В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
механико-математических и физико-математических факультетов университетов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

517
С 50
УДК 510 (022)

С $\frac{20203—024}{053(01)-74}$ 18-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к девятнадцатому изданию 8

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения первого порядка 9
1. Общие понятия (9). 2. Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности (11). 3. Уравнения с отделяющимися переменными (13). 4. Примеры (15). 5. Однородное уравнение (19). 6. Линейные уравнения и уравнение Бернулли (23). 7. Способ Эйлера — Коши (28). 8. Применение степенных рядов (30). 9. Общий интеграл и особое решение (32). 10. Уравнения, не решенные относительно y' (34). 11. Уравнение Клеро (36). 12. Уравнение Лагранжа (39). 13. Огибающие семейства кривых и особые решения (41). 14. Изогональные траектории (44).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков и системы уравнений 46
15. Общие понятия (46). 16. Графические способы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (48). 17. Уравнение $y^{(n)}=f(x)$ (51). 18. Понижение порядка дифференциального уравнения (52). 19. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (56). 20. Примеры (60). 21. Системы уравнений и уравнения высших порядков (64). 22. Линейные уравнения с частными производными (66). 23. Геометрическая интерпретация (69). 24. Примеры (71).

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 3. Общая теория и уравнения с постоянными коэффициентами 75
25. Линейные однородные уравнения второго порядка (75). 26. Линейные неоднородные уравнения второго порядка (79). 27. Линейные уравнения высших порядков (80). 28. Однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (82). 29. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (85). 30. Частные случаи (86). 31. Корни решений и колеблющиеся решения (88). 32. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (92). 33. Линейные уравнения и колебательные явления (94). 34. Собственные и

вынужденные колебания (96). 35. Синусоидальная внешняя сила и резонанс (98). 36. Предельные задачи (103). 37. Примеры (105). 38. Символический метод (106). 39. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (109). 40. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами (112). 41. Пример (113). 42. Уравнение Эйлера (115). 43. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (117). 44. Примеры (121).

§ 4. Интегрирование с помощью степенных рядов 124

45. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда (124). 46. Примеры (127). 47. Разложение решения в обобщенный степенной ряд (129). 48. Уравнение Бесселя (131). 49. Уравнения, приводящиеся к уравнению Бесселя (134).

§ 5. Дополнительные сведения по теории дифференциальных уравнений 136

50. Метод последовательных приближений для линейных уравнений (136). 51. Случай нелинейного уравнения (144). 52. Дополнения к теореме существования и единственности (150). 53. Сходимость метода Эйлера—Коши (153). 54. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка (156). 55. Автономные системы (165). 56. Примеры (167).

ГЛАВА III

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 6. Кратные интегралы 173

57. Объемы (173). 58. Двукратный интеграл (176). 59. Вычисление двукратного интеграла (179). 60. Криволинейные координаты (182). 61. Трехкратный интеграл (186). 62. Цилиндрические и сферические координаты (191). 63. Криволинейные координаты в пространстве (195). 64. Основные свойства кратных интегралов (197). 65. Площадь поверхности (198). 66. Интегралы по поверхности и формула Остроградского (201). 67. Интегралы по определенной стороне поверхности (205). 68. Моменты (207).

§ 7. Криволинейные интегралы 211

69. Определение криволинейного интеграла (211). 70. Работа силового поля. Примеры (215). 71. Площадь и криволинейный интеграл (219). 72. Формула Грина (222). 73. Формула Стокса (224). 74. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости (227). 75. Случай многосвязной области (232). 76. Независимость криволинейного интеграла от пути в пространстве (234). 77. Установившееся течение жидкости (236). 78. Интегрирующий множитель (238). 79. Уравнение в полных дифференциалах для случая трех переменных (243). 80. Замена переменных в двойном интеграле (244).

§ 8. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра 247

81. Интегрирование под знаком интеграла (247). 82. Формула Дирихле (249). 83. Дифференцирование под знаком интеграла (252). 84. Примеры (255). 85. Несобственные интегралы (260). 86. Неаб-

совокупно сходящиеся интегралы (264). 87. Равномерно сходящиеся интегралы (267). 88. Примеры (270). 89. Несобственные кратные интегралы (274). 90. Примеры (278).

§ 9. Мера и теория интегрирования 283

91. Предварительные понятия (283). 92. Основные теоремы (286). 93. Счетные множества. Действия над точечными множествами (288). 94. Мера Жордана (291). 95. Квадрируемые множества (293). 96. Независимость от выбора осей (296). 97. Случай любого числа измерений (298). 98. Интегрируемые функции (299). 99. Вычисление двойного интеграла (301). 100. n-кратные интегралы (304). 101. Примеры (305). 102. Внешняя мера Лебега (307). 103. Измеримые множества (309). 104. Измеримые функции (314). 105. Дополнительные сведения (318). 106. Интеграл Лебега (320). 107. Свойства интеграла Лебега (323). 108. Интегралы от неограниченных функций (327). 109. Предельный переход под знаком интеграла (331). 110. Теорема Фубини (334). 111. Интегралы по множеству бесконечной меры (337).

ГЛАВА IV

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 10. Основы векторной алгебры 339

112. Сложение и вычитание векторов (339). 113. Умножение вектора на скаляр. Компланарность векторов (341). 114. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам (342). 115. Скалярное произведение (343). 116. Векторное произведение (345). 117. Соотношения между скалярным и векторным произведениями (347). 118. Скорости точек вращающегося твердого тела; момент вектора (349).

§ 11. Теория поля 351

119. Дифференцирование вектора (351). 120. Скалярное поле и его градиент (353). 121. Векторное поле; расходимость и вихрь (357). 122. Потенциальное и соленоидальное поля (360). 123. Направленный элемент поверхности (362). 124. Некоторые формулы векторного анализа (364). 125. Движение твердого тела и малая деформация (366). 126. Уравнение непрерывности (368). 127. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости (370). 128. Уравнения распространения звука (371). 129. Уравнение теплопроводности (373). 130. Уравнения Максвелла (375). 131. Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах (377). 132. Операция дифференцирования для случая переменного поля (383).

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 12. Кривые на плоскости и в пространстве 388

133. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта (388). 134. Эвольвента (394). 135. Естественное уравнение кривой (395). 136. Основные элементы кривой в пространстве (396). 137. Формулы Френе (400). 138. Соприкасающаяся плоскость (401). 139. Винтовые линии (402). 140. Поле единичных векторов (404).

§ 13. Элементы теории поверхностей 405

141. Параметрические уравнения поверхности (405). 142. Первая дифференциальная форма Гаусса (408). 143. Вторая дифференциальная форма Гаусса (409). 144. О кривизне линий, начерченных на поверхности (411). 145. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера (414). 146. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений (417). 147. Линии кривизны (418). 148. Теорема Дюпена (421). 149. Примеры (422). 150. Гауссова кривизна (424). 151. Вариация элемента площади и средняя кривизна (425). 152. Огибающая семейства поверхностей и кривых (428). 153. Развертывающиеся поверхности (431).

ГЛАВА VI

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 14. Гармонический анализ 435

154. Ортогональность тригонометрических функций (435). 155. Теорема Дирихле (440). 156. Примеры (442). 157. Разложение в промежутке $(0, \pi)$ (444). 158. Периодические функции периода $2l$ (449). 159. Средняя квадратичная погрешность (451). 160. Общие ортогональные системы функций (456). 161. Класс L_2 (461). 162. Сходимость в среднем (462). 163. Ортонормированные системы в L_2 (465).

