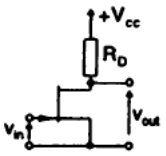
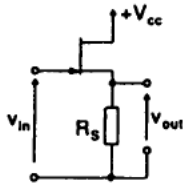
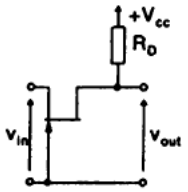
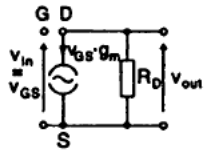
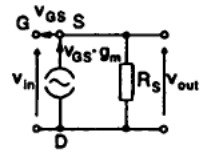
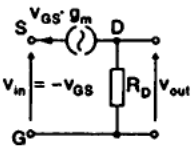
	Схема с общим истоком	Схема с общим стоком (истоковый повторитель)	Схема с общим затвором
Схема			
Эквивалентная схема по переменному току			
A_v	$-g_{\text{m}}R_{\text{D}}$	$\dfrac{g_{\text{m}}R_{\text{S}}}{1+g_{\text{m}}R_{\text{S}}}$	$g_{\text{m}}R_{\text{D}}$
A_i	$\to \infty$	$\to -\infty$	-1
r_{in}	$\to \infty$	$\to \infty$	$1/g_{\text{m}}$
r_{out}	R_{D}	$\dfrac{R_{\text{S}}}{1+g_{\text{m}}R_{\text{S}}}$	R_{D}

Рис. 7.79. Сравнение основных схем на полевых транзисторах

7.4.7. Источники тока на полевых транзисторах

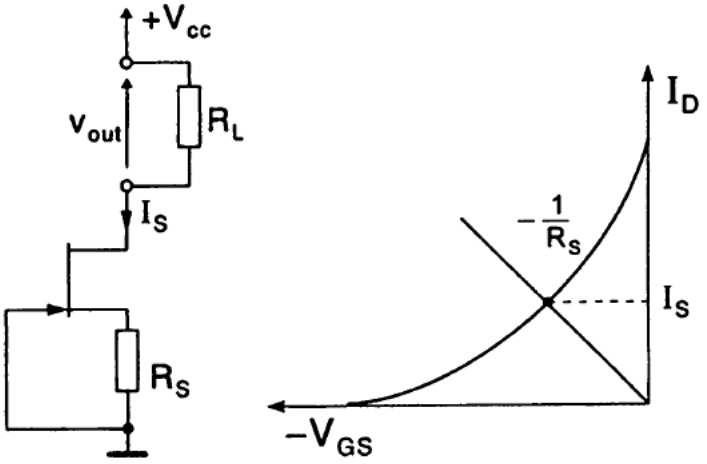


Рис. 7.80. Источник тока на полевом транзисторе с *p-n*-переходом

Источники тока на полевых транзисторах в основном реализуются на транзисторах обедненного типа (рис. 7.80). Они обладают следующими преимуществами над схемами на биполярных транзисторах:

- состоят только из двух компонентов и
- очень хорошо подавляют пульсации напряжения по линии питания, поэтому им не требуются источники эталонного напряжения.

К недостаткам источников тока на полевых транзисторах можно отнести то, что из-за производственных допусков ток I_S может меняться в довольно широких пределах.

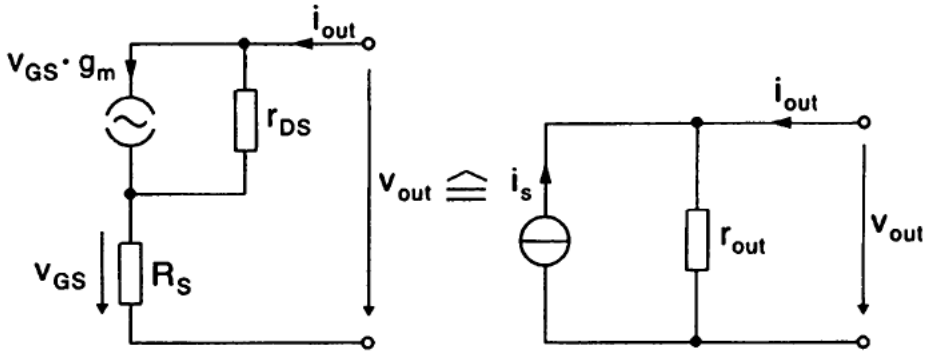


Рис. 7.81. Эквивалентная схема по переменному току источника тока (эквивалентная схема для малых изменений выходного тока i_{out} источника тока I_S)

Дифференциальный внутренний импеданс схемы на рис.7.81 определяется выражением:

$$r_{out} = -\frac{dV_{out}}{dI_{out}} = -\frac{v_{out}}{i_{out}} = r_{DS}(1 + g_m \cdot R_S) + R_S \approx r_{DS}\left(1 + g_m \cdot R_S\right). \qquad (7.106)$$

- Горизонтальность выходной характеристической кривой указывает на очень высокое значение сопротивления r_{DS}, из чего следует вывод, что источник тока обладает очень большим импедансом.

7.4.8. Дифференциальный усилитель на полевых транзисторах

Принципы работы дифференциальных усилителей на полевых и биполярных транзисторах похожи (см. раздел 7.3.10). Из-за симметрии входных напряжений ток I_S делится поровну между двумя транзисторными цепями. Напряжения на истоках, так же как и напряжения затвор–исток, определяются по соответствующим кривым проводимости, в то время как токи через стоки транзисторов по причинам симметричности равны $I_D = I_S/2$ (рис. 7.82). Для обеспечения требуемой симметрии параметров транзисторов лучше всего применять монолитные транзисторные пары. Дифференциальные усилители на полевых транзисторах применяются там, где требуется очень высокий входной импеданс.

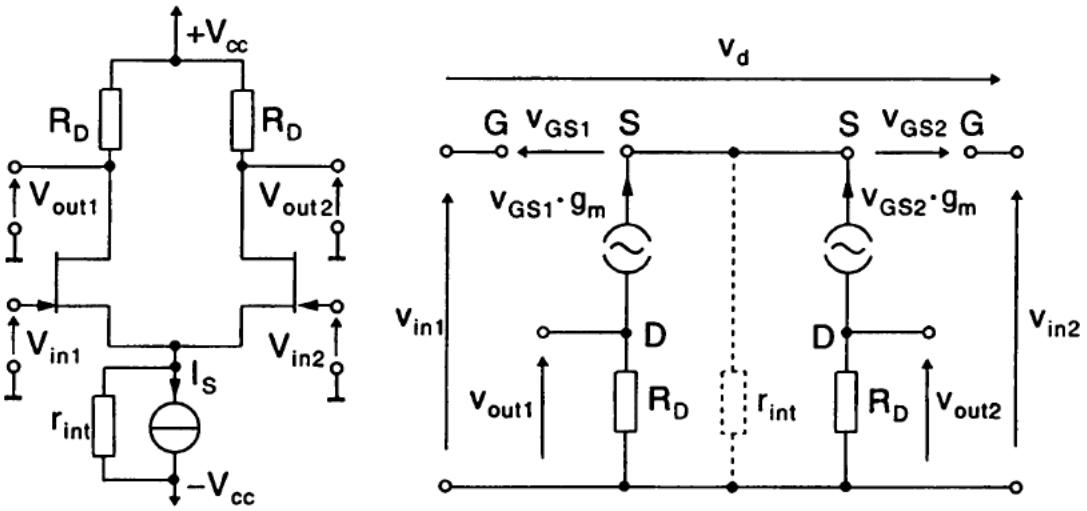


Рис. 7.82. Дифференциальный усилитель на полевых транзисторах и его эквивалентная схема по переменному току. r_{int} — дифференциальное сопротивление источника тока I_S

7.4.8.1. Коэффициент передачи дифференциальных сигналов

Усиление дифференциальных сигналов — это усиление противофазных входных напряжений одинаковой амплитуды.

Из эквивалентной схемы на рис. 7.82 следует, что:

$$V_d = v_{GS1} - v_{GS2}, \quad v_{out1} = -v_{GS1} \cdot g_m \cdot R_D, \quad v_{GS1} = -v_{GS2}, \quad A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{v_{out2}}{v_d}.$$

Отсюда:

$$A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{1}{2} g_m \cdot R_D. \qquad (7.107)$$

7.4.8.2. Коэффициент передачи синфазных сигналов

Синфазные сигналы — это входные напряжения с одинаковыми амплитудами и фазами.

Из эквивалентной схемы на рис. 7.82 (с учетом сопротивления источника тока r_{int}) следует, что:

$$v_{in1} = v_{in2}, \quad v_{in1} = v_{GS1} + i_s \cdot r_{int}, \quad v_{out1} = -v_{GS1} \cdot g_m \cdot R_D, \quad i_s = v_{GS1} \cdot g_m + v_{GS2} \cdot g_m.$$

Отсюда:

$$A_{CM} = \frac{v_{out1}}{v_{in1}} = \frac{v_{out2}}{v_{in2}} \approx -\frac{R_D}{2r_{int}}. \quad (7.108)$$

7.4.8.3. Коэффициент ослабления синфазного сигнала (КОСС)

КООС определяется соотношением:

$$\text{КООС} = \frac{A_d}{A_{CM}} \approx g_m \cdot r_{int}. \quad (7.109)$$

7.4.8.4. Входной импеданс

Входной импеданс в режиме усиления дифференциальных сигналов определяется выражением:

$$z_d = \begin{cases} \to \infty & \text{для низких частот} \\ 2 \cdot \dfrac{1}{j\omega C_{11S}} & \text{для высоких частот.} \end{cases} \quad (7.110)$$

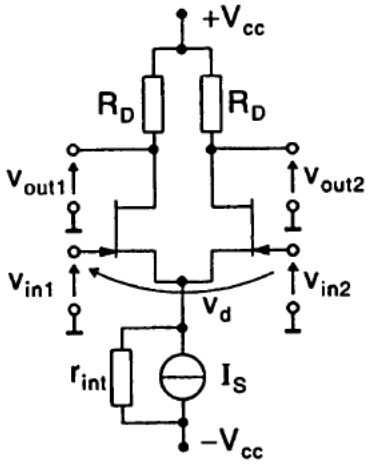
Входной импеданс в режиме усиления синфазных сигналов равен:

$$r_{CM} \to \infty. \quad (7.111)$$

7.4.8.5. Выходной импеданс схемы

$$r_{out} = R_D. \quad (7.112)$$

7.4.9. Дифференциальный усилитель на полевых транзисторах (обзор)



Коэффициент передачи дифференциальных сигналов:

$$A_d = \frac{v_{out1}}{v_d} = -\frac{v_{out2}}{v_d} \approx -\frac{1}{2} g_m \cdot R_D$$

при $v_{in1} - v_{in2} = v_d$.

Коэффициент передачи синфазных сигналов:

$$A_{CM} = \frac{v_{out1}}{v_{CM}} = -\frac{v_{out2}}{v_{CM}} \approx -\frac{R_D}{2r_{int}}$$

при $v_{in1} = v_{in2} = v_{CM}$.

Коэффициент ослабления синфазного сигнала (КОСС):

$$\text{КООС} = \frac{A_d}{A_{CM}} \approx g_m \cdot r_{int}.$$

Входной импеданс в режиме усиления дифференциальных сигналов:

$$z_d \approx 2 \cdot \frac{1}{j\omega C_{11S}}.$$

Выходной импеданс схемы:

$$r_{out} = R_D.$$

7.4.10. Полевой транзистор как регулируемый резистор

В линейной области выходной характеристической кривой полевой транзистор работает как регулируемый резистор. В этом случае полевой транзистор работает с очень низкими напряжениями сток–исток ($V_{DC} < V_k$) (рис. 7.83).

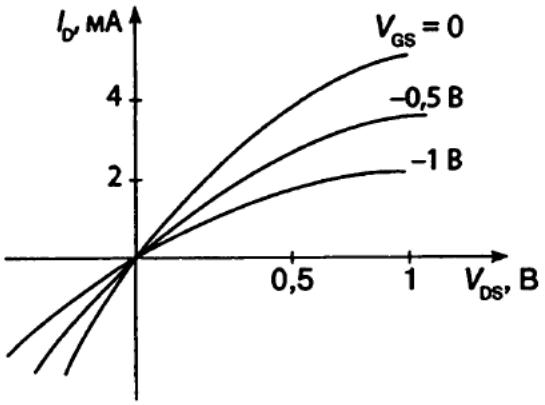


Рис. 7.83. Резистивный диапазон выходных характеристик

Сопротивление полевых транзисторов в области малых сигналов лежит в диапазоне от десятков до сотен ом.

Линеаризация зависимости $I_D = f(V_{DS})$ осуществляется при помощи делителя напряжений (рис. 7.84). Она заключается в следующем: с ростом выходных напряжений увеличивается напряжение затвор–исток, что компенсирует нелинейность характеристики. Номиналы резисторов выбираются из условия: $R_2 = R_3 >> R_{DS}$.

Отсюда следует, что:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_{DS}}{R_1 + R_{DS}}. \qquad (7.113)$$

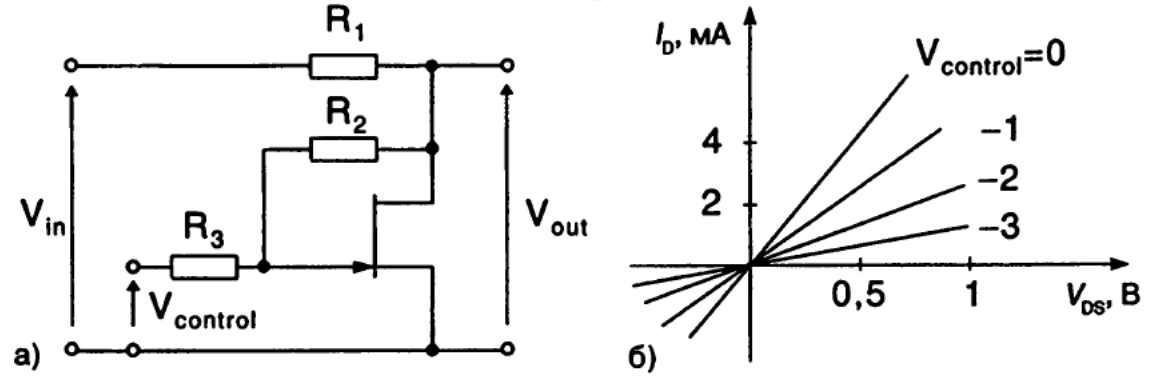


Рис. 7.84. Линеаризация при помощи делителя напряжений

Полевые транзисторы в качестве регулируемых резисторов используются в следующих случаях:

- в системах автоматического регулирования уровня напряжения,
- в управляемых делителях напряжений,
- в схемах стабилизации амплитуды колебаний,
- в схемах с переменным коэффициентом усиления и т. д.

7.5. Отрицательная обратная связь

Обратная связь — это термин, описывающий ситуацию, когда выходной сигнал системы возвращается обратно на ее вход. Термин **отрицательная обратная связь** относится к случаю, когда часть выходного сигнала вычитается из входного сигнала, в то время как при **положительной обратной связи** выходной сигнал складывается со входным сигналом. Для переменных напряжений при отрицательной обратной связи часть выходного сигнала добавляется ко входному сигналу в *противофазе*, а при положительной — входной и выходной сигналы являются *синфазными*.

Системы с положительными обратными связями обычно являются нестабильными, т. е. либо в них появляются колебательные процессы, либо их выходные напряжения входят в положительное или отрицательное насыщение. Очевидно, что на основе положительных обратных связей реализовано большинство генераторов.

Системы с отрицательными обратными связями являются стабильными. Явления неустойчивости возникают в них только при формировании нежелательных положительных обратных связей из-за фазовых смещений на определенных частотах выходных сигналов относительно входных.

Примеры использования отрицательных обратных связей:

- улучшение линейности усилителей,
- обеспечение независимости коэффициента усиления систем от параметров полупроводниковых элементов,
- стабилизация выходных сигналов при изменении нагрузки,
- корректировка частотных характеристик усилителей.

На рис. 7.85 показана блок-схема системы с отрицательной обратной связью. Выходной сигнал умножается на **коэффициент обратной связи** β и вычитается из входного сигнала. Полученная разность сигналов усиливается в A_{OL} раз. Такая система с отрицательной обратной связью часто называется **замкнутой системой**.

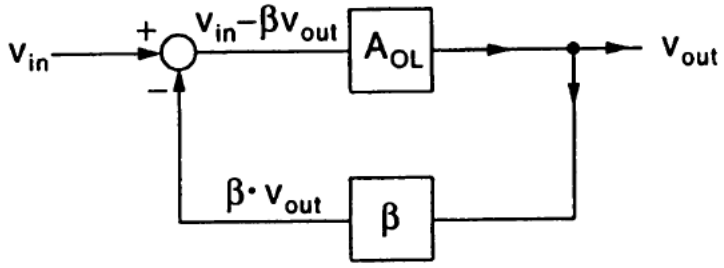


Рис. 7.85. Система с отрицательной обратной связью

Коэффициент усиления замкнутой системы определяется как $A_{CL} = v_{out}/v_{in}$. Поскольку:

$$v_{out} = (v_{in} - \beta \cdot v_{out}) \cdot A_{OL}, \tag{7.114}$$

коэффициент усиления равен:

$$A_{CL} = \frac{A_{OL}}{1 + \beta \cdot A_{OL}}. \tag{7.115}$$

Произведение $\beta \cdot A_{OL}$ называется **коэффициентом передачи цепи обратной связи**, а выражение $1+\beta \cdot A_{OL}$ — **глубиной обратной связи.** При увеличении глубины обратной связи коэффициент усиления замкнутой системы A_{CL} снижается. В данном контексте A_{OL} является **коэффициентом усиления разомкнутой системы**, т. е. эффективным коэффициентом усиления системы без цепи обратной связи.

Преобразуя уравнение (7.115), получаем:

$$A_{CL} = \frac{1}{\frac{1}{A_{OL}} + \beta}. \qquad (7.116)$$

Из этого выражения видно, что при очень больших значениях A_{OL} коэффициент усиления замкнутой системы A_{CL} становится практически независимым от него, т. е.:

$$A_{OL} >> \frac{1}{\beta}, \quad A_{CL} \approx \frac{1}{\beta}.$$

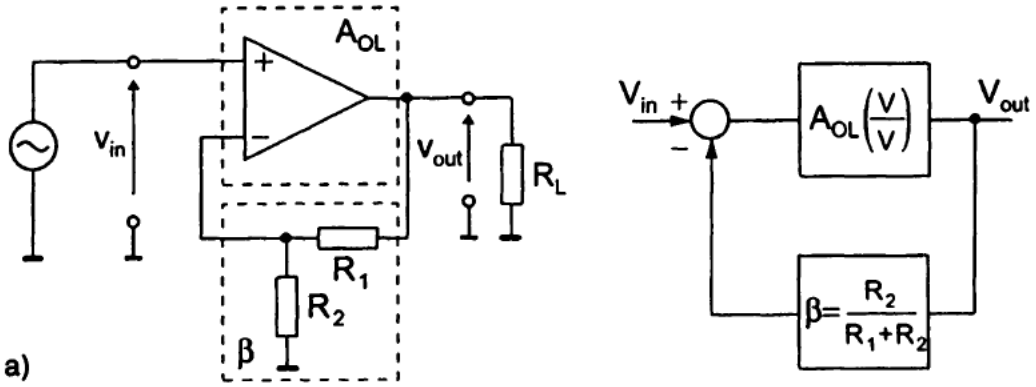
- При очень высоком коэффициенте усиления разомкнутой системы коэффициент усиления замкнутой системы становится приблизительно равным $1/\beta$.
- Цепи обратных связей часто являются линейными резисторными цепями. Если коэффициент $\beta \cdot A_{OL}$ очень большой, то характеристики усилителя с отрицательной обратной связью не зависят от нелинейностей и производственных допусков параметров полупроводниковых элементов, входящих в состав разомкнутой цепи, а определяются только компонентами цепи обратной связи.

7.5.1. Топология систем с обратными связями

На рис. 7.86 показаны четыре разновидности систем с обратными связями. Главное их отличие заключается в типах входных и выходных величин, которые могут быть либо напряжениями, либо токами.

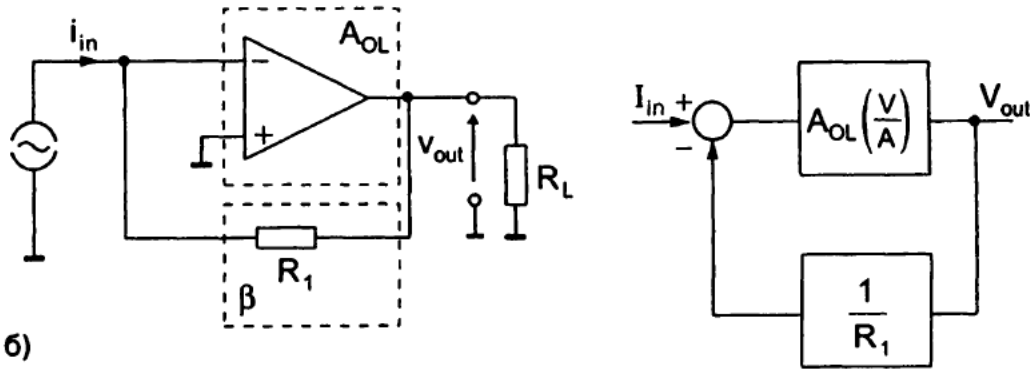
Описание разных типов обратных связей сводится к описанию способов съема выходных сигналов и их подключения ко входным цепям. Первым указывается соединение со входом, вторым — с выходом. Например, термин «последовательно-параллельная обратная связь» означает, что на вход схемы должен подаваться сигнал от источника напряжения и со стороны выхода схема также должна быть источником напряжения, т. е. и входной, и выходной сигналы в такой системе являются напряжениями. Вместо термина «параллельная» часто используется термин «шунтирующая».

Последовательно-параллельная обратная связь



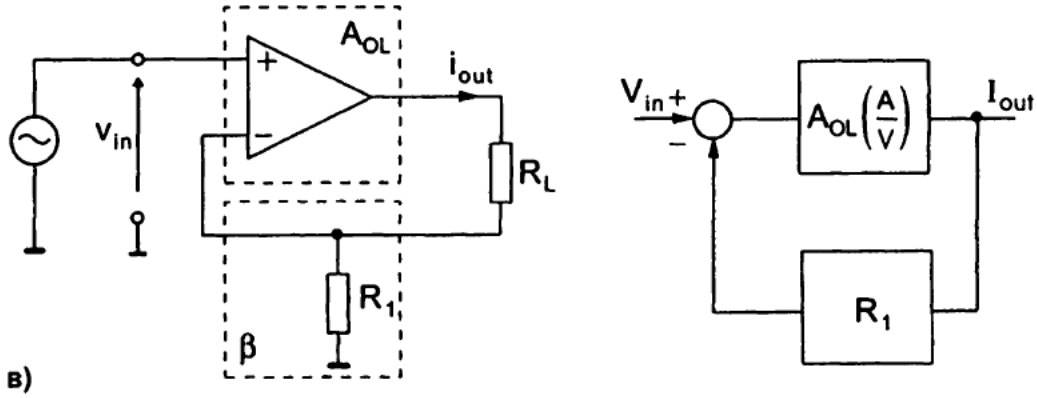
а)

Параллельно-параллельная обратная связь



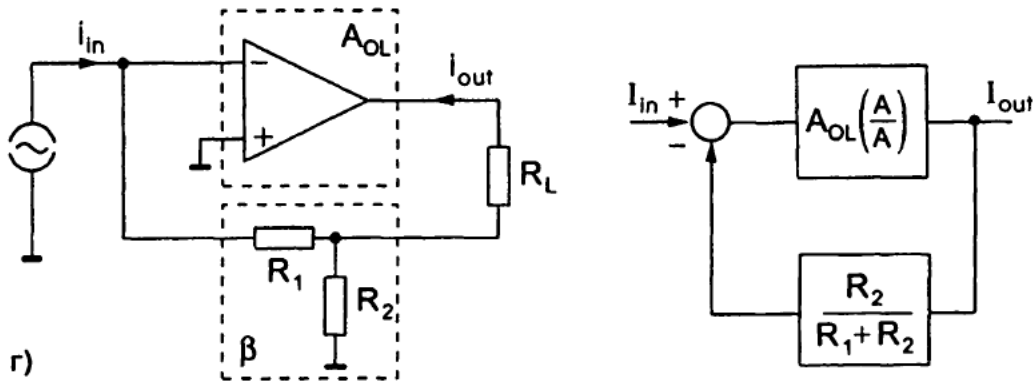
б)

Последовательно-последовательная обратная связь



в)

Параллельно-последовательная обратная связь



г)

Рис. 7.86. Разные типы отрицательной обратной связи

Классификация цепей с отрицательными обратными связями (рис. 7.86):

а) **последовательно-параллельная обратная связь** снимает с выхода параллельный сигнал напряжения и подает его на вход в виде последовательного напряжения обратной связи:

- Вход — напряжение;
- Стабилизированный выход — напряжение;
- Тип усилителя — усилитель напряжения;

б) **параллельно-параллельная обратная связь** снимает с выхода параллельный сигнал напряжения и подает его на вход в виде параллельного тока обратной связи:

- Вход — ток;
- Стабилизированный выход — напряжение;
- Тип усилителя — усилитель напряжения, управляемый током, преобразователь ток–напряжение;

в) **последовательно-последовательная обратная связь** снимает с выхода последовательный сигнал тока и подает его на вход в виде последовательного напряжения обратной связи:

- Вход — напряжение;
- Стабилизированный выход — ток;
- Тип усилителя — усилитель тока, управляемый напряжением, преобразователь напряжение–ток:

г) **параллельно-последовательная обратная связь** снимает с выхода последовательный сигнал тока и подает его на вход в виде параллельного тока обратной связи:

- Вход — ток;
- Стабилизированный выход — ток;
- Тип усилителя — усилитель тока.

Пример: преобразование тока фотодиода в напряжение.

Решение. Считаем с некоторой степенью приближения, что фотодиод ведет себя как источник тока. Для преобразования тока в напряжение воспользуемся усилителем напряжения, управляемым током, т. е. схемой с обратной связью (рис. 7.87а).

Пример. Для передачи на большое расстояние аналогового напряжения с выхода тензодатчика его необходимо преобразовать в токовый сигнал.

Решение. Здесь надо воспользоваться схемой с последовательно-последовательной обратной связью (рис. 7.87б).

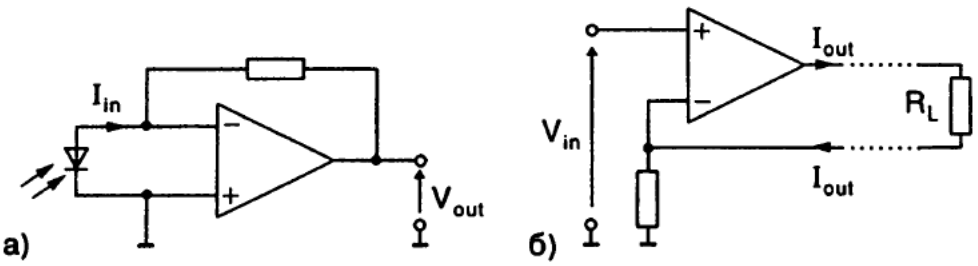


Рис. 7.87. Примеры параллельно-параллельной (а) и последовательно-последовательной (б) отрицательных обратных связей

7.5.2. Влияние отрицательной обратной связи на входной и выходной импеданс

Влияние отрицательной обратной связи на входной и выходной импеданс рассматривается на примере неинвертирующего усилителя с последовательно-параллельной цепью обратной связи (рис. 7.88 и 7.89).

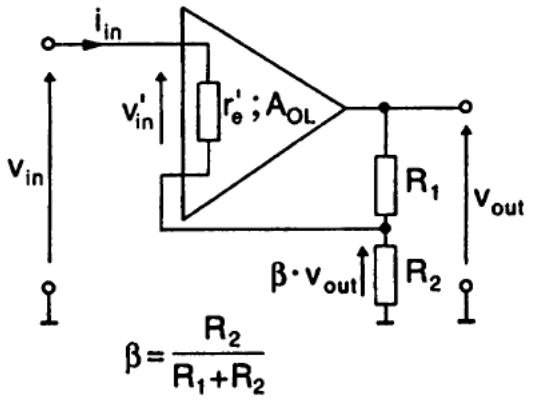


Рис. 7.88. Входные цепи неинвертирующего усилителя с последовательно-параллельной обратной связью

Входной импеданс

Считаем, что входной импеданс усилителя с разомкнутой обратной связью равен r'_{in}. Тогда входной импеданс замкнутой системы определяется как:

$$r_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}}, \quad v_{out} = A_{OL} \cdot v'_{in}, \quad r_{in} = \frac{v'_{in} + \beta \cdot v_{out}}{i_{in}} = \frac{v'_{in} + v'_{in} \cdot \beta \cdot A_{OL}}{i_{in}},$$

$$r_{in} = r'_{in}(1 + \beta \cdot A_{OL}). \qquad (7.117)$$

- Величина входного импеданса схемы с последовательно-параллельной обратной связью зависит от глубины обратной связи.

Выходной импеданс

Считаем, что выходной импеданс усилителя с разомкнутой обратной связью равен r'_{out}. Тогда выходной импеданс замкнутой системы определяется как:

$$r_{out} = \frac{\text{напряжение в режиме холостого хода}}{\text{ток в режиме короткого замыкания}} = \frac{v_{o/c}}{i_{s/c}} = \frac{v_{out}}{i_{s/c}},$$

$$v_{out} = v_{in} \frac{A_{OL}}{1 + \beta \cdot A_{OL}}, \quad i_{s/c} = \frac{v_{in} \cdot A_{OL}}{r'_{out}}$$

(для короткозамкнутой цепи $v_{out} = 0$, $v_{in} = v'_{in}$),

$$r_{out} = \frac{r'_{out}}{1 + \beta \cdot A_{OL}}. \qquad (7.118)$$

- Величина выходного импеданса схемы с последовательно-параллельной обратной связью зависит от глубины обратной связи.

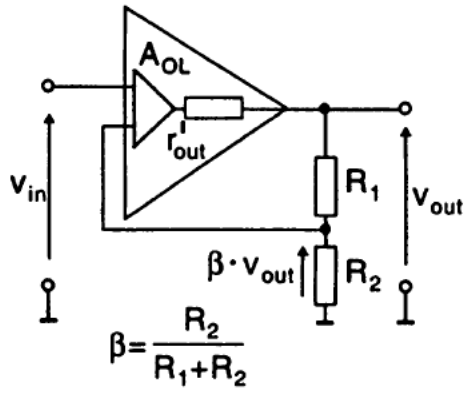


Рис. 7.89. Выходные цепи неинвертирующего усилителя с последовательно-параллельной обратной связью

7.5.2.1. Входные и выходные импедансы схем с четырьмя типами обратных связей

	$\frac{r_{in}}{r'_{in}}$	$\frac{r_{out}}{r'_{out}}$
а) последовательно-параллельная обратная связь	$1 + \beta \cdot A_{OL}$	$\frac{1}{1+\beta \cdot A_{OL}}$
б) параллельно-параллельная обратная связь	$\frac{1}{1+\beta \cdot A_{OL}}$	$\frac{1}{1+\beta \cdot A_{OL}}$
в) последовательно-последовательная обратная связь	$1 + \beta \cdot A_{OL}$	$1 + \beta \cdot A_{OL}$
г) параллельно-последовательная обратная связь	$\frac{1}{1+\beta \cdot A_{OL}}$	$1 + \beta \cdot A_{OL}$

Отрицательная обратная связь всегда положительно влияет на величину входного и выходного импеданса исходной схемы:

- импеданс потенциальных выходов схемы уменьшается, а токовых — увеличивается;
- импеданс входов, управляемых напряжением, возрастает, а управляемых током — снижается.

7.5.3. Влияние отрицательной обратной связи на частотные характеристики

Предполагается, что усилитель с разомкнутой обратной связью обладает частотными характеристиками, аналогичными характеристикам фильтра нижних частот:

$$A_{OL}(f) = \frac{A_{OL0}}{1 + j \cdot f / f'_c},$$

где A_{OL0} — коэффициент передачи по постоянному току или низкочастотный коэффициент усиления;
f'_c — критическая частота.

Тогда передаточная функция системы с отрицательной обратной связью определяется выражением:

$$A_{CL}(f) = \frac{A_{OL}(f)}{1+\beta \cdot A_{OL}(f)} = \underbrace{\frac{A_{OL0}}{1+\beta \cdot A_{OL0}}}_{\text{коэффициент передачи}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+j\frac{f}{f'_c}\cdot\frac{1}{1+\beta \cdot A_{OL0}}}}_{\text{частотная характеристика}}. \qquad (7.119)$$

- **Критическая частота (частота излома АЧХ)** системы с обратной связью увеличивается по сравнению с разомкнутой системой в $1 + \beta \cdot A_{OL0}$ раз, т. е. рост частоты зависит от глубины обратной связи, при этом **коэффициент передачи** уменьшается в такое же количество раз (рис. 7.90).

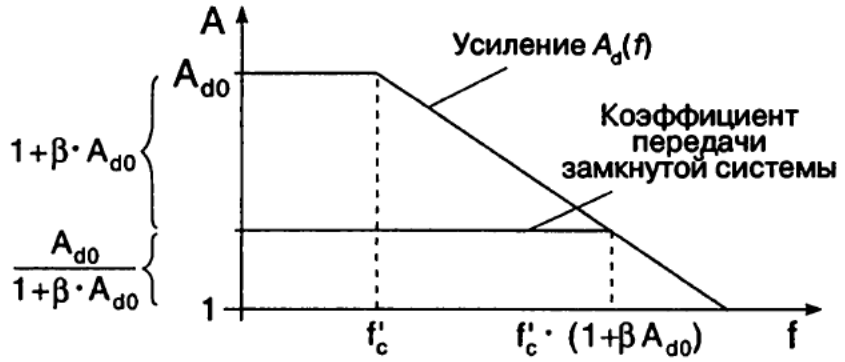


Рис. 7.90. Частотные характеристики усилителя с разомкнутой и замкнутой обратной связью

7.5.4. Устойчивость систем с отрицательными обратными связями

Из теории следует, что системы с отрицательными обратными связями всегда устойчивы. Однако частотные характеристики реальных усилителей обладают свойствами ФНЧ. Это значит, что при увеличении частоты их коэффициент усиления снижается, а между входными и выходными сигналами существует частотно-зависимый фазовый сдвиг. На частотах, соответствующих сдвигу фаз 180°, обратная связь становится положительной, т. е. выходной и входной сигналы начинают складываться, а не вычитаться. Если коэффициент передачи цепи обратной связи $\beta \cdot A_{OL}$ на таких частотах больше 1, то происходит еще большее усиление сигналов, при этом система теряет устойчивость и в ней могут возникнуть колебания (см. также раздел 7.6.2).

Условия возникновения колебаний (критерий Баркгаузена) для систем с обратными связями можно записать в виде:

Амплитудный критерий: $\beta \cdot A_{OL} \geq 1$;
Фазовый критерий: $\varphi = n \cdot 360°$, $n = 0, 1, 2...$

- Если коэффициент передачи цепи обратной связи замкнутой системы больше 1, а фазовый сдвиг между входным сигналом и сигналом обратной связи равен 0° или кратен 360°, то в ней возникают колебательные процессы.

На практике устойчивость систем с отрицательными обратными связями проверяют при помощи графиков частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ). На частоте f_1 (рис. 7.91) сдвиг фаз в усилителе достигает 180°, и отрицательная обратная связь превращается в положительную. Следовательно, на этой частоте выполняется фазовый критерий потери устойчивости. АЧХ усилителя $A_d(f)$ можно разделить на $\beta \cdot A_{OL}(f)$ и $1/\beta$. Если на частоте $f_{critical}$ коэффициент передачи цепи обратной связи $\beta \cdot A_{OL}$ больше единицы, то замкнутая система будет неустойчивой, в противном случае — устойчивой.

Примечание. В системах с отрицательной обратной связью критический фазовый сдвиг (360°) формируется следующим образом: сам усилитель A_{OL} сдвигает фазу на 180°, а оставшаяся часть фазового сдвига (180°) добавляется в точке суммирования, где сигнал обратной связи вычитается из входного сигнала.

Примечание. Чем меньше значение β, тем меньшая часть выходного сигнала возвращается назад, тем меньше риск возникновения колебаний. Система с большим A_{OL} и сильной обратной связью, т. е. с маленьким коэффициентом усиления замкнутой системы, наиболее подвержена потере устойчивости.

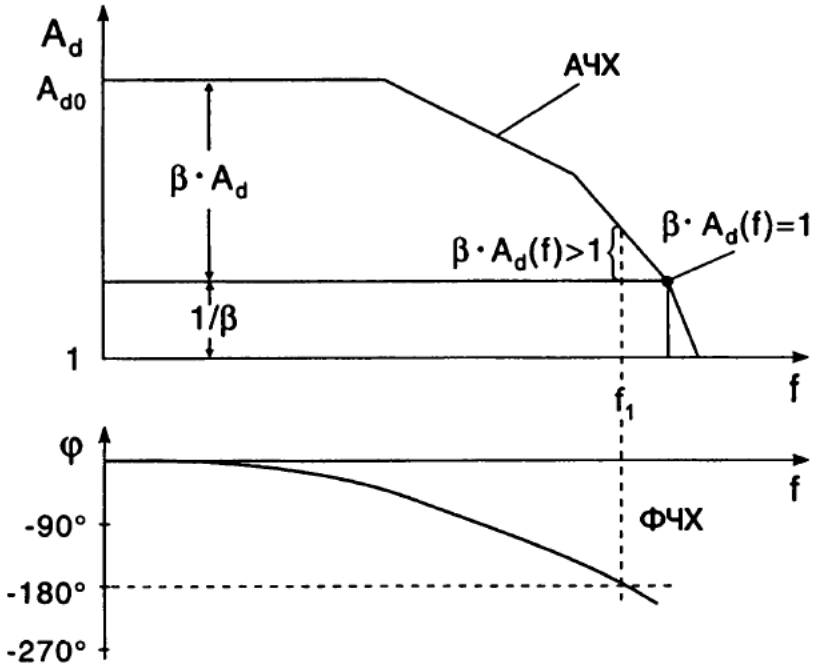


Рис. 7.91. Определение условий возникновения колебаний по частотным характеристикам системы: на частоте $f(\varphi) = -180°$ коэффициент $\beta \cdot A_{OL}$ больше единицы; следовательно, в системе возникают колебания, т. е. она становится неустойчивой

7.6. Операционные усилители

Операционный усилитель (ОУ) — это усилитель с очень большим коэффициентом усиления (рис. 7.92). На практике к ОУ обычно подключаются цепочки элементов, формирующие отрицательную обратную связь. Из-за высокого коэффициента усиления самого ОУ усиление замкнутой системы определяется только внешними цепями обратных связей (см. раздел 7.5).

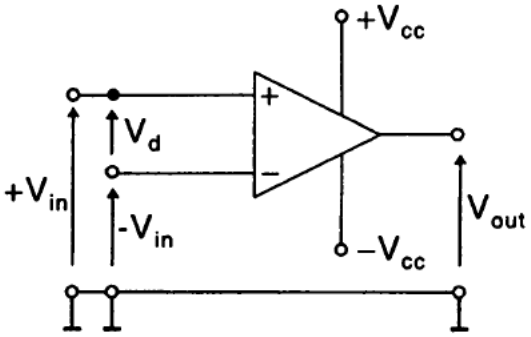


Рис. 7.92. Обозначение ОУ

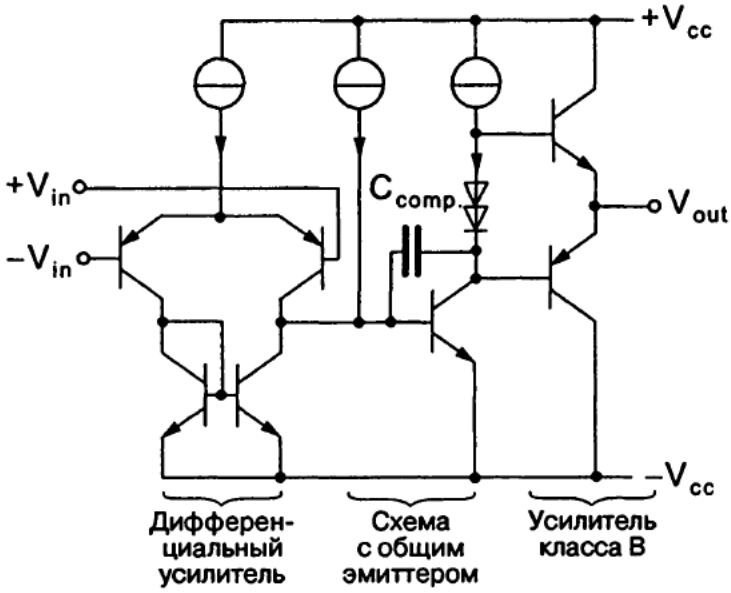


Рис. 7.93. Упрощенная схема ОУ

На входе ОУ всегда стоит дифференциальный усилитель, один вход которого называется **инвертирующим входом** (V_n), а другой — **неинвертирующим входом** (V_p) (рис. 7.93). Коэффициент усиления дифференциального напряжения V_d равен A_d. Следовательно, выходное напряжение $V_{out} = A_d \cdot V_d$. Коэффициент усиления A_d обычно лежит в диапазоне $10^4...10^5$. Выходное напряжение может меняться в пределах, определенных напряжениями источника питания. Для получения положительных и отрицательных выходных напряжений на ОУ от источника питания подаются два напряжения (обычно ±15 В).

7.6.1. Характеристики ОУ

7.6.1.1. Размах выходного напряжения

Размах выходного напряжения — это диапазон изменения выходного напряжения. **Максимальный пиковый размах выходного напряжения** обычно лежит на 1...3 В ниже напряжения питания (рис. 7.94).

На практике можно встретить ОУ с одним положительным

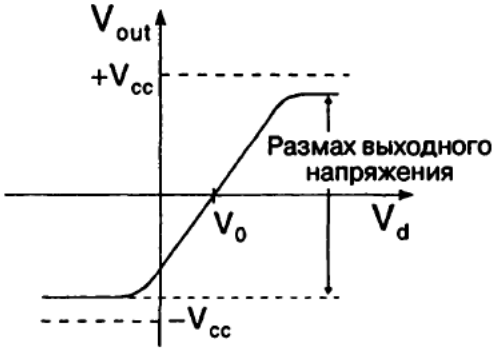


Рис. 7.94. Передаточные характеристики ОУ

напряжением питания, размах выходного сигнала которого составляет от 0 В до напряжения на 1 В меньшего напряжения питания.

Для некоторых ОУ размах выходных сигналов определяется диапазоном значений от отрицательного до положительного напряжений питания.

7.6.1.2. Напряжение смещения

Напряжение смещения V_0 (входное напряжение смещения) соответствует входному дифференциальному напряжению V_d, которое необходимо подать на ОУ, чтобы его выходное напряжение стало равным 0 В. В справочных таблицах значение V_0 определяет максимально допустимое напряжение смещения.

Передаточная характеристика $V_{out} = f(V_d)$ идеального ОУ проходит через начало координат, тогда как для реального ОУ она пересекает горизонтальную ось в точке V_0.

7.6.1.3. Дрейф напряжения смещения

Напряжение смещения V_0 зависит от температуры. Изменение напряжения смещения при изменении температуры $\Delta V_{GI} / \Delta\theta$ называется дрейфом напряжения смещения. Он обычно лежит в пределах 3...10 мкВ/К.

7.6.1.4. Размах синфазного входного сигнала

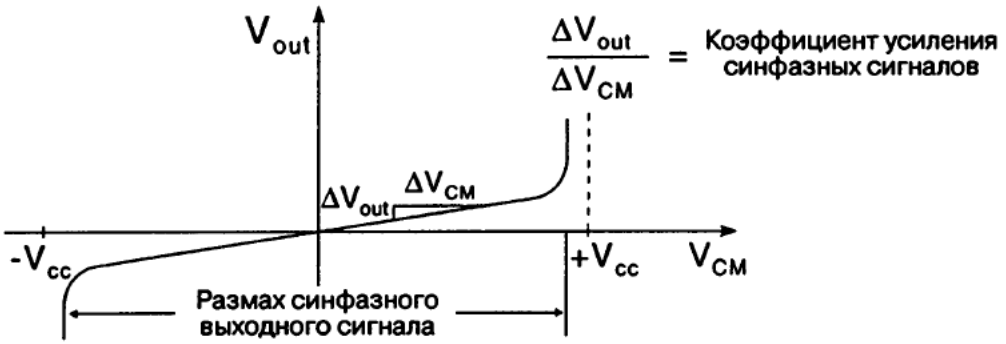
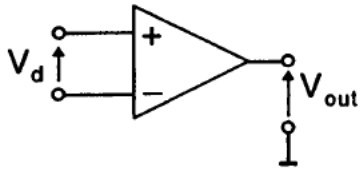


Рис. 7.95. Размах синфазного входного сигнала

При $V_{in-} = V_{in+} = V_{CM}$ происходит **усиление синфазных сигналов**. При этом $V_d = 0$ В. Выходное напряжение идеального ОУ равно 0 при любых значениях V_{CM}. Для реальных ОУ указывается размах синфазных входных сигналов V_{CM}, при которых $V_{out} = 0$ В (рис. 7.95).

7.6.1.5. Коэффициент усиления дифференциальных сигналов

Коэффициент усиления дифференциальных сигналов определяется так:

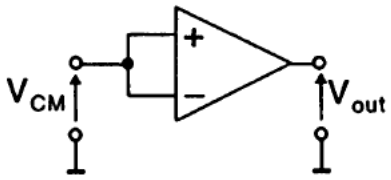


$$A_d = \frac{V_{out}}{V_d}. \qquad (7.120)$$

Он обычно равен ≈ 100 000, т. е. 100 дБ.

7.6.1.6. Коэффициент усиления синфазных сигналов

Коэффициент усиления синфазных сигналов определяется выражением:



$$A_{CM} = \frac{V_{out}}{V_{CM}}. \qquad (7.121)$$

7.6.1.7. Коэффициент ослабления синфазных сигналов (КОСС)

Коэффициент ослабления синфазных сигналов определяется выражением:

$$\text{КОСС} = A_d / A_{CM}. \qquad (7.122)$$

Часто этот коэффициент выражается в децибелах. Обычно он лежит в диапазоне 10^4...10^5 или 80...100 дБ.

7.6.1.8. Коэффициент ослабления изменений напряжений питания

Коэффициент ослабления изменений напряжений питания показывает степень влияния напряжения питания на выходное напряжение. Он определяется через напряжение смещения V_0. Величина этого коэффициента показывает, как сильно приходится корректировать напряжение смещения при изменении одного из напряжений питания, чтобы выходное напряжение оставалось равным нулю. Значения коэффициента ослабления изменений напряжений питания лежат в диапазоне 10...100 мкВ/В. Он может также выражаться в децибелах.

7.6.1.9. Входной импеданс

В режиме усиления дифференциальных сигналов входной импеданс ОУ равен r_d, а в режиме усиления синфазных сигналов — r_{CM}. Если входной каскад ОУ выполнен на биполярных транзисторах, то дифференциальный входной импеданс r_d лежит в мегаомном диапазоне, а если на полевых — то он составляет порядка 10^{12} Ом. Входной импеданс в режиме усиления синфазных сигналов находится в интервале 10^9...10^{12} Ом.

Примечание. В случае отрицательной обратной связи величина входного импеданса определяется ее глубиной (см. раздел 7.5.2):

$$r_{in} = r_d(1 + \beta \cdot A_{OL}) \quad \text{или} \quad r_d/(1 + \beta \cdot A_{OL}).$$

7.6.1.10. Выходной импеданс

Выходной импеданс ОУ лежит в диапазоне от нескольких сотен ом до нескольких килоом.

- Отрицательная обратная связь влияет на значение выходного импеданса. В зависимости от вида обратной связи определяется тип ОУ со стороны выхода: является ли он источником тока или источником напряжения (см. раздел 7.5.2)

7.6.1.11. Входной ток смещения

Если входной каскад ОУ выполнен на биполярных транзисторах, то входные токи смещения определяются токами, протекающими через базы транзисторов дифференциального усилителя. Эти токи лежат в диапазоне от нескольких десятков до сотен наноампер. В случае входных каскадов на полевых транзисторах входные токи смещения практически равны нулю.

Примечание. Отрицательная обратная связь не влияет на величину входных токов смещения.

Способы компенсации входных токов смещения смотрите в разделе 7.6.4.3.

7.6.1.12. Произведение коэффициента усиления на ширину полосы пропускания (частота единичного усиления)

АЧХ ОУ в режиме усиления дифференциальных сигналов близка к аналогичной характеристике ФНЧ (рис. 7.96):

$$A_d = \frac{A_{d0}}{1 + j \cdot \frac{f}{f_c}}.$$

На частотах выше критической частоты АЧХ определяется выражением:

$$A_d \approx \frac{A_{d0}}{j \cdot \frac{f}{f_c}}.$$

Следовательно:

$$A_d \cdot f = A_{d0} \cdot f_c = f_T. \qquad (7.123)$$

- На предельной частоте (частоте единичного усиления) f_T дифференциальный коэффициент усиления ОУ равен 1. Частота f_T часто равна **произведению коэффициента усиления на ширину полосы пропускания.**

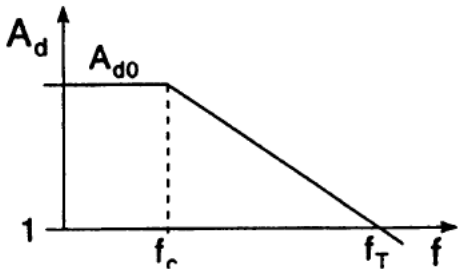


Рис. 7.96. АЧХ ОУ

7.6.1.13. Критическая частота

Критическая частота (частота излома АЧХ) ОУ с частотной коррекцией лежит в пределах от нескольких герц до нескольких сотен герц (см. раздел 7.6.2). В случае отрицательной обратной связи критическая частота возрастает пропорционально глубине обратной связи (см. раздел 7.5.3)

7.6.1.14. Скорость нарастания выходного напряжения

Скорость нарастания выходного напряжения определяет максимальную скорость изменения выходного напряжения. Она задается в В/мкс.

7.6.1.15. Эквивалентная схема ОУ

На рис. 7.97 показана эквивалентная схема реального ОУ. В ней используются следующие обозначения:

- I_B — входной ток смещения. Для биполярных входных каскадов он лежит в наноамперном диапазоне, для полевых — практически равен нулю;
- r_d — дифференциальное входное сопротивление. Для биполярных входных каскадов оно лежит в мегаомном диапазоне, для полевых — очень большое;
- r_{CM} — синфазное входное сопротивление, практически всегда очень высокое;
- A_d — дифференциальный коэффициент усиления. Характеристическая кривая такая же как у ФНЧ, коэффициент усиления по постоянному напряжению A_{d0} приблизительно равен 10^5 (100 дБ), а критическая частота лежит в диапазоне 10...100 Гц;
- r'_{out} — выходное сопротивление, лежит в пределах 100...1000 Ом;
- V_0 — напряжение смещения, изменяется от 1 до нескольких милливольт;
- КОСС — коэффициент ослабления синфазных сигналов (в эквивалентной схеме не рассматривается). Для постоянных сигналов его величина составляет около 80 дБ, с ростом частоты КОСС резко падает.

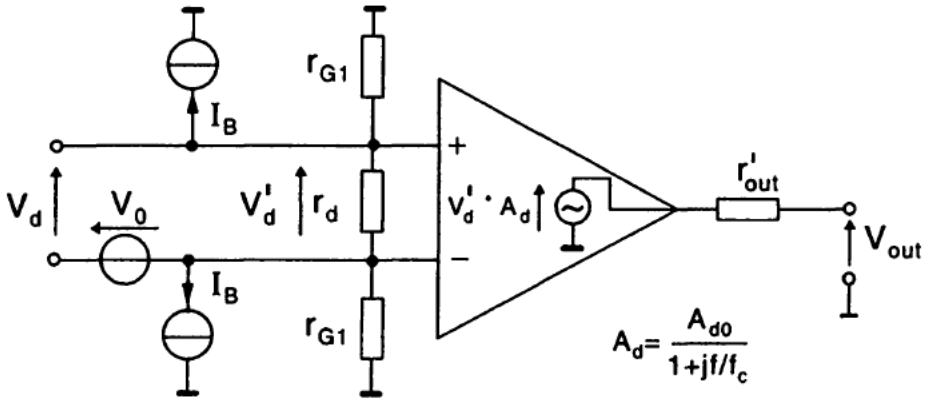


Рис. 7.97. Эквивалентная схема ОУ

Примечание. Критическая частота и выходной импеданс ОУ с *отрицательной обратной связью* зависят от глубины обратной связи ($1 + \beta A_d$), где β — коэффициент обратной связи. Критическая частота увеличивается пропорционально росту глубины обратной связи, а выходной импеданс ОУ при этом во столько же раз снижается. Например, для обеспечения коэффициента усиления ОУ с обратной связью $A = 100$ его критическая частота должна лежать в интервале 10...100 кГц, а выходной импеданс составлять 0,1...1 Ом (см. раздел 7.5.2).

Примечание. В этом разделе приведены значения характеристик типовых ОУ. Наряду с типовыми ОУ существует множество специальных разработок ОУ со специальными характеристиками: например, ОУ с напряжением смещения в микровольтовом диапазоне, ОУ с входными токами смещения в пикоамперном диапазоне или ОУ с критической частотой в мегагерцовом диапазоне.

7.6.2. Частотная коррекция

Частотная коррекция в ОУ используется для повышения их устойчивости. Она заключается в смещении критической частоты в область более низких частот. Это достигается при помощи конденсатора C_{comp}, обеспечивающего обратную связь между коллектором и базой усилительного каскада с общим эмиттером (см. рис.7.93). Такая обратная связь значительно снижает коэффициент усиления A_d на высоких частотах, поэтому, когда фазовый сдвиг φ достигает 180°, коэффициент передачи цепи обратной связи βA_d остается меньше единицы, т. е. система сохраняет свою устойчивость (см. раздел 7.5.4).

Необходимо различать **некомпенсированные ОУ** и **ОУ со встроенными цепями частотной коррекции**. У ОУ первого вида есть внешние контакты, к которым можно подсоединить конденсатор C_{comp}. Величина емкости этого конденсатора выбирается, исходя из требуемой глубины обратной связи. Чем меньше емкость конденсатора, тем слабее обратная связь, т. е. больше коэффициент усиления замкнутой системы. Подбор конденсатора C_{comp} может производиться методом итераций. Для этого ко входу системы подключается генератор прямоугольных импульсов, а к выходу — осциллограф, на котором наблюдается переходная характеристика системы. Слишком большая величина емкости C_{comp} ведет к затуханию прямоугольного сигнала, а слишком малая — к появлению колебаний, т. е. к нестабильности схемы.

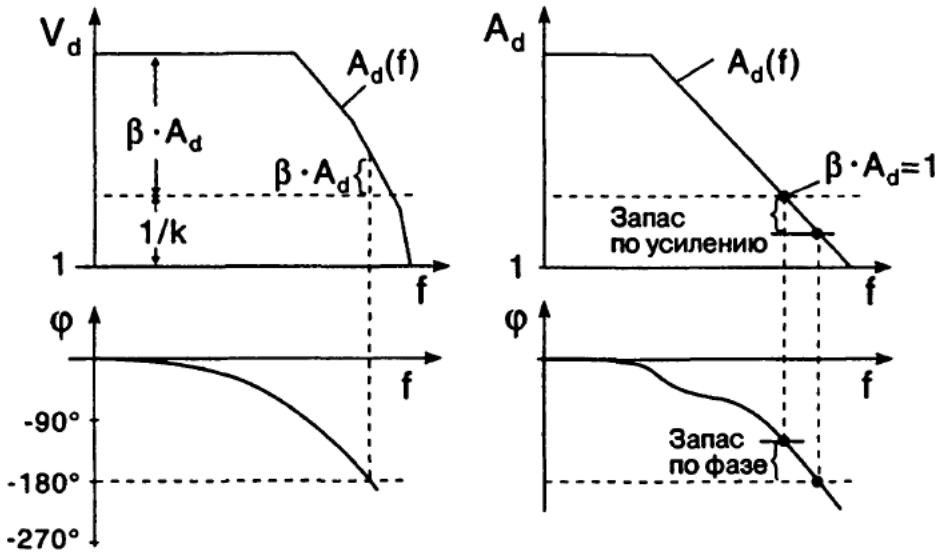


Рис. 7.98. АЧХ и ФЧХ ОУ:
а) некомпенсированного, $\beta A_d > 1$ на частоте f, соответствующей $\varphi = -180°$, схема неустойчива;
б) с частотной коррекцией, $\beta A_d < 1$ на частоте $f(\varphi = -180°)$, схема устойчива

Угол $\alpha = 180° - \varphi$ ($\beta A_d = 1$) называется **запасом по фазе**. Он является мерой устойчивости системы (рис. 7.98). Величина запаса по фазе ОУ с обратной связью определяет его реакцию на любые изменения входного напряжения. Угол $\alpha = 90°$ соответствует случаю критического демпфирования, ниже которого

переходная характеристика системы имеет вид затухающих колебаний. При угле $\alpha = 65°$ перерегулирование системы составляет 4%. Именно этот случай обычно стремятся реализовать на практике.

Запас по усилению — это другая мера устойчивости системы с обратной связью. Он соответствует разности коэффициентов усиления на частотах, соответствующих углам φ ($\beta A_d = 1$) и $\varphi = 180°$ (рис. 7.98).

ОУ со встроенной частотной коррекцией при $\beta = 1$ обладают запасом по фазе 65°. Это обеспечивает устойчивую работу ОУ с обратной связью. Однако в таких ОУ при малой глубине обратной связи ($\beta << 1$, $A_{CL} >> 1$) сильно снижается быстродействие.

7.6.3. Компараторы

Компараторы — это ОУ, работающие без обратных связей. Они используются для сравнения входных напряжений. Их выходные сигналы имеют только два состояния: высокое или низкое, что определяется знаком разности входных напряжений V_d. Такие ОУ обычно имеют выходы с открытыми коллекторами, подключаемые к нагрузочным резисторам.

7.6.4. Схемы на ОУ

Схемы с ОУ могут иметь как положительные, так и отрицательные обратные связи. Схемы с положительными обратными связями являются либо генераторами (например, генератор Вина – Робинсона), либо схемами с двумя устойчивыми состояниями (например, триггер Шмитта). Схемы с отрицательными обратными связями являются устойчивыми, и при линейной обратной связи их выходные напряжения пропорциональны входным. Поскольку ОУ обладают высокими коэффициентами усиления, в схемах с отрицательными обратными связями разность напряжений между их входами всегда близка к нулю. В расчетах схем на ОУ законы Кирхгофа не используются. Для иллюстрации принципа действия схем часто применяются блок-схемы.

7.6.4.1. Преобразователь импеданса (повторитель)

Преобразователь импеданса — это ОУ с последовательно-параллельной обратной связью с коэффициентом $\beta = 1$ (рис. 7.99).

Глубина обратной связи $(1 + \beta A_d) \approx A_d$. Передаточная функция такой схемы имеет вид:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_d}{1 + \beta A_d} \approx 1.$$

Поэтому для преобразователей импеданса справедливо соотношение:

$$V_{out} = V_{in}. \qquad (7.124)$$

Такая схема обладает очень высоким входным импедансом:

$$r_{in} = r_d(1 + A_d) \approx\rightarrow \infty, \qquad (7.125)$$

где r_d — дифференциальный входной импеданс ОУ.

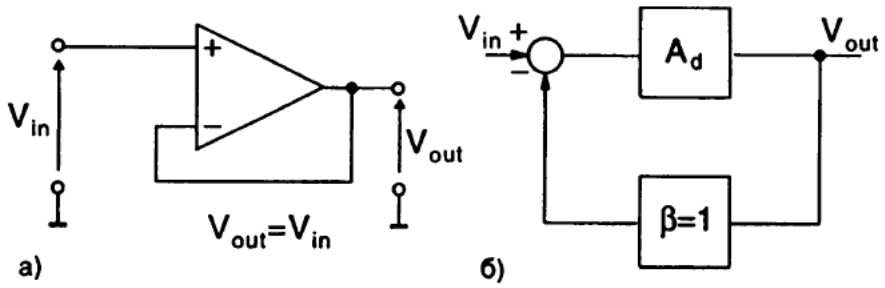


Рис. 7.99. Преобразователь импеданса:
а) электрическая схема;
б) блок-схема

Примечание. Входной ток смещения данного преобразователя не зависит от глубины обратной связи! Этого недостатка практически лишены ОУ с входными каскадами на полевых транзисторах.

Преобразователи импеданса имеют очень низкий выходной импеданс:

$$r_{out} = \frac{r'_{out}}{1 + A_d} \approx 0, \tag{7.126}$$

где r'_{out} — выходной импеданс ОУ.

7.6.4.2. Неинвертирующий усилитель

Неинвертирующий усилитель — это ОУ с последовательно-параллельной обратной связью с $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Глубина обратной связи такого усилителя равна $1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot A_d$, а передаточная функция определяется выражением:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_d}{1 + \beta \cdot A_d} \approx 1 + \frac{R_1}{R_2}.$$

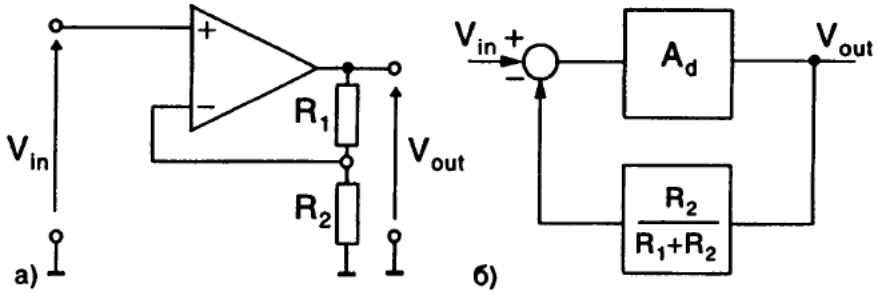


Рис. 7.100. Неинвертирующий усилитель:
а) электрическая схема;
б) блок-схема

В общем виде можно записать, что:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 1 + \frac{R_1}{R_2}. \tag{7.127}$$

Такая схема обладает очень высоким входным импедансом:

$$r_{in} = r_d\left(1+\frac{R_2}{R_1+R_2}A_d\right) \approx \to \infty, \qquad (7.128)$$

где r_d — дифференциальный входной импеданс ОУ.

Примечание. Входной ток смещения данного усилителя не зависит от глубины обратной связи! Этого недостатка практически лишены ОУ с входными каскадами на полевых транзисторах.

Неинвертирующие усилители имеют очень низкий выходной импеданс:

$$r_{out} = r'_{out}\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_2+R_1}A_d} \approx 0, \qquad (7.129)$$

где r'_{out} — выходной импеданс ОУ.

7.6.4.3. Инвертирующий усилитель

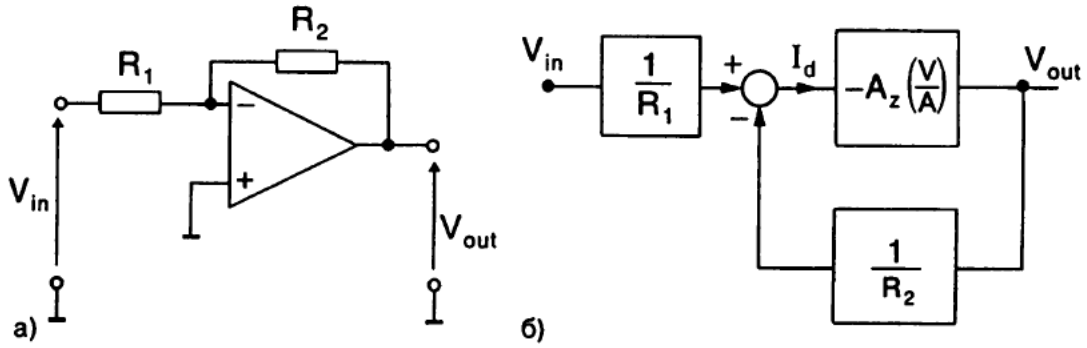


Рис. 7.101. Инвертирующий усилитель:
а) электрическая схема;
б) блок-схема

Инвертирующий усилитель — это ОУ с параллельно-параллельной обратной связью с $\beta = 1/R_2$. Глубина обратной связи такого усилителя равна $1+\frac{1}{R_2}A_z$. Входной ток определяется резистором R_1. Передаточная функция инвертирующего усилителя имеет вид:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{R_1}\frac{-A_z}{1+\frac{1}{R_2}\cdot(-A_z)} \approx -\frac{R_2}{R_1}.$$

В общем виде можно записать, что:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}. \qquad (7.130)$$

Входной импеданс такой схемы равен:

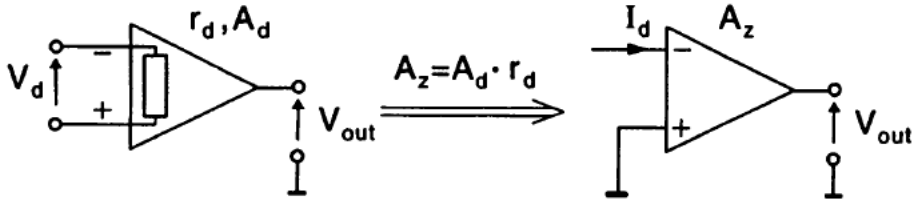
$$r_{in} = R_1.$$

Инвертирующие усилители имеют очень низкий выходной импеданс:

$$r_{out} = r'_{out} \frac{1}{1 + \frac{1}{R_2} A_я} \approx 0, \qquad (7.131)$$

где r'_{out} — выходной импеданс ОУ.

Примечание. ОУ, примененный здесь, можно считать усилителем напряжения, управляемым током. В соответствии с эквивалентной схемой в разделе 7.6.1.15 можно произвести следующее преобразование:



Примечание. Входной ток смещения I_B приводит к появлению напряжения смещения величиной $I_{B-} \cdot R_1$. Его можно компенсировать при помощи резистора $R = R_1 \parallel R_2$, подключенного между землей и неинвертирующим входом ОУ (рис. 7.102).

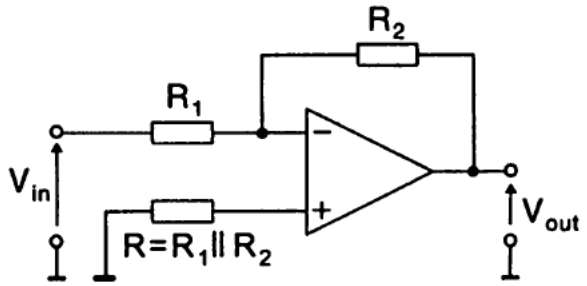


Рис. 7.102. Компенсация входного тока смещения

7.6.4.4. Суммирующий усилитель

Сумматор, так же как и инвертирующий усилитель, является ОУ с параллельно-параллельной обратной связью (рис. 7.103). Входные токи V_i/R_i складываются на инвертирующем входе ОУ.

Выходное напряжение такого усилителя определяется выражением:

$$V_{out} = -\sum_{i=1}^{n} I_i \cdot R_N. \qquad (7.132)$$

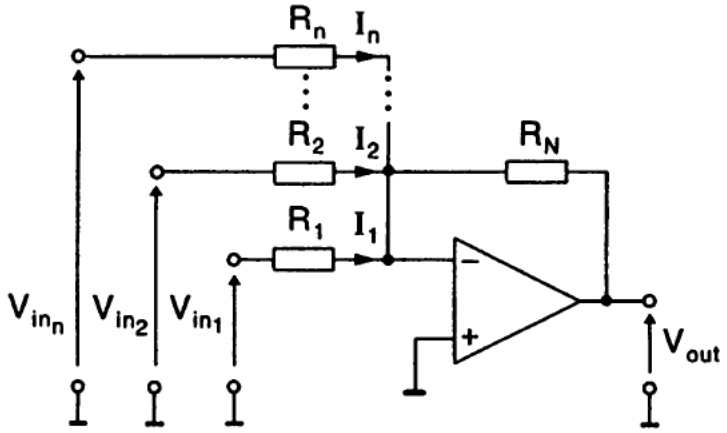


Рис. 7.103. Суммирующий усилитель

Выходное напряжение может быть также представлено в виде функции входных напряжений $V_{in\,n}$:

$$V_{out} = -\left(V_{in1} \frac{R_N}{R_1} + V_{in2} \frac{R_N}{R_2} + \ldots + V_{in\,n} \frac{R_N}{R_n} \right). \qquad (7.133)$$

Если все резисторы $R_1 \ldots R_n$ равны между собой, то получаем:

$$V_{out} = -\sum_{i=1}^{n} V_i. \qquad (7.134)$$

7.6.4.5. Вычитающий усилитель

Вычитающий усилитель усиливает разность двух входных напряжений (рис. 7.104). Его коэффициент усиления определяется как R_2/R_1, поэтому выражение для выходного напряжения имеет вид:

$$V_{out} = (V_{in1} - V_{in2})\frac{R_2}{R_1}. \qquad (7.135)$$

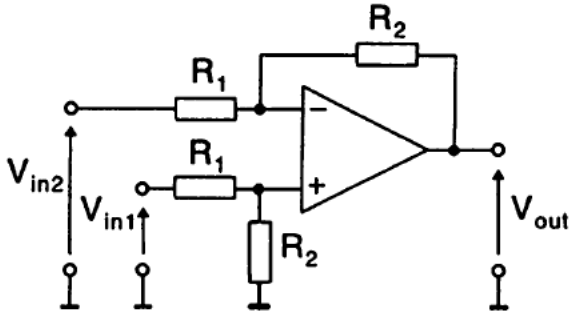


Рис. 7.104. Вычитающий усилитель

Входной импеданс вычитающего усилителя равен: $r_{in} = 2R_1$.

При $V_{in1} = 0$ схема на рис. 7.104 превращается в инвертирующий усилитель с компенсацией входного тока смещения. В вычитающем усилителе компенсация входного тока смещения происходит автоматически. На рис.7.105 показана схема вычитающего усилителя с высоким входным импедансом.

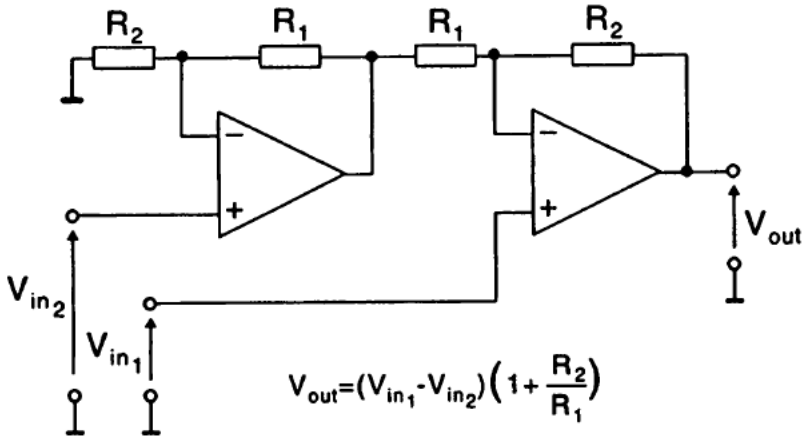


Рис. 7.105. Вычитающий усилитель с высоким входным импедансом

Его передаточная функция определяется выражением:

$$V_{out} = (V_{in1} - V_{in2})\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right). \qquad (7.136)$$

7.6.4.6. Измерительный усилитель

Измерительный усилитель определяет разность двух входных напряжений (рис. 7.106). Его передаточная функция определяется выражением:

$$V_{out} = (V_{in1} - V_{in2})\left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right). \qquad (7.137)$$

Такой усилитель обладает очень высоким входным импедансом (см. раздел 7.6.4.2).

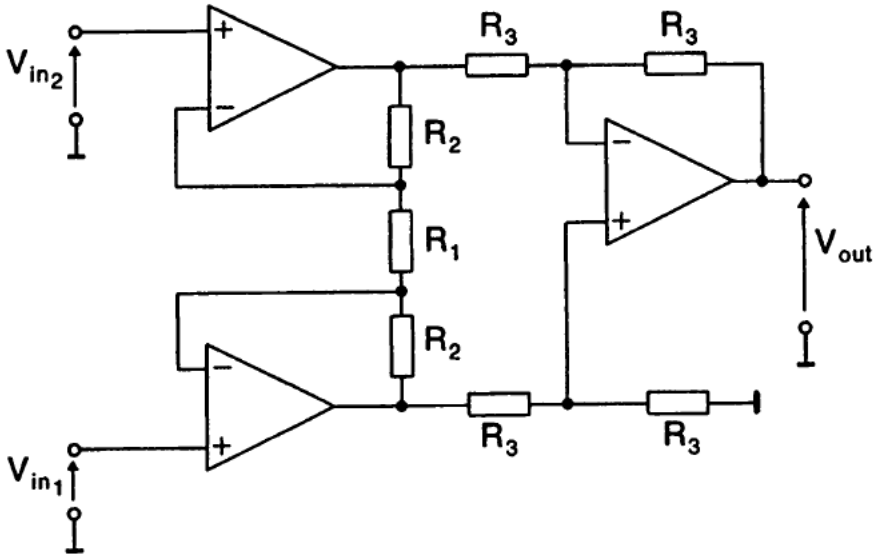


Рис. 7.106. Измерительный усилитель

7.6.4.7. Источник тока, управляемый напряжением

Источник тока, управляемый напряжением, реализуется на основе ОУ с последовательно-последовательной обратной связью (рис. 7.107а). Входное напряжение равно падению напряжения на резисторе R, т. е.:

$$V_{in} = RI_{out}. \tag{7.138}$$

Для увеличения выходного тока к выходу схемы подключают транзистор (рис. 7.107б). Открытый сток (или коллектор) является преимуществом последней схемы, поскольку обеспечивает свободный выбор выходного потенциала.

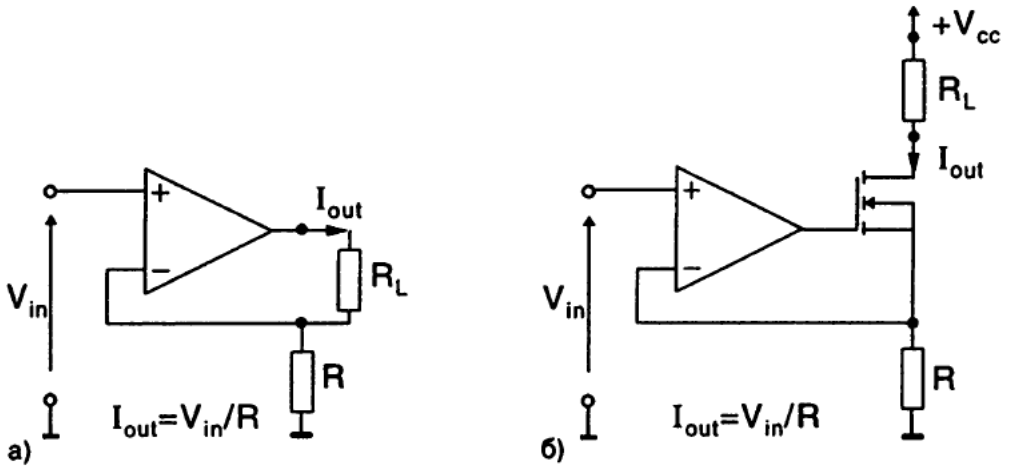


Рис. 7.107. Источники тока, управляемые напряжением

Для работы с заземленной нагрузкой подходит источник тока, показанный на рис. 7.108. Чем больше сопротивление R_1 по сравнению с R, тем более справедливо соотношение $I_{out} = V_{in}/R$.

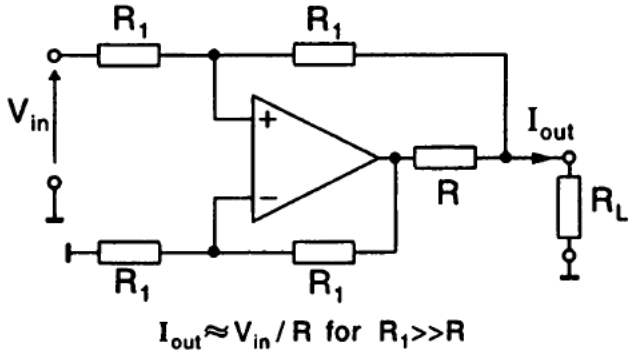
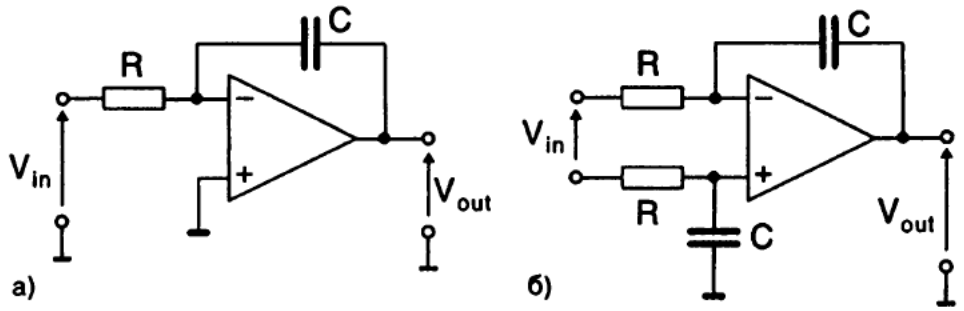


Рис. 7.108. Источник тока, управляемый напряжением, работающий с заземленной нагрузкой

7.6.4.8. Интегрирующий усилитель

Схема интегратора похожа на схему инвертирующего усилителя (рис. 7.109). Поскольку входной ток $I_{in} = V_{in}/R$ заряжает конденсатор C, выходное напряжение определяется как интеграл от входного сигнала:

$$V_{out} = -\frac{1}{RC}\int V_{in}\,dt. \qquad (7.139)$$



$$V_{out} = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t_1} v_{in}\,dt + V_{out}(t_0)$$

Рис. 7.109. Интеграторы:
а) простой;
б) дифференциальный

При синусоидальном входном напряжении коэффициент усиления определяется как:

$$A_v = -\frac{1}{j\omega RC}. \qquad (7.140)$$

При больших постоянных времени величиной входного тока смещения пренебрегать нельзя. В таких случаях либо используют компенсацию входного тока смещения, либо применяют ОУ с полевыми транзисторами на входе. Компенсация выполняется так же, как в инвертирующих усилителях, за исключением того, что неинвертирующий вход ОУ соединяется с землей через параллельную цепочку резистора R и конденсатора C (см. раздел 7.6.4.3).

Интеграторы часто используются в качестве интегрирующих блоков управления в системах с отрицательной обратной связью.

В интегрирующих усилителях интегрируется не только входной сигнал, но и входные токи и напряжения смещения, что в системах без обратных связей может привести к насыщению выходного сигнала. Уровень насыщения определяется положительным или отрицательным напряжением питания. Во избежание такой ситуации необходимо предусматривать разряд интегрирующего конденсатора либо через определенные интервалы времени, либо по достижении выходным напряжением заданного значения. Для этого параллельно конденсатору ставится либо реле, либо полевой транзистор (рис. 7.110). При использовании МОП-транзистора внутренний обратно смещенный диод ограничивает диапазон выходных напряжений только положительными значениями.

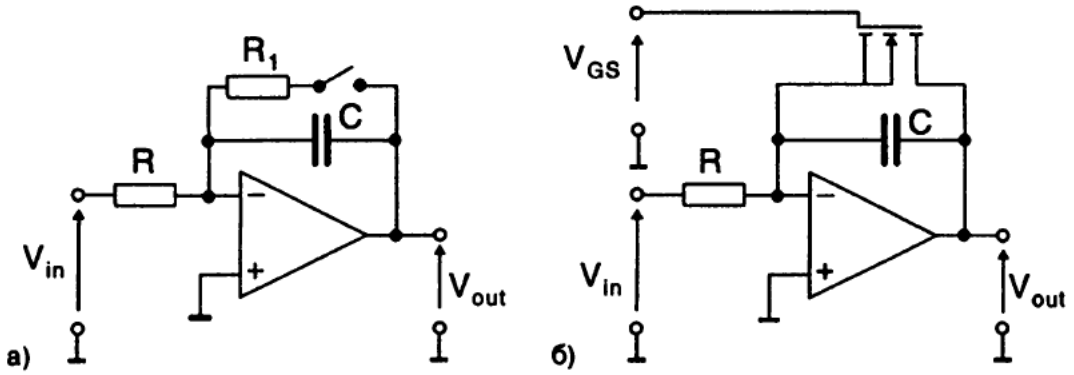


Рис. 7.110. Интеграторы: схема сброса в нулевое состояние

7.6.4.9. Дифференцирующие усилители

Входной ток дифференциатора, показанного на рис. 7.111, определяется соотношением:

$$I_{in} = C\frac{dV_{in}}{dt}.$$

Этот ток, протекая через резистор R, приводит к появлению напряжения на выходе ОУ:

$$V_{out} = -RC\frac{dV_{in}}{dt}. \qquad (7.141)$$

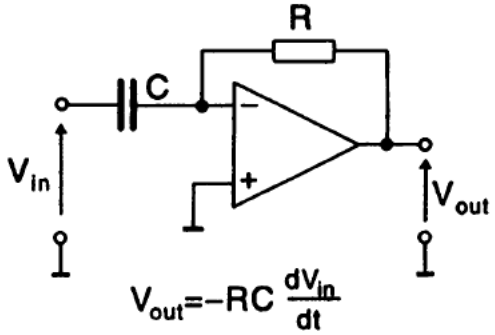


Рис. 7.111. Дифференциатор

При синусоидальном входном напряжении коэффициент усиления по напряжению равен:

$$A_v = -j\omega RC. \qquad (7.142)$$

Дифференциаторы часто используются в качестве дифференцирующих звеньев в ПИД-регуляторах (ПИД — пропорционально-интегрально-дифференциальное устройство).

7.6.4.10. Усилитель переменного напряжения с однополюсным источником питания

Иногда требуется, чтобы усилитель работал только с одним напряжением питания. В этом случае на инвертирующий вход ОУ при помощи делителя напряжений подается опорное напряжение $V_{CC}/2$ (рис. 7.112).

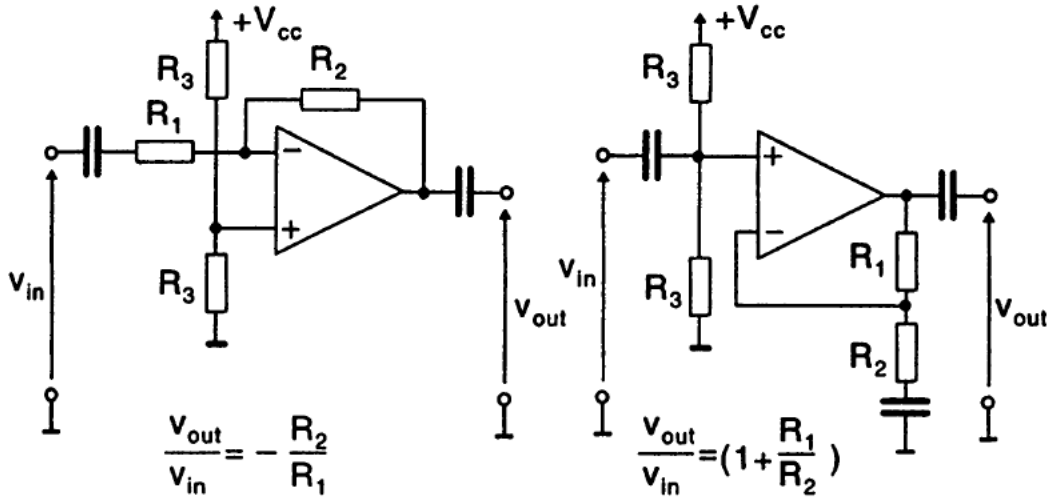


Рис. 7.112. Усилитель переменного напряжения с однополюсным источником питания

7.6.4.11. Регулирование скорости нарастания выходного напряжения

Выходное напряжение схемы на рис. 7.113 меняется со скоростью:

$$\frac{dV_{out}}{dt} = \pm V_{out1max}\frac{1}{RC} \approx \pm V_{CC}\frac{1}{RC}.$$

Если $V_{out} \neq V_{in}$, то выходное напряжение первого ОУ V_{out1} подскакивает до уровня одного из напряжений питания $\pm V_{out1\,max}$. При этом выходное напряжение второго ОУ V_{out} начинает расти до момента равенства напряжений $V_{out} = V_{in}$ со скоростью, определяемой последним выражением.

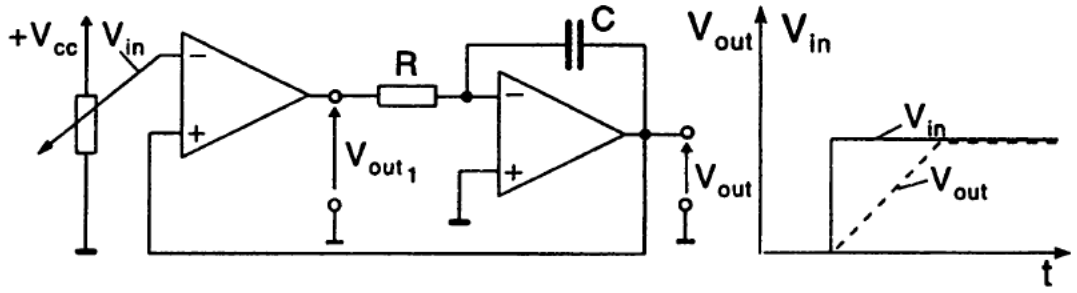


Рис. 7.113. Схема с регулированием скорости нарастания выходного напряжения

7.6.4.12. Триггер Шмитта

Триггеры Шмитта (компараторы с гистерезисом) являются схемами с двумя устойчивыми состояниями ($\pm V_{out\ max}$), реализуемыми на основе ОУ с положительными обратными связями. Выходное напряжение таких триггеров может только перескакивать с одного предельного уровня напряжения на другой. Для осуществления этого при помощи цепей обратных связей устанавливаются два пороговых значения входного напряжения, при превышении которых происходит переключение выходного напряжения. Для изменения уровня напряжения на выходе ОУ требуется, чтобы входное напряжение достигло своего очередного порога.