§ 15. Дополнительные сведения из теории рядов Фурье 469

164. Разложение в ряд Фурье (469). 165. Вторая теорема о среднем (474). 166. Интеграл Дирихле (477). 167. Теорема Дирихле (481). 168. Приближение к непрерывной функции полиномами (483). 169. Формула замкнутости (488). 170. Характер сходимости рядов Фурье (490). 171. Улучшение сходимости рядов Фурье (495). 172. Пример (498).

§ 16. Интеграл Фурье и кратные ряды Фурье 501

173. Формула Фурье (501). 174. Ряды Фурье в комплексной форме (509). 175. Кратные ряды Фурье (510).

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 17. Волновое уравнение 513

176. Уравнение колебаний струны (513). 177. Решение Даламбера (517). 178. Частные случаи (520). 179. Ограниченная струна (524). 180. Способ Фурье (529). 181. Гармоники и стоячие волны (531). 182. Вынужденные колебания (534). 183. Сосредоточенная сила (537). 184. Формула Пуассона (541). 185. Цилиндрические волны (545). 186. Случай n-мерного пространства (547). 187. Неоднородное волновое уравнение (549). 188. Точечный источник (553). 189. Поперечные колебания мембран (554). 190. Прямоугольная мембрана (555). 191. Круглая мембрана (559). 192. Теорема единственности (566). 193. Применение интеграла Фурье (569).

§ 18. Телеграфное уравнение 571

194. Основные уравнения (571). 195. Установившиеся процессы (572). 196. Устанавливающиеся процессы (574). 197. При-

меры (577). 198. Обобщенное уравнение колебаний струны (580). 199. Неограниченная цепь в общем случае (584). 200. Способ Фурье для ограниченной цепи (586). 201. Обобщенное волновое уравнение (590).

§ 19. Уравнение Лапласа 592

202. Гармонические функции (592). 203. Формула Грина (594). 204. Основные свойства гармонических функций (599). 205. Решение задачи Дирихле для круга (603). 206. Интеграл Пуассона (606). 207. Задача Дирихле для сферы (610). 208. Функция Грина (614). 209. Случай полупространства (616). 210. Потенциал объемных масс (617). 211. Уравнение Пуассона (621). 212. Формула Кирхгофа (625).

§ 20. Уравнение теплопроводности 628

213. Основные уравнения (628). 214. Неограниченный стержень (629). 215. Стержень, ограниченный с одного конца (634). 216. Стержень, ограниченный с обоих концов (639). 217. Дополнительные замечания (641). 218. Случай сферы (642). 219. Теорема единственности (645).

Алфавитный указатель 649

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Общий план настоящего издания второго тома тот же, что и в предыдущем издании. Существенные изменения внесены в первые две главы, посвященные дифференциальным уравнениям. Уже в п. 2 первой формулируется теорема существования и единственности решения при начальном условии, и остальное изложение проводится в непосредственной связи с этой теоремой. Значительно расширено содержание § 5 второй главы.

В § 9 третьей главы после изложения теории меры Жордана и исследования интеграла Римана излагаются теория меры Лебега, свойства измеримых функций и интеграл Лебега. В связи с этим § 15 шестой главы содержит изложение свойства класса L_2 и теорию ортонормированных систем функций этого класса.

Первые три главы были прочтены С. М. Лозинским, от которого я получил ряд ценных указаний. Выражаю ему мою глубокую благодарность.

В. Смирнов

11 декабря 1964 г.

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Общие понятия. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит еще и производные неизвестных функций или их дифференциалы [1, 51]. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным* уравнением Если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют *дифференциальным уравнением с частными производными.* В настоящей главе мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, и большая часть главы будет посвящена тому случаю, когда задано одно уравнение, содержащее одну неизвестную функцию.

Пусть x — независимая переменная и y — искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок n производных неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.* В настоящем параграфе мы будем рассматривать одно обыкновенное дифференциальное уравнение *первого порядка.* Общий вид такого уравнения будет

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или, в решенной относительно y' форме,

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Пользуясь другим обозначением производной, можем записать это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Если некоторая функция

$$y=\varphi(x) \tag{4}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) или (2), т. е. если это уравнение обращается в тождество относительно x при замене y и y' на $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, то функция (4) называется *решением* этого *дифференциального уравнения*. Сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется обычно задачей *интегрирования дифференциального уравнения*.

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (2) не содержит y, получается дифференциальное уравнение вида

$$y'=f(x). \tag{5}$$

Нахождение его решений есть основная задача интегрального исчисления [I, 86], и все множество этих решений дается формулой

$$y=\int f(x)\,dx+C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, в этом простейшем случае имеется семейство решений дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Как мы увидим, и в общем случае дифференциального уравнения первого порядка мы будем иметь семейство решений, содержащее произвольную постоянную:

$$y=\varphi(x,\ C). \tag{7}$$

Такое семейство решений называется *общим интегралом* уравнения. Общий интеграл может выражаться в неявной форме или в форме, решенной относительно C:

$$\psi(x,\ y,\ C)=0 \quad \text{или} \quad \omega(x,\ y)=C. \tag{7_1}$$

Придавая произвольной постоянной C различные численные значения, будем получать различные решения уравнения — так называемые *частные решения* уравнения.

Укажем геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения и его решений. Если рассматривать x и y как координаты точек плоскости, то дифференциальное уравнение (2) определяет в каждой точке (x, y), где определена функция $f(x, y)$, угловой коэффициент касательной y' к некоторой линии. Искомое решение (4) уравнения (2) есть такая кривая (в частном случае — прямая), которая в каждой своей точке имеет угловой коэффициент касательной y', определяемый равенством (2). Такая кривая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Иначе говоря, понятие решения уравнения (2) совпадает с понятием интегральной кривой (в частном случае — прямой) этого уравнения на плоскости XOY. Общий интеграл (7) дает бесчисленное множество интегральных кривых или, точнее говоря, семейство кривых, зависящее от одной произвольной постоянной.

Положим, что функция $f(x, y)$ однозначна и непрерывна в некоторой области B плоскости XOY. Пусть линия l, соответствующая решению (7), принадлежит этой области, и функция $\varphi(x)$ определена на некотором промежутке I изменения x. Говоря о решении (4), мы, согласно сказанному выше, считаем, что $\varphi(x)$ непрерывна и имеет производную для x, принадлежащих I. Если к промежутку I принадлежит его левый конец, то производная $\varphi'(x)$ есть производная справа, а на правом конце — производная слева. Из уравнения (3) и непрерывности $f(x, y)$ непосредственно следует, что и производная $\varphi'(x)$ решения непрерывна на I.

Во всем предыдущем мы считаем, естественно, что все функции однозначны. Из однозначности $\varphi(x)$ следует, что прямые, параллельные оси OY, могут пересекать интегральную кривую не более чем в одной точке. Если мы перепишем уравнение (2), или (3), в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{3_1}$$

т. е. будем считать не y функцией от x, а x функцией от y, то прямые, параллельные оси OX, могут пересекать интегральные кривые не более чем в одной точке. Пусть интегральная кривая l уравнения (2) такова, что не только прямые, параллельные оси OY, но и прямые, параллельные оси OX, пересекают ее не более чем в одной точке, т. е. в уравнении $y = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ имеет однозначную обратную функцию $x = \psi(y)$. При этом l является и интегральной кривой дифференциального уравнения (3_1). В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с уравнением вида (2).

2. Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности. Простейшее уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений, поскольку в формулу (6) входит произвольная постоянная. Но нетрудно показать, что мы получим вполне определенное решение уравнения (5), если поставим так называемое *начальное условие*, а именно потребуем, чтобы искомая функция y принимала заданное значение y_0 при заданном значении $x = x_0$. Это начальное условие запишем в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{8}$$

Действительно, пусть $f(x)$ — непрерывная на некотором промежутке I функция и точка $x = x_0$ принадлежит I. Заменяя в формуле (6) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом x и нижним пределом x_0, вместо (6) получим

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Первое слагаемое обращается в нуль при $x = x_0$, и чтобы удовлетворить условию (8), надо положить $C = y_0$. Таким образом, уравнение (5) при начальном условии (8) имеет единственное решение

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Отметим, что это решение имеет место во всем промежутке l.

Аналогично, если мы имеем общий интеграл (7) какого-либо уравнения (2), то для удовлетворения начальному условию (8) надо определить произвольную постоянную C из равенства

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{9}$$

Обратимся теперь к геометрической интерпретации. Положим, что функция $f(x, y)$ определена в некоторой области B плоскости XOY и в этой области однозначна и непрерывна. В каждой точке (x, y), принадлежащей B, из уравнения (2) определяется, как мы уже упоминали, угловой коэффициент y' касательной к искомой интегральной кривой. Через точку (x, y) проведем небольшой отрезок прямой, образующий с осью OX такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, и придадим этому отрезку какое-либо направление (переход к противоположному направлению не изменит $\operatorname{tg}\alpha$). Мы видим, что уравнение (2) равносильно определению в области B *поля направлений*, т. е. в каждой точке области B уравнение (2) определяет некоторое направление. Интегральные кривые уравнения (2) суть кривые l, лежащие в области B и обладающие следующим свойством: в каждой точке (x, y) касательная к l имеет направление, определяемое указанным выше полем направлений. Начальное условие (8) сводится к требованию, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку (x_0, y_0), находящуюся в B. Приведем теперь геометрические соображения, из которых наглядно, но не строго логически, следует, что через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

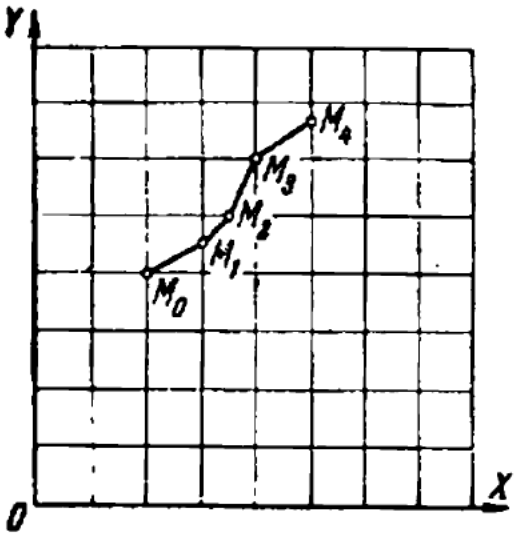


Рис. 1.

Разобьем плоскость XOY прямыми (рис. 1), параллельными осям, на малые квадраты так, чтобы точка M_0 лежала в вершине одного из этих квадратов (это — несущественно). Из точки M_0 проводим в направлении возрастания x отрезок прямой M_0M_1 с угловым коэффициентом $y'_0 = f(x_0, y_0)$ до ближайшего пересечения с одной из прямых сетки квадратов. Пусть (x_1, y_1) — координаты точки M_1. Из M_1 проводим в направлении возрастания x отрезок прямой M_1M_2

с угловым коэффициентом $y_1' = f(x_1, y_1)$ до ближайшего пересечения с одной из прямых сетки квадратов и т. д. Это построение можно выполнить и в направлении убывания x. Построенная таким образом ломаная линия и представляет приближенно для x, близких к x_0, искомую интегральную кривую уравнения (2), проходящую через точку M_0. Это построение делает весьма вероятным тот факт, что через всякую точку M_0 из B проходит одна и только одна интегральная кривая. Это утверждение справедливо и будет дальше доказано, если $f(x, y)$ обладает кроме непрерывности еще некоторым свойством.

Положим для определенности, что B — открытая область, т. е. область, к которой мы не причисляем ее границы (B может быть и всей плоскостью). Имеет место следующая теорема.

Теорема А. *Если $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в B, то через каждую точку, принадлежащую B, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (2).

Теорема эта, которую мы пока примем без доказательства, называется обычно *теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения* (2) *при заданном начальном условии*.

В дальнейшем, для краткости, сформулированную теорему мы будем называть теоремой А. В конце следующей главы мы приведем доказательство этой теоремы и ряд дополнений к ней. Укажем, как надо понимать утверждение единственности решения при заданном начальном условии. Пусть $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ суть два решения уравнения (2), удовлетворяющие условию (8), причем первое определено на некотором промежутке l_1, а второе на промежутке l_2 изменения x, а точка x_0 принадлежит этим промежуткам. При этом на общей части промежутков l_1 и l_2 должно иметь место тождество $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Предполагается, конечно, что интегральные кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ не выходят из области B, где $f(x, y)$ определена и удовлетворяет указанным в теореме условиям.

В следующих разделах мы укажем некоторые частные типы дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводится к вычислению неопределенных интегралов или, как говорят, их *интегрирование приводится к квадратурам*. Отметим, что вычисление интеграла связано с вычислением площади, откуда и происходит термин «квадратура». При рассмотрении упомянутых частных типов мы приведем ряд примеров, на которых мы проиллюстрируем указанные выше соображения, связанные с теоремой А.

3. Уравнения с отделяющимися переменными. Наряду с простейшим уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$y' = f(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

и для общего интеграла получим формулу

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Положим теперь, что правая часть уравнения (3) есть произведение функции только от x на функцию только y:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y). \tag{10}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx. \tag{10_1}$$

Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (10) или, что то же, уравнения (10_1). Последнее равенство есть равенство двух дифференциалов, из которых левый выражается через посредство y (вид дифференциала первого порядка не зависит от выбора переменной [I, 50]). Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы отличаются лишь произвольным постоянным слагаемым, т. е.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C.$$

Выполняя квадратуры и решая относительно y, получим общий интеграл уравнения (10). Переход от (10) к (10_1) называется обычно *отделением (разделением) переменных*.

В связи с вышесказанным приведем некоторые общие соображения. Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, решенное относительно производной, можно записать в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{11}$$

Уравнение, записанное в таком виде, не связывает нас выбором неизвестной функции. За таковую мы можем принять как y, так и x. Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть произведения функции только от x на функции только от y, т. е.

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0.$$

Такое уравнение называется *уравнением с отделяющимися переменными* [I, 93]. Деля обе части на $N_1(x)\,M_2(y)$, «отделим переменные»:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0$$

и получим общий интеграл уравнения в виде

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C.$$

В дальнейшем мы займемся и общим уравнением (11).

Выше мы не уточнили условий, которые надо наложить на функции $g(x)$, $h(y)$ и т. д., а также не обсуждали вопроса о преобразованиях, которые мы выполняли — например, деление обоих частей уравнения (10) на $h(y)$. Более подробно это выяснится на примерах.

4. Примеры. 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x}, \tag{12}$$

где a — постоянная, отличная от нуля. Переменные разделяются:

$$\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\lg|y| = a\lg|x| + \lg|C|, \quad \text{или} \quad |y| = |C||x|^a. \tag{13}$$

Интегрируя, мы пишем под знаком логарифма абсолютную величину, принимая во внимание возможность отрицательных величин, и произвольную постоянную обозначаем через $\lg|C|$. Уравнение (12) определяет поле направлений на всей плоскости, кроме прямой $x=0$. Если мы перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\frac{x}{y}, \tag{12_1}$$

то увидим, что поле направлений определено на прямой $x=0$ при $y \neq 0$; в этих точках направление касательной параллельно оси OY. В точке (0, 0) правая часть (12) и (12_1) не имеют смысла. Для уравнения (12) имеются две области B теоремы А: левая полуплоскость $x<0$ и правая $x>0$, а для уравнения (12_1) — верхняя полуплоскость $y>0$ и нижняя $y<0$.

Разберем теперь случаи: $a=2$, $a=1$ и $a=-1$. При $a=2$ из (13) следует: $y=Cx^2$, т. е. мы получаем семейство парабол с вершиной в (0, 0), касающихся оси OX, и прямую $y=0$ (при $C=0$), а для уравнения (12_1) и прямая $x=0$ будет интегральной линией. Через каждую точку плоскости, кроме (0, 0), проходит одна и только одна линия семейства, состоящего из упомянутых парабол и осей координат. В точке (0, 0), где дифференциальное уравнение не определено, все линии упомянутого семейства встречаются (*узловая точка всех интегральных линий*).

Если бы мы рассматривали только уравнение (12), то из семейства интегральных линий исключилась бы ось OY ($x=0$). Везде вдоль

этой оси, кроме начала, правая часть (12) обращается в бесконечность (теряет непрерывность). Отметим, что все интегральные линии уравнения (12) касаются оси OX. При $a=1$ из (13) следует $y=Cx$, т. е. семейство интегральных линий есть семейство всех прямых, проходящих через начало. Это семейство включает, как и при $a=2$, оси координат. Отметим, что в этом случае интегральные линии уравнения (12) (прямые) приходят в начало с различными угловыми коэффициентами. При $a=-1$ из (13) получаем $y=\frac{C}{x}$, т. е. семейство интегральных линий уравнений (12) и (12_1) содержит все равнобочные гиперболы, имеющие асимптотами оси координат, и сами эти оси. Последнее надо понимать так: в начале координат встречаются положительные и отрицательные части осей координат.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=a\frac{x}{y}. \tag{14}$$

Переменные разделяются

$$y\,dy=ax\,dx$$

и, интегрируя, получаем

$$y^2=ax^2+2C. \tag{15}$$

Для уравнения (14), как и в примере 1, имеются две области B теоремы А: верхняя полуплоскость $y>0$ и нижняя $y<0$. При $a=-1$ получаем $x^2+y^2=2C$, т. е. семейство интегральных линий есть семейство всех окружностей с центром в (0, 0). Через всякую точку плоскости, кроме (0, 0), проходит одна и только одна такая окружность и нет ни одной интегральной линии, которая бы беспредельно близко подходила к началу.

Если рассматривать только уравнение (14), то y надо считать однозначной функцией от x, и всякая окружность будет состоять из двух интегральных линий: верхней части окружности (при $y>0$) и нижней (при $y<0$). На оси OX (при $y=0$ и $x\neq 0$) правая часть (14) обращается в бесконечность. В этих точках касательные к окружностям параллельны оси OY. Если переписать (14) при $a=-1$ в виде

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}, \tag{14_1}$$

то указанная особенность при $y=0$ исчезает, но появляется особенность при $x=0$, и надо рассматривать правые части окружности (при $x>0$) и левые (при $x<0$), на которых x — однозначная функция y, что требуется уравнением (14_1). Область B теоремы А для уравнения (14_1) будет отлична от той же области для уравнения (14) при $a=-1$, и при применении теоремы А мы должны иметь в виду какую-либо определенную запись дифференциального уравнения. Этого

мы и будем придерживаться в дальнейшем, если нет специальных оговорок о другой точке зрения.

Можно рассматривать совместно (14) и (14_1), как мы делали в примере 1. Эта точка зрения проведена в книге И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» (Москва, 1964). Указанные неудобства при рассмотрении интегральных кривых связаны с тем, что мы рассматриваем их уравнения в явной форме: $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$. Если перейти к параметрической форме уравнений интегральных кривых, т. е. рассматривать x и y как функции вспомогательного параметра t, то уравнение (14) заменится системой двух уравнений для двух функций x и y независимого переменного t:

$$\frac{dx}{dt}=-y, \qquad \frac{dy}{dt}=x.$$

Интегрированием систем мы займемся в дальнейшем.

Рассмотрим еще уравнение (14) при $a=1$. Из (15) получаем $y^2-x^2=2C$. Семейство интегральных кривых содержит все равнобочные гиперболы и их асимптоты $y=\pm x$.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=y^2. \tag{16}$$

Здесь поле направлений определено на всей плоскости, правая часть непрерывна и имеет непрерывную производную по y на всей плоскости и область B теоремы А есть вся плоскость. Через всякую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая, которая на всем своем протяжении не имеет общих точек с другими интегральными кривыми.

Переменные в уравнении (16) разделяются, и общий интеграл имеет вид

$$y=-\frac{1}{x+C}, \qquad \text{или} \qquad (x+C)\,y=-1. \tag{17}$$

Это — семейство равнобочных гипербол, имеющих центр в точках $(-C,\ 0)$ и асимптоты $y=0$ и $x=-C$. Кроме того, уравнение (16) имеет очевидное решение $y=0$. Уравнение (17) дает две интегральные кривые (две ветви гиперболы):

$$y=-\frac{1}{x+C} \quad \text{при} \quad -\infty<x<-C$$

и

$$y=-\frac{1}{x+C} \quad \text{при} \quad -C<x<+\infty.$$

Первые из них при всевозможных C заполняют без пересечений верхнюю полуплоскость ($y>0$), а вторые — нижнюю ($y<0$).

Решение $y=0$ может быть формально получено из (17) следующим образом: во второй из формул (17) заменим C на $1/C$ и помножим обе части на C, что приведет к формуле $(Cx+1)y=-C$, откуда при $C=0$ и получаем $y=0$. Эта прямая вместе с упомянутыми гиперболами заполняет без пересечений всю плоскость.

4. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=3y^{2/3} \tag{18}$$

определяет поле направлений, как в примере 3, на всей плоскости. Переменные разделяются, и общий интеграл выражается формулой

$$y=(x+C)^3. \tag{19}$$

Это есть семейство кубических парабол, которое получается из параболы $y=x^3$ параллельным переносом вдоль оси OX (рис. 2).

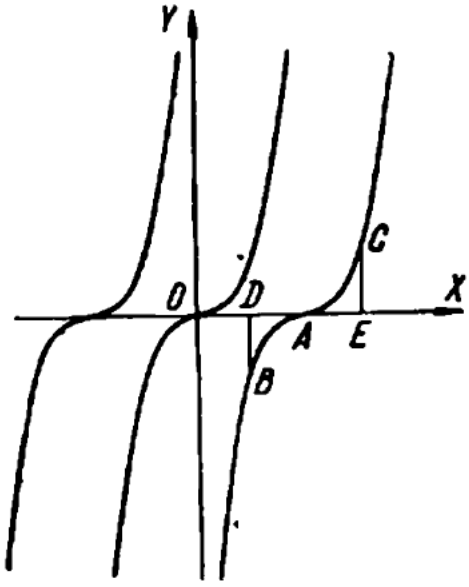


Рис. 2.