Триггеры Шмитта применяются в регуляторах с двумя состояниями. Они также используются вместо компараторов в случаях зашумленного входного сигнала (во избежание многократного переключения).

Инвертирующий триггер Шмитта

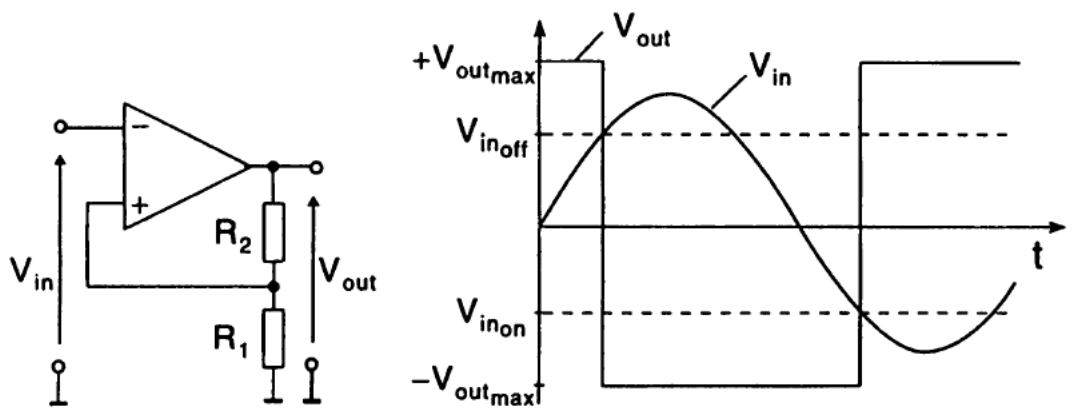


Рис. 7.114. Инвертирующий триггер Шмитта

Уровни срабатывания инвертирующего триггера Шмитта (рис. 7.114) определяются следующими выражениями:

$$V_{\text{in on}} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{out max}}, \qquad V_{\text{in off}} = +\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{out max}}. \tag{7.143}$$

Неинвертирующий триггер Шмитта

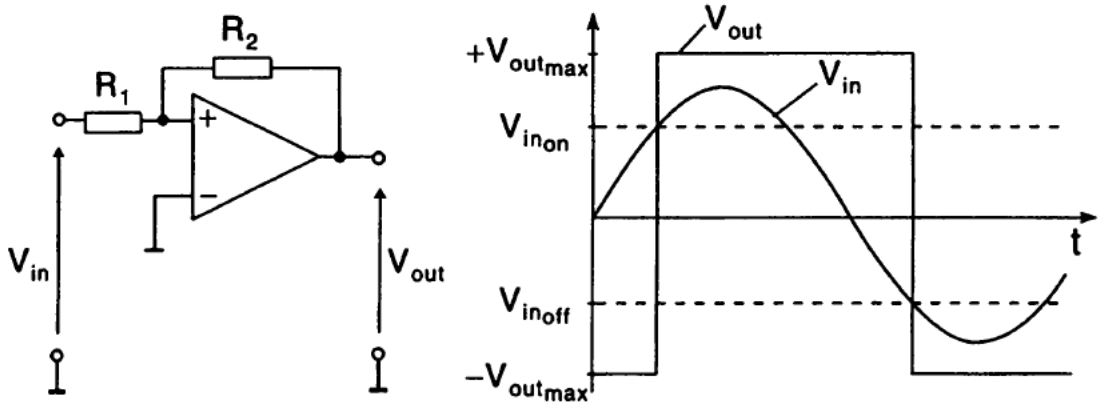


Рис. 7.115. Неинвертирующий триггер Шмитта

Уровни срабатывания неинвертирующего триггера Шмитта (рис. 7.115) определяются следующими выражениями:

$$V_{\text{in on}} = +\frac{R_1}{R_2} V_{\text{out max}}, \qquad V_{\text{in off}} = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{out max}}. \tag{7.144}$$

7.6.4.13. Генератор треугольных и прямоугольных сигналов

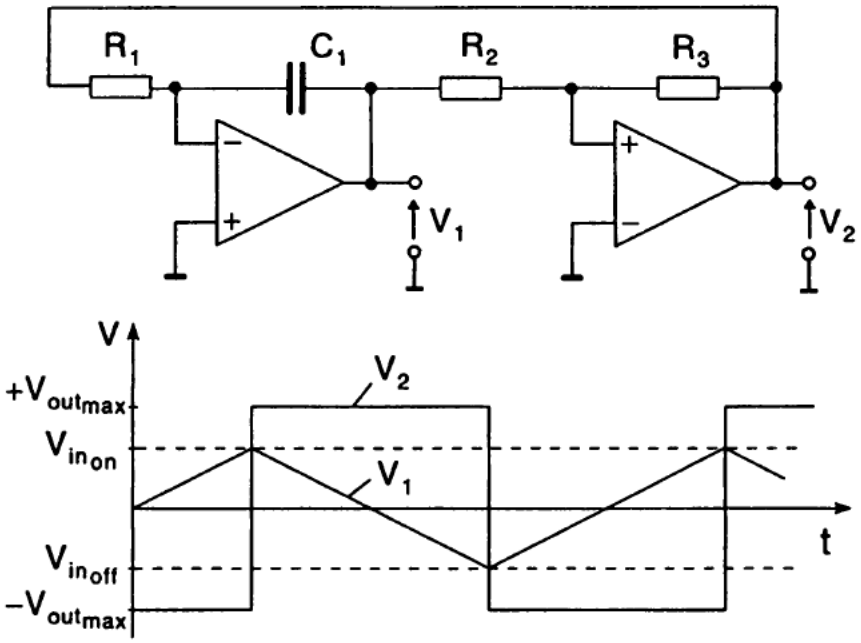


Рис. 7.116. Генератор треугольных и прямоугольных сигналов

Генератор треугольных и прямоугольных сигналов является автоколебательной системой, состоящей из интегратора и неинвертирующего триггера Шмитта (рис. 7.116). Амплитуда треугольного периодического сигнала определяется пороговыми уровнями срабатывания триггера Шмитта. При симметричном размахе выходного напряжения $\pm V_2$ частота сигнала на выходе схемы определяется:

$$f = \frac{R_3}{R_2} \frac{1}{4R_1C_1}. \tag{7.145}$$

7.6.4.14. Мультивибратор

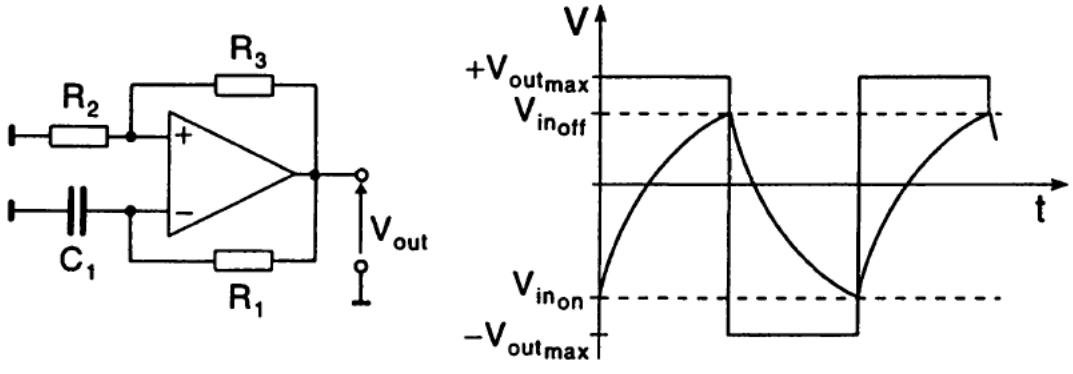


Рис. 7.117. Мультивибратор

Мультивибратор или генератор прямоугольных сигналов также является автоколебательной системой (рис. 7.117). Частота переключения такой схемы равна:

$$f = \frac{1}{2R_1C_1 \ln\left(1+\frac{2R_2}{R_3}\right)}. \quad (7.146)$$

При малом гистерезисе, т. е. при $R_2 << R_3$, последнее выражение можно записать в виде:

$$f \approx \frac{1}{2R_1C_1} \cdot \frac{R_3}{2R_2}. \quad (7.147)$$

7.6.4.15. Генератор пилообразных сигналов

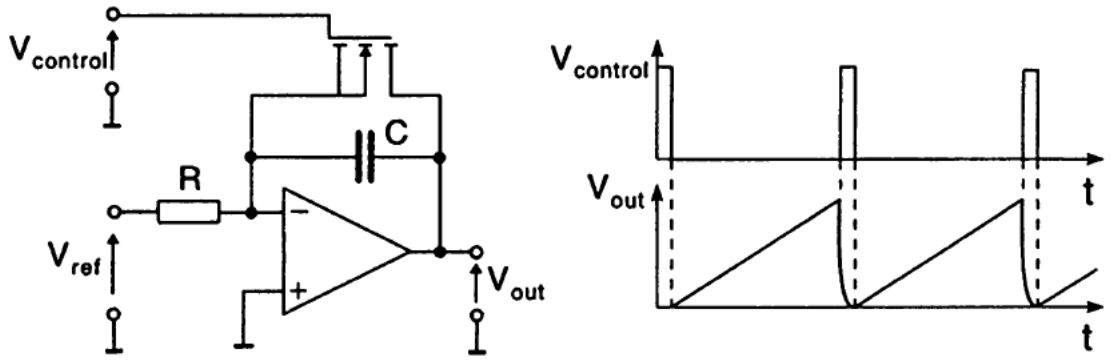


Рис. 7.118. Генератор пилообразных сигналов

На рис. 7.118 показан генератор пилообразных сигналов. Такая форма выходного сигнала генератора получается за счет заряда конденсатора, стоящего в цепи обратной связи ОУ, постоянным током и быстрого его разряда при подаче на затвор полевого транзистора короткого управляющего импульса $V_{control}$, который может как формироваться внутри схемы, так и поступать из внешнего блока управления.

7.6.4.16. Широтно-импульсный модулятор

Широтно-импульсные модуляторы (ШИМ) в основном используются либо в системах измерения, либо в импульсных источниках питания. Они преобразуют аналоговое напряжение в дискретный сигнал, **коэффициент заполнения импульсной последовательности** которого t_1/T пропорционален величине аналогового входного сигнала. ШИМ — самое простое средство подготовки аналоговых сигналов для подачи в цифровые системы.

ШИМ с постоянной частотой импульсов

Коэффициент заполнения импульсной последовательности данного ШИМ определяется выражением:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{V_{in}}{\hat{V}_S}.$$

Широтно-импульсная модуляция напряжения получается при сравнении пилообразного напряжения V_S с аналоговым напряжением V_{in} (рис. 7.119).

На основе такого ШИМ можно реализовать простой аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Недостатком рассматриваемого ШИМ является необходимость точной настройки пикового значения пилообразного сигнала $\hat{V}_S$.

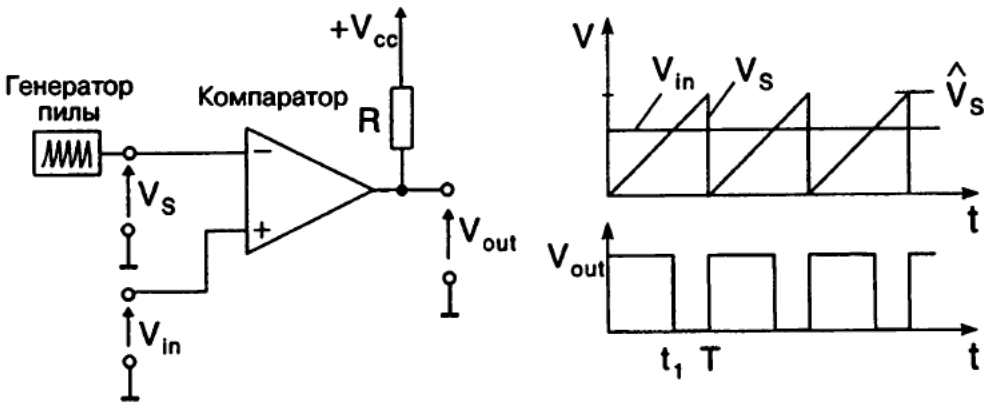


Рис. 7.119. ШИМ с постоянной частотой импульсов

Прецизионный ШИМ

Точность ШИМ значительно возрастает при использовании интегрирующего ОУ (рис. 7.120). В таком ШИМ на интеграторе происходит сравнение реального значения входного сигнала V_{in} с опорным уровнем V_{ref}. Выходной сигнал интегратора V'_{in} является входным для основного ОУ ШИМ, при этом $V_{in} = V_{ref} \cdot \frac{t_1}{T}$. Достоинством данного типа ШИМ является независимость выходного напряжения от амплитуды пилообразного сигнала и нелинейностей системы, а недостатком — необходимость выполнения условия, чтобы постоянная времени интегрирования всегда была намного больше длительности периода «пилы».

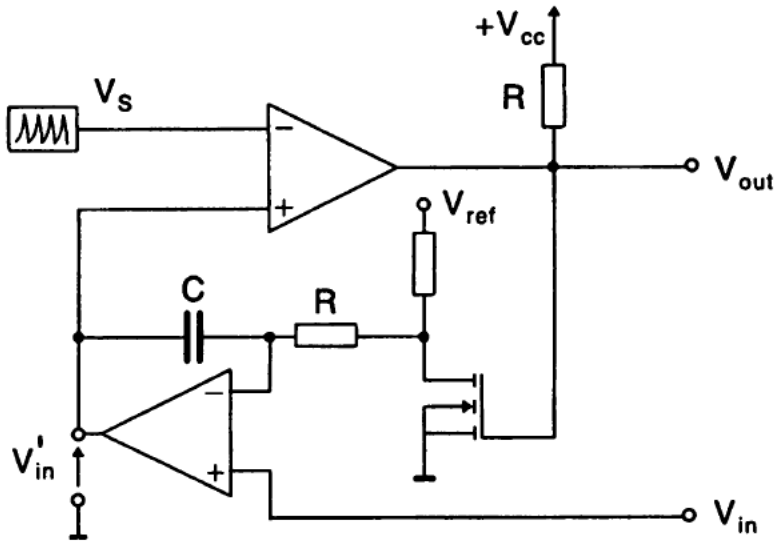


Рис. 7.120. Прецизионный ШИМ

На рис. 7.121 показана автоколебательная схема ШИМ. При $V_{in} = 0$ В коэффициент заполнения выходной импульсной последовательности ШИМ $t_1/T = 0{,}5$. Точность модулятора определяется симметричностью источника биполярного опорного напряжения V_z. Недостатком схемы является зависимость

частоты переключения от входного напряжения V_{in}. При $V_{in} = 0$ В частота переключения ШИМ равна:

$$f_{V_{in}=0} = \frac{1}{4R_1C_1}. \quad (7.148)$$

При увеличении входного напряжения частота переключения падает и достигает 0 при $V_{in} = V_z$.

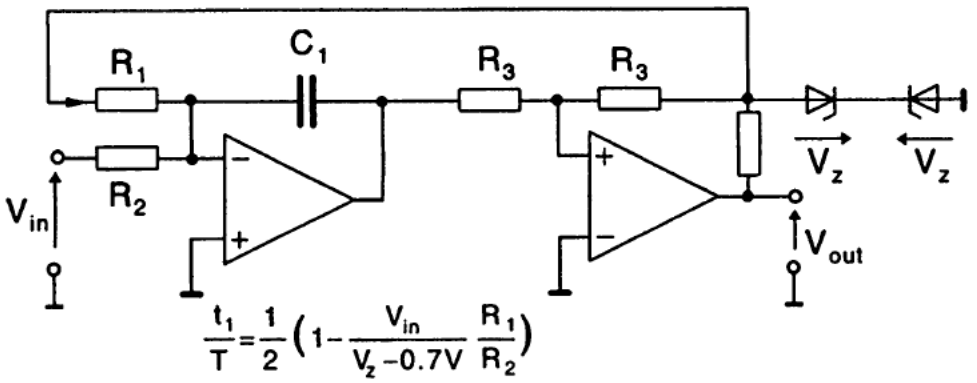


Рис. 7.121. Прецизионный ШИМ

7.7. Активные фильтры

Фильтры — это схемы, передаточные функции которых зависят от частоты. Различают следующие типы фильтров: **нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые (ФП), полосовые режекторные (ФПР)**, иногда называемые фильтрами-пробками. Общим у всех этих фильтров является то, что их передаточные функции делятся на две зоны: пропускания и заграждения. Граница между этими зонами называется критической частотой или частотой излома АЧХ. **Критическая частота** (или точка −3 дБ) — это частота, на которой коэффициент передачи фильтра на −3 дБ (или в $1/\sqrt{2}$ раз) ниже значения АЧХ в зоне пропускания. Коэффициент ослабления сигнала в зоне заграждения фильтра определяется его **порядком**. Чем выше порядок фильтра, тем круче АЧХ в зоне заграждения.

Еще одним членом семейства фильтров является **фазовый** фильтр. Этот фильтр никак не влияет на амплитуду сигнала, но меняет его фазу. Величина изменения фазы зависит от частоты этого сигнала. Далее в этом разделе режекторные и фазовые фильтры рассматриваться не будут.

Также необходимо различать активные и пассивные фильтры. В состав **активных фильтров** входят активные компоненты, используемые как преобразователи импеданса. Активные фильтры высоких порядков часто комбинируются из фильтров второго порядка без применения цепей обратных связей. Такой подход значительно упрощает проектирование и калибровку фильтров по сравнению с разработкой пассивных фильтров. Более того, использование активных компонентов позволяет отказаться от индуктивных элементов. В активных фильтрах роль компонентов, определяющих частоту, играют *RC*-цепочки. Соответственно, **пассивные фильтры** состоят только из индуктивных, емкостных и резистивных элементов, т. е. в них совсем нет активных компонентов.

7.7.1. Фильтры нижних частот

7.7.1.1. Теория фильтров нижних частот

Рассмотрим передаточную функцию *RLC*-фильтра нижних частот второго порядка (рис. 7.122а):

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = F(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}. \qquad (7.149)$$

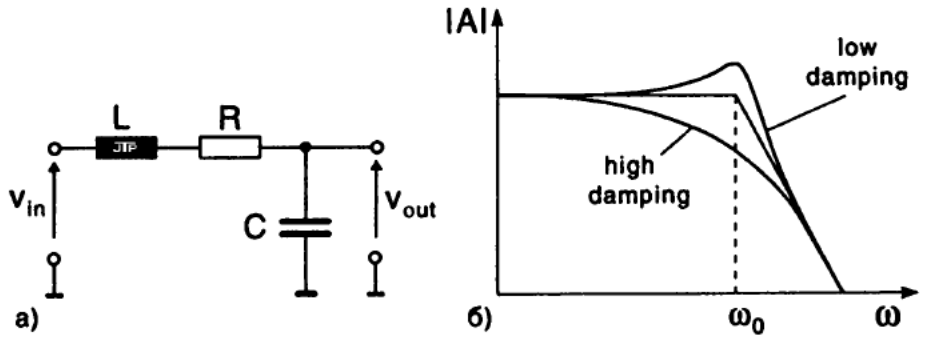


Рис. 7.122. *RLC*-фильтр нижних частот второго порядка:
а) схема;
б) АЧХ

- При малых значениях ω выражение $F(j\omega)$ приблизительно равно 1.
- При больших значениях ω начинает преобладать квадратичный член знаменателя, что приводит к уменьшению $F(j\omega)$ со скоростью 40 дБ/дек.
- Поведение АЧХ в области собственной частоты ω_0 определяется величиной коэффициента затухания фильтра при переходе из зоны пропускания в зону заграждения (см. также раздел 1.2.6). При малых значениях коэффициента затухания в этой области происходит рост АЧХ вследствие явлений резонанса, а при больших значениях коэффициента затухания АЧХ начинает падать, даже не достигая критической частоты. Коэффициент затухания практически не играет никакой роли ни в зоне очень высоких, ни в зоне очень низких частот ω (рис. 7.122б).

Нормализация

Заменяя $j\omega$ на комплексную частоту s и нормализуя ее относительно критической частоты ω_c ($s = \omega_c S$), получаем:

$$F(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2 LC} \quad \text{при} \quad j\omega = s \qquad (7.150)$$

и:

$$F(S) = \frac{1}{1 + \omega_c RCS + \omega_c^2 LCS^2} \quad \text{при} \quad S = \frac{s}{\omega_c}. \qquad (7.151)$$

Если коэффициенты S заменить на действительные коэффициенты a_1 и b_1, то можно вывести независимую обобщенную функцию ФНЧ второго порядка:

$$F(S)=\frac{1}{1+a_1S+b_1S^2}. \qquad (7.152)$$

ФНЧ более высокого порядка, т. е. фильтр с более резким падением АЧХ на частотах выше критической частоты, можно реализовать при помощи нескольких ФНЧ первого или второго порядков, соединенных последовательно.

Обобщенная передаточная функция ФНЧ $2n$-го порядка имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_0}{(1+a_1S+b_1S^2)\cdot(1+a_2S+b_2S^2)\cdot\ldots\cdot(1+a_nS+b_nS^2)}. \qquad (7.153)$$

- ФНЧ второго порядка является основным блоком для построения ФНЧ более высоких порядков.
- При последовательном соединении нескольких ФНЧ первого или второго порядков получается ФНЧ, АЧХ которого обладает резким спадом после критической частоты. ФНЧ первого порядка можно рассматривать как частный случай ФНЧ второго порядка, коэффициент b которого равен нулю (см. уравнение (7.153)). В коэффициенте F_0 в выражении (7.153) учтены все коэффициенты усиления внутри составного фильтра, зависящие от частоты.
- Самая высокая степень полинома в знаменателе определяет **порядок** ФНЧ. От порядка фильтра зависит скорость падения АЧХ после критической частоты (см. уравнение (7.153)). Каждая степень числа два в порядке ФНЧ приводит к наклону АЧХ, равному 20 дБ/дек (см. раздел 5.3.2).
- Корни полинома знаменателя называются **полюсами** $F(S)$. В зависимости от значений коэффициентов a_i и b_i они могут быть действительными или комплексно-сопряженными числами (рис. 7.123). Комплексно-сопряженные полюса являются причиной возникновения резонансных всплесков на АЧХ ФНЧ в области перехода из зоны пропускания в зону заграждения.
- Количество полюсов всегда равно порядку фильтра.
- Коэффициенты a_i и b_i определяют форму АЧХ в области перехода из зоны пропускания в зону заграждения. Функции с комплексными полюсами обладают более высокими критическими частотами, а следовательно, и более крутыми спадами АЧХ, чем функции с действительными полюсами. По этой причине большинство фильтров реализуются с передаточными функциями с комплексно-сопряженными полюсами.

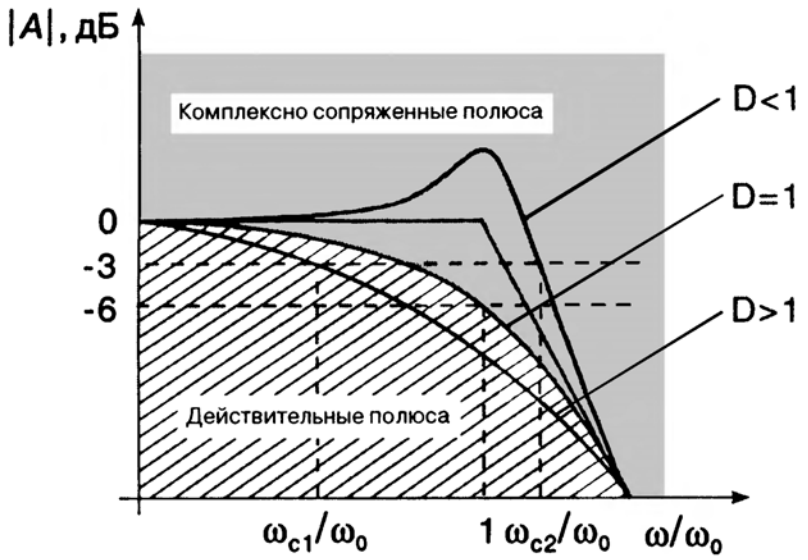


Рис. 7.123. АЧХ ФНЧ второго порядка с комплексно-сопряженными и действительными полюсами

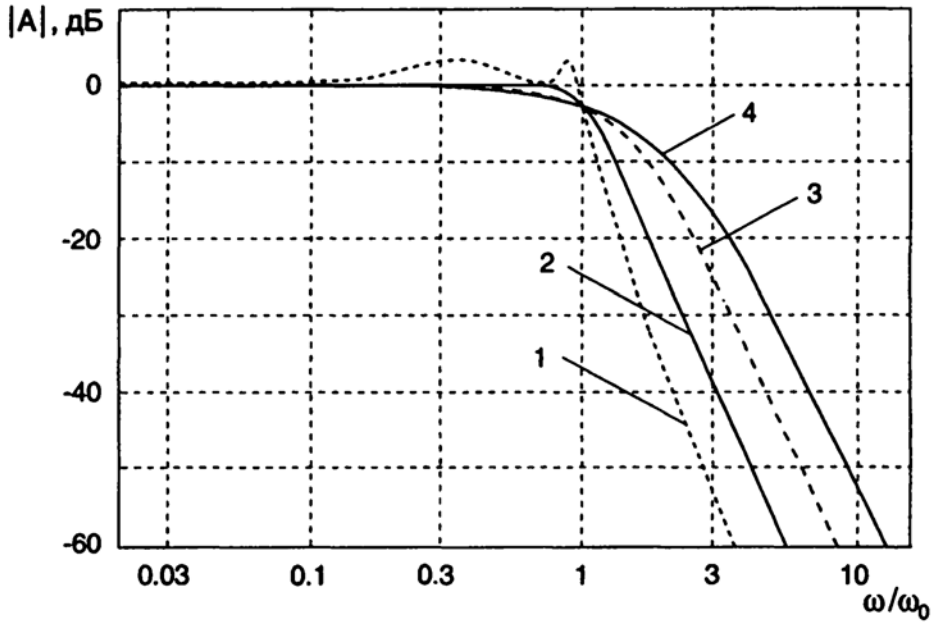


Рис. 7.124. Сравнение ФНЧ четвертого порядка:
1) фильтр Чебышева;
2) фильтр Баттерворта;
3) фильтр Бесселя;
4) фильтр с критическим демпфированием

В зависимости от выбора коэффициентов a_i и b_i получают фильтры с разными характеристиками (рис. 7.124).

Фильтр Баттерворта. АЧХ такого фильтра F (S) удерживается на уровне F_0 практически до критической частоты.

Фильтр Бесселя. Ниже критической частоты этот фильтр обладает оптимальной передаточной характеристикой для сигналов прямоугольной формы.

Фильтр Чебышева. На АЧХ этого фильтра имеется выброс (резонансный эффект) при переходе из зоны пропускания в зону заграждения. АЧХ фильтра круто спадает после критической частоты.

Критическое демпфирование реализуется на фильтрах с действительными полюсами, при этом все полюса ФНЧ равны между собой. В таких фильтрах нет резонансного эффекта.

В табл. 7.2—7.5 приведены значения коэффициентов a_i и b_i фильтров разных типов с первого до шестого порядков. АЧХ соответствующих передаточных функций показаны на рис. 7.125—7.128. В пятой и шестой колонках таблиц приведены значения нормализованных критических частот отдельных фильтров второго порядка, а также их добротности. Эти параметры полезны при проведении тестирования конкретных ФНЧ.

Фильтр Баттерворта

Таблица 7.2. Фильтр Баттерворта

Порядок n	i	a_i	b_i	f_{ci}/f_c	Q_i
1	1	1,0000	0,0000	1,000	–
2	1	1,4142	1,0000	1,000	0,71
3	1	1,0000	0,0000	1,000	–
	2	1,0000	1,0000	1,272	1,00
4	1	1,8478	1,0000	0,719	0,54
	2	0,7654	1,0000	1,390	1,31
5	1	1,0000	0,0000	1,000	–
	2	1,6180	1,0000	0,859	0,62
	3	0,6180	1,0000	1,448	1,62
6	1	1,9319	1,0000	0,676	0,52
	2	1,4142	1,0000	1,000	0,71
	3	0,5176	1,0000	1,479	1,93

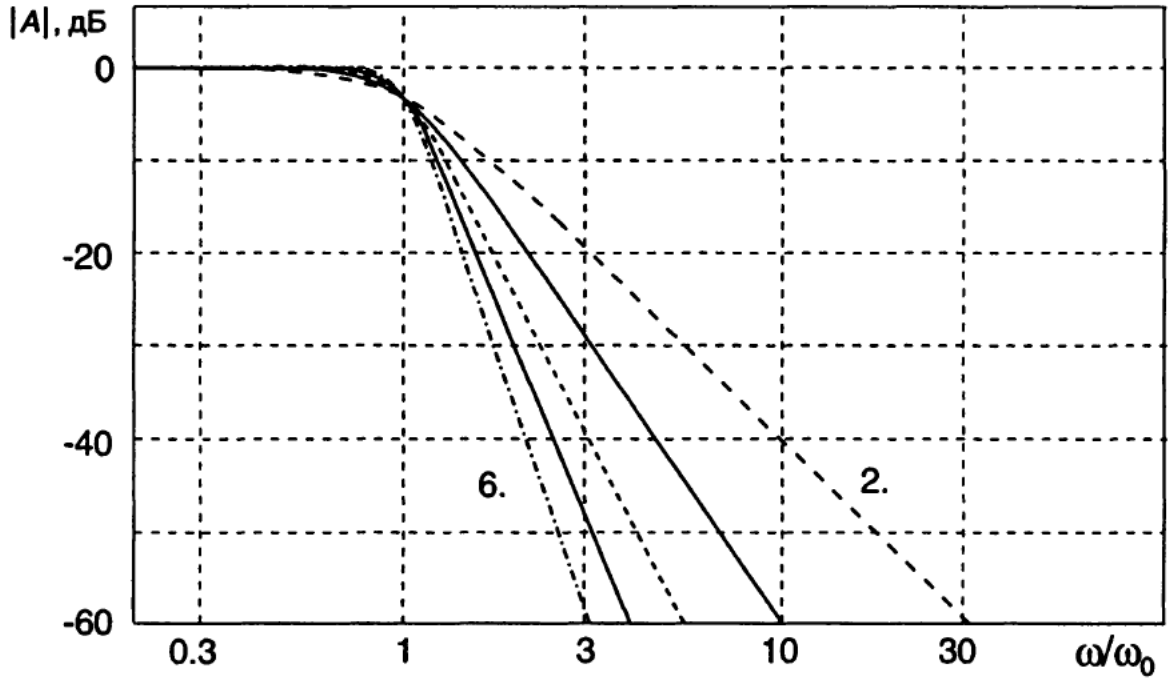


Рис. 7.125. Фильтр Баттерворта со второго по шестой порядок

Фильтр Бесселя

Таблица 7.3. Фильтр Бесселя

Порядок n	i	a_i	b_i	f_{ci}/f_c	Q_i
1	1	1,0000	0,0000	1,000	–
2	1	1,3617	0,6180	1,000	0,58
3	1	0,7560	0,0000	1,323	–
	2	0,9996	0,4772	1,414	0,69
4	1	1,3397	0,4889	0,978	0,52
	2	0,7743	0,3890	1,797	0,81
5	1	0,6656	0,0000	1,502	–
	2	1,1402	0,4128	1,184	0,56
	3	0,6216	0,3245	2,138	0,92
6	1	1,2217	0,3887	1,063	0,51
	2	0,9686	0,3505	1,431	0,61
	3	0,5131	0,2756	2,447	1,02

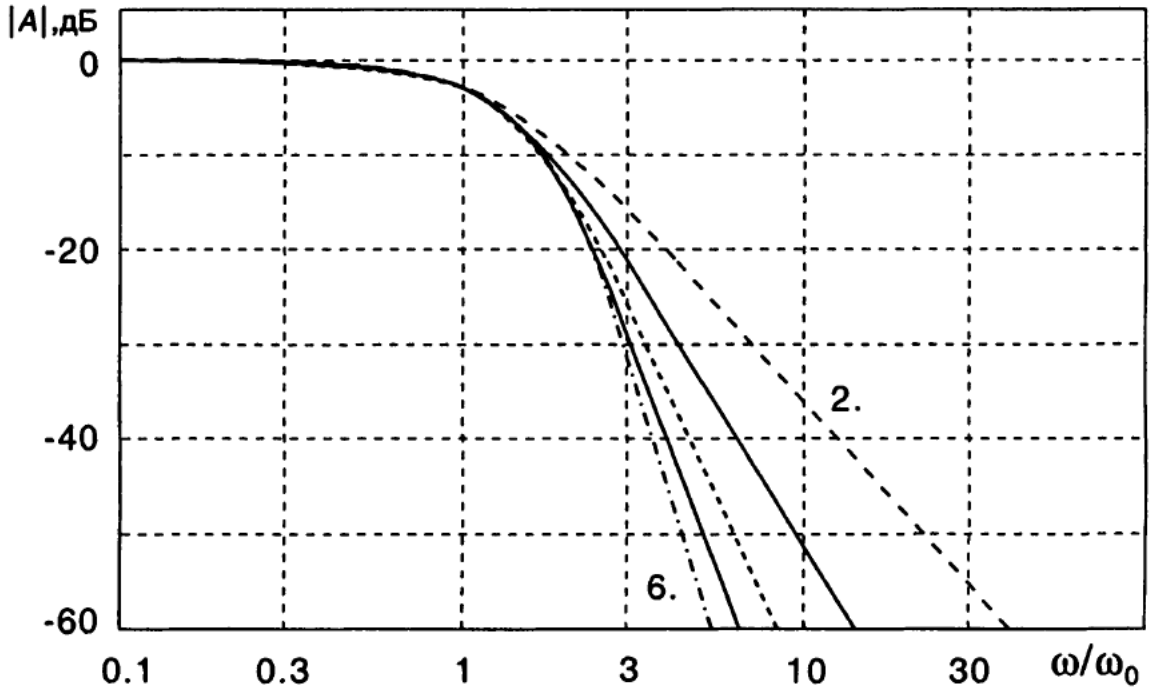


Рис. 7.126. Фильтр Бесселя со второго по шестой порядок

Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 0,5 дБ)

Таблица 7.4. Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 0,5 дБ)

Порядок n	i	a_i	b_i	f_{ci}/f_c	Q_i
1	1	1,0000	0,0000	1,0000	–
2	1	1,3614	1,3827	1,0000	0,86
3	1	1,8636	0,0000	0,537	–
	2	0,6402	1,1931	1,335	1,71
4	1	2,6282	3,4341	0,538	0,71
	2	0,3648	1,1509	1,419	2,94

Окончание табл. 7.4

5	1	2,9235	0,0000	0,342	–
	2	1,3025	2,3534	0,881	1,18
	3	0,2290	1,0833	1,480	4,54
6	1	3,8645	6,9797	0,366	0,68
	2	0,7528	1,8573	1,078	1,81
	3	0,1589	1,0711	1,495	6,51

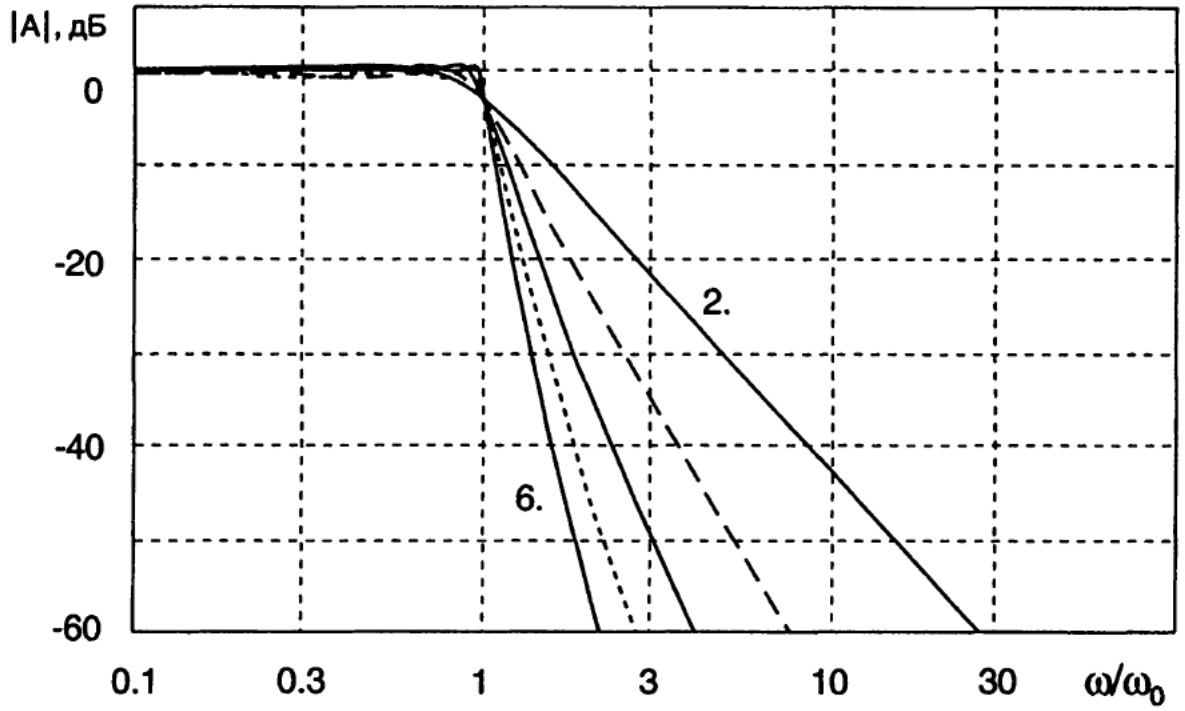


Рис. 7.127. Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 0,5 дБ) со второго по шестой порядок

Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 3 дБ)

Таблица 7.5. Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 3 дБ)

Порядок *n*	*i*	a_i	b_i	f_{ci}/f_c	Q_i
1	1	1,0000	0,0000	1,000	–
2	1	1,0650	1,9305	1,000	1,30
3	1	3,3496	0,0000	0,299	–
	2	0,3559	1,1923	1,396	3,07
4	1	2,1853	5,5339	0,557	1,08
	2	0,1964	1,2009	1,410	5,58
5	1	5,6334	0,0000	0,178	–
	2	0,7620	2,6530	0,917	2,14
	3	0,1172	1,0686	1,500	8,82
6	1	3,2721	11,6773	0,379	1,04
	2	0,4077	1,9873	1,086	3,46
	3	0,0815	1,0861	1,489	12,78

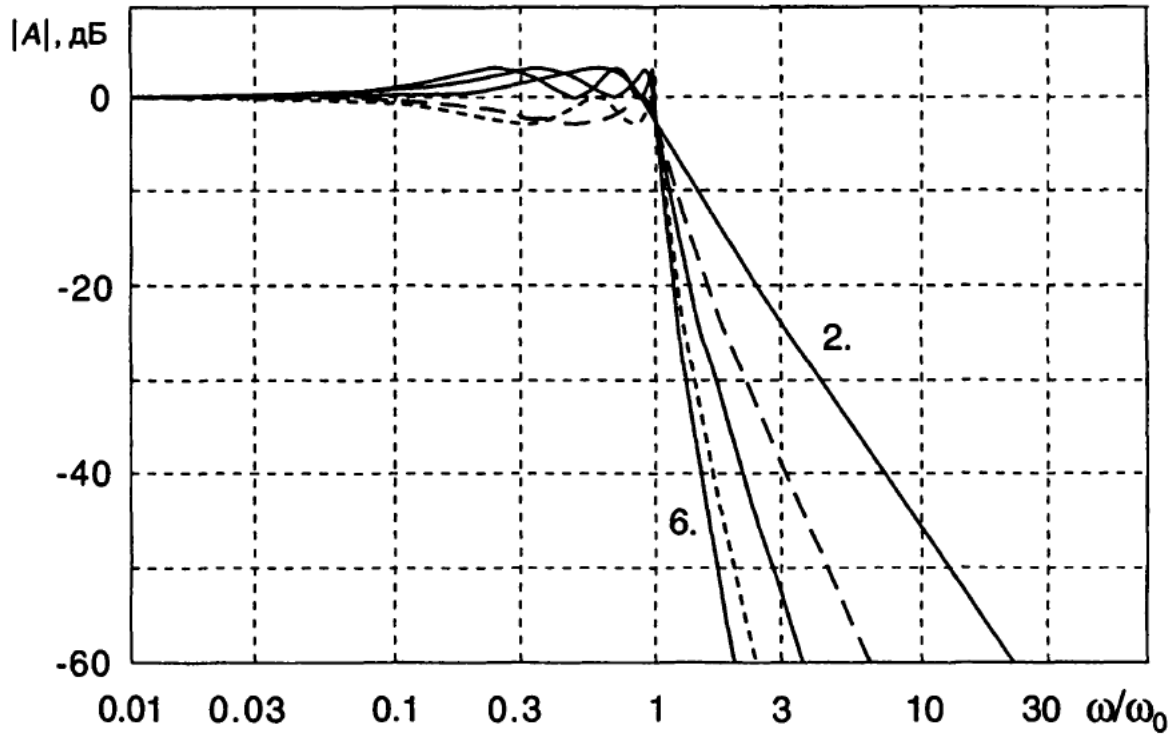


Рис. 7.128. Фильтр Чебышева (выброс на АЧХ 3 дБ) со второго по шестой порядок

7.7.1.2. Расчет ФНЧ

Алгоритм расчета ФНЧ:

- Выбор типа фильтра, его критической частоты и порядка.
- Выбор схемы фильтра (см. также раздел 7.7.1.3).
- Вычисление передаточной функции $F(s)$ и ее нормализация при помощи соотношения $S = s/\omega_c$.
- Преобразование нормализованной передаточной функции к виду уравнения (7.153).
- Определение параметров элементов, входящих в электрическую схему фильтра, по полученным коэффициентам a_i и b_i. Поскольку количество переменных превышает число уравнений, часть значений элементов подбираются экспериментально.
- Для изменения значений некоторых параметров без повторения всего расчета можно воспользоваться следующими соотношениями:

  Изменение C на C' приводит к изменению R и L: $R' = R\frac{C}{C'}$, $L' = L\frac{C}{C'}$;

  Изменение R на R' приводит к изменению C и L: $C' = C\frac{R}{R'}$, $L' = L\frac{R'}{R}$;

  Изменение L на L' приводит к изменению R и C: $C' = C\frac{L}{L'}$, $R' = R\frac{L'}{L}$.
- Пятая и шестая колонки табл. 7.2—7.5 используются при проведении тестирования конкретных ФНЧ первого или второго порядков.

Пример: расчет ФНЧ Чебышева третьего порядка с 3 дБ выбросом на АЧХ и критической частотой $f_c = 10$ кГц.

Расчет. Выбираем схему, показанную на рис. 7.129.

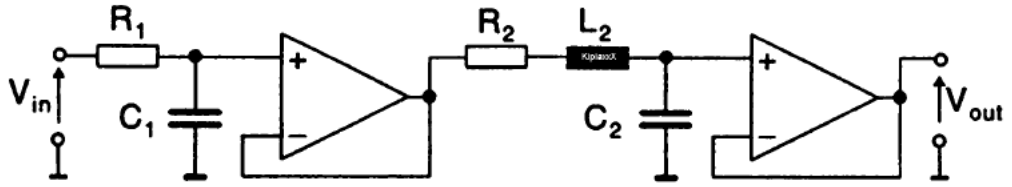


Рис. 7.129. ФНЧ третьего порядка

Передаточная функция выбранной схемы определяется выражением:

$$F(s)=\frac{1}{1+R_1C_1s}\cdot\frac{1}{1+R_2C_2s+L_2C_2s^2}.$$

Применив преобразование $S=s/\omega_c$, получаем:

$$F(S)=\frac{1}{1+\underbrace{\omega_cR_1C_1}_{a_1}S}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\omega_cR_2C_2}_{a_2}S+\underbrace{\omega_c^2L_2C_2}_{b_2}S^2}.$$

Из табл. 7. 5 следует, что:

$$a_1=3{,}3496,\quad b_1=0{,}0000,\quad a_2=0{,}3559,\quad b_2=1{,}1923.$$

Пусть $C_1=C_2=10$ нФ. Тогда:

$$R_1=\frac{a_1}{\omega_c\cdot C_1}=\frac{3{,}3496}{2\pi\cdot 10\text{ кГц}\cdot 10\text{ нФ}}=5{,}334\text{ кОм},$$

$$R_2=\frac{a_2}{\omega_c\cdot C_2}=\frac{0{,}3559}{2\pi\cdot 10\text{ кГц}\cdot 10\text{ нФ}}=567\text{ Ом},$$

$$L_2=\frac{b_2}{\omega^2{}_c\cdot C_2}=\frac{3{,}3496}{(2\pi)^2\cdot 100\cdot 10^6\text{ Гц}^2\cdot 10\text{ нФ}}=30\text{ мГн}.$$

7.7.1.3. Схемы ФНЧ

Неинвертирующий ФНЧ первого порядка

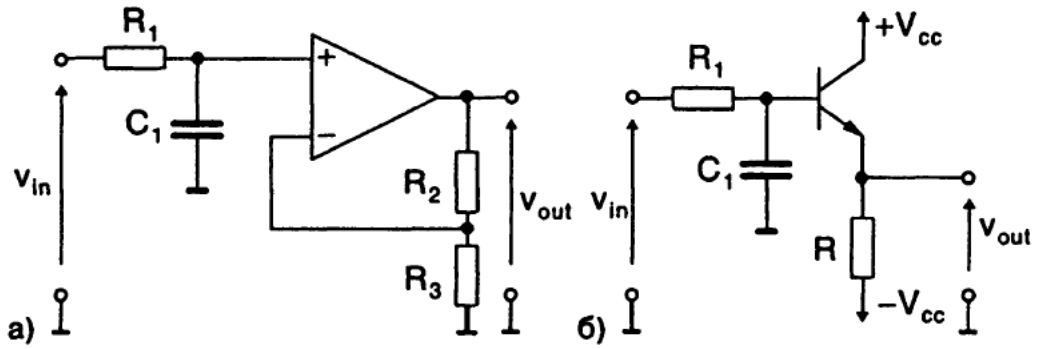


Рис. 7.130. Неинвертирующий ФНЧ первого порядка:
а) на ОУ;
б) на эмиттерном повторителе, используемом для преобразования импеданса

Передаточная функция данного ФНЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_0}{1+aS}=\frac{1+R_2/R_3}{1+\underbrace{\omega_c R_1 C_1}_{a}S}. \qquad (7.154)$$

Инвертирующий ФНЧ первого порядка

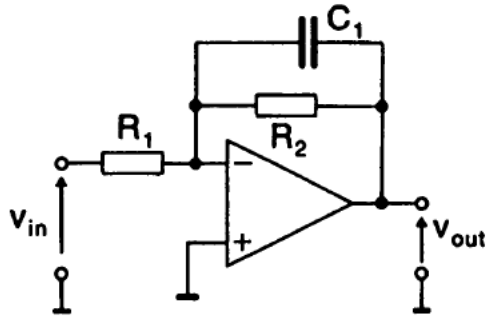


Рис. 7.131. Инвертирующий ФНЧ первого порядка

Передаточная функция данного ФНЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_0}{1+aS}=\frac{-R_2/R_1}{1+\underbrace{\omega_c R_2 C_1}_{a}S}. \qquad (7.155)$$

Инвертирующий ФНЧ второго порядка

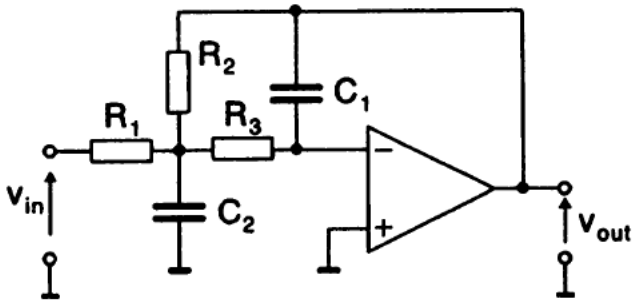


Рис. 7.132. Инвертирующий ФНЧ второго порядка

Передаточная функция данного ФНЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_0}{1+aS+bS^2}=\frac{-R_2/R_1}{1+\underbrace{\omega_c C_1(R_2+R_3+R_2R_3/R_1)}_{a}S+\underbrace{\omega_c^2 C_1C_2R_2R_3}_{b}S^2}. \qquad (7.156)$$

Поскольку C_1 и C_2 выбираются произвольным образом, получаем:

$$R_2=\frac{aC_2-\sqrt{a^2C_2^2-4C_1C_2b(1-F_0)}}{2\omega_c C_1C_2},\quad R_1=\frac{-R_2}{F_0},\quad R_3=\frac{b}{\omega_c^2C_1C_2R_2}.$$

Для того чтобы значение R_2 было действительным числом, требуется выполнение условия:

$$\frac{C_2}{C_1}\geq\frac{4b(1-F_0)}{a^2}.$$

Неинвертирующий ФНЧ второго порядка

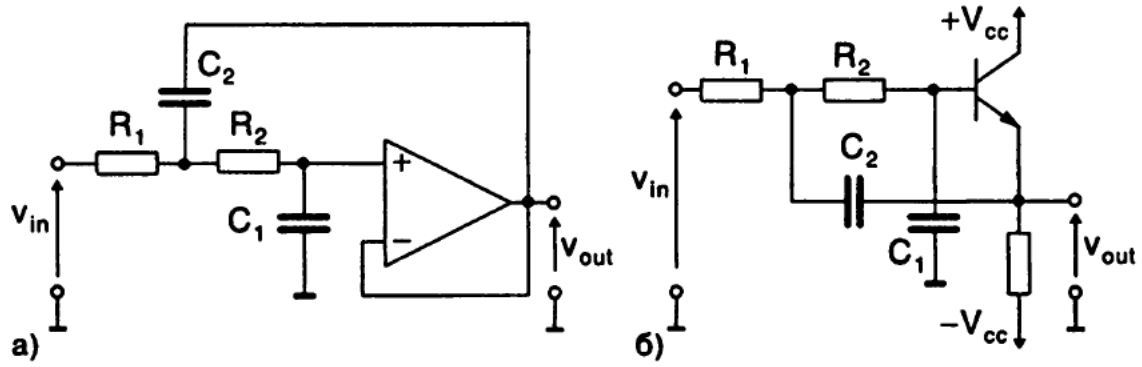


Рис. 7.133. Неинвертирующий ФНЧ второго порядка:
а) на ОУ;
б) на эмиттерном повторителе, используемом для преобразования импеданса

Передаточная функция данного ФНЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_0}{1+aS+bS^2}=\frac{1}{1+\underbrace{\omega_c C_1(R_2+R_2)}_{a}S+\underbrace{\omega_c^2 C_1 C_2 R_1 R_2}_{b}S^2}. \qquad (7.157)$$

Поскольку C_1 и C_2 выбираются произвольным образом, получаем:

$$R_2, R_1=\frac{aC_2 \pm -\sqrt{a^2C_2^2-4bC_1C_2}}{2\omega_c C_1 C_2}.$$

Для того чтобы значение R_2 было действительным числом, требуется выполнение условия:

$$\frac{C_2}{C_1}\geq\frac{4b}{a^2}.$$

7.7.2. Фильтры верхних частот

7.7.2.1. Теория ФВЧ

См. также раздел 7.7.1.1, где описана теория ФНЧ.

Обобщенная передаточная функция ФВЧ n-го порядка имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_\infty}{\left(1+\frac{a_1}{S}+\frac{b_1}{S^2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2}{S}+\frac{b_2}{S^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n}{S}+\frac{b_n}{S^2}\right)}. \qquad (7.158)$$

В ФВЧ, так же как и в ФНЧ, различаются фильтры Чебышева, Баттерворта и Бесселя. Коэффициенты a_i и b_i, приведенные в табл. 7.2—7.5, справедливы и для ФВЧ. F_∞ определяет коэффициент передачи фильтра на очень высоких частотах ($f\to\infty$).

7.7.2.2. Схемы ФВЧ

Неинвертирующий ФВЧ первого порядка

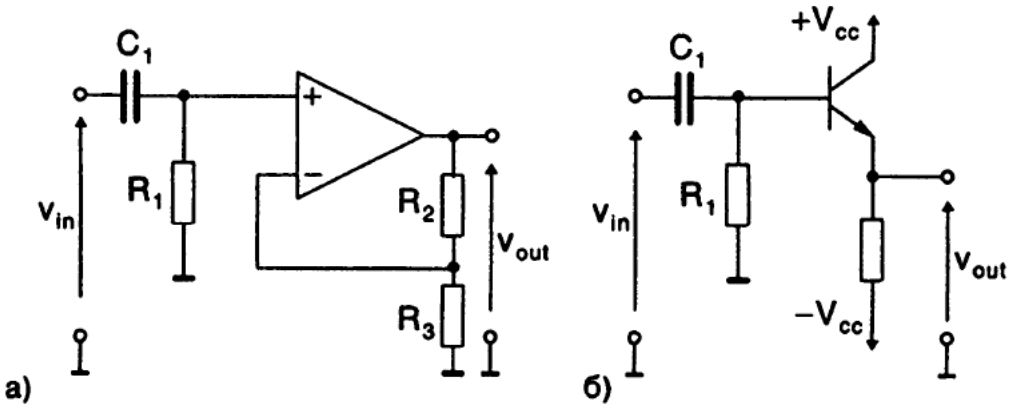


Рис. 7.134. Неинвертирующий ФВЧ первого порядка:

а) на ОУ;

б) на эмиттерном повторителе, используемом для преобразования импеданса

Передаточная функция данного ФВЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_\infty}{1+\dfrac{a}{S}}=\frac{1+R_2/R_3}{1+\underbrace{\dfrac{1}{\omega_c R_1 C_1}}_{a}\cdot\dfrac{1}{S}}. \qquad (7.159)$$

Инвертирующий ФВЧ первого порядка

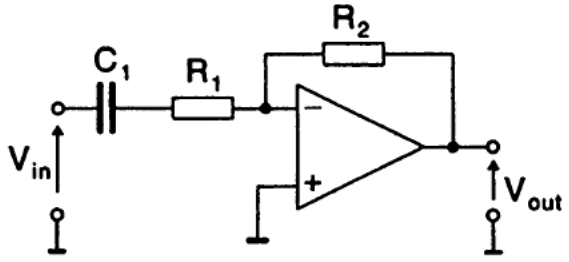


Рис. 7.135. Инвертирующий ФВЧ первого порядка

Передаточная функция данного ФВЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_\infty}{1+\dfrac{a}{S}}=\frac{-R_2/R_1}{1+\underbrace{\dfrac{1}{\omega_c R_1 C_1}}_{a}\cdot\dfrac{1}{S}}. \qquad (7.160)$$

Неинвертирующий ФВЧ второго порядка

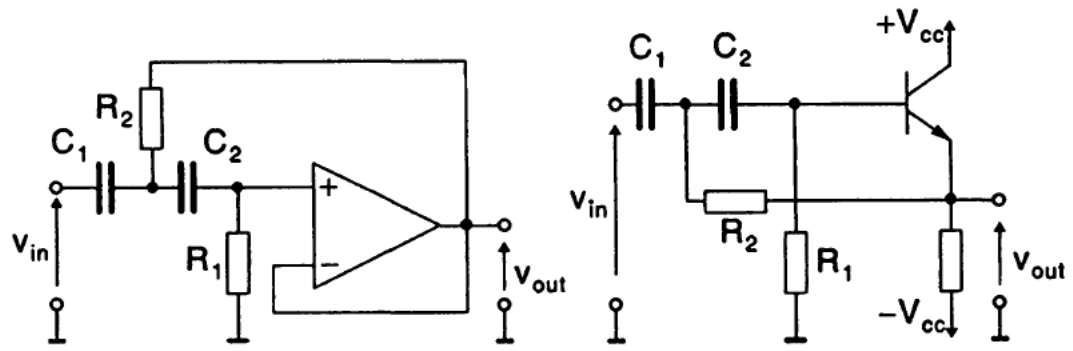


Рис. 7.136. Неинвертирующий ФВЧ второго порядка

Передаточная функция данного ФНЧ имеет вид:

$$F(S)=\frac{F_\infty}{1+\frac{a}{S}+\frac{b}{S^2}}=\frac{-R_2/R_1}{1+\underbrace{\frac{C_1+C_2}{\omega_c R_1 C_1 C_2}}_{a}\cdot\frac{1}{S}+\underbrace{\frac{1}{\omega_c^2 C_1 C_2 R_1 R_2}}_{b}\cdot\frac{1}{S^2}}. \qquad (7.161)$$

Пусть $C_1 = C_2 = C$, тогда:

$$R_1=\frac{2}{a\omega_c C},\quad R_2=\frac{a}{2b\omega_c C}.$$

7.7.1. Полосовые фильтры

7.7.3.1. Полосовой фильтр второго порядка

Передаточная функция ФП второго порядка похожа на передаточную функцию *RLC*-фильтра (рис. 7.137).

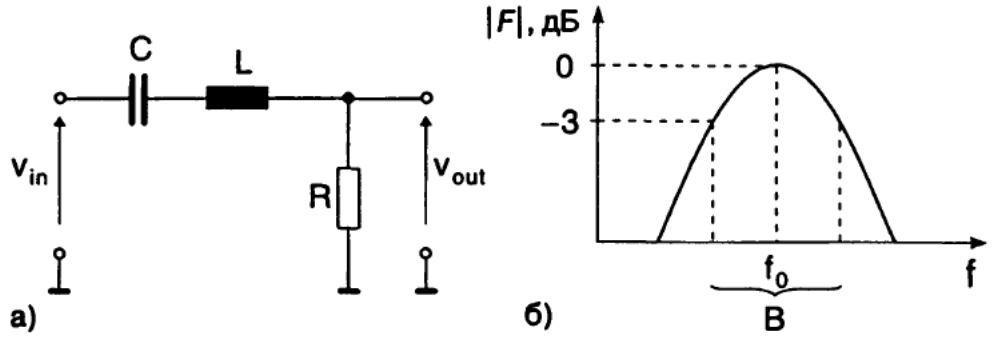


Рис. 7.137. Полосовой фильтр второго порядка:
а) схема;
б) АЧХ

- На резонансной частоте f_0 АЧХ равна 1.
- **Центральная частота** ФП равна резонансной частоте f_0.
- **Полоса пропускания** ФП определяется диапазоном частот между точками −3дБ.

В соответствии с рис. 7.137 передаточная функция ФП имеет вид:

$$F(s)=\frac{sRC}{1+s\underbrace{RC}_{2D/\omega_0}+s^2\underbrace{LC}_{1/\omega_0^2}}, \qquad (7.162)$$

где D — коэффициент демпфирования, а ω_0 — резонансная частота (см. также раздел 1.1.6.1). Произведя замену:

$$B=2D\frac{\omega_0}{2\pi},\quad f_0=\frac{\omega_0}{2\pi},$$

получаем обобщенное выражение для передаточной функции ФП второго порядка:

$$F(s)=\frac{F_0\cdot s\dfrac{B}{2\pi f_0^2}}{1+\dfrac{sB}{2\pi f_0^2}+\dfrac{s^2}{(2\pi f_0)^2}}. \qquad (7.163)$$

В коэффициенте F_0 в выражении (7.163) учтены все коэффициенты усиления внутри составного фильтра, зависящие от частоты, поэтому передаточная функция на резонансной частоте не всегда равна 1.

- Центральная частота и полоса пропускания любого ФП второго порядка могут быть определены из обобщенной передаточной функции.

Пример: Для *RLC*-фильтра, описанного выше, справедливы соотношения:

$$RC=\frac{B}{2\pi f_0^2},\quad LC=\frac{1}{(2\pi f_0)^2},$$

из которых следует, что:

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},\quad B=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R}{L}.$$

7.7.3.2. Схема полосового фильтра второго порядка

Передаточная функция полосового фильтра второго порядка, показанного на рис. 7.138, определяется выражением:

$$F(s)=\frac{s\cdot\beta\cdot RC}{1+s\underbrace{RC(3-\beta)}_{B/(2\pi f_0^2)}+s^2\underbrace{R^2C^2}_{1/(2\pi f_0)^2}}\quad\text{при}\quad\beta=1+\frac{R_1}{R_2}. \qquad (7.164)$$

Резонансная частота данного ФП равна:

$$f_0=\frac{1}{2\pi RC},$$

а полоса пропускания:

$$B=\frac{3-\beta}{2\pi RC}.$$

Резонансная частота и полоса пропускания могут выбираться независимо друг от друга. Коэффициент передачи на резонансной частоте *не равен* 1. Он определяется выражением $|F(f_0)| = \frac{\beta}{3-\beta}$. Для получения требуемого коэффициента передачи после схемы ФП ставят усилитель.

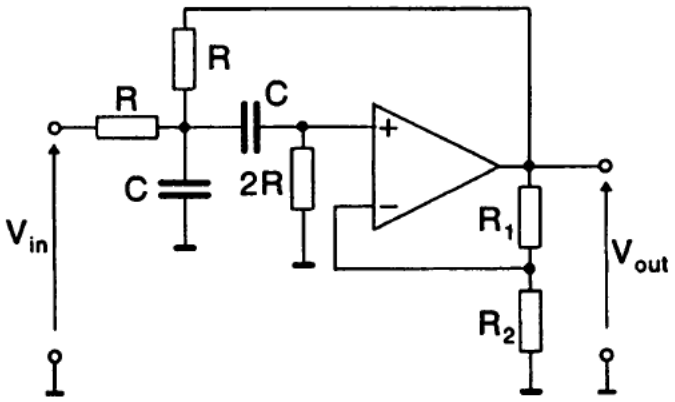


Рис. 7.138. Полосовой фильтр второго порядка

7.7.3.3. Полосовые фильтры четвертого и более высоких порядков

Полосовой фильтр четвертого порядка

Спад АЧХ полосового фильтра четвертого порядка равен 40 дБ/дек. Такой фильтр может быть реализован на основе двух последовательно включенных ФП второго порядка, центральные частоты которых мало отличаются друг от друга. Полоса пропускания $B = f_0/\sqrt{2}$ определяет максимальную ширину зоны пропускания фильтра. Чем больше несоответствие резонансных частот ФП второго порядка, тем меньше коэффициент передачи результирующего фильтра в зоне пропускания.

Полосовые фильтры более высоких порядков с широкой полосой пропускания

Полосовые фильтры более высоких порядков с широкой полосой пропускания реализуются на основе последовательно включенных ФНЧ и ФВЧ, обладающих сходными характеристиками. Спады АЧХ полосового фильтра определяются спадами АЧХ ФНЧ и ФВЧ. Максимальное значение полосы пропускания определяется характеристиками составных фильтров. Для фильтров Баттерворта и Бесселя максимум полосы пропускания реализуется в случаях, когда критические частоты ФНЧ и ФВЧ различаются на порядок, а для фильтров Чебышева ширина полосы растет с ростом порядка ФП (см. рис. 7.127 и 7.128).

7.7.4. Универсальный фильтр

Такой фильтр реализуется на основе интеграторов с обратными связями (рис. 7.139).

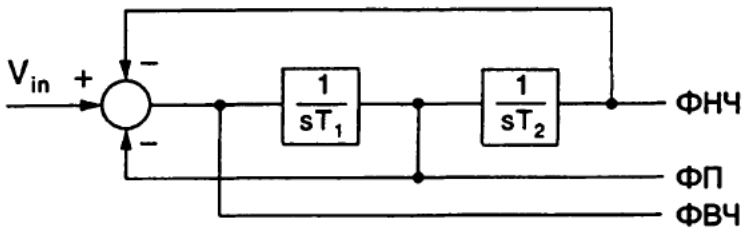


Рис. 7.139. Блок-схема универсального фильтра

Схема, показанная на рис. 7.139, имеет три разных выхода: ФНЧ, ФП и ФВЧ. Передаточная функция универсального фильтра имеет следующий вид:

ФНЧ:

$$F_{\text{ФНЧ}} = \frac{1}{1 + sT_2 + s^2 T_1 T_2} = \frac{1}{1 + \underbrace{\omega_g T_2}_{a} S + \underbrace{\omega_g^2 T_1 T_2}_{b} S^2}. \qquad (7.165)$$

ФП:

$$F_{\text{ФП}} = \frac{sT_2}{1 + s\underbrace{T_2}_{B/(2\pi f_0^2)} + s^2 \underbrace{T_1 T_2}_{1/(2\pi f_0)^2}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{T_1 T_2}}, \quad B = \frac{1}{2\pi T_1}. \qquad (7.166)$$

ФВЧ:

$$F_{\text{ФВЧ}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{sT_1} + \frac{1}{s^2 T_1 T_2}} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{\omega_g T_1}}_{a} \cdot \frac{1}{S} + \underbrace{\frac{1}{\omega_g^2 T_1 T_2}}_{b} \cdot \frac{1}{S^2}}. \qquad (7.167)$$

7.7.5. Фильтр с переключаемым конденсатором

В разделе 7.7.4 было показано, как можно реализовать активный фильтр на основе интеграторов с обратными связями. На рис. 7.140 представлен интегратор с переключаемым конденсатором.

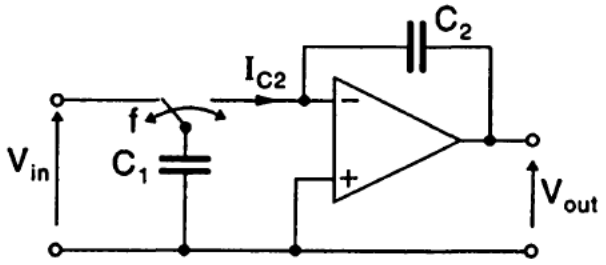


Рис. 7.140. Интегратор с переключаемым конденсатором

Конденсатор C_1 разряжается и заряжается с частотой f, определяющей среднее значение интегрируемого тока. Таким образом, частота переключения f задает постоянную времени интегратора T. Напряжение на выходе интегратора определяется выражением:

$$V_{\text{out}} = -\frac{1}{C_2}\int \bar{i}_{C2}\, dt.$$

При $\hat{i}_{C2} = f \cdot Q = f \cdot V_{\text{in}} \cdot C_1$ получаем:

$$F(s) = -\frac{C_1}{C_2} f \cdot \frac{1}{s}. \qquad (7.168)$$

Постоянная времени интегрирования равна: $T = \frac{C_2}{f \cdot C_1}$.

При помощи таких интеграторов с управляемой частотой переключения конденсаторов можно регулировать критическую частоту универсального фильтра, а также другие его характеристики.

7.8. Генераторы

При выполнении **критерия Баркгаузена**:

$$\beta(j\omega) \cdot A(j\omega) \geq 1 \qquad (7.169)$$

($\beta(j\omega) \cdot A(j\omega)$ — коэффициент передачи замкнутого контура) системы с обратными связями входят в колебательный режим (см. также раздел 7.5.4). Это происходит на частотах, при которых фазовый сдвиг в петле обратной связи кратен 360°:

$$(\varphi_\beta + \varphi_A) = 0, 2\pi, 4\pi\ldots \textbf{ (фазовый критерий)}, \qquad (7.170)$$

а коэффициент передачи — больше единицы:

$$|\beta| \cdot |A| \geq 1 \textbf{ (амплитудный критерий)}. \qquad (7.171)$$

В системе с обратной связью (рис. 7.141) появляются свободные колебания, если фазовый сдвиг в ней равен 0° или кратен 360°, а коэффициент усиления замкнутого контура больше 1.

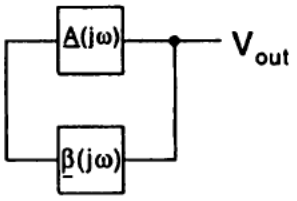


Рис. 7.141. Система с положительной обратной связью

При коэффициенте усиления замкнутого контура *больше* 1 и при выполнении фазового критерия в системе возникают колебания, амплитуда которых возрастает по экспоненциальному закону. Если коэффициент передачи *равен* 1, то колебания имеют постоянную амплитуду.

Если необходимо возбуждать колебания на определенной частоте, то в цепь обратной связи ставят частотно-избирательные схемы, такие как *RC*-цепочки, резонансные контуры или кварцевые кристаллы, обеспечивающие выполнение фазового критерия *только на одной* частоте.

Пример. Коэффициент усиления замкнутой системы, показанной на рис. 7.142, определяется выражением:

$$\beta \cdot A = \frac{V_1}{V_{out}} \cdot \frac{V_{out}}{V_1} = \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R + j\left(\omega L - 1/\omega C\right)}}_{\beta} \cdot A. \qquad (7.172)$$

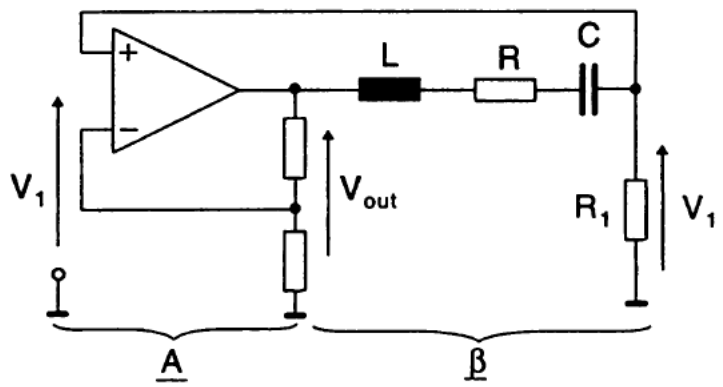


Рис.7.142. Простой генератор с последовательным резонансным контуром

Фазовый критерий выполняется, когда мнимая часть β равна 0. Это происходит на резонансной частоте $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Значит, *амплитудный критерий* выполняется, когда $A \cdot R_1/(R_1 + R) \geq 1$, т. е. когда коэффициент передачи неинвертирующего усилителя превышает значение $(R_1 + R)/R_1$.

На рис. 7.143 показана модификация генератора с рис. 7.142. Как видно из рисунка, в него добавлена цепь стабилизации амплитуды колебаний. При увеличении амплитуды возрастает импеданс полевого транзистора, что приводит к снижению коэффициента усиления неинвертирующего усилителя до тех пор, пока коэффициент передачи замкнутой системы не станет равным 1.

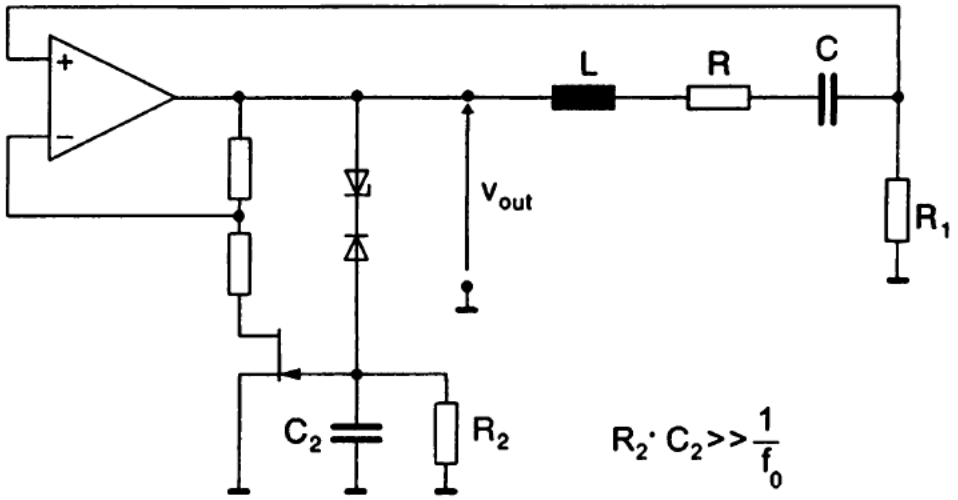


Рис. 7.143. Генератор с амплитудной стабилизацией

7.8.1. *RC*-генераторы

7.8.1.1. Фазосдвигающие генераторы

Фазосдвигающая цепочка β смещает фазу почти на 270°. Фазовый критерий выполняется при $\varphi_\beta = -180°$, а дополнительный сдвиг на 180° происходит на инвертирующем усилителе (рис. 7.144).

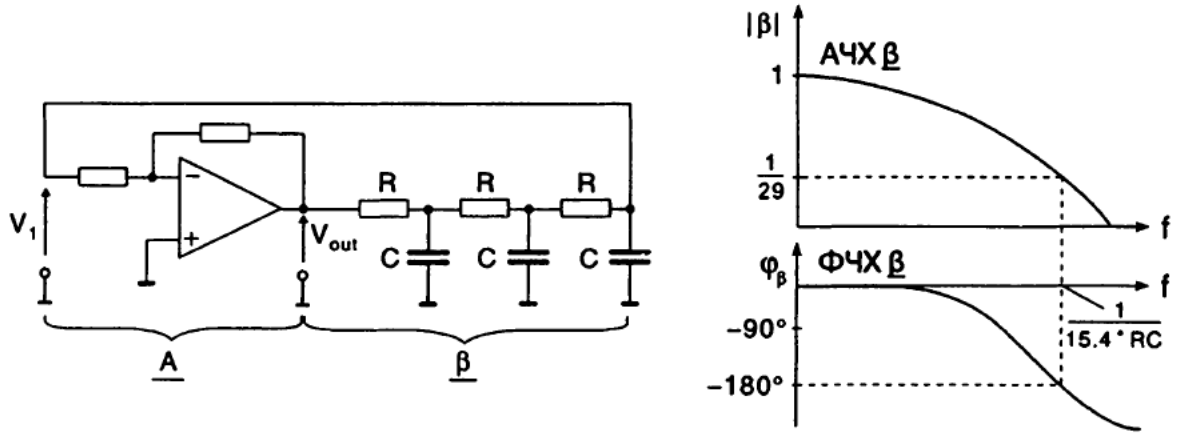


Рис. 7.144. Фазосдвигающий генератор

Фазовый критерий выполняется на частоте:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC\sqrt{6}} = \frac{1}{15{,}4 \cdot RC}, \quad (7.173)$$

а амплитудный критерий — при коэффициенте передачи усилителя:

$$|A| \geq 29 \quad (7.174)$$

(см. АЧХ и ФЧХ β на рис.7.144.)

7.8.1.2. Генератор на основе моста Вина

В цепи обратной связи генератора на основе моста Вина стоит полосовой фильтр Вина (рис. 7.145). Передаточная функция замкнутой системы определяется:

$$\beta \cdot A = \frac{1}{3 + j(\omega RC - 1/\omega RC)} \cdot A. \quad (7.175)$$

Фазовый критерий выполняется, когда мнимая часть коэффициента передачи цепи обратной связи равна 0, т. е. на частоте $\omega_0 = 1/RC$. На этой частоте $|\beta| = 1/3$. Следовательно, *амплитудный критерий* выполняется при $A \geq 3$.

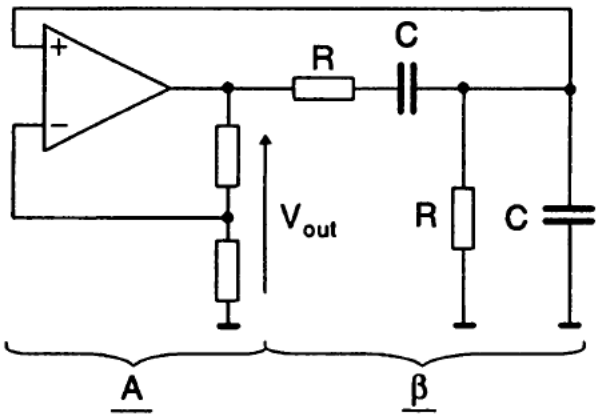


Рис. 7.145. Генератор на основе моста Вина

В такой генератор может встраиваться цепь амплитудной коррекции, аналогичная цепи, показанной на рис. 7.143.

7.8.2. *LC*-генераторы

LC-генераторы для настройки частоты используют последовательные или параллельные резонансные контуры. Такие генераторы обладают большей стабильностью по сравнению с *RC*-генераторами, поскольку обеспечивают значительный фазовый сдвиг в окрестности резонансной частоты.

7.8.2.1. Генератор Мейсснера

Коэффициент передачи генератора, показанного на рис. 7.146, определяется выражением:

$$\beta \cdot A = \frac{1}{1/R_P + j\left(\omega C - 1/\omega L\right)} \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\beta_{AC}}{r_{BE}}. \quad (7.176)$$

Резистор R_P отображает регулируемый коэффициент затухания резонансного контура. Эквивалентное сопротивление r_{BE} соответствует входному импедансу схемы с общим эмиттером:

$$r_{BE} \approx \frac{V_T}{I_B} \approx V_T \frac{\beta_{DC}}{I_C},$$

где V_T — тепловое напряжение, приблизительно равное 25 мВ, а I_B — постоянная составляющая тока базы

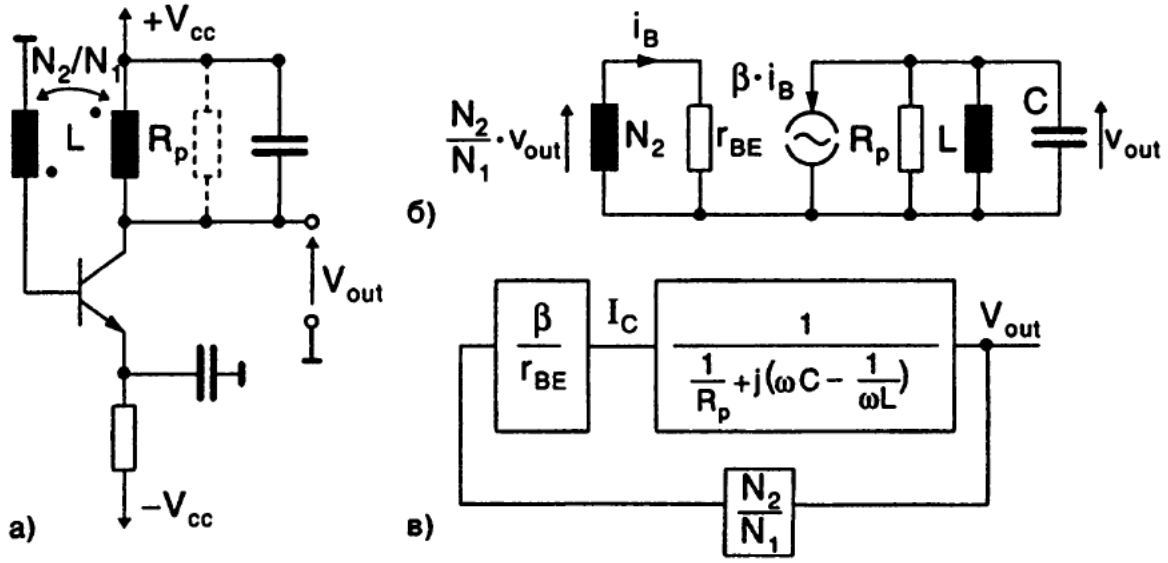


Рис. 7.146. Генератор Мейсснера на основе схемы с общим эмиттером:
а) схема;
б) эквивалентная схема;
в) блок-схема

Фазовый критерий выполняется при $\omega = \sqrt{1/LC}$, т. е. на резонансной частоте. В свою очередь, *амплитудный критерий* выполняется при $\frac{N_1}{N_2} \geq \frac{r_{BE}}{\beta_{AC} R_P}$.

Поскольку в базовой цепи обычно используется обмотка с небольшим количеством витков, трансформатор обладает низким коэффициентом преобразования.

7.8.2.2. Генератор Хартлея

В цепи обратной связи генератора Хартлея или индуктивного трёхточечного генератора стоит индуктивный делитель напряжений (рис. 7.147а). *Фазовый критерий* выполняется на резонансной частоте, а *амплитудный критерий* — при выполнении условия $L_1 \geq \frac{L \cdot r_{BE}}{\beta_{AC} R_P}$ или $N_1 \geq N \sqrt{\frac{r_{BE}}{\beta_{AC} R_P}}$.

На практике бывает достаточно, чтобы N_1 равнялось одному или нескольким виткам (по поводу r_{BE}, β_{AC} и R_P см. раздел 7.8.2.1).

7.8.2.3. Генератор Колпитца

В цепи обратной связи генератора Колпитца стоит емкостной делитель напряжений (рис. 7.147б). *Фазовый критерий* выполняется на резонансной частоте, а *амплитудный критерий* — при выполнении условия $C_1 \leq C_2 \frac{\beta_{AC} R_P}{r_{BE}}$.

На практике C_1 выбирается намного больше C_2 (по поводу r_{BE}, β_{AC} и R_P см. раздел 7.8.2.1).

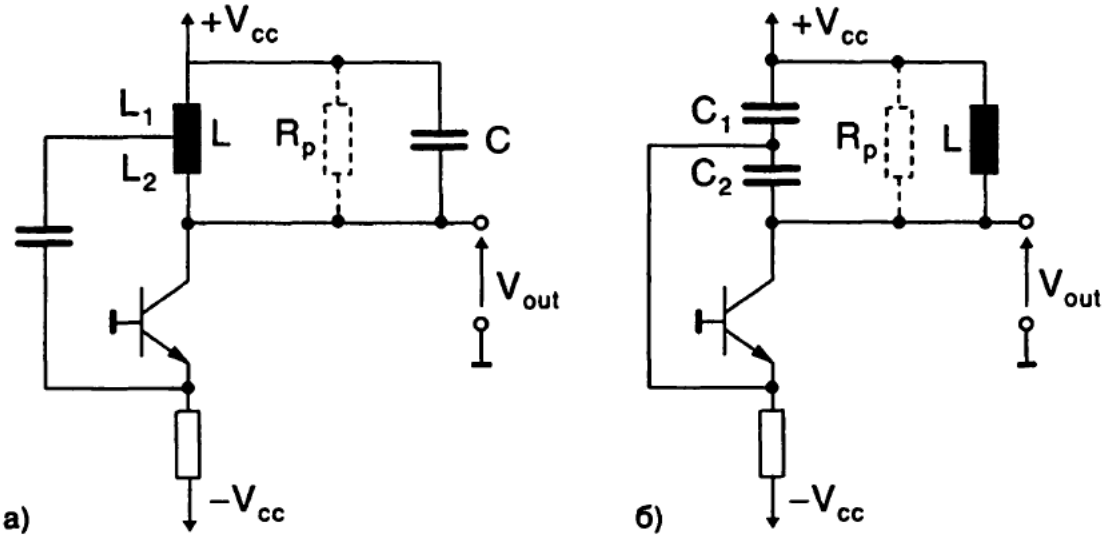


Рис. 7.147. Генератор Хартлея (а) и генератор Колпитца (б)

7.8.3. Кварцевые генераторы

Кварц — это кристалл, совершающий механические колебания при подаче на него электрического возбуждения. Его можно представить в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 7.148б. L_1, C_1 и R_1 являются электрическими аналогами механических величин генератора. Конденсатор C_0 соответствует емкости между электрическими выводами кварца, зависящей от монтажа схемы. Типичные значения этих параметров, например для кварца в 1 МГц, следующие: $L_1 = 2{,}53$ Гн, $C_1 = 0{,}01$ пФ, $R_1 = 50$ Ом, $C_0 = 5$ пФ.

Достоинством кварцевых генераторов является их высокая добротность, которую невозможно реализовать в электрических схемах. Она, как правило, лежит в пределах $10^6 \ldots 10^{10}$.

Эквивалентная схема кварцевого кристалла имеет две резонансные частоты (рис. 7.149):

- частоту последовательного резонанса: $\omega_{0S} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ и
- частоту параллельного резонанса: $\omega_{0P} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 + \dfrac{C_1}{C_0}}$.

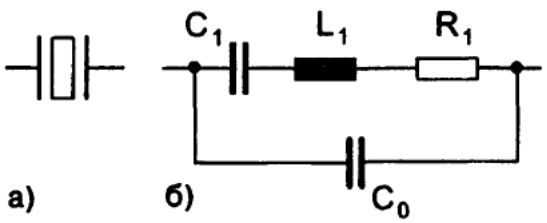


Рис. 7.148. Кварцевый кристалл:
а) обозначение;
б) эквивалентная схема

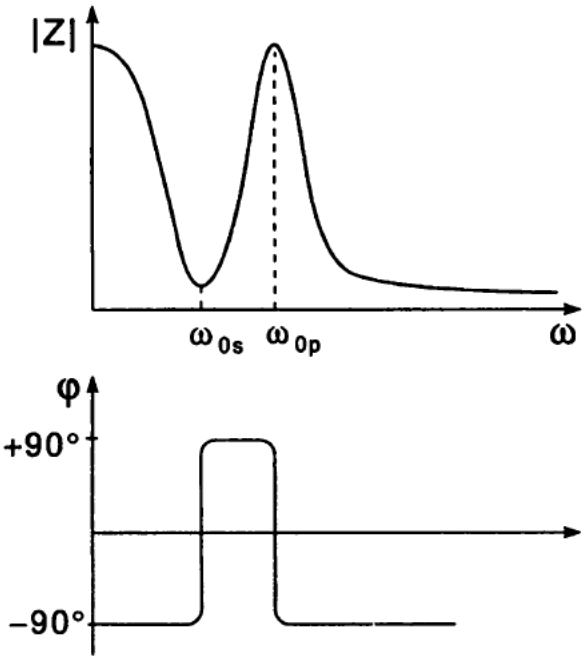


Рис. 7.149. Частотные характеристики импеданса кварца

- Частота последовательного резонанса определяется только механическими свойствами кварца и при прецизионном изготовлении кварцевых кристаллов может быть очень стабильной. Стабильность частоты кварцевых кристаллов $\Delta f/f_0 = 10^{-4}...10^{-10}$.
- При $C_0 >> C_1$ частоты последовательного и параллельного резонанса близки.

При последовательном подключении к кварцу конденсатора C_S резонансная частота попадает в интервал между частотами последовательного и параллельного резонанса:



$$\omega_0 = \omega_{0S}\sqrt{1+\frac{C_1}{C_0+C_S}}. \qquad (7.177)$$

Конденсатор C_S позволяет осуществлять прецизионную настройку частоты колебаний.

7.8.3.1. Генератор Пирса

На рис. 7.150а показан генератор Пирса, в котором управляющим элементом является КМОП-инвертор. Такая схема часто используется в микропроцессорных генераторах тактовых импульсов. Генератор Пирса работает так же, как генератор Колпитца. Ток i_1 протекает по замкнутому контуру, состоящему из кварцевого кристалла и конденсаторов C_1 и C_2. Очевидно, что напряжения на C_1 и C_2 имеют противоположные знаки. Следовательно, $v_{out} \approx -v_{in}$. При включении по такой схеме кварц обладает большим индуктивным импедансом, и частота его колебаний определяется частотой параллельного резонанса. Данная часть схемы обеспечивает фазовый сдвиг, равный 180°, другие 180° дает инвертор, что означает выполнение фазового критерия. Исходя из очень высокого коэффициента усиления инвертора, можно утверждать, что амплитудный критерий здесь также выполняется. Амплитуда колебаний генератора Пирса ограничена напряжением питания, поэтому выходное напряжение представляет собой почти прямоугольный сигнал. Резистор R обеспечивает запуск колебательного процесса, заряжая при включении схемы конденсатор C_2. Как правило, он имеет большое сопротивление (порядка 10 МОм).