Уравнение (18) имеет также решение $y=0$ (ось OX), которое не получается из формулы (19) ни при каком численном значении C. Легко показать, что никаких других решений уравнение (18) и уравнение $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}y^{-2/3}$ не имеют. Уравнение (18), как мы уже упоминали, определяет поле направлений на всей плоскости XOY. Но производная от правой части по y, равная $2y^{-1/3}$, не существует (обращается в бесконечность) при $y=0$. Теорема А имеет место в двух раздельных областях: в верхней полуплоскости ($y>0$) и в нижней ($y<0$). Эти области заполнены параболами (19). Через каждую точку (x_0, y_0) проходит только одна парабола. При этом постоянная C определяется из уравнения

$$y_0=(x_0+C)^3, \quad \text{т. е.} \quad C=y_0^{1/3}-x_0.$$

Через точку $A(x_0, 0)$, кроме параболы, проходит еще решение $y=0$ и единственности решения при начальном условии $(x_0, 0)$ нет. Если мы выделим (рис. 2) сколь угодно малый промежуток $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$, то в этом промежутке определены четыре решения уравнения (18): 1) отрезок параболы BAC; 2) отрезок DAE оси OX; 3) линия DAC, состоящая из отрезка DA оси OX и отрезка AC параболы; 4) линия BAE, состоящая из отрезка BA параболы и отрезка AE оси OX. Все эти линии имеют уравнение вида $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — непрерывны (вдоль этих линий угол, образованный касательной с осью OX, меняется непрерывно). Эти четыре интегральные линии и только они существуют на промежутке $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$ при любом сколь угодно малом фиксированном $\delta>0$.

Кратко говорят, что через точку $(x_0, 0)$ «в малом» проходит четыре интегральные кривые.

Если мы возьмем какую-либо точку (x_0, y_0) в верхней полуплоскости $(y_0 > 0)$, то через эту точку проходит единственная парабола (19) и она не пересекается с остальными параболами (19), так что на всем своем протяжении в верхней полуплоскости она не имеет общих точек с другими интегральными линиями уравнения (18) (единственность в верхней полуплоскости). Но если, спускаясь по указанной параболе, дойдем до оси OX, то там нам представляется бесчисленное множество возможностей продолжать эту интегральную линию: можно спускаться по той же параболе или идти направо по оси OX, а затем подниматься по другой параболе (или идти по оси OX, не поднимаясь по параболе), т. е. через каждую точку плоскости не «в малом», а «в целом» проходит бесчисленное множество интегральных кривых.

5. Однородное уравнение. Однородной функцией $\varphi(x, y)$ нулевого измерения, или просто *однородной функцией*, называется функция только от отношения y/x, т. е. $\varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Характерным является также условие $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$ [I, 154]. *Однородным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{20}$$

Сохраняя прежнюю независимую переменную x, введем вместо y новую искомую функцию $u = \frac{y}{x}$, откуда $y' = u + xu'$. Преобразуя уравнение (20), придем к уравнению

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Случай $f(u) \equiv u$ был рассмотрен в [4]. Положим $f(u) \not\equiv u$. Переменные разделяются, и, интегрируя, получаем

$$x = C\psi(u), \text{ где } \psi(u) = e^{-\int \frac{du}{u - f(u)}}.$$

Возвращаясь к прежней переменной, можем написать уравнение семейства интегральных кривых в виде

$$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{21}$$

Рассмотрим преобразование подобия плоскости XOY с центром подобия в начале координат. Преобразование это сводится к тому, что точка (x, y) переходит в новое положение

$$x_1 = kx, \; y_1 = ky \qquad (k > 0), \tag{22}$$

или, что то же, оно сводится к умножению длины радиуса-вектора всякой точки плоскости на k с сохранением его направления. Если M есть первоначальное положение точки, а M_1 — положение той же точки после преобразования (рис. 3), то

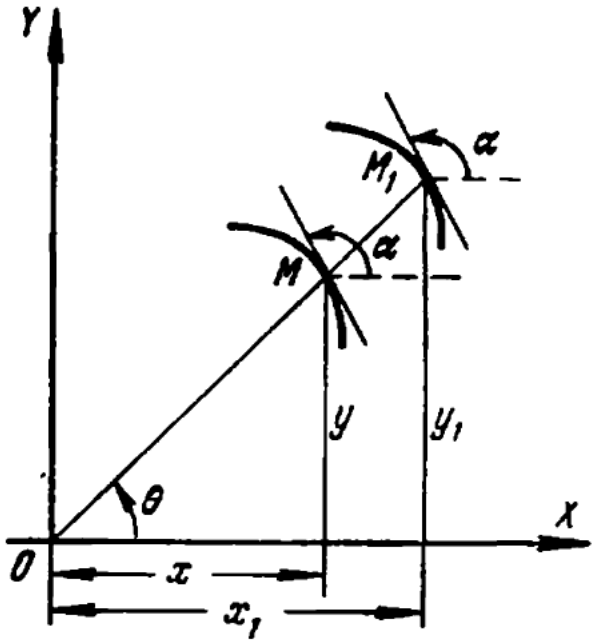


Рис. 3.

$$\overline{OM_1} : \overline{OM} = x_1 : x = y_1 : y = k.$$

Применяя преобразование (22) к уравнению (21), получим уравнение

$$x_1 = kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

которое ввиду произвольности постоянной C не отличается от уравнения (21), т. е. преобразование (22) не меняет всей совокупности кривых (21), но лишь переводит одну из кривых семейства (21) в другую кривую того же семейства. Всякая кривая семейства (21) может быть, очевидно, получена из одной определенной кривой этого семейства при помощи преобразования (22), если соответствующим образом выбрать постоянную k. Полученный результат можно формулировать так: *все интегральные кривые однородного уравнения могут быть получены из одной интегральной кривой при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.*

Уравнение (20) можно переписать так:

$$\operatorname{tg}\alpha = f(\operatorname{tg}\theta),$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной, а θ — угол, образованный радиусом-вектором из начала координат с положительным направлением оси OX. Таким образом уравнение (20) устанавливает связь между углами α и θ, так что *вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, касательные к интегральным кривым однородного уравнения должны быть параллельны между собой* (рис. 3).

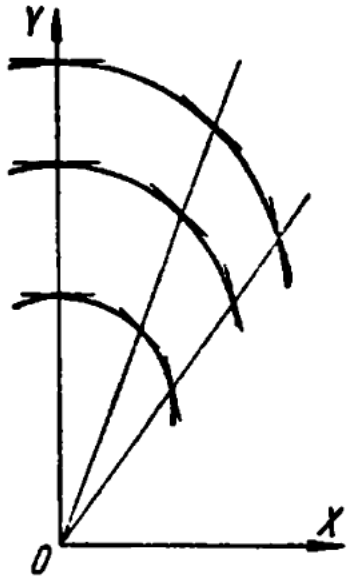


Рис. 4.

Из этого свойства касательных становится очевидным то обстоятельство, что преобразование подобия с центром подобия в начале координат преобразует интегральную кривую в интегральную же кривую, ибо, при удлинении радиусов-векторов точек кривой в одном и том же отношении, направления касательных на каждом радиусе-векторе не меняются (рис. 4).