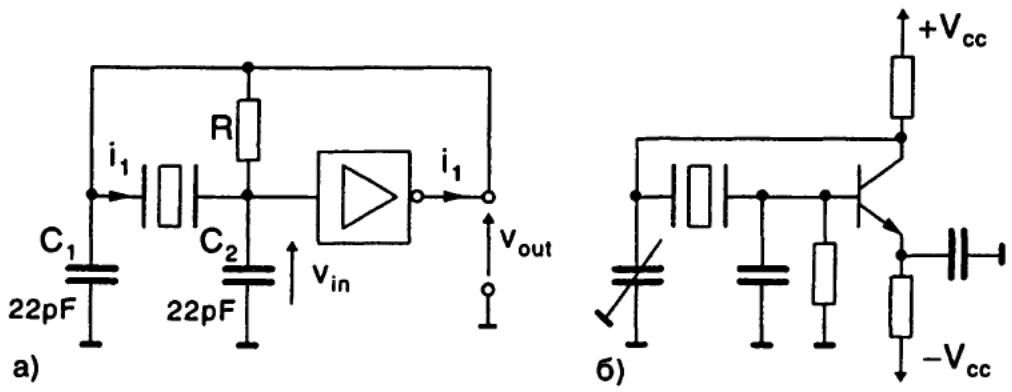


Рис. 7.150. Генератор Пирса:
а) на основе КМОП-инвертора;
б) на основе схемы с общим эмиттером

7.8.3.2. Кварцевый генератор на основе ТТЛ-элементов

В таких генераторах колебания кристалла определяются частотой последовательного резонанса. ТТЛ-элементы используются здесь в качестве линейных усилителей (рис. 7.151). Фазовый критерий выполняется, когда импеданс кварца определяется действительным числом. Коэффициент усиления замкнутой системы максимальный при минимальном импедансе кварца (при этом обеспечивается выполнение амплитудного критерия).

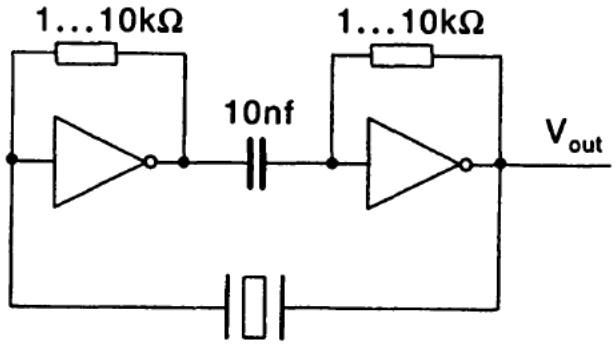


Рис. 7.151. Кварцевый генератор на основе ТТЛ-элементов

7.8.4. Мультивибраторы

Мультивибраторы — это автоколебательные цифровые схемы (рис. 7.152). В цепи обратной связи таких схем стоят элементы задержки времени, определяющие частоту колебаний. При описании работы мультивибраторов критерии входа в колебательный режим, как правило, не используются.

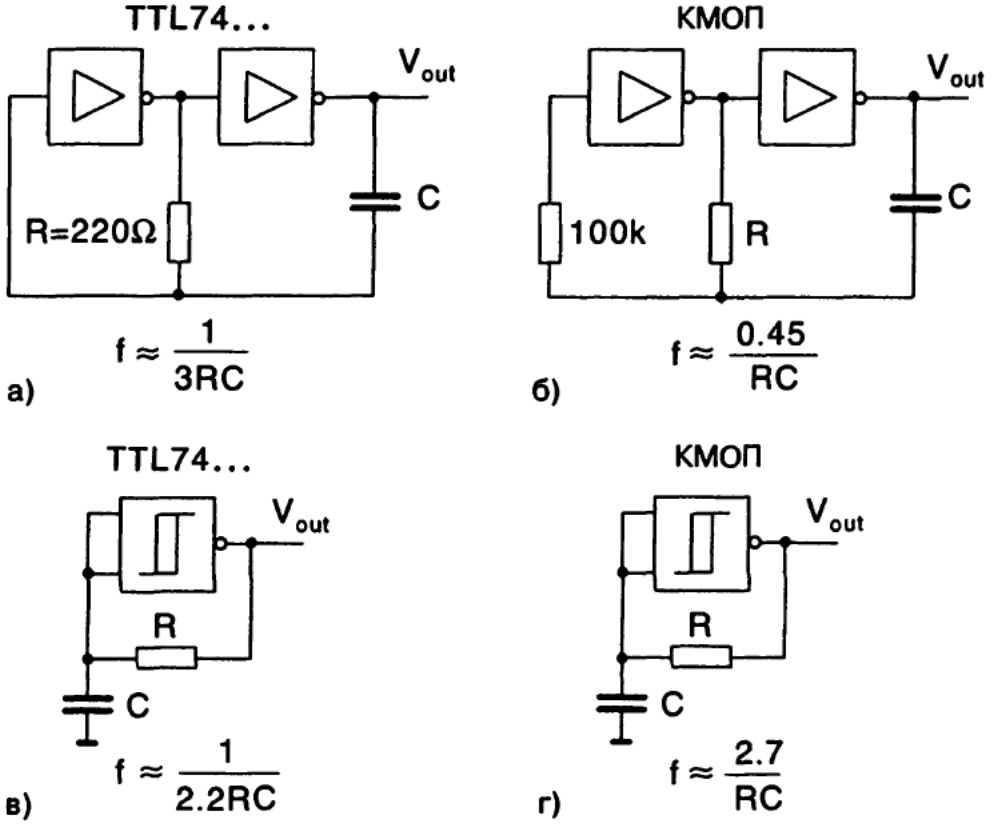


Рис. 7.152. Мультивибраторы:
а), б) на основе инверторов;
в), г) на основе триггеров Шмитта

7.9. Нагрев и охлаждение

Во всех электрических схемах существуют потери мощности, выделяемые в виде тепла в окружающую среду. Мощность рассеяния часто указывается в паспортных данных на электронные компоненты и используется, например, при выборе рабочих точек транзисторов. Температура нагрева элементов зависит от геометрии их конструкций, теплопроводности материалов и скорости воздушных потоков. Большая площадь поверхности и хороший обдув помогают бороться с перегревом компонентов.

Для поддержания требуемой температуры внутри электрических устройств для сильно нагреваемых элементов применяют **вентиляторы** и **радиаторы**. Иногда зону между радиатором и поверхностью охлаждаемого компонента для улучшения теплопроводности заполняют **специальной пастой**.

7.9.1. Надежность и срок службы

В электронике под надежностью электрических компонентов подразумевается их способность функционировать без поломок (отказов) в течение определенного интервала времени. Для количественной оценки надежности ввели понятие **интенсивности отказов**:

$$\lambda = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t},$$

где ΔN — количество отказов;

N — общее число компонентов;

Δt — время наблюдения.

Интенсивность отказов определяет среднее число отказов элементов, входящих в состав электрического устройства, в течение заданного интервала времени. Интенсивность отказов измеряется в единицах, обозначаемых *fit* (*failure in time*). 1 fit = 10^{-9} $ч^{-1}$.

Помимо интенсивности отказов используется характеристика, называемая **средним временем между отказами**, определяемая как:

$$T_m = \frac{1}{\lambda}.$$

Она соответствует среднему времени, через которое, вероятно, произойдет отказ устройства. При большом количестве одинаковых тестируемых элементов через интервал времени, равный T_m, 63 % из них, вероятно, выйдет из строя.

Следующие выражения определяют общую интенсивность отказов λ_{total} и среднее время между отказами T_{mtotal} в группе из i электронных блоков, состоящих из n_i элементов, интенсивность отказов каждого из которых составляет λ_i:

$$\lambda_{total} = \sum n_i \lambda_i, \quad T_{m\,total} = \frac{1}{\lambda_{total}}.$$

Интенсивность отказов, а следовательно, и срок службы, и надежность электронных компонентов в основном зависят от температуры. Эта зависимость может быть описана **законом Аррениуса**:

$$\lambda = \frac{dN}{N \cdot dt} = e^{-\frac{V_a}{kT}}, \qquad (7.178)$$

где λ — интенсивность отказов;

V_a — энергия активации (эВ), 1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж;

k — постоянная Больцмана: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

T — абсолютная температура;

N — количество компонентов.

- **Надежность** и **срок службы** электронных схем в основном зависят от температуры элементов, входящих в ее состав. С ростом температуры интенсивность отказов увеличивается по экспоненте.

Диапазон изменений энергии активации составляет 0,3...1,3 эВ, а ее типовое значение равно 0,5 эВ.

Если известна интенсивность отказов λ_1 устройства при температуре T_1, то найти интенсивность отказов при температуре T_2 можно при помощи следующего соотношения:

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{-\frac{V_a}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}. \qquad (7.179)$$

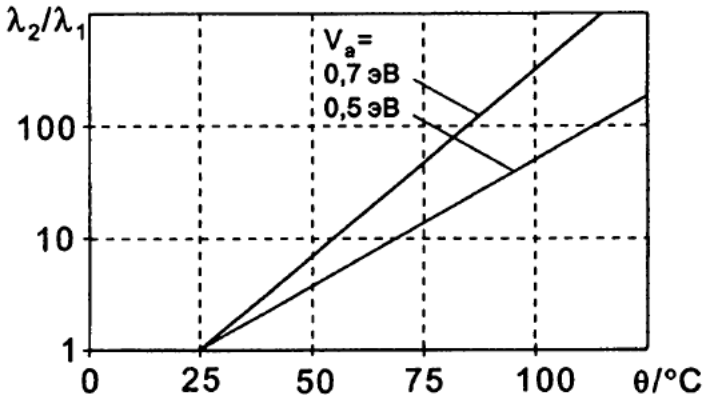


Рис. 7.153. Рост интенсивности числа отказов при увеличении температуры для двух разных значений энергии активации

На рис. 7.153 показана типовая зависимость интенсивности отказов от температуры устройства. Расчет радиаторов должен проводиться не только исходя из предельно допустимых температур, указанных в спецификациях на компоненты, но и с целью обеспечения экономичного режима работы при минимально возможных температурах.

Температуру электронных схем следует поддерживать как можно более низкой. Это не только повышает надежность и срок службы устройств, но и снижает затраты на эксплуатацию.

7.9.2. Расчет температуры

Рассеяние тепла можно смоделировать и рассчитать при помощи эквивалентных электрических схем.

7.9.2.1. Тепловое сопротивление

Распространение тепла в пространстве, мощность потока которого равна P, вызывает по пути своего следования **изменение температуры** $\Delta\theta$. Путем распространения тепловой волны может быть, например, путь от p-n-перехода, где происходит рассеяние тепла, до зоны выхода этого тепла из устройства в окружающее пространство. Величина изменения температуры $\Delta\theta$ зависит от геометрических параметров, свойств материалов и воздушных потоков на пути следования тепловой волны.

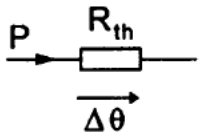


Рис. 7.154. Тепловое сопротивление

Тепловое сопротивление R_{th} определяется по аналогии с электрическим сопротивлением (рис. 7.154). Для этого используется закон Ома, в котором электрическое сопротивление заменяется тепловым сопротивлением, электрический ток – тепловой мощностью P, а падение напряжения – разностью температур $\Delta\theta$. Таким образом получается закон Ома для тепловых полей (закон теплопроводности):

$$\Delta\theta = R_{th} \cdot P. \qquad (7.180)$$

- **Тепловое сопротивление** R_{th} имеет размерность К/Вт (кельвин на ватт).

Тепловые сопротивления R_{th} для конкретных тепловых переходов приводятся в соответствующих спецификациях на электрические компоненты (например, в документации на транзисторы, как правило, указывается тепловое сопротивление полупроводниковых переходов R_{thJC}, а производители радиаторов всегда сообщают данные о тепловых сопротивлениях своих изделий, поскольку они необходимы при расчетах условий естественной и принудительной вентиляции). На рис. 7.155 показана зависимость относительного изменения теплового сопротивления от скорости воздушного потока в случае принудительной вентиляции.

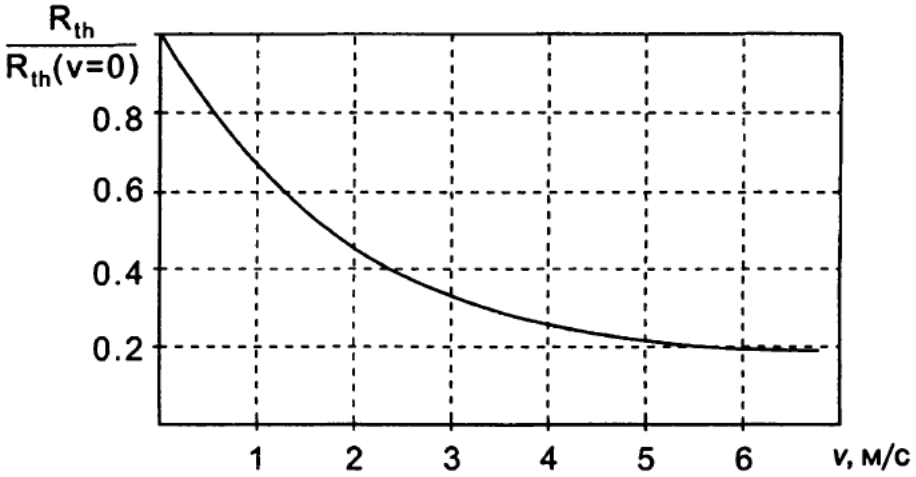


Рис. 7.155. Относительное изменение теплового сопротивления от скорости потока воздуха в случае принудительной вентиляции

Пример. Тепло от *p-n*-перехода транзистора проходит через корпус, через диэлектрик (например, через плату из слюды или оксида алюминия), доходит до радиатора, откуда рассеивается в окружающую среду. Каждый из перечисленных тепловых переходов имеет свое собственное тепловое сопротивление: R_{thJC} — это тепловое сопротивление между *p-n*-переходом и корпусом, R_{thINS} — тепловое сопротивление диэлектрика, а R_{thHS} — тепловое сопротивление между радиатором и окружающей средой (рис. 7.156). На рис. 7.157 показана эквивалентная электрическая схема рассматриваемого теплового пути, справедливая для стационарного случая.

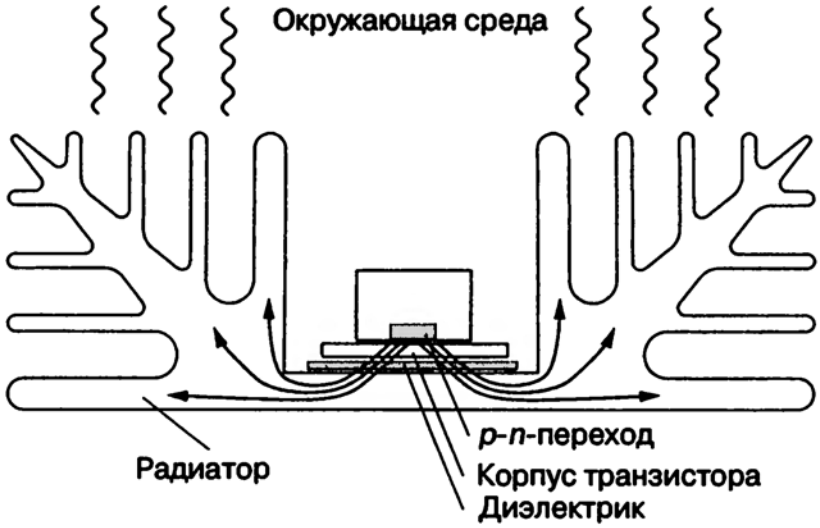


Рис. 7.156. Передача тепла от *p-n*-перехода транзистора в окружающую среду

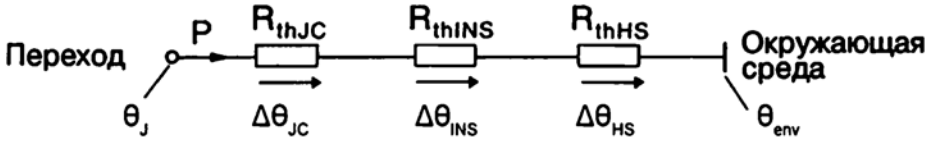


Рис. 7.157. Эквивалентная электрическая схема для стационарного случая передачи тепла от *p-n*-перехода транзистора в окружающую среду

Температура на переходе определяется следующим выражением:

$$\theta_j = \Delta\theta_{JC} + \Delta\theta_{INS} + \Delta\theta_{HS} + \theta_{env} = P(R_{thJC} + R_{thINS} + R_{thHS}) + \theta_{env}. \quad (7.181)$$

7.9.2.2. Теплоемкость

В тепловых расчетах наряду с теплопроводностью материалов необходимо также учитывать их **теплоемкость** (рис. 7.158), которая участвует в поглощении тепловой энергии. Благодаря ей устройство нагревается не скачкообразно, а постепенно. Скорость нагрева зависит от величины теплоемкости и мощности теплового потока.

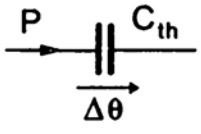


Рис. 7.158. Тепловая емкость

Соотношения между мощностью и температурой на элементе теплоемкости выводятся из аналогии с электрической емкостью:

$$P = C_{th} \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad \Delta\theta = \frac{1}{C_{th}} \int P dt + \Delta\theta_0. \tag{7.182}$$

Теплоемкость измеряется в Вт·с/К (ватт-секунда, деленная на кельвин).

Ее часто вычисляют, используя **удельную теплоемкость** c_{th} (Вт·с/(кг·К)) и массу m материала:

$$C_{th} = c_{th} \cdot m. \tag{7.183}$$

Удельная теплоемкость меди равна $c_{thCu} \approx 400$ Вт·с/(кг·К), а алюминия — $c_{thAl} \approx 900$ Вт·с/(кг·К).

Теплоемкость и тепловое сопротивление определяют **тепловую постоянную времени** $\tau_{th} = R_{th} \cdot C_{th}$. Для транзисторов она лежит в интервале от нескольких сотых секунды до нескольких секунд, а для радиаторов — от нескольких минут до нескольких часов.

В импульсных устройствах температура вычисляется по средней тепловой мощности. Но при этом тепловая постоянная времени должна быть больше периода следования импульсов.

Пример. На рис. 7.159 представлена эквивалентная схема теплопередачи в конструкции, показанной на рис. 7.156, с учетом теплоемкости ее компонентов (корпуса транзистора и радиатора). Динамика теплопередачи в этой схеме определяется двумя тепловыми постоянными времени:

$$\tau_{JC} = R_{thJC} \cdot C_{thJC} \quad \text{и} \quad \tau_{HS} = R_{thHS} \cdot C_{thHS}.$$

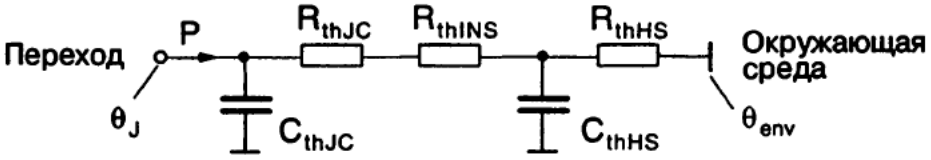


Рис. 7.159. Эквивалентная схема теплопередачи в конструкции, показанной на рис. 7.156, с учетом теплоемкости ее компонентов

7.9.2.3. Динамический тепловой импеданс

В полупроводниковых устройствах, работающих в импульсных режимах, могут происходить довольно большие выбросы тепловой энергии в течение коротких интервалов времени. При этом за счет теплоемкостей элементов в окрестности источников тепловых излучений часть рассеиваемой энергии задерживается там же.

При работе на очень высоких частотах для расчета тепловых режимов используется средняя тепловая мощность. Если длительность периода следования рабочих импульсов сравнима с тепловыми постоянными времени внутри конструкции электронного устройства, то динамическими тепловыми характеристиками при расчете температуры внутренних элементов схем пренебрегать нельзя. Поэтому

производители полупроводниковых элементов в спецификациях на них приводят значения динамического теплового импеданса Z_{th}.

Динамический тепловой импеданс Z_{th} определяется в виде функции двух переменных: длительности импульсов t_p и коэффициента заполнения импульсной последовательности (отношения длительности импульсов к периоду повторения импульсов) D (рис. 7.160).

В этом случае разность температур между p-n-переходом и корпусом транзистора можно вычислить как:

$$\Delta\theta_{JC} = \hat{P} \cdot Z_{thJC}\left(t_p, T\right). \qquad (7.184)$$

Для определения разности температур используется амплитуда мощности теплового рассеяния. Диаграмма динамического теплового импеданса представляет собой серию кривых $Z_{thJC}(t_p)$, построенных для разных значений параметра $D = t_p/T$ (рис. 7.160).

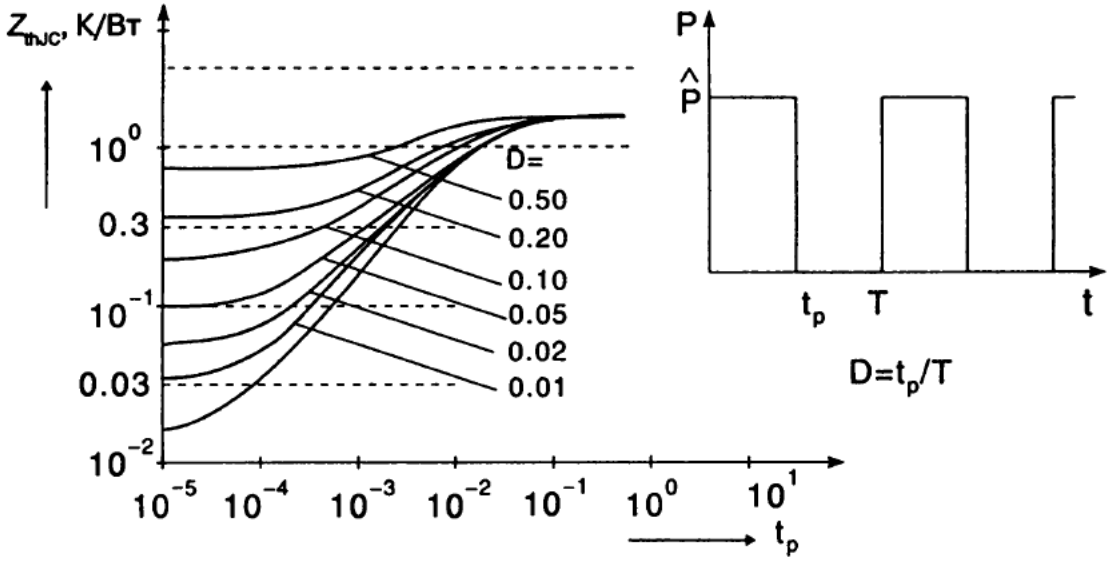


Рис. 7.160. Диаграмма динамического теплового импеданса

Влияние динамического теплового импеданса наиболее сильное в частотном диапазоне от нескольких герц до нескольких килогерц (это необходимо помнить при расчете выпрямительных и тиристорных схем, работающих от сети 50/60 Гц). На более высоких частотах для вычисления разности температур используют тепловое сопротивление и среднюю мощность $\Delta\theta = P_{avg} \cdot R_{th}$.

7.10. Усилители мощности

Усилители мощности обладают высокой выходной мощностью и довольно хорошим КПД. Выходные цепи усилителей мощности, как правило, можно считать источниками напряжения с низкими внутренними сопротивлениями. Коэффициент усиления усилителей мощности обычно близок к единице. Если усилитель мощности является частью замкнутой системы с большим коэффициентом усиления при разомкнутой петле обратной связи, то от него можно добиться хорошей линейности характеристик.

7.10.1. Эмиттерный повторитель

На рис. 7.161 показан **эмиттерный повторитель.**

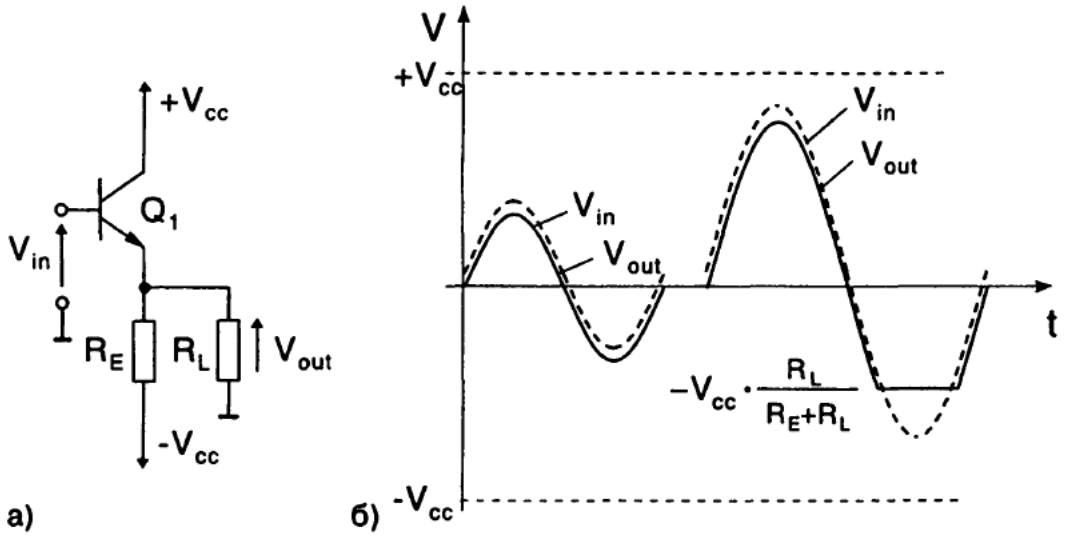


Рис. 7.161. Эмиттерный повторитель:
а) схема;
б) форма входных и выходных напряжений

Коэффициент передачи по напряжению:

$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}} \approx 1. \qquad (7.185)$$

Входной и выходной импедансы

Входной импеданс:

$$r_{in} \approx \beta \cdot (R_E \| R_L), \qquad (7.186)$$

где β — коэффициент передачи по току в режиме малых сигналов.

Выходной импеданс:

$$r_{out} \approx \frac{R_{int} + r_{BE}}{\beta}, \qquad (7.187)$$

где R_{int} — внутреннее сопротивление входного источника напряжений;
r_{BE} — динамическое входное сопротивление перехода база–эмиттер:

$$r_{BE} = h_{11E} \approx \frac{V_T}{I_B},$$

где V_T — тепловое напряжение, равное 25 мВ при $T = 25$ °C:
I_B — постоянная составляющая тока базы.

Пределы выходного напряжения

Верхний (положительный) предел:

$$\hat{V}_{out\ max} \approx +V_{CC}.$$

Нижний (отрицательный) предел:

$$\hat{V}_{out\ min} \approx -V_{CC} \cdot \frac{R_L}{R_E + R_L}. \qquad (7.188)$$

Максимальная выходная мощность

Максимально возможная выходная мощность достигается при равенстве пикового значения выходного напряжения отрицательному пределу выходного напряжения (при выполнении этого условия выходной сигнал еще остается синусоидальным):

$$\hat{V}_{out} = \hat{V}_{out\ min} \approx V_{CC} \cdot \frac{R_L}{R_E + R_L}, \quad P_{out} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L} = \frac{1}{2} \cdot V_{CC}^2 \cdot \frac{R_L^2}{(R_E + R_L)^2 R_L}.$$

Для определения значения сопротивления R_L, при котором происходит максимальная передача мощности, находится производная dP_{out}/dR_L и приравнивается нулю:

$$\frac{dP_{out}}{dR_L} = \frac{1}{2} \cdot V_{CC}^2 \cdot \frac{(R_E + R_L)^2 - R_L \cdot 2 \cdot (R_E + R_L)}{(R_E + R_L)^4} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$R_L = R_E. \tag{7.189}$$

Максимальное выходное напряжение при $R_L = R_E$ равно:

$$\hat{V}_{out} = \frac{V_{CC}}{2}. \tag{7.190}$$

Для получения максимальной мощности на нагрузке необходимо выполнение двух условий:

- равенство сопротивлений нагрузки и в цепи эмиттера,
- равенство амплитуды выходного напряжения величине $V_{CC} / 2$.

Рассеяние мощности на транзисторе

Рассеяние мощности на транзисторе P_{T1} при синусоидальном выходном напряжении определяется выражением:

$$P_{T_1} = \frac{1}{T}\int_0^T v_{CE}(t) \cdot i_C(t) dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_{CC} - \hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t\right) \left(\frac{V_{CC} + \hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t}{R_E} + \frac{\hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t}{R_L} \right) dt.$$

$$P_{T_1} = \frac{V_{CC}^2}{R_E} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_E}. \tag{7.191}$$

$$P_{T_1\ max} = \frac{V_{CC}^2}{R_E}. \tag{7.192}$$

- Рассеяние мощности на транзисторе максимально при нулевом выходном напряжении.
- Максимальное рассеяние мощности на транзисторе равно $\frac{V_{CC}^2}{R_E}$.

Полная входная мощность

Полная входная мощность определяется выражением:

$$P_{total} = P_{out} + P_{T1} + P_{R_E}, \tag{7.193}$$

где P_{out} — выходная мощность;

P_{T1} — рассеяние мощности на транзисторе;

P_{R_E} — потери мощности на сопротивлении R_E.

$$P_{out} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L},$$

$$P_{R_E} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d_{R_E}^2}{R_E} dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\left(V_{CC} + \hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t\right)^2}{R_E} dt = \frac{V_{CC}^2}{R_E} + \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_E},$$

$$P_{T_1} = \frac{V_{CC}^2}{R_E} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_E},$$

$$P_{total} = P_{out} + P_{T_1} + P_{R_E} = 2\frac{V_{CC}^2}{R_E}. \qquad (7.194)$$

- Полная входная мощность эмиттерного повторителя равна $2V_{CC}^2/R_E$ и *не зависит* ни от сопротивления нагрузки, ни от выходного напряжения.

Эффективность (КПД)

КПД определяется как:

$$\eta = \frac{\text{выдаваемая мощность}}{\text{полная мощность}} = \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} = \frac{P_{out}}{P_{total}}.$$

КПД максимален при максимальной выходной мощности, т. е. когда $R_L = R_E$, а $\hat{V}_{out} = V_{CC}/2$:

$$\eta_{max} = \frac{P_{out\ max}}{P_{total}} = \frac{V_{CC}^2/8R_L}{2V_{CC}^2/R_E} = \frac{1}{16} = 6{,}25\,\%. \qquad (7.195)$$

Максимальный КПД эмиттерного повторителя равен 6,25 %.

Режим класса А

Режим класса А усилителя мощности — это режим, при котором:

- полная входная мощность всегда постоянная и не зависит от нагрузки и выходного напряжения;
- ток через транзистор никогда не равен нулю;
- эмиттерный повторитель является усилителем мощности класса А.

7.10.2. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса В

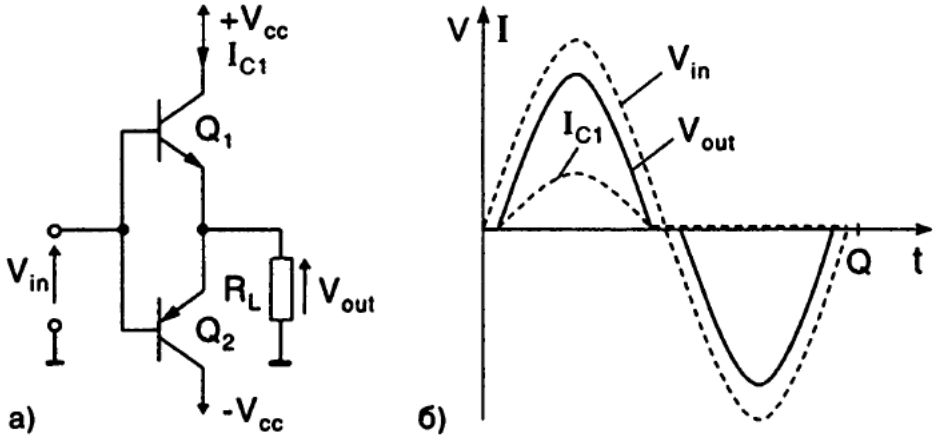


Рис. 7.162. Комплементарный эмиттерный повторитель:
а) схема;
б) диаграмма напряжений и токов

В комплементарном эмиттерном повторителе в любой момент времени ток течет только через один транзистор. При положительном входном напряжении открыт транзистор Q_1, а при отрицательном — Q_2. При пересечении входным напряжением нулевого уровня ($-0{,}7$ В $< V_{in} < +0{,}7$ В) оба транзистора закрыты, и коэффициент передачи схемы приблизительно равен 0. Поскольку в зоне пересечения нуля передаточная характеристика схемы обладает значительной нелинейностью, ее назвали зоной **переходных искажений** (искажений типа «ступенька»).

Коэффициент передачи по напряжению

$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}} \approx 1. \qquad (7.196)$$

Пределы выходного напряжения

$$\hat{V}_{out} \approx \pm V_{CC}\,. \qquad (7.197)$$

Входной и выходной импедансы

Входной импеданс:

$$r_{in} = \beta \cdot R_L, \qquad (7.198)$$

где β — коэффициент передачи по току в режиме малых сигналов.

Выходной импеданс:

$$r_{out} \approx \frac{R_{int} + r_{BE}}{\beta}, \qquad (7.199)$$

где R_{int} — внутреннее сопротивление входного источника напряжений;

r_{BE} — динамическое входное сопротивление перехода база–эмиттер.

$$r_{BE} = h_{11E} \approx \frac{V_T}{I_B},$$

где V_T — тепловое напряжение, равное 25 мВ при $T = 25\,^{\circ}C$;
I_B — постоянная составляющая тока базы.

Максимальная выходная мощность

$$P_{out} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{CC}^2}{R_L}. \qquad (7.200)$$

Рассеяние мощности на транзисторе

Рассеяние мощности на транзисторах при синусоидальном выходном напряжении определяется выражением:

$$P_{T1} = P_{T2} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \underbrace{\left(V_{CC} - \hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t\right)}_{V_{CE1}} \left(\underbrace{\frac{\hat{V}_{out} \cdot \sin \omega t}{R_L}}_{I_{C1}} \right) dt = \frac{V_{CC} \cdot \hat{V}_{out}}{\pi \cdot R_L} - \frac{\hat{V}_{out}^2}{4R_L}.$$

Для вычисления максимальной рассеиваемой мощности производная $dP_T / d\hat{V}_{out}$ приравнивается нулю, и определяется выходное напряжение, при котором это происходит:

$$\frac{dP_T}{d\hat{V}_{out}} = \frac{V_{CC}}{\pi \cdot R_L} - 2\frac{\hat{V}_{out}}{4R_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_{out} = \frac{2}{\pi} V_{CC} = 0{,}64 \cdot V_{CC}.$$

Максимальная мощность рассеяния достигается, когда удвоенная амплитуда выходного напряжения составляет 64 % от напряжения питания (рис. 7.163).

Максимальная рассеиваемая мощность на одном транзисторе равна:

$$P_{T1max} = P_{T2max} = \frac{V_{CC}^2}{\pi^2 R_L}. \qquad (7.201)$$

Входная мощность

Полная входная мощность определяется выражением (рис. 7.163):

$$P_{total} = P_{out} + P_{T1} + P_{T2} \quad \Rightarrow \quad P_{total} = \frac{2V_{CC}\hat{V}_{out}}{\pi R_L}.$$

Она максимальна при $\hat{V}_{out} = V_{CC}$.

Эффективность (КПД)

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{total}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L}}{\frac{2V_{CC}\hat{V}_{out}}{\pi \cdot R_L} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L} + \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_{out}^2}{R_L}} = \frac{\hat{V}_{out}}{V_{CC}} \cdot \frac{\pi}{4} - 0{,}785 \cdot \frac{\hat{V}_{out}}{V_{CC}}.$$

КПД максимален при $\hat{V}_{out} = V_{CC}$ и равен:

$$\eta_{max} = 78{,}5\,\%. \qquad (7.202)$$

Режим класса B

Режим класса B усилителя мощности — это режим, при котором:

- полная входная мощность растет пропорционально увеличению выходного напряжения;
- каждый транзистор открыт только одну половину периода;
- комплементарный эмиттерный повторитель является усилителем мощности класса B.

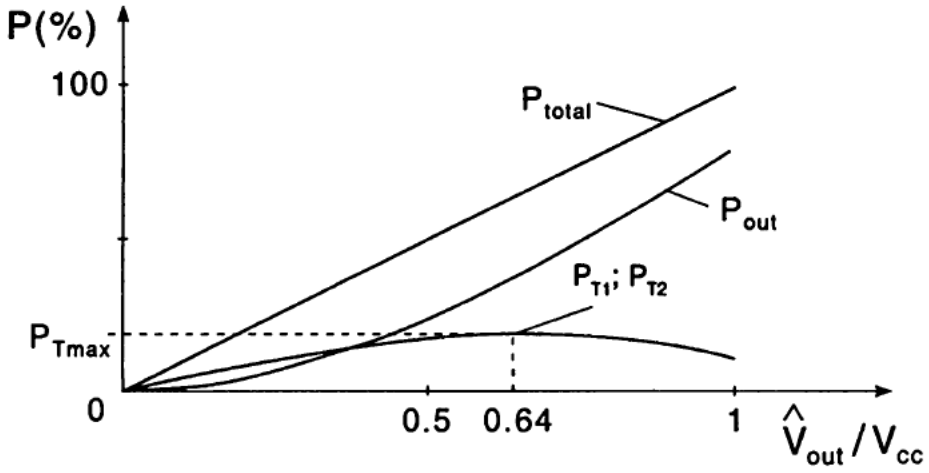


Рис. 7.163. Зависимости выходной, рассеиваемой и полной входной мощностей от уровня размаха выходного напряжения

7.10.3. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса C

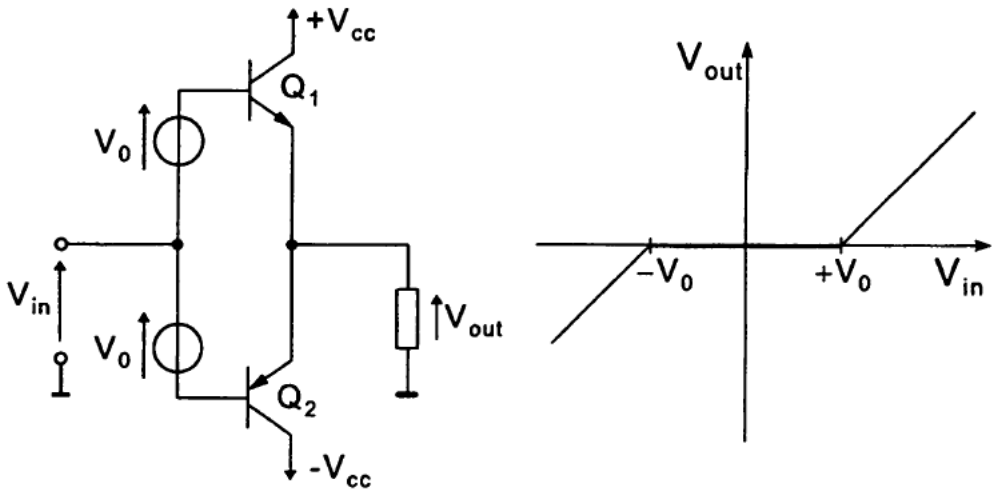


Рис. 7.164. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса C

В режиме класса C в диапазоне входных напряжений $-V_0 < V_{in} < +V_0$ оба транзистора закрыты, что приводит к повышению КПД усилителя мощности по сравнению с его КПД в режиме класса B (рис. 7.164). Этот режим используется при постоянных амплитудах входного сигнала и тогда, когда переходные искажения не играют роли, например в усилителях мощности радиопередатчиков.

7.10.4. Характеристические кривые при работе в разных режимах

На рис. 7.165а показаны положения рабочих точек при работе усилителей мощности в режимах разных классов, а на рис. 7.165б представлены соответствующие диаграммы токов, протекающих через транзисторы.

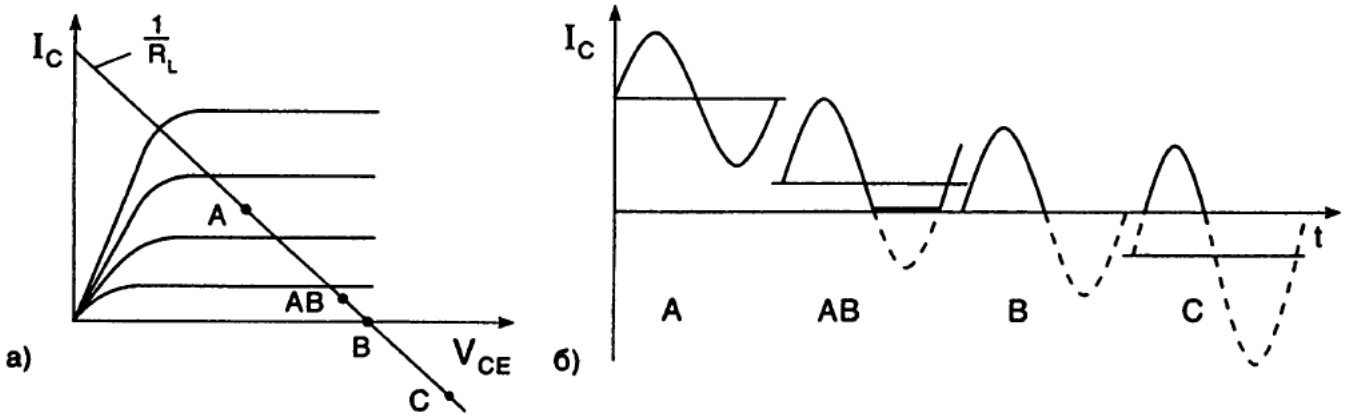


Рис. 7.165. Характеристические кривые при работе в разных режимах для транзистора Q_1 (а) и временные диаграммы коллекторного тока при синусоидальном входном сигнале (б)

7.10.5. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса AB

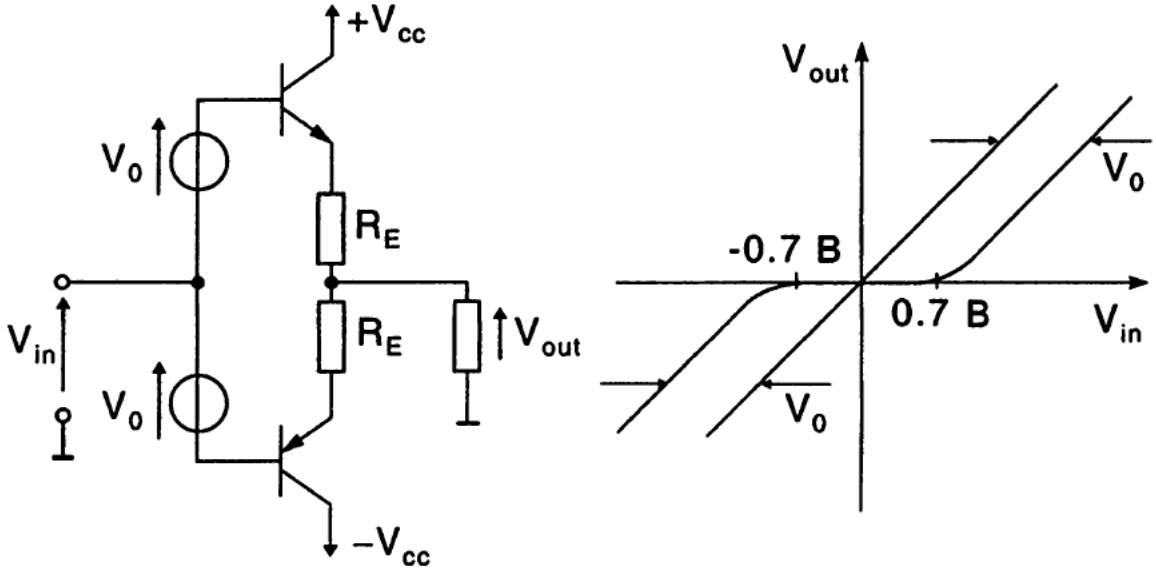


Рис. 7.166. Комплементарный эмиттерный повторитель в режиме класса AB

В режиме класса AB на комплементарные транзисторы подается одинаковое напряжение смещения V_0. Напряжение V_0 выбирается таким, чтобы при пересечении входным напряжением нулевого уровня через транзисторы протекал маленький ток покоя. Это позволяет линеаризовать передаточную характеристику и

уменьшить переходные искажения (рис. 7.166). Небольшой ток покоя обеспечивает малое рассеяние тепла от транзисторов в отсутствие входного напряжения (рассеиваемая мощность не должна превышать 10...30 % от максимальной мощности рассеяния). Ток покоя обычно выбирается равным 1...5 % от пикового значения выходного тока, и его величина ограничивается резистором обратной связи R_E. К выбору сопротивления R_E необходимо подходить очень аккуратно, поскольку от него зависит тепловой режим работы транзистора и падение напряжения база-эмиттер. Если R_E слишком маленькое, то может произойти перегрев транзисторов и выход их из строя по следующему механизму: Транзисторы нагреваются, напряжение база–эмиттер падает, ток покоя возрастает, мощность рассеяния на транзисторах увеличивается, что приводит к еще большему повышению их температуры.

7.10.5.1. Смещение транзисторов в режиме класса AB

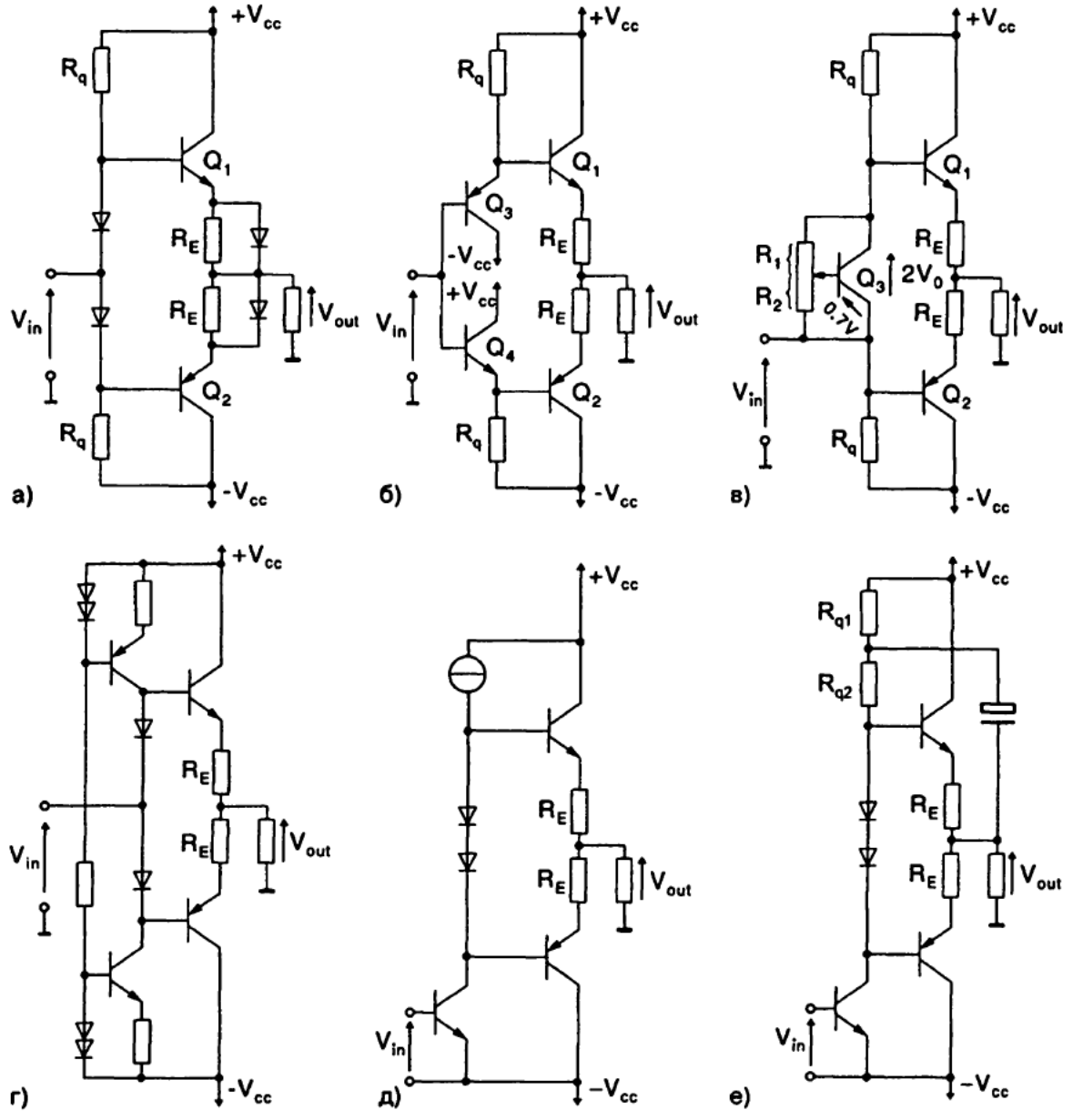


Рис. 7.167. Смещение напряжения в усилителях мощности класса AB

Рис. 7.167а. Напряжение смещения в этой схеме формируется при помощи двух диодов. Сопротивления R_q выбираются такими, чтобы при максимальном размахе выходного напряжения на базы транзисторов поступал достаточный ток. Для выполнения этого условия часто приходится задавать очень низкие значения резисторов R_q, что обеспечивает малые падения напряжения на них в режиме больших выходных напряжений. Однако при этом в режиме покоя, когда $V_{in} = 0$ В, на R_q происходят большие потери мощности, поскольку падение напряжения на них составляет около $V_{CC}/2$. Схема на рис. 7.167г, в которой резисторы R_q заменены на источники тока, лишена этого недостатка.

Резисторы обратной связи R_E предотвращают ситуацию неконтролируемого повышения тока покоя через силовые транзисторы. Всегда следует помнить, что в случае нагрева транзисторов происходит падение напряжения база–эмиттер (со всеми вытекающими последствиями!). Сопротивления R_E выбираются такими, чтобы ток покоя равнялся 1...5 % от пикового выходного тока, или такими, чтобы при работе усилителя мощности при максимальном выходном напряжении падение напряжения на них составляло 0,7...2 В. Иногда резисторы обратной связи шунтируются диодами, что позволяет снижать мощность рассеяния на них при максимальном размахе выходного напряжения.

Рис. 7.167б. В этой схеме диоды, обеспечивающие напряжение смещения, заменены на транзисторы Q_3 и Q_4, что несколько снижает мощность входного сигнала усилителя.

Рис. 7.167в. Здесь диоды смещения заменены схемой на основе транзистора Q_3, играющей роль источника напряжений. Напряжение смещения определяется выражением: $2V_0 = 0{,}7\text{ В} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2}$. Резисторы R_1 и R_2 выполняют роль потенциометра, используемого для точной регулировки тока покоя, что особенно важно в схемах, в которых в качестве силовых транзисторов применяются составные транзисторы. В этих случаях напряжение смещения выбирается равным $2V_0 = 2{,}8$ В.

Рис. 7.167г. Как упоминалось ранее, в этой схеме резисторы R_q заменены на источники тока, что позволяет значительно снизить рассеиваемую мощность в режиме покоя, когда $V_{in} = 0$ В, или увеличить максимальный размах выходного напряжения. Параметры источников тока выбираются, исходя из требований к величине токов силовых транзисторов при пиковых значениях выходного напряжения.

Рис. 7.167д. На входе такого усилителя мощности для повышения коэффициента передачи по напряжению стоит каскад с общим эмиттером, который может управляться непосредственно дифференциальным усилителем.

Рис. 7.167е. Здесь резистор R_q заменен парой резисторов R_{q1} и R_{q2} ($R_{q1} << R_{q2}$). В режиме покоя на конденсаторе C, стоящем в цепи положительной обратной связи, часто называемом «ускоряющим» (форсирующим)

конденсатором, падает напряжение, приблизительно равное V_{CC}. Во время положительного полупериода этот конденсатор смещает напряжение в точке между резисторами R_{q1} и R_{q2} до значений больших, чем напряжение питания V_{CC}, что даже при полном размахе выходного напряжения обеспечивает напряжение на резисторе R_{q2}, достаточное для выполнения требований по току. Сопротивление R_{q2} выбирается таким, чтобы в режиме покоя базовый ток силовых транзисторов был немного больше максимально требуемого. Емкость конденсатора C должна быть такой, чтобы на нем поддерживался практически неизменный уровень постоянного напряжения (для переменных сигналов конденсатор является коротко закороченной линией). Критическая частота такой цепи определяется выражением: $f_c \approx 1/(2\pi R_{q1} C)$ при $R_{q1} << R_{q2}$.

В усилителях, обладающих большой выходной мощностью или большим выходным током, в качестве силовых транзисторов используются составные транзисторы (пары Дарлингтона или псевдо-Дарлингтона). Транзисторы Q_1 и Q_2 являются силовыми, а Q_1' и Q_2' — задающими.

Рис. 7.168а. В режиме покоя силовые транзисторы Q_1 и Q_2 закрыты. Напряжение смещения V_0 выбирается таким, чтобы падение напряжения на резисторах обратной связи R_E было приблизительно равным 0,4 В, (например, $V_0 = 2{,}2$ В). Это обеспечивает хорошую линейность в зоне пересечения нулевого уровня.

Рис. 7.168б. Напряжение смещения V_0 выбирается приблизительно равным 2,8 В. При этом ток покоя обычно лежит в пределах 1...5 % от пикового значения выходного тока.

Рис. 7.168в. В схеме с парами псевдо-Дарлингтона в качестве силовых транзисторов используются транзисторы идентичного типа. Напряжение смещения V_0 выбирается таким, чтобы падение напряжения на резисторах обратной связи R_E было приблизительно равным 0,4 В, (например, $V_0 = 1{,}8$ В).

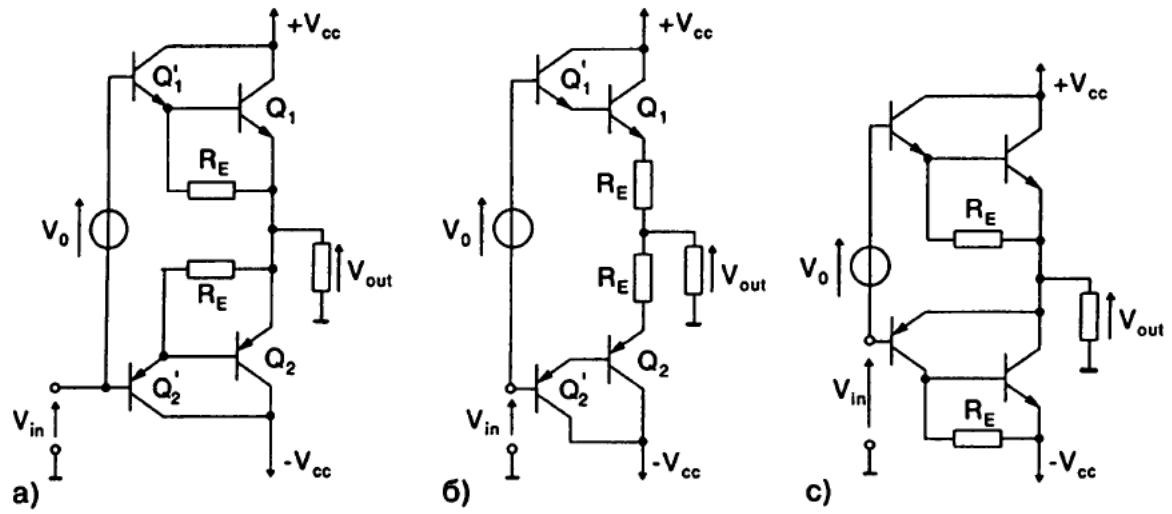


Рис. 7.168. Комплементарный эмиттерный повторитель:
а), б) на основе пар Дарлингтона;
в) на основе пар псевдо-Дарлингтона

7.10.5.3. Комплементарный эмиттерный повторитель с ограничением по току

На рис. 7.169 показаны комплементарные эмиттерные повторители с разными цепями ограничения выходного тока. Для контроля выходного тока в обоих случаях используется резистор R_M, который может быть таким же, как резистор обратной связи R_E. При достижении выходным напряжением определенного критического уровня ток базы отводится в цепь ограничения тока, что останавливает дальнейший рост выходного тока.

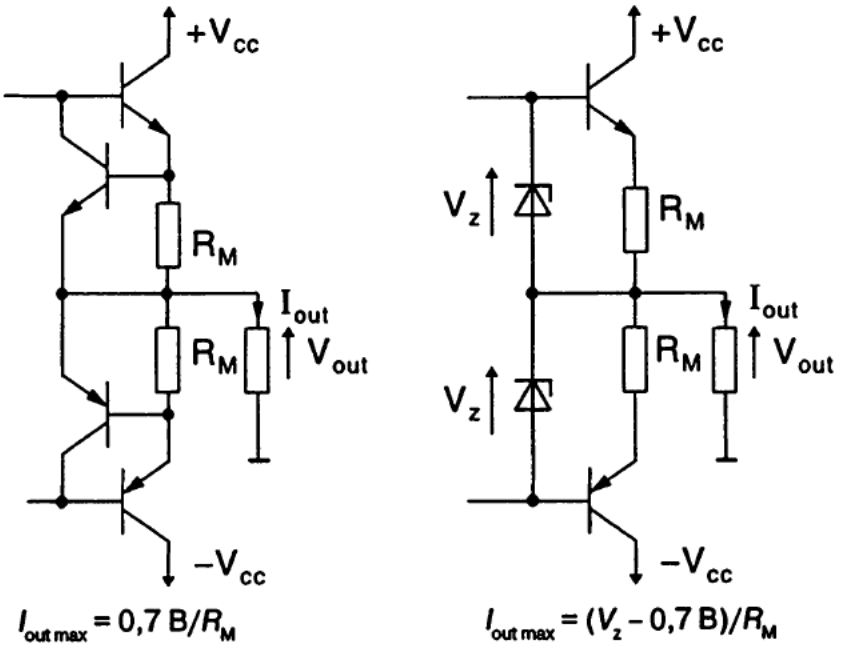


Рис. 7.169. Комплементарный эмиттерный повторитель с ограничением по току

7.10.6. Подача сигналов на входы усилителей мощности

7.10.6.1. Подача сигналов при помощи дифференциального усилителя

Для достижения хорошей линейности схемы и ее независимости от параметров полупроводниковых элементов используются цепи обратной связи. В схеме на рис. 7.170 на вход усилителя мощности подается сигнал с выхода дифференциального усилителя, на вход которого поступает разность выходного и входного сигналов. Результирующий коэффициент усиления разомкнутой цепи определяется произведением коэффициента усиления дифференциального усилителя A_1 и коэффициента передачи каскада с общим эмиттером A_2. При большом значении этого произведения коэффициент усиления замкнутой системы зависит только от цепи обратной связи.

Цепи обратной связи позволяют реализовать усилители мощности, обладающие очень высоким входным и очень низким выходным импедансом.

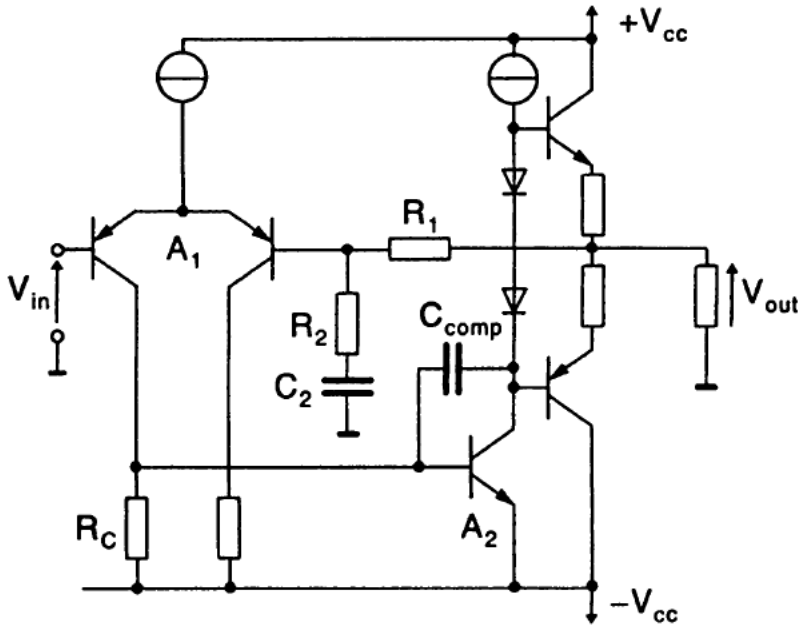


Рис. 7.170. Подача сигналов на вход усилителя мощности при помощи дифференциального усилителя

При определении коэффициента усиления по переменному току считают, что цепь обратной связи ведет себя как делитель напряжения $\frac{R_2}{R_1+R_2}$, а C_2 — как короткозамкнутая линия. Тогда:

$$V_{\approx} = \frac{V_1 V_2}{1 + V_1 V_2 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}} \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \qquad (7.203)$$

Конденсатор обратной связи C_2 гарантирует, что при постоянном входном напряжении усилитель мощности обладает единичным коэффициентом передачи по напряжению (рис. 7.171). Это обеспечивает хорошую стабильность нулевого выходного напряжения.

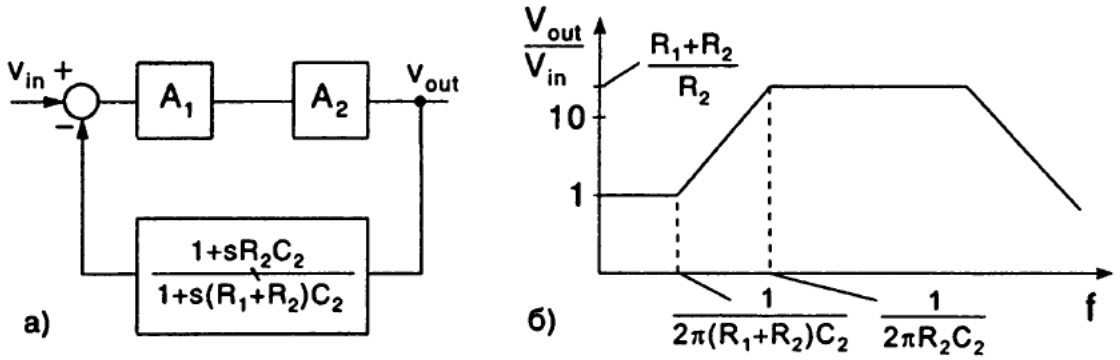


Рис. 7.171. Усилитель мощности с обратной связью:
а) блок-схема;
б) АЧХ

Компенсационный конденсатор C_{comp} на высоких частотах уменьшает коэффициент усиления замкнутой цепи (см. раздел 7.6.2) и тем самым снижает риск возникновения колебаний. Емкость этого конденсатора подбирается экспериментально.

7.10.6.2. Подача сигналов при помощи операционного усилителя

В данном случае усилитель мощности встраивается в цепь обратной связи ОУ. Такой способ включения усилителя мощности позволяет получить хорошую линейность его выходных характеристик (рис. 7.10.6.2).

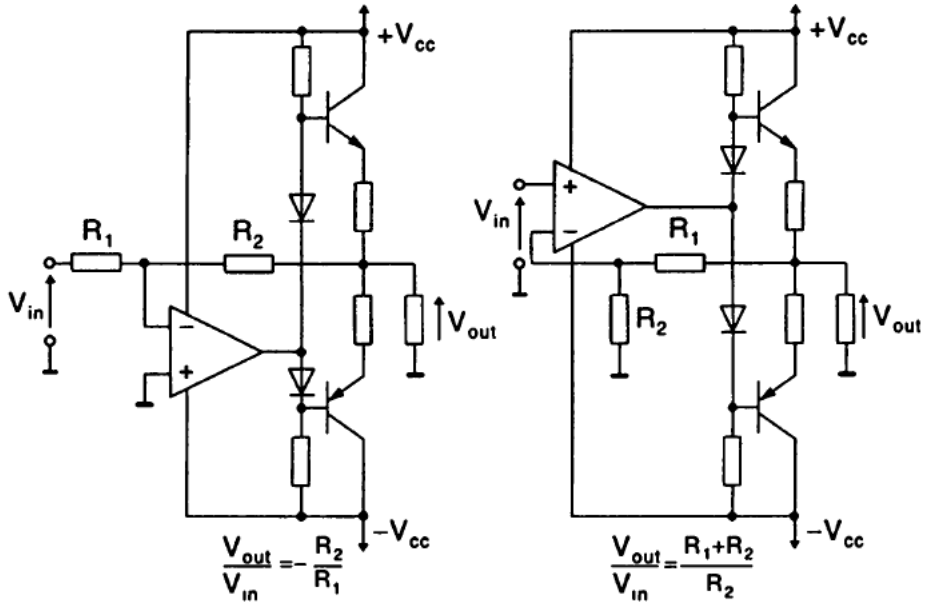


Рис. 7.172. Подача сигналов на вход усилителя мощности при помощи ОУ

7.10.7. Импульсные усилители мощности

В импульсных усилителях мощности транзисторы Q_1 и Q_2 работают как попеременно переключаемые ключи. Сигналы управления этими ключами вырабатываются широтно-импульсным модулятором (ШИМ). Выходные напряжения транзисторов принимают только два значения: $+V_{CC}$ и $-V_{CC}$. Эти напряжения представляют собой наложение двух сигналов: тактовой частоты ШИМ и входного сигнала (рис. 7.173). Поскольку тактовая частота подавляется *LC*-фильтром второго порядка, выходной сигнал повторяет входное напряжение.

Поскольку МОП-транзисторы обладают короткими временами переключения и малыми потерями, именно они обычно используются в усилителях мощности в качестве ключей. Их частота переключения обычно лежит в диапазоне от нескольких десятков до нескольких сотен килогерц. Теоретически, в импульсных усилителях мощности нет никаких потерь. На практике их КПД составляет 80...90%.

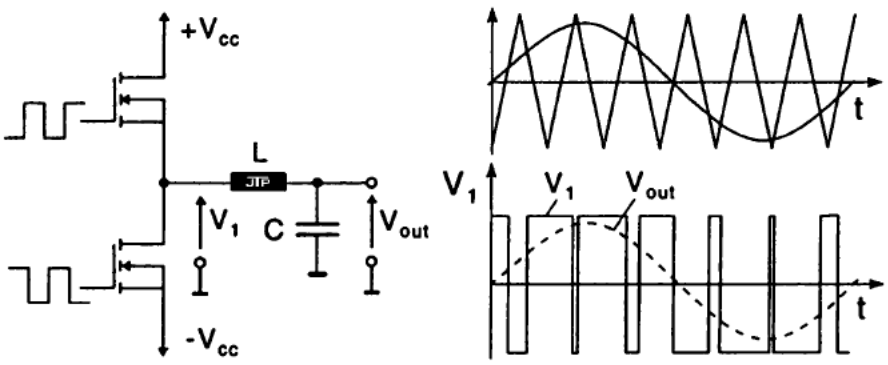


Рис. 7.173. Импульсный усилитель мощности

7.11. Обозначения

a, a_i	Коэффициенты фильтра (см. табл. 7.2—7.5)
A	Коэффициент передачи или коэффициент усиления
A_{CL}	Коэффициент усиления системы с обратной связью в замкнутом состоянии
A_d	Коэффициент передачи дифференциального сигнала, Коэффициент усиления ОУ без цепей обратной связи
A_{OL}	Коэффициент усиления системы с обратной связью в разомкнутом состоянии
b, b_i	Коэффициенты фильтра (см. табл. 7.2—7.5)
B	Коэффициент передачи биполярного транзистора по постоянному току
B	Полоса пропускания
B	Как индекс: база
C	Как индекс: коллектор
C	Емкость
C_{th}, c_{th}	Теплоемкость (Вт·с/К), удельная теплоемкость (Вт·с/(кг·К))
CM	Как индекс: синфазный сигнал
КОСС	Коэффициент ослабления синфазного сигнала
d	Как индекс: разность
D	Коэффициент затухания
D	Как индекс: сток
E	Как индекс: эмиттер
f	Частота
f_c	Критическая частота
f_T	Предельная частота
F	Передаточная функция (в частотной области)
g_m	Крутизна
G	Как индекс: затвор
i	Переменный ток
$i_{s/c}$	Ток в режиме короткого замыкания
in	Как индекс: входная величина
I	Постоянный ток, СКЗ переменного тока
I_F	Ток прямо смещенного диода
L	Индуктивность
out	Как индекс: выходная величина
P	Мощность
r	Сопротивление в режиме передачи дифференциальных сигналов, Сопротивление по переменному току
r_{BE}	Дифференциальное сопротивление база—эмиттер, V_T / I_B
r_{CE}	Дифференциальное выходное сопротивление перехода коллектор—эмиттер
r_{DS}	Дифференциальное выходное сопротивление перехода сток—исток
r_{int}	Дифференциальное сопротивление источника тока
R	Сопротивление
R_{int}	Внутреннее сопротивление источника
R_L	Сопротивление нагрузки
R_{th}	Тепловое сопротивление (К/Вт)
s	Комплексная частота
S	Как индекс: исток
S	Нормализованная комплексная частота, $S = s/\omega_g$
t	Время

T	Абсолютная температура
T	Постоянная времени
T_m	Среднее время между отказами
v	Переменное напряжение
$v_{o/c}$	Напряжение разомкнутой цепи или напряжение в режиме холостого хода
$v_{o/l}$	Напряжение разомкнутой цепи
$\hat{V}$	Пиковое значение переменного напряжения
V_0	Напряжение смещения
V_0, I_0	Рабочая точка
ΔV_{BE}	Дрейф теплового напряжения перехода база–эмиттер
V_{CC}	Напряжение питания
V_F	Напряжение прямо смещенного диода
V_T	Тепловое напряжение, около 25 мВ при комнатной температуре
$\underline{z}$	Дифференциальный импеданс
$\underline{Z}$	Импеданс
Z_{th}	Переходное тепловое сопротивление (К/Вт)
β	Коэффициент обратной связи, передаточная функция цепи обратной связи
β	Коэффициент передачи по току дифференциального сигнала
β_0	Коэффициент передачи по току дифференциального сигнала в режиме короткого замыкания
$\Delta\theta$	Разность температур
η	КПД
φ	Фазовый угол между выходным и входным сигналами
λ	Частота отказов
θ	Температура
ω	Угловая частота
ω_0	Резонансная угловая частота, центральная частота
ω_c	Критическая частота или частота среза

Литература

Bird J. O. *Electrical Circuit Theory and Technology.* — : Butterworth: Heinemann, 1999.

Boylestad R. L., Nashelsky L. *Electronic Devices and Circuit Theory.* 6th ed. — : Prentice Hall, 2000.

Crecraft D. L., Gorham D. A., Sparkes J. J. *Electronics.* — : Chapman & Hall, 1993.

Floyd T. L. *Principles of Electric Circuits.* 6th ed. — : Prentice Hall, 2000.

Floyd T. L. *Electric Circuits Fundamentals.* 5th ed. — : Prentice Hall, 2001.

Floyd T. L. *Electronic Devices.* 5th ed. — : Prentice Hall, 1999.

Floyd T. L. *Electronics Fundamentals: Circuits, Devices, and Applications.* — : Prentice Hall, 1997.

Grob B. *Basic Electronics.* 8th ed. — : McGraw-Hill, 1996.

Harper C. A. *Active Electronic Component Handbook.* 2nd ed. — : McGraw-Hill, 1996.

Horowitz P., Hill W. *The Art of Electronics.* 2nd ed. — : Cambridge Univ. Press, 1989.

Horowitz P., Hayes, T. C. *Student Manual for The Art of Electronics.* — : Cambridge Univ. Press, 1989.

Singh J. *Semiconductor Devices: Basic Principles.* — : John Wiley & Sons, 2000.

Zverev A. I. *Handbook of Filter Synthesis.* — : John Wiley & Sons, 1967.

ГЛАВА 8

ЦИФРОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

8.1. Алгебра логики

8.1.1. Логические переменные и элементы

Часто на практике интерес представляет не непрерывный съем информации, а лишь идентификация двух различных состояний сигналов. Например:

В цепи протекает ток / В цепи тока нет;
Напряжение положительное / Напряжение отрицательное;
Цепь замкнута / Цепь разомкнута.

Для математического моделирования таких систем вводятся **логические переменные**, которые могут принимать только два значения: ноль или единицу: $x = 0$ или $x = 1$.

Логические функции переводят одни логические переменные в другие логические переменные. Раздел математики, описывающий соотношения между различными логическими переменными и функциями, называется булевой алгеброй.

8.1.1.1. Инверсия

Инверсия или логическое отрицание переменной x обозначается как $\bar{x}$:

$$q = \overline{x \cdot y}\ .$$

Значение логической переменной q противоположно значению переменной x.

Любую логическую функцию можно представить в виде **таблицы истинности**. Для инверсии таблица истинности имеет следующий вид:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Также справедливы соотношения:

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{\bar{x}} = x.$$

- Результат двойного отрицания логической переменной равен самой логической переменной.

8.1.1.2. Логическое умножение

Логическое умножение, также называемое функцией И или конъюнкцией, объединяет *две* логические переменные:

$$q = x \cdot y.$$

Таблица истинности функции И имеет вид:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В таблице истинности рассматриваются все четыре возможные комбинации значений двух логических переменных.

Для функции И справедливы соотношения:

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot x = x, \tag{8.1}$$

$$x \cdot 1 = x, \quad x \cdot \bar{x} = 0. \tag{8.2}$$

8.1.1.3. Логическое сложение

Логическое сложение, часто называемое функцией ИЛИ или дизъюнкцией, также имеет дело с *двумя* логическими переменными:

$$q = x + y.$$

Таблица истинности функции ИЛИ имеет вид:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Для функции ИЛИ справедливы соотношения:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot x = x, \tag{8.3}$$

$$x + 1 = 1, \quad x + \bar{x} = 1. \tag{8.4}$$

8.1.2. Логические функции и их обозначения

Логические переменные описывают электрические сигналы, тогда как логические функции отображают соотношения между ними. Для реализации этих функций применяются **логические элементы**, часто называемые логическими вентилями, каждый из которых имеет свое собственное обозначение.

Примечание. Приводимые в этом разделе обозначения соответствуют стандартам EN 60617–12 (бывшему IEC 617) и IEEE/ANSI. Стандарт IEEE

поддерживает два вида обозначений: в прямоугольных рамках и рамках, определяемых типом элемента. В первом случае внутри прямоугольника дается описание логической функции, во втором — сама форма рамки несет в себе информацию о логической функции. Далее в книге предпочтение отдается прямоугольной форме обозначений.

8.1.2.1. Инвертор (логический элемент НЕ)

Логический элемент НЕ инвертирует входной сигнал. Инверсию обозначает кружок на выходе схемы (рис. 8.1 и 8.2).

$$q = \overline{x}\,.$$

x	НЕ
0	1
1	0

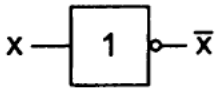


Рис. 8.1. Таблица истинности и обозначение инвертора

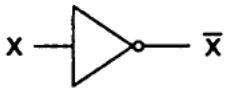


Рис. 8.2. Альтернативное обозначение инвертора

Выходной сигнал инвертора равен единице, только если сигнал на его входе равен нулю.

8.1.2.2. Логический элемент И

$$q = x \cdot y.$$

x	y	И
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

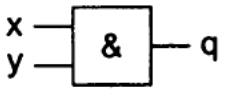


Рис. 8.3. Таблица истинности и обозначение элемента И

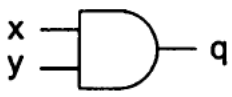


Рис. 8.4. Альтернативное обозначение элемента И

Выходной сигнал элемента И равен единице, когда оба сигнала на его входах равны единице (рис. 8.3).

Выходной сигнал элемента И равен нулю, если хотя бы одна из входных переменных равна нулю.

8.1.2.3. Логический элемент ИЛИ

$$q = x + y.$$

x	y	ИЛИ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

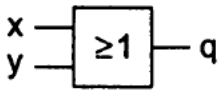


Рис. 8.5. Таблица истинности и обозначение элемента ИЛИ



Рис. 8.6. Альтернативное обозначение элемента ИЛИ

Выходной сигнал элемента ИЛИ равен нулю, когда оба сигнала на его входах равны нулю (рис. 8.5 и 8.6).

8.1.2.4. Логический элемент И-НЕ

$$q = \overline{x \cdot y}.$$

x	y	И-НЕ
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

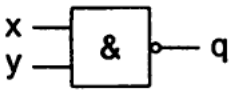


Рис. 8.7. Таблица истинности и обозначение элемента И-НЕ

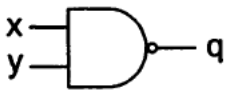


Рис. 8.8. Альтернативное обозначение элемента И-НЕ

Элемент И-НЕ — это последовательное соединение элемента И и инвертора (рис. 8.7 и 8.8).

Выходной сигнал элемента И-НЕ равен нулю, когда оба сигнала на его входах равны единице.

8.1.2.5. Логический элемент ИЛИ-НЕ

$$q = \overline{x + y}.$$

x	y	ИЛИ-НЕ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

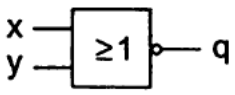


Рис. 8.9. Таблица истинности и обозначение элемента ИЛИ-НЕ

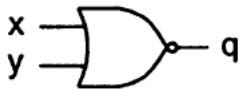


Рис. 8.10. Альтернативное обозначение элемента ИЛИ-НЕ

Элемент ИЛИ-НЕ — это последовательное соединение элемента ИЛИ и инвертора (рис. 8.9 и 8.10).

- Выходной сигнал элемента ИЛИ-НЕ равен единице, когда оба сигнала на его входах равны нулю.

или

- Выходной сигнал элемента ИЛИ-НЕ равен нулю, если хотя бы один сигнал на его входах равен единице.

8.1.2.6. Логический элемент ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

$$q = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y.$$

$$q = x \oplus y$$

x	y	ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

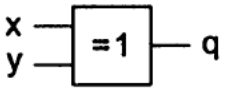


Рис. 8.11. Таблица истинности и обозначение элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

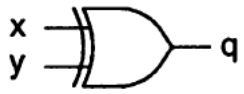


Рис. 8.12. Альтернативное обозначение элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

- Выходной сигнал элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ равен единице, если единице равен только один сигнал на его входах.

или

- Выходной сигнал элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ равен единице при разных сигналах на его входах.

или

- Выходной сигнал элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ равен нулю при одинаковых сигналах на его входах.

Элемент ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ можно рассматривать как **управляемый инвертор** (рис. 8.13). При этом один из его входов является управляющим входом S. Тогда при $S = 1$ схема инвертирует входной сигнал, а при $S = 0$, оставляет его неизменным.

S	x	q
0	0	0 } как x
	1	1 }
1	0	1 } как $\overline{x}$
	1	0 }

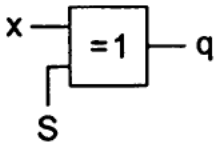


Рис. 8.13. Использование элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ в качестве управляемого инвертора

8.1.3. Логические преобразования

8.1.3.1. Переместительный закон

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x + y + y + x. \tag{8.5}$$

Переменные являются взаимозаменяемыми, т. е. входы схем И и ИЛИ можно менять местами.

8.1.3.2. Сочетательный закон

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z. \tag{8.6}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z. \tag{8.7}$$

Результаты вычислений по всем формулам совпадают друг с другом, т. е. возможен любой порядок соединения пар входных сигналов (рис. 8.14).

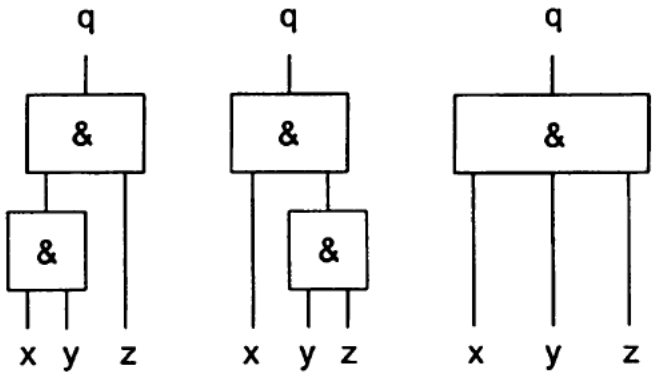


Рис. 8.14. В соответствии с сочетательным законом все приведенные схемы являются идентичными (то же самое справедливо для элемента ИЛИ)

8.1.3.3. Распределительный закон

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z). \tag{8.8}$$

$$(x + y) \cdot (x + z) = x + (y \cdot z). \tag{8.9}$$

Любая общая переменная двух логических выражений может быть вынесена за скобки (рис. 8.15). В алгебре нет правила, аналогичного выражению (8.9).

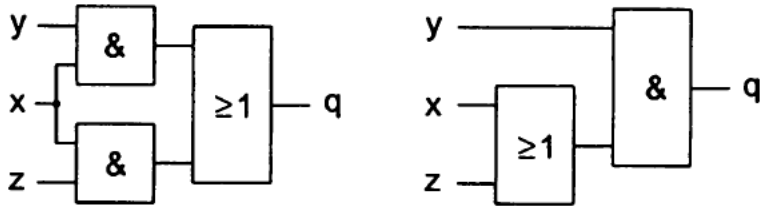


Рис. 8.15. В соответствии с распределительным законом обе приведенные схемы являются идентичными

8.1.3.4. Законы инверсии (правила Де Моргана)

Выражения (8.10) и (8.11) описывают законы инверсии, проиллюстрированные на рис. 8.16 и 8.17.

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{x+y}. \tag{8.10}$$

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x\cdot y}. \tag{8.11}$$



Рис. 8.16. Инверсия может быть смещена со входа на выход; при этом элемент И меняется на элемент ИЛИ-НЕ



Рис. 8.17. Инверсия может быть смещена со входа на выход; при этом элемент ИЛИ меняется на элемент И-НЕ

Порядок вычислений

Инвертирование переменных всегда выполняется первым. После чего определяются выражения в скобках. Все логические выражения вычисляются слева направо.

Примечание. Поскольку для функции ИЛИ используется знак «+», а для функции И — знак «·», для них справедливы те же алгебраические правила: выражения с функциями И имеют приоритет над выражениями с функциями ИЛИ. Знак «·» может упускаться.

Пример

$$\left(x\cdot\overline{y}\right)+\left(\overline{x}\cdot y\right)=x\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot y=x\overline{y}+\overline{x}y\,.$$

8.1.4. Логические преобразования (обзор)

Пример. При помощи правил, приведенных в табл. 8.1, необходимо упростить логическое выражение.

Решение

$$q = \overline{(x \cdot \bar{y})(x + y)} = \quad \text{правило Де Моргана (14)}$$

$$= \overline{\bar{x} \cdot y} + \overline{x + y} = \quad \text{правила Де Моргана (14) и (15)}$$

$$= (\bar{x} + y) + (x \cdot \bar{y}) = \quad \text{распределительный закон (27)}$$

$$= \underbrace{\left[\bar{x} + (x \cdot \bar{y})\right]}_{\bar{x}} + \underbrace{\left[y + (x \cdot \bar{y})\right]}_{y + \bar{x}} = \quad \text{из правил (19) и (21)}$$

$$= \bar{x} + y + \bar{x} = \bar{x} + y.$$

Таблица 8.1. Обзор логических преобразований

Одна переменная			
(1)	$\bar{\bar{x}} = x$		
(2)	$x \cdot x = x$	**(3)**	$x + x = x$
(4)	$x \cdot \bar{x} = 0$	**(5)**	$x + \bar{x} = 1$
Одна переменная и константы			
(6)	$x \cdot 0 = 0$	**(7)**	$x + 0 = x$
(8)	$x \cdot 1 = x$	**(9)**	$x + 1 = 1$
Две переменных			
(10)	$x \cdot y = y \cdot x$	**(11)**	$x + y = y + x$
(12)	$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$	**(13)**	$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$
(14)	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	**(15)**	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
(16)	$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$	**(17)**	$\overline{\bar{x} + \bar{y}} = x \cdot y$
(18)	$x \cdot (x + y) = x$	**(19)**	$x + (x \cdot y) = x$
(20)	$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$	**(21)**	$x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$
(22)	$(x \cdot y) + (\bar{x} \cdot y) = y$	**(23)**	$(x + y) \cdot (\bar{x} + y) = y$
(24)	$(\bar{x} \cdot y) + (x \cdot y) = y$	**(25)**	$(\bar{x} + y) \cdot (x + y) = y$
Три переменных			
(26)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	**(27)**	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

8.1.5. Анализ логических схем

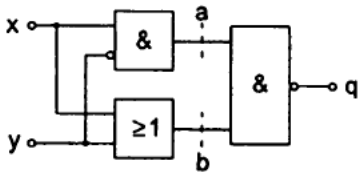


Рис. 8.18. Анализ логических схем методом разбиения на части и введения новых переменных

Для получения таблицы истинности сложной логической схемы её разбивают на части и в точках разбиения вводят новые переменные. Так, для схемы, показанной на рис. 8.18, в качестве временных переменных вводятся переменная a, равная $x \cdot \overline{y}$, и переменная b, равная $x + y$. Кружок на выходе схемы И указывает на инверсию. Выходная переменная q является результатом прохождения переменных a и b через схему И-НЕ. В приведенной ниже таблице истинности показаны все этапы нахождения переменной q.

x	y	$a = x \cdot \overline{y}$	$b = x + y$	$q = \overline{a \cdot b}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

Из последней колонки таблицы видно, что логическое выражение всей схемы имеет вид: $q = \overline{x} + y$. Для схем с несколькими выходными переменными для каждой из них составляется своя таблица истинности.

8.1.6. Сумма произведений и произведение сумм

При проектировании цифровых логических схем обычно строят таблицы истинности, показывающие взаимосвязь между входными и выходными сигналами. На основе этих таблиц выводятся логические выражения для каждой выходной переменной, определяющие структуру логической схемы. Наибольший интерес представляет случай, когда **каждая входная переменная** входит в состав каждого члена выходного выражения в инвертированном или неинвертированном виде.

8.1.6.1. Сумма произведений

Алгоритм нахождения **суммы произведений** (канонической суммы произведений).

Рассматриваются только ряды таблицы истинности, где выходная переменная равна логической единице.

В каждом из этих рядов все входные переменные объединяются при помощи функции логического умножения (функции И). Если переменная равна 0, то ее представляют в инвертированном виде, если 1, то в неинвертированном.

Все полученные выражения связываются вместе при помощи функции логического сложения (функции ИЛИ).

Такая запись выходной функции часто называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Пример: Входные переменные — A, B и C. Выходные — Q и R. По таблице истинности требуется построить двухуровневую комбинационную схему (по сумме произведений входных переменных).

A	B	C	Q	R
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

Решение:

Выходная переменная Q принимает в таблице истинности единичные значения в трех случаях: во втором, в пятом и последнем рядах. Записываем выражения для отдельных членов выходного соотношения: $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$, $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$, $A\cdot B\cdot C$. Отсюда находим уравнение для выходной переменной Q: $Q=(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)+(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})+(A\cdot B\cdot C)$. По полученному выражению строится двухуровневая комбинационная схема, показанная на рис. 8.19.

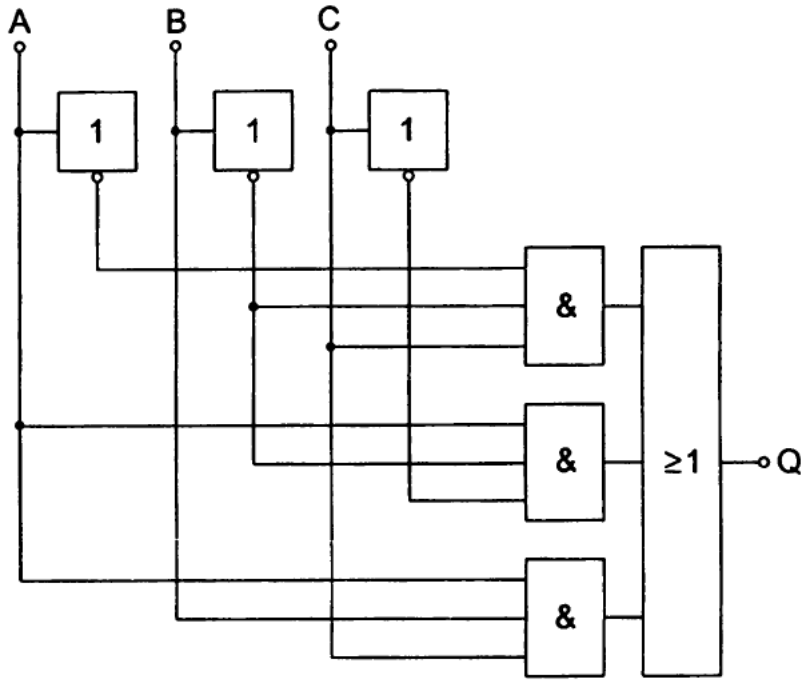


Рис. 8.19. Двухуровневая комбинационная схема, построенная по сумме произведений входных переменных

8.1.6.2. Произведение сумм

Алгоритм нахождения **произведения сумм** (канонического произведения сумм).

Рассматриваются только ряды таблицы истинности, где выходная переменная равна логическому нулю.

В каждом из этих рядов все входные переменные объединяются при помощи функции логического сложения (функции ИЛИ). Если переменная равна 1, то ее представляют в инвертированном виде, если 0, то в неинвертированном;

Все полученные выражения связываются вместе при помощи функции логического умножения (функции И).

Такая запись выходной функции часто называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Пример. Входные переменные — A, B и C. Выходные — Q и R. По таблице истинности из предыдущего примера требуется построить двухуровневую комбинационную схему (по произведению сумм входных переменных).

Решение. Выходная переменная R принимает в таблице истинности нулевые значения в двух случаях: в пятом и последнем рядах. Записываем выражения для отдельных членов выходного соотношения: $A+B+C$, $A+B+C$. Отсюда находим уравнение для выходной переменной R: $R=(A+B+C)\cdot(A+B+C)$. По полученному выражению строится двухуровневая комбинационная схема, показанная на рис. 8.20.

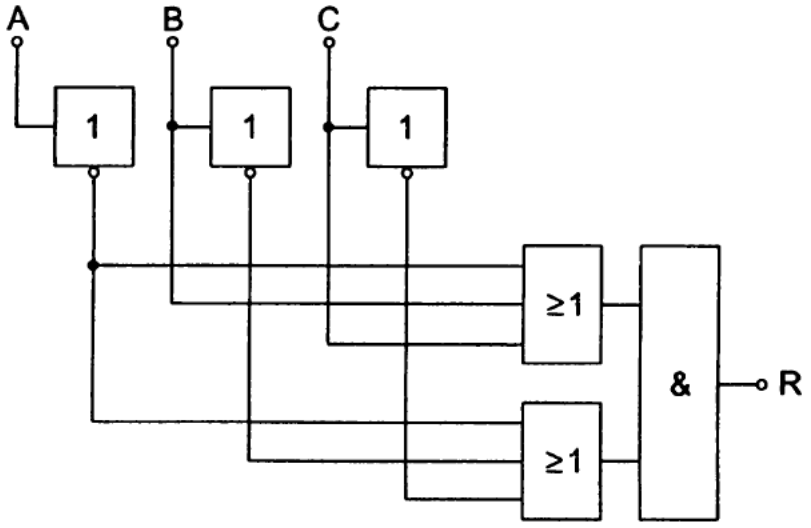


Рис. 8.20. Двухуровневая комбинационная схема, построенная по произведению сумм входных переменных

- Оба варианта схем могут быть избыточными, в этом случае их приходится минимизировать. Если какая-либо входная переменная в выходном выражении, составленном в виде суммы произведений, несколько раз принимает единичное значение, то это выражение поддается сокращению. То же самое с точностью до наоборот справедливо для выходного выражения в виде произведения сумм.

Примечание. При разработке ТТЛ-схем предпочтительнее пользоваться методом нахождения суммы произведений. Тогда как при проектировании программируемых логических устройств (ПЛУ) чаще применяют метод нахождения произведения сумм.

8.1.7. Оптимизация логических функций

Назначение двух методов, описанных в этом разделе, — оптимизация логических функций, полученных по заданной таблице истинности. Цель оптимизации — минимизация логических элементов в электронной схеме.

- **Метод Карно.** Графический метод нахождения оптимальной выходной функции. Его ограничение: допускает рассмотрение только нескольких входных переменных (как правило, не более четырех).
- **Метод Куин – Мак-Класки.** Более сложный метод, но подходит для любого числа входных переменных. Довольно просто программируется, что объясняет его широкое распространение.

8.1.7.1. Карта Карно

Карта Карно — это способ представления таблицы истинности, при котором в соседних ячейках рядов и столбцов меняется *только одна* входная переменная. В табл. 8.2 показана карта Карно для четырех входных переменных *A*, *B*, *C* и *D*. Первой показана карта Карно, построенная для нахождения выходной функции в виде суммы из произведений входных переменных (SOP), а второй — в виде произведения сумм (POS). Число в правом верхнем углу каждой ячейки равно десятичному значению комбинации входных битов, в которой первые два бита соответствуют переменным *A* и *B*, а последние два бита — переменным *C* и *D*. Для трех входных переменных таблица имеет на два ряда меньше.

Комбинации входных битов в ячейках карты Карно заменяются на соответствующие им значения выходной функции, полученные из заданной таблицы истинности (табл. 8.3).

Таблица 8.2. Карты Карно для четырех входных переменных

SOP	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}\cdot B$	$A\cdot B$	$A\cdot\overline{B}$
$\overline{C}\cdot\overline{D}$	0000 0	0100 4	1100 12	1000 8
$\overline{C}\cdot D$	0001 1	0101 5	1101 13	1001 9
$C\cdot D$	0011 3	0111 7	1111 5	1011 11
$C\cdot\overline{D}$	0010 2	0110 6	1110 14	1010 10

POS	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$C+D$	0000 0	0100 4	1100 12	1000 8
$C+\overline{D}$	0001 1	0101 5	1101 13	1001 9
$\overline{C}+\overline{D}$	0011 3	0111 7	1111 15	1011 11
$\overline{C}+D$	0010 2	0110 6	1110 14	1010 10

Таблица 8.3. Таблицы истинности

	A	B	C	D	Q
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Q	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}\cdot B$	$A\cdot B$	$A\cdot\overline{B}$
$\overline{C}\cdot\overline{D}$	1 0	1 4	12	8
$\overline{C}\cdot D$	1 1	1 5	13	9
$C\cdot D$	3	7	1 15	1 11
$C\cdot\overline{D}$	1 2	6	14	1 10

При рассмотрении карт Карно предполагается, что крайние ячейки являются соседями крайних ячеек, расположенных с противоположной стороны тех же рядов и столбцов. Следовательно, последняя (самая правая) ячейка первого ряда считается соседкой первой (самой левой) ячейки этого же ряда, а также крайней правой ячейки последнего ряда. Таким образом, карту Карно можно представить в виде торроидальной поверхности.

Алгоритм нахождения минимальной суммы произведений входных функций

- Соседние единичные ячейки группируются вместе. Количество ячеек в группе всегда определяется числом 2 в некоторой степени, т. е. может быть равным 1, 2, 4 или 8. Стараются выделять максимальные по размеру группы.
- Группы должны охватывать все единичные ячейки. При этом отдельные ячейки могут одновременно входить в несколько групп.
- Все переменные, входящие в состав групп, объединяются функцией И. При этом в группах из двух ячеек исключается одна переменная, а в группах их четырех ячеек — две и т. д. Как правило, исключаются переменные, входящие в группу одновременно и в инвертированном, и в неинвертированном виде.
- Все получившиеся произведения объединяются функцией ИЛИ.

Пример: По заданной таблице истинности (табл. 8.3) требуется найти оптимизированное выражение для выходной переменной Q в виде суммы произведений входных переменных.

Решение. Вторая часть табл. 8.3 представляет собой карту Карно, построенную по заданной таблице истинности. Для ясности в ней обозначены только единичные ячейки. Там же показаны выделенные группы ячеек, для которых составляются логические произведения.

Для группы (0, 4, 1, 5): $\overline{A}\cdot\overline{C}$;
Для группы (15, 11): $A\cdot C\cdot D$;
Для группы (2, 10): $B\cdot C\cdot\overline{D}$.
Окончательное выражение для переменной Q имеет вид:

$$Q=(\overline{A}\cdot\overline{C})+(A\cdot C\cdot D)+(\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}).$$

В исходном виде переменная Q состояла из суммы восьми произведений из четырех сомножителей, теперь в нее входят три слагаемых: одно из которых состоит из двух сомножителей, а два — из трех.

Алгоритм нахождения минимального произведения сумм входных функций

- Соседние нулевые ячейки группируются вместе. Количество ячеек в группе всегда определяется числом 2 в некоторой степени, т. е. может быть равным 1, 2, 4 или 8. Стараются выделять максимальные по размеру группы.
- Группы должны охватывать все нулевые ячейки. При этом отдельные ячейки могут одновременно входить в несколько групп.
- Все переменные, входящие в состав групп, объединяются функцией ИЛИ. При этом в группах из двух ячеек исключается одна переменная, а в группах их четырех ячеек — две и т. д. Как правило, исключаются переменные, входящие в группу одновременно и в инвертированном, и в неинвертированном виде.
- Все получившиеся суммы объединяются функцией И.

Пример. По заданной таблице истинности (табл. 8.4) требуется найти оптимальное выражение для выходной переменной R в виде произведения сумм входных переменных.

Таблица 8.4. Таблицы истинности

	A	B	C	D	R
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

R	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$C+D$	0 0	4	12	0 8
$C+\overline{D}$	1	0 5	0 13	9
$\overline{C}+\overline{D}$	3	7	0 15	11
$\overline{C}+D$	0 2	6	14	0 10

Решение. Вторая часть табл. 8.4 представляет собой карту Карно, построенную по заданной таблице истинности. Для ясности в ней обозначены только нулевые ячейки. Там же показаны выделенные группы ячеек, для которых составляются логические суммы:

Для группы (0, 8, 2, 10): $B+D$;

Для группы (5, 13): $B+C+D$;

Для группы (13, 15): $A+B+D$.

Окончательное выражение для переменной R имеет вид:

$$R=(B+D)\cdot(\overline{B}+C+\overline{D})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{D}).$$

В исходном виде переменная R состояла из произведения семи сумм из четырех слагаемых, теперь в нее входят три сомножителя, один из которых состоит из двух слагаемых, а два — из трех.

Рассмотрение неопределенных ситуаций

На практике встречаются ситуации, когда значения выходных переменных для некоторых комбинаций входных битов не определены или не существенны. Такие случаи помечаются в таблице истинности крестиком и обозначают *безразличное состояние*. В картах Карно такие ячейки могут включаться в группы произвольным образом. Выбор групп в данном случае диктуется критерием минимизации выходной функции.

Пример. По заданной таблице истинности (табл. 8.5) необходимо найти оптимизированное выражение для логической переменной S.

Таблица 8.5. Таблицы истинности

	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	×
4	0	1	0	0	×
5	0	1	0	1	×
6	0	1	1	0	×
7	0	1	1	1	×
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	×
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	×

Q	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}\cdot B$	$A\cdot B$	$A\cdot\overline{B}$
$\overline{C}\cdot\overline{D}$	1 0	× 4	1 12	8
$\overline{C}\cdot D$	1 1	× 5	13	9
$C\cdot D$	× 3	× 7	× 15	× 11
$C\cdot\overline{D}$	2	× 6	1 14	10

R	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$C+D$	0	× 4	12	0 8
$C+\overline{D}$	1	× 5	0 13	0 9
$\overline{C}+\overline{D}$	× 3	× 7	× 15	× 11
$\overline{C}+D$	0 2	× 6	14	0 10

Решение. Для вычисления **суммы произведений** неопределенные состояния в четвертой и пятой ячейках определяются единичными. Это позволяет в верхнем левом углу карты Карно выделить группу из четырех ячеек. Также можно

выделить еще одну группу из двух ячеек (12 и 14). Теперь можно составить выражение для выходной переменной:

$$S_1 = (\overline{A} \cdot \overline{C}) + (A \cdot B \cdot \overline{D}).$$

Для вычисления **произведения сумм** неопределенные состояния в третьей, пятой, шестой, седьмой, одиннадцатой и пятнадцатой ячейках определяются нулевыми. Это позволяет на карте Карно выделить три группы ячеек. После чего составляем выражение для выходной переменной S_2:

$$S_2 = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + \overline{D}).$$

Хотя функции S_1 и S_2 описываются *разными* логическими выражениями, они обе соответствуют заданной таблице истинности.

8.1.7.2. Метод Куин – Мак-Класки

Метод оптимизации Куин – Мак-Класки минимизирует ДНФ выходной функции. Слагаемые суммы произведений, сомножителями которых являются все входные переменные, называются **минтермами**.

Пример. Первый член логической переменной $Q = A\overline{B}C\overline{D} + ABD$ является минтермом, а второй — нет, поскольку в нем нет ни переменной C, ни ее дополнения $\overline{C}$.

Примечание. Сумма членов, в которых каждая переменная появляется только один раз, называется **макстермом**.

Слагаемое P называется **импликантом** Q, если при $P = 1$, $Q = 1$.

Пример. Минтерм $A\overline{B}C\overline{D}$ является импликантом Q, поскольку $A\overline{B}C\overline{D} = 1$, $Q = 1$. То же самое справедливо и для второго слагаемого Q.

Простым импликантом называется слагаемое, которое перестает быть импликантом, если в нем упускается одна из переменных.

Пример. В выражении $Q = A\overline{B}C\overline{D} + ABC + \overline{A}BC\overline{D}$ второй член является простым импликантом, а первый и третий — нет, поскольку если $\overline{B}C\overline{D} = 1$, то $Q = 1$.

Алгоритм метода оптимизации Куин – Мак-Класки:

1) Определение простых импликантов;
2) Определение минимальных пересечений.

Определение простых импликантов

Пусть требуется определить простые импликанты выражения:

$$Q = AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}.$$

В первую колонку таблицы вносятся все слагаемые выражения Q. Из них находятся пары, различающиеся только одной переменной. Такие пары называются **смежными** (в таблице они помечаются звездочкой). Сумму смежной

пары можно **сократить** на переменную, которая в одно произведение входит в прямом виде, а в другое — в инверсном:

$$AB\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} = AB\overline{C}(D + \overline{D}) = AB\overline{C}.$$

Во вторую колонку вносятся сокращенные выражения, полученные при сложении смежных пар. Удаленные переменные заменяются прочерком. Числа в скобках соответствуют номерам рядов в первой колонке. Среди элементов второй колонки также находятся пары, различающиеся только одной переменной. Эти пары пар складываются, и полученные сокращенные значения заносятся в третью колонку таблицы. Процесс минимизации заканчивается, когда не остается уже членов, которые можно сократить. Одинаковые члены, такие как в третьей колонке, учитываются только один раз.

A B C D		A B C D		A B C D
(1) 1 1 0 1 *	(14)	1 1 0 –	(2435)	– 1 – 0
(2) 1 1 1 0 *	(23)	– 1 1 0 *	(2345)	– 1 – 0
(3) 0 1 1 0 *	(24)	1 1 – 0 *		
(4) 1 1 0 0 *	(35)	0 1 – 0 *		
(5) 0 1 0 0 *	(45)	– 1 0 0 *		
(6) 1 0 0 0 *	(46)	1 – 0 0		

Все элементы таблицы, не помеченные звездочкой, не могут быть минимизированы, т. е. являются простыми импликантами. В рассматриваемом примере это члены (14), (46) и (2435). Следовательно, $Q = ABC + ACD + BD$. Это выражение может быть избыточным и его можно попытаться минимизировать следующим образом.

Определение минимальных пересечений

В таблицу вносятся все члены исходного выражения. Крестиками помечаются те выражения, в состав которых входят простые импликанты (начинают обычно с самого длинного импликанта). Простые импликанты сокращаются до тех пор, пока в каждом ряду не будет стоять хотя бы один крестик.

	$AB\overline{C}$	$A\overline{C}\,\overline{D}$	$B\overline{D}$
$AB\overline{C}D$	×		
$\overline{A}BC\overline{D}$			×
$ABC\overline{D}$			×
$AB\overline{C}\,\overline{D}$	×	×	×
$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$			×
$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$		×	

В рассматриваемом примере нет лишних имликантов. Следовательно, выражение $Q = AB\overline{C} + A\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D}$ является минимальным.

Этот метод поддается программированию и может работать с большим числом переменных.

8.1.8. Построение комбинационных схем

Комбинационная схема — это логическая схема, выходной сигнал которой зависит только от поданных на нее входных сигналов. Комбинационные схемы в отличие от схем последовательного действия (см. раздел 8.3) не имеют внутренней памяти.

Выходные функции, записанные в ДНФ или КНФ, дают возможность построения комбинационных схем из инверторов и логических элементов И и ИЛИ, которые могут быть заменены на элементы И-НЕ и ИЛИ-НЕ (рис. 8.21). Любая комбинационная схема может быть реализована на элементах либо И-НЕ, либо ИЛИ-НЕ.

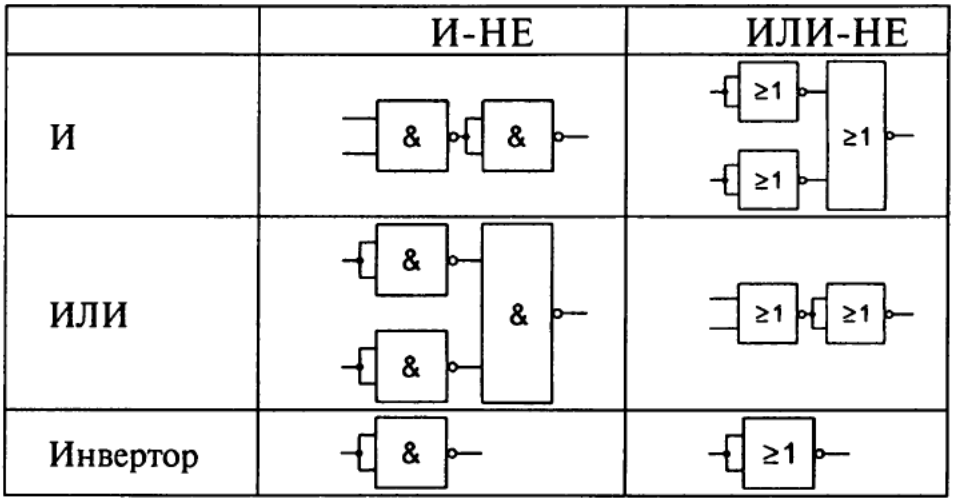


Рис. 8.21. Представление основных логических функций на основе логических элементов И-НЕ и ИЛИ-НЕ

8.1.8.1. Реализация комбинационных схем на элементах И-НЕ

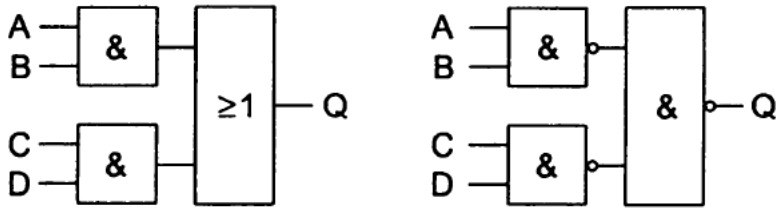


Рис. 8.22. Реализация комбинационной схемы на элементах И и ИЛИ, а также на элементах И-НЕ

По выходному выражению, записанному в ДНФ, можно построить две эквивалентные схемы: одну на элементах И и ИЛИ, другую на элементах И-НЕ (рис. 8.22). Эквивалентность этих схем можно доказать, используя правило Де Моргана:

$$(A \cdot B) + (C \cdot D) = \overline{\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D}}.$$

8.1.6.2. Реализация комбинационных схем на элементах ИЛИ-НЕ

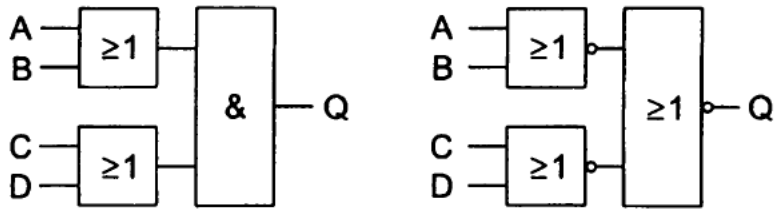


Рис. 8.23. Реализация комбинационной схемы на элементах И и ИЛИ, а также на элементах ИЛИ-НЕ

По выходному выражению, записанному в КНФ, можно построить две эквивалентные схемы: одну на элементах И и ИЛИ, другую на элементах ИЛИ-НЕ (рис. 8.23). Эквивалентность этих схем можно доказать, используя правило Де Моргана:

$$(A+B)\cdot(C+D)=\overline{\overline{A+B}+\overline{C+D}}.$$

Примечание. Такие схемы могут быть также реализованы при помощи мультиплексоров (см. раздел 8.4.2) или программируемых логических устройств (см. раздел 8.6.5).

8.2. Электронная реализация логических схем

8.2.1. Определение электрических характеристик

8.2.1.1. Уровни напряжений

Состояния логических схем характеризуются уровнями напряжений на их входах и выходах. Для каждого логического уровня определен свой диапазон напряжений:

Верхняя граница **диапазона напряжений высокого уровня** (H): распространяется до $+\infty$.

Нижняя граница **диапазона напряжений низкого уровня** (L): распространяется до $-\infty$.

Для разных семейств логических элементов выбраны разные диапазоны напряжений. Действительное значение выходного напряжения логического элемента определяется импедансом нагрузки, температурой и напряжением питания. Более того, при одинаковых рабочих условиях уровень выходного напряжения из-за технологических разбросов может быть разным у разных логических элементов. **Типовые уровни выходных напряжений,** как правило, соответствуют средним значениям заданных диапазонов напряжений. При переключениях логических схем уровни напряжений на их входах и выходах в течение некоторых достаточно коротких интервалов времени не являются ни низкими, ни высокими, а принимают некоторые промежуточные значения между уровнями H и L. Такие состояния называются **неопределенными**.

Выбор соответствия между диапазонами уровней напряжений и значениями логических переменных является произвольным. Различают два типа логики:

Положительная логика: H ≙ 1, L ≙ 0;

Отрицательная логика: H ≙ 0, L ≙ 1.

На практике чаще используется положительная логика.

8.2.1.2. Передаточные характеристики

Передаточные характеристики логических элементов показывают взаимосвязь между их входными и выходными напряжениями. На рис. 8.24 показана передаточная характеристика инвертора. В идеальном случае она имеет форму ступеньки, но на практике ее вид довольно сильно зависит от температуры.

В *пределах семейств логических схем* выходы любых логических элементов могут напрямую подключаться ко входам любых следующих за ними элементов.

Пороговое напряжение — это напряжение на входе элемента, при котором входное напряжение равно выходному. Оно соответствует точке пересечения прямой линии с единичным наклоном, проходящей через начало координат, и передаточной характеристики логического элемента (на рисунке оси имеют разный масштаб).

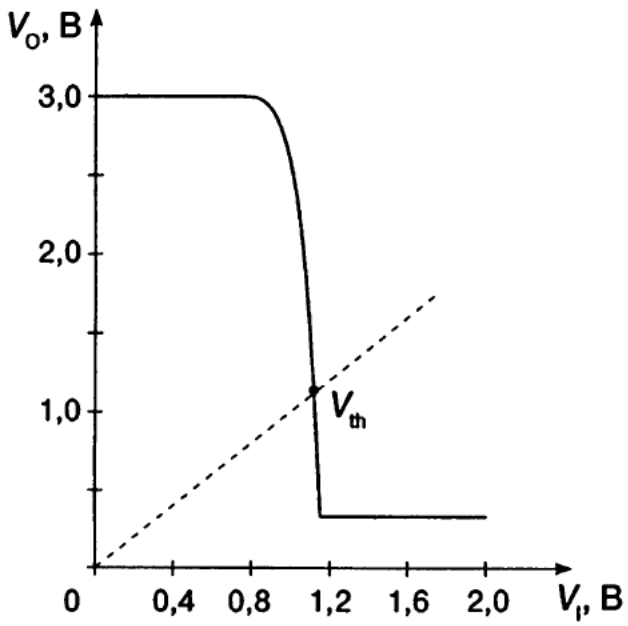


Рис. 8.24. Передаточная характеристика инвертора:
V_O — выходное напряжение;
V_I — входное напряжение;
V_{th} — пороговое напряжение

8.2.1.3. Нагрузочная способность

Нагрузочная способность логических схем определяется максимальным количеством входов логических элементов, которые можно подключить к одному из ее выходов.

Коэффициент объединения по входу или нагрузочная способность по входу: это отношение максимального входного тока к стандартному входному току данного семейства логических схем.

Коэффициент разветвления по выходу или нагрузочная способность по выходу: это максимально возможное количество стандартных входов, подключаемых к данному выходу.

Сумма коэффициентов объединения по входу всех входов логических элементов, подключенных к одному выходу, не должна превышать его нагрузочной способности.

Примечание. Выходная нагрузочная способность может быть разной для высокого и низкого уровней напряжений. При проектировании логических схем учитывается наименьшая из них.

8.2.1.4. Помехоустойчивость

При последовательном соединении логических элементов необходимо, чтобы все последующие элементы надежно распознавали выходные сигналы элементов, стоящих перед ними. Производители логических микросхем обычно указывают **гарантированную статическую помехоустойчивость** своих схем, определяющую наихудшие условия их эксплуатации (по температуре, нагрузке, напряжению питания).

Статическая помехоустойчивость по высокому уровню напряжения определяется разностью между минимальным выходным напряжением V_{OHmin} рассматриваемого логического элемента и минимально допустимым входным напряжением V_{IHmin} элемента, стоящего за ним, при которой он все еще воспринимает входной сигнал V_{OHmin} как сигнал высокого уровня.

Статическая помехоустойчивость по низкому уровню напряжения определяется разностью между максимальным выходным напряжением V_{OLmax} рассматриваемого логического элемента и максимально допустимым входным напряжением V_{ILmax} элемента, стоящего за ним, при которой он все еще воспринимает входной сигнал V_{OLmax} как сигнал низкого уровня.

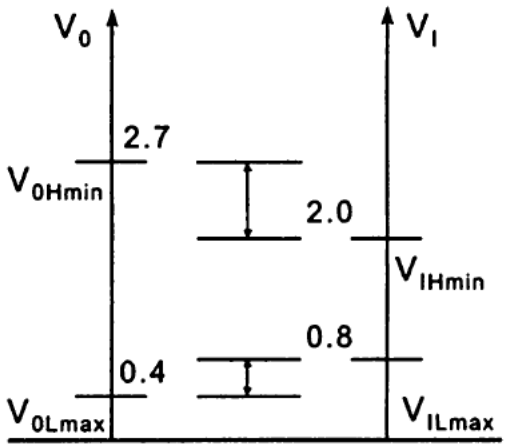


Рис. 8.25. Определение помехоустойчивости (приведенные данные соответствуют маломощным ТТЛ-элементам с диодами Шоттки (ТТЛШ)):
V_O — выходное напряжение;
V_{OHmin} — минимальное выходное напряжение высокого уровня;
V_{OLmax} — максимальное выходное напряжение низкого уровня;
V_I — входное напряжение;
V_{IHmin} — минимальное входное напряжение высокого уровня;
V_{ILmax} — максимальное входное напряжение низкого уровня

Помехоустойчивость задает максимальное значение уровня помех, при котором не происходит ошибок при распознавании сигналов на входах логических элементов (рис. 8.25). В приведенном примере помехоустойчивость по высокому уровню напряжения равна 0,7 В, а по низкому — 0,4 В. Эти цифры справедливы для помех, длительность которых превышает задержку на распространение логического сигнала (десятки наносекунд).

Поведение логических схем при очень коротких импульсных помехах описывается **динамической помехоустойчивостью**, которая главным образом зависит от длительности паразитных сигналов. Очень короткие импульсы должны иметь очень большую амплитуду, чтобы привести к появлению ошибки распознавания уровней входных сигналов.

Типовая помехоустойчивость определяется разностью между типовым значением выходного напряжения и пороговым напряжением V_{th}.

8.2.1.5. Задержка на распространение логического сигнала

Задержка на распространение логического сигнала определяется интервалом времени между фронтами входного и результирующего выходного сигналов. Положение фронтов задается пересечениями порогового уровня входным и выходным напряжениями (рис. 8.26).

При изменении уровня сигнала с высокого (H) на низкий (L) применяется t_{PHL}.

При изменении уровня сигнала с низкого (H) на высокий (L) применяется t_{PLH}.

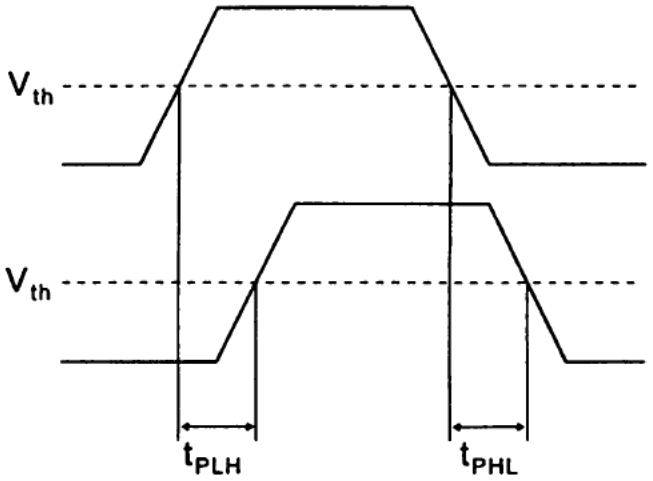


Рис. 8.26. Определение задержки на распространение логического сигнала:
V_{th} — пороговое напряжение;
V_{PHL} — задержка на распространение отрицательного фронта сигнала;
V_{PLH} — задержка на распространение положительного фронта сигнала

8.2.1.6. Время нарастания сигнала

Длительность переходных процессов характеризуется параметрами:

Временем нарастания сигнала t_{LH} — при положительных логических переходах (с уровня L на уровень H),

Временем спада сигнала t_{HL} — при отрицательных логических переходах (с уровня H на уровень L).

Эти величины определяются интервалами времени, в течение которых выходное напряжение логического элемента меняется в диапазоне от 10 до 90 % от установившегося значения.

Примечание. В некоторых справочниках используются другие точки отсчета.

Примечание. Времена спада и нарастания сигналов для некоторых типов логических элементов могут довольно сильно различаться. Обычно они лежат в диапазоне нескольких наносекунд. Поэтому при измерении осциллографом времени t_{LH} нельзя пренебрегать его собственным временем переходных процессов t_{oscil}. Измеренное осциллографом время определяется выражением:

$$t_{meas} = \sqrt{t_{LH}^2 + t_{oscil}^2}.$$

Поэтому для нахождения реального времени нарастания сигнала необходимо произвести соответствующую корректировку результатов измерений.

- Времена нарастания и спада сигналов зависят от нагрузки, особенно от ее емкости, поскольку выходной ток логической схемы может принимать участие в ее разрядке.

8.2.1.7. Потери мощности

Все потери мощности в цифровых логических схемах можно разделить на **статические**, возникающие из-за токов покоя, и **динамические**, связанные с процессами перезарядки внутренних и внешних емкостей.

Следовательно, потери мощности определяются нагрузкой и частотой. К тому же они сильно зависят от технологии изготовления логических схем (см. также раздел 8.2.3).

8.2.1.8. Минимальная скорость нарастания напряжения

Для стабильности сигналов на выходах логических элементов их входные сигналы должны иметь крутые фронты. Поэтому в справочниках приводят значения минимальной скорости нарастания напряжения, имеющие размерность В/мкс.

Приводимые данные по минимальной скорости нарастания напряжения соответствуют допустимым значениям нагрузки. Внешние сигналы с большими временами нарастания сигналов могут приводить к сбоям в работе логических схем. Для решения таких проблем применяют триггеры Шмитта (см. раздел 8.2.6.4).

8.2.1.9. Интеграция логических элементов

В настоящее время практически все логические элементы реализуются в виде интегральных схем. Это позволяет не только экономить пространство, но и снижать времена распространения сигналов, потребляемую мощность и стоимость элементов. Интегральные схемы (ИС) представляют собой наборы элементов, выполняющих определенные стандартные функции, на основе которых проектируются требуемые логические устройства.

Для производства логических микросхем используются два совершенно разных технологических процесса, что привело к возникновению двух совершенно разных *семейств логических элементов*: ТТЛ и КМОП. ТТЛ-компоненты реализуются по технологии изготовления биполярных транзисторов, а КМОП — по технологии полевых транзисторов.

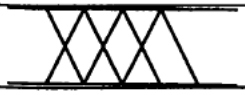
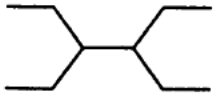
8.2.2. Обозначения, принятые в справочной литературе (обзор)

f_{max}	Максимальная тактовая частота	Максимальная тактовая частота на входе бистабильной схемы, при которой еще гарантируется ее корректная работа. Примечание. В случае применения цепей обратной связи эта частота снижается
I_{CC}	Ток потребления	Средний ток, потребляемый схемой от источника питания
I_{CCPD}	Ток в режиме пониженного потребления энергии	Ток, протекающий через схему в режиме пониженного потребления энергии (при подаче специального управляющего сигнала)

I_{IH}	Входной ток высокого уровня	Значение входного тока при напряжении высокого уровня на входе ИС
I_{IL}	Входной ток низкого уровня	Значение входного тока при напряжении низкого уровня на входе ИС
I_{0H}	Выходной ток высокого уровня	Значение выходного тока при напряжении высокого уровня на выходе ИС
I_{0L}	Выходной ток низкого уровня	Значение выходного тока при напряжении низкого уровня на выходе ИС
I_{0S}	Выходной ток в режиме короткого замыкания	Значение выходного тока при заземлении выхода ИС. Обычно задается для выходного напряжения высокого уровня. Примечание. Этот ток всегда отрицательный
I_{0ZH}	Выходной ток высокоимпедансного состояния при подключении к выходу напряжения высокого уровня	Выходной ток ИС с тремя состояниями в режиме, когда выход находится в высокоимпедансном состоянии и на него подано внешнее напряжение высокого уровня
I_{0ZL}	Выходной ток высокоимпедансного состояния при подключении к выходу напряжения низкого уровня	Выходной ток ИС с тремя состояниями в режиме, когда выход находится в высокоимпедансном состоянии и на него подано внешнее напряжение низкого уровня
V_{IH}	Входное напряжение высокого уровня	Значение напряжения высокого уровня на входе ИС. Обычно задается минимальное значение, воспринимаемое логическим элементом как напряжение высокого уровня
V_{IL}	Входное напряжение низкого уровня	Значение напряжения низкого уровня на входе ИС. Обычно задается максимальное значение, воспринимаемое логическим элементом как напряжение низкого уровня
V_{0H}	Выходное напряжение высокого уровня	Значение напряжения высокого уровня на выходе ИС. Обычно задается минимальное гарантированное значение. Примечание. V_{0H} зависит только от температуры и нагрузки
V_{0L}	Выходное напряжение низкого уровня	Значение напряжения низкого уровня на выходе ИС. Обычно задается максимальное гарантированное значение. Примечание. V_{0L} зависит только от температуры и нагрузки

t_{dis}	Время задержки при переходе в высокоимпедансное состояние	Определяется только для ИС с тремя выходными состояниями. Это время соответствует задержке на распространение сигнала, измеряемой между контрольными точками на управляющем сигнале отключения и выходном сигнале при переключении выхода ИС с определенного уровня напряжения в высокоимпедансное состояние. Примечание. В зависимости от активного уровня выходного напряжения времена перехода в высокоимпеденсное состояние t_{PHZ} и t_{PLZ} могут различаться
t_h	Время удержания	Минимальное время удержания сигнала на входе логического элемента, чтобы он успел на него отреагировать
t_w	Ширина импульса	Интервал времени между определенными контрольными точками на переднем и заднем фронтах импульса
t_{pd}	Задержка распространения сигнала	Интервал времени между контрольными точками на сигналах: входном и результирующем выходном. Примечание. В зависимости от выбранных фронтов времена t_{PLH} и t_{PHL} могут различаться
t_r	Время нарастания сигнала	Интервал времени, в течение которого выходное напряжение меняется с 10 до 90 % от установившегося значения (определяется для положительных перепадов напряжения)
t_f	Время спада сигнала	Интервал времени, в течение которого выходное напряжение меняется с 90 до 10 % от установившегося значения (определяется для отрицательных перепадов напряжения)
t_{pxz}	Время задержки при включении-выключении	См. определение для t_{dis}, только здесь речь идет о переходах между высоким и низким уровнями напряжений

Таблица 8.6. Представление сигналов в справочной литературе

Сигнал	Вход	Выход
	Должен быть постоянным	Постоянный
	Может изменяться от высокого уровня к низкому	Изменяется от высокого уровня к низкому
	Может изменяться от низкого уровня к высокому	Изменяется от низкого уровня к высокому
	Возможны любые изменения	Неопределенное состояние
	—	Центральная линия соответствует высокоимпедансному состоянию (для ИС с тремя выходными состояниями)

8.2.3. Семейство ТТЛ-схем

В семейство ТТЛ-схем (построенных на основе транзисторно-транзисторной логики) входят несколько серий ИС. Все они имеют следующие общие черты:

- напряжение питания +5 В;
- возможность произвольного соединения элементов друг с другом, поскольку все они имеют совместимые входные и выходные сигналы;
- совместимость по выводам элементов одного названия, но разных серий.

8.2.3.1. ТТЛ-схемы разных серий

На рис. 8.27 и в таблице 8.7 показаны основные характеристики ТТЛ-схем разных серий (в скобках даны комментарии для ИС, состоящих из четырех элементов И-НЕ).

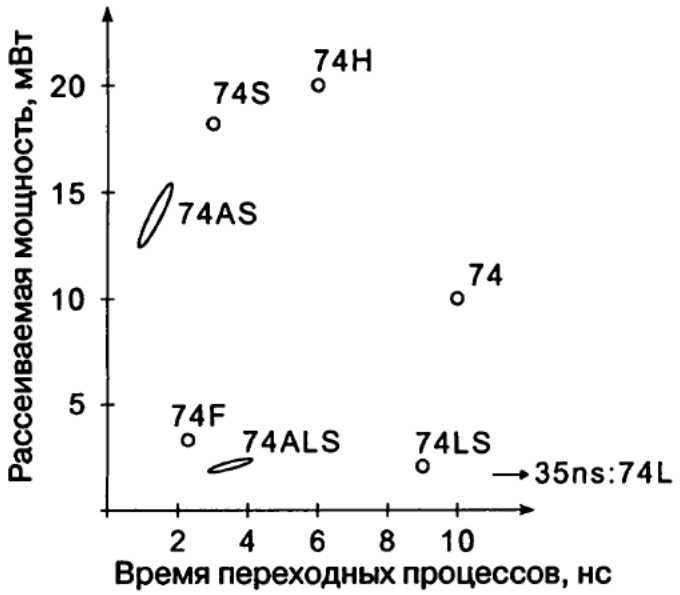


Рис. 8.27. Время переключения ТТЛ-серий

Таблица 8.7. Электрические характеристики ТТЛ-серий

V_{CC} = 5 В, θ = 25 °C		ТТЛ-серии		
		74LS00	74ALS00	74F00
Входное напряжение, В	V_{ILmax}	0,8	0,8	0,8
	V_{IHmin}	2,0	2,0	2,0
Выходное напряжение, В	V_{OLmax}	0,5	0,5	0,5
	V_{OHmin}	2,7	2,7	2,7
Пороговое напряжение, В	V_{th}	1,3	1,5	1,5
Коэффициент разветвления по выходу		20	20	33
Выходной ток, мА	I_{OLsink}	8	8	20
Задержка распространения сигнала типовая (максимальная), нс	t_{PLH}	9 (15)	4	4 (5)
	t_{PHL}	10 (15)	5	3 (4)
Время нарастания, нс	t_{LH}	10	5	3
Время спада при нагрузке 15 пФ, нс	t_{HL}	6	5	3
Минимальная скорость нарастания напряжения (для входного напряжения), В/мкс		1	5	
Рассеиваемая мощность (на 1 элемент), мВт		2	1,2	4

Стандартная ТТЛ-серия (7400) появилась самая первая и в течение десятилетий была промышленным стандартом. Достоинство: низкая стоимость.

Быстродействующая ТТЛ-серия (74H00) обладает несколько большим быстродействием, чем стандартная серия, но в настоящее время практически не пользуется спросом.

Маломощная ТТЛ-серия (74L00) более медленная, чем стандартная серия, но обладает меньшей потребляемой мощностью; однако в настоящее время также почти не используется.

ТТЛШ-серия (74S00). Применение диодов и транзисторов Шоттки позволило сократить времена переключения схем. Недостаток: небольшое количество типов логических элементов.

Маломощная ТТЛШ-серия (74LS00) обладает более низкой потребляемой мощностью, чем предыдущая серия; отличается наибольшим разнообразием типов элементов; является промышленным стандартом.

Улучшенная маломощная ТТЛШ-серия (74ALS00) обладает меньшими временами переключения по сравнению с серией LS. Только в этой серии есть сложные ИС, применяемые в микропроцессорных системах.

Быстродействующая ТТЛШ-серия (74F00) отличается хорошим быстродействием; производится только на нескольких заводах.

Улучшенная ТТЛШ-серия (74AS00) обладает очень короткими временами переключения (1...2 нс), но довольно большими потерями мощности; может использоваться вместо быстродействующих ЭСЛ элементов (ЭСЛ — эмиттерно-связанная логика).

Быстродействующая КМОП-серия (74HC00). Хотя элементы, входящие эту серию, не являются ТТЛ-схемами, они совместимы с ними функционально и по разъемам. Характеристики этих схем можно найти в разделе 8.2.4.

8.2.3.2. Схема базового ТТЛ-элемента

На рис. 8.28 показана структура одного из четырех элементов И-НЕ ТТЛ-серии 7400. При подключении одного из эмиттеров I_1 или I_2 к земле транзистор Q_1 открывается, что приводит к закрытию транзисторов Q_2 и Q_4. База транзистора Q_3 через резистор R_2 соединена с положительным полюсом источника питания. Следовательно, он находится в открытом состоянии, и на вывод схемы Q через резистор R_3 и диод D_1 подается напряжение высокого уровня. Резистор R_3 (150...500 Ом) служит для ограничения тока.

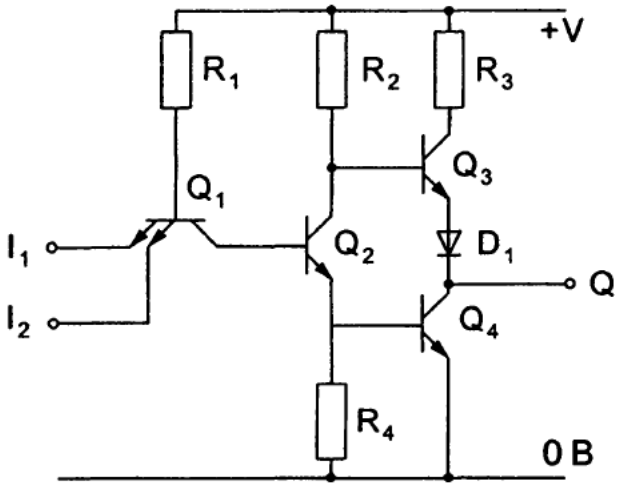


Рис. 8.28. ТТЛ-схема элемента И-НЕ

При положительных напряжениях на входах I_1 и I_2 транзистор Q_1 закрыт, и ток течет не через резистор R_1 и эмиттер, а через переход база–эмиттер транзистора Q_2, что приводит к его открытию, а следовательно, и открытию транзистора Q_4. При этом транзистор Q_4 шунтирует резистор R_4, обеспечивающий обратную связь транзистору Q_2, что резко увеличивает его коэффициент усиления и вызывает полное открытие транзистора Q_4. Очевидно, что при этом на выводе схемы Q будет наблюдаться напряжение низкого уровня.

Структура, состоящая из транзисторов Q_3 и Q_4, а также диода D_1, называется *двухтактным выходным каскадом*.

Рассматриваемая схема базового ТТЛ-элемента имеет следующие свойства:

- При низком уровне напряжения на входе оконечный усилитель обладает низким импедансом.
- При высоком уровне напряжения на входе оконечный усилитель обладает высоким импедансом.
- При высоком уровне напряжения на входе выходной каскад функционально является **источником тока**. Выходной ток ограничивается резистором R_3. При очень большом выходном токе высокий уровень напряжения падает ниже допустимого предела.
- При низком уровне напряжения на входе выходной каскад играет роль **нагрузки**. При этом ограничивающими параметрами являются динамическое сопротивление нижнего выходного транзистора и тепловая нагрузка.
- При использовании двухтактного каскада ТТЛ-выходы не могут быть включены параллельно. В разделе 8.2.6 рассмотрены другие типы выходных каскадов.

Примечание. ТТЛ-схемы некоторых фирм допускают параллельное соединение выходов двух логических элементов. Только при этом на их входы должен быть подан одинаковый сигнал и они должны входить в состав одной схемы.



Рис. 8.29. Входные и выходные токи ТТЛ-элементов (приведенные данные соответствуют LS-серии)

Из приведенных на рис. 8.29 величин можно определить выходную нагрузочную способность (порядка 20).

8.2.4. Семейство КМОП-схем

Существует несколько серий КМОП-схем (КМОП — комплементарный металл-окисел-полупроводник). Приведем их общие черты:

- напряжение питания: +5...+15 В (или 3...18 В);
- очень низкие входные токи;
- в стационарном режиме и на низких частотах очень низкая мощность рассеяния;
- и при высоком, и при низком уровнях напряжений выходные токи достаточно большие.

Но каждая из серий обладает своими характерными чертами (в скобках приводятся примечания для ИС, состоящей из четырёх элементов И-НЕ):

КМОП-серия А (CD4011A) появилась самая первая, в настоящее время почти не используется.

КМОП-серия В (CD4011B) является промышленным стандартом; обладает наибольшим числом разных типов логических элементов. Все параметры ИС, входящих в серию, стандартизированы и не зависят от завода-изготовителя.

МОП-серия с использованием локального окисления (серия LOCMOS) (HEF4011B). Времена переключения в этой серии короче, чем в КМОП-серии В; имеет ступенчатую передаточную характеристику.

Быстродействующая КМОП-серия (74HC00) по разъемам и функционально совместима с аналогичной ТТЛ-серией; обладает меньшими временами переключения и большими выходными токами по сравнению с КМОП-серией В. Мощность рассеяния на частотах до 20 МГц ниже, чем у LS-ТТЛ-серии; от ТТЛ-серии отличается напряжением питания 2...6 В.

Быстродействующая КМОП-серия (74HCT00) является боковой ветвью HC-серии с более ограниченным диапазоном напряжений питания 4,5...5,5 В; по входам совместима с ТТЛ-уровнями напряжения.

Улучшенные быстродействующие КМОП-серии (74AC00 и 74ACT00). Быстродействие лучше, чем в серии HC. Очень высокие выходные токи как при высоком, так и при низком уровнях напряжения (порядка 24 мА). По входам совместима с ТТЛ-уровнями напряжения.

В табл. 8.8 приведены основные параметры КМОП-серий. Как видно из таблицы, они сильно зависят от напряжения питания.

Таблица 8.8. Электрические параметры КМОП-схем

$\theta = 25$ °C		КМОП-схемы				
		HEF4011B			74HC00	74FC00
Напряжение питания, В	V_{CC}	5	10	15	4,5	
Входное напряжение, В	V_{Ilmax}	1,5	3	4	0,9	1,35
	V_{IHmin}	3,5	7	11	3,2	2,0
Выходное напряжение при $I_O < 1$ мкА, мВ	V_{OLmax}	50			100	
	V_{OHmin}	$V_{CC} - 50$ мВ			4,9 В	
Выходной ток, мА	I_{OLmax}	0,4	1,1	3,0	20	24
Задержка распространения сигналов, нс	t_{PLH}	35	16	13	8	5
	t_{PHL}	16	13	12	8	4
Время нарастания-спада при нагрузке 15 пФ, нс	t_{LH}	25	15	11	6	1,5
Входной ток, мкА		< 0,3			0,3	0,1

Задержка распространения сигналов и времена нарастания-спада выходного сигнала сильно зависят от емкости нагрузки. При нагрузке 50 пФ эти времена для серии HEF увеличиваются приблизительно в два раза.

8.2.5. Сравнение ТТЛ- и КМОП-серий

Из-за небольших входных токов ИС КПОМ серии 74 НС их выходная нагрузочная способность практически не зависит от сопротивления нагрузки, а определяется в основном ее емкостью. Максимально допустимой величиной емкости нагрузки обычно считается 5 пФ на один вход логического элемента.

Таблица 8.9. Выходная нагрузочная способность ТТЛ- и КМОП-схем

↓ Вход	ТТЛ-схемы					КМОП-схемы	
	74xx	74LSxx	74Sxx	74ALSxx	74Fxx	74HCxx	74ACxx
74xx	10	5	12	5	12	2	15
74LSxx	20	20	50	20	50	10	60
74Sxx	8	4	10	4	10	2	12
74ALSxx	20	20	50	20	50	20	120
74Fxx	20	13	33	13	33	6	40
74HCxx	> 50						
74ACxx	> 50						

Таблица 8.10. Сравнение ТТЛ- и КМОП-серий

	LS-ТТЛ	КМОП
Скорость переключения, нс	10	40 (5 В)...15 (15 В)
Рассеиваемая мощность	До 3 МГц постоянная, затем растет	Линейно связана с частотой. После 5 МГц выше, чем у LS-ТТЛ
Выходная нагрузочная способность	20	>50
Выходной импеданс, Ом	25 (для низкого уровня)	250

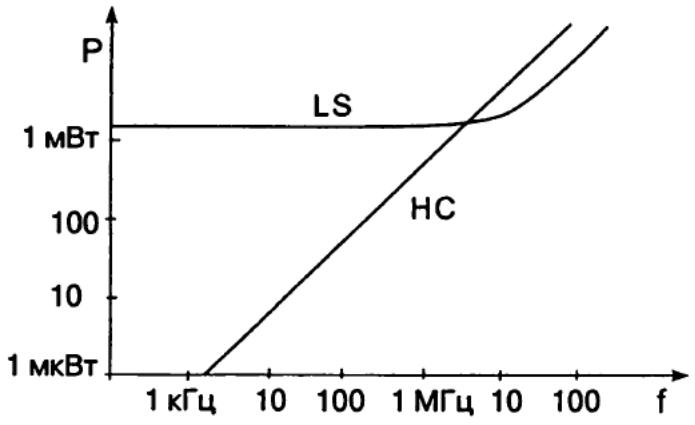


Рис. 8.30. Рассеиваемая мощность в ТТЛ и КМОП ИС

8.2.5.1. Другие семейства логических элементов

На практике кроме ТТЛ и КМОП ИС используются следующие семейства логических элементов:

Семейство ЭСЛ ИС (ЭСЛ — эмиттерно-связанная логика). Поскольку транзисторы не работают в режиме насыщения, времена переключения

составляют менее 1 нс. Технические данные: высокоимпедансные дифференциальные входы, низкоимпедансные выходы, высокая мощность рассеяния (порядка 50 мВт на один логический элемент). ЭСЛ-элементы всегда имеют два выхода: Q и $\overline{Q}$. Токи в них не переключаются, а перенаправляются, что обеспечивает низкий уровень помех на линиях питания. Рабочее напряжение –5,2 В. Быстродействующим схемам требуется дополнительное напряжение питания –2 В.

Применение: в компьютерах и быстродействующих схемах обработки сигналов.

Семейство медленнодействующих логических схем (LSL). ИС с высокой помехоустойчивостью, что достигается повышением напряжения и времени переключения. Для еще большего увеличения времени переключения могут использоваться внешние конденсаторы. Внутренние входные стабилитроны повышают пороговое напряжение до 6 В. При напряжении питания 12 В помехоустойчивость составляет около 5 В, а времена переключения — 150 нс и выше.

Применение: в промышленных системах, работающих в зашумленных условиях.

Семейство РТЛ ИС (РТЛ — резисторно-транзисторная логика): предшественники ДТЛ-схем. Основной недостаток: сильное влияние соседних логических элементов.

Семейство ДТЛ ИС (ДТЛ — диодно-транзисторная логика): предшественники ТТЛ-схем. Объединение по входам осуществляется при помощи диодов.

GaAs ИС. Это не новое семейство логических элементов, а новая технология изготовления транзисторов на основе арсенида галлия. Такие ИС обладают очень малыми временами переключения — порядка 10 пс (= 0,01 нс). По этой же самой технологии реализуются и оптоэлектронные компоненты. Это дает возможность ожидать, что скоро появятся комбинированные оптоэлектронные логические элементы.

8.2.6. Специальные разновидности схем

8.2.6.1. Выходы с открытыми коллекторами

В отличие от двухтактных выходных каскадов коллекторы выходных транзисторов схем *с открытыми коллекторами* не подключаются к источнику питания через второй транзистор (рис. 8.31). КМОП-аналог таких схем — схемы *с открытым стоком*.

Выходы с открытыми коллекторами должны всегда подключаться через резисторы к положительному полюсу источника питания.

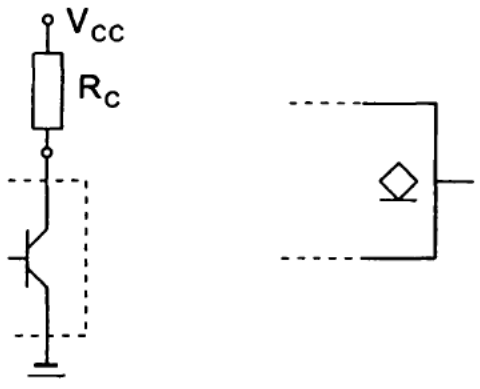


Рис. 8.31. Выходы с открытыми коллекторами и их обозначения

Преимущества:

- Выходы с открытыми коллекторами без проблем можно включать параллельно друг другу (см. также раздел 8.2.6.2).
- На нагрузку может подаваться напряжение, превышающее напряжение питания ИС. Ограничением здесь является максимально допустимое напряжение пробоя выходного транзистора.

8.2.6.2. Монтажное И/ИЛИ

Схема монтажного И получается при соединении двух выходов с открытыми коллекторами (рис. 8.32). Для получения низкого уровня напряжения на общем выводе достаточно, чтобы *один* из транзисторов был открыт. Приведенные ниже таблицы истинности показывают логические уровни напряжения на коллекторах при отдельном переключении каждого из транзисторов:

Y	*X*	*Q*
низкий	низкий	низкий
низкий	высокий	низкий
высокий	низкий	низкий
высокий	высокий	высокий

Y	*X*	*Q*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Y	*X*	*Q*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

При положительной логике схема ведет себя как элемент И (средняя таблица), а при отрицательной — как элемент ИЛИ (правая таблица). Поэтому эта схема и называется схемой монтажного И/ИЛИ.

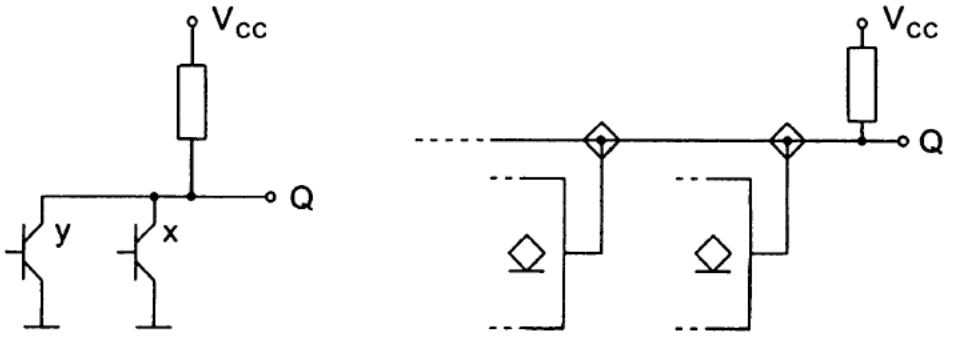


Рис. 8.32. Принцип построения и обозначение схемы монтажного И

Этот принцип позволяет реализовать общую шину, для чего несколько выходов логических элементов с открытыми коллекторами соединяются вместе.

Для обеспечения требуемого уровня напряжения на шине необходимо корректно выбирать величину нагрузочного резистора R_C (рис. 8.33).

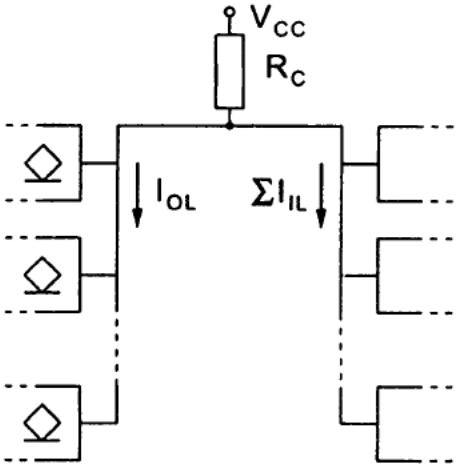


Рис. 8.33. Выбор нагрузочного сопротивления

При высоком уровне напряжения через резистор R_C текут токи выходных транзисторов I_{QH} и входные токи I_{IH}. Величина этого резистора должна быть достаточно маленькой, чтобы уровень выходного напряжения не упал ниже допустимого высокого уровня входного напряжения последующей схемы.

При низком уровне напряжения в худшем случае работает только один транзистор. Величина резистора R_C должна быть достаточно большой, чтобы ток коллектора не достиг значения I_{0Lmax}. Также необходимо помнить, что через этот резистор протекают входные токи I_{IL} подключенных схем.

$$R_{max} = \frac{V_{CC} - 2{,}4\ \text{В}}{K \cdot I_{QH} + N \cdot I_{IH}},$$

$$R_{min} = \frac{V_{CC} - 0{,}4\ \text{В}}{I_{OLmax} - N \cdot |I_{IL}|}.$$

K — количество параллельно соединённых проводов

N — количество параллельно соединённых выводов (коэффициент разветвления по каждому входу = 1)

Примечание. На практике для получения максимальной скорости переключения выбирается наименьшее значение этого сопротивления.

Пример: Для ТТЛ ИС серии 74LS при входных токах $|I_{IL}| < 0{,}4$ мА и максимальном токе коллектора $I_{OL} = 8$ мА выходной ток утечки составляет: $I_{QH} < 250$ мкА. Тогда:

$$R_C = \frac{5\ \text{В} - 0{,}4\ \text{В}}{8\ \text{мА} - N \cdot 0{,}4\ \text{мА}} = \frac{4{,}6\ \text{В}}{(20 - N) \cdot 0{,}4\ \text{мА}}.$$

8.2.6.3. Выход с тремя состояниями

В схемах с выходами с тремя состояниями *оба* транзистора оконечного двухтактного каскада при помощи специального сигнала разрешения могут быть переведены в высокоимпедансное состояние. Такие схемы используются в системах с общей шиной (рис. 8.34). Системная шина воспринимает схемы в высокоимпедансном состоянии как неподключенные к ней.

Три выходных состояния обозначаются как H, L и Z.

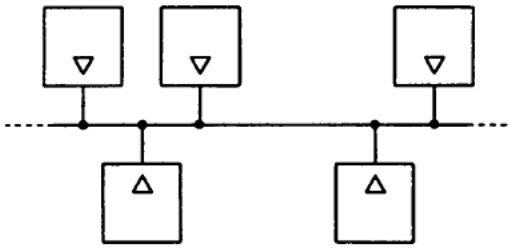


Рис. 8.34. Подключение нескольких устройств с тремя выходными состояниями к системной шине

8.2.6.4. Использование триггера Шмитта во входных цепях логических элементов

В зависимости от уровня выходного напряжения (высокого или низкого) устройство с триггером Шмитта во входной цепи обладает одним из двух возможных пороговых напряжений, поскольку передаточные характеристики триггера Шмитта при его включении и выключении отличаются друг от друга. Этот эффект называется **гистерезисом** (рис. 8.35). Для ТТЛ-схем гистерезис, как правило, составляет порядка 0,8 В, а для КМОП-элементов он зависит от приложенного напряжения питания и определяется следующим выражением: $V_H = 0{,}27 \cdot V_{CC} - 0{,}55$ В.

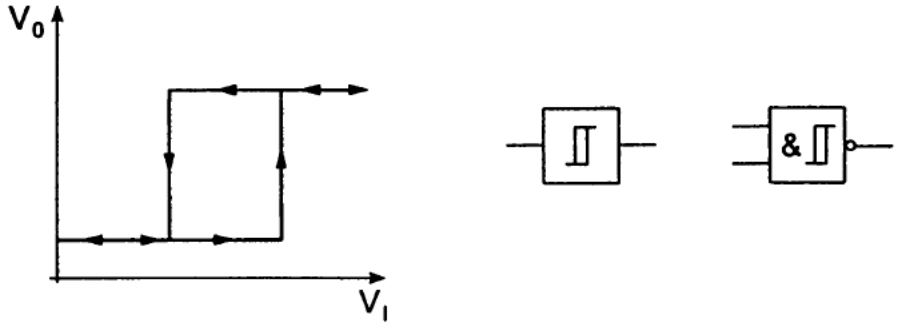
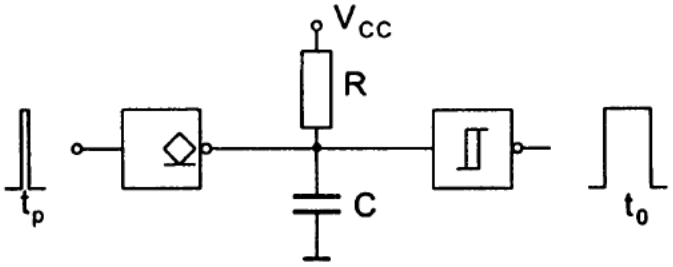


Рис. 8.35. Передаточная характеристика триггера Шмитта и обозначения схем с триггером Шмитта во входных цепях

Применение

- Использование триггеров Шмитта во входных цепях позволяет сократить время переходных процессов.
- При объединении *RC*-цепочки и элемента с триггером Шмитта (рис. 8.36) можно получить либо схему расширения входного импульса, либо генератор.



$$t_0 \approx t_p + 0{,}5 \cdot RC \text{ для ТТЛ-схем}$$

Рис. 8.36. Схема расширения входного импульса при помощи логического элемента с триггером Шмитта. В этой схеме происходит задержка заднего фронта импульса

8.3. Комбинационные схемы и последовательная логика

- **Комбинационная схема** — это логическая схема, сигнал на выходе которой определяется только уровнями сигналов на ее входах. Такой подход построения схем называется **комбинационной логикой**.
- **Последовательные схемы** обладают внутренней памятью. В них выходные сигналы зависят не только от текущих, но и от предыдущих уровней входных сигналов. Такой подход называется последовательной логикой.

8.3.1. Обозначение внутренних зависимостей

Здесь приведены обозначения внутренних зависимостей, стандартизированные правилами DIN 40 900 (часть 12). Эти зависимости определяют взаимоотношения внешних сигналов в сложных цифровых схемах (рис. 8.37). Следует различать управляющие и подчиненные связи. Для этого применяются следующие правила:

- Каждый вход маркируется соответствующим символом, указанным в описании схемы.
- Входы, оказывающие влияние на другие входы схем, обозначаются буквами, указывающими на тип этого воздействия. Рядом с буквой указывается обозначение входов, подверженных этому воздействию.
- Различают следующие обозначения зависимостей (табл. 8.11):

G-зависимость соответствует логическому элементу И, связывающему несколько входных переменных, напротив которых стоит соответствующий идентификатор: 1 или $\overline{1}$. G-вход в нулевом состоянии сбрасывает уровни связанных с ним входов 1 в ноль, а в единичном состоянии оставляет их неизменными. В случае входов с идентификатором $\overline{1}$ управление происходит с точностью до наоборот.

V-зависимость соответствует логическому элементу ИЛИ. V-вход в единичном состоянии устанавливает уровни связанных с ним входов в единицу, а в нулевом состоянии оставляет их неизменными.

N-зависимость соответствует логическому элементу ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ. Это позволяет реализовать управляемый инвертор. N-вход в единичном состоянии инвертирует уровни сигналов связанных с ним входов, а в нулевом состоянии оставляет их неизменными.

Z-зависимость. Эта функция работает как внутреннее соединение. Связанные Z-зависимостью входы имеют одинаковые логические значения. Z-функция часто объединяется с другими зависимостями.

C-зависимость реализует управляющую функцию. C-вход в нулевом состоянии блокирует все связанные с ним входы. Этот вход часто используется в качестве разрешающего или синхронизирующего входа.

S-зависимость. При комбинации $S = 1$, $R = 0$ все связанные со входом S элементы устанавливаются в единичное состояние.

R-зависимость. При комбинации $S = 0$, $R = 1$ все связанные со входом R элементы устанавливаются в нулевое состояние.

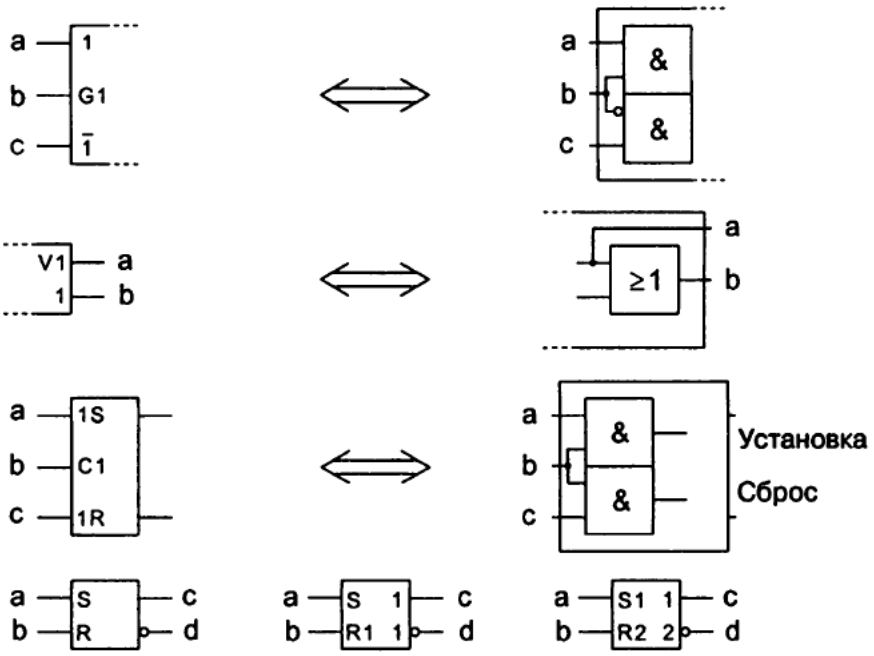
EN-зависимость носит характер разрешения. Когда на входе EN установлена 1, связанные с ним входы находятся в активном состоянии. Входы EN могут управлять выходами с открытыми коллекторами и трехуровневыми выходными цепями. Такие выходы устанавливаются в высокоимпедансное состояние при нулевом сигнале на управляющих входах.

A-зависимость обозначает функцию выбора адреса (например, в запоминающих устройствах). Управляющие входы имеют вес, определяемый степенью числа 2. Входы A оказывают на результирующий адрес такое же воздействие, как и сигнал разрешения.

M-зависимость обозначает функцию переключения режимов работы схем (например, переключение направления счета счетчиков).

T-зависимость. Когда на управляющем входе T установлен высокий уровень напряжения, связанные с ним сигналы меняют свое состояние.

CT-зависимость обозначает функцию определенного действия над содержимым регистра или состоянием счетчика (например, функцию переноса).



a	*b*	*c*	*d*
0	0	c_{-1}	$\overline{c}_{-1}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	?	?

a	*b*	*c*	*d*
0	0	c_{-1}	$\overline{c}_{-1}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

a	*b*	*c*	*d*
0	0	c_{-1}	$\overline{c}_{-1}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Рис. 8.37. Пояснение используемых зависимостей:
c_{-1} — сохраняется предыдущее состояние;
? — неопределенное состояние

8.3.1.1. Обозначение логических функций (обзор)

Таблица 8.11. Обозначение логических функций

Символ	Функция	Действие при 1/0
A	Адрес	Адрес выбран / не выбран
C	Синхронизация, управление	Разрешение / запрет
CT	Работа с данными	Работа с данными / входы блокированы
EN	Разрешение	Возможность работы / выходы в высокоимпедансном состоянии
G	И	Состояние не меняется / состояние = 0
M	Режим работы	Режим выбран / не выбран
N	Управляемая инверсия	Инвертирование / нет инвертирования
R	Сброс	Сброс при $R = 1$, $S = 0$ / нет реакции
S	Установка	Установка при $R = 0$, $S = 1$ / нет реакции
T	Переключение	Состояние меняется на противоположное / остается неизменным
V	ИЛИ	Состояние = 1 / состояние не меняется
Z	Установка входов	Состояние = 1 / состояние = 0

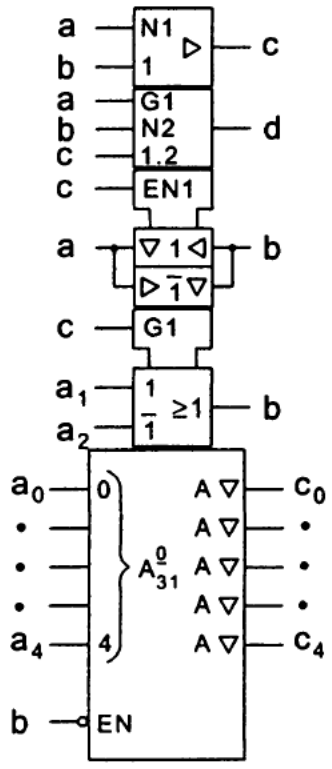
8.3.2. Символы, используемые в комбинационных и последовательных логических схемах

На рис. 8.38 показано несколько примеров использования условных обозначений логических функций. Первый пример иллюстрирует буфер, выходной сигнал которого инвертируется при подаче соответствующего управляющего сигнала. Второй пример показывает, как можно объединить несколько логических функций. Логическая последовательность определяется числами при соответствующих входах. В третьем примере представлен двунаправленный буфер, выходы которого переключаются в высокоимпедансное состояние при помощи управляющего сигнала, поступающего на вход *c*, что позволяет задавать направление передачи данных.

Четвертый пример иллюстрирует схему мультиплексора на два входа. Переменная *c* подается на управляющий блок, реализованный на основе логического элемента И, задающего, какой из входов необходимо подключить к выходу схемы.

Пятый пример — это пример постоянного запоминающего устройства (ПЗУ): 32×4 разряда. Пять адресных линий $a_0 ... a_4$ позволяют выбрать адрес конкретной ячейки от 0 до 31. Четыре выхода ПЗУ управляются соответствующим сигналом на разрешающем входе.

В последнем примере показан счетчик, считающий от 0 до 7. Счетчик меняет свое состояние при поступлении импульсов на вход CLK. Как правило, счетчик реагирует на фронты импульсов. В скобках указано двоичное значение соответствующего выходного разряда. Старший разряд a_4 активируется только тогда, когда значение счетчика становится равным 7 (CT = 7).



$$c = a \leftrightarrow b$$

$$d = (c \cdot a) \leftrightarrow b$$

при $c = 0$: a — вход, b — выход,
при $c = 1$: a — выход, b — вход

$$b = (a_1 \cdot c) + (a_2 \cdot \bar{c})$$

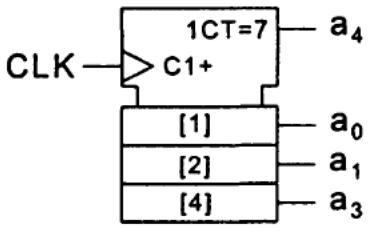


Рис. 8.38. Примеры обозначения логических схем

8.4. Примеры комбинационных схем

8.4.1. Дешифратор 1:*n*

В любой момент времени **дешифратор** активизирует только *один* из *n* возможных выходов. Выбор осуществляется при помощи управляющих сигналов, поступающих на соответствующие входы. Активное состояние часто определяется низким уровнем напряжения. Дешифраторы 1:10 иногда называют **преобразователями двоично-десятичного кода в десятичное число**.

Пример. На рис. 8.39 приведены таблица истинности и схема дешифратора 1:4.

A_1	A_2	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

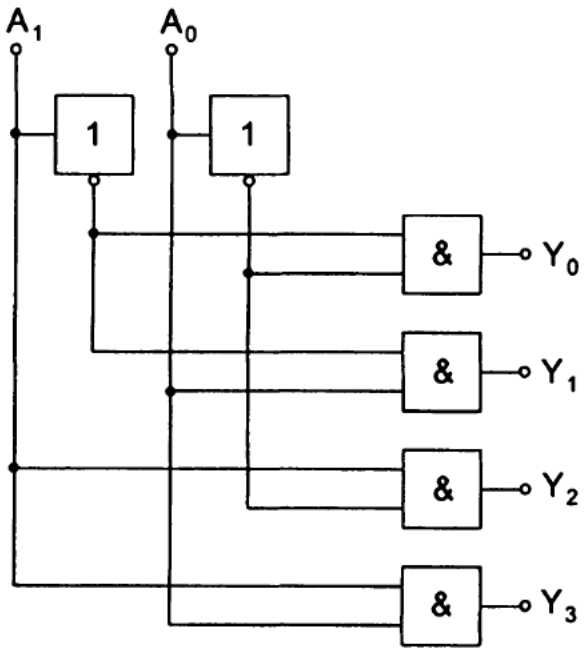


Рис. 8.39. Таблица истинности и схема дешифратора 1:4

Применение: преобразование кодов, выбор ячеек памяти в микропроцессорных системах.

8.4.2. Мультиплексор и демультиплексор

Мультиплексоры — это схемы выборки с электронным управлением.

Мультиплексор подключает один из *n* входных сигналов к *единственной* выходной линии. Выбор подключаемого входа осуществляется при помощи адреса, передаваемого по специальным линиям (рис. 8.40). Мультиплексоры иногда называют **селекторами данных**.

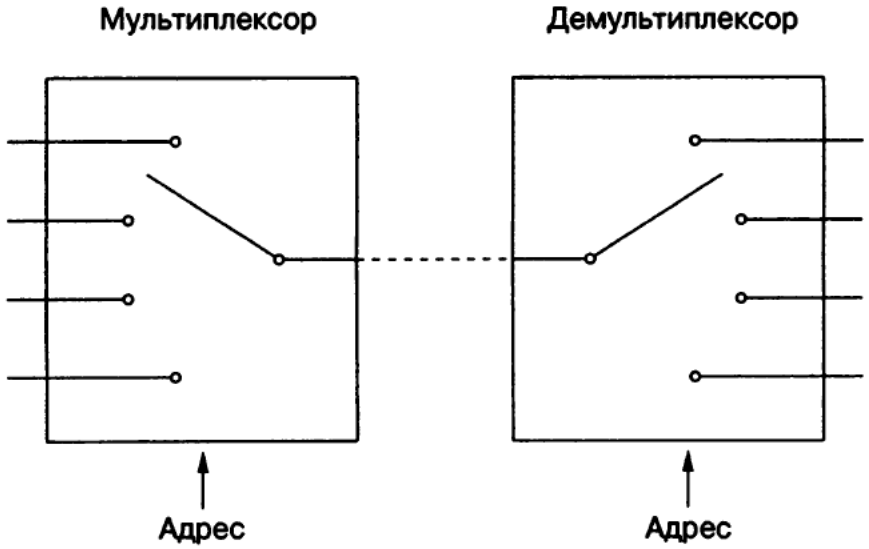


Рис. 8.40. Мультиплексор и демультиплексор

Демультиплексор является устройством, функционально противоположным мультиплексору (рис. 8.41). Он подключает *единственный* входной сигнал к одному из *n* выходов, определяемому адресом.

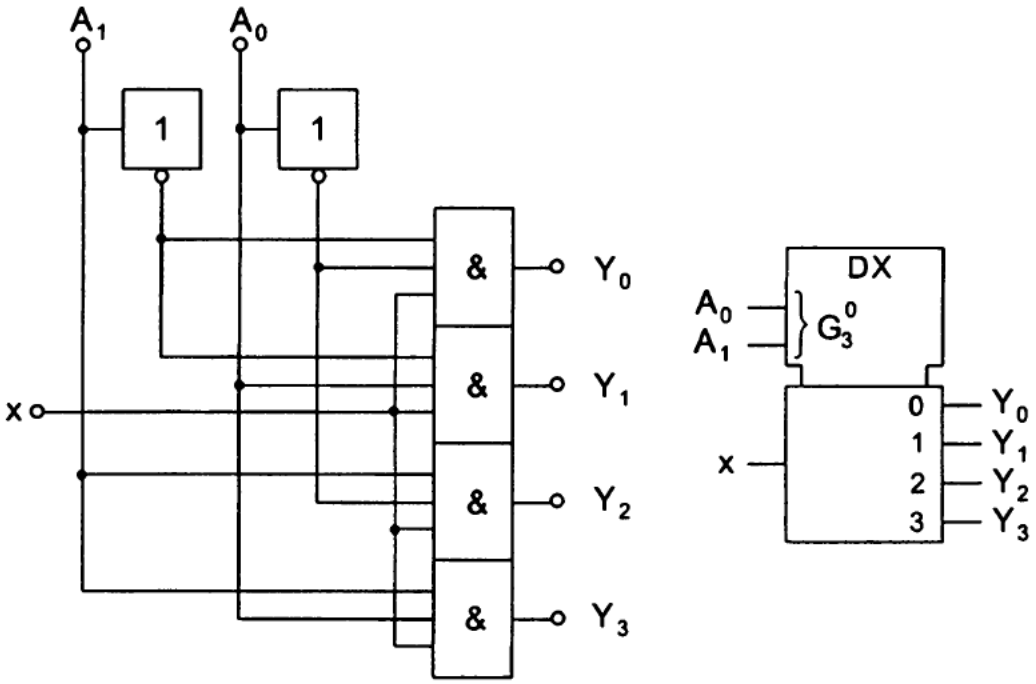


Рис. 8.41. Схема демультиплексора и ее обозначение

Предшественником демультплексора является дешифратор 1:*n*. Выбранный выход повторяет уровень напряжения входного сигнала.

- Иногда мультиплексоры используются для реализации произвольных логических функций.

Пример. Требуется разработать схему для реализации логической функции с четырьмя входными переменными. Логическая функция задается таблицей истинности.

Решение. Входные переменные подаются на четыре адресные линии мультиплексора на 16 входов. На каждом из 16 входов устанавливается высокий

или низкий уровень напряжения в соответствии с таблицей истинности. Таким образом можно реализовать практически любую логическую функцию с четырьмя переменными.

8.4.2.1. Обзор схем

Мультиплексор		
КМОП	ТТЛ	Входы
4515	74150	16
4512	74151	8
4539	74153	2×4

Демультиплексор		
Выходы	КМОП	ТТЛ
16	4514	74154
8	74 HCT 138	74138
2×4	74 HCT 139	74139

8.5. Триггеры

Триггеры являются **бистабильными** переключателями. Говорят, что триггер **установлен в единичное состояние,** когда на его выходе появляется напряжение высокого уровня. В противном случае триггер считается **сброшенным**.

8.5.1. Применение триггеров

Триггеры используются в следующих устройствах:
- регистрах (см. раздел 8.7),
- сдвиговых регистрах (см. раздел 8.7),
- запоминающих устройствах (см. раздел 8.6),
- счетчиках (см. раздел 8.8),
- делителях частоты,
- регистрах памяти (см. раздел 8.9).

8.5.2. RS-триггер

Этот вид триггеров реализуется на основе двух инверторов с перекрестными обратными связями. RS-триггер, показанный на рис. 8.42, состоит из двух элементов ИЛИ-НЕ. Входы триггера обозначаются S (установка) и R (сброс). Его работа описывается следующей таблицей истинности:

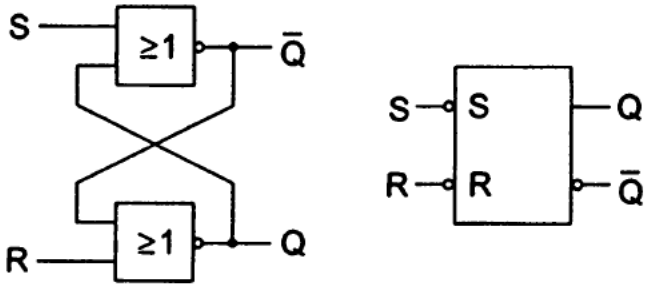


Рис. 8.42. RS-триггер и его обозначение

S	R	Q	$\bar{Q}$
0	0	Q_{-1}	$\bar{Q}_{-1}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Q_{-1} — предыдущее состояние

При $S = 0$, $R = 0$ состояние триггера не меняется, этот режим называется режимом хранения информации. При $S = R = 1$ оба выхода триггера должны равняться нулю, что *логически* невозможно, поэтому такое состояние называется неопределенным или запрещенным, и таких ситуаций надо избегать. Режим $S = 1$, $R = 0$, является режимом записи логической единицы (режимом установки), а режим $S = 0$, $R = 1$ — режимом записи логического нуля (режимом сброса).

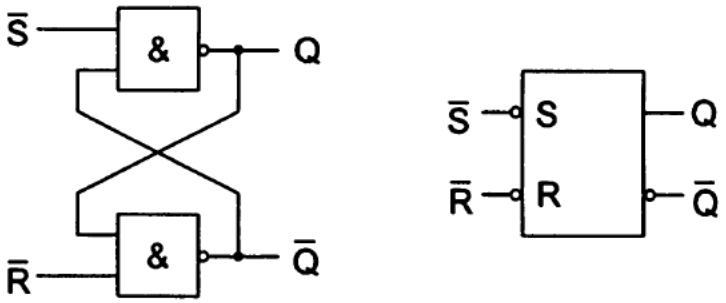


Рис. 8.43. $\overline{RS}$ -триггер, реализованный на элементах И-НЕ, и его обозначение

На рис. 8.43 показан $\overline{RS}$ -триггер (или триггер с инверсными входами), переключение состояний которого осуществляется сигналами низкого уровня. Для такого триггера таблица истинности имеет вид:

$\bar{S}$	$\bar{R}$	Q	$\bar{Q}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Q_{-1}	$\bar{Q}_{-1}$

Q_{-1} — предыдущее состояние

8.5.2.1. RS-триггер со входом синхронизации

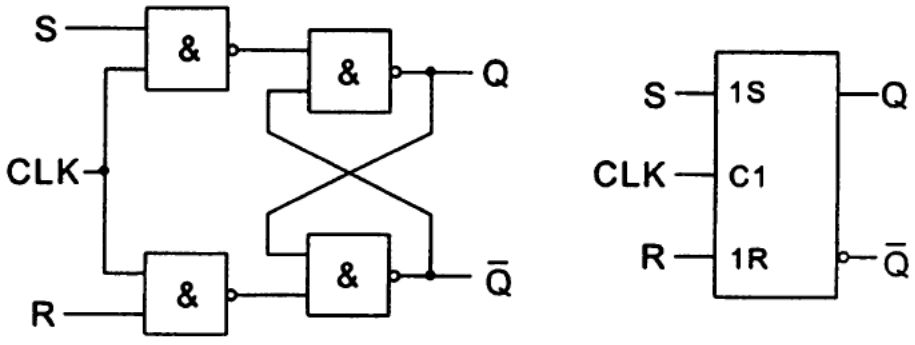


Рис. 8.44. Синхронный RS-триггер и его обозначение

На рис. 8.44 показана модификация RS-триггера, называемая **управляемым или синхронным RS-триггером**. Такой триггер меняет свое состояние, только когда на вход синхронизации CLK подан сигнал высокого уровня. При сигнале на этом входе низкого уровня триггер сохраняет свое предыдущее состояние. Для управляемого RS-триггера характерна следующая таблица истинности.