Если мы применим указанное выше преобразование подобия к интегральной кривой, которая представляет собою прямую, проходящую через начало координат, то после преобразования мы получим ту же прямую, так что *в этом случае упомянутый выше прием получения интегральных кривых из одной из них неприменим.*

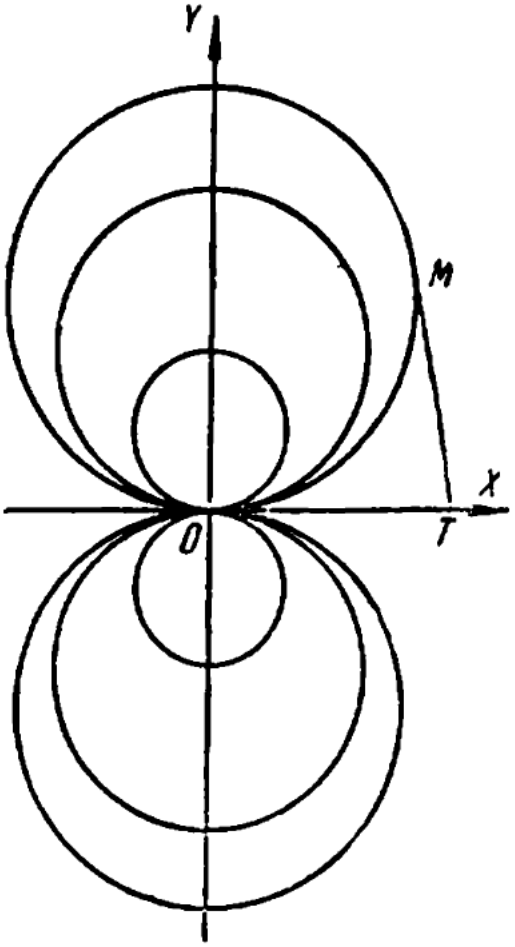


Рис. 5.

Пример. Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью OX равен отрезку OT оси OX (рис. 5).

Уравнение касательной имеет вид

$$Y-y=y'(X-x),$$

где (X, Y) — текущие координаты касательной. Подставляя $Y=0$, определим след касательной на оси OX:

$$\overline{OT}=x-\frac{y}{y'},$$

и условие $\overline{MT}^2=\overline{OT}^2$ даст нам [I, 77]

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}, \qquad (23)$$

которое, очевидно, принадлежит к типу однородных. Вводим вместо y новую функцию u по формуле

$$y=xu, \qquad y'=xu'+u.$$

Подставив в уравнение (23), имеем

$$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2} \qquad \text{или} \qquad x\frac{du}{dx}-\frac{u+u^3}{1-u^2}=0,$$

и переменные разделяются

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}\,du=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C$$

или, возвращаясь к y,

$$x^2+y^2-Cy=0. \qquad (24)$$

Это — окружности, проходящие через начало координат и касающиеся в этой точке оси OX (рис. 5). Уравнение (23) имеет еще очевидное решение $y=0$. Оно может быть формально получено из (24) тем же приемом, который мы применили в примере 3 из [4]. Заменяем в (24) C на $1\cdot C$, после этого обе части (24) умножаем на C и затем полагаем $C=0$. Числитель и знаменатель правой части уравнения (23) одновременно обращаются в нуль только

в точке (0, 0). Через эту точку проходят все окружности и прямая $y=0$, и в этой точке поле направлений не определено. Если рассматривать только уравнение (23), то на плоскости имеется четыре области B теоремы А. Они получаются, если на плоскости провести прямые $y=\pm x$. В точках этих прямых знаменатель правой части уравнения (23) обращается в нуль. Во всех этих четырех областях на интегральных кривых y есть однозначная функция x.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{25}$$

как мы сейчас покажем, приводится к однородному или к уравнению с отделяющимися переменными. Введем вместо x и y новые переменные ξ и η:

$$x=\xi+\alpha, \qquad y=\eta+\beta, \tag{26}$$

где α и β — постоянные, которые мы сейчас определим.

Уравнение (25) в новых переменных будет

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

Определим α и β из условия

$$a\alpha+b\beta+c=0, \qquad a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.$$

При этом уравнение приведется к однородному

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}\right).$$

Преобразованию (26) соответствует параллельное перенесение координатных осей, причем начало координат переходит в точку пересечения прямых

$$ax+by+c=0, \qquad a_1x+b_1y+c_1=0. \tag{27}$$

Полученные в предыдущем результаты будут, таким образом, применимы и к уравнению (25), с той лишь разницей, что роль начала координат будет играть точка (α, β).

Если прямые (27) параллельны, то указанное выше преобразование не может быть выполнено. Но в этом случае, как известно из аналитической геометрии, коэффициенты в уравнениях (27) должны быть пропорциональны

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda \qquad \text{и} \qquad a_1x+b_1y=\lambda(ax+by);$$

вводя вместо y новую переменную u:

$$u=ax+by,$$

получим, как нетрудно видеть, уравнение с отделяющимися переменными.

Ниже мы познакомимся с весьма важным приложением однородного уравнения.

6. Линейные уравнения и уравнение Бернулли. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + P(x)\,y + Q(x) = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим сначала соответствующее уравнение без свободного члена $Q(x)$:

$$z' + P(x)\,z = 0.$$

Переменные здесь отделяются

$$\frac{dz}{z} + P(x)\,dx = 0,$$

и мы получим

$$z = Ce^{-\int P(x)\,dx} \tag{29}$$

Заменяем неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом:

$$z = Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}.$$

Если имеется начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0, \tag{30}$$

то $C = y_0$. Для интегрирования уравнения (25) воспользуемся так называемым *способом изменения произвольной постоянной Лагранжа*, а именно — будем искать решение этого уравнения в виде (29):

$$y = ue^{-\int P(x)\,dx},$$

считая только u не постоянной, а искомой функцией от x. Дифференцируя, находим

$$y' = u'e^{-\int P(x)\,dx} - uP(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Подставив в уравнение (28), получим

$$u'e^{-\int P(x)\,dx} + Q(x) = 0, \qquad u' = -Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

$$u = C - \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Окончательно получаем

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C - \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{31}$$

При определении y по этой формуле надо брать одно из значений неопределенных интегралов

$$\int P(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx,$$

так как прибавление к ним произвольных постоянных изменяет только значение C.

Заменяя их определенным интегралом с переменным верхним пределом [I, 96], можем переписать формулу (31) так:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(u)\,du}\left[C - \int_{x_0}^{x} Q(v)\,e^{\int_{x_0}^{v} P(u)\,du}\,dv\right]. \tag{32}$$

Для ясности мы обозначаем переменные интегрирования различными буквами u и v, отличными от буквы x.

Если задано начальное значение (30) искомого решения при $x = x_0$, то формула (32) дает вполне определенное решение

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(u)\,du}\left[y_0 - \int_{x_0}^{x} Q(v)\,e^{\int_{x_0}^{v} P(u)\,du}\,dv\right]. \tag{33}$$

Во всем предыдущем мы считали, что $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в некотором промежутке I, содержащем точку x_0. Из (33) вытекает следующий важный факт: *решение $y(x)$ существует во всем промежутке I изменения x.* Из формулы (32) следует, что решения линейного дифференциального уравнения имеют вид

$$y = \varphi_1(x)\,C + \varphi_2(x), \tag{34}$$

т. е. *y есть линейная функция произвольной постоянной.*

Пусть y_1 есть решение уравнения (28). Полагая

$$y = y_1 + z, \tag{35}$$

получим для z уравнение

$$z' + P(x)\,z + [y_1' + P(x)\,y_1 + Q(x)] = 0.$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, равна нулю, так как, по предположению, y_1 есть решение уравнения (28). Следовательно, z есть решение соответствующего уравнения без свободного члена и определяется по формуле (29), а тогда:

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{36}$$

Положим теперь, что известно еще второе решение y_2 уравнения (28), и пусть это решение получается из формулы (36) при $C = a$:

$$y_2 = y_1 + ae^{-\int P(x)\,dx}. \tag{36_1}$$

Исключая $e^{-\int P(x)\,dx}$ из равенств (36) и (36_1), получим выражение всех решений линейного уравнения через его два решения y_1 и y_2:

$$y = y_1 + C_1(y_2 - y_1),$$

где C_1 — произвольная постоянная, заменяющая C/a в прежних обозначениях. Из последнего уравнения вытекает следующее соотношение:

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{1 - C_1}{C_1} = C_2,$$

которое показывает, что отношение $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ есть величина постоянная, т. е. *семейство интегральных кривых линейного уравнения есть семейство кривых, делящих в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя кривыми этого семейства.*

Таким образом, если известны две интегральные кривые L_1 и L_2 линейного уравнения, то всякая другая интегральная кривая L определяется постоянным значением отношений (рис. 6)

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_1C}} = \frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_1D}} = \dots$$

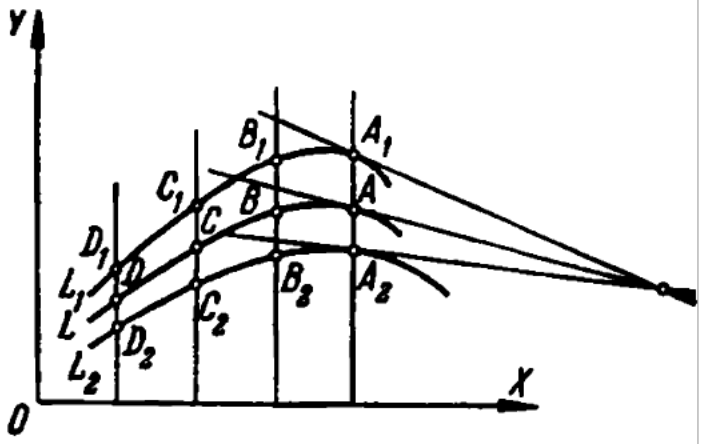


Рис. 6.

В силу этого равенства хорды A_1B_1, AB и A_2B_2 должны или пересекаться в одной точке, или быть параллельными. При беспредельном приближении отрезка ординаты $\overline{B_1B_2}$ к отрезку $\overline{A_1A_2}$ направление этих хорд перейдет в направление касательных к кривым в точках A_1, A и A_2, и мы получаем следующее свойство касательных к интегральным кривым линейного уравнения: *касательные к интегральным кривым линейного уравнения в точках пересечения этих кривых прямой, параллельной оси OY, или пересекаются в одной точке, или параллельны.*

Пример. Рассмотрим процесс устанавливающегося переменного тока в цепи с самоиндукцией. Пусть i — сила тока, v — напряжение, R — сопротивление цепи и L — коэффициент самоиндукции.

Имеет место соотношение

$$v = Ri + L\frac{di}{dt},$$

откуда для i получаем линейное уравнение

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0.$$

Считая R и L постоянными и v — заданной функцией времени t, вычисляем интегралы, входящие в формулу (33):

$$\int_0^t P\,dt = \int_0^t \frac{R}{L}\,dt = \frac{R}{L}\,t, \qquad \int_0^t Qe^{\int_0^t P\,dt}\,dt = -\frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt.$$

Обозначив через i_0 начальное значение i, т. е. значение силы тока при $t=0$, получим, согласно (33), формулу для определения i в любой момент времени

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt\right).$$

При постоянном напряжении v будем иметь

$$i = \left(i_0 - \frac{v}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{v}{R}.$$

При возрастании t множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ быстро убывает, и практически через короткий промежуток времени процесс можно будет считать установившимся, причем сила тока определяется по закону Ома: $i = \frac{v}{R}$.

В частности, при $i_0 = 0$ получим формулу

$$i = \frac{v}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{37}$$

для силы тока при замыкании цепи.

Постоянную L/R называют временной постоянной рассматриваемой цепи.

Рассмотрим напряжение v синусоидального характера $v = A\sin\omega t$. Согласно формуле (33), получим

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left[i_0 + \frac{A}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt\right].$$

Нетрудно видеть, что

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt = e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right]$$

и, следовательно,

$$\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt = e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right] + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}.$$

Подставляя в выражение i, получим

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega LA}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{RA}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LA}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t. \tag{38}$$

Первое слагаемое, содержащее множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$, быстро затухает, и практически через короткий промежуток времени после $t=0$ сила тока будет определяться суммой двух остальных слагаемых формулы (38). Эта сумма представляет собою синусоидальную величину той же частоты ω, что и напряжение v, но с другими амплитудой и фазой. Заметим также, что эта сумма, дающая установившийся процесс тока, не зависит от начального значения тока i_0.

Обобщением линейного дифференциального уравнения (28) является *уравнение Бернулли*:

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^m = 0, \tag{39}$$

причем показатель степени m можно считать отличным от нуля и единицы, так как в этих случаях уравнение будет линейным. Делим обе части на y^m:

$$y^{-m}y' + P(x)\,y^{1-m} + Q(x) = 0$$

и вводим вместо y новую искомую функцию u:

$$u = y^{1-m}, \quad u' = (1-m)\,y^{-m}y'.$$

При этом уравнение приведется к виду

$$u' + P_1(x)\,u + Q_1(x) = 0,$$

где

$$P_1(x) = (1-m)\,P(x) \quad \text{и} \quad Q_1(x) = (1-m)\,Q(x),$$

т. е. *подстановкой* $u = y^{1-m}$ *уравнение Бернулли* (39) *приводится к линейному* и интегрируется затем как линейное.

Отметим, что интегрирование дифференциального уравнения вида

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^2 + R(x) = 0, \tag{40}$$

которое называется *уравнением Риккати*, не приводится при произвольных коэффициентах к квадратурам. Его можно привести к линейному уравнению, если известно его какое-либо частное решение. Действительно, пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (40), т. е.

$$y_1' + P(x)\,y_1 + Q(x)\,y_1^2 + R(x) = 0. \tag{41}$$

Введем в уравнение (40) вместо y новую искомую функцию u по формуле

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Подставляя в (40) и принимая во внимание равенство (41), получим для u линейное уравнение вида

$$u' - [P(x) + 2Q(x)\,y_1]\,u - Q(x) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$u = C\varphi(x) + \psi(x).$$

Подставляя это выражение u в написанное выше равенство для y, получим общий интеграл уравнения Рикатти в виде

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi_2(x) + \psi_2(x)}.$$

7. Способ Эйлера — Коши. В [2] мы указали приближенное построение интегральной кривой уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{42}$$

при начальном условии

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{43}$$

Этот прием можно упростить, употребляя вместо сетки квадратов лишь прямые, параллельные оси OY. Получающийся таким путем прием приводит к сравнительно простому и практически удобному способу приближенного вычисления ординаты y искомой интегральной кривой при заданной абсциссе. Нанесем на плоскости последовательность прямых, параллельных OY: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., причем $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

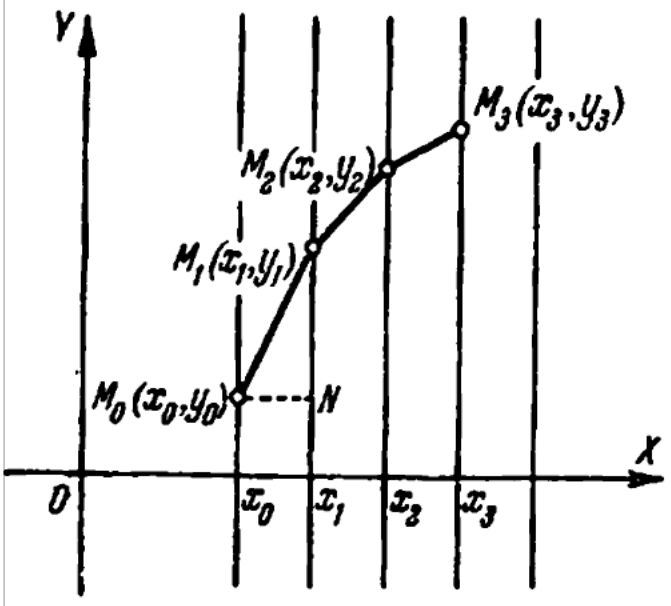


Рис. 7.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой (рис. 7). Из нее проводим луч с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения его в точке M_1 с прямой $x = x_1$. Пусть y_1 — ордината M_1. Она определяется из соотношения

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

ибо отрезки $\overline{M_0N}$ и $\overline{NM_1}$ выражаются числами $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$, а тангенс угла NM_0M_1 по построению равен $f(x_0, y_0)$. Из точки $M_1(x_1, y_1)$ проводим луч M_1M_2 с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения его в точке M_2 с прямой $x = x_2$. Ординаты y_2 точки пересечения определяются из соотношения

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Точно так же, исходя из точки $M_2(x_2, y_2)$, можно определить следующую точку $M_3(x_3, y_3)$ и т. д.