CLK	S	R	Q	$\bar{Q}$	
1	0	0	Q_{-1}	$\bar{Q}_{-1}$	как RS-триггер
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	?	?	
0	X	X	Q_{-1}	$\bar{Q}_{-1}$	режим хранения информации

8.5.3. D-триггер

В D-триггере при помощи дополнительных логических элементов удалось избежать запрещенной ситуации, когда состояние триггера оказывается неопределенно. Таблица истинности в этом случае имеет вид:

CLK	D	Q	$\bar{Q}$	
0	X	Q_{-1}	$\bar{Q}_{-1}$	режим хранения информации
1	0	0	1	режим записи информации
1	1	1	0	

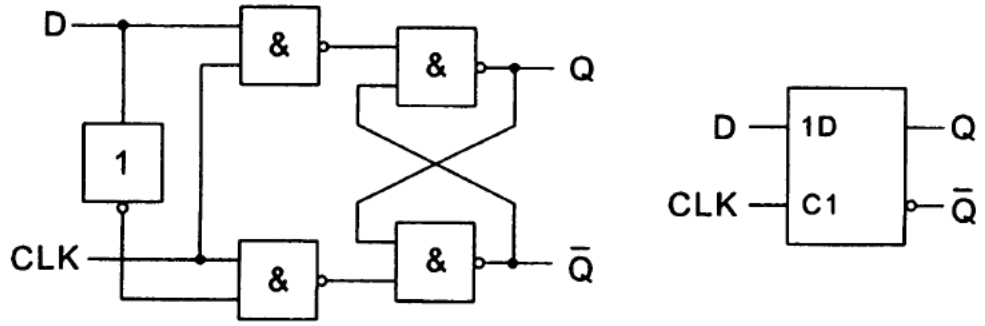


Рис. 8.45. D-триггер и его обозначение

При высоком уровне сигнала на входе синхронизации ($CLK = 1$) триггер является **прозрачным** для входных данных, т. е. выходной сигнал повторяет сигнал на входе D. При низком уровне сигнала на входе CLK состояние триггера устойчиво и не зависит от изменений уровня сигнала на входе D (рис. 8.45). Поэтому D-триггер часто называют *триггером-защелкой*.

8.5.4. Синхронный двухступенчатый триггер

При последовательном соединении двух D-триггеров пропадает их прозрачность для входного сигнала. Для передачи входных сигналов на выход схемы триггеры тактируют взаимно дополняющей парой синхросигналов. Такой комбинированный триггер получил название *синхронного двухступенчатого триггера*. Выходной сигнал первого (ведущего) D-триггера Q' повторяет входной сигнал до тех пор, пока сигнал $CLK = 1$. В это время второй (*ведомый*) триггер остается закрытым. Как только сигнал CLK становится равным нулю, первый D-триггер запирается, и выходной сигнал второго триггера Q повторяет сигнал Q'.

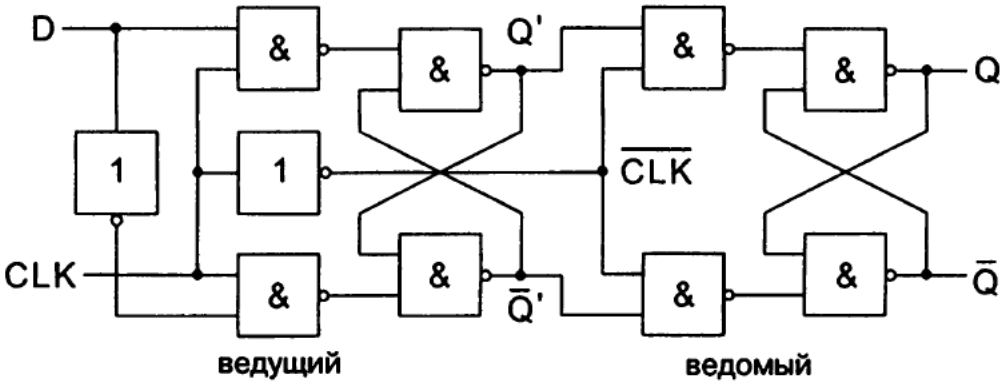


Рис. 8.46. D-триггер, запускаемый фронтом синхросигнала

На рис. 8.47 показан двухступенчатый триггер, реализованный на основе двух RS-триггеров, попеременно блокируемых комплементарными синхросигналами. Когда $CLK = 1$, состояние первого триггера определяется сигналами на входах R и S. При $CLK = 0$, ведущий триггер запирается и сохраняет состояние, которое было на нем до смены полярности синхросигнала. При этом на вход синхронизации ведомого триггера поступает сигнал $\overline{CLK} = 1$, и он становится прозрачным для входных сигналов. Следовательно, его выход повторяет состояние первого триггера. Но поскольку для RS-триггеров состояние $R = S = 1$ является запрещенным, выходной сигнал такого двухтактного триггера также не определен для любого момента времени.

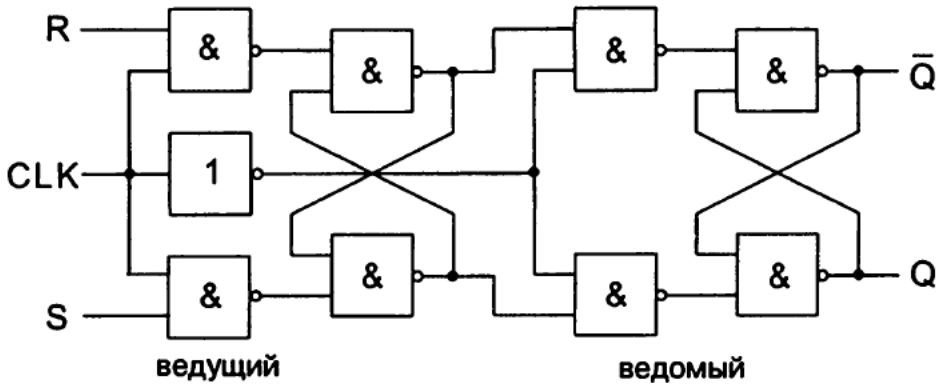


Рис. 8.47. Двухступенчатый RS-триггер

Двухступенчатые триггеры иногда называют **тригтерами со счетным входом** или **Т-триггерами**. Они часто используются для деления частоты входной последовательности импульсов на два, т. е. переключение триггера в новое состояние происходит на задний или передний фронт каждого входного импульса.

8.5.5. JK-триггер

Состояние неопределенности в JK-триггере преодолевается при помощи обратных связей, объединяющих выходы Q и $\overline{Q}$ со внутренними входами схемы (рис. 8.48). Входы триггера обозначаются буквами J и K. Информация, считанная при положительном перепаде напряжений, появляется на выходе только при очередном отрицательном перепаде. Этот эффект называется **задержкой**

выходного сигнала, что обозначается знаком «¬» рядом с соответствующим выводом схемы. На рис. 8.49 приведена таблица истинности, справедливая для синхросигнала $CLK = 010$.

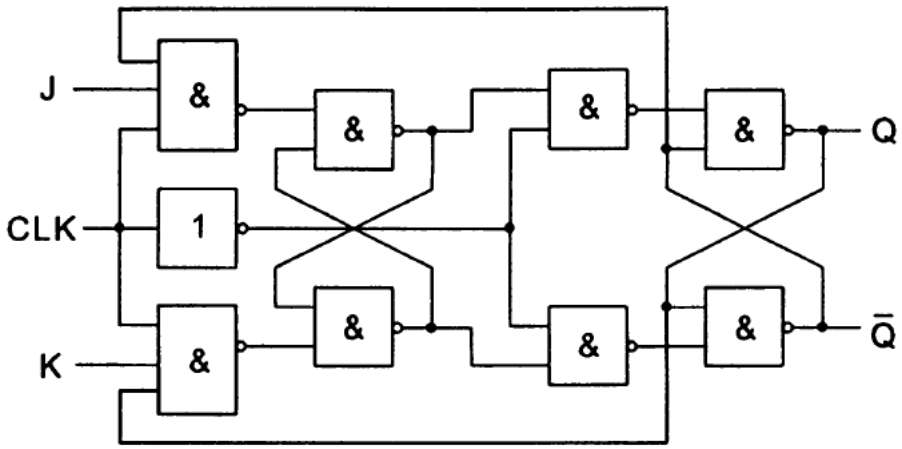


Рис. 8.48. Тактируемый двухступенчатый JK-триггер

J	K	Q
0	0	Q_{-1}
0	1	0
1	0	1
1	1	$\bar{Q}_{-1}$

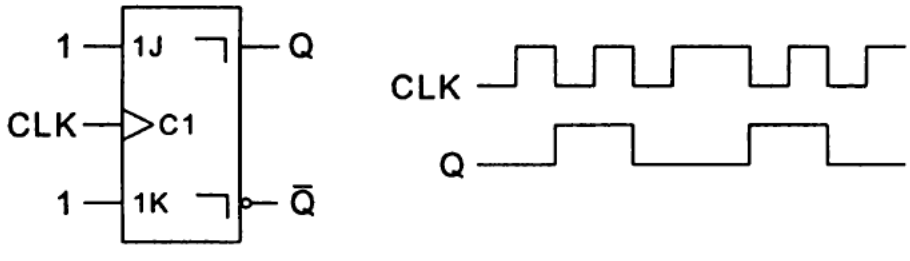


Рис. 8.49. Таблица истинности для JK-триггера и схема его использования в качестве двоичного делителя

При входных сигналах $J = K = 0$ состояние триггера не меняется.

Если на входы J и K поданы сигналы со взаимно противоположными уровнями напряжений (0/1 или 1/0), то по отрицательному перепаду управляющего импульса на входе CLK триггер переключается в состояние, соответствующее сигналу на входе J.

При одновременной подаче на входы J и K напряжений высокого уровня в момент прихода синхроимпульса триггер переключается в состояние, противоположное предыдущему, т. е. работает как делитель частоты (рис. 8.49).

Часто JK-триггеры снабжены дополнительными входами, позволяющими осуществлять *асинхронный* сброс и установку в единичное состояние. Эти входы обладают более высоким приоритетом, чем входы J и K.

Примечание. Пока на вход CLK подан сигнал высокого уровня, триггер, как правило, не меняет свое состояние. На триггеры с блокировкой входных данных это ограничение не распространяется.

Универсальность JK-триггера состоит в том, что он может выполнять функции RS-, D- и T-триггеров. Например, при объединении входов J, K и CLK получается T-триггер, переключаемый каждым входным импульсом.

8.5.6. Режимы работы триггеров

По режимам работы триггеры делятся следующим образом:

- **асинхронные (нетактируемые) триггеры.** Их состояние определяется только уровнями сигналов на входах сброса и установки;
- **синхронные (тактируемые) триггеры.** Они меняют свое состояние только в момент изменения сигнала на входе CLK;
- **триггеры, тактируемые уровнем напряжения.** Передача информации в них определяется уровнем напряжения на входе CLK;
- **триггеры, тактируемые перепадом напряжения.** Передача информации в них определяется фронтами (нарастанием или спадом) управляющего сигнала.

8.5.7. Обозначения в схемах триггеров

Ниже приведены обозначения, установленные правилами DIN 40 900 (часть 12).



Прямой динамический вход. Триггер срабатывает по фронту входного импульса, т. е. на перепад напряжений на входе CLK с 0 на 1



Инверсный динамический вход. Триггер срабатывает по срезу входного импульса, т. е. на перепад напряжений на входе CLK с 1 на 0



Динамический вход с индикатором полярности. Триггер срабатывает только на перепад напряжений на входе CLK с высокого на низкий уровень.
Примечание. В триггерах с динамическим входом информация записывается только в течение перепада напряжения на входе CLK



Задержка выходного сигнала. Передача информации на выход схемы происходит по заднему фронту управляющего сигнала, в результате чего появляется задержка по времени.
Примечание. В таких случаях в течение длительности управляющего сигнала состояние сигналов на входах триггера не должно меняться



D-вход. Триггер запоминает уровень сигналов, поданных на этот вход.
Примечание. Состояние этого входа всегда зависит от метода синхронизации триггера



J-вход. При подаче на этот вход напряжения высокого уровня триггер устанавливается в единичное состояние. Низкий уровень напряжения не оказывает влияния на состояние триггера



K-вход. При подаче на этот вход напряжения высокого уровня триггер сбрасывается. Низкий уровень напряжения не оказывает влияния на состояние триггера.
Примечание. При одновременной подаче на входы J и K напряжений высокого уровня триггер переключается в состояние, противоположное предыдущему



R-вход (сброс). При подаче на этот вход напряжения высокого уровня триггер сбрасывается. Низкий уровень напряжения не оказывает влияния на состояние триггера



S-вход (установка). При подаче на этот вход напряжения высокого уровня триггер устанавливается в единичное состояние. Низкий уровень напряжения не оказывает влияния на состояние триггера.
Примечание. Ситуация $R = S = 1$ является неопределенной

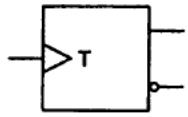
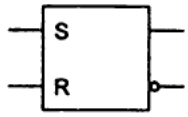
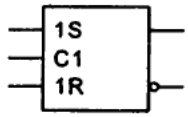
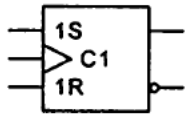
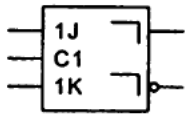
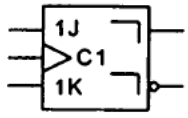
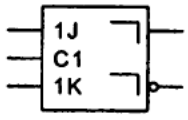
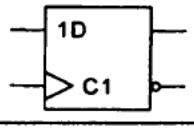


T-вход (вход переключения). При подаче на этот вход напряжения высокого уровня триггер переключается в состояние, противоположное предыдущему. Низкий уровень напряжения не оказывает влияния на состояние триггера

8.5.8. Триггеры (обзор)

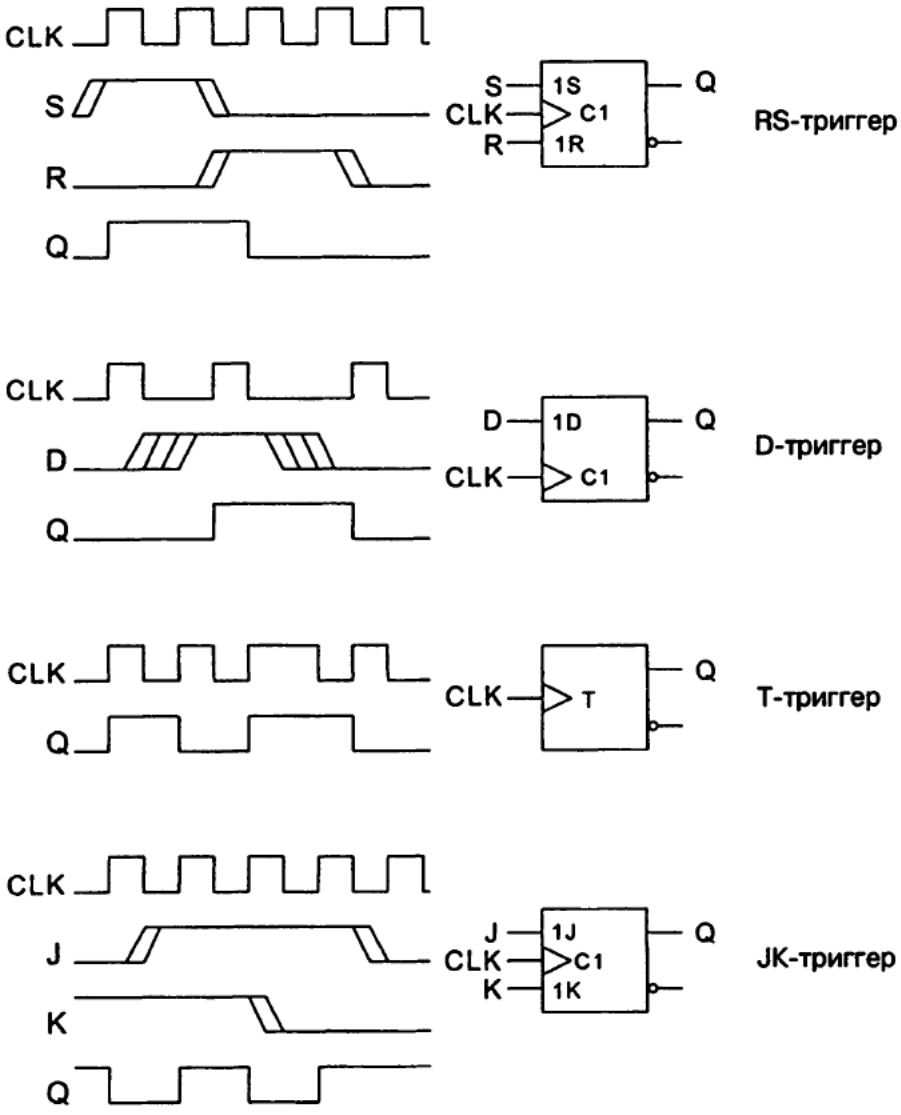
В табл. 8.12 приведены наиболее популярные разновидности триггеров.

Таблица 8.12. Типы триггеров

Обозначение схемы	Триггер	Характеристика
	T-триггер	Синхронный, тактируется перепадом напряжения
	RS-триггер	Асинхронный, переключается при соответствующих уровнях информационных сигналов
		Синхронный, переключается только при одном уровне напряжения на управляющем входе
		Синхронный, тактируется перепадом напряжения
	JK-триггер	Синхронный, переключается при двух уровнях напряжения на управляющем входе
		Синхронный, переключается двумя фронтами напряжения на управляющем входе
	D-триггер	Синхронный, переключается только при одном уровне напряжения на управляющем входе
		Синхронный, тактируется перепадом напряжения

8.5.9. Триггеры, тактируемые перепадом напряжения (обзор)

Триггеры, тактируемые перепадом напряжения, позволяют проектировать легко читаемые последовательные схемы, поэтому они часто используются в программируемых логических устройствах (ПЛУ). На рис. 8.50 показаны временные диаграммы четырех типов триггеров, тактируемых перепадом напряжения. Все диаграммы приведены для случая синхронизации **по положительному перепаду напряжения**.



CLK — вход синхронизации, S — установка, R — сброс, J и K — входы

Рис. 8.50. Временные диаграммы четырех типов триггеров, тактируемых перепадом напряжения

RS-триггер устанавливается в единичное положение при положительном перепаде напряжения синхросигнала, если при этом на вход S подан сигнал высокого уровня. Повторный приход синхроимпульсов не приводит к смене выходного состояния триггера. Триггер переходит в нулевое состояние при положительном перепаде напряжения синхросигнала, если при этом на вход R подан сигнал высокого уровня. Ситуация, при которой на оба входа R и

S поданы сигналы высокого уровня, является запрещенной. Все остальные комбинации уровней сигналов считаются разрешенными.

D-триггер при каждом положительном перепаде напряжения синхросигнала устанавливается в состояние, повторяющее уровень сигнала на входе D. Наклонные фронты сигнала на линии данных, показанные на временной диаграмме, указывают на то, что для корректного функционирования схемы не требуется проводить ее прецизионную синхронизацию.

T-триггер производит деление последовательности синхросигналов на 2. При относительно постоянной частоте синхронизации этот триггер называется **делителем частоты.**

Поведение **JK-триггера**, тактируемого перепадом напряжения, определяется сигналами на его асинхронных входах J и K. При $J = K = 1$ триггер работает как T-триггер, а при $J = K = 0$ он повторяет свое предыдущее состояние.

Триггеры являются **запоминающими элементами**. Поэтому в таблицу истинности необходимо включать состояния триггера перед приходом переключающих синхроимпульсов. Эти состояния обозначаются как Q_{-1}. По таблице истинности строится **таблица переходов триггера**, которая позволяет определить все возможные переходы триггера из состояния Q_{-1} в состояние Q для заданных комбинаций входных сигналов. Выходной сигнал Q *после* соответствующего перехода можно определить в виде функции его предыдущего состояния и управляющих сигналов. Такая функция называется **характеристическим выражением** данного логического элемента.

8.5.10. Разработка триггеров, тактируемых перепадом напряжения

При построении схем ПЛУ часто бывает необходимо реализовывать триггеры, тактируемые перепадом напряжения, на основе простых логических элементов. В этом разделе показано, как это можно сделать.

RS-триггер, тактируемый перепадом напряжения

Поскольку несколько комбинаций сигналов могут привести к одному и тому же переходу $Q_{-1} \to Q$, в таблице переходов триггера в одном ряду часто находится более одного набора вариаций.

- Характеристическое выражение RS-триггера имеет вид:

$$Q = S + (\overline{R} \cdot Q_{-1}) = S + \overline{R} \cdot Q_{-1}.$$

Во избежание неопределенности необходимо учитывать условие $S \cdot R = 0$.

RS-триггер			
R	S	Q_{-1}	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	×	1
1	0	×	0
1	1	×	?

× — не имеет значения;
? — неопределенное состояние

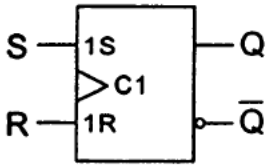


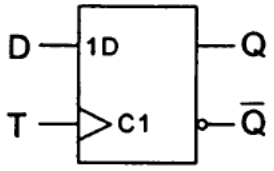
Таблица переходов			
Q_{-1}	Q	R	S
0	0	0	0
		1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
		0	1

Компактная форма			
Q_{-1}	Q	R	S
0	0	×	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	×

D-триггер, тактируемый перепадом напряжения

D-триггер		
D	Q_{-1}	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Таблица переходов		
Q_{-1}	Q	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



- Характеристическое выражение для D-триггера имеет вид: $Q = D$.

D-триггер				
Clear	*Preset*	D	Q_{-1}	Q
0	0	0	0	0
		0	1	0
		1	0	1
		1	1	1
0	1	×	×	1
1	0	×	×	0
1	1	×	×	?

× — не имеет значения
? — неопределенное состояние

Иногда входы Preset (предустановка) и Clear (очистка) имеют больший приоритет, чем входы данных. Соответствующие сигналы на асинхронных входах Preset и Clear моментально изменяют выходной сигнал, тогда как сигналы на синхронных входах воздействуют на уровень выходного напряжения только при следующем перепаде напряжения на входе синхронизации, т. е. при следующем тактовом импульсе.

T-триггер, тактируемый перепадом напряжения

Для входов Preset и Clear T-триггера справедлива следующая таблица истинности:

T-триггер			
Clear	*Preset*	Q_{-1}	Q
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	×	1
1	0	×	0
1	1	×	?

× — не имеет значения
? — неопределенное состояние

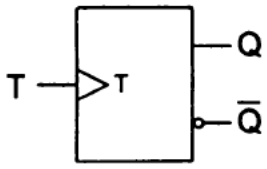


Таблица переходов			
Q_{-1}	Q	*Clear*	*Preset*
0	0	1	0
0	1	0	0
		0	1
1	0	0	0
		1	0
1	1	0	1

Компактная форма			
Q_{-1}	Q	*Clear*	*Preset*
0	0	1	0
0	1	0	×
1	0	×	0
1	1	0	1

- Характеристическое выражение для Т-триггера имеет вид:

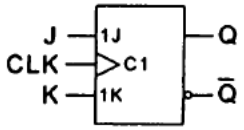
$$Q = (\overline{Q_{-1}} \cdot \overline{Clear}) + Preset = \overline{Q_{-1}} \cdot \overline{Clear} + Preset$$

при выполнении условия, что $Clear \cdot Preset = 0$.

JK-триггер, тактируемый перепадом напряжения

JK-триггер			
J	*K*	Q_{-1}	*Q*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	×	0
1	0	×	1
1	1	0	1
1	1	1	0

× — не имеет значения
? — неопределенное состояние



Для триггера с дополнительными входами Preset и Clear таблица переходов принимает вид:

JK-триггер					
Clear	*Preset*	*J*	*K*	Q_{-1}	*Q*
0	0	0	0	0	0
		0	0	1	1
		0	1	×	0
		1	0	×	1
		1	1	0	1
		1	1	1	0
0	1	×	×	×	1
1	0	×	×	×	0
1	1	×	×	×	?

× — не имеет значения
? — неопределенное состояние

Таблица переходов			
Q_{-1}	Q	*J*	*K*
0	0	0	0
		0	1
0	1	1	0
		1	1
1	0	0	1
		1	1
1	1	0	0
		1	0

Компактная форма			
Q_{-1}	Q	*J*	*K*
0	0	0	×
0	1	1	×
1	0	×	1
1	1	×	0

Характеристическое выражение для JK-триггера имеет вид:

$$Q = (J \cdot \bar{Q}_{-1}) + (\bar{K} \cdot Q_{-1}) = J \cdot \bar{Q}_{-1} + \bar{K} \cdot Q_{-1}.$$

8.5.11. Схемы триггеров (обзор)

ТТЛ	Функция	КМОП
74118	Шесть RS-триггеров	4042 [1]
7474 [2]	Два D-триггера	4013
7475 [2]	Четыре D-триггера	4042
7473 [2]	Два JK-триггера	
74107 [2]	Два JK-триггера	
7476 [2]	Два двухступенчатых JK-триггера	4027
74111	Два двухступенчатых JK-триггера с блокировкой данных	

[1] Только четыре триггера.

[2] То же самое справедливо для 74HCxxx, 74HCTxxx и *быстродействующих* КМОП-серий.

8.6. Запоминающие устройства

Полупроводниковые запоминающие устройства (ЗУ) можно разделить на:

- адресуемую память;
- программируемые логические устройства (ПЛУ).

Адресуемая память используется для хранения данных, программ и т. д. Именно ее имеют в виду, когда говорят о запоминающих устройствах. В ПЛУ организуются соответствующие соединения между элементами для выполнения определенных логических функций (см. раздел 8.6.5).

Адресуемую память можно разделить на две группы:

- постоянные запоминающие устройства (ПЗУ);
- оперативные запоминающие устройства (ОЗУ).

При отключении напряжения питания информация, хранящаяся в ПЗУ, не исчезает. Информация в ОЗУ является временной, поскольку она исчезает при отключении напряжения питания. Данные можно как записать в ОЗУ, так и прочесть их из него.

ОЗУ иногда называют запоминающим устройством с произвольной выборкой. Это название сохранилось с более ранних времен. В настоящее время доступность ячеек обоих типов адресуемой памяти является произвольной. Организация ОЗУ и ПЗУ позволяет быстро найти требуемую ячейку памяти по ее адресу. Поскольку адреса ячеек шифруются двоичным кодом, объем адресуемой памяти всегда определяется числом, являющимся степенью 2.

- **ЗУ с поразрядной организацией** по каждому адресу хранят только один бит информации.
- **ЗУ с пословной организацией** по каждому адресу хранят 4, 8, 16 или 32 бита информации.

8.6.1. Организация запоминающих устройств

Элементы памяти имеют форму матрицы. Все адреса внутри элемента делятся на две части: одна часть определяет номер строки, другая — номер столбца. Поэтому в схему ЗУ всегда входят два дешифратора: дешифратор строк и дешифратор столбцов. Искомые ячейки находятся на пересечениях соответствующих строк и столбцов, которые определяются при помощи логических элементов И. Каждая ячейка может быть подключена к шине данных. Сигнал $R/\overline{W}$ (*чтение/запись*) определяет тип операции над данными: либо их надо считать из ячейки памяти, либо записать в нее (рис. 8.51).

Помимо сигналов $R/\overline{W}$ в ЗУ используется сигнал *CS* (*выбор кристалла*), позволяющий выбрать тот или иной элемент памяти. При CS = 0 все выходы ячеек памяти данного элемента находятся в высокоимпедансном состоянии. Этот сигнал позволяет подключать несколько ЗУ к одной системной шине.

Оба сигнала $R/\overline{W}$ и *CS* принимают участие в выработке сигнала *WE* (*разрешение записи*), который дает разрешение D-триггеру пропустить данные к ячейке памяти (рис. 8.52). В ЗУ с пословной организацией ячейка памяти состоит из нескольких поразрядных ячеек, включенных параллельно. В ПЗУ линия R/W может отсутствовать. Линии входных и выходных данных D_{in} и D_{out} объединены вместе, и сигнал $R/\overline{W}$ переключает соответствующие выходы в высокоимпедансное состояние в режиме записи информации.

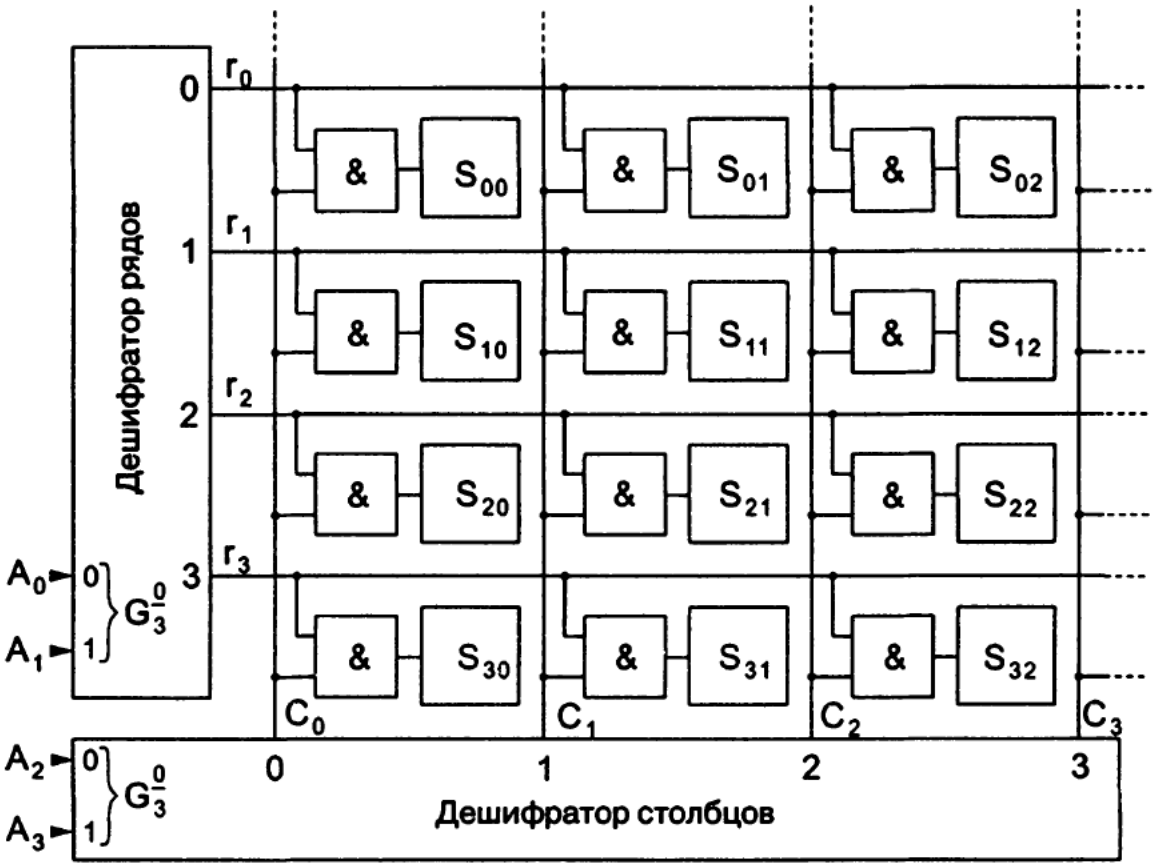


Рис. 8.51. Принцип организации элемента памяти

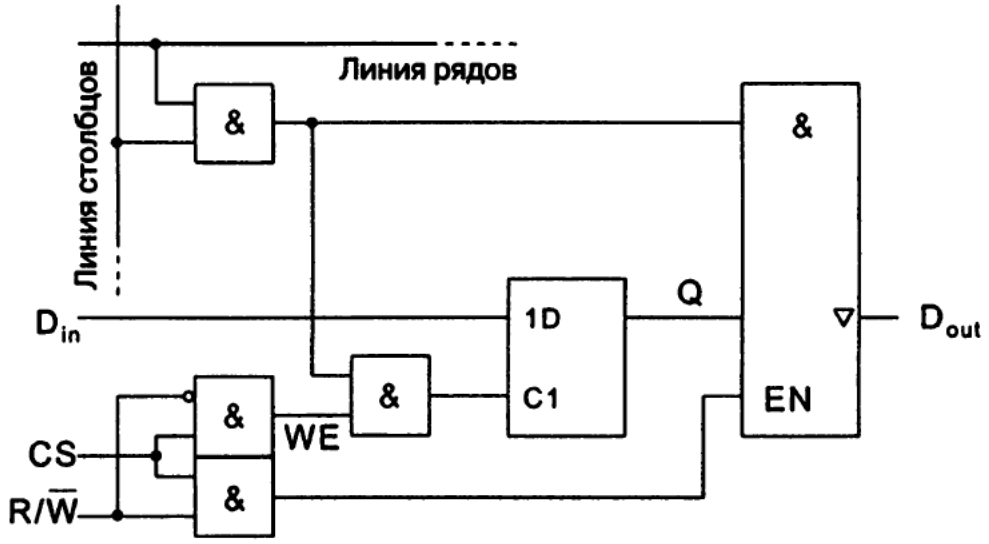


Рис. 8.52. Эквивалентная схема элемента памяти

8.6.2. Обращение к памяти

Для организации корректного доступа к ячейкам памяти все сигналы должны быть определенного формата.

Чтение

- Поскольку внутри схемы существуют определенные задержки на распространение сигналов, время между выставлением адреса ячейки на соответствующих линиях до появления достоверных данных на выходных линиях должно быть равно заранее определенному времени t_{AA}, называемому **временем выборки адреса**.

Запись

- Время между выставлением адреса ячейки и установлением низкого уровня сигнала на линии R/W , разрешающего чтение-запись информации, определяется **временем установления сигнала записи** t_{AS}.
- Сигнал на линии R/W должен оставаться низким в течение интервала времени t_{Wp}, называемого **длительностью сигнала записи**.
- Данные считываются по положительному перепаду напряжений импульса на линии R/W . Перед этим они не должны меняться в течение времени t_{DW} — **времени удержания данных для операции записи**.
- После переключения уровня сигнала на линии R/W сигналы на линиях данных и адреса должны сохранять свои значения в течение времени t_H, называемого **временем сохранения данных**.

Минимальное общее время операции записи в ЗУ определяется выражением:

$$t_W = t_{AS} + t_{Wp} + t_H.$$

Это время называется **временем цикла записи** (рис. 8.53).

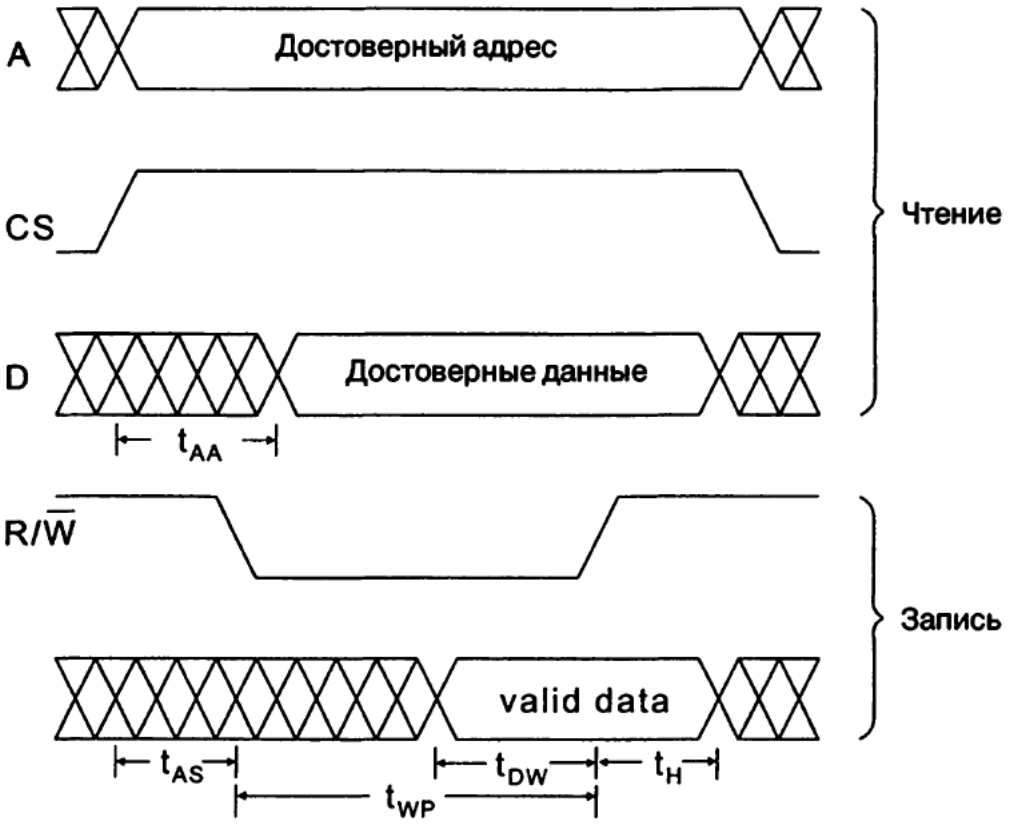


Рис. 8.53. Временна́я диаграмма сигналов при операциях чтения и записи

8.6.3. Статические и динамические ОЗУ

- **Статическим ОЗУ** для сохранения содержимого ячеек памяти при включенном напряжении питания не требуется дополнительных внешних схем.
- **Динамическое ОЗУ** необходимо периодически обновлять, иначе записанные данные могут быть потеряны.

В статическом ОЗУ каждая ячейка памяти реализована на основе триггера. Например, для хранения одного бита информации в КМОП ОЗУ требуется шесть транзисторов. Для снижения площади кристалла ИС, приходящегося на один разряд данных, были реализованы ЗУ, в которых ячейка памяти состоит из одного МОП-транзистора. Принцип хранения информации в таких ячейках основан на процессах заряда конденсатора между затвором и истоком транзистора. Поскольку этот заряд удерживается сравнительно короткое время, такие ЗУ должны перезаписываться каждые несколько миллисекунд.

В течение операции перезаписи должны обновляться все ячейки памяти. Иногда для организации доступа к каждой ячейке памяти при проведении операции обновления информации требуется вводить дополнительные схемы управления. Это приводит к большей стоимости динамических ОЗУ, поскольку повышает плотность интеграции ИС более чем в четыре раза. При увеличении емкости ЗУ растет количество адресных линий, что также приводит к большему размеру ИС. На рис. 8.54 показано, как при помощи мультиплексирования адресов рядов и столбцов можно уменьшить количество внешних выводов. Преобразование адреса осуществляется во внутренней временной памяти при помощи *стробов адреса столбца* (CAS) и *адреса строки* (RAS).

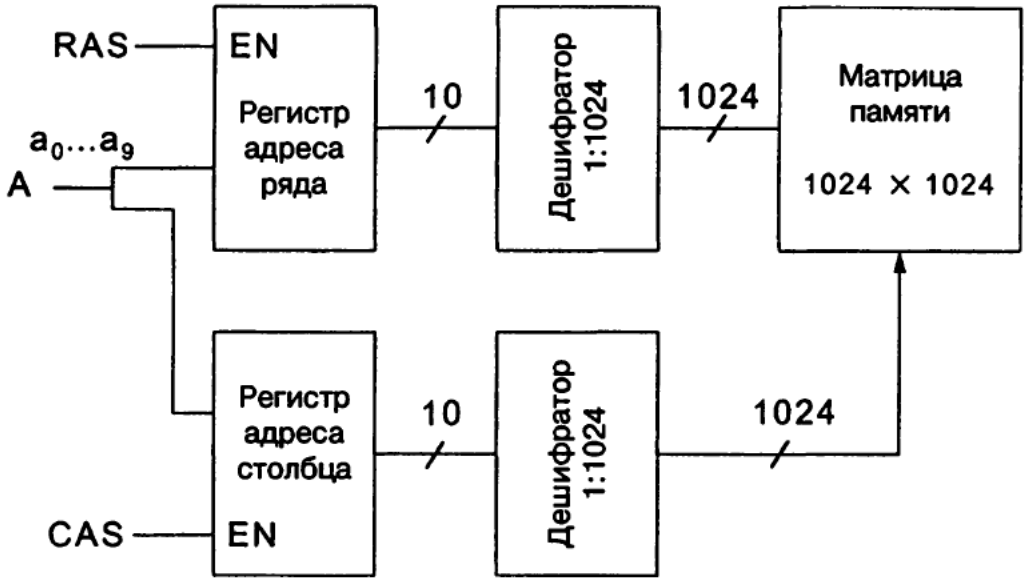


Рис. 8.54. Мультиплексирование адреса и организация внутренней памяти в одном динамическом ОЗУ на 1 Мбит

8.6.3.1. Разновидности ОЗУ

Контроллер динамического ОЗУ — логическое устройство, отвечающее за автоматическое обновление содержимого ячеек ОЗУ.

Псевдостатическое ОЗУ — динамическое ОЗУ со встроенным блоком управления обновлением информации.

Многопортовое ОЗУ. В таких ОЗУ часть портов отвечают за запись информации, а часть — за считывание.

Пример: видеопамять, в которой каждый порт имеет отдельные адрес и линии данных.

Схема разрешения конфликтов — логическое устройство, управляющее доступом к тому или иному порту многопортового ОЗУ на основе их приоритетов. Часто встраивается непосредственно в ИС ОЗУ.

ОЗУ обратного магазинного типа (*по принципу «первым пришел, первым ушел»*) **(FIFO).** На рис. 8.55 показана модель буфера, реализованного на основе FIFO-памяти. Такой буфер снабжен двумя портами: входным и выходным. Адресация внутри такого ЗУ осуществляется автоматически. Данные на выходном порту появляются в том же порядке, как они поступали на входной порт. В состав FIFO-буфера входят два адресных регистра, отслеживающие первую и последнюю записанную ячейку. Адресация памяти идет по кругу, поэтому такие буфера иногда называют **кольцевыми ЗУ**.

ОЗУ с кодом исправления ошибок. В таких ЗУ используется дополнительный двоичный разряд, позволяющий обнаруживать ошибки, возникающие при записи-считывании данных, которые исправляются при помощи специального контроллера.

Контроллер обнаружения и исправления ошибок — логическое устройство, работающее совместно с ОЗУ предыдущего типа.

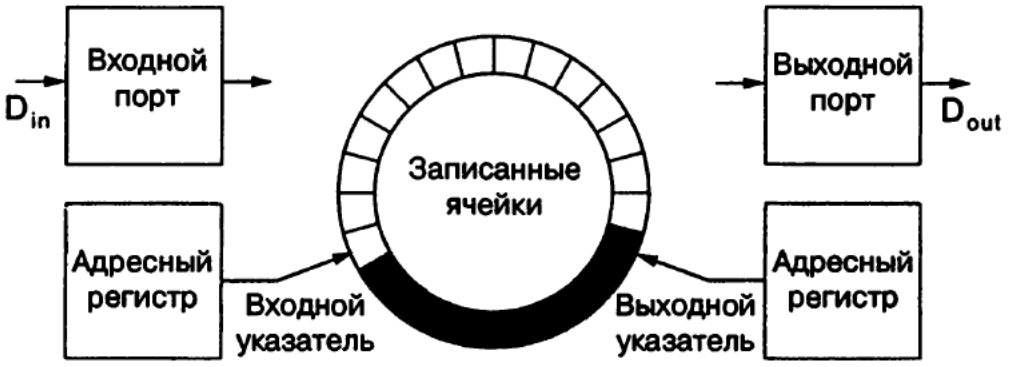


Рис. 8.55. Логическая модель FIFO-буфера

8.6.4. Постоянные запоминающие устройства

ПЗУ, работающие в нормальном режиме, позволяют проводить только считывание информации, записанной в них. Они являются энергонезависимыми устройствами, т. е. сохраняющими информацию даже при выключении электропитания. ПЗУ, как правило, реализуются на основе диодной матрицы, в которой диоды располагаются на пересечении горизонтальных и вертикальных шин, представляющих собой линии рядов и столбцов. В действительности, содержимое ячейки памяти определяет не диод, а тип его электрического соединения с линией столбцов (разрыв или короткое замыкание) (рис. 8.56).

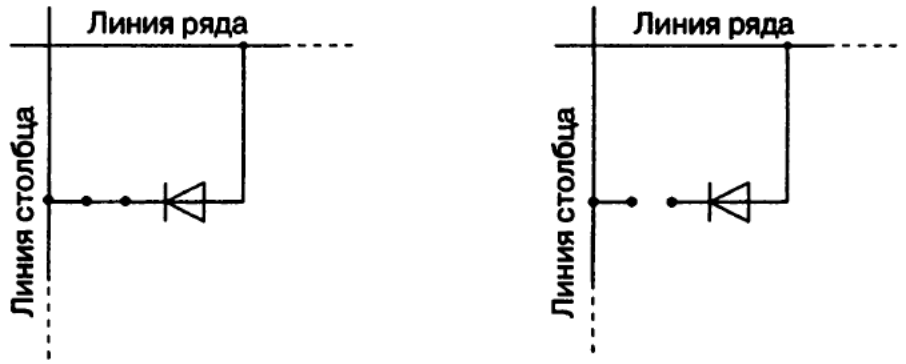


Рис. 8.56. Принцип запоминания бита в ПЗУ

Существует несколько типов ПЗУ.

- **ПЗУ.** Соответствующие соединения диодов с вертикальной шиной, определяющие записываемую информацию, прожигаются во время последней стадии изготовления ЗУ по специальному шаблону. Такие ЗУ называются **ПЗУ, программируемыми по фотошаблонам.** Процесс производства таких ПЗУ занимает довольно много времени, поэтому выгодно выпускать только большие партии таких устройств.
- **ППЗУ** (*программируемое постоянное запоминающее устройство*) программируется пользователем, но только однократно. Программирование заключается либо в пережигании плавких перемычек последовательностью импульсов высоких токов или напряжений, либо в шунтировании *p-n*-переходов элементов связи.

- **СППЗУ** (*стираемое или перезаписываемое программируемое постоянное запоминающее устройство*). Информация, записанная в таких ЗУ, стирается при помощи ультрафиолетового облучения. Отличительная черта таких устройств — кварцевое окошко в верхней части корпуса ИС. Ячейки памяти реализуются на основе полевых транзисторов с плавающими затворами. Записанная информация хранится в виде зарядов стоящих в цепях затворов конденсаторов, величина которых зависит от пороговых напряжений транзисторов. СППЗУ обычно работают медленнее ППЗУ.
- **ЭППЗУ** (*электрически перепрограммируемое постоянное запоминающее устройство*). Ячейки памяти таких ЗУ могут программироваться и стираться в произвольном порядке. Полное количество циклов перезаписи ЭППЗУ приблизительно равно 10^4. Из-за низкой стоимости они практически вытеснили СППЗУ.

При объединении ЭППЗУ с ОЗУ получают еще один тип устройств, называемых флэш-ППЗУ или флэш-памятью, обладающих преимуществами ОЗУ (быстрым доступом) и ЭППЗУ (энергонезависимостью).

8.6.5. Программируемые логические устройства

ПЛУ — это устройства с определенной организацией связей между логическими элементами, позволяющих реализовывать требуемые логические функции. Они состоят из наборов элементов И и ИЛИ, входы и выходы которых пользователь может подключать произвольным образом с целью программирования заданной функции.

8.6.5.1. Принцип действия ПЛУ

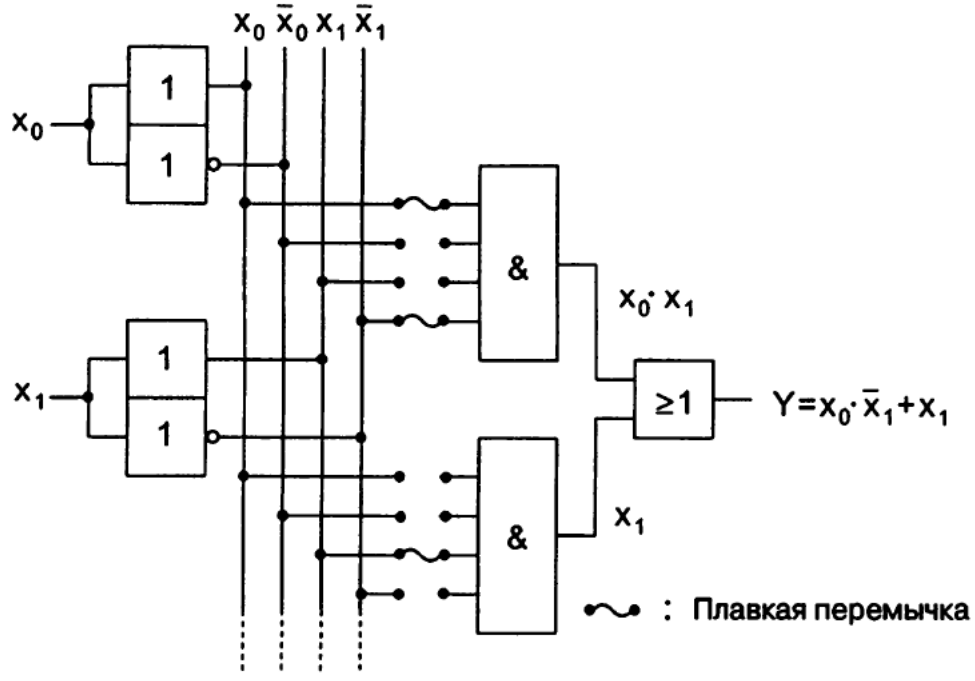


Рис. 8.57. Принцип построения ПЛУ

На рис. 8.57 показан принцип построения ПЛУ. На вертикальные шины ПЛУ подаются два входных сигнала в инвертированном и неинвертированном виде. Эти шины затем подключаются ко входам нескольких элементов И, чьи выходы, в свою очередь, соединяются со входами элементов ИЛИ. Программирование требуемой логической функции заключается в разрыве определенных соединений шин с элементами И. На рис. 8.58 показана более простая организация ПЛУ. Перекрестия соответствуют местам соединений.

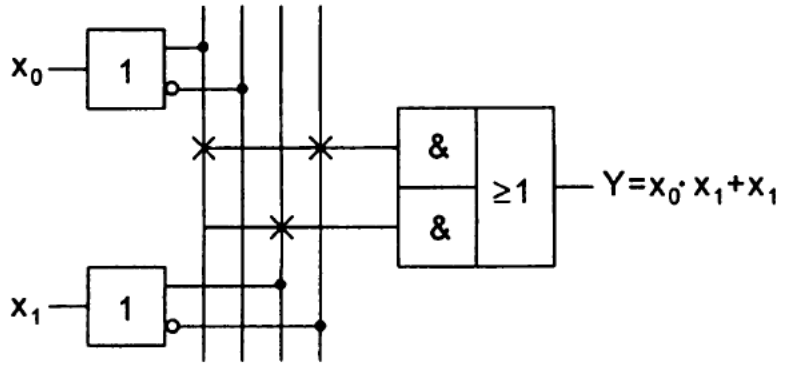


Рис. 8.58. Компактная организация ПЛУ

Таким образом, процесс программирования ПЛУ аналогичен программированию ППЗУ.

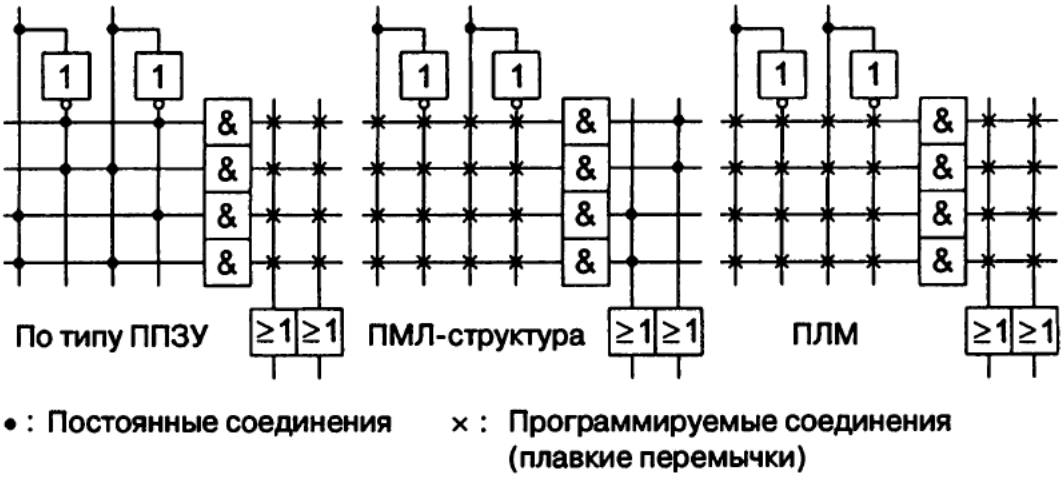


Рис. 8.59. Разновидности структур ПЛУ

На рис. 8.59 показаны три варианта структур ПЛУ:

- **По типу ППЗУ.** Такое устройство состоит из фиксированного набора элементов И, обеспечивающих расшифровку адреса, и набора программируемых элементов ИЛИ, выполняющих функцию хранения информации.
- **ПМЛ-структура** (ПМЛ — программируемая матричная логика). В таком устройстве программируемым является набор элементов И, а набор элементов ИЛИ — фиксированным.
- **ПЛМ** (программируемая логическая матрица). В такой матрице программируются все элементы: и И, и ИЛИ. Такие устройства являются более гибкими, чем предыдущие два. Однако время распространения сигналов в них также больше.

8.6.5.2. Типы ПЛУ

Приведенные в предыдущем разделе структуры определяют разные типы ПЛУ. Основные отличия между типами ПЛУ заключаются в методах программирования логических функций (при помощи плавких перемычек, диодов или полевых транзисторов), а также в том, какие элементы являются программируемыми (И или ИЛИ) и поддаются ли они перепрограммированию.

ППЗУ состоит из фиксированного набора элементов И, обеспечивающего расшифровку адреса, и программируемого набора элементов ИЛИ. Соединения внутри устройства являются металлическими (плавкие перемычки), прожигаемыми при программировании.

СППЗУ (*стираемое или перезаписываемое программируемое постоянное запоминающее устройство*) — вариант ППЗУ — состоит из фиксированного набора элементов И и программируемого набора элементов ИЛИ. Роль программируемых соединений выполняют полевые транзисторы с изолированными затворами. Информация хранится в виде заряда на конденсаторе в цепи затвора. Стирание производится удалением заряда.

ПМЛ-устройство (ПМЛ — программируемая матричная логика). В таком устройстве программируемым является набор элементов И, а набор элементов ИЛИ — фиксированным.

АМЛ-устройство (АМЛ — аппаратно реализованная матричная логика) — вариант ПМЛ-устройства с программированием при помощи специальных шаблонов. Программирование производится на заводе-изготовителе ИС.

ПЛМ (программируемая логическая матрица): В такой матрице программируются все элементы: и И, и ИЛИ. Отличается гибкостью, но более сложна в реализации. ПЛМ можно заменить на МЛЭ (*матрицы логических элементов*).

СПЛУ (стираемое программируемое логическое устройство). Структура СПЛУ аналогична организации ПМЛ устройств. Элементы соединений такие же, как в СППЗУ. Стирание информации производится при помощи ультрафиолетового света. Является перепрограммируемым устройством.

IFL (интегральные логические схемы с плавкими перемычками). Это общее название семейства логических ИС, программируемых пользователем, в которое входят:

- матричная БИС **FPGA**;
- программируемая пользователем логическая матрица (**FPLA**);
- программируемый контроллер логических команд (**FPLS**).

МЛЭ (матрица логических элементов) представляет собой набор переключаемых логических блоков. Порядок соединений хранится в энергонезависимом запоминающем устройстве. Язык программирования МЛЭ — XILINX, разработанный фирмой-производителем.

AGA (программируемая ИС на основе матриц логических элементов) представляет собой набор программируемых логических элементов.

GAL (ИС типовой матричной логики). Это набор электрически стираемых логических элементов. Имеет структуру ПМЛ-устройств и программируемую конфигурацию. Может заменять многие типы ПМЛ-устройств.

В таблице 8.13 приведен обзор разных типов ПЛУ.

Таблица 8.13. Типы ПЛУ

Тип ПЛУ	Набор элементов И	Набор элементов ИЛИ	Память
ПЗУ	фиксированный	шаблон	шаблон
ППЗУ	фиксированный	программируемый	плавкие перемычки
СППЗУ	фиксированный	программируемый	заряд
ПМЛ	программируемый	фиксированный	плавкие перемычки
АМЛ	шаблон	фиксированный	шаблон
ПЛМ	программируемый	программируемый	плавкие перемычки
СПЛУ	программируемый	фиксированный	заряд
МЛЭ	программируемый	программируемый	заряд
AGA	программируемый	программируемый	заряд
GAL	программируемый	фиксированный	заряд

Характеристиками ПЛУ являются оставшиеся плавкие перемычки, определяющие записанную в них информацию. В большинство ПЛУ встроены системы защиты от несанкционированного копирования их внутренних структур.

8.6.5.3. Выходные цепи

На рис. 8.60 показаны некоторые варианты выходных цепей ПМЛ-устройств:

Цепи с высоким уровнем выходного сигнала (H-выход). Сигнал снимается с выхода элемента ИЛИ.

Цепи с низким уровнем выходного сигнал (L-выход). Сигнал снимается с выхода элемента ИЛИ в инвертированном виде.

Цепи с комплементарными выходными сигналами (C-выход). С выхода схемы снимаются оба типа сигналов: инвертированный и неинвертированный. Это редкий и неэкономичный способ организации выходных цепей, поскольку требует слишком много выводов.

Программируемые выходные цепи (P-выход). При помощи элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, используемого в качестве управляемого инвертора, выбирается полярность выходного сигнала. Управляющий вход логического элемента соединяется с землей через плавкую перемычку.

Выходные цепи с функцией ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ (X-выход). Два выхода элемента ИЛИ подключаются к схеме ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ. Такая схема используется только в арифметических блоках.

Разделяемые выходные цепи (S-выход). Представляют собой программируемую схему, реализованную на основе элементов ИЛИ.

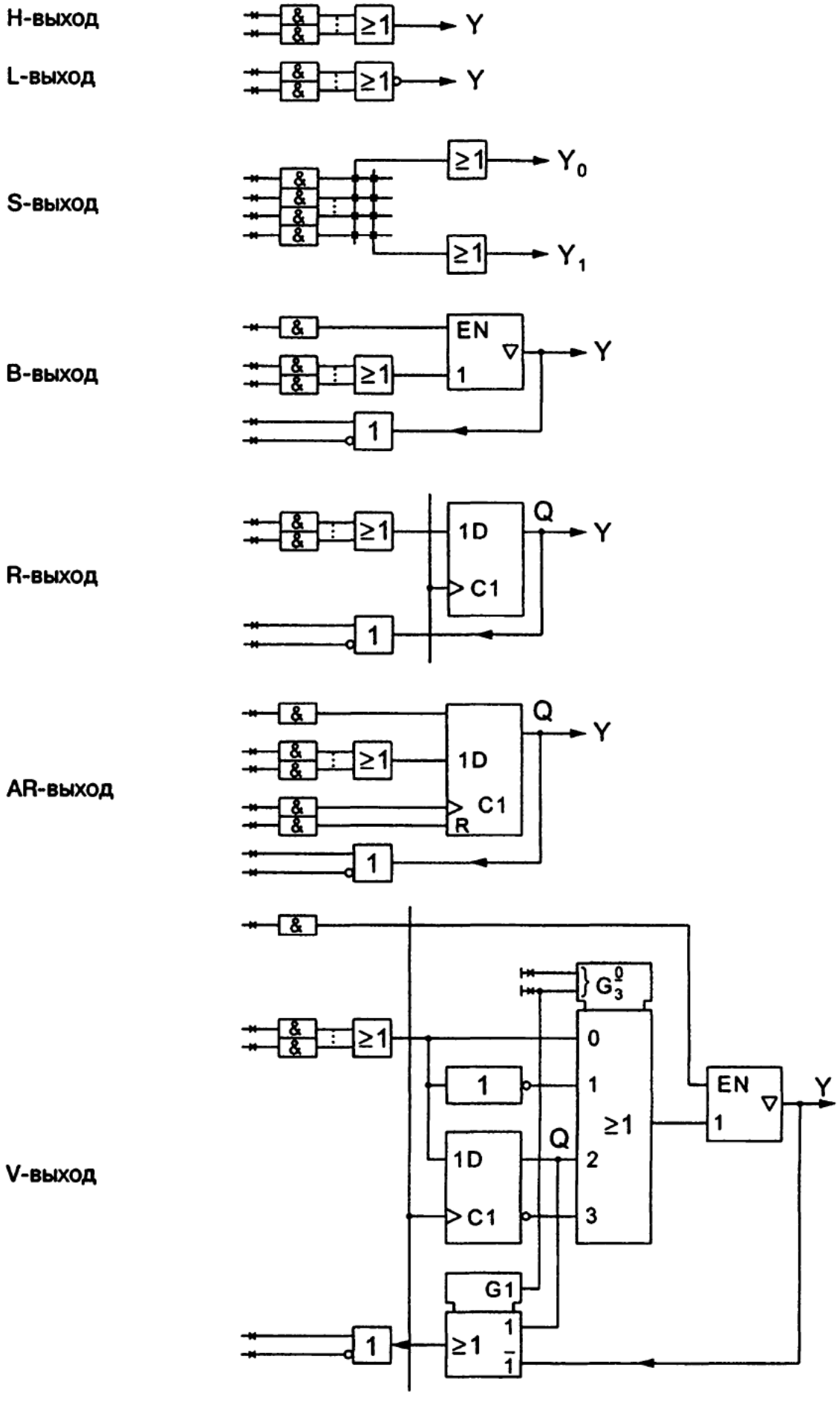


Рис. 8.60. Выходные цепи ПМЛ-устройств

Двунаправленные выходные цепи (B-выход). Могут программироваться как выход и как вход для цепей с обратными связями. Выходная схема имеет три состояния. Сигнал разрешения (*EN*) формируется на основе логической комбинации входных сигналов.

Регистровые выходные цепи (R-выход). В определенные моменты времени выходные цепи превращаются в D-триггеры. Линия синхронизации является общей для всех элементов. Такая структура выходных цепей используется в последовательных логических схемах.

Асинхронные регистровые выходные цепи (AR-выход). В таких цепях сигналы сброса, установки и синхронизации формируются в результате выполнения определенных логических функций.

Переменные выходные цепи (V-выход). Строятся на основе специализированных логических элементов, программируемых при помощи управляющих сигналов, которые позволяют реализовывать H-, L- или R-выходы.

8.7. Регистры

Регистры строятся на основе триггеров и используются для временного хранения состояний сигнала. 4-, 8- или 16-разрядные **регистры-защелки** представляют собой наборы параллельных D-триггеров, имеющих общую линию синхронизации (рис. 8.61).

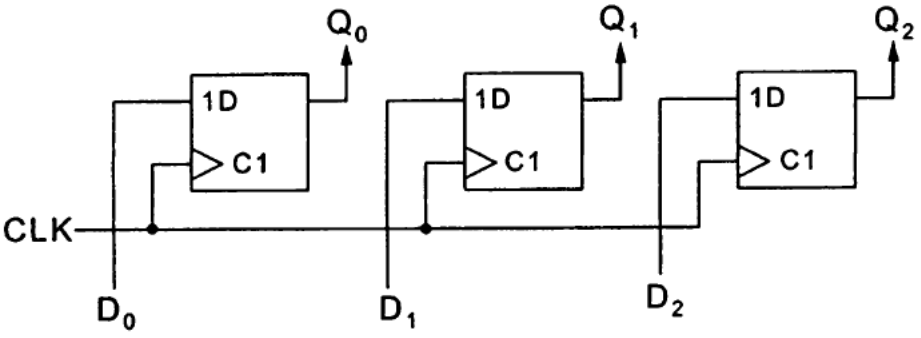


Рис. 8.61. Трёхразрядный регистр на основе D-триггеров

Сдвиговые регистры представляют собой схемы из последовательно включенных триггеров. В таких схемах выход каждого триггера соединен со входом триггера, следующего за ним (рис. 8.62).

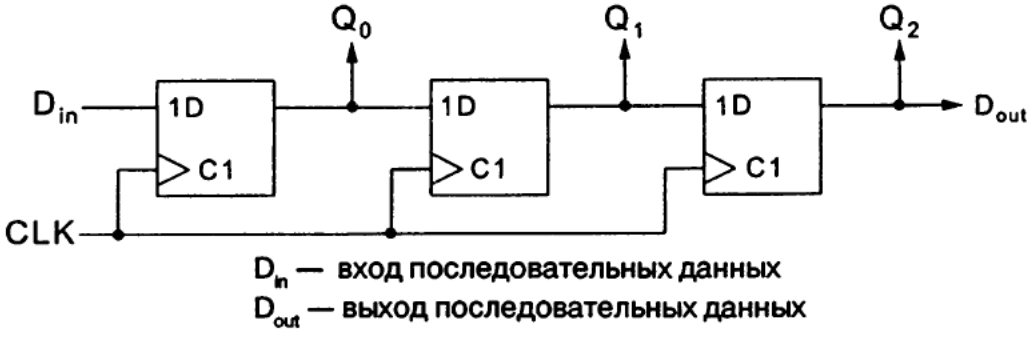


Рис. 8.62. Трёхразрядный сдвиговый регистр на основе D-триггеров

Все триггеры управляются одним и тем же сигналом синхронизации. Выходной сигнал представляет собой задержанный входной сигнал.

В сдвиговых регистрах между каждыми парами триггеров могут быть встроены мультиплексоры, позволяющие подавать на их входы внешние сигналы. Такие регистры называются **загружаемыми сдвиговыми регистрами с параллельным доступом**. Сигнал *Load* управляет загрузкой данных в регистр. Такие сдвиговые регистры могут работать регистрами **с параллельным входом и последовательным выходом** (PISO) и регистрами **с последовательным входом и параллельным выходом** (SIPO).

Сдвиговые регистры бывают 4-, 8-, 16-разрядными (и более).

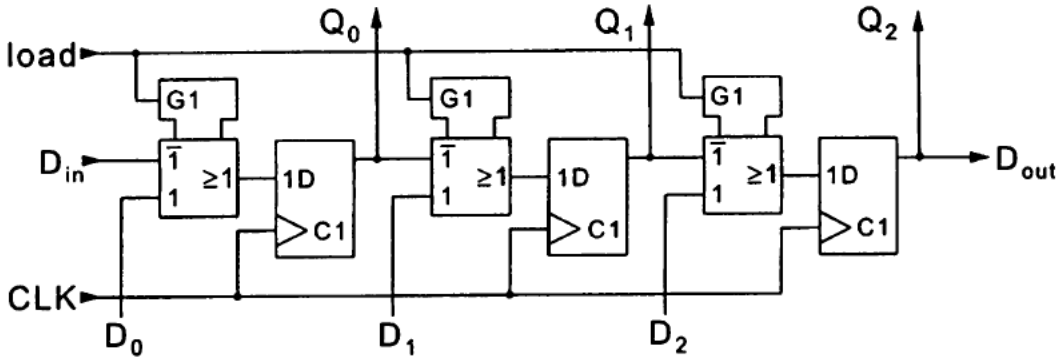


Рис. 8.63. Загружаемый сдвиговый регистр

8.8. Счетчики

Счетчиками называются логические схемы, состоящие из последовательно соединенных триггеров, выходные состояния которых зависят от количества импульсов, поданных на входы синхронизации. Существуют следующие виды классификации счетчиков:

По способу синхронизации:

- **Синхронные счетчики.** Счетные импульсы подаются на входы синхронизации всех триггеров одновременно.
- **Асинхронные счетчики.** Счетные импульсы подаются на вход синхронизации первого триггера. Сигналы, поступающие на входы других триггеров, вырабатываются внутри самого счетчика.
- **Полусинхронные счетчики** представляют собой последовательное соединение нескольких синхронных счетчиков, управляемых асинхронно.

По форме представления выходных сигналов:

- **Двоичные счетчики.** Выходной сигнал представляется в двоичном коде.
- **Двоично-десятичные счетчики.** Каждая десятичная цифра выходного сигнала счетчика определяется группой из четырёх двоичных разрядов.
- **Другие типы счетчиков.** Выходные сигналы таких счетчиков определяются другими типами кодов (например, двоично-пятеричным или десятичным).

По направлению счета:

- **Счетчики с увеличение счета;**
- **Счетчики с уменьшением счета;**

- **Двунаправленные (реверсивные) счетчики;**
- **Счетчики с раздельными** суммирующими и вычитающими **входами.**

По типу объединения триггеров:

- **Кольцевые счетчики** представляют собой сдвиговые регистры, содержимое которых циклически сдвигается.
- **Счетчики Джонсона** — особый тип кольцевого счетчика.

По типу управления:

- **Программируемые счетчики** (с увеличением счета). В такие счетчики можно загружать исходные данные, которые и будут началом нового счета.

8.8.1. Асинхронные счетчики

8.8.1.1. Двоичный счетчик

Из таблицы истинности двоичного счетчика, приведенной ниже, видно, что:

- Выходная переменная z_i меняет свое значение только после того, как соседняя с ней переменная z_{i-1} переключается с 1на 0. (Это правило выделено в таблице горизонтальными линиями.)

Состояние счетчика	z_2 2^2	z_1 2^1	z_0 2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

На рис. 8.64 показана реализация асинхронного двоичного счетчика по данной таблице истинности. Инверсные выходы всех D-триггеров соединяются с их входами. При таком способе включения каждый триггер меняет свое состояние на фронт любого счетного импульса, приходящего на его вход синхронизации, т. е. работает как делитель частоты на два. Из временных диаграмм, приведенных на рис. 8.64, видно, что выходные переменные триггеров, считанные одновременно, соответствуют выходному сигналу счетчика, представленному в двоичном коде.

Диаграмма также показывает, что счетчик возвращается в исходное (нулевое) состояние через семь счетных импульсов, т. е. имеет восемь выходных состояний. Поэтому такой счетчик называется счетчиком **по модулю 8**. Каждый дополнительный триггер расширяет рабочий диапазон счетчика на степень числа 2.

Недостаток асинхронного двоичного счетчика заключается в следующем. Положительные перепады напряжения счетных импульсов на входе первого триггера приводят к переключению его состояний. Изменения на инверсном выходе триггера с 0 на 1 заставляют переключаться следующий триггер и т. д. Однако каждый триггер может переключаться только после срабатывания

предыдущего триггера. Поскольку на каждом триггере происходит задержка распространения сигнала t_{PH}, показания счетчика считаются корректными только после того, как все триггеры переключатся в новые состояния. До этого момента времени считывать сигнал с выходных линий счетчика нельзя. Из-за этой задержки на передачу сигнала такие счетчики называются *сквозными*.

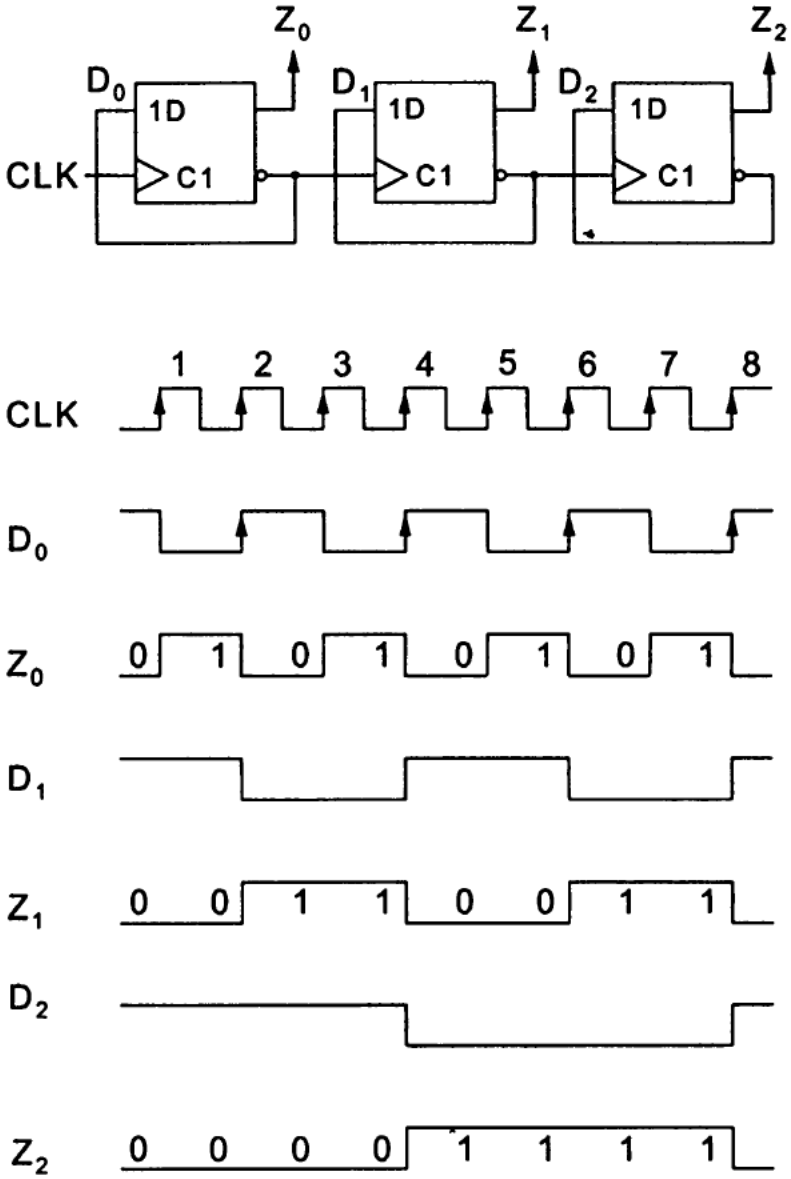


Рис. 8.64. Асинхронный двоичный счетчик на основе D-триггеров

На рис. 8.65 показан асинхронный двоичный счетчик, реализованный на JK-триггерах. Триггеры запускаются положительными перепадами напряжений счетных импульсов.

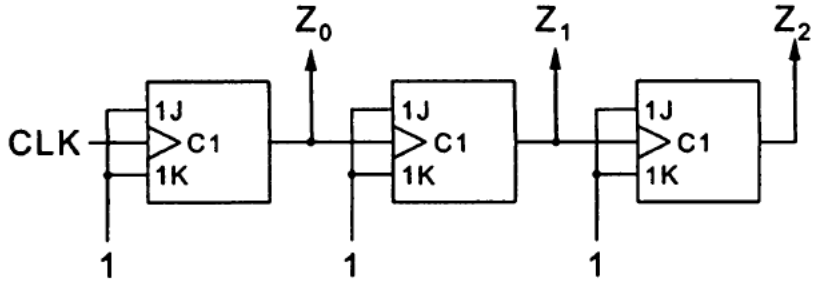


Рис. 8.65. Асинхронный двоичный счетчик на основе JK-триггеров

В левой части рис. 8.66 показано обозначение асинхронного двоичного счетчика. Вход сброса счетчика 11 является частью блока, управляющего всеми триггерами. Вход 10 является входом счетных импульсов. Инверсия на входе указывает на то, что триггеры срабатывают на отрицательные перепады напряжений. Выход 9 и вход 1 объединены внутренней связью (Z-зависимость). При изменении сигнала на входе 1 с 0 на 1, состояние выхода 9 также меняется (T-зависимость). Другие выходы счетчика работают аналогичным образом. В правой части рис. 8.66 показано упрощенное обозначение асинхронного двоичного счетчика. Оно используется, когда асинхронный режим работы не надо определять явным образом.

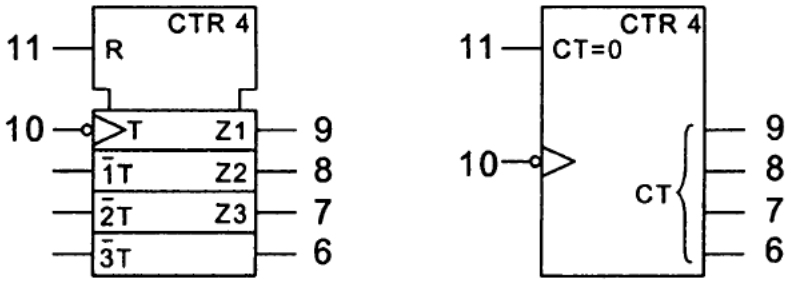


Рис. 8.66. Обозначения асинхронных двоичных счетчиков

8.8.1.2. Десятичный счетчик

Десятичные счетчики используются в случаях, когда выходной сигнал должен быть представлен в десятичном коде. Для упрощения работы дешифратора для каждой десятичной цифры используется свой счетчик. Поскольку выходной сигнал счетчиков обычно представляется в двоичном коде, такие составные счетчики часто называют **двоично-десятичными счетчиками**.

В таблице истинности показано внутреннее представление состояний двоично-десятичных счетчиков. Каждый вход обладает своим собственным весом: 8, 4, 2 и 1, что часто называется **кодом 8421**.

Состояние счетчика	Z_3 2^3	Z_2 2^2	Z_1 2^1	Z_0 2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10*	1	0	1	0

* Переходное неустановившееся состояние.

Десятичный счетчик, показанный на рис. 8.67, произошел от 4-разрядного двоичного счетчика. Схема И-НЕ сбрасывает все триггеры в ноль в момент,

когда оба выхода Z_1 и Z_3 принимают единичные значения. Это происходит, когда выходное состояние счетчика становится равным 10, что длится только в течение длительности задержки сигнала, поэтому сигнал сброса представляет собой очень короткий импульс.

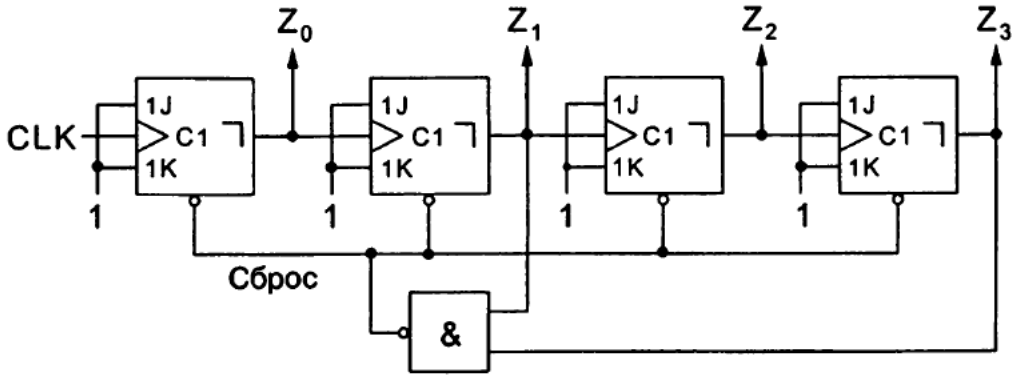


Рис. 8.67. Асинхронный десятичный счетчик

Из-за большой зависимости от длительности задержек на распространение сигналов внутри счетчика на практике такая схема почти не используется. На рис. 8.68 показана схема счетчика, где эта проблема решена при помощи блокировки соответствующих разрядов счетчика через специальные входы. Это означает, что счетчик переходит в нулевое состояние из состояния, равного 9, сразу после прихода очередного счетного импульса.

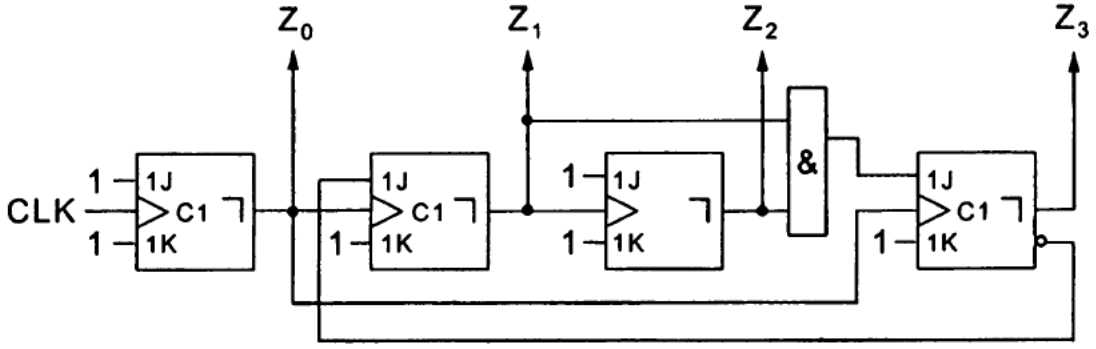


Рис. 8.68. Асинхронный десятичный счетчик

На рис. 8.69 показано обозначение десятичного счетчика. Счетчик срабатывает на отрицательные перепады напряжений счетных импульсов, приходящих на вход 1, являющийся входом суммирования. Счетчик делит входную последовательность импульсов на 10 (CTR DIV 10). С выводов счетчика 3, 5, 6 и 7 снимается выходной сигнал в двоичном коде. Значения 0...3 в фигурной скобке соответствуют степеням числа 2. Вход 2 ($CT = 0$) является входом сброса. Поскольку здесь C-зависимость не указана, сброс счетчика осуществляется асинхронно.

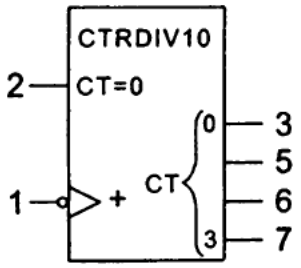


Рис. 8.69. Обозначение десятичного счетчика

Последовательно объединяя несколько десятичных счетчиков, можно получить счетчик на произвольное количество значащих цифр (рис. 8.70).

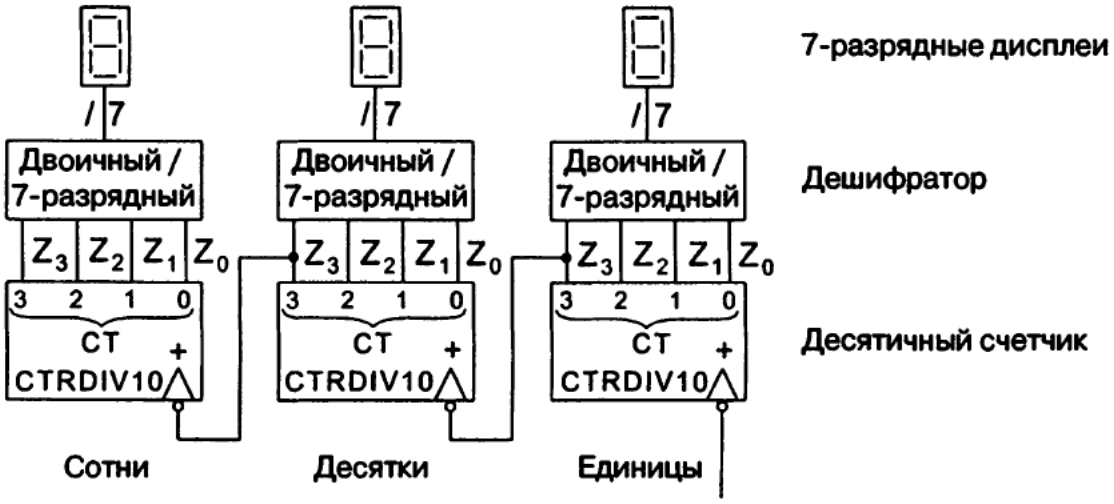


Рис. 8.70. Десятичный счетчик на три декады

Для отображения на дисплее выходные сигналы каждого счетчика при помощи дешифраторов преобразуются из двоичного в 7-разрядные коды. Выходной сигнал Z_3 является сигналом переноса в следующий более старший десятичный разряд. Этот сигнал имеет отрицательный перепад напряжения только при сбросе счетчика. Именно этот перепад заставляет срабатывать следующий счетчик. Сигнал переноса последнего разряда может использоваться для установки дополнительного RS-триггера в единичное состояние для индикации переполнения счетчика.

8.8.1.3. Вычитающие счетчики

Вычитающие счетчики (рис. 8.71) при каждом счетном импульсе *уменьшают* свое значение на единицу. Из таблицы истинности видно, что:

- Выходная переменная Z_i меняет свое значение только после того, как соседняя с ней переменная Z_{i-1} переключается с 0 на 1. (Это правило выделено в таблице горизонтальными линиями.)

Состояние счетчика	Z_2 2^2	Z_1 2^1	Z_0 2^0
0	0	0	0
7	1	1	1
6	1	1	0
5	1	0	1
4	1	0	0
3	0	1	1
2	0	1	0
1	0	0	1

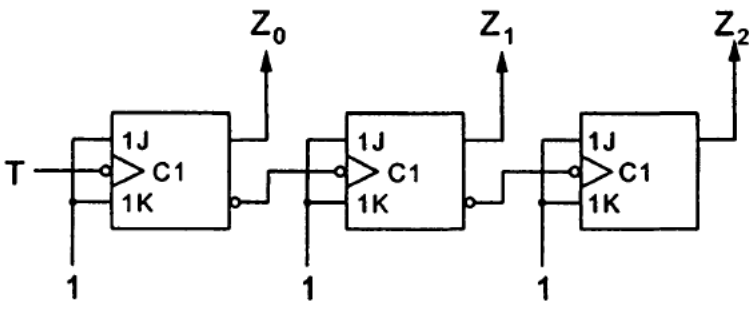


Рис. 8.71. Асинхронный трехразрядный вычитающий счетчик

В отличие от суммирующего счетчика в вычитающем счетчике инверсные выходы триггеров соединяются со входами синхронизации соседних триггеров.

8.8.1.4. Реверсивные счетчики

При подключении выходов триггеров к элементам ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ получается счетчик с программируемым направлением счета (рис. 8.72). Это позволяет переключать полярность выходных сигналов в соответствии с уровнем сигнала на общей линии управления, и таким образом определять направление счета.

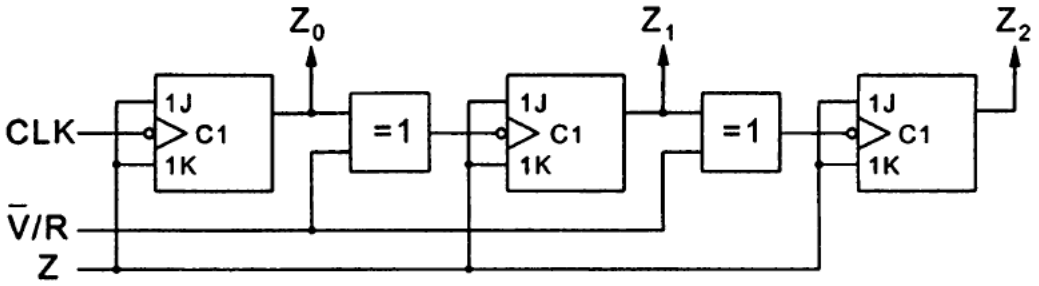


Рис. 8.72. Асинхронный программируемый реверсивный счетчик

Примечание. Изменение направления счета нельзя производить во время процесса счета, поскольку это связано с изменением полярности сигналов на входах триггеров и может привести к потере управления счетом. Поэтому на время переключения Z-входы блокируют JK-входы.

8.8.1.5. Программируемый счетчик

В программируемый счетчик можно загрузить исходные данные.

На рис. 8.73 показан программируемый 4-разрядный счетчик. Высокий уровень напряжения на входе Load (загрузка) приводит к сбросу или установке в единичное состояние триггеров в зависимости от поданных сигналов на их параллельные входы.

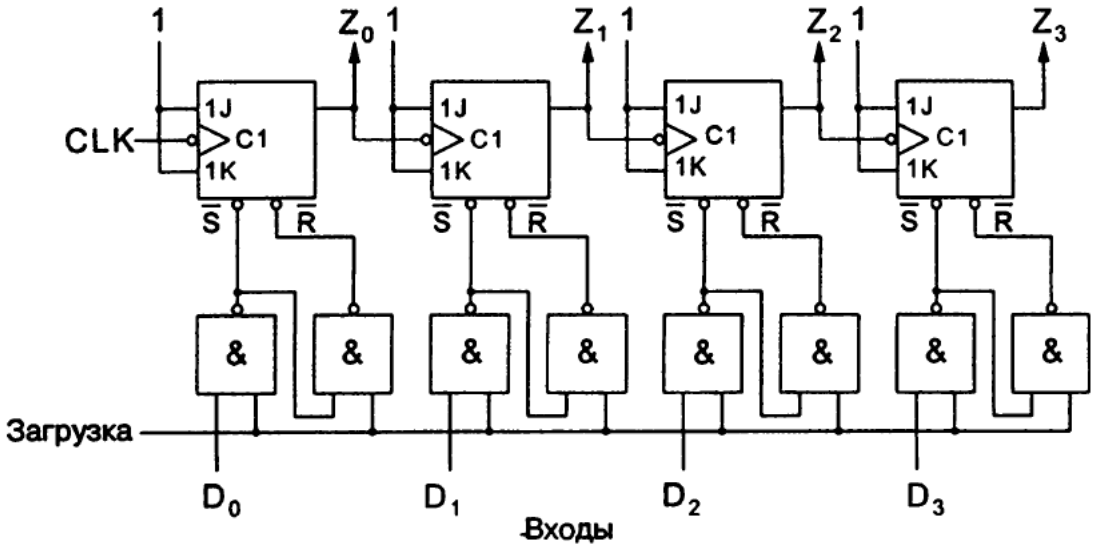


Рис. 8.73. Программируемый 4-разрядный счетчик

В левой части рис. 8.74 показано обозначение программируемого 4-разрядного счетчика. Процессом загрузки счетчика управляет сигнал, поступающий

на вход Load, маркируемый как C. В скобках показаны значения соответствующих разрядов счетчика. Выходной сигнал блока управления называется сигналом переноса. Он принимает единичное значение, когда состояние счетчика равно 15 ($CT = 15$). Сигнал переноса подается на следующий счетчик для расширения диапазона счета.

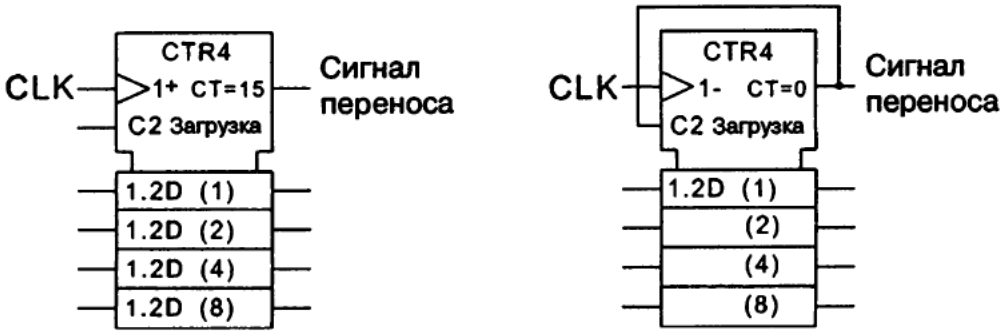


Рис. 8.74. Обозначение программируемого счетчика

Наиболее распространенными являются вычитающие программируемые счетчики, останавливающие счет по достижении нулевого состояния или начинающие новый счет с предварительно введенного значения. Чаще всего такие счетчики используются в микропроцессорных системах. Такие счетчики называются **счетчиками с предварительной установкой**. В правой части рис. 8.74 показан вычитающий счетчик, в который загружается новое значение, как только его состояние становится равным нулю. Как видно из условных обозначений входов синхронизации и загрузки внутри схемы, загрузка нового значения произойдет только после прихода очередного счетного импульса. Если в счетчик загружается число m, то он будет вычитать $m + 1$ импульсов. Поэтому такой счетчик называется **счетчиком по модулю ($m + 1$)**.

Применение. Такие счетчики используются в программируемых делителях частоты или таймерах.

8.8.2. Синхронные счетчики

Суммирующий счетчик			
Состояние счетчика	Z_2 2^2	Z_1 2^1	Z_0 2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Вычитающий счетчик			
Состояние счетчика	Z_2 2^2	Z_1 2^1	Z_0 2^0
7	1	1	1
6	1	1	0
5	1	0	1
4	1	0	0
3	0	1	1
2	0	1	0
1	0	0	1
0	0	0	0

В таблицах истинности приведены выходные состояния для двоичного счетчика. Из таблиц истинности следуют следующие правила.

Для суммирующего счетчика:

- Выходная переменная Z_i *при подаче очередного счетного импульса* поменяет свое значение только после того, как все соседние с ней переменные более низких разрядов будут равны 1.

Для вычитающего счетчика:

- Выходная переменная Z_i *при подаче очередного счетного импульса* поменяет свое значение только после того, как все соседние с ней переменные более низких разрядов будут равны 0.

Эти правила используются при проектировании синхронных счетчиков (рис. 8.75). Характерная черта синхронных счетчиков заключается в том, что счетные импульсы поступают на входы синхронизации всех триггеров одновременно. Для того чтобы счетчик переключался только в разрешенные состояния, используется специальная схема подготовки сигналов, управляющая входами установки триггеров.

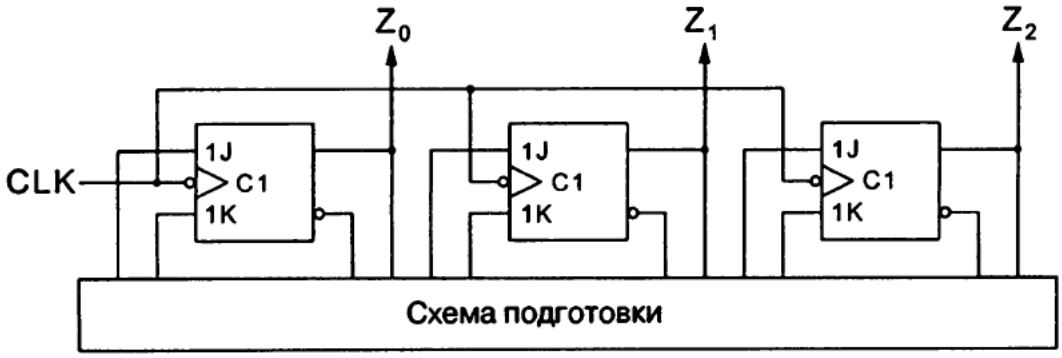


Рис. 8.75. Принцип действия синхронного счетчика

Принцип построения синхронных счетчиков следует из вышеприведенных правил. В суммирующем счетчике срабатывание соответствующих триггеров происходит на фронты счетных импульсов, поданных на входы синхронизации, когда значения всех меньших разрядов равны 1. Отсюда следует, что:

$$S_0 = 1, \quad S_1 = Z_0, \quad S_2 = Z_0 \cdot Z_1, \quad S_3 = Z_0 \cdot Z_1 \cdot Z_2.$$

На рис. 8.76 показана реализация этих логических выражений при помощи схем И.

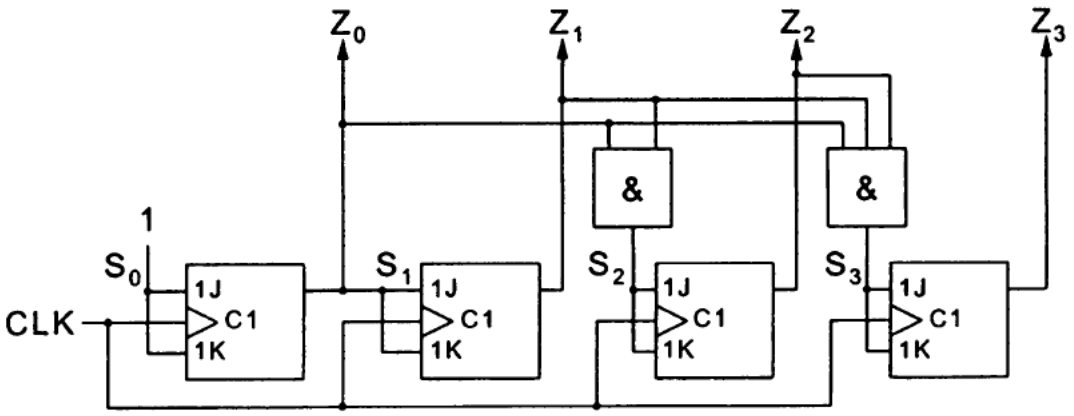


Рис. 8.76. Синхронный двоичный счетчик

8.8.2.1. Объединение синхронных счетчиков

Проектирование составного синхронного счетчика, счетная емкость которого превышает емкость индивидуальных счетчиков, часто является довольно сложной задачей. Рассмотрим решение этой проблемы на примере 4-разрядного синхронного счетчика 71 191. Этот счетчик срабатывает на положительные фронты счетных импульсов и для возможности расширения счетного диапазона снабжен двумя специальными выводами:

Min/max. На этом выходе устанавливается сигнал низкого уровня, когда либо суммирующий счетчик достигает максимального значения (15), либо состояние вычитающего счетчика становится равным нулю.

RCE. Сигнал на этом выходе равен логическому 0, когда на входе разрешения EN и на выходе Min/max установлены сигналы низкого уровня, а на вход счетчика подан 0.

На рис. 8.77 показана схема счетчика с расширенным диапазоном счета. RCE-вывод каждого каскада счетчика подключается ко входу синхронизации следующего каскада. Такой комбинированный счетчик иногда называется **полусинхронным счетчиком**, поскольку счетные импульсы подаются одновременно на триггеры только первого счетчика. С увеличением числа каскадов уменьшается максимальная скорость счета.

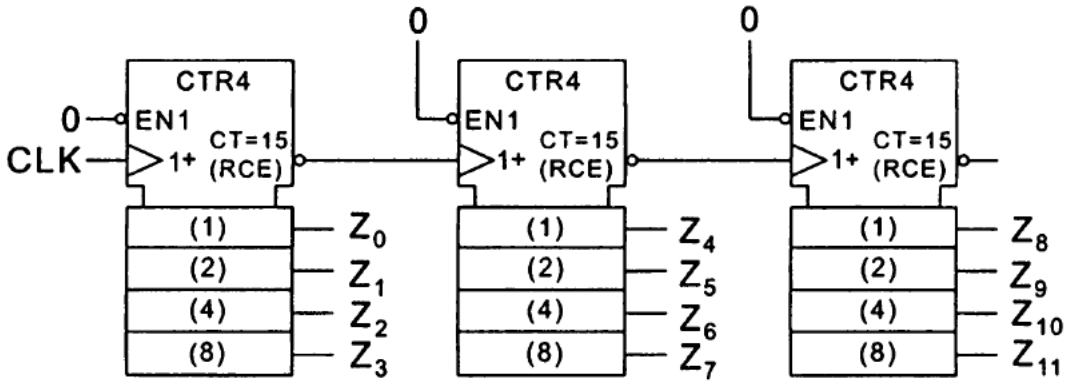


Рис. 8.77. Полусинхронный двоичный счетчик

В схеме на рис. 8.78 все каскады счетчика работают синхронно, но сигналы переноса вырабатываются последовательно. Каждый каскад счетчика обладает своим собственным входом разрешения, который управляет блокировкой счетчика и выработкой сигнала переноса. Первый счетчик никогда не бывает заблокирован для счетных импульсов. Сигнал переноса первого каскада является одновременно сигналом разрешения для второго каскада и т. д. Поэтому каждый последующий счетчик может продолжать счет только после того, как на соответствующем выходе предыдущего счетчика установлен сигнал переноса, длительность которого равна одному периоду счетных импульсов.

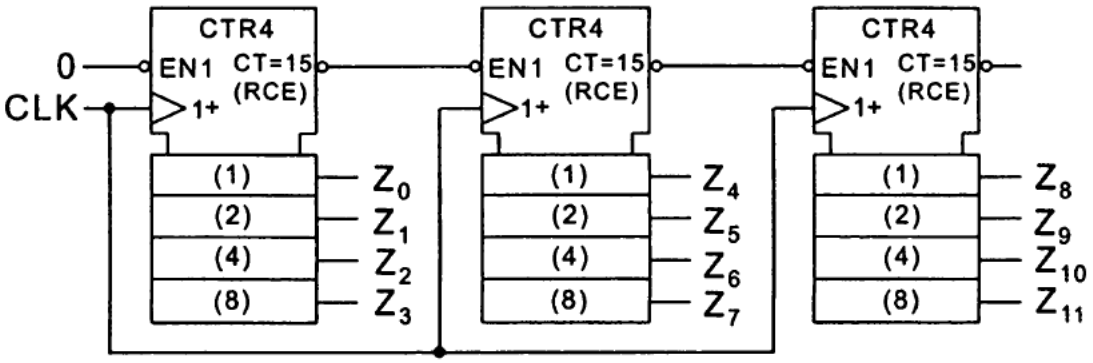


Рис. 8.78. Синхронный двоичный счетчик с последовательным переносом

Схема на рис. 8.79 позволяет ускорить процесс счета за счет запараллеливания выводов сигнала переноса. На выходе Min/max устанавливается сигнал низкого уровня, после того как суммирующий счетчик достигает значения 15, а вычитающий — нуля. Счетные импульсы подаются на все каскады одновременно.

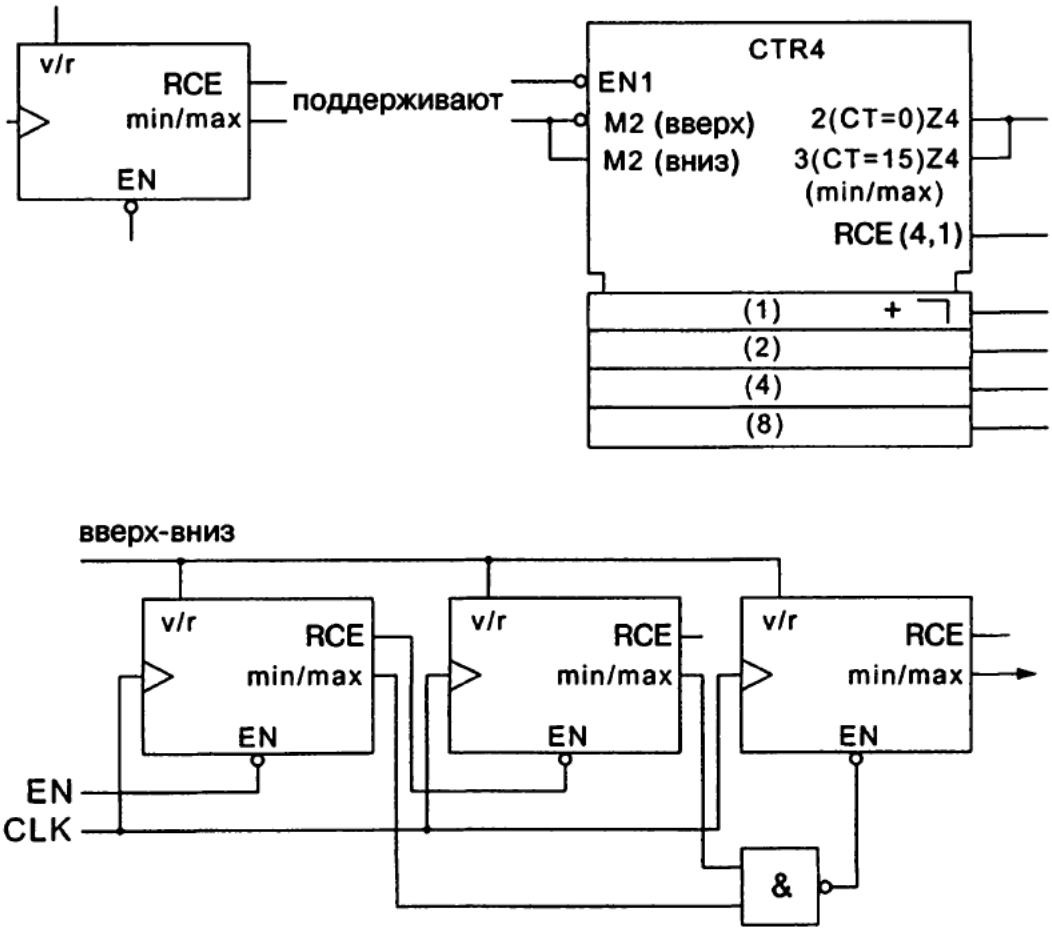


Рис. 8.79. Синхронный двоичный счетчик с параллельным переносом

Примечание. В некоторые счетчики (например 74163) логические элементы, используемые для организации сигналов переноса, интегрированы в сами ИС. На рис. 8.80 показан вариант такого счетчика.

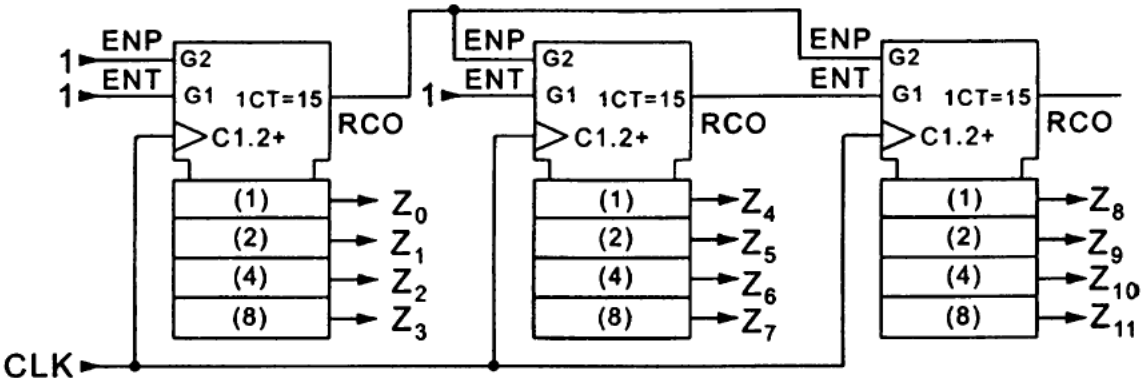


Рис. 8.80. Синхронный двоичный счетчик с параллельным переносом без внешних логических элементов

8.8.3. ТТЛ- и КМОП-счетчики (обзор)

В табл. 8.14 и 8.15 дан обзор характеристик ТТЛ- и КМОП-счетчиков.

В таблицах используются следующие сокращения:

A	Асинхронный счетчик
S	Синхронный счетчик
±	Суммирующий или вычитающий счетчик
↑	Счетчик, срабатывающий на положительные перепады напряжений
↓	Счетчик, срабатывающий на отрицательные перепады напряжений
BCD	Двоично-десятичный код
B	Двоичный код
1/10	Код 1:10
7-segment	Семисегментный код
J	Счетчик Джонсона
AC	Асинхронный сброс
SC	Синхронный сброс
AS	Асинхронная установка
AL	Асинхронная загрузка
SL	Синхронная загрузка
OC	Открытый коллектор
ENT, ENP	Входы для формирования параллельного переноса без использования внешних элементов
P	Программируемый счетчик

Диапазон счета счетчика определяется числом разрядов. Если он не является степенью числа 2, то в таблице также приводится количество выходных состояний счетчика.

В таблицах приводится гарантированные значения частот счетных импульсов. Их типовые значения обычно на 50 % выше.

8.8.3.1. ТТЛ-счетчики

Таблица 8.14. Свойства ТТЛ-счетчиков

Тип	A/S	Фронт	Диапазон счета, число разрядов / количество состояний	Код	P	Сброс	Частота (гарантированная), МГц	Примечание
LS90	A	↓	4/10	BCD	AS	AC	32	Может быть установлен до 9
LS92	A	↓	4/12	B	–	AC	32	
LS93	A	↓	4	B	–	AC	32	Предшественник LS293
LS142	A	↑	4/10	1/10	–	AC	20	С регистром-защелкой, дешифратором и задающим устройством с открытым коллектором на 60 В
LS143	A	↑	4/10	7-Seg	–	AC	12	Как LS142 с 7-сегментным дешифратором и выходами под СИД
LS144								Как LS143 с задающим устройством с открытым коллектором на 15 В
LS160	S	↑	4/10	BCD	AL	AC	25	
LS161	S	↑	4	B	SL	AC	25	Как LS163 с асинхронным сбросом
LS162	S	↑	4/10	BCD	SL	SC	25	
LS163	S	↑	4	B	SL	SC	25	Как LS161 с синхронным сбросом
LS168	S±	↑	4/10	BCD	SL	–	25	Входы ENT, ENP
LS169	S±	↑	4	B	SL	–	25	
LS176	A	↓	4/10	BCD/5 — 2 AL	AC	35		В зависимости от внешних цепей: двоично-десятичный или двоично-пятеричный код
LS177	A	↓	4	B	AL	AC	35	
LS190	S±	↑	4/10	BCD	AL	–	20	
LS191	S±	↑	4	B	AL	–	20	
LS192	S±	↑	4/10	BCD	AL	AC	25	Отдельные входы для суммирования и вычитания

Окончание табл. 8.14

LS193	S±	↑	4	B	AL	AC	25	Отдельные входы для суммирования и вычитания
LS196	A	↓	4/10	BCD	AL	AC	30	
LS197	A	↓	4	B	AL	AC	30	
LS290	A	↓	4/10	BCD	AS	AC	32	
LS293	A	↓	4	B	–	AC	32	Как LS93 с выводами питания
LS390	A	↓	8/100	BCD	–	AC	25	Два LS290 в одном корпусе
LS393	A	↓	8	B	–	AC	25	Два LS293 в одном корпусе

8.8.3.2. КМОП-счетчики

Частоты даны для нагрузки 50 пФ при 5/10/15 В

Таблица 8.15. Свойства КМОП-счетчиков

Тип	A/S	Фронт	Диапазон счета, число разрядов/ количество состояний	Код	P	Сброс	Частота (гарантированная), МГц	Примечание
4017	S	↑/↓	5/10	1/10	—	AC	3/8/12	Счетчик Джонсона
4018	S	↑	5/2...10	J	AL	AC	2/6/8	Счетчик Джонсона
4020	A	↓	14	B	—	AC	5/13/18	
4022	S	↑	4/8	1/8	—	AC	3/8/12	Счетчик Джонсона
4024	A	↓	7	B	—	AC	5/13/18	
4029	S±	↑	4 или 4/10	B/BCD	AL	—	4/12/18	Переключаемый двоичный/ десятичный счетчик
4040	A	↓	12	B	—	AC	5/13/18	
4060	A	↓	14	B	—	AC	4/10/15	Элементы для генератора
4510	S±	↑	4/10	BCD	AL	AC	5/12/17	
4516	S±	↑	4	B	AL	AC	5/12/17	
4518	S	↑/↓	2×4/100	BCD	—	AC	3/7/10	Два десятичных счетчика
4520	S	↑/↓	2×4	B	—	AC	3/7/10	Два двоичных счетчика
4522	A-	↑/↓	4/10	BCD	AL	AC	6/12/16	Вычитающий счетчик
4526	A-	↑/↓	4	B	AL	AC	6/12/16	Вычитающий счетчик
4534	A	↑	$20/10^5$	BCD	—	AC	2,5/6/8	Мультиплексированный выход в двоично-десятичном коде
4737	A	↑	16/20000	BCD	AS	AC	3/8/10	Мультиплексированный выход

Окончание табл. 8.15

40160	S	↑	4/10	BCD	SL	AC	5/12/17	
40161	S	↑	4	B	SL	AC	5/12/17	
40162	S	↑	4/10	BCD	SL	SC	5/12/17	
40163	S	↑	4	B	SL	SC	5/12/17	
40192	S±	↑	4/10	BCD	AL	AC	3/9/13	Отдельные входы для суммирования и вычитания
40193	S±	↑	4	B	AL	AC	3/9/13	Отдельные входы для суммирования и вычитания

Для некоторых из устройств существуют аналоги со значительно более высокой частотой счета.

8.9. Проектирование и реализация последовательных логических схем

В этом разделе рассматриваются два метода проектирования последовательных логических схем:

- на основе ПЛУ;
- на основе ПЗУ.

Пример А: реализация программируемого 3-разрядного счетчика. Используется положительная логика.

Требования:

Сброс: Сброс счетчика в нулевое состояние.

Загрузка: Параллельная загрузка данных в счетчик.

Режим: L — увеличение счета, H — уменьшение счета.

Входы: D_0... — входы данных.

Выходы: Z_0...Z_3 — состояние счетчика в двоичном коде.

Сигналы переноса/заема: для упрощения в данном примере не используются.

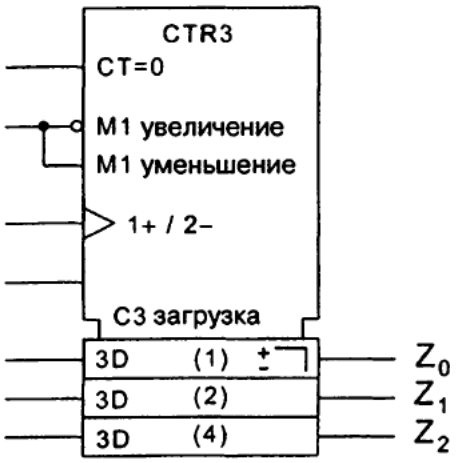


Рис. 8.81. Обозначение реализуемой последовательной логической схемы

Приведенная ниже таблица переходов счетчика описывает поведение как управляющих сигналов: *reset* (сброс), *load* (загрузка) и *mode* (режим работы), так и входов данных ($i = 0...2$) и выходов состояний ($i = 0...2$). Состояние счетчика z_{-i}^{*} соответствует состоянию счетчика *перед* приходом счетного импульса.

reset	*load*	D_i	z_i	$\overline{z}_i$
0	0	×	$z_i^{*\ddagger}$	$\overline{z}_i^{*}$
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	×	×	0	1

Для любого выходного разряда счетчика справедливо соотношение:

$$z_i = \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot z_i^{*} + \overline{reset} \cdot load \cdot D_i. \qquad (8.12)$$

Примечание. Для ПЛУ с инвертированными выходами аналогичное выражение принимает вид:

$$\overline{z}_i = \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{z}_i^{*} + \overline{reset} \cdot load \cdot \overline{D}_i + reset.$$

Далее составляется таблица переходов состояний для реального процесса счета. На состояние счетчика оказывает влияние направление счета и значение сигнала *mode*. Величина *ZS* соответствует числу, определяемому состоянием счетчика. Звездочка указывает на состояние сигнала *после* прихода счетного импульса.

mode	*ZS*	z_2	z_1	z_0	*ZS**	z_2^{*}	z_1^{*}	z_0^{*}
0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1	0	0	1	2	0	1	0
	2	0	1	0	3	0	1	1
	3	0	1	1	4	1	0	0
	4	1	0	0	5	1	0	1
	5	1	0	1	6	1	1	0
	6	1	1	0	7	1	1	1
	7	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	7	1	1	1
	1	0	0	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	1
	3	0	1	1	2	0	1	0
	4	1	0	0	3	0	1	1
	5	1	0	1	4	1	0	0
	6	1	1	0	5	1	0	1
	7	1	1	1	6	1	1	0

Таким образом, каждое положение счетчика можно представить в виде таблицы истинности, в которой только одна комбинация сигналов приводит к равенству $z_i^{*} = 1$. Из этой таблицы выводится таблица реализации, описывающая переход: $z_i \rightarrow z_i^{*}$.

Для **младшего значащего разряда** (МЗР) справедливо:

z_0	z_0^*	*mode*	z_2	z_1	z_0
0	0	–	–	–	–
0	1	0	×	×	0
		1	×	×	0
1	0	0	×	×	1
		1	×	×	1
1	1	–	–	–	–

Из таблицы выводится соотношение:

$$z_0^* = \overline{z}_0. \tag{8.13}$$

Для **среднего значащего разряда** справедливо:

$z_1^* = 1$ для			
mode	z_2	z_1	z_0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$z_1^* = 1$ для			
mode	z_2	z_1	z_0
0	×	0	1
0	×	1	0
1	×	0	0
1	×	1	1

Правая таблица представляет собой краткую форму записи левой таблицы. Из нее следует:

$$z_1^* = \overline{mode} \cdot \overline{z}_1 \cdot z_0 + \overline{mode} \cdot z_1 \cdot \overline{z}_0 + mode \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_0 + mode \cdot z_1 \cdot z_0. \tag{8.14}$$

Для старшего значащего разряда (СЗР) справедливо:

$z_2^* = 1$ для			
mode	z_2	z_1	z_0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

$z_2^* = 1$ для			
mode	z_2	z_1	z_0
0	0	1	1
0	1	0	×
×	1	1	0
1	0	0	0
1	1	×	1

Правая таблица представляет собой краткую форму записи левой таблицы. Из нее следует:

$$z_2^* = \overline{mode} \cdot \overline{z}_2 \cdot z_1 \cdot z_0 + \overline{mode} \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 + z_2 \cdot z_1 \cdot \overline{z}_0 + mode \cdot \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_0 + mode \cdot z_2 \cdot z_0. \tag{8.15}$$

Подставляя выражения (8.13)—(8.15) в уравнение (8.12), получаем следующие соотношения:

$$z_0^* = \overline{reset} \cdot load \cdot D_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{z}_0,$$

$$z_1^* = \overline{reset} \cdot load \cdot D_1 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{mode} \cdot \overline{z}_1 \cdot z_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{mode} \cdot z_1 \cdot \overline{z}_0 +$$
$$+ \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot mode \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot mode \cdot z_1 \cdot z_0,$$

$$z_2^* = \overline{reset} \cdot load \cdot D_2 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{mode} \cdot \overline{z}_2 \cdot z_1 \cdot z_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot \overline{mode} \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 +$$
$$+ \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot z_2 \cdot z_1 \cdot \overline{z}_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot mode \cdot \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_0 + \overline{reset} \cdot \overline{load} \cdot mode \cdot z_2 \cdot z_0.$$

Эти выражения в виде суммы произведений (в ДНФ) могут быть напрямую реализованы при помощи соответствующего ПЛУ с выходными регистрами. На практике для получения таких выражений используется специальное программное обеспечение.

Далее рассмотрим метод, который в меньшей степени сфокусирован на логических выражениях для комбинационных схем, а больше на состояниях схемы.

Пример B: разработка схемы управления светофором на пешеходном переходе. На рис. 8.82 показана требуемая последовательность зажигания ламп светофора. Каждое состояние схемы обведено кружком, а стрелки показывают все возможные переходы между этими состояниями. Если осуществление какого-либо перехода возможно только при выполнении определенных условий, то эти условия записываются рядом со стрелками.

Состояние	Для машин	Для пешеходов	Следующее состояние
0	Зеленый	Красный	1
1	Желтый	Красный	2
2	Красный	Красный	3
3	Красный	Зеленый	4
4	Красный	Красный	5
5	Красный/ Желтый	Красный	0

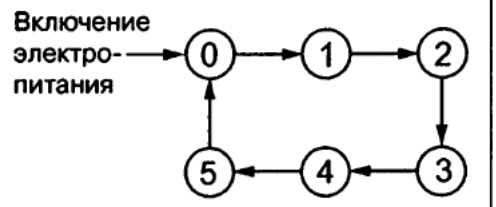


Рис. 8.82. Диаграмма состояний схемы управления светофором

В **синхронных схемах** переходы происходят только при соответствующих фронтах сигналов синхронизации. Стрелка, возвращающаяся назад к тому же самому кружку, указывает на то, что состояние не изменилось. Система, описываемая определенным числом состояний и переходами между ними, называется **конечным автоматом**.

В приведенной таблице показаны состояния контроллера светофора.

На рис. 8.82 приведена диаграмма состояний, построенная по этой таблице. После включения питания, что показано стрелкой с надписью, система переходит в состояние 1. Хотя в состояниях 2 и 4 зажигается один и тот же цвет светофора, они не являются одинаковыми, поскольку различаются соседними состояниями. Все шесть состояний меняются циклически. Такую систему можно реализовать при помощи счетчика по модулю 6, выходы которого управляют небольшим ПЗУ, переводящим номера состояний в зажигание той или иной лампы светофора (рис. 8.83).



Рис. 8.83. Реализация схемы управления светофором на основе счетчика и ПЗУ

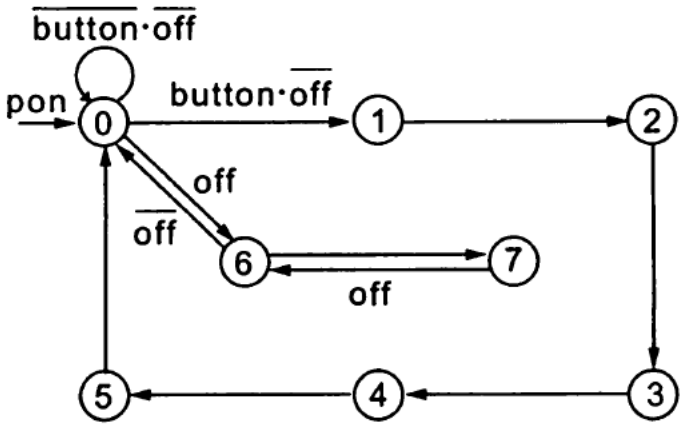


Рис. 8.84. Расширенная диаграмма состояний схемы управления светофором

Реальный светофор должен реагировать на нажатие кнопки включения. Поэтому в диаграмму состояний необходимо ввести состояния, определяемые положением этой кнопки (*button*). К тому же, если на схему поступил внешний сигнал *off*, то должен включиться мигающий режим желтой лампы светофора для транспортных средств, а светофор для пешеходов при этом надо отключить (рис. 8.84).

С учетом этого таблица переходов состояний принимает вид:

Состояние	Для машин	Для пешеходов	Условие	Следующее состояние
0	Зеленый	Красный	*button* $\overline{off}$	1
			off	6
			$\overline{button}\ \overline{off}$	0
1	Желтый	Красный		2
2	Красный	Красный		3
3	Красный	Зеленый		4
4	Красный	Красный		5
5	Красный/Желтый	Красный		0
6	Желтый	–	*off*	7
			off	0
7	–	–		6

Для реализации такой схемы управления подходит схема на рис. 8.85.

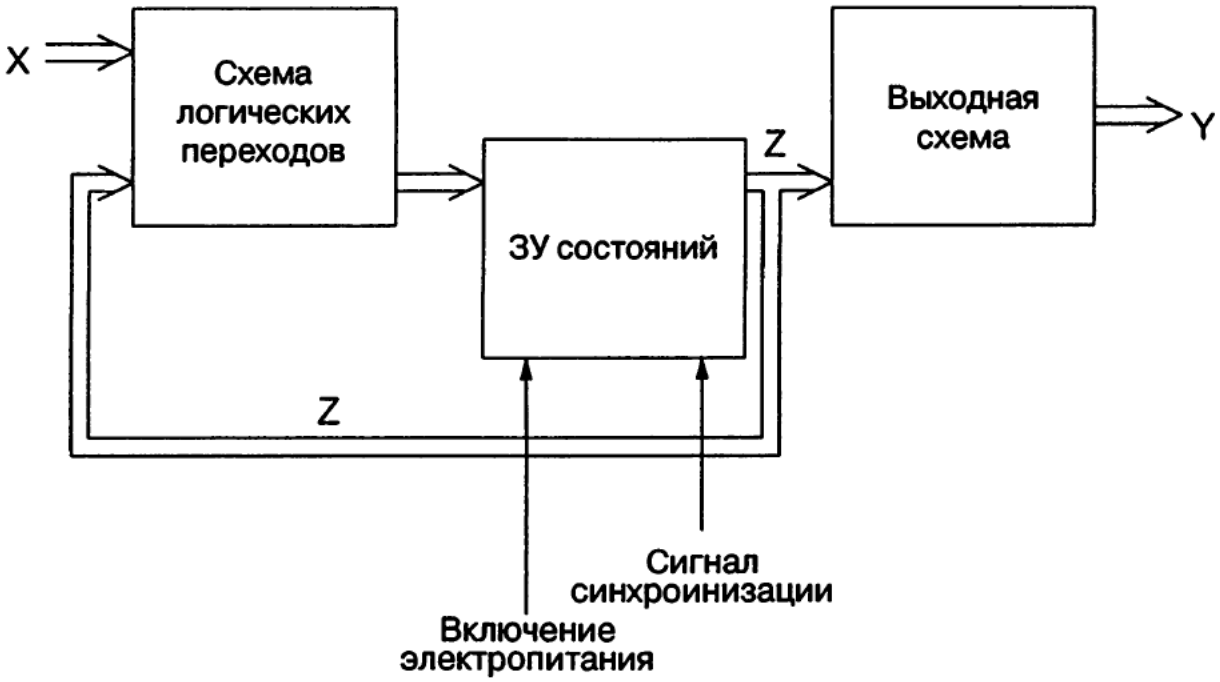


Рис. 8.85. Расширенная схема управления светофором

Как видно из рисунка, в этой схеме счетчик заменен на **запоминающее устройство состояний**, в котором хранится текущее состояние системы в виде **вектора состояний** $z\ (t_n)$, представляющего собой набор двоичных чисел. Следующее состояние $z\ (t_{n+1})$ определяется текущим состоянием и входными переменными, например **входным вектором** x. Обработка векторов x и z проводится в схеме логических переходов. Вектор состояний также поступает в выходную логическую схему, где преобразуется в **выходной вектор** y, определяющий в случае контроллера светофора сигналы зажигания лампы того или иного цвета. На ЗУ состояний также влияют сигналы синхронизации и подачи электропитания.

Контроллер светофора имеет восемь состояний, для идентификации которых достаточно трех триггеров. Следовательно, вектор состояний состоит из трех разрядов. Схема логических переходов обычно реализуется на основе ПЗУ или ППЗУ, часть адреса которого определяется вектором состояний, а другая часть — входным вектором. Под действием определенных условий входные сигналы влияют на выбор следующих состояний системы, поэтому они иногда называются *спецификаторами*. Адреса ПЗУ формируются как сигналами *off* и *button*, так и вектором состояний:

$$\underbrace{\overbrace{x_1\ x_0}^{\text{спецификатор}}\ \overbrace{z_2\ z_1\ z_0}^{\text{состояние}}}_{\text{адрес ПЗУ}}.$$

Содержимое ПЗУ можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица 8.16. Содержимое схемы логических переходов

Адрес ПЗУ	Состояние	*Off*	*Button*	Следующее состояние
0	0	0	0	0
1		0	1	1
2		1	0	6
3		1	1	6
4 ⋮ 7	1	×		2 ⋮ 2
8 ⋮ 11	2	×		3 ⋮ 3
12 ⋮ 15	3	×		4 ⋮ 4
16 ⋮ 19	4	×		5 ⋮ 5
20 ⋮ 23	5	×		0 ⋮ 0
24	6	0	0	0
25		0	1	0
26		1	0	7
27		1	1	7
28 ⋮ 31	7	×		6 ⋮ 6

Отсюда видно, что для реализации схемы логических переходов контроллера светофора требуется ПЗУ на 32×3 разряда. Для выходной схемы комбинационной логики необходимо ПЗУ на 8×5 разрядов. При таком небольшом количестве требуемой памяти контроллер светофора целесообразней строить по схеме, показанной на рис. 8.86.

Схема логических переходов здесь выполняет функции обоих ПЗУ предыдущей логической схемы. В табл. 8.17 представлено содержимое одного ряда ПЗУ на 32×8 разрядов.

Таблица 8.17. Раздел памяти ПЗУ на 32×8 разрядов

Адрес ПЗУ	Состояние	*Off*	*Button*	Следующее состояние	Цвета ламп					Содержимое (дес.)
					красный	желтый	зеленый	красный	зеленый	
					Для машин			Для пешеходов		
⋮	⋮			⋮			⋮			⋮
3	0	1	1	6	0	0	1	1	0	198
⋮	⋮			⋮			⋮			⋮

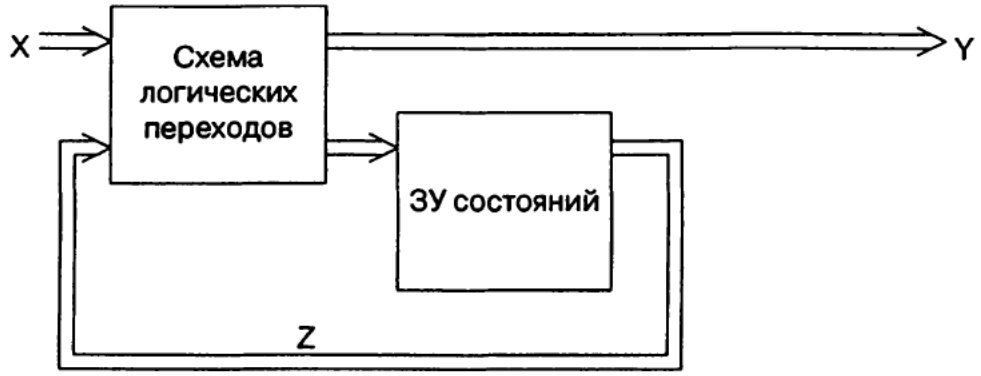


Рис. 8.86. Упрощенная схема контроллера светофора

Примечание. Все сигналы светофора имеют разную длительность. Это обычно достигается либо разделением одного цикла на несколько стадий, либо управлением тактовым генератором при помощи дополнительных выходных сигналов.

Для кодировки 9 состояний требуется 4 триггера. Поскольку такое количество триггеров может поддерживать 16 состояний, 7 состояний триггеров останутся неопределенными. Для того чтобы никакие помехи не могли случайно установить триггеры в одно из запрещенных состояний, на практике каждое из неиспользуемых состояний кодируется соответствующим образом.

В схеме логических переходов контроллера на рис. 8.85 есть переходы, при которых входные переменные могут повлиять на выбор конечного состояния системы. В процессорах такие переходы называются условными переходами. По этой причине ПЗУ схемы логических переходов иногда называют **программным ПЗУ**, а ПЗУ, используемое для расшифровки состояний в выходные сигналы — **выходным ПЗУ**.

Расширенные диаграммы состояний со многими условными переходами чаще всего реализуются при помощи микропроцессоров, обладающих большой гибкостью.

Литература

Almaini A. E. A. *Electronic Logic Systems*. 3rd ed. — : Prentice Hall, 1994.
Demassa T. A., Ciccone Z. *Digital Integrated Circuits*. — : John Wiley & Sons, 1995.
Dorf R. C. *The Electrical Engineering Handbook*: Sect. VIII. — : CRC press, 1993.
Floyd T. L. *Digital Fundamentals*. 7th ed. — : Prentice Hall, 2000.
Floyd T. L. *Electronics Fundamentals: Circuits, Devices, and Applications*. 5th ed. — : Prentice Hall, 2000.
Floyd T. L. *Electronic Devices*. 5th ed. — : Prentice Hall, 1998.
Katz R. H. *Contemporary Logic Design*. — : Benjamin: Cummings, 1994.
Mano M. M. *Digital Design*. 2nd ed. — : Prentice Hall, 1995.
Mano M. M., Kime C. R. *Logic and Computer Design Fundamentals*. 2nd ed. — : Prentice Hall, 2000.
Wakerly J. R. *Digital Design*. 3rd ed. — : Prentice Hall, 2000.
Wilkinson B. *Digital System Design*. 2nd ed. — : Prentice Hall, 1992.
Zwolinski M. *Digital System Design with VHDL*. — : Prentice Hall, 2000.

ГЛАВА 9

ИСТОЧНИКИ ПИТАНИЯ

Источниками питания называются электронные схемы, предназначенные для подачи электроэнергии другим электронным схемам или ее преобразования в требуемый вид. Например, они могут преобразовывать сетевое напряжение в стабилизированное постоянное напряжение, пригодное для работы микроконтроллеров. А так называемые **источники бесперебойного питания** (ИБП) преобразуют постоянное напряжение аккумуляторов в переменное напряжение 230 В/50 Гц, используемое для питания, например компьютеров.

Наиболее распространенное применение источников питания – это преобразование напряжения сети в меньшее напряжение, пригодное для работы подключаемых схем.

При этом источники питания должны:

- изолировать электронные схемы от сети, что требуется для защиты пользователей, и
- обеспечивать стабилизацию постоянного напряжения, поскольку оно не должно зависеть от изменений напряжения сети, а также от нагрузки.

Развязка схем чаще всего выполняется при помощи трансформаторов, которые могут работать либо на сетевой частоте, либо в случаях импульсных источников питания — на более высоких частотах. Применение более высоких частот позволяет при одной и той же номинальной мощности устройства использовать элементы меньших размеров.

Стабилизация напряжения может выполняться при помощи транзисторов, работающих в своих активных областях. Но в современных устройствах для этой цели часто используются импульсные схемы, позволяющие повышать КПД источников питания и снижать их физические размеры.

9.1. Силовые трансформаторы

Трансформаторы преобразуют напряжение сети в напряжение более низкого уровня и играют роль **электрической развязки** между сетью и электронной схемой. При проектировании трансформаторов очень важными являются вопросы безопасности, поэтому все они должны быть аттестованы по правилам, принятым в каждой стране. На рис. 9.1 показаны **национальные знаки приемки**, наносимые на трансформаторы.

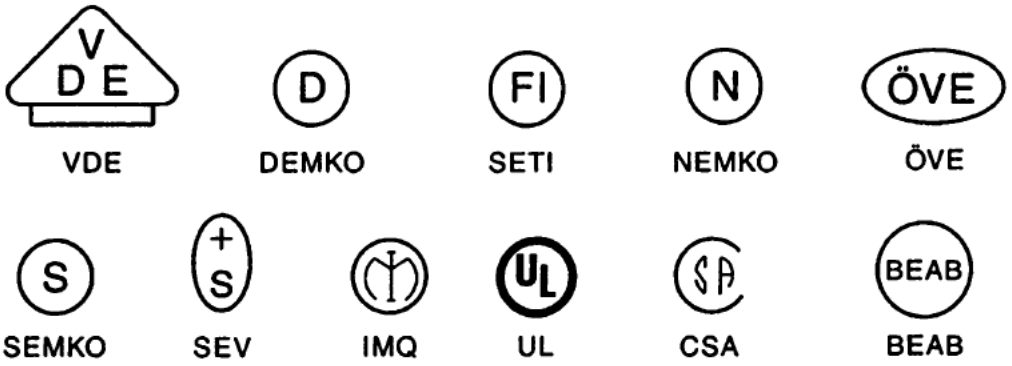


Рис. 9.1. Национальные знаки приемки: VDE — Германия: DEMKO — Дания; SETI — Финляндия; NEMKO — Норвегия; ÖVE — Австрия; SEMKO —Швеция; SEV — Швейцария; IMQ — Италия; UL — США; CSA — Канада; BEAB — Великобритания



Рис. 9.2. Знак соответствия европейским стандартам

В настоящее время в Европейском союзе национальные знаки приемки заменены на **знак соответствия европейским стандартам** — CE-знак (рис. 9.2). Производители трансформаторов несут ответственность за проведение аттестации каждого изделия, что подтверждается соответствующей декларацией. Аттестация должна проводиться только сертифицированными измерительными приборами.

- **Первичной** обмоткой трансформатора является обмотка, подключаемая к сети, а **вторичной обмоткой** — обмотка, соединяемая с электрически изолированной низковольтной цепью.
- **Номинальная мощность** трансформатора определяется произведением номинального напряжения на вторичной обмотке и среднеквадратичного значения максимального тока через нее. Значение номинальной мощности определяется в вольт-амперах (В·А).
- **Номинальное напряжение** для первичной цепи определяется напряжением сети, а для вторичной – напряжением при номинальном токе, т. е. напряжением, при котором трансформатор выдает номинальную мощность.
- **Коэффициент потерь** — это отношение напряжения холостого хода к номинальному напряжению. Этот коэффициент для трансформаторов с номинальной мощностью 3...20 ВА обычно лежит в диапазоне 1,35...1,15.

Внутреннее сопротивление трансформатора может быть вычислено с помощью следующего выражения:

$$R_{int} = \frac{\text{напряжение холостого хода} - \text{номинальное напряжение}}{\text{номинальный ток}}. \quad (9.1)$$

Примечание. Для надежной защиты от короткого замыкания очень маленькие трансформаторы должны иметь большое внутреннее сопротивление. При выполнении этого условия нет необходимости устанавливать дополнительные плавкие предохранители.

- Для **защиты** трансформатора **от перегрузок** в его первичной цепи устанавливают плавкие предохранители. В случаях, когда нагрузка неравномерно распределена между витками вторичной обмотки, каждая часть должна защищаться отдельно.
- Для **защиты от короткого замыкания** в цепь первичной обмотки трансформаторов устанавливают элементы с положительным температурным коэффициентом или термочувствительные выключатели. В этом случае плавкие предохранители не используются.

9.2. Выпрямление и фильтрация

Напряжение со вторичной обмотки трансформатора обычно подвергается выпрямлению и фильтрации, т. е. пульсирующее постоянное напряжение с выхода выпрямителя сглаживается при помощи конденсатора.

Конденсатор фильтра заряжается пульсирующим током в течение периода, определяемого углом φ (рис. 9.3). Величина этого угла зависит от внутреннего сопротивления трансформатора и емкости фильтрующего конденсатора. Обычно она лежит в пределах 30...50°.

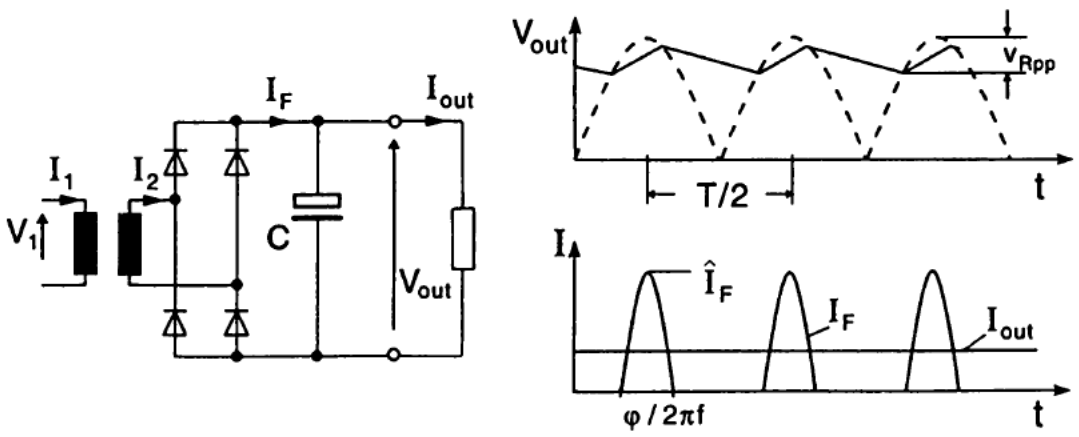


Рис. 9.3. Выпрямление и фильтрация

Выходной ток I_{out} равен среднему значению тока диода I_F. СКЗ тока диода может достигать значений, до двух раз превышающих выходной ток. Пиковое значение тока диода обычно в 4...6 раз больше выходного тока (рис. 9.3).

$$\overline{I}_F = I_{out}, \quad I_{FCK3} \approx 1,5...2 \cdot I_{out}, \quad \hat{I}_F \approx 4...6 \cdot I_{out}.$$

СКЗ тока диода равно СКЗ тока во вторичной обмотке трансформатора. Это свойство используется при выборе значений кажущейся мощности трансформатора.

- Кажущаяся мощность трансформатора S_N должна быть приблизительно равна удвоенной выходной мощности: $V_{out} \cdot I_{out}$.

Емкость конденсатора фильтра обычно выбирается такой, чтобы размах напряжения пульсаций V_{Rpp} составлял порядка 20 % от выходного напряжения V_{out}. Время разряда конденсатора должно быть приблизительно равным половине длительности периода напряжения сети. Используя формулу $i = C\frac{dv}{dt}$, можно найти выражение для определения искомой емкости:

$$C \approx \frac{I_{out} \cdot T/2}{V_{Rpp}} = \frac{I_{out} \cdot T/2}{V_{out} \cdot 0,2}. \qquad (9.2)$$

При сетевой частоте 50 Гц конденсатор C выбирается, исходя из формулы:

$$C\,(\text{мкФ}) \approx \frac{I_{out}\,(\text{мА})}{V_{out}\,(\text{В})} \cdot 50 \qquad (9.3)$$

Если напряжение в сети на 10 % ниже номинального значения, то напряжение пульсаций равно 20 %. Пренебрегая падением напряжения на диоде, можно найти выражение для минимального выходного напряжения:

$$V_{outmin} \approx 0,9 \cdot V_N \cdot \sqrt{2} \cdot 0,8. \qquad (9.4)$$

Для номинального напряжения трансформатора V_N должно выполняться следующее соотношение:

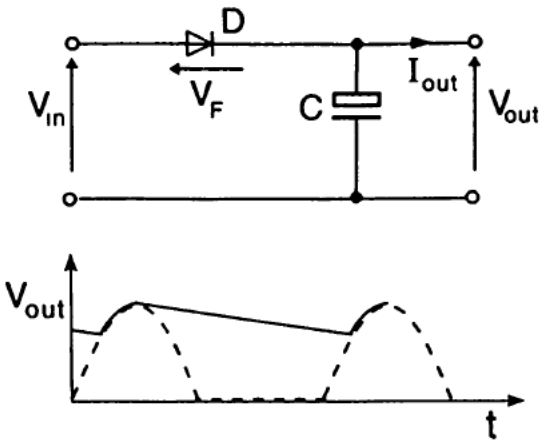
$$V_N \geq V_{out\,min}. \qquad (9.5)$$

Примечание. В большинстве источников питания следом за фильтрующим конденсатором устанавливают регулятор напряжения, на котором обычно падает напряжение порядка 3 В. По этой причине минимальное напряжение на выходе фильтра должно быть приблизительно на 3 В больше требуемого значения регулируемого напряжения.

9.2.1. Схемы разных выпрямителей

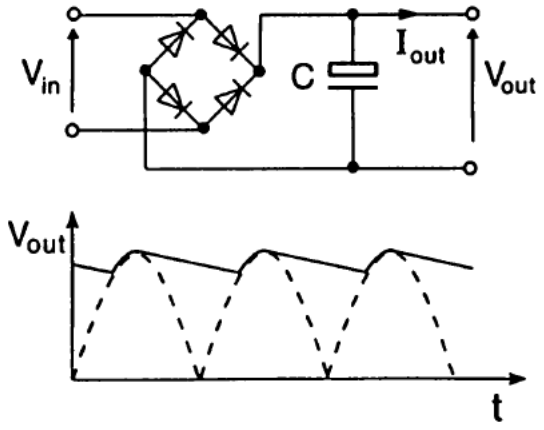
Схемы выпрямителей различных типов приведены на рис. 9.4 и 9.5, сравнительные характеристики даны в табл. 9.1.

Однополупериодный выпрямитель



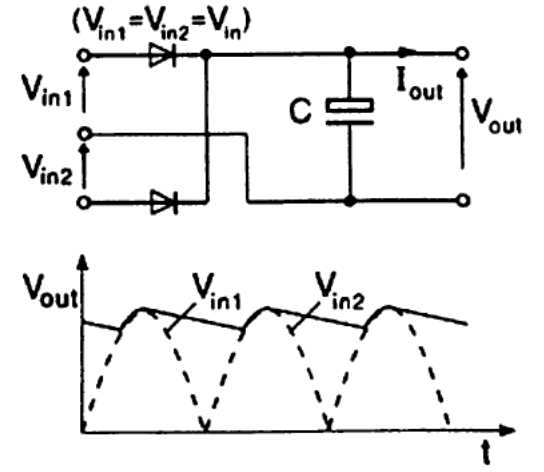
$$V_{\text{out max}} = \hat{V}_{\text{in}} - V_{\text{F}}$$
$$V_{\text{D break}} = 2\hat{V}_{\text{in}}$$
$$P_{\text{D}} \approx I_{\text{out}} \cdot V_{\text{F}}$$
$$C\,(\text{мкФ}) \approx \frac{I_{\text{out}}\,(\text{мА})}{V_{\text{out}}\,(\text{В})} \cdot 100$$
$$V_{\text{out min}} = 0{,}7\hat{V}_{\text{in}}$$

Выпрямитель мостового типа



$$V_{\text{out max}} = \hat{V}_{\text{in}} - 2V_{\text{F}}$$
$$V_{\text{D break}} = \hat{V}_{\text{in}}$$
$$P_{\text{D tot}} \approx 2I_{\text{out}} \cdot V_{\text{F}}$$
$$C\,(\text{мкФ}) \approx \frac{I_{\text{out}}\,(\text{мА})}{V_{\text{out}}\,(\text{В})} \cdot 50$$
$$V_{\text{out min}} = 0{,}7\hat{V}_{\text{in}}$$

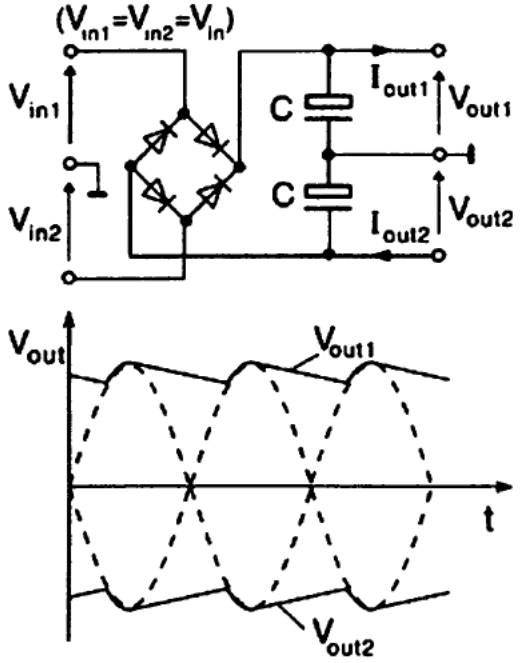
Двухполупериодный выпрямитель



$$V_{\text{out max}} = \hat{V}_{\text{in}} - V_{\text{F}}$$
$$V_{\text{D break}} = 2\hat{V}_{\text{in}}$$
$$P_{\text{D tot}} \approx I_{\text{out}} \cdot V_{\text{F}}$$
$$C\,(\text{мкФ}) \approx \frac{I_{\text{out}}\,(\text{мА})}{V_{\text{out}}\,(\text{В})} \cdot 50$$
$$V_{\text{out min}} = 0{,}7\hat{V}_{\text{in}}$$

Рис. 9.4. Примеры выпрямительных схем (величина C соответствует частоте 50 Гц)

Двухполупериодный выпрямитель с двухполярным выходом



$$V_{\text{out max}} = \hat{V}_{\text{in}} - V_{\text{F}}$$

$$V_{\text{D break}} = 2\hat{V}_{\text{in}}$$

$$P_{\text{D tot}} \approx (I_{\text{1out}} + I_{\text{2out}}) \cdot V_{\text{F}}$$

$$C \approx \frac{I_{\text{out}}}{V_{\text{out}}} \cdot 50$$

$$V_{\text{out min}} = 0{,}7\,\hat{V}_{\text{in}}$$

Рис. 9.5. Пример выпрямительной схемы (величина C соответствует частоте 50 Гц):
$V_{\text{D break}}$ — напряжение пробоя диода;
$P_{\text{D tot}}$ — полное рассеяние мощности на диоде

Таблица 9.1. Сравнение выпрямительных схем

	Преимущества	**Недостатки**
Однополупериодный выпрямитель	Простота схемы	Большая емкость конденсатора, высокое среднеквадратичное значение тока
Мостовой выпрямитель	Одна вторичная обмотка, напряжение пробоя диодов равно пиковому значению входного напряжения	Большие потери на диодах
Двухполупериодный выпрямитель	Малые потери на диодах (подходит для работы при больших токах)	Две вторичные обмотки, напряжение пробоя диодов равно удвоенному пиковому значению входного напряжения.
Двухполупериодный выпрямитель с двухполярным выходом	Один мостовой выпрямитель для двух выходных напряжений, одинаковая нагрузка на обе вторичные обмотки	Напряжение пробоя диодов равно удвоенному пиковому значению входного напряжения.

9.3. Стабилизация аналогового напряжения

Для стабилизации напряжения используются регуляторы, поддерживающие постоянный уровень напряжения, на который не должны влиять **ни изменения сетевого напряжения, ни изменения нагрузки**.

9.3.1. Стабилизация напряжения при помощи стабилитрона

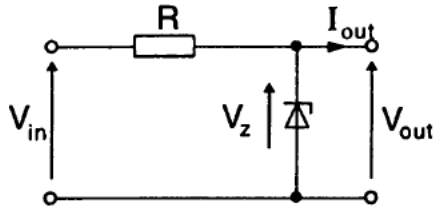


Рис. 9.6. Стабилизация напряжения при помощи стабилитрона

Выходное напряжение схемы, показанной на рис. 9.6, равно напряжению на стабилитроне:

$$V_{out} = V_z. \tag{9.6}$$

Максимальные потери мощности P_{Lz} на стабилитроне происходят тогда, когда к выходу схемы не подключена нагрузка ($I_{out} = 0$):

$$P_{Lz} = \frac{V_{in\ max} - V_z}{R} \cdot V_z. \tag{9.7}$$

Максимально допустимый выходной ток определяется выражением:

$$I_{out\ max} = \frac{V_{in\ max} - V_z}{R}. \tag{9.8}$$

Если выходной ток становится больше этого значения, то через стабилитрон перестает течь ток и напряжение V_{out} падает ниже V_z. **Максимальный ток короткозамкнутой цепи** равен:

$$I_{s/c} = \frac{V_{in\ max}}{R}.$$

9.3.2. Стабилизация напряжения при помощи транзистора

Выходное напряжение схемы на рис. 9.7 определяется выражением:

$$V_{out} = V_z - V_{BE} \approx V_z - 0{,}7\ \text{В}. \tag{9.9}$$

На основе транзистора Q_2 реализован источник тока, ток которого равен $I_s = 0{,}7\ \text{В} / R_1$. Схема источника тока выбрана для того, чтобы при номинальной нагрузке на базу транзистора Q_1 поступал требуемый ток, а через стабилитрон протекал небольшой ток. При этом выходное напряжение удерживается на уровне $V_{out} = V_z - 0{,}7$ В для любой величины нагрузки (от ненагруженного

состояния до номинального). В случае перегрузки открывается транзистор Q_3, что приводит к уменьшению тока базы транзистора Q_1. Таким образом, значение **максимального выходного тока** ограничивается величиной $I_{out\,max} = 0{,}7\ В / R_M$.

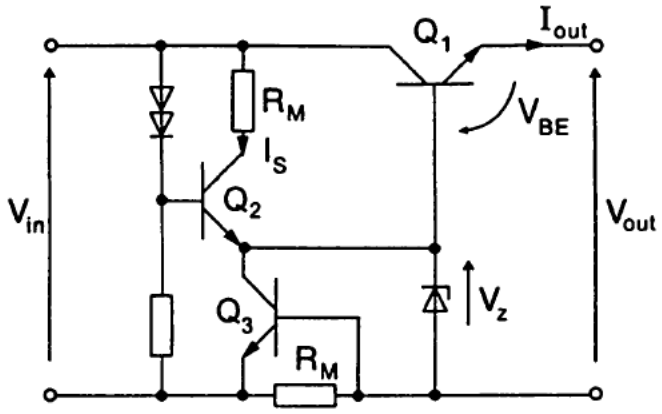


Рис. 9.7. Стабилизация напряжения при помощи стабилитрона

9.3.3. Регуляторы напряжения

Выходное напряжение схемы на рис. 9.8 определяется выражением:

$$V_{out} = V_{ref} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \qquad (9.10)$$

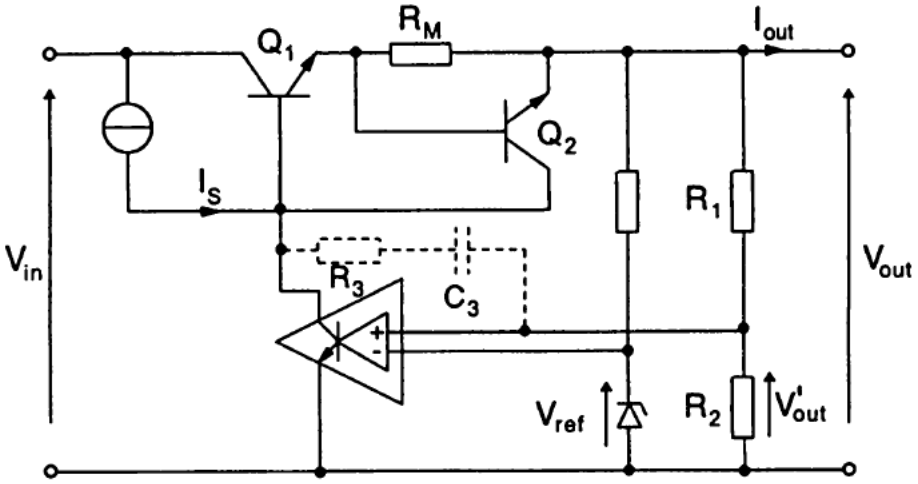


Рис. 9.8. Регулятор напряжения

ОУ усиливает разность напряжений ($V_{ref} - V'_{out}$), представляющую собой разность между требуемым и действительным значениями выходного напряжения. Открытый коллекторный выход ОУ управляет током базы транзистора Q_1, регулируя долю тока I_S, текущего через него. Например, при очень высоком выходном напряжении ОУ уменьшает ток базы, тем самым призакрывая транзистор Q_1, что приводит к снижению выходного напряжения. При перегрузке, т. е. когда $I_{out} > V_{BE}/R_M \approx 0{,}7\ В/R_M$, ток I_S забирает на себя транзистор Q_2. При очень высоком коэффициенте усиления замкнутой цепи схема входит в колебательный режим. Для предотвращения этого на основе ОУ реализуется ПИ-регулятор (пропорционально-интегральный регулятор), для чего в схему, показанную на рис. 9.8, вводится *RC*-цепочка (R_3, C_3).

Для получения **регулируемого выходного напряжения** на инвертирующий вход ОУ подается опорное напряжение, создаваемое при помощи потенциометра. Всегда лучше менять величину опорного напряжения, чем настраивать делитель R_1/R_2, поскольку это не оказывает влияния на управляющий контур и, следовательно, не сказывается на стабильности системы. Подстройка делителя R_1/R_2 производится только с целью точной регулировки уровня выходного напряжения.

9.3.3.1. Интегрированные регуляторы напряжения

Существует большое разнообразие интегрированных регуляторов напряжения. Обычно в них встраиваются цепи защиты от короткого замыкания, отключения нагрузки и перегрева. Самыми распространенными регуляторами положительных напряжений являются регуляторы серии 78xx, а отрицательных — 79xx. В этих сериях есть регуляторы на разные значения номинальных токов.

Пример. На рис. 9.9 показан пример источника питания на ±12 В. В отличие от схем, рассмотренных раньше, здесь к регуляторам подключены керамические конденсаторы емкостью 100 нФ, назначение которых — снижение возможных пульсаций регулируемых напряжений.

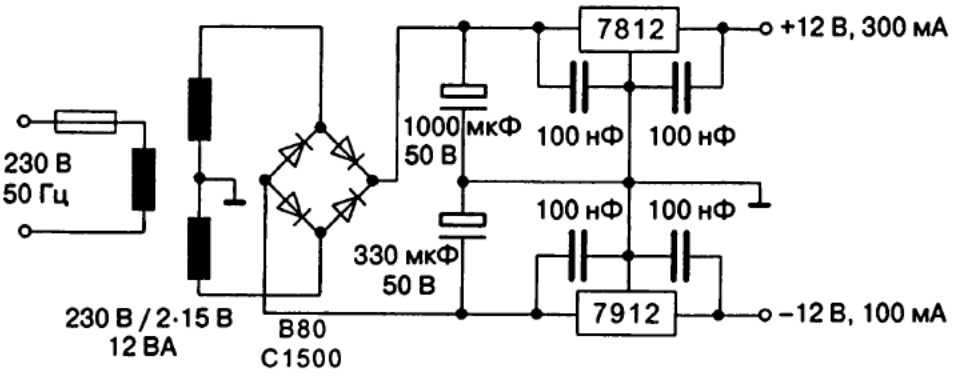


Рис. 9.9. Пример источника питания с регуляторами напряжений

9.4. Импульсные источники питания

Импульсные источники питания (ИИП) используются во многих электронных системах: практически во всех телевизорах и компьютерах, а также в большинстве современных промышленных приборов. В устройствах с аккумуляторным питанием ИИП обеспечивают постоянный уровень внутреннего напряжения питания, не зависящий от уровня заряда батареи. ИИП также используются для получения больших значений напряжений, чем напряжение, выдаваемое аккумулятором, что необходимо для питания CD-плееров, ноутбуков, мобильных телефонов и камер. ИИП обладают следующими преимуществами по сравнению с линейными регулируемыми источниками питания:

- Теоретически ИИП работают без потерь мощности. Однако на практике их КПД обычно составляет 70...95 %. Это приводит к низкой рабочей температуре, а следовательно, к высокой надежности.
- ИИП работают на высоких частотах, что позволяет снижать габариты и вес применяемых компонентов.

Итак, ИИП являются более эффективными, более легкими, меньшими по размерам и более дешевыми устройствами по сравнению с линейными регулируемыми источниками питания.

Практически все ИИП имеют одинаковый принцип действия. Основными элементами ИИП являются электронные переключатели (обычно транзисторы), работающие на очень высоких частотах (как правило, 20...300 кГц). Отношение времени включения ключа ко времени его отключения определяет средний поток энергии, снимаемый со входа схемы. Стоящий на выходе ИИП ФНЧ превращает импульсный сигнал на выходе переключателя в сглаженное выходное напряжение. Поскольку электронные ключи и ФНЧ теоретически свободны от потерь, ИИП обладают высокими КПД.

В этом разделе будут рассмотрены несколько типов ИИП. Хотя все они имеют одинаковый принцип действия, они сильно отличаются способами его реализации.

Различаются **вторичные** и **первичные** ИИП. Во вторичных ИИП нет электрических развязок между входными и выходными цепями. Они используются там, где развязка от сети уже существует, или там, где эта развязка не требуется, например в устройствах с аккумуляторным питанием. В первичных ИИП входные и выходные цепи электрически изолированы друг от друга. Их переключающие транзисторы установлены в цепях первичных обмоток трансформаторов. Высокочастотные трансформаторы обеспечивают передачу энергии во вторичную обмотку. Поскольку такие схемы работают на высоких частотах, применяемые трансформаторы имеют сравнительно небольшие размеры.

Существуют три основные схемы ИИП: **обратного хода, прямого хода** и **резонансные**. ИИП обратного хода передают энергию в интервалы времени, когда транзисторы находятся в закрытом состоянии, а преобразователи прямого хода — когда транзисторы открыты. Резонансные ИИП используют резонансные схемы, переключающие транзисторы в моменты времени, когда их напряжения или токи пересекают нулевые уровни, что позволяет снизить нагрузку на них.

Регулятор коэффициента мощности также является ИИП, используемым для обеспечения синусоидальности тока в сети.

9.4.1. ИИП с несимметричными выходами, вторичные ИИП

9.4.1.1. Понижающий преобразователь

Понижающий преобразователь преобразует входное напряжение в более низкое выходное напряжение.

На рис. 9.10 показана схема понижающего преобразователя. Транзистор Q работает как ключ, переключаемый с высокой частотой под управлением напряжения V_{PWM}, поступающего с ШИМ. Отношение t_1/T, в котором t_1 – время открытого состояния транзистора, T – длительность периода, называется **рабочим циклом** или **коэффициентом заполнения импульсной последовательности**.

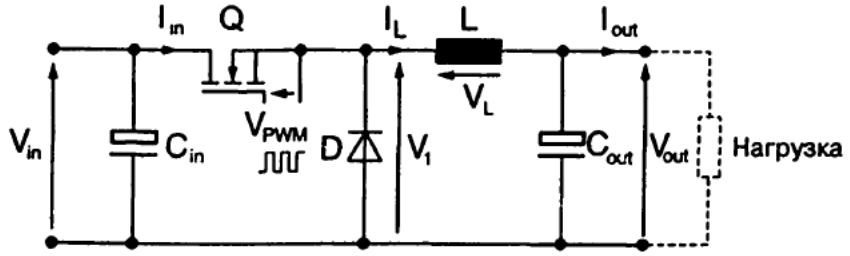


Рис. 9.10. Понижающий преобразователь

При дальнейшем анализе схемы предполагается, что падения напряжений на открытых транзисторе и диоде равны нулю.

Когда транзистор открыт, напряжение V_1 равно V_{in}. При закрытом транзисторе (фаза блокировки) катушка индуктивности L продолжает поддерживать ток в контуре, состоящем из нагрузки, конденсатора C_{out} и диода. Напряжение V_1 в это время равно нулю, что позволяет току I_L не падать до нуля. Такой режим называется **режимом непрерывной передачи тока в нагрузку** или **непрерывным режимом работы**. В этом режиме напряжение V_1 изменяется от V_{in} до нуля в соответствии с рабочим циклом изменения V_{PWM} (рис. 9.11). ФНЧ, реализованный на основе L и C_{out}, вырабатывает выходное напряжение, равное среднему значению напряжения V_1, т. е. $V_{out} = \overline{V_1}$. Следовательно, в непрерывном режиме:

$$V_{out} = \frac{t_1}{T} V_{in}. \qquad (9.11)$$

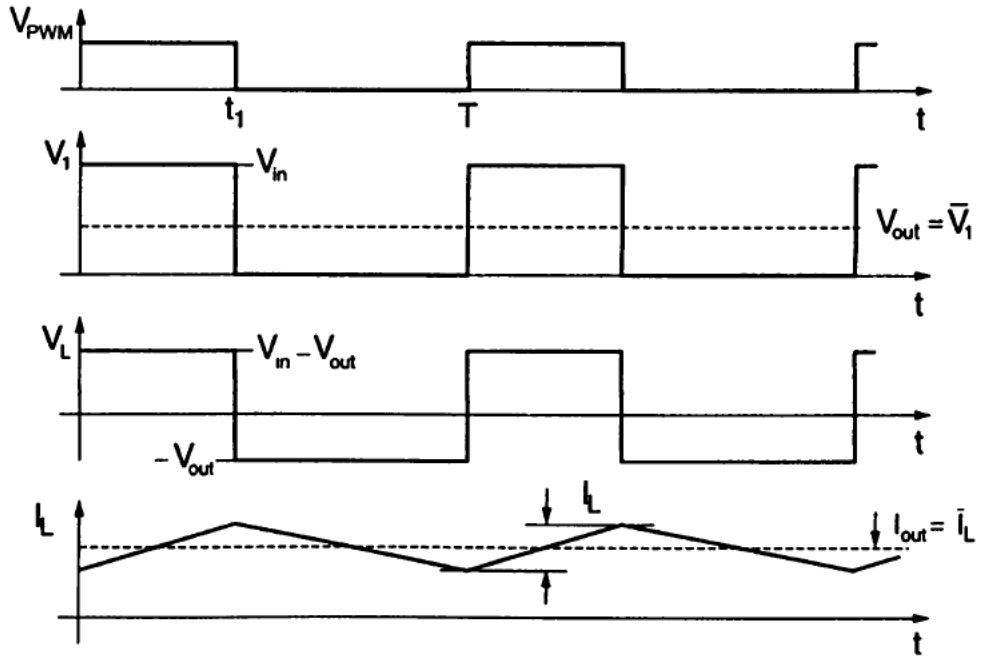


Рис. 9.11. Диаграммы напряжений и токов в понижающем преобразователе

- В непрерывном режиме выходное напряжение является функцией рабочего цикла и входного напряжения, не зависящей от импеданса нагрузки.

Ток через катушку индуктивности I_L имеет треугольную форму, и его среднее значение определяется нагрузкой. Размах пульсаций тока ΔI_L

зависит от величины индуктивности катушки и вычисляется при помощи закона Фарадея:

$$V = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \Delta i = \frac{1}{L}\cdot V\cdot \Delta t \Rightarrow \Delta I_L = \frac{1}{L}\left(V_{in} - V_{out}\right)\cdot t_1 = \frac{1}{L}V_{out}\left(T - t_1\right). \quad (9.12)$$

При $V_{out} = \frac{t_1}{T}V_{in}$ и частоте переключения f для режима непрерывной работы справедливо:

$$\Delta I_L = \frac{1}{L}\left(V_{in} - V_{out}\right)\cdot\frac{V_{out}}{V_{in}}\cdot\frac{1}{f}. \quad (9.13)$$

- Размах пульсаций тока ΔI_L не зависит от нагрузки. Среднее значение тока I_L равно величине выходного тока I_{out}.

При низком токе через нагрузку, когда $I_{out} \le \Delta I_L/2$, ток I_L опускается до нуля в каждом рабочем цикле. Такой режим называется **режимом прерывистых токов**. В этом режиме вышеприведенные вычисления становятся несправедливыми.

Расчет L и C_{out}

Для определения значения L необходимо задать величину ΔI_L. Проблема состоит в следующем: если ΔI_L выбрать очень маленькой, то величина индуктивности получится довольно большой, что потребует использования очень тяжелой и дорогой катушки индуктивности. При высоком значении ΔI_L ток в закрытом состоянии транзистора будет очень большим, что приведет к большим потерям в транзисторе. При проектировании понижающих преобразователей часто пользуются следующим эмпирическим соотношением: $\Delta I_L \approx 0{,}2I_{out}$. Тогда величину индуктивности можно получить при помощи выражения:

$$L = \frac{1}{\Delta I_L}\left(V_{in} - V_{out}\right)\cdot\frac{V_{out}}{V_{in}}\cdot\frac{1}{f}. \quad (9.14)$$

Максимальное значение тока через катушку индуктивности равно:

$$\hat{I}_L = I_{out} + \frac{1}{2}\Delta I_L. \quad (9.15)$$

Считая, что величина размаха пульсаций тока ΔI_L мала по сравнению с постоянной составляющей тока, СКЗ тока, текущего через катушку индуктивности, определяется выражением:

$$I_{L(СКЗ)} \approx I_{out}. \quad (9.16)$$

Емкость конденсатора C_{out} обычно выбирается, исходя из частоты среза ФНЧ, которая должна быть приблизительно в 100...1000 раз меньше частоты переключения. Для более точного расчета величины емкости необходимо знать максимальное значение номинального переменного тока и последовательный эквивалентный импеданс конденсатора Z_{max}. Оба этих значения можно получить из соответствующих справочных данных.

Пульсации тока ΔI_L приводят к пульсациям напряжения ΔV_{out} на выходном конденсаторе C_{out}. При нормальных частотах переключения размах пульсаций напряжения зависит от эквивалентного импеданса конденсатора Z_{max} и для его определения можно применить закон Ома:

$$\Delta V_{out} \approx \Delta I_L \cdot Z_{max}. \quad (9.17)$$

На выбор конденсатора оказывает влияние не его емкость, а величина его последовательного эквивалентного импеданса на частоте переключения, который можно найти в справочных данных.

9.4.1.2. Повышающий преобразователь

Повышающий ИИП преобразует входное напряжение в более высокое выходное напряжение.

Повышающие преобразователи используются в устройствах с аккумуляторным питанием, в которых электронным схемам требуется более высокое рабочее напряжение, чем могут выдать применяемые батареи. Такими устройствами могут быть ноутбуки, мобильные телефоны и вспышки фотокамер.

На рис. 9.12 показана схема повышающего преобразователя. Транзистор Q работает как ключ, которым управляет напряжение V_{PWM}, снимаемое с ШИМ.

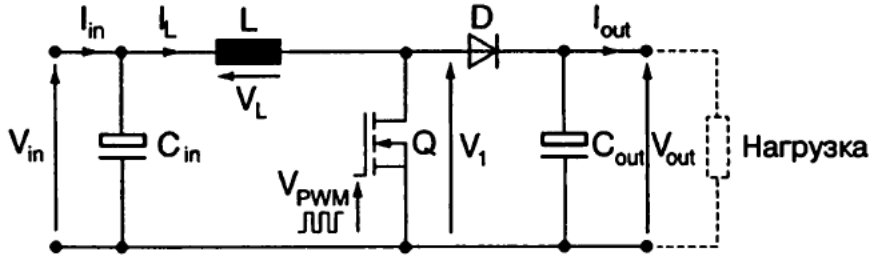


Рис. 9.12. Повышающий преобразователь

При анализе схемы предполагается, что падения напряжения на транзисторе и диоде равны нулю (в открытом состоянии).

Когда транзистор открыт, напряжение на катушке индуктивности равно входному напряжению V_{in}, а ток через нее линейно падает. Когда транзистор закрывается, ток I_L течет через диод и заряжает выходной конденсатор.

Принцип работы повышающего преобразователя можно также описать при помощи закона сохранения энергии: при открытом транзисторе катушка индуктивности накапливает энергию, которую потом (при закрытии транзистора) передает через диод выходному конденсатору.

Если на транзистор тактовые импульсы не приходят, то выходной конденсатор через катушку индуктивности и диод заряжается до уровня $V_{out} = V_{in}$. При работе транзистора в переключательном режиме выходное напряжение превышает уровень входного напряжения.

Так же как и в понижающих преобразователях (раздел 9.4.1.1), здесь возможны два режима работы: прерывистых токов и непрерывный, различающиеся тем, что в первом из них в закрытом состоянии транзистора ток I_L падает до нуля, а во втором — нет.

Из закона Фарадея следует, что в непрерывном режиме работы и при соблюдении условий стационарности (см. также рис. 9.13) для повышающего преобразователя справедливо следующее соотношение:

$$\Delta I_L = \frac{1}{L} V_{in} \cdot t_1 = \frac{1}{L} (V_{out} - V_{in}) \cdot (T - t_1),$$

из которого вытекает:

$$V_{out} = V_{in} \frac{T}{T - t_1}. \qquad (9.18)$$

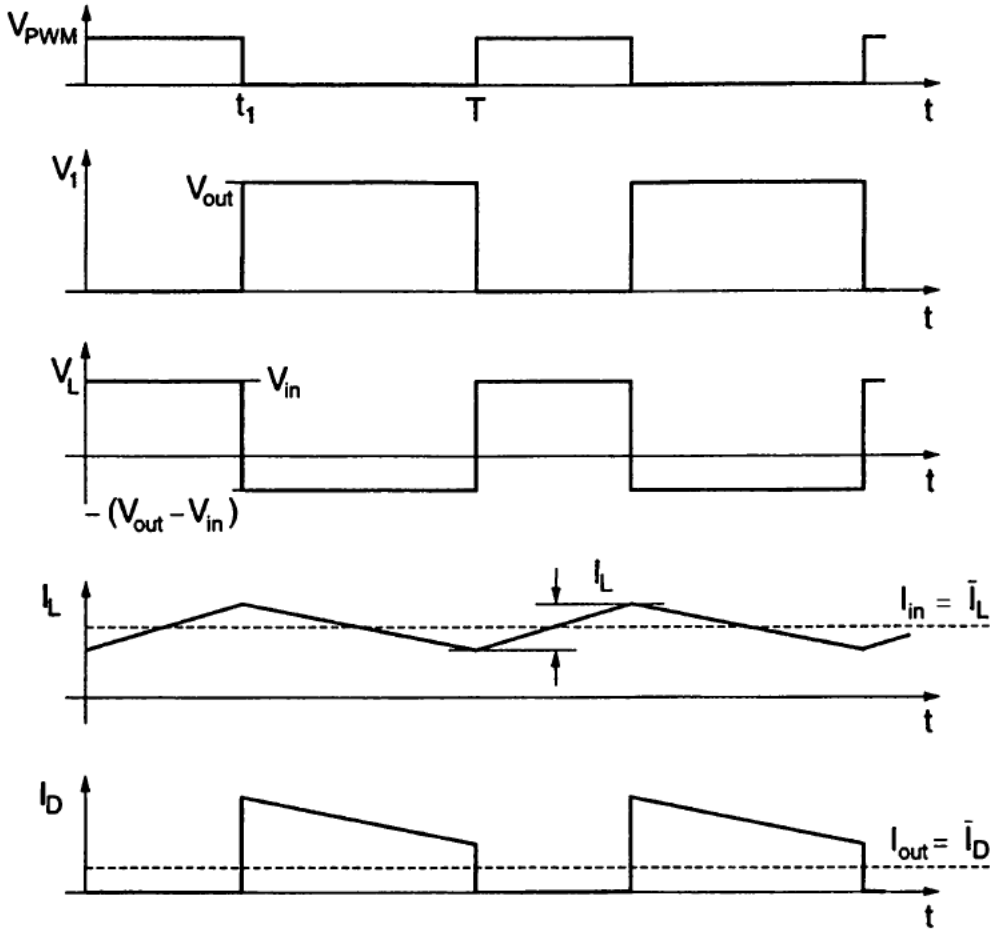


Рис. 9.13. Диаграммы токов и напряжений повышающего преобразователя

- В непрерывном режиме выходное напряжение является функцией рабочего цикла и входного напряжения, не зависящей от импеданса нагрузки.
- Повышающие преобразователи не защищены от короткого замыкания, поскольку в них не предусмотрены отключающие устройства в цепях возможного возникновения короткого замыкания.

Примечание. Повышающий преобразователь, не встроенный в замкнутую систему управления, рабочий цикл которого фиксирован и задается генератором импульсов, не должен работать без нагрузки. Это объясняется тем, что в каждом рабочем цикле энергия, накопленная в катушке индуктивности, передается на выходной конденсатор. Следовательно, в случае отсоединенной нагрузки выходное напряжение будет непрерывно расти, что неминуемо выведет ИИП из строя.

Расчет L и C_{out}

Так же как и в понижающих преобразователях, расчет значения L начинается с выбора ΔI_L. Размах пульсаций тока ΔI_L обычно задается равным 20% от величины входного тока $\Delta I_L \approx 0{,}2 I_{in}$. Предполагая, что в преобразователе нет никаких потерь, т. е. входная мощность равна выходной, можно определить значение входного тока:

$$V_{in} \cdot I_{in} = V_{out} \cdot I_{out} \quad \Rightarrow \quad I_{in} = I_{out} \cdot \frac{V_{out}}{V_{in}}.$$

Тогда величину индуктивности можно получить при помощи выражения:

$$L = \frac{1}{\Delta I_L}\left(V_{out} - V_{in}\right) \cdot \frac{V_{in}}{V_{out}} \cdot \frac{1}{f}. \quad (9.19)$$

Пиковое значение тока через катушку индуктивности равно:

$$\hat{I}_L = I_{in} + \frac{1}{2}\Delta I_L. \quad (9.20)$$

Считая, что величина размаха пульсаций тока ΔI_L мала по сравнению с постоянной составляющей тока, СКЗ тока, текущего через катушку индуктивности, определяется выражением:

$$I_{L(СКЗ)} \approx I_{in}. \quad (9.21)$$

Выходной конденсатор C_{out} заряжается импульсами тока I_D (рис. 9.13). Размах пульсаций выходного напряжения ΔV_{out}, причиной которых является пульсирующий ток I_D, в основном определяется импедансом конденсатора Z_{max} на частоте переключения. Величину Z_{max} можно найти в справочных данных.

Размах пульсаций выходного напряжения ΔV_{out} вычисляется при помощи закона Ома:

$$\Delta V_{out} \approx I_D \cdot Z_{max}. \quad (9.22)$$

9.4.1.3. Инвертирующий преобразователь

Инвертирующий ИИП преобразует положительное входное напряжение в отрицательное выходное напряжение.

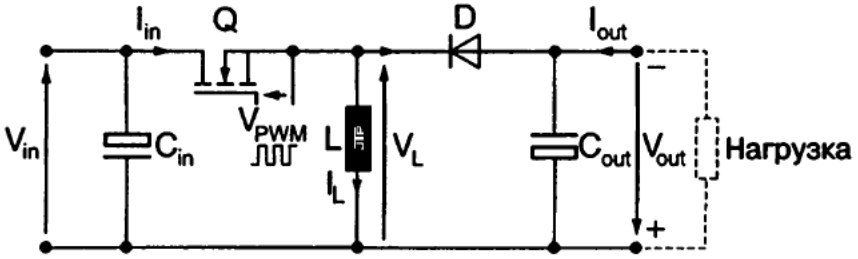


Рис. 9.14. Инвертирующий преобразователь

На рис. 9.14 показана основная схема инвертирующего преобразователя. Транзистор Q работает как ключ, работой которого управляет напряжение V_{PWM}, снимаемое с ШИМ. Когда транзистор открыт, ток через катушку индуктивности линейно увеличивается. При закрытом транзисторе ток I_L заряжает выходной конденсатор C_{out}. Обратите внимание на полярность выходного напряжения на рис. 9.14!

В непрерывном режиме работы и при соблюдении условий стационарности для выходного напряжения справедливо следующее выражение:

$$V_{out} = V_{in}\frac{t_1}{T - t_1}. \quad (9.23)$$

Ток через катушку индуктивности и размах его пульсаций:

$$\bar{I}_L = I_{out}\frac{T}{T - t_1} = I_{out}\left(\frac{V_{out}}{V_{in}} + 1\right), \quad \Delta I_L = \frac{1}{L}V_{in}t_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{V_{in}V_{out}}{V_{in} + V_{out}} \cdot \frac{1}{f}. \quad (9.24)$$

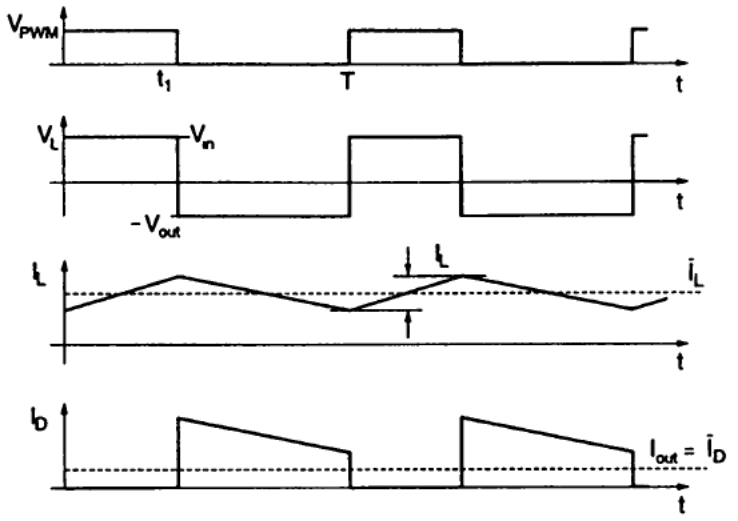


Рис. 9.15. Диаграммы токов и напряжений инвертирующего преобразователя

9.4.2. Первичные ИИП

9.4.2.1. Преобразователи обратного хода

Преобразователи обратного хода относятся к семейству первичных ИИП, обеспечивающих электрическую развязку между входными и выходными цепями. Такие преобразователи в основном используются в электронных устройствах мощностью приблизительно до 300 Вт (телевизорах, персональных компьютерах, принтерах и т. д.), работающих от сети.

По сравнению с другими типами ИИП преобразователи обратного хода состоят из очень небольшого количества элементов. Другим их достоинством является то, что один блок управления может одновременно работать с несколькими изолированными выходными цепями.

На рис. 9.16 показана основная схема преобразователя обратного хода. Транзистор Q работает как ключ, работой которого управляет напряжение V_{PWM}, снимаемое с ШИМ. Когда транзистор открыт, напряжение на первичной обмотке трансформатора V_1 равно входному напряжению V_{in}, что приводит к линейному росту тока I_1. В течение этой фазы рабочего цикла энергия запасается в сердечнике трансформатора. Поскольку при открытом транзисторе диод закрыт, ток во вторичной обмотке равен нулю. При закрытом транзисторе нулевым становится ток I_1, а напряжения на трансформаторе в соответствии с законом Фарадея $v = L\frac{di}{dt}$ меняют знаки. Это приводит к открытию диода и передаче энергии от сердечника на выходной конденсатор.

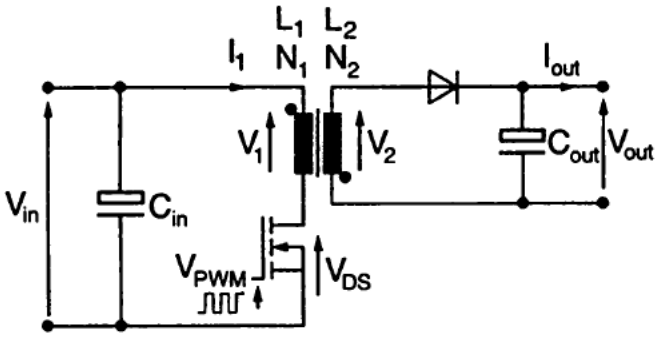


Рис. 9.16. Преобразователь обратного хода

Когда транзистор открыт, его напряжение сток–исток V_{DS} равно 0 (рис. 9.17). Когда транзистор закрывается, выходное напряжение возвращается обратно в первичную цепь, что теоретически приводит к повышению напряжения сток–исток: $V_{DS} = V_{in} + V_{out} \cdot N_1/N_2$. Если напряжение в сети равно 230 В/50 Гц, то напряжение V_{DS} становится равным 700 В. На практике это напряжение вследствие явления самоиндукции на индуктивности рассеяния трансформатора будет даже выше. Поэтому минимальное номинальное напряжение пробоя перехода сток–исток должно быть в этом случае не менее 800 В.

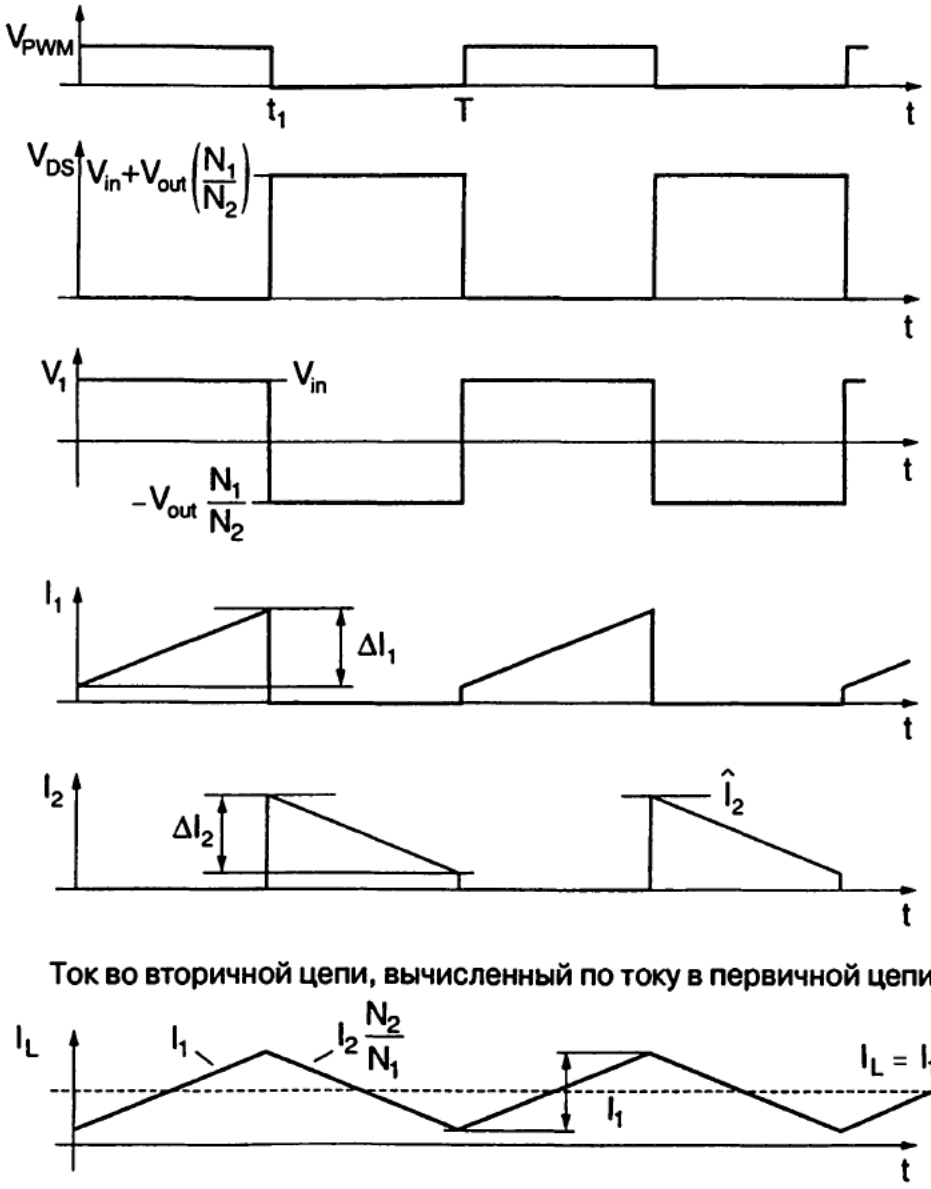


Рис. 9.17. Диаграммы токов и напряжений преобразователя обратного хода

Функция трансформатора заключается в накоплении энергии в течение одной фазы рабочего цикла и передаче ее на выходной конденсатор в течение второй фазы цикла. Поэтому его можно рассматривать как дроссель с двумя обмотками: первичной и вторичной. Для хранения энергии в сердечнике трансформатора делают воздушный зазор. Для уменьшения индуктивности

рассеяния первичная и вторичная обмотки должны быть сильно связаны друг с другом. Следует отметить, что энергия индуктивности рассеяния не может быть передана во вторичную цепь, и поэтому она выделяется в виде тепла в первичной цепи, что ведет к ее нагреву.

Проектирование преобразователей обратного хода

Среднее значение напряжения в первичной цепи трансформатора $\overline{V}_1$ при соблюдении условий стационарности должно быть равно нулю (в противном случае ток будет расти до бесконечности). Следовательно:

$$V_{in} \cdot t_1 = V_{out} \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot (T - t_1),$$

$$V_{out} = V_{in} \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{t_1}{T - t_1}. \qquad (9.25)$$

Соотношение витков в обмотках трансформатора выбирается из условия равенства значений выходной номинальной мощности во время стадии накопления энергии t_1 и во время стадии передачи энергии $T - t_1$:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_{in}}{V_{out}}. \qquad (9.26)$$

В этом случае напряжение пробоя транзистора и обратное напряжение диода равны:

транзистора: $$V_{DS} = V_{in} + V_{out} \cdot \frac{N_1}{N_2} \approx 2V_{in}, \qquad (9.27)$$

диода: $$V_R = V_{out} + V_{in} \cdot \frac{N_2}{N_1} \approx 2V_{out}. \qquad (9.28)$$

Следует отметить, что номинальное напряжение пробоя транзистора должно быть значительно выше этого значения, поскольку при закрытом состоянии транзистора энергия, запасенная на индуктивности рассеяния трансформатора L_{leak}, не переносится во вторичную цепь. Для ограничения величины перенапряжения в схему преобразователя вводится **гасящая цепочка** (рис. 9.18). В момент запирания транзистора ток индуктивности рассеяния через диод D начинает заряжать конденсатор C. При этом мощность рассеивается на резисторе R.

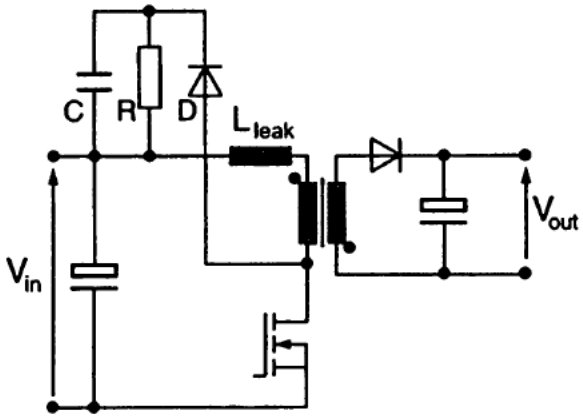


Рис. 9.18. Преобразователь обратного хода с гасящей цепочкой для ограничения пикового напряжения на транзисторе

Если R и C должны работать при 230 В, то значение R подбирается экспериментально так, чтобы падение постоянного напряжения на конденсаторе составило 350...400 В.

Перед тем как приступить к расчету трансформатора, определяют значение индуктивности L_1 первичной обмотки (см. рис. 9.16). В фазе открытого

состояния транзистора в индуктивности L_1 накапливается энергия, которую необходимо передать на выход преобразователя. Величина этой энергии определяется выражением: $W = P_{out} \cdot T$, где T — период частоты переключения, а P_{out} — номинальная мощность. В фазе закрытого состояния транзистора эта энергия передается на выходной конденсатор. Как и в предыдущих случаях, весь цикл делится на две равных стадии. В течение первой из них происходит накопление энергии, в течение второй — ее передача.

Во время первой стадии напряжение на первичной обмотке трансформатора равно V_{in}, а ток через нее имеет форму пилы. Входная мощность за период определяется выражением (рис. 9.19):

$$W = V_{in} \cdot \frac{\hat{I}_1}{2} \cdot \frac{T}{2}.$$

Эта энергия сохраняется в индуктивности L_1 и может быть записана:

$$W = \frac{1}{2} L_1 \hat{I}_1^2.$$

Отсюда находится величина индуктивности:

$$L_1 \approx \frac{V_{in}^2}{8 P_{out} \cdot f}.$$

где предполагается, что КПД равен 100 %. Если до выхода доходит не вся энергия, запасенная в первичной обмотке, т. е. $\eta \neq 100\,\%$, то индуктивность равна:

$$L_1 \approx \frac{V_{in}^2}{8 P_{out} \cdot f} \cdot \eta. \qquad (9.29)$$

Отсюда видно, что для определения индуктивности необходимо знать КПД преобразователя, которая для оценки обычно берется равной 0,75.

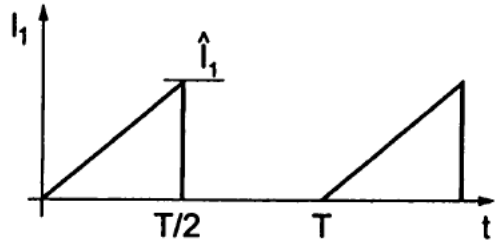


Рис. 9.19. Форма входного тока I_1 при номинальной мощности

Пиковое значение тока I_1 определяется выражением:

$$\hat{I}_1 = \frac{4 \cdot P_{out}}{V_{in} \cdot \eta}.$$

СКЗ I_1 равно:

$$I_{1СКЗ} = \frac{\hat{I}_1}{\sqrt{6}}.$$

В разделе 9.4.5 приведены формулы, по которым можно рассчитать параметры сердечника и обмоток трансформатора.

Примечание. Сердечник трансформатора должен иметь зазор, достаточно большой для сохранения большей части магнитной энергии (см. раздел 9.4.5).

Выходной конденсатор заряжается импульсами тока I_2 (см. рис.9.17). Пульсации выходного напряжения ΔV_{out} связаны с пульсациями зарядного тока I_2 и в основном зависят от импеданса конденсатора Z_{max}, который можно найти в справочных таблицах. Размах пульсаций выходного напряжения ΔV_{out}:

$$\Delta V_{out} \approx \hat{I}_2 \cdot Z_{max}.$$

При сетевом напряжении 230 В /50 Гц емкость входного конденсатора:

$$C_{in} \approx 1 \frac{\text{мкФ}}{\text{Вт}} \cdot P_{in}.$$

Характерной особенностью преобразователей обратного хода является возможность управления несколькими выходными цепями при помощи одного регулятора (рис. 9.20).

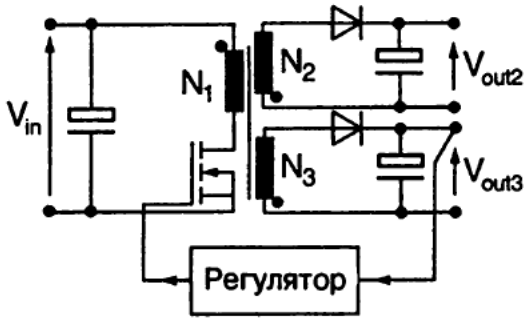


Рис. 9.20. Преобразователь обратного хода с несколькими выходными напряжениями

Независимо регулируемым является только одно выходное напряжение V_{out3}. Напряжение V_{out2} связано с напряжением V_{out3} соотношением $\frac{V_{out2}}{V_{out3}} = \frac{N_2}{N_3}$. Энергия, запасенная в обмотке $L_1(N_1)$ во время первой фазы цикла, передается на выходы схемы в течение второй фазы. Соотношения между выходными напряжениями определяются соотношениями между количествами витков в соответствующих обмотках. Со стороны первичной цепи две вторичные обмотки являются параллельными.

9.4.2.2. Преобразователь прямого хода на одном транзисторе

Преобразователи прямого хода относятся к семейству первичных ИИП, обеспечивающих электрическую развязку между входными и выходными цепями. Такие преобразователи в основном используются в электронных устройствах мощностью приблизительно до 1 кВт (рис. 9.21).

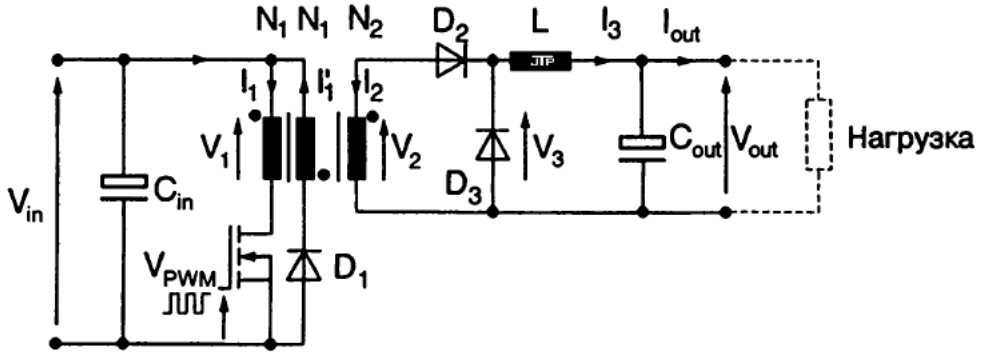


Рис. 9.21. Преобразователь прямого хода на одном транзисторе

Преобразователь прямого хода передает энергию, когда транзистор открыт. В этой фазе напряжение на первичной обмотке трансформатора V_1 равно входному напряжению V_{in}. Обмотка N_2 совпадает по направлению с обмоткой N_1, а напряжение на ней определяется выражением $V_2 = V_{in} \cdot \frac{N_2}{N_1}$. От величины

напряжения V_2 зависит ток I_2, равный в этой фазе цикла току I_3, заряжающий через диод и катушку индуктивности L выходной конденсатор.

Во второй фазе цикла транзистор закрыт, и в обмотках N_1 и N_2 тока нет. Ток I_3, текущий через диод D_3, теперь определяется энергией, запасенной в катушке L. Без учета падения напряжения на прямо смещенном диоде D_3 напряжение V_3 можно считать равным нулю. В течение этой фазы магнитный поток трансформатора должен уменьшиться до нуля, для чего сердечник размагничивается через обмотку N_1' и диод D_1. При этом он передает энергию, накопленную в индуктивности намагничивания, в источник входного напряжения. Поскольку в обмотках N и N_1' одинаковое количество витков, время размагничивания должно равняться времени первой фазы цикла, когда транзистор открыт. По этой причине минимальное время второй фазы цикла и длительность первой фазы необходимо делать одинаковыми, что приводит к максимальному рабочему циклу $t_1/T = 0{,}5$.

Во второй фазе цикла, когда транзистор закрыт, напряжение на N_1' равно входному напряжению V_{in}. Это напряжение возвращается назад в первичную обмотку N и, следовательно, $V_1 = -V_{in}$. По этой причине напряжение сток–исток повышается до величины $V_{DS} \geq 2V_{in}$ (рис. 9.22).

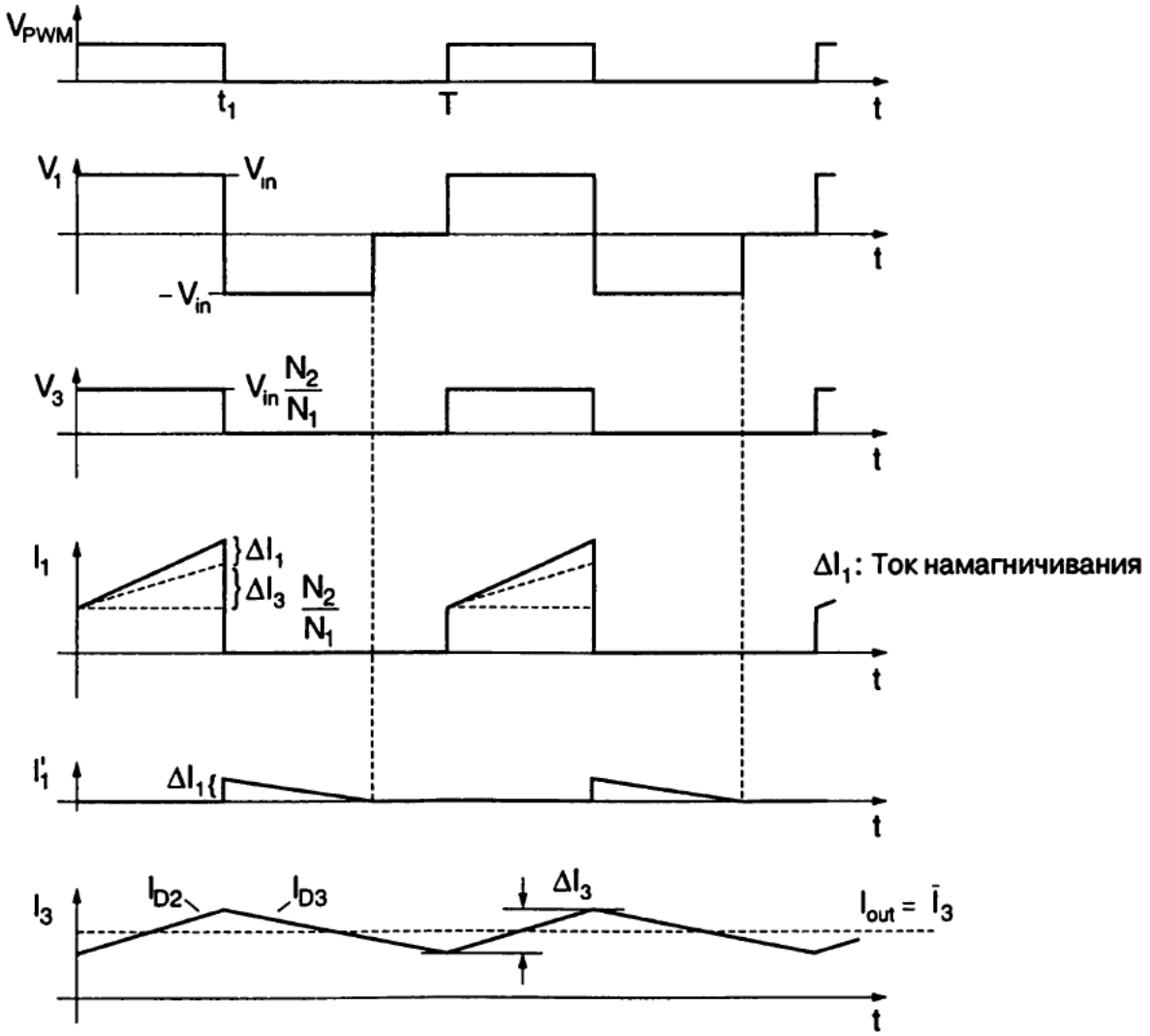


Рис. 9.22. Диаграммы токов и напряжений преобразователя прямого хода на одном транзисторе

По сравнению с трансформатором в преобразователе обратного хода, трансформатор в преобразователе прямого хода является «нормальным» трансформатором, и его функция заключается не в накоплении энергии, а ее передаче. По этой причине в его сердечнике нет воздушного зазора.

- Напряжение пробоя транзистора V_{DS} должно быть больше удвоенного входного напряжения.
- Обмотки N и N_1' должны быть сильно связанными. Здесь также необходимо использовать гасящую цепочку, такую же, как показано на рис. 9.18.
- В отличие от преобразователя обратного хода преобразователь прямого хода имеет только одно регулируемое выходное напряжение.

Максимальный рабочий цикл $t_1/T = 0{,}5$.

Проектирование преобразователей прямого хода на одном транзисторе

Выходное напряжение V_{out} равно среднему значению напряжения V_3. Максимальный рабочий цикл равен 0,5. Следовательно (см. раздел 9.4.1.1):

$$V_{out} = V_{in} \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{t_1}{T}. \tag{9.30}$$

Соотношение витков в обмотках трансформатора равно:

$$\frac{N_2}{N_1} = 2\frac{V_{out}}{V_{in}}, \quad N_1 = N_1'. \tag{9.31}$$

Для расчета трансформатора см. также раздел 9.4.5.

Для вычисления индуктивности L подходит метод, используемый при проектировании понижающего преобразователя. При этом сначала определяется размах пульсаций тока I_3 на катушке индуктивности ΔI_3, который обычно задается равным 20 % от выходного тока, т. е. $\Delta I_3 \approx 0{,}2 \cdot I_{out}$. Если максимальный рабочий цикл равен 0,5, то получаем следующее выражение для нахождения индуктивности:

$$L = \frac{V_{out} \cdot T/2}{\Delta I_3}. \tag{9.32}$$

Размах пульсаций выходного напряжения ΔV_{out} в основном зависит от импеданса выходного конденсатора Z_{max}, который находится из справочных таблиц:

$$\Delta V_{out} \approx \Delta I_L \cdot Z_{max}.$$

При напряжении сети 230 В/50 Гц емкость входного конденсатора равна:

$$C_{in} \approx 1\frac{\text{мкФ}}{\text{Вт}} \cdot P_{in}.$$

Преобразователь прямого хода на двух транзисторах

На рис. 9.23 показана схема преобразователя прямого хода на двух транзисторах.

Транзисторы Q_1 и Q_2 переключаются одновременно. Когда транзисторы открыты, напряжение на первичной обмотке равно входному напряжению V_{in}. Когда транзисторы закрыты, сердечник трансформатора размагничивается

через диоды D_1 и D_2. При этом он передает энергию, накопленную в индуктивности намагничивания, в источник входного напряжения. Использование двух транзисторов позволяет обойтись без дополнительной обмотки N_1', применяемой в преобразователях на одном транзисторе. Более того, в преобразователях на двух транзисторах обеспечение сильной связи между обмотками трансформатора не является таким же критичным вопросом, как в преобразователях на одном транзисторе. Все это позволяет получать в преобразователях прямого хода на двух транзисторах гораздо более высокую выходную мощность по сравнению с преобразователями на одном транзисторе.

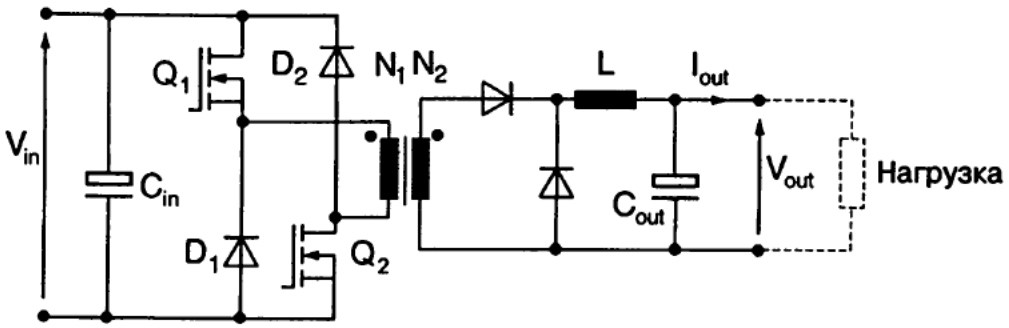


Рис. 9.23. Преобразователь прямого хода на двух транзисторах

Расчет преобразователей на двух транзисторах аналогичен расчету преобразователей на одном транзисторе.

- Напряжение пробоя транзисторов в преобразователях прямого хода на двух транзисторах V_{DS} должно быть равно входному напряжению.
- Преобразователи прямого хода на двух транзисторах могут повышать выходную мощность до нескольких киловатт. При этом они имеют достаточно простую схему.

9.4.2.3. Двухтактные преобразователи

Двухтактные преобразователи используются для работы с устройствами с очень высокой мощностью.

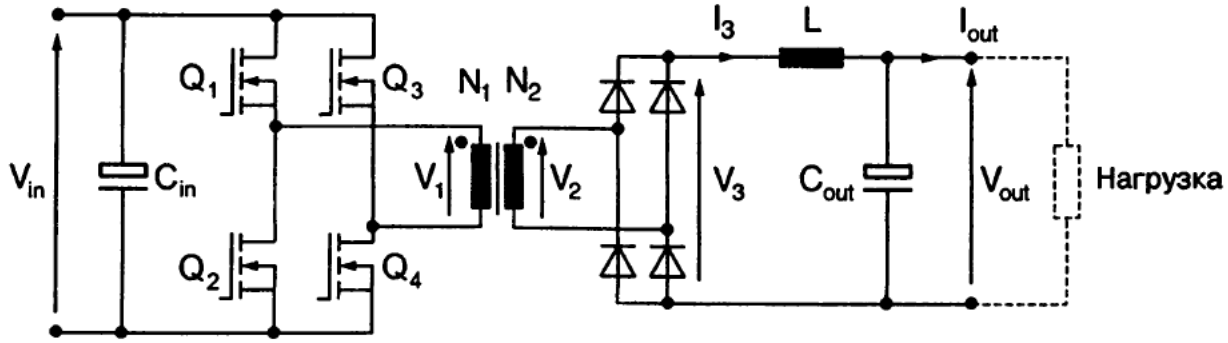


Рис. 9.24. Двухтактный преобразователь мостового типа

Двухтактный преобразователь управляется при помощи высокочастотного трансформатора. В таком преобразователе для передачи энергии используются оба полупериода: и положительный, и отрицательный. Напряжение на

первичной обмотке V_1 может быть равным: $+V_{in}$, $-V_{in}$ или нулю в зависимости от того, какие пары транзисторов (Q_1, Q_4 или Q_2, Q_3) открыты или закрыты. Во вторичной цепи переменное напряжение выпрямляется и сглаживается при помощи катушки L и выходного конденсатора C_{out} (рис. 9.24).

При работе в непрерывном режиме справедливо выражение (см. также раздел 9.4.1.1):

$$V_{out} = V_{in} \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{t_1}{T}. \tag{9.33}$$

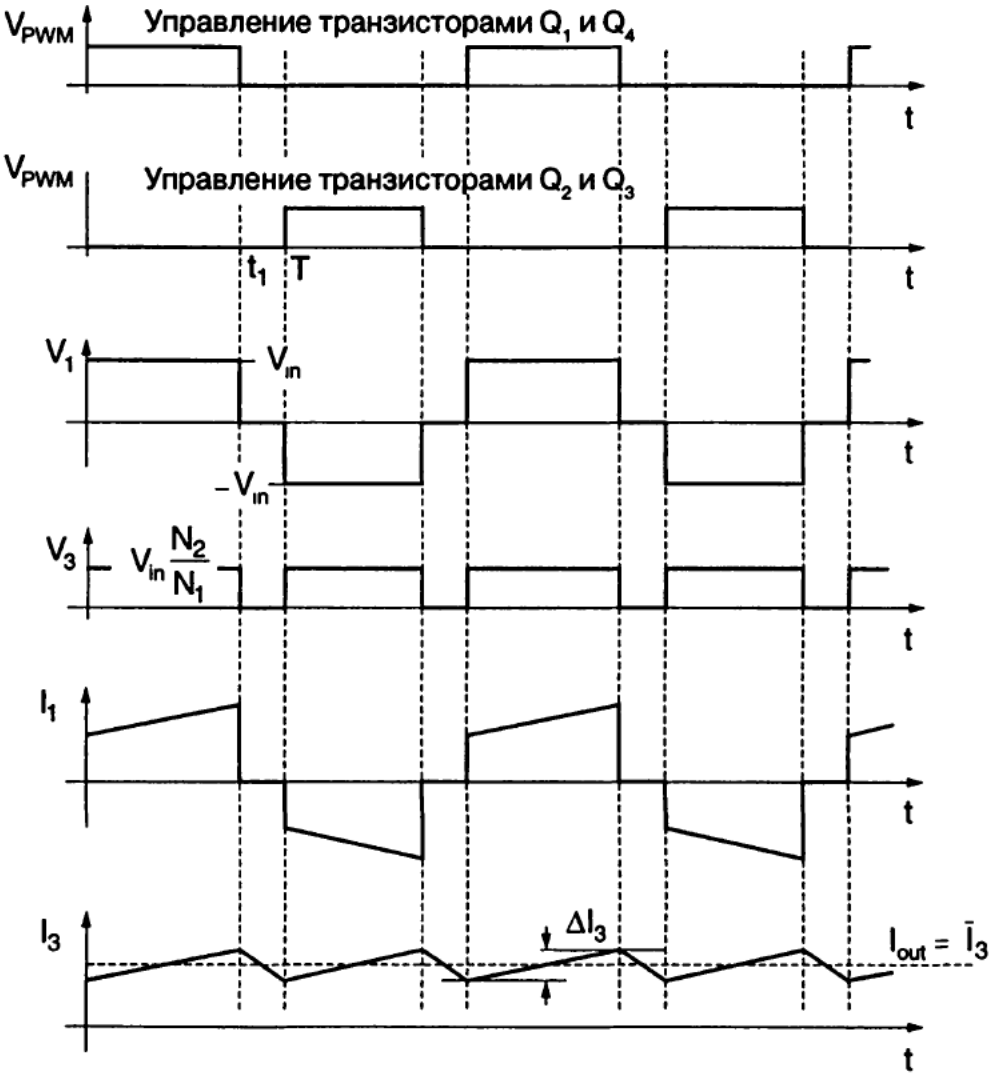


Рис. 9.25. Диаграммы токов и напряжений двухтактного преобразователя

Коэффициент заполнения t_1/T теоретически возрастает до 100 %. Но на практике это реализовать невозможно, поскольку пары транзисторов должны переключаться с некоторым интервалом времени, чтобы избежать короткого замыкания по входу. Для соотношения витков должно выполняться следующее условие:

$$\frac{N_2}{N_1} \geq \frac{V_{out}}{V_{in}}. \tag{9.34}$$

Транзисторы в двухтактном преобразователе могут переключаться в соответствии с максимальным рабочим циклом, равным 0,5. Тогда после выпрямления $t_1/T = 1$.

Параметры катушки L и конденсатора C_{out} рассчитываются так же, как в понижающем преобразователе (см. раздел 9.4.1.1).

Полумостовой двухтактный преобразователь

На рис. 9.26 показана схема полумостового двухтактного преобразователя. Конденсаторы C_1 и C_2 делят входное напряжение на два, поэтому амплитуда напряжения на первичной обмотке V_1 равна $\pm V_{in}$. В отличие от мостового преобразователя для трансформатора преобразователя полумостового типа справедливо следующее соотношение:

$$\frac{N_2}{N_1} \geq 2\frac{V_{out}}{V_{in}}.$$

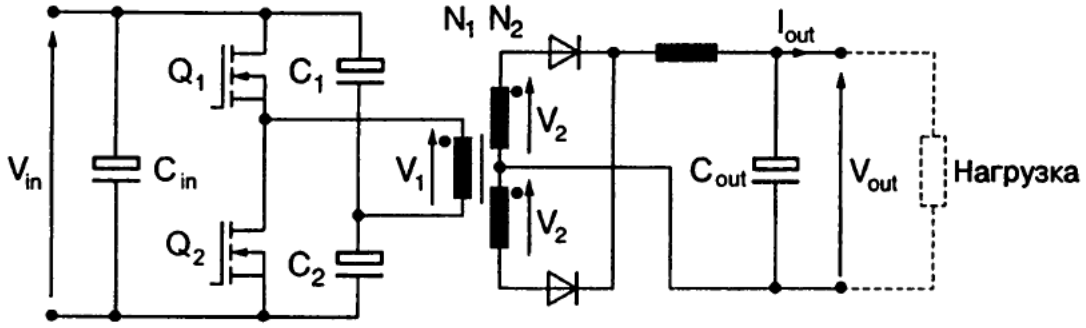


Рис. 9.26. Полумостовой двухтактный преобразователь с двухполупериодным выпрямителем

В рассматриваемом преобразователе вместо двухполупериодного мостового выпрямителя используется двухполупериодный выпрямитель на двух диодах. Выбор типа выпрямителя зависит от требуемых выходных напряжения и тока. Разница между двумя типами выпрямителей заключается в том, что в одном из них ток проходит через два диода, а в другом — через один. Поэтому выпрямитель на двух диодах используется при работе с большими токами (для уменьшения потерь на выпрямление), а мостовой выпрямитель — при работе с высокими напряжениями (для исключения из схемы одной вторичной обмотки).

9.4.2.4. Резонансные преобразователи

В резонансных преобразователях для переключения транзисторов используются резонансные цепи. Переключение происходит, когда либо соответствующее напряжение, либо ток пересекают нулевой уровень, что позволяет снизить нагрузку на транзисторы и повысить помехозащищенность схемы.

Для регулирования выходного напряжения схемы резонансный преобразователь управляется импульсами постоянной длительности, но разной частоты. Длительность тактовых импульсов должна равняться половине периода резонансной частоты. При выполнении этого условия переключение транзисторов происходит при пересечении нулевого уровня их токами или напряжениями.

Существует много типов резонансных преобразователей. Например, резонансный контур может располагаться либо в первичной, либо во вторичной цепи. Другая альтернатива — использование либо последовательного, либо параллельного резонансного контура, определяемое тем, от чего должно происходить переключение схемы: от пересечения нулевого уровня током или напряжением.

Проектирование резонансных преобразователей будет рассмотрено на примере последовательного резонансного преобразователя.

Двухтактный последовательный резонансный преобразователь

На рис. 9.27 показана схема двухтактного последовательного резонансного преобразователя, резонансный контур которого состоит из катушки L и конденсатора C. Считается, что в начальный момент времени напряжение V_C на конденсаторе C равно нулю. При открытии транзистора Q_1 первую половину периода синусоидальный ток течет через цепь: Q_1, L, Tr, C и C_{in}. Во время этого полупериода конденсатор C заряжается от 0 до V_{in}. По окончании полупериода транзистор Q_1 закрывается (при этом никаких потерь энергии не происходит). Через короткий промежуток времени открывается транзистор Q_2, и начинается вторая половина периода, в течение которой конденсатор C разряжается до 0.

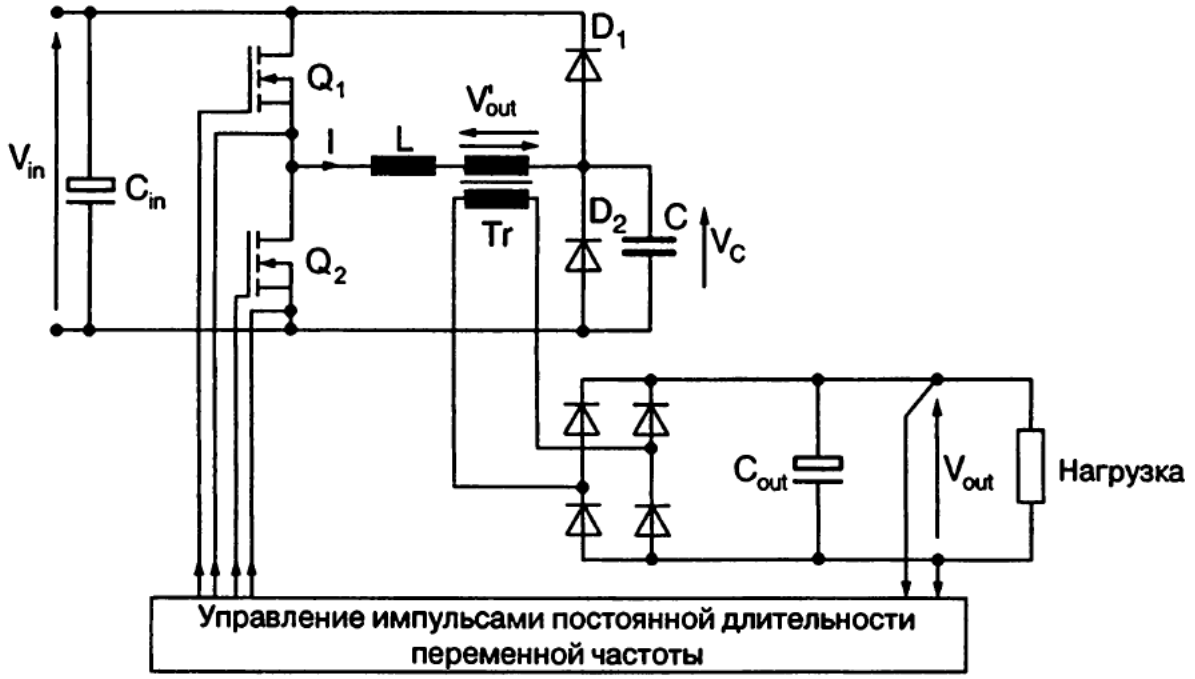


Рис. 9.27. Двухтактный последовательный резонансный преобразователь

Во время каждого полупериода происходит передача энергии с первичной цепи трансформатора во вторичную. Первичная обмотка трансформатора Tr работает как источник напряжения. При протекании тока через первичную обмотку часть выходного напряжения $V'_{out} = V_{out} \cdot \frac{N_2}{N_1}$ возвращается в первичную

цепь, при этом происходит передача энергии, величина которой определяется выражением $W = V'_{out} \cdot \int i(t)dt$. Энергия передается два раза в течение одного резонансного периода. Следовательно, для выходной мощности справедливо следующее соотношение $P_{out} = W \cdot 2f_{sw}$. На рис. 9.28 показана эквивалентная схема для одной полуволны преобразования.

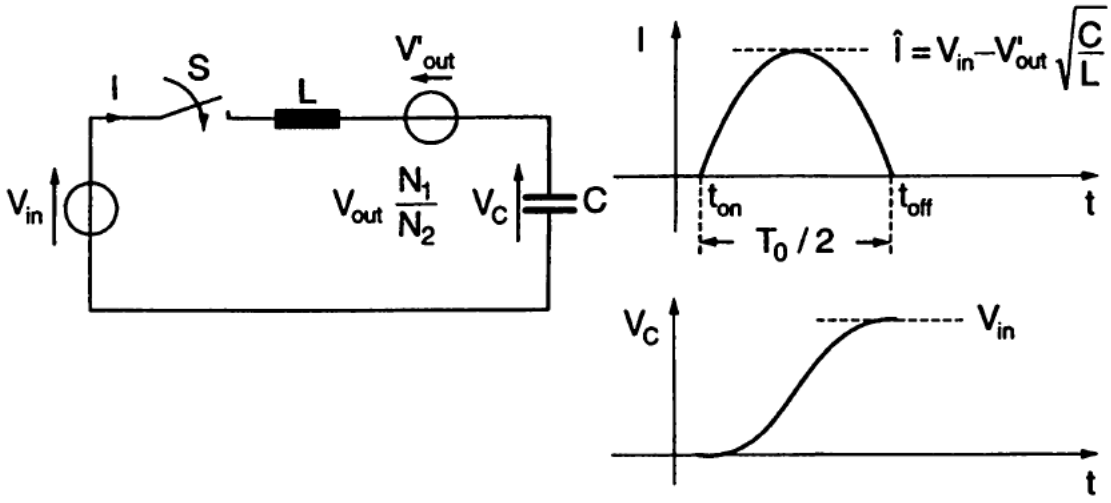


Рис. 9.28. Эквивалентная схема последовательного резонансного преобразователя для одной полуволны синусоидального сигнала

Резонансная частота равна:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{9.35}$$

На этой частоте обеспечивается минимальное время включения транзисторов. Однако время открытия транзисторов должно быть несколько больше резонансного периода. Это необходимо для того, чтобы ток успел снизиться до нуля. Для обеспечения максимальной энергии передачи V'_{out} должно равняться половине V_{in}. При выполнении этого условия отношение числа витков в обмотках трансформатора определяется как:

$$V'_{out} = \frac{1}{2}V_{in} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}\frac{V_{in}}{V_{out}}. \tag{9.36}$$

Количество переданной в каждом полупериоде энергии зависит от значений L и C. Чем больше емкость C и меньше индуктивность L (при соблюдении условий резонанса), тем больше передается энергии (см. также пиковые значения тока на рис. 9.28 и 9.29).

Для получения требуемой выходной мощности P_{out} при выполнении условия $V'_{out} = \frac{1}{2}V_{in}$ значения L и C должны быть равны:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\left(\frac{V_{in}}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{f_{sw}}{f_0}}{P_{out}} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot f_0}, \quad L = \left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 \cdot C. \tag{9.37}$$

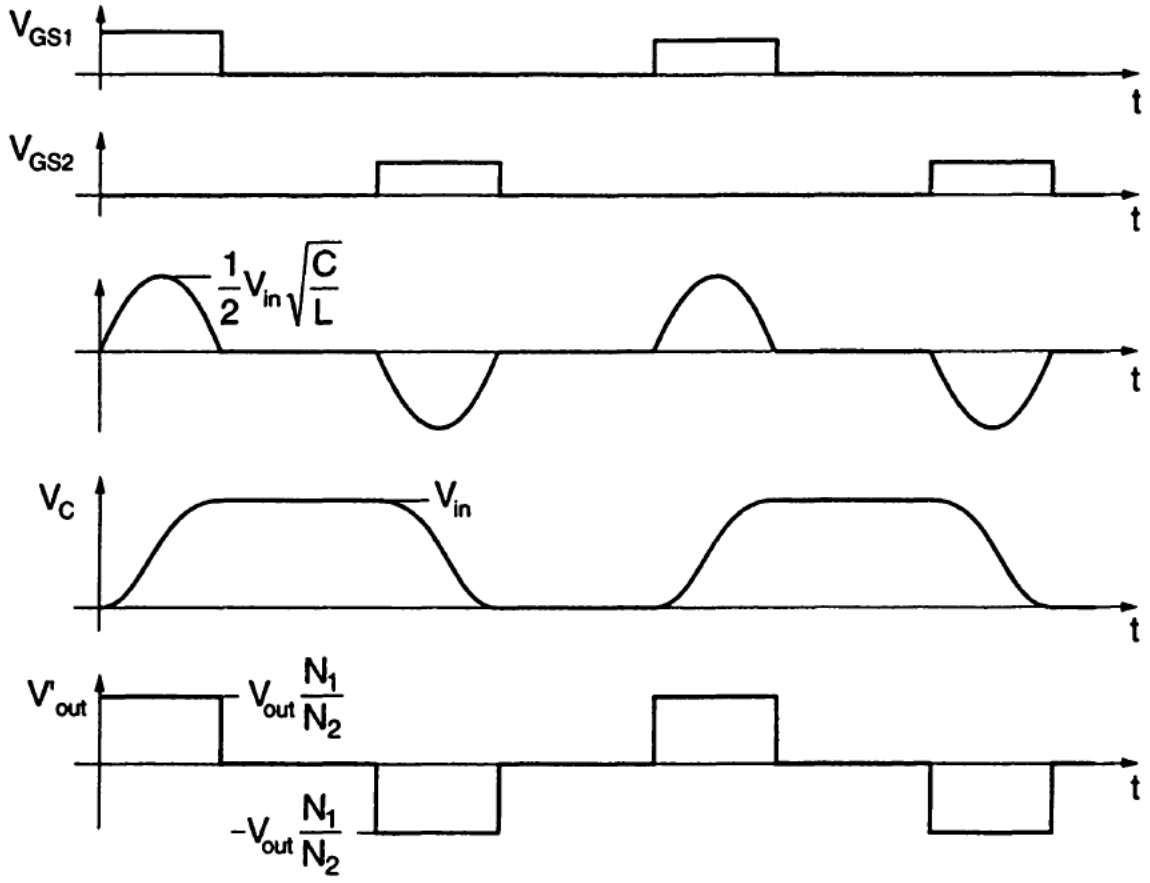


Рис. 9.29. Диаграммы токов и напряжений двухтактного последовательного резонансного преобразователя (V_{GS} — управляющее напряжение сток–исток)

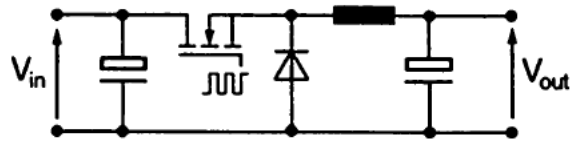
В дополнение к основным преимуществам резонансных преобразователей: низким потерям при переключении и высокой помехоустойчивости, рассматриваемый преобразователь имеет два дополнительных достоинства:

- Также как и преобразователь обратного хода он может регулировать несколько выходных напряжений при помощи одной схемы управления, поскольку со стороны первичной цепи выходные цепи рассматриваются как параллельно включенные. Энергия всегда передается на выход с наименьшим значением напряжения (при этом должны учитываться соотношения витков в обмотках).
- Без всяких дополнительных цепей он защищен от короткого замыкания, и ему не страшны отключения нагрузки, поскольку при $V'_{out} = V_{in}$ выходное напряжение не может превысить двойного номинального значения, а при $\hat{I} = V_{in}\sqrt{C/L}$ входной ток не может превысить двойного номинального значения выходного тока.

Рассматриваемый преобразователь обладает наименьшими потерями при переключении и максимальной ЭМ помехозащищенностью.

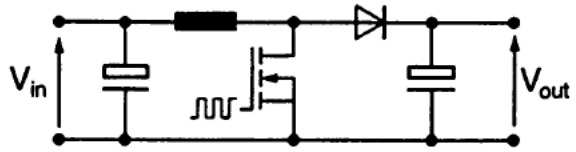
9.4.3. Импульсные источники питания (обзор)

Понижающий преобразователь



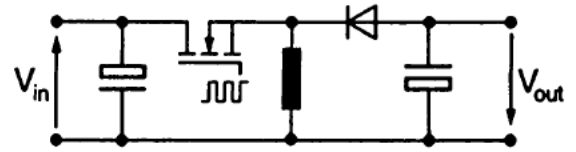
$V_{out} \le V_{in}$.
Легко обеспечить защиту от короткого замыкания и отключения нагрузки.
Плавающее напряжение V_{GS}
Применение: Замещение аналоговых регуляторов напряжения.

Повышающий преобразователь



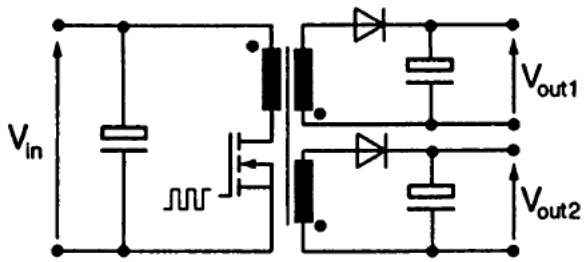
$V_{out} \ge V_{in}$.
Нет защиты от короткого замыкания.
Нет защиты при отключении нагрузки, если преобразователь не встроен в замкнутую систему управления.
Применение: Устройства с аккумуляторным питанием: ноутбуки, мобильные телефоны, вспышки камер.

Инвертирующий преобразователь



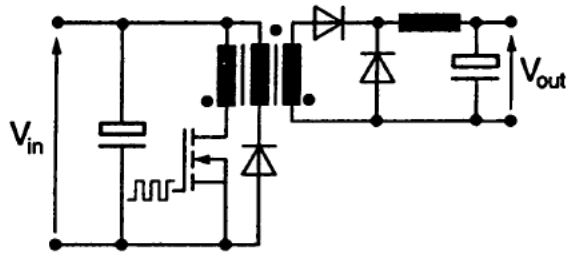
$V_{out} < 0$.
Легко обеспечить защиту от короткого замыкания.
Нет защиты при отключении нагрузки, если преобразователь не встроен в замкнутую систему управления.
Применение: Формирование дополнительного отрицательного напряжения от источников положительного напряжения.

Преобразователь обратного хода



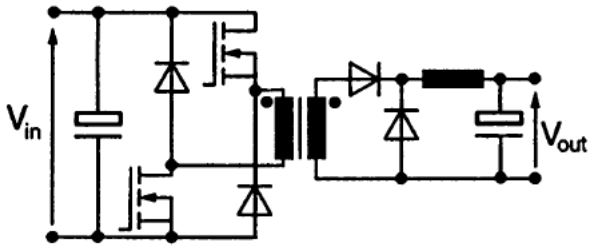
Одна схема управления может регулировать несколько выходных напряжений, электрически изолированных от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких сотен ватт.
Широкий диапазон входных и выходных напряжений (напряжение сети может быть 85...270 В).
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} \ge 2V_{in}$.
Требует очень сильной магнитной связи.
Используется большой сердечник с воздушным зазором.

Преобразователь прямого хода на одном транзисторе



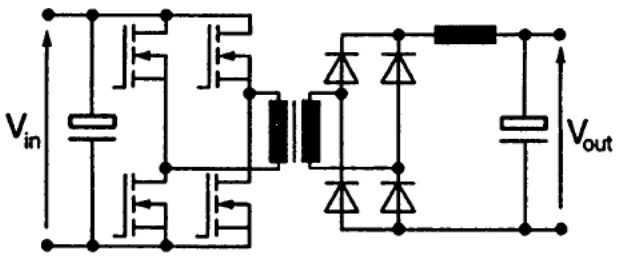
Одно регулируемое выходное напряжение, электрически независимое от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких сотен ватт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} \geq 2V_{in}$.
Коэффициент заполнения управляющей импульсной последовательности $t_{вкл}/T \leq 0{,}5$.
Требует очень сильной магнитной связи.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.

Преобразователь прямого хода на двух транзисторах



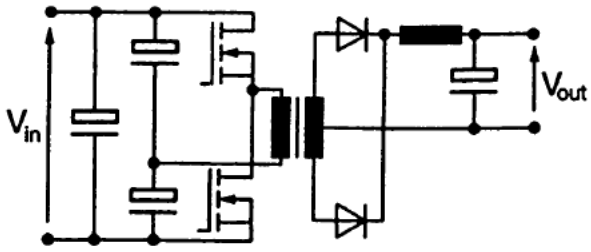
Одно регулируемое выходное напряжение, электрически независимое от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких киловатт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} = V_{in}$.
Коэффициент заполнения управляющей импульсной последовательности $t_{вкл}/T \leq 0{,}5$.
Не требует очень сильной магнитной связи.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.

Мостовой двухтактный преобразователь



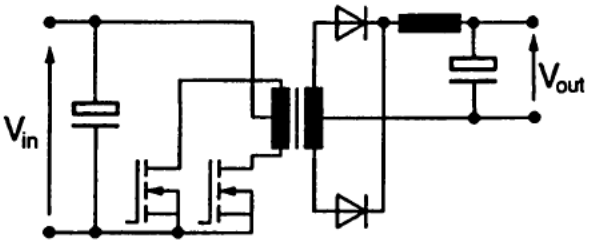
Одно регулируемое выходное напряжение, электрически независимое от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких киловатт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} = V_{in}$.
Не требует очень сильной магнитной связи.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.
Проблемы с балансировкой.

Полумостовой двухтактный преобразователь



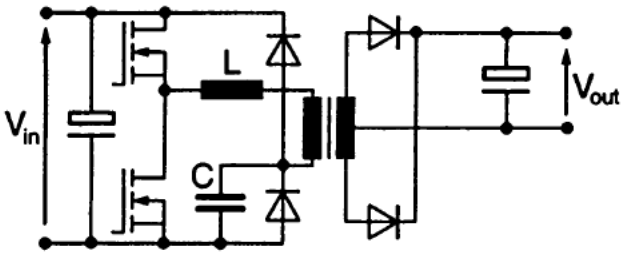
Одно регулируемое выходное напряжение, электрически независимое от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких киловатт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} = V_{in}$.
Не требует очень сильной магнитной связи.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.
Проблемы с балансировкой.

Двухтактный преобразователь со средней точкой первичной обмотки трансформатора



Одно регулируемое выходное напряжение, электрически независимое от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких сотен ватт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} \geq 2V_{in}$.
Требует очень сильной магнитной связи между первичными обмотками.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.
Проблемы с балансировкой.

Двухтактный последовательный резонансный преобразователь



Одна схема управления может регулировать несколько выходных напряжений, электрически изолированных от входного напряжения.
Выходная мощность повышается до нескольких киловатт.
Напряжение пробоя транзистора $V_{DS} = V_{in}$.
Не требует очень сильной магнитной связи.
Используется маленький сердечник без воздушного зазора.
Управляется импульсами постоянной длительности переменной частоты.
Если выходная мощность мала по сравнению с номинальной мощностью, то управляющая частота может стать звуковой.

9.4.4. Управление импульсными источниками питания

Выходное напряжение ИИП поддерживается постоянным при помощи замкнутого контура управления. Выходное напряжение (действительное значение) постоянно сравнивается с эталонным напряжением (номинальным значением). Разность действительного и номинального значений определяет рабочий цикл управления работой транзистора. Контур управления компенсирует изменения напряжения сети и выходного тока, т. е. выполняет функции **стабилизатора напряжения сети** и **стабилизатора тока в нагрузке**.

Существует два метода регулирования ИИП: **по напряжению** и **по току**. Первый из них считается традиционным методом регулирования, тогда как на основе второго метода построено большинство современных интегральных схем импульсных контроллеров.

Оба метода регулирования будут рассмотрены на примере повышающего преобразователя, показанного на рис. 9.30.

9.4.4.1. Метод регулирования по напряжению

Сравнение выходного (V_{out}) и эталонного (V_{ref}) напряжений происходит на резистивном делителе R_1, R_2 (рис.9.30). Разность $V_{ref} - V'_{out}$ усиливается ПИ-регулятором. ШИМ (см. раздел 7.6.4.16) преобразует выходное напряжение ПИ-регулятора V_2 в ШИМ сигнал напряжения с коэффициентом заполнения t_1/T, управляющий работой транзистора повышающего преобразователя (см. также раздел 9.4.1.2).

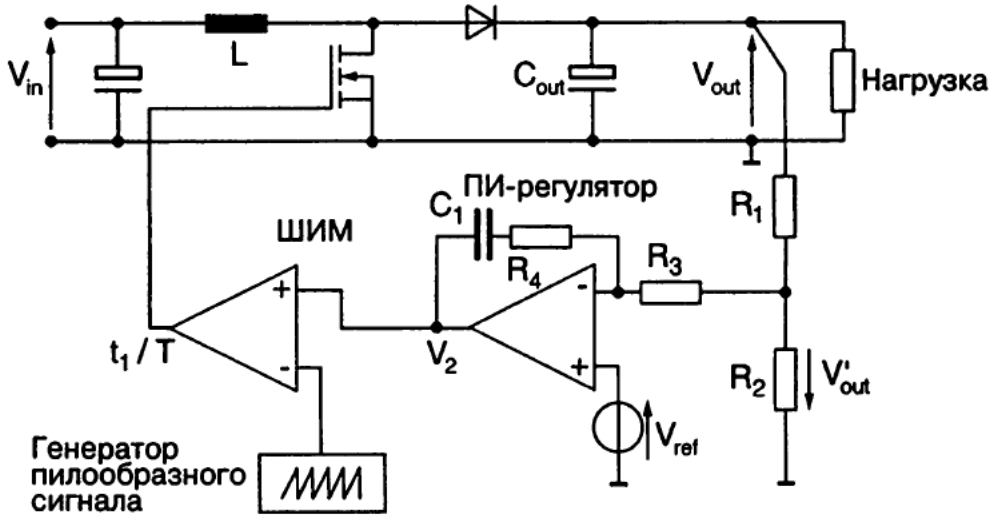


Рис. 9.30. Регулирование повышающего преобразователя по напряжению

Замкнутый контур управления работает следующим образом. При низком выходном напряжении V_{out} напряжение V'_{out}, снимаемое с делителя, будет меньше эталонного напряжения V_{ref}. Это приведет к увеличению выходного напряжения ПИ-регулятора V_2. В ШИМ напряжение V_2 сравнивается с

пилообразным сигналом, и при повышении V_2 коэффициент заполнения t_1/T увеличивается. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не выполнится условие: $V'_{out} = V_{ref}$.

9.4.4.2. Метод регулирования по току

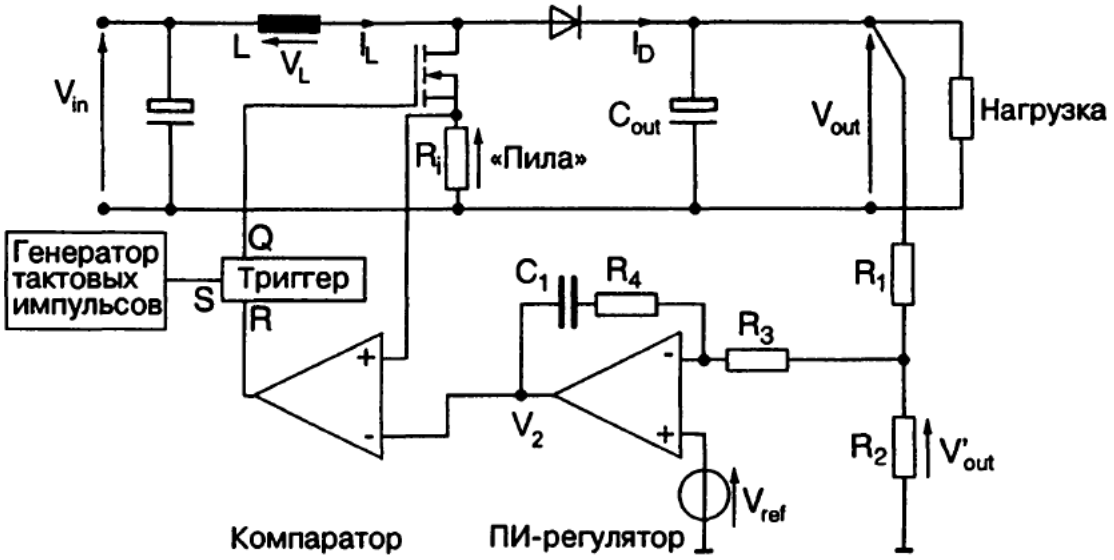


Рис. 9.31. Регулирование повышающего преобразователя по току

Сравнение выходного (V_{out}) и эталонного (V_{ref}) напряжений происходит на резистивном делителе R_1, R_2 (рис. 9.30). Разность $V_{ref} - V'_{out}$ усиливается ПИ-регулятором. Выходное напряжение ПИ-регулятора V_2 сравнивается с пилообразным напряжением на резисторе R_i, используемым для измерения тока. Как только напряжение на резисторе R_i станет равным напряжению V_2 (а, значит, ток в катушке достигнет заданного значения), выход компаратора сбросит RS-триггер в нулевое состояние, что приведет к запиранию транзистора. RS-триггер устанавливается в единичное состояние при подаче на него тактового импульса, который также управляет открыванием транзистора в начале следующего цикла. Очевидно, что в данном случае ПИ-регулятор напрямую управляет током в катушке индуктивности.

Замкнутый контур управления работает следующим образом. При низком выходном напряжении V_{out} напряжение V'_{out}, снимаемое с делителя, будет меньше эталонного напряжения V_{ref}. Это приведет к увеличению выходного напряжения ПИ-регулятора V_2. Компаратор сравнивает это напряжение с напряжением на резисторе R_i. Напряжение ПИ-регулятора V_2 определяет уровень напряжения на резисторе R_i (а следовательно, и тока через катушку), при котором происходит запирание транзистора. Увеличение тока через катушку индуктивности будет происходить до тех пор, пока не выполнится условие: $V'_{out} = V_{ref}$.

9.4.4.3. Сравнение методов регулирования по току и по напряжению

При управлении по току ПИ-контроллер напрямую регулирует ток через катушку индуктивности, поступающий в цепь, состоящую из выходного конденсатора C_{out} и сопротивления нагрузки R_L. Поскольку эта цепь является системой первого порядка, ее переходная характеристика представляет собой экспоненциальную функцию.

При управлении по напряжению регулируется рабочий цикл t_1/T. Для этого отслеживается напряжение на катушке индуктивности L, которая вместе с C_{out} и R_L формирует систему второго порядка с переходной характеристикой в виде затухающих синусоидальных колебаний, стремящихся к постоянному значению.

Отсюда видно, что первый способ управления предпочтительнее второго. По этой причине большинство контроллеров являются устройствами с регулированием по току.

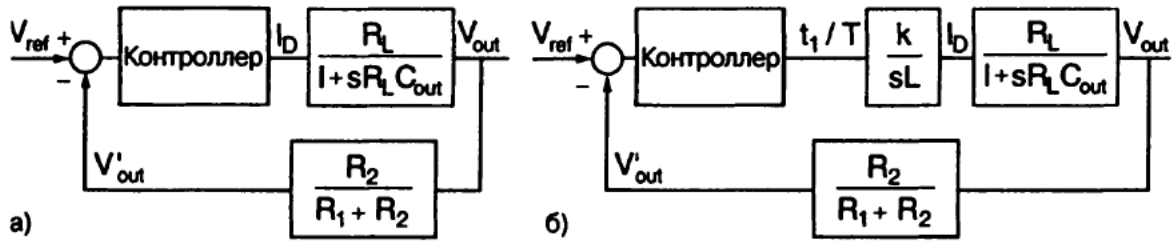


Рис. 9.32. Блок-схемы систем:
а) с регулированием по току;
б) с регулированием по напряжению

9.4.4.4. Разработка ПИ-контроллеров

При малом значении емкости C_1 и большом сопротивлении резистора R_4 ПИ-контроллер может войти в колебательный режим работы. Для предотвращения такой ситуации номинал конденсатора C_1 изначально задается большим (порядка 1 мкФ), а значение сопротивления R_4 выбирается исходя из требования, чтобы частота среза ПИ-контроллера не превышала частоту среза цепи, состоящей из L и C_{out}:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{out}}} \geq 10\frac{1}{2\pi R_4 C_1}. \qquad (9.38)$$

Для повышения скорости регулирования в замкнутом контуре емкость C_1 постепенно уменьшают, не забывая при этом настолько же увеличивать сопротивление R_4. Если система входит в неустойчивый режим работы, то емкость C_1 увеличивают в 10 раз, во столько же раз уменьшая сопротивление R_4. Такой способ подбора C_1 и R_4 дает возможность реализовывать ПИ-регуляторы, работающие в устойчивом режиме со скоростью регулирования, удовлетворяющей условиям большинства систем, используемых на практике.

Примечание. Во многих регуляторах ОУ (часто называемый усилителем рассогласования) работает в режиме усилителя тока, управляемого напряжением, выходной ток которого пропорционален входному напряжению. В этом случае C_1 и R_4 подключаются между выходом и землей. Это позволяет реализовать требуемые характеристики ПИ-контроллера.

9.4.5. Расчет катушек индуктивности и высокочастотных трансформаторов

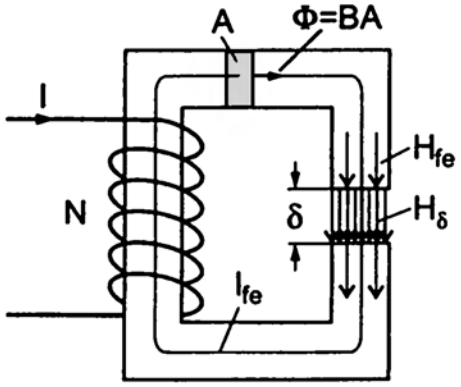
Катушки индуктивности *накапливают* энергию, а **трансформаторы** *передают* энергию. Именно в этом и состоит их основное отличие. Сердечники катушек и трансформаторов сильно отличаются друг от друга: в катушках сердечники должны иметь воздушные зазоры для сохранения энергии, а в трансформаторах — нет. Трансформаторы, используемые в преобразователях обратного хода, также накапливают энергию. Это значит, что они фактически являются не высокочастотными трансформаторами, а дросселями с первичными и вторичными обмотками. Сердечники чаще всего изготавливаются из **ферритов**, но иногда для этих целей применяются и другие материалы с высокой магнитной проницаемостью и точкой насыщения.

9.4.5.1. Расчет катушек индуктивности

Для расчета катушки необходимо знать требуемую величину ее индуктивности L и пиковое значение тока $\hat{I}$.

Катушка индуктивности накапливает энергию, величина которой равна: $W = \frac{1}{2} L\hat{I}^2$. Эта энергия хранится в виде энергии магнитного поля внутри ферритового сердечника и воздушного зазора (рис. 9.33). Чем больше требуется запасать энергии, тем больше будет сердечник.

- Размер катушки индуктивности почти пропорционален количеству накапливаемой энергии.



I — Ток через катушку
N — Количество витков
A — Площадь поперечного сечения сердечника
l_{fe} — Магнитная длина сердечника
δ — Воздушный зазор
Φ — Магнитный поток
B — Плотность магнитного потока
H_{fe} — Напряженность магнитного поля в феррите
H_δ — Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

Рис. 9.33. Магнитные и механические параметры катушки индуктивности

Энергия магнитного поля в катушке индуктивности определяется:

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}dV \approx \underbrace{\frac{1}{2}\vec{H}_{Fe}\cdot\vec{B}_{Fe}\cdot V_{Fe}}_{\text{энергия внутри феррита}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{H}_{\delta}\cdot\vec{B}_{\delta}\cdot V_{\delta}}_{\text{энергия внутри воздушного зазора}}. \qquad (9.39)$$

Плотность магнитного потока является непрерывной величиной, практически постоянной как в феррите, так и в воздушном зазоре, т. е. $\vec{B} \approx \vec{B}_{Fe} \approx \vec{B}_{\delta}$. Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ не является непрерывной величиной. Внутри воздушного зазора ее величина больше, чем в феррите, в μ_r раз. Учитывая это и считая, что $\vec{B} = \mu_0\mu_r\cdot\vec{H}$, $V_{Fe} = l_{Fe}\cdot A$ и $V_{\delta} = \delta\cdot A$, выражение (9.39) можно переписать в виде:

$$W \approx \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta\right)\cdot A. \qquad (9.40)$$

Относительная магнитная проницаемость μ_r ферритов обычно лежит в пределах 1000...4000. Следует отметить, что согласно уравнению (9.40) магнитная длина сердечника снижается в μ_r раз. Это означает, что магнитная энергия в основном запасается внутри воздушного зазора, т. е.:

$$W \approx \frac{1}{2}\frac{B^2\cdot A\cdot\delta}{\mu_0}.$$

- Для накопления энергии сердечники катушек индуктивности должны иметь воздушные зазоры.

Поскольку энергия магнитного поля в основном запасается внутри воздушного зазора, его величина и определяет количество накапливаемой энергии $W = \frac{1}{2}L\hat{I}^2$. Материал сердечника определяет предел максимальной плотности магнитного потока. Для большинства ферритовых материалов $B_{max} = 0{,}3$ Тл. Из этого условия можно найти минимальный объем воздушного зазора:

$$V_{\delta} = A\cdot\delta \geq \frac{L\hat{I}^2\cdot\mu_0}{B_{max}^2}, \quad \text{где} \quad B_{max} = 0{,}3 \text{ Тл}. \qquad (9.41)$$

По объему воздушного зазора из справочников можно подобрать подходящий сердечник.

Для определения количества витков N необходимо знать величину магнитной проводимости A_L:

$$N = \sqrt{\frac{L}{A_L}}. \qquad (9.42)$$

Значение магнитной проводимости находится из справочников по сердечникам, из которых также определяется максимальная плотность магнитного потока внутри феррита (обычно не превышающая 0,3 Тл).

$$B = \frac{L\cdot\hat{I}}{N\cdot A_{min}} = \frac{N\cdot A_L\cdot\hat{I}}{A_{min}} \rightarrow \leq 0{,}3 \text{ Тл}. \qquad (9.43)$$

где A_{min} — минимальная площадь поперечного сечения сердечника. Максимум плотности потока получается при $A = A_{min}$. Величина A_{min} находится из справочников.

Расчет диаметра провода

Плотность тока J внутри провода, как правило, лежит в пределах 2...5 А/мм в зависимости от размера сердечника и изоляционного покрытия, определяющих теплопередачу из катушки. Исходя из этого, находится диаметр провода:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot I_{\text{ск}}}{\pi \cdot J}}, \quad \text{где} \quad J = 2...\underline{3}...5 \text{ А/мм}^2. \tag{9.44}$$

9.4.5.2. Расчет высокочастотных трансформаторов

Высокочастотные трансформаторы служат для передачи электрической энергии. Их физические размеры зависят от мощности передаваемой энергии и от рабочей частоты. Чем выше частота, тем меньше физические размеры трансформаторов. Обычно частота лежит в пределах 20...100 кГц. Сердечники, как правило, изготавливаются из ферритов. В справочниках можно найти информацию о различных сердечниках и об их возможностях по передаче мощности.

Поскольку размер сердечника определяется мощностью передаваемой энергии и частотой, разработку высокочастотного трансформатора начинают с выбора подходящего сердечника при помощи соответствующих справочников. Вторым шагом является расчет количества витков в первичной обмотке, определяющего плотность магнитного потока внутри сердечника. Число витков во вторичной обмотке трансформатора находится из соотношения напряжений на первичной и вторичной обмотках. Диаметр проводов, используемых для первичной и вторичной обмоток, определяется исходя из СКЗ токов, протекающих в них.

Расчет минимального количества витков в первичной обмотке

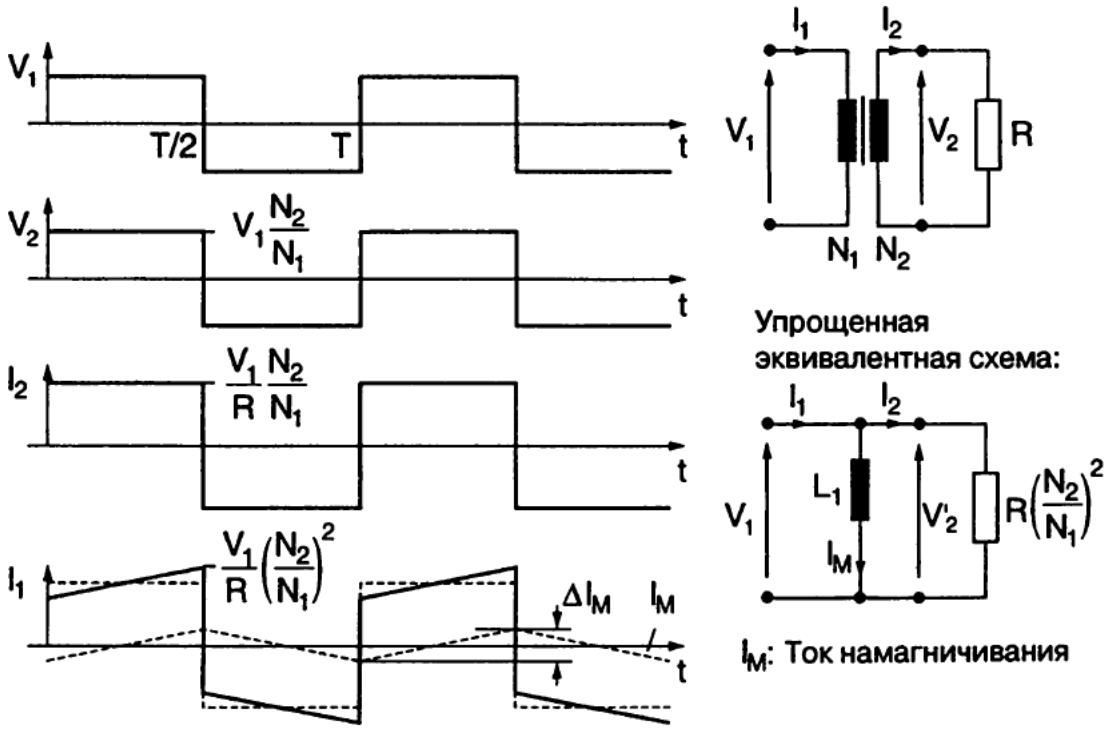


Рис. 9.34. Диаграммы напряжений и токов в трансформаторе

На первичную обмотку трансформатора подается напряжение V_1 прямоугольной формы, в результате чего в первичной цепи появляется ток I_1, равный сумме тока намагничивания I_M и тока обратной передачи вторичной обмотки I_2 (рис. 9.34). Для снижения тока намагничивания I_M применяют сердечник без воздушного зазора.

Поскольку напряжение V_1 имеет прямоугольную форму, ток намагничивания является треугольным сигналом, практически не зависящим от тока во вторичной обмотке (см. упрощенную эквивалентную схему трансформатора на рис. 9.34). Ток намагничивания пропорционален магнитному потоку, а также плотности потока (магнитной индукции). Входное напряжение V_1 задает величину магнитного потока.

Закон Фарадея определяет основные физические соотношения между электрическими параметрами трансформатора: $V = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$.

Для трансформатора, показанного на рис. 9.34, справедливо соотношение:

$$\Delta B = \frac{V_1 \cdot T/2}{N_1 \cdot A}. \qquad (9.45)$$

Изменение магнитной индукции ΔB определяется частотой $f = 1/T$ и количеством витков в первичной обмотке N_1. Чем выше частота и больше витков, тем меньше изменяется плотность магнитного потока.

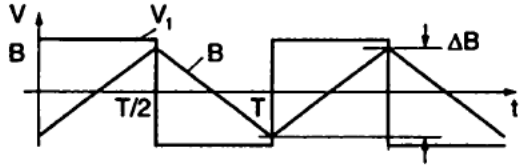


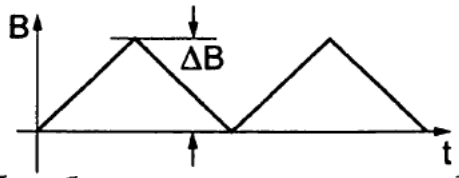
Рис. 9.35. Входное напряжение и плотность магнитного потока в трансформаторе

Для того чтобы магнитная индукция не могла достичь предела насыщения, всегда рассчитывается минимальное число витков первичной обмотки N_{1min}, при котором изменения плотности магнитного потока ΔB не превышают заданного значения. Поскольку магнитная индукция насыщения, как правило, равна $\hat{B} \approx 0{,}3$ Тл, изменения $\Delta\hat{B}$ в высокочастотных трансформаторах должны быть меньше значения 0,6 Тл. В двухтактных преобразователях из-за петли гистерезиса могут возникать большие потери, приводящие к нагреву. Если нет дополнительной информации о потерях в сердечнике и тепловом сопротивлении, то при работе на частотах 20...100 кГц изменение плотности магнитного потока ограничивается величиной $\Delta B \approx 0{,}2...0{,}3$ Тл. Чем меньше значение ΔB, тем ниже потери в сердечнике. Исходя из этого, минимальное количество витков в первичной обмотке находится из следующего соотношения:

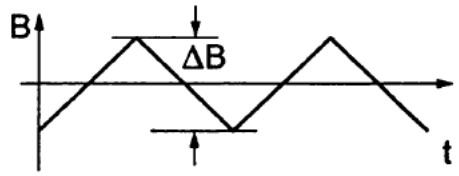
$$N_{1min} \geq \frac{V_1 \cdot T/2}{\Delta B \cdot A_{min}}, \quad \text{где} \quad \Delta B \approx 0{,}2...0{,}3 \text{ Тл}. \qquad (9.46)$$

В этом выражении A_{min} является минимальной площадью поперечного сечения сердечника, которая соответствует максимуму магнитной индукции. Величину A_{min} можно найти в справочниках.

Примечание. В преобразователях прямого хода сердечник намагничивается только в одном направлении, тогда как в двухтактных преобразователях происходит двухполярное намагничивание сердечника.



Преобразователь прямого хода



Двухтактный преобразователь

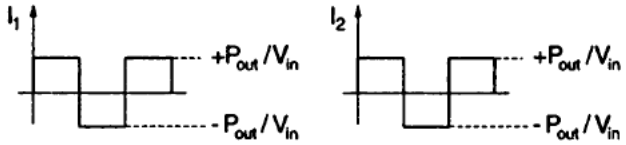
Расчет минимального количества витков в первичной обмотке одинаков для этих двух типов преобразователей.

Расчет диаметра провода

Диаметр провода зависит от СКЗ тока. Ток определяется по значению требуемой мощности.

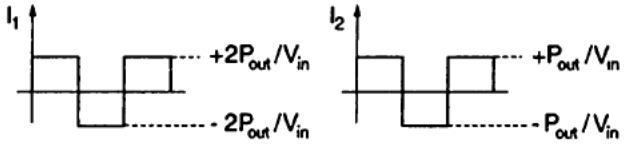
Для мостового двухтактного преобразователя:

$$I_{1СКЗ} \approx \frac{P_{out}}{V_{in}}, \quad I_{2СКЗ} = \frac{P_{out}}{V_{out}}$$



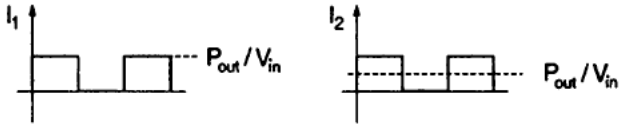
Для полумостового двухтактного преобразователя:

$$I_{1СКЗ} \approx \frac{2P_{out}}{V_{in}}, \quad I_{2СКЗ} = \frac{P_{out}}{V_{out}}$$



Для преобразователя прямого хода:

$$I_{1СКЗ} \approx \frac{\sqrt{2}P_{out}}{V_{in}}, \quad I_{2СКЗ} = \frac{\sqrt{2}P_{out}}{V_{out}}$$



В этих расчетах величиной тока намагничивания можно пренебречь. В зависимости от теплового сопротивления дросселя плотность тока выбирается в диапазоне значений 2...5 А/мм². Поперечное сечение провода и его диаметр определяются из следующих выражений:

$$A_{wire} = \frac{I}{J}, \quad d_{wire} = \sqrt{\frac{4 \cdot I}{\pi \cdot J}}, \quad \text{где} \quad J = 2...\underline{3}...5 \text{ А/мм}^2. \qquad (9.47)$$

Первичная и вторичная обмотки обычно имеют одинаковое поперечное сечение.

Примечание. Для обеспечения хорошей магнитной связи вторичная обмотка должна размещаться сверху первичной обмотки. Связь можно усилить, если обмотки будут перекрывать друг друга. На схеме показаны случаи плохой (а), хорошей (б) и наилучшей (в) магнитной связи:

Таблица 9.2. Предельные СКЗ гармонических составляющих в сетевом токе

Порядок гармоники n	**Входная мощность 75...600 Вт** Максимальное значение тока гармонических составляющих: на 1 Вт (мА/Вт)/максимум (А)	**Входная мощность более 600 Вт** Максимальное значение тока гармонических составляющих, А
3	3,4/2,30	2,30
5	1,9/1,14	1,14
7	1,0/0,77	0,77
9	0,5/0,4	0,40
11	0,35/0,33	0,33

Для поддержания синусоидальности сетевого тока может использоваться повышающий преобразователь. В этом случае повышающий преобразователь называется **регулятором коэффициента мощности** (рис. 9.37). По сравнению с обычным повышающим преобразователем регулятор мощности управляется совсем по-другому: его выходное напряжение, так же как и в повышающем преобразователе, больше входного, но включение и выключение транзистора происходят так, чтобы отслеживалось не постоянство выходного напряжения, а синусоидальность входного тока. Для этого транзистором управляют так, чтобы ток через катушку индуктивности $I_{in}(t)$ повторял форму выпрямленного сетевого напряжения $V_{in}(t)$. Выходное напряжение регулятора коэффициента мощности поддерживается на уровне $\overline{V}_{out} \approx 380$ В.

9.4.6.1. Токи, напряжения и мощность регулятора коэффициента мощности

В последующих расчетах предполагается, что выходная мощность является постоянной величиной:

$$P_{out} = V_{out} \cdot I_{out} = \text{const}. \tag{9.48}$$

Регулятор коэффициента мощности должен поддерживать синусоидальную форму входного тока и обеспечивать его синфазность со входным напряжением. Входная мощность является пульсирующей величиной, определяемой выражением:

$$P_{in}(t) = \frac{\hat{V}_{in} \cdot \hat{I}_{in}}{2} \cdot (1 - \cos 2\omega t). \tag{9.49}$$

Входная мощность состоит из постоянной и переменной составляющих:

$$P_{in=} = \frac{\hat{V}_{in} \cdot \hat{I}_{in}}{2} \text{ и } P_{in\approx} = \frac{\hat{V}_{in} \cdot \hat{I}_{in}}{2} \cos 2\omega t.$$

При условии, что регулятор работает без потерь, постоянная составляющая входной мощности равна выходной мощности P_{out}:

$$P_{in} = \frac{\hat{V}_{in} \cdot \hat{I}_{in}}{2} = V_{out} \cdot I_{out} = P_{out}. \quad (9.50)$$

Однако на практике, как правило, реализуется $\eta = 95\%$. Это означает:

$$P_{in} \approx P_{out}/0{,}95.$$

Выходной конденсатор C_{out} заряжается пульсирующей входной мощностью P_{in}, а разряжается постоянной выходной мощностью P_{out}. Это приводит к пульсациям выходного напряжения ΔV_{out} на конденсаторе C_{out}, размах которых зависит от его емкости. При сетевом напряжении 230 В/50 Гц, $V_{out} = 380$ В и $\Delta V_{out}/V_{out} = 10\%$ емкость C_{out} равна:

$$C_{out} \approx 0{,}5 \text{ мкФ/Вт}. \quad (9.51)$$

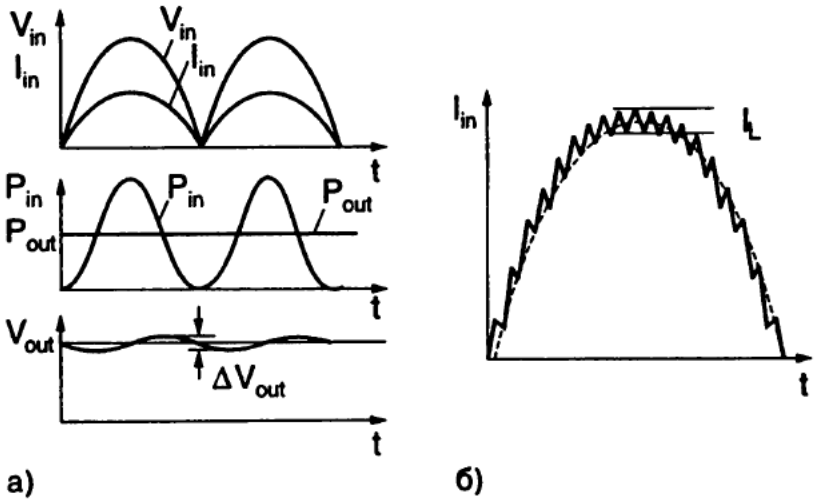


Рис. 9.38. Диаграммы токов, напряжений и мощности регулятора коэффициента мощности (а), увеличенный входной ток с высокочастотными пульсациями (б)

Размах высокочастотных пульсаций входного тока ΔI_L определяется дросселем L (рис. 9.38б). Чем больше его индуктивность и выше тактовая частота f, тем меньше размах пульсаций тока. Если $\Delta I_L = 20\%$ от пикового значения входного тока $\hat{I}_{in}$, а минимальное значение сетевого напряжения $V_{in\,min} = 200$ В, то индуктивность равна:

$$L \approx \frac{50 \cdot 10^3}{f \cdot P_{in}}, \quad L(\text{Гн}), \quad f(\text{Гц}), \quad P(\text{Вт}), \quad (9.52)$$

а максимальный ток через дроссель определяется выражением:

$$I_{L\,max} = \hat{I}_{in\,max} + \frac{1}{2}\Delta I_L = 1{,}1 \cdot \frac{2P_{in}}{\hat{V}_{in\,min}}. \quad (9.53)$$

9.4.6.2. Управление регулятором коэффициента мощности

Существует довольно много регуляторов коэффициента мощности со встроенными контроллерами, используемыми для управления транзисторами. Часто в справочниках приводятся примеры применения таких интегральных схем. Тем не менее для проектирования корректных схем на их основе необходимо понимать принцип действия таких контроллеров (рис. 9.39).

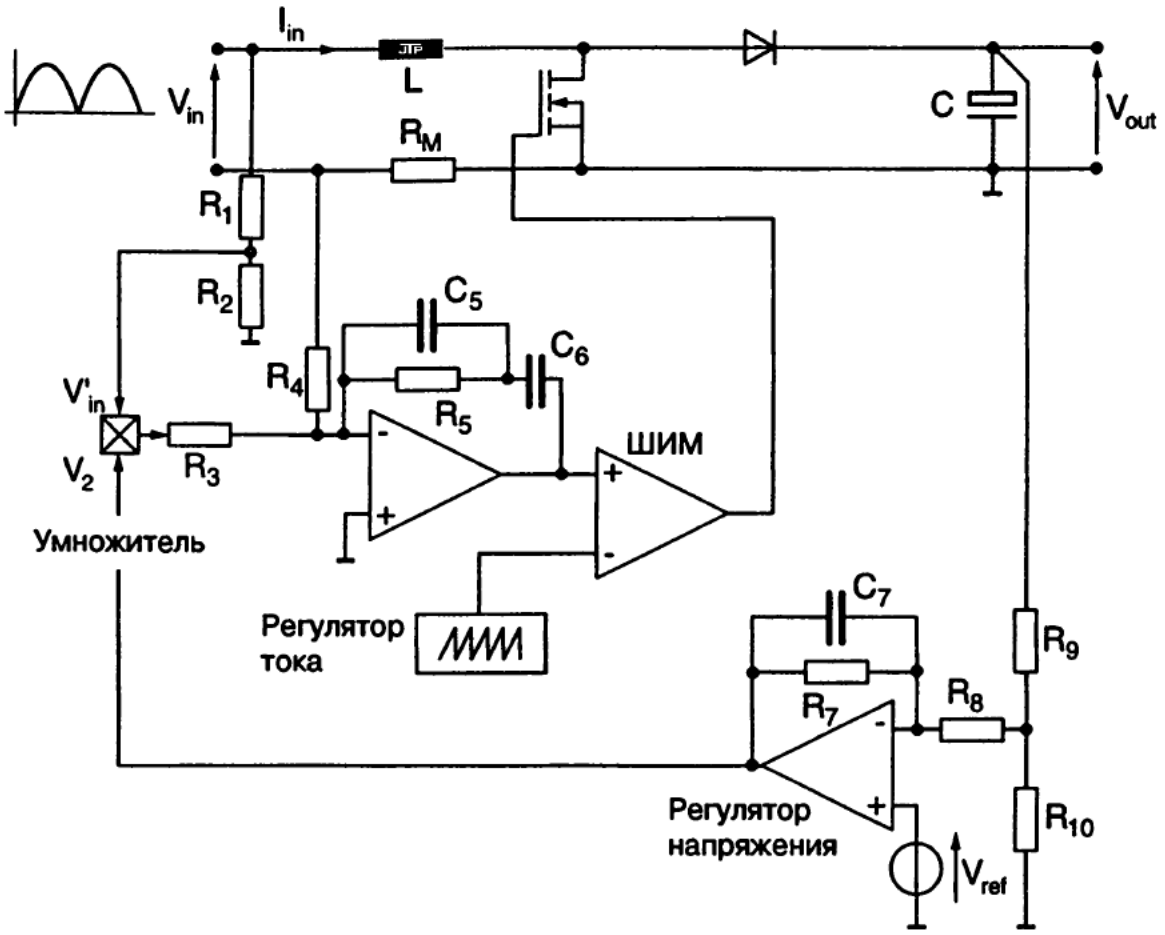


Рис. 9.39. Управляющий контур регулятора коэффициента мощности

В контроллере регулятора коэффициента мощности, как правило, существует два контура обратной связи: один для управления входным током для поддержания его синусоидальной формы (*регулировка входного тока*), а второй для управления выходным напряжением для поддержания его среднего значения постоянным (*регулировка выходного напряжения*).

Вход регулятора тока управляется напряжением V_{in}. Это гарантирует то, что входной ток повторяет форму входного напряжения, а, следовательно, коэффициент мощности по входу будет равен единице.

Принцип работы регулятора напряжения основан на сравнении выходного напряжения с эталонным напряжением.

Умножитель объединяет оба контура управления. Его выходной сигнал является синусоидальным, амплитуда которого зависит от величины напряжения, снимаемого с выхода регулятора напряжения. Если выходное напряжение становится меньше номинального значения, то сигнал на выходе регулятора

напряжения увеличивается, что приводит к росту амплитуды сигнала на выходе умножителя. Следовательно, СКЗ входного тока при этом также увеличивается.

Для корректной работы схемы необходимы следующие условия:

- Для подавления пульсаций тока, протекающего через резистор R_M, связанных с работой ШИМ, частота среза ФНЧ, реализованного на R_5, C_5, должна примерно составлять 10 % от рабочей частоты ШИМ.
- Частота среза ПИ-регулятора, определяемая элементами R_5, C_6, должна быть на порядок выше сетевой частоты: $f_{R_5C_6} \approx 500$ Гц.
- Частота среза регулятора выходного напряжения, определяемая R_7, C_7, должна составлять 10 % от частоты пульсаций выходного напряжения (100 Гц): $f_{R_7C_7} \approx 10$ Гц.
- СКЗ входного тока задается контуром регулирования выходного напряжения, а его форма контролируется контуром регулирования входного тока.

9.4.7. Подавление высокочастотных помех в ИИП

Появление высокочастотных помех в ИИП связано с переключением транзисторов. Эти помехи распространяются либо при помощи электромагнитных полей, либо по сети в виде токов или напряжений. В европейском стандарте перечислены допустимые уровни ВЧ-помех. В табл. 9.3 приведены некоторые наиболее важные пределы допустимых уровней помех для нестационарных ВЧ-устройств (помехи класса В). К ВЧ-устройствам относятся приборы, работающие на частоте выше 9 кГц.

Таблица 9.3. Допустимые уровни помех для мобильного ВЧ-оборудования класса В

Величина	Частотный диапазон	Допустимые уровни помех	Стандарт
Электромагнитные помехи на расстоянии 10 м	30...230 МГц 230...1000 МГц	30 дБ (мкВ/м) 37 дБ (мкВ/м)	EN55022 Класс В
Гармоники сетевого тока	0...2 кГц	См. таблицу 9.2	EN61000
Наводка напряжений по цепям питания	0,15...0,5 МГц**	66...56 дБ (мкВ) Q* 56...46 дБ (мкВ) M*	EN55022 Класс В
	0,5...5 МГц	56 дБ (мкВ) Q* 46 дБ (мкВ) M*	
	5...30 МГц	60 дБ (мкВ) Q* 50дБ (мкВ) M*	

* Q — измерения при помощи квазипикового детектора.
* M — измерения при помощи детектора средних значений.
** Линейное уменьшение к логарифму частоты.

9.4.7.1. Излучаемые ВЧ-помехи

Помехи, излучаемые ВЧ-устройствами, оцениваются по напряжённости поля высокочастотного шума, измеряемой в мкВ/м. Величина ВЧ-помех зависит от времени нарастания токов и напряжений при переключении транзисторов и

от разводки печатной платы устройства. Для снижения уровня ВЧ-шумов при проектировании плат необходимо соблюдать следующие правила:

- Для снижения электромагнитных полей контуры, через которые протекают переключаемые токи, необходимо делать как можно меньшими по площади.
- Для снижения паразитных емкостей, места соединений, потенциал которых относительно земли при переключениях транзисторов то растет, то падает, следует делать, как можно, меньшими по объему.
- ИИП необходимо размещать в металлических корпусах.

Примечание. Соблюдение первых двух правил позволяет не только уменьшать ВЧ-шумы, распространяющиеся через окружающее пространство, но также снижать кондуктивные помехи, т. е. наводки по цепям питания и по соединительным проводам. Следует также отметить, что высокий уровень помех приводит к неточности переключения транзисторов, а значит, и к проблемам регулирования уровня напряжения. Все это может привести к появлению низкочастотного шума.

9.4.7.2. Кондуктивные помехи

В соответствии с европейским стандартом напряжение кондуктивных помех надо определять между выводами (входными и выходными) и землей. Для проведения таких измерений необходимо специальное оборудование: **анализатор ВЧ-помех** и **эквивалент сети электропитания.** Эти приборы используются для определения импеданса сети, требуемого для получения сопоставимых результатов. Для снижения кондуктивных помех применяются специальные ВЧ-фильтры, часто называемые электромагнитными фильтрами.

Кондуктивные радиопомехи бывают трех типов (рис. 9.40):

- **Несимметричные помехи** — это ВЧ-напряжение, измеряемое между проводом заземления и сетевыми выводами. Именно этот вид помех определен стандартом, некоторые данные из которого приведены в табл. 9.3.
- **Синфазные помехи** — это сумма всех напряжений несимметричных помех, измеряемых относительно земли.
- **Дифференциальные (симметричные) помехи** — это ВЧ-напряжение, измеряемое между сетевыми проводами.

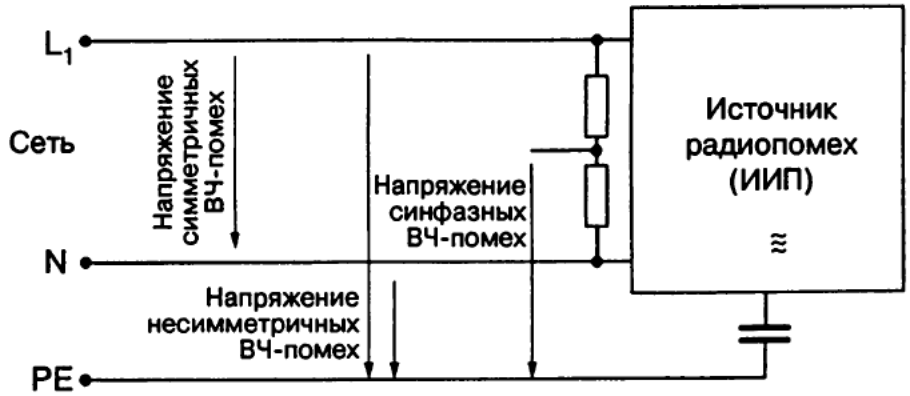


Рис. 9.40. Кондуктивные радиопомехи в однофазной цепи

Хотя стандарт регламентирует только величину несимметричных радиопомех, на практике часто приходится сталкиваться как с синфазными, так и с симметричными помехами, для подавления которых используются разные методы и компоненты.

9.4.7.3. Подавление синфазных ВЧ-помех

Синфазные ВЧ-помехи на сетевых выводах L_1 и N (в трехфазных цепях на выводах L_1, L_2, L_3 и N) являются синфазными напряжениями, равными по амплитуде и фазе, измеряемыми относительно потенциала провода заземления PE. Возникающие под действием синфазного напряжения токи $I_{\approx}$ также являются синфазными. Эти токи из-за паразитной емкости C_{earth} через провод заземления возвращаются назад в ИИП, который в данном случае работает как источник тока. На рис. 9.41 показан ФНЧ, устанавливаемый на сетевых выводах, способный подавлять синфазные ВЧ-помехи. Со стороны ИИП такой ФНЧ состоит из параллельных конденсаторов C_y и дросселя для компенсации токов, намотанного так, чтобы бороться только с синфазными токами и не оказывать никакого влияния на рабочий ток (50 или 60 Гц) (см. рис. 9.42).

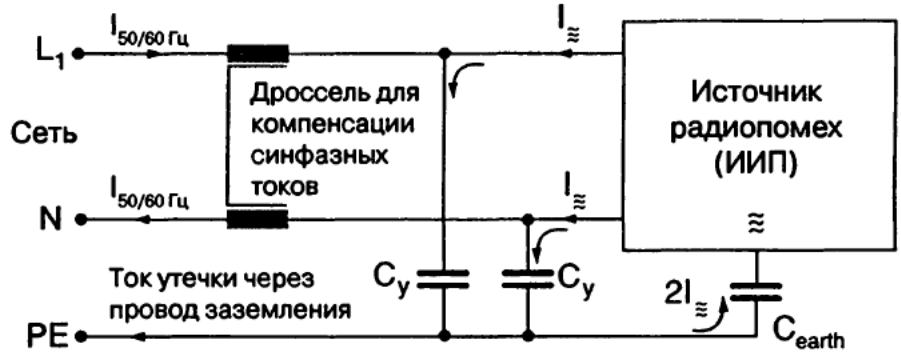


Рис. 9.41. Подавление синфазных радиопомех

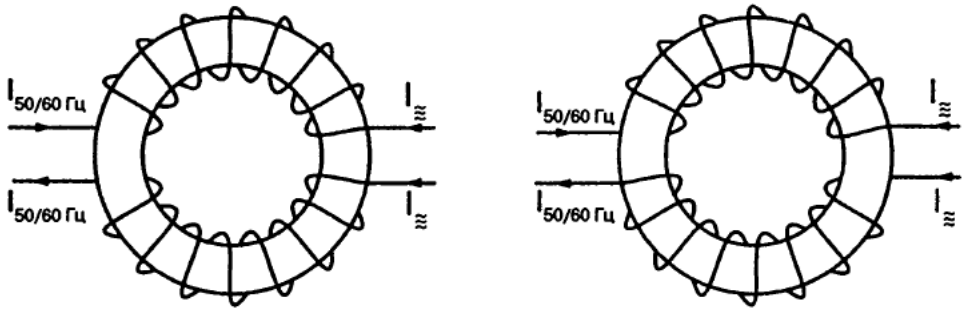


Рис. 9.42. Дроссель для компенсации токов синфазных ВЧ-помех (*слева*) и дроссель, применяемый для борьбы с симметричными ВЧ-помехами (*справа*)

Поскольку конденсаторы C_y стоят между фазовыми проводами и проводом заземления, они выбираются, исходя из требований безопасности в случае их пробоя. Их емкость не должна превышать значения, при котором достигается **максимально допустимый ток утечки** через провод заземления (обычно 3,5 мА,

а в медицинском оборудовании — 0,5 мА). Для определения максимального тока утечки выводы L_1 и N соединяются между собой, и между точкой соединения и проводом заземления подается максимальное сетевое напряжение. При этом конденсаторы C_y становятся параллельно включенными. Для напряжения 230 В/50 Гц максимальное значение конденсатора C_y определяется следующим выражением:

$$C_y \le \frac{1}{2} \cdot \frac{230\ \text{В} + 10\%}{2\pi \cdot 50\ \text{Гц} \cdot 0{,}5\ \text{мА}} \approx 22\ \text{нФ}.$$

9.4.7.4. Подавление симметричных ВЧ-помех

Симметричные радиопомехи являются ВЧ-напряжениями между сетевыми выводами L_1 и N. Для их снижения между проводниками L_1 и N встраивается *LC*-ФНЧ (рис. 9.43). Причиной возникновения симметричных помех является пульсирующий выходной ток ИИП. Из-за низкого импеданса сглаживающего конденсатора на выходе выпрямителя между выводами L_1 и N появляется ВЧ-напряжение. В этом случае источник радиопомех ведет себя как источник напряжения. Со стороны ИИП-фильтр для подавления симметричных ВЧ-помех должен состоять из последовательного дросселя и параллельного конденсатора (рис. 9.43). На рис. 9.42 справа показан дроссель, используемый в таких фильтрах. Для предотвращения насыщения сердечники дросселей для подавления электромагнитных помех должны либо иметь воздушные зазоры, либо изготавливаться из железного порошка, где размер зазора регулируется количеством используемого клея. Поскольку магнитное поле за пределами кольцевых сердечников гораздо слабее, чем у разомкнутых сердечников, их применение более предпочтительно.

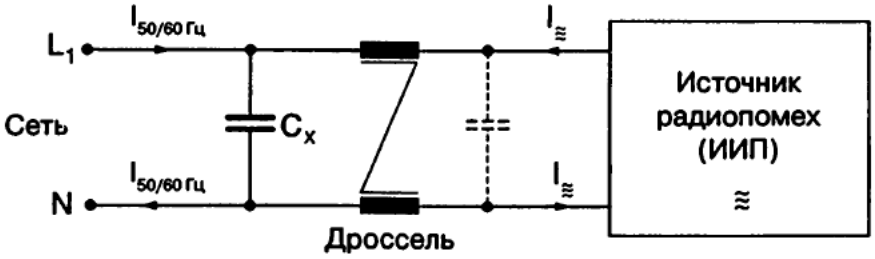


Рис. 9.43. Подавление симметричных радиопомех

Конденсаторы C_x работают при меньших напряжениях по сравнению с C_y, поэтому на них не накладываются такие строгие ограничения. Обычно используются конденсаторы из фольги емкостью до 1 мкФ.

Примечание. Если импеданс источника симметричных помех приблизительно равен импедансу сети, то применяется ФНЧ с двумя конденсаторами C_x, показанный на рис. 9.43 пунктирной линией.

9.4.7.5. Полный ВЧ-фильтр

На рис. 9.44 показан полный ВЧ-фильтр. Номиналы используемых компонентов часто подбираются экспериментально. При помощи анализатора ВЧ-помех можно измерить только напряжение несимметричных радиопомех. Поэтому синфазные и симметричные помехи разделить невозможно. На практике к симметричным радиопомехам относят шумы с частотами, равными рабочей частоте и нескольким ее гармоникам, а к синфазным — все помехи с частотами выше 5 МГц. Часто можно обойтись без использования дросселей с порошковыми сердечниками.

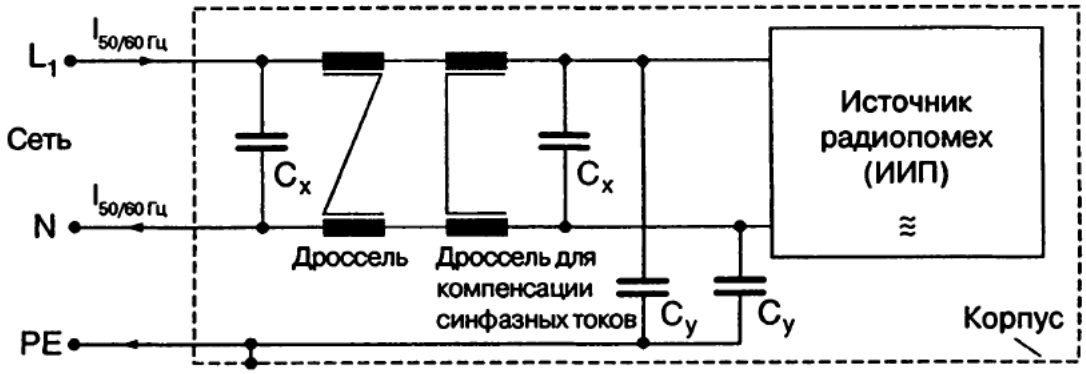


Рис. 9.44. Подавление всех радиопомех

9.5. Обозначения

A	Площадь поперечного сечения
A_L	Магнитная проводимость
B_{FE}	Плотность магнитного потока в железе (феррите)
B_δ	Плотность магнитного потока в воздушном зазоре
C	Конденсатор
D	Диод
f	Частота
f_0	Резонансная частота
ΔV, ΔI	Пульсации напряжения и тока
in	Индекс: входная величина
H_{Fe}	Напряженность магнитного поля в железе (феррите)
H_δ	Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре
I	Постоянный ток, СКЗ тока
$\hat{I}$	Пиковое значение тока
$\bar{I}$	Среднее значение тока
I_F	Ток через прямо смещенный диод
$I_{s/c}$	Ток короткого замыкания
J	Плотность тока

L	Индуктивность
out	Индекс: выходная величина
P	Мощность
P_L	Потери мощности
PWM	Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)
R	Индекс: номинальное значение
R_M	Резистор для измерения тока
СКЗ	Среднеквадратичное значение
t_1	Время включения транзистора
t_1/T	Рабочий цикл
T	Длительность периода
V_{BE}	Напряжение база–эмиттер
V_F	Падение напряжения на прямо смещенном диоде
V_{Fe}	Магнитный объем ферритового сердечника
V_{max}	Максимальное значение напряжения
V_{min}	Минимальное значение напряжения
V_{ref}	Эталонное напряжение
V_{Rpp}	Размах напряжения пульсаций
V_{PWM}	Широтно-импульсное модулированное напряжение
V_z	Напряжение стабилизации
V_δ	Объем воздушного зазора
Z	Импеданс
Z_{max}	Импеданс конденсатора (в справочниках приводится для частоты 10 кГц)
δ	Длина воздушного зазора
μ_0	Магнитная проницаемость воздуха (в вакууме), $1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/А·м
μ_r	Относительная магнитная проницаемость

Литература

Billings K. *Switchmode Power Supply Handbook.* — : McGraw-Hill, 1999.

Chryssis G. *High Frequency Switching Power Supplies.* — : McGrawHill, 1984.

Rashid M. H. *Power Electronics: Circuits, Devices, and Applications.* 2nd ed. — : Prentice Hall, 1993.

Rashid M. H. *Spice for Circuits and Elecronics using Pspice.* 2nd ed. — : Prentice Hall, 1995.

Tihanyi L. Electromagnetic Compatibility in Power Electronics. — : Butterworth-Heinemann, 1995.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПЕРЕВОД АНГЛИЙСКИХ СОКРАЩЕНИЙ

A

AC	переменный ток
ACD	автоматическое распределение вызовов
ACIA	адаптер интерфейса асинхронной связи
ACK	подтверждение приёма
ACL	список контроля доступа
ACTE	автоматическое контрольно-испытательное оборудование
ACW	незатухающая гармоническая волна
A/D	аналого-цифровой
AD	административный домен
ADC	аналого-цифровой преобразователь, АЦП
ADM	адаптивная дельта-модуляция
ADPCM	адаптивная дифференциальная импульсно-кодовая модуляция
ADSL	асимметричная цифровая абонентская линия
AEA	автоматический анализ ошибок
AF	звуковая частота
AFC	автоматическая подстройка частоты
AFT	точная автоматическая настройка
AGA	прогрессивный графический адаптер
AGC	автоматическая регулировка усиления, АРУ
AHDL	язык описания аналоговых аппаратных средств, язык AHDL
ALC	автоматическая регулировка уровня
ALERT	оповещение о тревоге с обработкой сигналов и оценкой
ALGOL	язык программирования АЛГОЛ
ALS	усовершенствованные маломощные ТТЛ ИС с диодами Шоттки, ТТЛШ
ALU	арифметико-логическое устройство, АЛУ
AM	амплитудная модуляция
AMI	кодирование с чередованием полярности элементов, способ AMI
AMPS	мобильная телефонная связь
AMDSB	амплитудная модуляция с двумя боковыми полосами
ANL	автоматический ограничитель помех
ANSI	код ANSI
ANSI	Национальный институт стандартизации США
APD	лавинный фотодиод
API	интерфейс прикладного программирования

APL	язык программирования APL
AQL	допустимый уровень качества
ARP	протокол разрешения адресов
ARRL	Американская лига радиолюбителей-коротковолновиков
AS	усовершенствованные ТТЛ ИС с диодами Шоттки
ASA	Американское общество стандартов
ASCII	Американский стандартный код для обмена информацией
ASIC	специализированная интегральная схема
ASIS	прикладные интегрированные системы
ASK	амплитудное кодирование
ASM	алгоритмический автомат
ASR	автоматическое распознавание речи
AT	коэффициент затухания, коэффициент ослабления
ATAPI	пакетный интерфейс периферийных устройств для AT-совместимых компьютеров
ATE	автоматическое испытательное оборудование
ATF	амплитудная передаточная функция
ATM	диспетчер печати компании Adobe
ATM	асинхронный режим передачи
AUI	интерфейс подключаемых сетевых устройств
AVC	автоматическая регулировка громкости
avg	среднее (значение)
AVI	стандартный формат файла, содержащего аудио- и видеоданные
AWG	американская система оценки проводов (стандарты на диаметр проводов)
AWGN	аддитивный нормальный шум, аддитивный гауссов шум

B

BALUN	согласование импеданса для соединения сбалансированных линий (скрученные пары) с несбалансированными (коаксиальный кабель)
BASIC	Бейсик (язык программирования)
bbl	баррель
BBS	система электронных досок объявлений, Би-Би-Эс
BCC	символ проверки блока
BCD	двоично-десятичное число
BCH	код Боуза – Чоудхури – Хоквенгема, код БЧХ
bd	бод (единица скорости передачи сигнала)
BEL	символ оповещения
BER	частота ошибок по разрядам
BFO	генератор биений
BG	устройство образования заёма (в вычитающих устройствах)
BI	запирающий вход
BITBLT	поблочная передача данных с поразрядной адресацией
BIBO	ограниченный вход-выход
BIFET	ИС на биполярных и полевых транзисторах
BIOS	базовая система ввода-вывода (совокупность программно-аппаратных средств, обеспечивающих ввод-вывод)
B-ISDN	широкополосная цифровая сеть с комплексными услугами, сеть B-ISDN
BIST	встроенные (аппаратные) средства самотестирования
BISYNC	синхронная (познаковая) передача двоичных данных

bit	двоичный разряд ячейки памяти или регистра
BK	черный
BLOB	большой двоичный объект, «блоб» (тип данных)
bn	миллиард
BN	коричневый
BNC	миниатюрный байонетный соединитель для коаксиального кабеля
BO	симметричный выход
BOC	местная телефонная компания в каждом из семи регионов США
BOM	начало сообщения (признак начала передаваемого пакета)
bp	точка (температура) кипения
BP	полосовой фильтр
BPL	двухфазный (бифазный) код
bpp	число бит на пиксель
BPSK	двухфазное кодирование (способ передачи данных, используемый в ЛВС)
BRA	доступ с номинальной скоростью
BS	знак возврата на одну позицию
BS	базовая станция
BSC	двоичный синхронный протокол связи
BSI	Британская организация по стандартизации
BU	голубой
BW	ширина полосы частот
BWG	бирмингемский сортамент проводов

C

C	керамический
CA	исключение столкновений
CAD	автоматизированное проектирование
CAE	автоматизированное конструирование
CAI	автоматизированное обучение
CAM	стандартный метод доступа (SCSI)
CAM	ассоциативная память, ассоциативное ЗУ
CAN	символ отмены
CAN	сеть абонентского доступа
CAN	стирание (изображения, записи)
CAPI	интерфейс прикладных программ планирования
CAS	строб адреса столбца (в ЗУ)
CASE	автоматизированное проектирование и создание программ
CAT	автоматизированная телефония
CATV	кабельное телевидение, КТВ
CAV	постоянная угловая скорость
CAZ	коммутационный метод автоматической установки нуля (на выходе операционных усилителей)
CB	диапазон, выделенный для персональной и служебной радиосвязи
CB	схема с общей базой
CBDS	широкополосный сервер без установления соединений
CBMS	автоматизированная система передачи и обработки сообщений
CCC	керамический кристаллодержатель
CCD	схема на ПЗС
CCFL	флуоресцентная лампа с холодным катодом

CCIR	Международный консультативный комитет по радиовещанию, МККР
CCITT	Международный консультативный комитет по телеграфии и телефонии, МККТТ
CCN	беспроводная компьютерная сеть связи
CCO	генератор, управляемый током
CCS7	система сигнализации по общему каналу № 7
CCTV	замкнутая телевизионная система
ccw	против часовой стрелки
CD	обнаружение столкновений (в сети Ethernet)
CD	обнаружение несущей частоты
CD	частотно-импульсное кодирование
CDDI	распределенный проводной интерфейс передачи данных
CD-I	интерактивный компакт-диск
CDIP	керамический корпус с двухрядным расположением выводов
CDLC	протокол управления каналом передачи данных сотовой связи
CDMA	коллективный доступ с кодовым разделением каналов
CDN	счет в обратном порядке
CDRAM	буферное динамическое ОЗУ (кэш-память)
CD-ROM	компакт-диск
CDV	компакт-диск с видеоинформацией
CE	разрешение выборки кристалла
CE	схема с общим эмиттером
CE	параллельное (комплексное) проектирование
CELP	линейное предиктивное кодирование
CEPT	Европейская конференция почтовых и телекоммуникационных ведомств
CERDIP	керамический корпус с двухрядным расположением выводов, керамический корпус типа DIP
CF	прохождение вызова, прохождение сигнала
CF	центральная частота
CG	формирование переноса
CGA	адаптер цветной графики
CI	вход переноса
CID	прибор с инжекцией заряда
CIE	Международная комиссия по освещению, МКО
CIM	комплексное автоматизированное производство
CIR	согласованная скорость передачи информации (минимальная пропускная способность)
CISC	ЭВМ со сложным набором команд
CIT	компьютерная телефония
Ck	синхронизация
CLCC	керамический кристаллодержатель с выводами
CLI	интерпретатор языка команд
CLIP	процессор изображений на основе клеточной логики
CLIR	ограничения при определении номера вызывающего абонента
CLP	логический блок с перестраиваемой конфигурацией
Clr	установка в исходное состояние; сброс
CLUT	справочная таблица цветов
CLV	постоянная линейная скорость
CM	компаратор, сравнивающее устройство, блок сравнения

CMI	кодирование с инверсией кодовых маркеров
CMIP	протокол общей управляющей информации
CML	логические схемы с переключателями тока
CMR	ослабление синфазного сигнала
CMRR	коэффициент ослабления синфазного сигнала
CMV	синфазное напряжение
C/N	отношение мощности сигнала к шуму
CNC	числовое программное управление
CNR	отношение мощности сигнала к шуму
CO	выход сквозного переноса
COFDM	кодированная ортогональная мультиплексная передача с частотным разделением
COHO	когерентный генератор
COMAL	КОМАЛ (язык программирования)
CompuSec	компьютерная безопасность
ComSec	коммуникационная безопасность (защита информации в процессе передачи по линиям связи)
CONP	протокол с установлением логических соединений
CP	выход сигнала переноса
CP/M	операционная система CP/M (для микроЭВМ)
CPE	аппаратура
CPFSK	частотное кодирование без разрыва фазы (при передаче данных)
CPM	непрерывная фазовая модуляция
CPN	сеть, устанавливаемая в помещении пользователя
cps	количество знаков в секунду
cps	количество циклов в секунду
CPU	центральный процессор, ЦП
CQFP	керамический плоский корпус с четырехсторонним расположением выводов
CR	возврат каретки
CRC	контроль при помощи циклического избыточного кода
CRO	электронно-лучевой осциллограф
CRT	электронно-лучевая трубка, ЭЛТ
c/s	клиент-сервер
CS	выбор микросхемы
CSMA	множественный доступ с контролем несущей, МДКН
CSMA/CA	множественный доступ с контролем несущей и предотвращением конфликтов
CSMA/CD	множественный доступ с контролем несущей и обнаружением конфликтов
CSTA	стандарт ассоциации ECMA на телекоммуникационные программы с компьютерной поддержкой
CT	беспроводной телефон
CTC	схема счетчика/таймера
CTI	интеграция телефона и компьютера, компьютерная телефония
CTR	счетчик
CTS	готовность к приему
CUP	счет в прямом направлении
CVD	химическое осаждение из паровой фазы
CW	ожидание вызова

cw	по часовой стрелке
CW	незатухающие колебания
CWL	лазер, работающий в режиме непрерывного излучения
Cy	перенос

D

D	данные
D2B	внутренняя цифровая шина
D²MAC	дуобинарное кодирование
D/A	цифроаналоговое преобразование
DAB	плата сбора данных
DAC	цифроаналоговый преобразователь, ЦАП
DASP	цифровой аудиопроцессор
DATEC	цифровая адаптивная аппаратура для эффективной связи
DAU	устройство сбора данных
DBS	цифровое спутниковое вещание
DC	постоянный ток
dc	безразличное состояние (элемента логической схемы)
DCE	оконечное оборудование (линии) передачи данных
DCS	система цифровой сотовой связи
DCT	дискретное косинусное преобразование
DCTL	транзисторные логические схемы с непосредственными связями
DD	удвоенная плотность (записи информации)
DDC	прямое цифровое управление
DECT	усовершенствованная цифровая беспроводная связь
DEMKO	Датский национальный знак качества
DES	стандарт шифрования данных
DFB	распределённая обратная связь
DFT	дискретное преобразование Фурье, ДПФ
DIAC	диодный переключатель переменного тока; динистор
DIL	двухрядное расположение выводов
DIMM	модуль памяти с двухрядным расположением выводов
DIP	корпус с двухрядным расположением выводов, корпус типа DIP
DLC	протокол управления каналом передачи данных
DMA	прямой доступ к памяти, ПДП
DMM	цифровой универсальный электроизмерительный прибор
DNS	служба имён доменов
DOV	метод одновременной передачи данных и голоса
dpb	количество дефектных изделий на миллиард годных
DPDT	двухполюсный переключатель на два направления
dpi	число точек на дюйм (единица измерения плотности печати или разрешающей способности)
DPLL	цифровая система фазовой автоподстройки частоты
DPM	цифровой щитовой измерительный прибор
DPSK	кодирование дифференциальным сдвигом фазы (при передаче данных)
DPST	двухполюсный выключатель
DQDB	распределенная двойная шина с организацией очереди
DQPSK	дифференциальное квадратурное фазовое кодирование
DRAM	динамическое ОЗУ

DRO	цифровой запоминающий осциллограф
DS	двусторонний
DSB	двухполосный
DSBS	прямое спутниковое радиовещание
DSO	цифровой запоминающий осциллограф
DSO	малогабаритный корпус с двухрядным расположением выводов
DSP	цифровой сигнальный процессор (ЦСП)
DSR	сигнал готовности, посылаемый модемом компьютеру
DSR	цифровое спутниковое радиовещание
DSS-1	цифровая абонентская система передачи служебных сигналов
DSSS	метод расширения спектра сигналов в системах многостанционного доступа
DSU/CSU	сервер канальных данных, обеспечивающий подключение оборудования к цифровым системам
DTE	оконечное оборудование обработки данных, терминал
DTL	диодно-транзисторная логика, ДТЛ
DTMF	двухтональный многочастотный набор (телефонного номера)
DTR	сигнал готовности терминала к передаче данных
DUT	проверяемое устройство
DVD	универсальный цифровой диск
DVSO	сверхмалогабаритный корпус с двухрядным расположением выводов
dx	дуплекс
DX	дальний приём

E

E	вход расширения
E²PROM	электрически стираемое программируемое постоянное запоминающее устройство, СППЗУ
EAROM	электрически перепрограммируемое постоянное запоминающее устройство, ЭППЗУ
EBCDIC	расширенный двоично-десятичный код для обмена информацией
EBU	Европейский союз радиовещания
ECC	обнаружение и исправление ошибок
ECC	код с исправлением ошибок
ECCT	расширенный телетекст, управляемый ЭВМ
ECL	эмиттерно-связанная логика
ECM	режим исправления ошибок
ECMA	Европейская ассоциация производителей компьютеров, ЕАПК
ECMA-6	расширенный код ASCII
ED	сверхвысокая плотность (записи)
EDA	автоматизация проектирования электронных приборов и устройств
EDC	код с обнаружением ошибок
EDC	обнаружение и исправление ошибок
EDI	электронный обмен данными
EDIF	формат электронного обмена данными
EDO	ускоренный ввод-вывод
EDP	электронная обработка данных
EDRAM	усовершенствованное динамическое ОЗУ
EDTV	телевидение повышенной чёткости, ТПЧ
EE	инженер-электрик

EEPLD	электрически стираемое программируемое логическое устройство (ПЛУ)
EEPROM	электрически стираемое программируемое ПЗУ
EFM	EFM-модуляция (преобразование первичного 8-разрядного кода в 14-разрядный для повышения уровня помехоустойчивости)
EGA	усовершенствованный графический адаптер, видеостандарт EGA
EHF	сверхвысокая частота (30...300 ГГц)
EIA	Ассоциация электронной промышленности
EIB	электрическая подстанция
E-IDE	расширенный встроенный интерфейс дисковых устройств
EIRP	эффективная изотропно-излучаемая мощность
EISA	расширенная стандартная архитектура для промышленного применения
ELCB	автомат утечки на землю
ELD	электролюминесцентный экран
ELF	чрезвычайно низкая частота (30...300 Гц)
EMC	электромагнитная совместимость
emf	электродвижущая сила, ЭДС
EMI	электромагнитное излучение (помехи)
EMR	электромагнитное излучение
EMS	описание расширенной памяти
EN	разрешающий сигнал
EN	европейские нормы
ENQ	запрос
e/o	электрооптический
EOF	конец файла
EOR	исключающее ИЛИ
EOT	конец ленты
EOT	конец передачи
EPAC	электрически программируемая аналоговая схема
EPLD	электрически программируемое логическое устройство
EPO	Европейская патентная организация
EPROM	стираемое программируемое постоянное запоминающее устройство, СППЗУ
EPS	инкапсулированный PostScript (название языка описания страниц, направляемых на печать)
erf	функция ошибок
ERMES	европейский стандарт на передачу сообщений на радиочастотах
ERP	эквивалентная излучаемая мощность
ES	европейский стандарт
ESC	символ начала управляющей последовательности, переход
ESD	электростатический разряд
ESDI	улучшенный интерфейс малых устройств
ESDS	устройство, чувствительное к электростатическим разрядам
ESPRIT	Европейская стратегическая программа по исследованиям в области информационной технологии
ETS	инженерно-техническое обеспечение
ETSI	Европейский институт стандартов по коммуникациям
EUT	проверяемое оборудование
EXOR	исключающее ИЛИ
E1	используемая в Европе цифровая сеть передачи данных полосой 2,048 Мбит/с

F

FACT	методика прогнозирования и управления
FAMOS	МОП-структура с лавинной инжекцией и плавающим затвором
FAQ	сетевой файл, содержащий ответы на часто задаваемые вопросы по некоторой тематике
FAST	серия ТТЛ ИС с диодами Шоттки фирмы Fairchild (США)
FAT	таблица размещения файлов
FCC	Федеральная комиссия по средствам связи (США)
FCS	контрольная последовательность кадра
FDC	контроллер накопителя на гибких магнитных дисках
FDD	накопитель на гибких магнитных дисках
FDDI	распределенный интерфейс передачи данных по волоконно-оптическим каналам
FDDI-II	расширенный FDDI
FDM	мультиплексная передача с частотным разделением или уплотнением каналов
FDMA	множественный доступ с частотным разделением каналов
FDX	дуплексный режим
FEC	прямое исправление ошибок (без требования повторения передачи)
FET	полевой транзистор
FF	подача бланка; подача страницы
FFT	быстрое преобразование Фурье
FH-CDMA	множественный доступ с кодовым разделением каналов со скачкообразной перестройкой частоты
FIFO	«первым пришел — первым обслужен» (принцип очерёдности)
FILO	«первым пришел — последним обслужен» (принцип очерёдности)
FIPS	Федеральный стандарт по обработке информации (США)
FIR	конечная импульсная характеристика
FIT	фит — единица измерения надежности
FLOTOX	«плавающий» затвор с туннелированием в окисле
FM	частотная модуляция
FoD	факс по требованию
FOR	факс по радио
FORTRAN	ФОРТРАН (алгоритмический язык)
FOX	волоконно-оптический приёмопередатчик, трансивер (устройство для подключения компьютера к сети)
fp	точка замерзания
FPA	ускоритель операций с плавающей запятой
FPDT	четырёхполюсный на два направления
FPGA	матричная БИС FPGA
FPLD	программируемое пользователем логическое устройство
FPLS	программируемый пользователем контроллер
fps	количество кадров в секунду
FPST	четырёхполюсный на одно направление
FPU	устройство для выполнения операций с плавающей точкой
FR	ретрансляция кадров
FRD	диод с быстрым восстановлением
FROM	флэш-память

FSD	отклонение на всю шкалу
FSK	частотное кодирование (при передаче данных)
FSM	конечный автомат
FSR	тензорезистор
FTAM	передача, доступ и управление файлами
FTP	протокол передачи файлов

G

GA	логический элемент
GaAs	арсенид галлия
GAFET	GaAs-полевой транзистор
GAL	типовая матричная логика
GB	гигабайт (1024 мегабайт)
GCD	наибольший общий делитель
GCR	запись с групповым кодированием
GCT	таблица гамма-коррекции
GD	золотой
GDI	интерфейс графических устройств
GFLOPS	10^9 операций с плавающей точкой в секунду
GIGO	«мусор на входе — мусор на выходе» (принцип, согласно которому программа выдаёт бессмысленные результаты при бессмысленных входных данных)
GMSK	кодирование Гаусса с минимальным сдвигом (при передаче данных)
GN	зеленый
GND	заземление
GNYE	зелено-желтый
GOLD	однокристальное GSM-логическое устройство
GOPS	10^9 операций в секунду
GP	универсальный, общего назначения
GPIA	интерфейсный адаптер общего назначения
GPIB	интерфейсная шина общего назначения
GPS	глобальная система навигации и местоопределения
GSM	глобальная система мобильной связи (стандарт сотовой связи в Европе)
GTO	запирающее напряжение (тиристора)
GUI	графический пользовательский интерфейс
GY	серый

H

HAL	аппаратно-реализованная матричная логика
HBT	биполярный гетеротранзистор
HC	быстродействующая КМОП-схема
HCF	наибольший общий делитель
HCMOS	КМОП-схема повышенной плотности
HCT	быстродействующая КМОП-схема с ТТЛ-уровнями пороговых напряжений
HD	жесткий диск
HD	высокая плотность (записи)
HDB3	двоичный код повышенной плотности с заменой 3-х нулей
HDCD	компакт-диск с большой плотностью записи

HDD	накопитель на жестком диске
HDL	язык описания аппаратных средств
HDLC	высокоуровневый протокол управления каналом
HDMAC	аналоговые компоненты с высоким разрешением
HDTV	телевидение высокой четкости
HDVS	видеосистема высокой четкости
HDX	полудуплексный
HEMT	транзистор с высокой подвижностью электронов, ВПЭ-транзистор
HFO	высокочастотный генератор
HHF	сверхвысокая частота (300...3000 ГГц)
HiFi	высокое качество звучания
HIP	шестигранный плоский корпус
HIPO	технология разработки программного обеспечения на базе идеи структурного программирования
HLF	сверхнизкая частота (ниже 3 кГц)
HLL	логические схемы с высокими уровнями сигналов
HLL	язык высокого уровня
HLLCMOS	КМОП-схемы с высокими уровнями сигналов
HMA	область старших адресов памяти, верхняя область памяти
HNIL	логические схемы с высокой помехоустойчивостью
HPIB	универсальная интерфейсная шина
HSB	оттенок–насыщенность–яркость (одна из моделей цветовоспроизведения)
HSI	цветовой тон, насыщенность, контрастность (одна из моделей цветовоспроизведения)
HSV	оттенок–насыщенность–значение
HTL	логические схемы с высоким порогом напряжения, высокопороговые логические схемы, ВПЛ-схемы
HTL	высоковольтная транзисторная логика (26...33 В)
HTML	язык HTML (стандартный язык, используемый для создания web-страниц)
HTP	высокие тепловые характеристики
HTS	высокотемпературный сверхпроводник
http	протокол передачи гипертекстовых файлов (используется при передаче HTML-файлов по сети)
h/w	аппаратные средства

I

IAE	ошибка типа «недействительный адрес»
IARU	Международный союз радиолюбителей
IC	интегральная схема, ИС
ICAP	повышенные возможности, усовершенствованные характеристики (аппаратуры, системы)
ICCS	кабельная интегрированная система связи
ICE	внутрисхемный эмулятор
ICIS	источник тока, управляемый током
ICT	внутрисхемный тестер
ICVS	источник напряжения, управляемый током
IDE	встроенный интерфейс накопителей
IDFT	обратное преобразование Фурье, ОПФ
IDN	интеллектуальная сеть передачи данных

IDTV	телевидение высокой четкости
IEC	Международная электротехническая комиссия, МЭК
IEEE	Институт инженеров по электротехнике и электронике
IF	промежуточная частота
IF	частота смены кадров
IFL	интегральные логические схемы с плавкими перемычками
IGBT	биполярный транзистор с изолированным затвором
IGES	исходный стандарт обмена графическими данными, стандарт IGES
IGFET	канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором
IIL	интегральные инжекционные логические схемы
IIR	бесконечная импульсная характеристика
ILF	инфранизкая частота (0,3...3 кГц)
IM	взаимная модуляция
IMD	интермодуляционное искажение
IMPATT	лавиннопролётный диод
IMQ	итальянский национальный знак качества
INIC	преобразователь отрицательного сопротивления с инверсией тока
INT	прерывание, сигнал прерывания
I/O	ввод-вывод
IP	Интернет-протокол
IP	международная защита
IP	точка пересечения (аппроксимирующей линии) с осью абсцисс
IPC	управление производственным процессом
IPIP	вход подключения подслушивающего устройства
ips	число дюймов в секунду
IPX	межсетевой пакетный обмен
IR	инфракрасный
IrDA	Ассоциация передачи данных в инфракрасном диапазоне
IRE	Институт радиоинженеров, ИРИ
IRE	единицы ИРИ
IRED	инфракрасный светодиод
IRQ	запрос прерывания
ISA	архитектура, соответствующая промышленному стандарту (первоначально — название системной шины IBM PC/XT, в настоящее время не поддерживается)
ISDN	цифровая сеть связи с комплексными услугами
ISI	межсимвольная интерференция, межсимвольные помехи
ISO	Международная организация по стандартизации
ISP	поставщик услуг Интернет
IT	информационная технология
ITU	Международный союз по телекоммуникациям
ITU-R	Международный союз по телекоммуникациям — отдел радиосвязи
ITU-T	Международный телекоммуникационный союз
ITU-TSS	Международный союз по телекоммуникациям — отдел стандартизации средств связи
IVR	интерактивный автоответчик

J

JEDEC	Объединенный совет по электронным устройствам
JFET	канальный [полевой, униполярный] транзистор с *p-n*-переходом
JIT	точно к нужному моменту (стратегия принятия решений в самый последний подходящий для этого момент в целях обеспечения их максимальной точности)
JPEG	метод сжатия изображений и соответствующий графический формат

K

kbps	число килобит в секунду
KCL	закон Кирхгофа (о токах в узлах)
kc/s	килогерц, кГц
KIS	имитатор клавишной системы ввода
KLT	преобразование Карунена — Лоэва
kMc	гигагерц, ГГЦ
KOPS	тысяч операций в секунду (единица быстродействия ЭВМ)
KVL	закон Кирхгофа (о напряжениях в контурах)

L

L	нагрузка
LAN	локальная сеть, ЛВС
LAP-M	протокол доступа к каналу связи (для модемов)
laser	оптический квантовый генератор
LCA	матрица логических элементов
LCC	безвыводной кристаллодержатель
LCD	жидкокристаллический дисплей (ЖК-дисплей)
LCM	наименьшее общее кратное
LCR	выбор маршрута по критерию наименьших затрат
LD	лазерный диод
LDC	дистанционное управление; телеуправление
LDR	фоторезистор
LDTV	телевидение низкой четкости
LE	местная (телефонная) станция
LED	светоизлучающий диод, СИД
LEMP	электромагнитный импульс от грозовых разрядов
LF	перевод строки (служебный ASCII-код)
LF	низкая частота (30 Гц ... 300 кГц)
LFO	низкочастотный генератор
LIFO	«последним пришёл — первым обслужен» (принцип функционирования стека)
LISP	язык обработки списков ЛИСП (язык программирования)
LL	арендуемая линия связи, выделенная линия
LLC	управление логическим соединением
LLLTV	ночное телевидение
LMS	алгоритм нахождения минимальной среднеквадратичной ошибки
LNA	малошумящий усилитель
LNC	малошумящий преобразователь
LO	гетеродин
LOCMOS	МОП-структура с использованием локального окисления

LORAN	ЛОРАН (импульсная дальномерная радионавигационная система)
LP	фильтр низких частот
LPC	кодирование с линейным предсказанием
LR	малое излучение (экрана монитора)
LRC	продольный контроль по избыточности
LRU	(память) с наиболее поздним использованием
LS	менее значащий, младший
LSB	самый младший (двоичный) разряд
LSD	цифра самого младшего разряда
LSI	интеграция высокого уровня, большая интегральная схема (1000...5000 логических элементов)
LSTTL	маломощные ТТЛШ-схемы
LTP	нижняя точка переключения
LUT	справочная таблица; таблица соответствия
LZW	сжатие данных методом Лемпела – Зева – Уолша (используется, в частности, в графическом формате GIF)

M

MAC	протокол управления доступом к (передающей) среде
MAC	временное уплотнение аналоговых составляющих
MAD	среднее абсолютное отклонение
MAN	городская вычислительная сеть (сеть, промежуточная по масштабу между локальной и глобальной)
MAP	протокол автоматизации производства, протокол MAP
MASK	многоуровневое амплитудное кодирование
MAU	устройство подключения к среде передачи данных (приемопередатчик сети Ethernet)
MAU	модуль множественного доступа
MB	мегабайт
Mbps	Мбит/с
MBS	совместная система радиовещания
μC	микроконтроллер
MCA	микроканальная архитектура, архитектура MCA
MCM	многокристальный модуль, МКМ
MCT	МОП-тиристор
MDAC	умножающий ЦАП
MDR	регистр памяти
MDT	среднее время обнаружения неисправностей
MECL	логические схемы с эмиттерными связями фирмы «Моторола»
MET	транзистор с несколькими эмиттерами
MF	средняя частота (300 кГц ... 3 МГц)
MF	микрофарад, мкФ
MFAQ	часто задаваемые вопросы
MFD	микрофарад, мкФ
MFLOPS	миллион операций с плавающей запятой в секунду, мегафлоп/с
MFM	модифицированная частотная модуляция
MFSK	многочастотное кодирование
MHC	модифицированный код Хаффмана
MHS	система управления сообщениями

MIB	база управляющей информации
MIDI	цифровой интерфейс музыкальных инструментов

MUX мультиплексор
MW мегаватт, МВт
MX максвелл, Мкс

N

N нейтраль
NAK отсутствие подтверждения приема
NB узкополосный канал
NBFM узкополосная частотная модуляция, УЧМ
NBS Национальное бюро стандартов (США)
nc нормально замкнутый
nc отсутствие соединения
NCCF нормализованная взаимно корреляционная функция
NCO генератор с цифровым управлением
NDI неразрушающий контроль
NDT неразрушающее испытание
NE сетевой элемент
NEC Национальный электрический код (США)
NEMA Ассоциация производителей электрических товаров (США)
NEMKO норвежский национальный знак качества
NEP эквивалентная мощность шума
NF коэффициент шума
NFB отрицательная обратная связь
NFS сетевая файловая система
NI сетевой интерфейс
NIC сетевая интерфейсная плата, сетевой адаптер
NIC преобразователь отрицательного импеданса
NIM стандартная модульная аппаратура для ядерно-физических измерений; стандарт NIM
NIST Национальный институт стандартов и технологии (США)
NLQ режим высококачественной печати, режим NLQ
NMI немаскируемое прерывание
NN нейронная сеть
no нормально разомкнутый
NOT число витков
Np непер, Нп (логарифмическая единица = 8,69 дБ)
NPV чисто приведенное значение
NRZ без возврата к нулю (метод бинарного кодирования информации, при котором единичные биты представляются положительным значением, а нулевые — отрицательным)
NRZI без возвращения к нулю и с инверсией
NT сетевой терминатор (согласующее устройство ISDN)
NTC отрицательный температурный коэффициент
NTFS файловая система Windows NT
NTP нормальные условия (760 мм рт. ст. и 20 °С)
NTSC национальный телевизионный стандартный код
nv энергонезависимый
NVM ЗУ, сохраняющее информацию при выключении электропитания (энергонезависимое ЗУ)

O

OA	автоматизация учрежденческой деятельности
OA	операционный усилитель
OC	открытый коллектор
OC	разомкнутая цепь; разомкнутый контур
OCCAM	OKKAM (язык параллельного программирования)
OCP	защита от сверхтоков
OCR	оптическое распознавание символов
ODA	структура учрежденческой документации (стандарт и рекомендации ISO)
ODIF	стандарт обмена документацией
ODL	оптический канал передачи данных
o/e	оптоэлектронный преобразователь
OEIC	оптоэлектронная ИС
OEM	изготовитель комплексного оборудования
OFA	волоконно-оптический усилитель
OFDM	оптическое мультиплексирование деления частоты
OFDM	ортогональное мультиплексирование деления частоты
OG	оранжевый
OGM	исходящее сообщение
OHP	защита от перегрева
OLMC	выходной логический макроэлемент
ONT	терминатор сети волоконно-оптической связи
OOK	амплитудное кодирование
OOP	объектно-ориентированное программирование, ООП
OSD	отображение дополнительной информации на экране телевизора
OSF	Фонд открытого ПО, консорциум OSF (независимая некоммерческая научно-исследовательская организация, занимающаяся разработкой стандартов для открытых систем)
OSI	взаимодействие открытых систем (международная программа стандартизации обмена данными между компьютерными системами различных производителей)
OTA	операционный усилитель тока, управляемый напряжением
OTDM	оптическая мультиплексная передача с временным разделением
OTDR	оптический рефлектометр временной области
OTP	однократно программируемый
OVE	австрийский национальный знак качества
OVP	защита от перенапряжения

P

P	пластиковый
P	пропорциональный (в управлении)
PA	усилитель мощности
PA	полиамид
PA	адрес программы
PABX	локальная АТС с исходящей и входящей связью (с городом)
PAD	программируемый дешифратор адресов
PAL	построчное изменение фазы
PAL	программируемая матричная логика

PAM	амплитудно-импульсная модуляция
PAP	«включай и работай» (принцип автоматического распознавания и конфигурирования подключённых устройств, реализуемый в компьютерах и отдельных их компонентах и широко поддерживаемый ОС Windows)
PBN	сеть частных телефонных станций
PBX	телефонная станция, не включенная в общедоступные сети (например, офисная АТС)
PC	персональная ЭВМ
PCB	печатная плата
PCC	пластиковый кристаллодержатель
PCD	фотографический компакт-диск, фотодиск (стандарт, касающийся хранения фотоизображений на компакт-дисках)
PCI	32-разрядная системная шина с возможностью расширения до 64 разрядов, взаимодействие через которую происходит без участия CPU; поддерживает технологию Plug-and-Play
PCL	язык управления печатью
PCM	импульсно-кодовая модуляция
PCMCIA	Международная ассоциация производителей плат памяти для персональных компьютеров IBM PC
PCN	сеть персональных ЭВМ
pc	печатная плата
PCS	кварцевое волокно с полимерной оболочкой
PCSF	волокно с пластмассовой оболочкой или пластмассовым покрытием
PCTA	терминальный адаптер персонального компьютера
PD	пропорционально-дифференциальное регулирование
PD	общедоступные программные средства
PDA	«карманный» компьютер, предназначенный для выполнения некоторых специальных функций
PDCA	планировать, делать, проверять, оценивать
PDH	плезиохронная цифровая иерархия (европейский стандарт для волоконно-оптических сетей)
PDM	широтно-импульсная модуляция, ШИМ
PDM	поляризационное уплотнение
PE	параллельное разрешение
PE	фазовое кодирование
PE	полиэтилен
PE	защитное заземление
PEN	нейтральный провод защитного заземления
PERL	язык Perl (универсальный язык сценариев, доступный для большого числа платформ)
PF	коэффициент мощности
PFC	коррекция коэффициента мощности
PFET	силовой полевой транзистор
PFM	частотно-импульсная модуляция, ЧИМ
PGA	программируемая логическая матрица, ПЛМ
PGA	усилитель с программируемым усилением

PHIGS	иерархическая интерактивная графическая система программиста (промышленный стандарт интерфейса прикладной программы и ее графической системы)
PHL	физический уровень
PI	пропорционально-интегральное регулирование (ПИ-регулирование)
PIA	адаптер сопряжения с периферийными устройствами, периферийный интерфейсный адаптер
PID	пропорционально-интегрально-дифференциальное регулирование (ПИД-регулирование)
PID	идентификатор процесса
PIN	личный номер, код
PIO	программируемый ввод-вывод
PIP	«картинка в картинке» (метод просмотра видеоизображения с увеличением интересующих фрагментов)
PIPO	параллельный вход, параллельный выход
PIR	пассивный инфракрасный (детектор)
PISO	параллельный вход, последовательный выход
PK	розовый
PKC	криптографическая система с открытым ключом (шифрование данных для передачи в сети)
PKI	криптографическая инфраструтура с открытым ключом
PLA	программируемая логическая матрица, ПЛМ
PLC	программируемый логический контроллер
PLCC	пластиковый кристаллодержатель с выводами
PLD	программируемое логическое устройство, ПЛУ
PLL	система фазовой автоподстройки частоты (ФАПС)
PLM	широтно-импульсная модуляция
PL/1	ПЛ/1 (язык программирования)
PM	фазовая модуляция
PMF	силовой МОП-транзистор
POF	полимерное оптическое волокно
POH	время нахождения во включённом состоянии
POLSK	поляризационное кодирование
PON	пассивная оптическая сеть
PON	включенное состояние
POS	произведение сумм
POST	самотестирование при включении питания
POTS	обычная телефонная сеть
pp	полный размах
PP	полипропилен
PPA	двухтактный усилитель
ppb	частей на миллиард
ppm	частей на миллион
PPP	протокол передачи от точки к точке, протокол двухточечного соединения
PQFP	пластиковый плоский корпус с четырехсторонним расположением выводов
PRBS	псевдослучайная двоичная последовательность
PRF	частота повторения импульсов

PRN	псевдослучайный шум
PROM	программируемое постоянное запоминающее устройство, ППЗУ
PRR	частота повторения импульсов
PS	полистирол
PSDN	сеть с коммутацией пакетов данных
PSK	фазовое кодирование
PSRR	коэффициент подавления изменений напряжения питания
PSTN	коммутируемая телефонная сеть общего пользования
PSW	слово состояния программы
PTC	положительный температурный коэффициент
PTFE	политетрафторэтилен, тефлон, ПТФЭ
PTO	оператор телефонов-автоматов
PTT	почтово-телеграфная и телефонная связь
PU	полиуретан
PVC	поливинилхлорид
PWD	искажение ширины импульса
PWM	широтно-импульсный модулятор
PWR	питание
PWR DWN	выключенное питание
PXO	программируемый генератор

Q

QAM	квадратурная амплитудная модуляция
QASK	квадратурное амплитудное кодирование
QBE	запрос по образцу
QCIF	четверть-CIF (вариант формата CIF с уменьшенным вчетверо разрешением)
QDPSK	фазовое кодирование с когерентными четвертичными (фазовыми) сигналами
QFP	плоский корпус с четырехсторонним расположением выводов
QFPP	пластмассовый плоский корпус с четырехсторонним расположением выводов
QIC	четвертьдюймовый картридж (с магнитной лентой шириной 6,3 мм)
QIP	корпус с четырёхрядным расположением (штырьковых) выводов
QIP	система управления IP-адресами
QMS	система управления качеством
QoS	качество и класс предоставляемых услуг передачи данных
QPP	двухтактный усилитель с нулевым выходным током покоя
QPSK	фазовое кодирование с четвертичными (фазовыми) сигналами
QSPI	последовательный интерфейс периферийных устройств с организацией очереди
QTY	количество

R

RAC	выпрямленный переменный ток
RACE	НИОКР по созданию усовершенствованной системы связи для Европы
RADAR	радиообнаружение и измерение расстояния
RAH	удержание адреса ряда
RAID	матрица независимых дисковых накопителей с избыточностью

RAIT	матрица независимых ленточных накопителей с избыточностью
RAM	оперативное запоминающее устройство, ОЗУ
RAMDAC	ЦАП с ОЗУ
RAS	строб адреса строки
RBER	частота появления ошибочных битов
RBOC	региональная телефонная компания в США
RCO	выход счётчика со сквозным переносом
RCT	испытания для подтверждения надежности
RCTL	резисторная логика с резистивными связями, ТЛРС
RCV	принять (название команды)
R&D	исследования и разработки
RD	принять данные
RD	красный
RDBMS	система управления реляционной базой данных, СУРБД
RDS	текущее цифровое значение суммы
RDY	состояние готовности
RF	радиочастота (3...30 МГц)
RF	коэффициент реактивной мощности
RFA	усилитель высокой частоты, УВЧ
RFI	радиопомеха
RGB	красный-зеленый-синий, система (цветопередачи) RGB
RIP	растровый процессор изображений
RISC	RISC-процессор, процессор с сокращённым набором команд
RJ45	8-штырьковый разъем
RLC	резистивно-индуктивно-емкостный (фильтр)
RLE	кодирование длин серий, групповое кодирование
RLLE	кодирование с ограничением длины серий
RMS	среднеквадратичное значение
ROC	область сходимости
ROD	перезаписываемый оптический диск
ROM	ПЗУ, постоянная память; постоянное запоминающее устройство
RPM	число оборотов в минуту
RPN	обратная польская (бесскобочная) запись
RPS	число оборотов в секунду
RS	код Рида – Соломона
RS232	стандартный интерфейс последовательной передачи данных
RSA	код Ривеста – Шамира – Адлемана
RSC	код Рида – Соломона
RTC	часы истинного времени
RTD	резистивный датчик температуры (термистор)
RTF	расширенный текстовый формат
RTL	резисторно-транзисторная логика, РТЛ
RTS	готовность к передаче
RTTY	радиотелетайп
R/W	чтение-запись
RX	приемник
RZ	возврат к нулю

S

SAA	системная архитектура прикладных программ (набор стандартов корпорации IBM)
SAH	ошибка типа «постоянная» 1, зависание в 1
SAL	ошибка типа «постоянный» 0, зависание в 0
SAM	память с последовательным доступом
SAW	поверхностная акустическая волна, ПАВ
SAWR	резонатор ПАВ
SBC	одноплатная ЭВМ
SC	переключаемый конденсатор
SCAM	амплитудная модуляция с подавлением несущей
SCM	модуляция поднесущей
SCP	последовательный порт управления
SCR	кремниевый управляемый диод
SCS	тетродный тиристор
SCSI	интерфейс малых компьютерных систем (стандарт высокоскоростного параллельного интерфейса, разработанный ANSI, используется для подключения к компьютеру периферийных устройств, других компьютеров или ЛВС)
Σ–Δ	сигма-дельта-преобразователь
SD	одинарная плотность
SDH	синхронная цифровая иерархия, стандарт SDH (европейский стандарт на волоконно-оптические средства передачи данных)
SDLC	синхронное управление передачей данных
SDRAM	синхронное динамическое ЗУПВ
SDTV	телевидение стандартной четкости
SECAM	СЕКАМ (система цветного телевидения)
SEM	растровый электронный микроскоп, РЭМ
SEMKO	шведский национальный знак качества
SET	транзистор с выступающими электродами
SETI	финский национальный знак качества
SEV	швейцарский национальный знак качества
SFN	одночастотная сеть
SG	«подвешенная земля»
SGML	стандартный обобщённый язык разметки (стандарт описания офисных документов, утвержденный ISO)
S/H	выборка и хранение
SHA	усилитель выборки и хранения
SHF	сверхвысокая частота, СВЧ (3...30 ГГц)
S/I	отношение сигнал/шум
SIA	Ассоциация полупроводниковой промышленности (США)
SIL	с однорядным расположением выводов
SIMD	с одним потоком команд и многими потоками данных (об архитектуре ЭВМ), векторная архитектура ЭВМ
SIMM	модуль памяти с однорядным расположением выводов
SIO	последовательный ввод-вывод
SIP	корпус с однорядным расположением выводов, корпус (типа) SIP
SIPO	с последовательным входом и параллельным выходом

SISD	с одним потоком данных и одним потоком команд (об архитектуре ЭВМ), последовательная архитектура ЭВМ
SISO	с одним входом и одним выходом
SLF	сверхнизкая частота (меньше 3 кГц)
SLIC	интерфейс абонентской телефонной линии
SMC	компонент для поверхностного монтажа
SMD	прибор для поверхностного монтажа (на печатную плату)
SMDS	высокоскоростная сетевая технология, предлагаемая телефонными компаниями США
SMPS	импульсный источник питания
SMPTE	Общество кино- и телеинженеров США
SMT	технология поверхностного монтажа
SMTP	простой протокол электронной почты, протокол SMTP (основной протокол электронной почты в сети Интернет)
S/N	отношение сигнал/шум
SNA	системная сетевая архитектура
SNMP	простой протокол сетевого управления (протокол сетевого администрирования)
SNR	отношение сигнал/шум
SO	последовательный выход
SO	малогабаритный корпус, корпус типа SO
SOA	область устойчивой работы (прибора, элемента)
SOH	начало заголовка
SOHO	класс программного обеспечения, предназначенного для малого или домашнего офиса
SOIC	ИС в корпусе типа SO
SOJ	однорядный корпус с J-образными выводами
SOP	состояние поляризации
SOP	сумма произведений
SOP	малогабаритный корпус, корпус типа SO
SOS	структура (типа) «кремний на сапфире», КНС-структура
SOT	малогабаритный корпус транзистора, корпус типа SO
SP	сигнальный процессор
SP	указатель стека
SP	защита от перенапряжения
SPARC	наращиваемая архитектура процессора (архитектура процессоров с изменяемой производительностью)
SPC	микропрограмное управление
SPDT	однополюсный на два направления (о переключателе)
SPE	техника обеспечения высокого качества ПО, методология SPE
SPICE	программа моделирования с ориентацией на интегральные схемы, программа SPICE
SPN	сеть с автоматической защитой от несанкционированного доступа
SPST	однополюсный и на одно направление
SPX	упорядоченный пакетный обмен, последовательный обмен пакетами
SQL	язык структурированных запросов (международный стандартный язык для определения и доступа к реляционным базам данных)
SR	сдвиговый регистр

SR	серебро
SRAM	статические запоминающее устройство с произвольной выборкой, статическое ОЗУ
SRD	диод с накоплением заряда
SSB	модуляция с одной боковой полосой
SSBSC	модуляция с одной боковой полосой с подавлением несущей
SSD	твердотельный диск
SS/DD	односторонний, с двойной плотностью (записи)
SSI	интеграция малого уровня
SSMA	многостанционный доступ с использованием сигналов с расширенным спектром
SSPA	полупроводниковый усилитель мощности
SSR	полупроводниковое (твердотельное) реле
SSSC	модуляция с одной боковой полосой с подавлением несущей
SSTV	телевидение с медленной разверткой
STDM	синхронная мультиплексная передача с временным разделением
STEP	стандарт по обмену данными моделей изделий (ISO 10303)
STM	синхронный режим передачи
STM-1	синхронный транспортный модуль
STP	нормальные условия
STP	экранированная витая пара
STX	символ начала текста
s-VHS	усовершенствованная система домашнего видео (видеостандарт)
SVP	защита от перенапряжения
s/w	программные средства, программное обеспечение
SW	короткие волны
SWR	коэффициент стоячей волны
SYN	символ синхронизации

T

TAM	телефонный автоответчик
TAP	порт доступа к средствам тестирования (ИС), тест-порт
TASI	концентрация каналов передачи речи путём использования естественных пауз в разговоре, метод TASI
TAT	трансатлантический кабель
TB	терминал; оконечное устройство
TC	температурный коэффициент
TC	контроллер передачи (данных)
TC	дополнительный код числа (в двоичной системе)
TCM	мультиплексор канала связи
TCP/IP	протокол управления передачей/протокол Интернет
TD	передача данных
TDD	дуплексная передача с временным разделением
TDM	мультиплексная передача с временным разделением
TDMA	множественный доступ с временным разделением или уплотнением, МДВУ
TDR	динамический рефлектометр
TE	терминальное оборудование: оконечное оборудование
TE	поперечная электрическая волна

TEM	поперечная электромагнитная волна
TFP	тонкий плоский корпус
TFT	тонкопленочный транзистор
THD	суммарное значение коэффициента нелинейных искажений
THZ	терагерц (1000 ГГц)
TIFF	теговый формат файлов изображений, формат TIFF
TIM	взаимная модуляция при переходном процессе
TLA	трёхбуквенный акроним
TM	поперечная магнитная волна
TOC	оглавление, содержание
TOR	время получения (например, сообщения)
TPDDI	распределённый интерфейс данных с использованием витой пары
TPE	Ethernet через витую пару
tpi	число дорожек на дюйм
TQFP	тонкий плоский корпус с четырехсторонним расположением выводов
TQM	полный контроль качества
TRIAC	симметричный триодный тиристор, симистор
TSR	остающийся в памяти, резидентный
TTL	транзисторно-транзисторная логика, ТТЛ
TTY	телетайп
TUV	немецкий национальный знак качества
TV	телевидение
TWAIN	название типового интерфейса сканеров
TWT	лампа бегущей волны, ЛБВ
TX	передатчик
T1	линия T1 (термин, используемый компанией AT&T для обозначения каналов передачи цифровых данных с полосой 1,544 Мбит/с)
T3	линия T3 (термин, используемый компанией AT&T для обозначения каналов передачи цифровых данных с полосой 45 Мбит/с)

U

UART	универсальный асинхронный приемопередатчик
UDP	протокол передачи дейтаграмм пользователя
UDTV	телевидение повышенной четкости
UEP	неравномерная защита от ошибок
µF	микрофарад, мкФ
µH	микрогенри, мкГн
UHF	сверхвысокая частота (300 МГц ... 3 ГГц)
UI	единичный интервал
UJT	однопереходной транзистор
UL	американский знак качества
ULA	универсальная логическая матрица
ULF	ультранизкая частота (300 Гц ... 3 кГц)
ULSI	интеграция ультравысокого уровня
UMA	верхняя область памяти
UMB	блок верхней области памяти
UNIC	преобразователь отрицательного сопротивления с инверсией напряжения

UNIX	многопользовательская многозадачная операционная система, первоначально разработанная Кеном Томпсоном (Ken Thompson) и Денисом Ритчи (Dennis Ritchie) в компании AT&T Bell Laboratory в 1969 г. для использования в мини-компьютерах
UPC	источник бесперебойного питания, ИБП
US	разделитель элементов (данных)
USART	универсальный синхронно-асинхронный приемопередатчик
USD	протокол пользовательских дейтаграмм
UTC	универсальное синхронизированное время (среднее время по Гринвичу)
UTP	неэкранированная витая пара (кабельные системы на основе неэкранированных скрученных попарно медных проводников)
UV	ультрафиолетовая (УФ) область спектра (λ менее 400 нм)

V

VAC	вольт-амперные характеристики
VANS	сеть с дополнительными услугами
VAR	активный посредник (фирма-реселлер, предоставляющая дополнительные возможности или услуги, повышающие стоимость системы)
VAS	дополнительные услуги
VC	виртуальный канал
VCA	усилитель, управляемый напряжением
Vcc	напряжение источника питания
VCD	диод переменной емкости, варикап
VCF	фильтр, управляемый напряжением
VCI	идентификатор виртуального канала
VCIS	источник тока, управляемый напряжением
VCO	генератор, управляемый напряжением, ГУН
VCR	кассетный видеомагнитофон
VCVS	источник напряжения, управляемый напряжением
VCXO	кварцевый генератор, управляемый напряжением
VDC	напряжение постоянного тока в вольтах
VDE	немецкий национальный знак качества
VDR	варистор
VDT	видеодисплейный терминал
VDU	устройство визуального отображения; дисплей
VESA	Ассоциация по стандартам в области видеоэлектроники
VF	звуковая частота (16 Гц ... 20 кГц)
VFC	преобразователь напряжение — частота
VFO	перестраиваемый генератор
VHDL	язык описания аппаратуры сверхскоростных ИС
VHF	очень высокая частота (30...300 МГц)
VHSIC	сверхбыстродействующая ИС, ССИС
VIA	универсальный интерфейсный адаптер
V_{IH}	входное напряжение высокого уровня
V_{IL}	входное напряжение низкого уровня
VIL	инжекционные логические схемы с вертикальной геометрией
VLB	локальная шина VESA
VLF	очень низкая частота (3...30 кГц)
VLSI	интеграция сверхвысокого уровня (более чем 5000 элементов)

VLT	видеосправочная таблица
VME	системная шина для микрокомпьютеров и рабочих станций
VMOS	МОП-структура с V-образными канавками
VMS	система речевой почты
VoD	визуализация по требованию
V_{OH}	выходное напряжение высокого уровня
V_{OL}	выходное напряжение низкого уровня
VOM	мультиметр
VoX	оборудование, обладающее возможностями передачи голоса
VPI	идентификатор виртуального пути
VPN	виртуальная частная сеть
VR	регулятор напряжения
VRAM	ОЗУ видеоизображений
VRC	поперечный контроль по избыточности
VSAT	терминал со сверхмалой апертурой луча
VSOP	сверхтонкий корпус с уменьшенным расстоянием между выводами
V_{SS}	земля
VSW	очень короткие волны (10...1 м, УКВ)
VSWR	коэффициент стоячей волны по напряжению (КСВН)
VT	фиолетовый
VT	вертикальное табулирование
VTF	фильтр, настраиваемый напряжением
VTR	видеомагнитофон
VTVM	ламповый вольтметр
VXI	расширенный интерфейс VME для измерительной техники
VXO	кварцевый генератор с переменной частотой

W

W³	всемирная паутина, сеть Интернет
WAN	глобальная сеть
WARC	Всемирная административная конференция по радио
WB	широкополосный
WBFM	широкополосная частотная модуляция
WCS	перезаписываемое управляющее ЗУ
WDM	спектральное разделение
WDT	сторожевой программируемый таймер, будильник
WE	сигнал разрешения записи
WH	белый
WLAN	беспроводная локальная сеть, ЛВС
WORM	с однократной записью и многократным считыванием
wpc	Вт/кд (ватт на канделу, единица мощности света)
wrt	принимая во внимание
WSI	интеграция в масштабе пластины
wt	вес
WWW	всемирная паутина, сеть Интернет
WYSIWYG	«что видишь на экране, то и получишь при печати» (принцип построения экранного редактора текстов)

X

XBIOS	расширенная базовая система ввода-вывода
XMS	спецификация расширенной памяти, расширенная память XMS
XMT	передавать
XOR	исключающее ИЛИ
XTAL	кварц; кварцевый резонатор

Y

yd	ярд (0,9 м)
YE	желтый
YIG	железоиттриевый гранат, ЖИГ
YIL	желтая индикаторная лампа

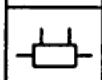
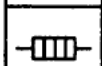
Z

Z	нулевой бит
Z80	8-битный микропроцессор
ZCS	сжатие за счёт нулей (при упаковке данных)
ZCS	переключение при прохождении тока через нуль
ZD	бездефектность
ZIF	разъем с нулевым усилием сочленения
ZIP	плоский корпус с односторонним зигзагообразным расположением выводов
ZVS	переключение при прохождении напряжения через нуль

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОБОЗНАЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ

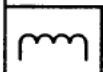
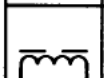
Резисторы

	общее обозначение резистора		терморезистор с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления
	переменный резистор; подстроечный резистор		терморезистор с положительным температурным коэффициентом сопротивления
	потенциометр с подвижным контактом		резистор, управляемый магнитным полем
	варистор; резистор, управляемый напряжением		магниторезистор, линейный
	резистор с отводами, секционированный резистор		возможность регулировки резистора, общее обозначение
	шунтирующее сопротивление		возможность нелинейной регулировки резистора
	нагревательный элемент		изменение сопротивления, являющееся свойством резистора
			нелинейное изменение сопротивления резистора

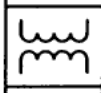
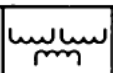
Конденсаторы

	общее обозначение конденсатора		переменный конденсатор
	полярный конденсатор		проходной конденсатор

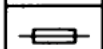
Индуктивные элементы

	общее обозначение индуктивных элементов		индуктивный элемент с плавной регулировкой
	катушка индуктивности с магнитным сердечником		индуктивный элемент с отводами
	катушка индуктивности с воздушным зазором в магнитном сердечнике		ферритовая шайба на проводнике

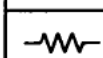
Трансформаторы

	трансформатор с двумя обмотками		трансформатор с тремя обмотками
	трансформатор с двумя обмотками с одинаковой полярностью напряжения		автотрансформатор
	трансформатор с двумя обмотками с противоположной полярностью напряжения		импульсный трансформатор

Источники тока и напряжения

	идеальный источник напряжения		идеальный источник тока
	источник переменного напряжения технической частоты		источник переменного напряжения высокой частоты
	источник переменного напряжения звуковой частоты		защитное заземление
	земля, общее заземление		земля, шасси
	плавкий предохранитель		

Устаревшие обозначения

	резистор		электролитический конденсатор
	конденсатор		индуктивный элемент
	полярный конденсатор		трансформатор

Полупроводниковые диоды

	общее обозначение полупроводникового диода		диод с переменной емкостью, варактор
	светоизлучающий диод, СИД		стабилитрон
	температурно-зависимый диод		симметричный диод
	фотодиод		

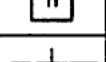
Тиристоры

	диодный переключатель переменного тока; динистор		симметричный триодный тиристор, симистор
	тиристор		триодный тиристор, тринистор

Транзисторы

	*n-p-n*-транзистор		канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором с каналом *p*-типа, работающий в режиме обогащения
	*p-n-p*-транзистор		канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором с каналом *n*-типа, работающий в режиме обогащения
	*n-p-n*-транзистор с коллектором, соединенным с корпусом		канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором с каналом *n*-типа, работающий в режиме обогащения
	канальный (полевой, униполярный) транзистор с каналом *n*-типа		канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором с каналом *n*-типа, работающий в режиме обеднения
	канальный (полевой, униполярный) транзистор с каналом *p*-типа		канальный (полевой, униполярный) транзистор с изолированным затвором с каналом *p*-типа, работающий в режиме обеднения
	биполярный транзистор с изолированным затвором с каналом *n*-типа, работающий в режиме обогащения		фототранзистор *p-n-p*-типа

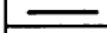
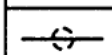
Измерительные приборы

	показывающий измерительный прибор		регистрирующий измерительный прибор
	интегрирующий измерительный прибор		счетчик
	вольтметр		самопишущий [регистрирующий] ваттметр
	измеритель коэффициента мощности		счётчик электроэнергии
	ваттметр		счётчик моточасов
	термометр		детектор импульсов
	термопара		термоэлемент с неизолированным нагревательным элементом

Выключатели, реле

	выключатель с нормально разомкнутым контактом		общее обозначение обмотки (катушки) реле
	выключатель с нормально замкнутым контактом		обмотка поляризованного реле
	температурно-чувствительный выключатель с нормально замкнутым контактом		обмотка реле с магнитной самоблокировкой
	автоматический термовыключатель (предохранитель) с нормально замкнутым контактом		обмотка теплового реле
	ручной выключатель		обмотка электронного реле

Соединения, разъемы

	общее обозначение соединения		точка разветвления; узел
	тройное соединение		Т-соединение
	экранированный провод		двойное соединение проводов
	витая пара (вид кабеля)		соединение отсутствует
	пара коаксиальных проводов		штепсельный разъём
	вывод		гнездовой контакт, контакт розетки (штепсельного) разъёма
	соединительное звено (замкнутое)		штыревой контакт, контакт вилки (штепсельного) разъёма

Датчики

	постоянный магнит		генератор Холла
	резистор, управляемый светом		фотогальванический элемент
	пьезокристалл, кварц		

Интегральные схемы

	оптопара		операционный усилитель
	оптопара с щелью для прохождения света		опто-симистор

Заявки на книги присылайте по адресу:
125319 Москва, а/я 594
Издательство «Техносфера»
e-mail: knigi@technosphera.ru
sales@technosphera.ru
факс: (495) 956 33 46

В заявке обязательно указывайте
свой почтовый адрес!

Подробная информация о книгах на сайте
http://www.technosphera.ru

Корис Ральф, Шмидт-Вальтер Хайнц
Справочник инженера - схемотехника

Компьютерная верстка – А.Н. Свирин
Корректор – О.Ч. Кохановская
Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев
Дизайн – И.А. Куколева
Ответственный за выпуск – С.В. Зинюк

Формат 84 x 108/32. Печать офсетная.
Гарнитура Ньютон
Печ.л. 19. Тираж 2000 экз. Зак. № 2425
Бумага офсет №1, плотность 65 г/м^2 .

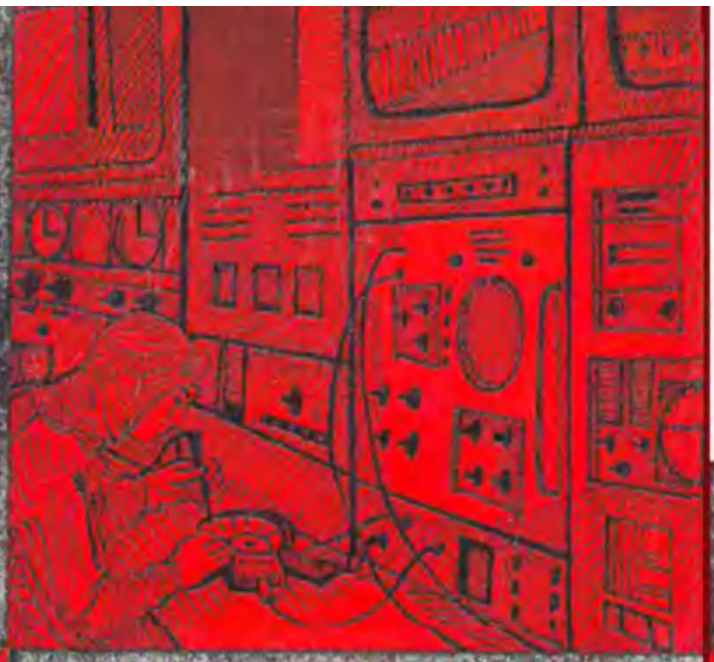
Издательство «Техносфера»
125319, Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»
сканировал: kipiaxxx , обработал: jtp
Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
Академиздатцентра «Наука» РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6

мир электроники

Р. КОРИС,
Х. ШМИДТ-ВАЛЬТЕР

Справочник инженера-схемотехника





"СПРАВОЧНИК ИНЖЕНЕРА – СХЕМОТЕХНИКА" – РЕЗУЛЬТАТ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ТРЕХ ЕВРОПЕЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ. В ГЕРМАНИИ СПРАВОЧНИК ВЫДЕРЖАЛ ШЕСТЬ ПЕРЕИЗДАНИЙ. ПЕРЕВЕДЕН НА НЕСКОЛЬКО ЯЗЫКОВ

УДОБНЫЙ, КОМПАКТНЫЙ И ДОСТАТОЧНО ПОЛНЫЙ ИСТОЧНИК ИНФОРМАЦИИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ОБЛАСТЯМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ



ISBN 978-5-94836-164-2

9 785948 361642 >

ТЕХНОСФЕРА

СПРАВОЧНИК ИНЖЕНЕРА-СХЕМОТЕХНИКА

мир электроники

VII
26