Положим теперь, что нам надо при заданном значении x определить значение y решения уравнения (42), удовлетворяющее начальным условиям (43). В силу сказанного выше, для этого надо поступать так: промежуток (x_0, x) разбиваем на отдельные части

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x \ldots \tag{44}$$

и последовательно определяем ординаты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\ y_2 - y_1 &= f(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \\ y_3 - y_2 &= f(x_2, y_2)(x_3 - x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}), \\ Y - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

При указанных в [2] условиях относительно свойств функции $f(x, y)$, если число промежутков увеличивается, а каждый из них стремится к нулю, то величина Y, получаемая из формул (45), будет стремиться к истинной ординате y искомой интегральной кривой, если заданное значение x достаточно близко к начальному x_0 [см. 53].

Складывая равенства (45) почленно, найдем без труда

$$y \sim Y = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \quad (46)$$

В простейшем случае уравнения

$$y' = f(x)$$

написанная формула будет иметь вид

$$y_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(x_s)(x_{s+1} - x_s),$$

что, как известно [I, 87], дает приближенное выражение для величины

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

т. е. для решения данного уравнения.

Вычисление по формулам (45) производится в следующем порядке. Первая из формул (45) дает разность $(y_1 - y_0)$. Складывая ее с y_0, получаем вторую ординату y_1 и с помощью второй из формул (45) находим разность $(y_2 - y_1)$. Складывая эту последнюю с y_1, получаем третью ординату y_2 и с помощью третьей из формул (45) находим разность $y_3 - y_2$ и т. д. Прибавляя все эти разности к y_0, находим Y. Мы вернемся еще к этому методу в следующей главе.

Пример. Применим указанный приближенный метод к уравнению

$$y' = \frac{xy}{2}$$

при условии $y(0) = 1$. Разделяя переменные и интегрируя, убедимся в том, что искомое решение выражается формулой

$$y = e^{x^2/4}.$$

При применении формул (45) будем считать, что

$$x_k - x_{k-1} = 0,\ 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

0,	1	0	0	1
0,1	1	0,05	0,005	1,0025
0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
0,4	1,0303	0,2061	0,0206	1,0408
0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
0,8	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244

В прилагаемой таблице приведены результаты вычислений с округлением в последнем знаке. Первый столбец содержит величины x, второй — соответствующие им величины y, третий — значения $xy/2$, четвертый — разности $\Delta y = \frac{xy}{2} \cdot 0{,}1$, наконец последний — значения ординат точной интегральной кривой $e^{x^2/4}$.

При $x = 0{,}9$ ошибка, как видно из таблицы, меньше 0,031, т. е. составляет приблизительно 2,5%.

8. Применение степенных рядов. Дифференциальные уравнения интегрируются в квадратурах лишь в исключительных случаях. В связи с этим, кроме указанного в [7] метода приближенного интегрирования уравнения, применимого в весьма широком классе случаев, изложим еще метод степенных рядов. При его применении будем предполагать, что правая часть уравнения (42) имеет в точке (x_0, y_0) и ее окрестности производные всех порядков по x и y.

Итак, рассмотрим уравнение (42) с начальным условием (43). Подставляя в правую часть (42) $x = x_0$, $y = y_0$, получим значение y_0' производной y по x при $x = x_0$. Дифференцируя (42) по x, при предположении, что y — искомое решение, получим уравнение

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'.$$

Подставляя в его правую часть $x = x_0$, $y = y_0$ и $y' = y_0'$, определим значение y_0'' второй производной y'' при $x = x_0$. Дифференцируя написанное выше равенство еще раз по x, получим, как и выше, значение y_0''' производной третьего порядка y''' при $x = x_0$ и т. д. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема сколько угодно раз, мы сможем определить произведение всех порядков от y при $x = x_0$ и тем самым построить ряд Тейлора

$$y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (47)$$

Возникает вопрос о сходимости этого ряда. Доказывается, что если правая часть уравнения (42) представляет собою ряд, расположенный по целым положительным степеням разностей $x-x_0$ и $y-y_0$ [1, 161]:

$$f(x, y)=\sum_{p, q=0}^{\infty} a_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q,$$

сходящийся, если абсолютные значения этих разностей достаточно малы, то функция $f(x, y)$ дифференцируема сколько угодно раз при значениях x и y, достаточно близких к x_0 и y_0, ряд (47) сходится при всех x, достаточно близких к x_0, и его сумма y есть решение уравнения (42), удовлетворяющее условию (43).

Вместо указанного приема постепенного определения производных при $x=x_0$ можно применить и другой прием, а именно *метод неопределенных коэффициентов*. Подставим в обе части уравнения (42) вместо y степенной ряд с неопределенными коэффициентами

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \tag{48}$$

Располагая правую часть по степеням $(x-x_0)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$, сможем определить постепенно коэффициенты a_1, a_2, ... Ряды (47) и (48) будут совпадать, как в этом нетрудно убедиться.

Пример. Найдем решение уравнения

$$y'=\frac{xy}{2}, \tag{49}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0}=1, \tag{50}$$

в виде степенного ряда

$$y=1+\sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s,$$

причем мы взяли свободный член равным единице, в силу начального условия (50). Дифференцируем этот ряд:

$$y'=\sum_{s=1}^{\infty} s a_s x^{s-1}.$$

Подставляем полученные выражения вместо y и y' в уравнение (49):

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+(n+1)\,a_{n+1}x^n+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}x(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях, получим приведенные в табличке соотношения. Отсюда ясно, что

x^0	$\alpha_1 = 0$
x^1	$2\alpha_2 = \frac{1}{2}$
x^2	$3\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1$
x^3	$4\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_2$
. . .	. . . . .
x^n	$(n+1)\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$
. . .	. . . . .

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_{2n+1} = \ldots = 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4},\ \alpha_4 = \frac{1}{2!\,4^2},\ \ldots,\ \alpha_{2n} = \frac{1}{n!\,4^n},$$

т. е. окончательно [I, 126]

$$y = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n + \ldots = e^{x^2/4}.$$

9. Общий интеграл и особое решение. Выше мы определили общий интеграл, как решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Пусть точка (x_0, y_0), входящая в условие (43), принадлежит области B теоремы А. Изменяя в начальном условии значение y_0, мы получим бесчисленное множество решений уравнения (42), и y_0 может играть роль произвольной постоянной. При рассмотрении примеров дифференциальных уравнений мы получали общий интеграл, в который произвольная постоянная входила не как начальное значение y.

Понятие общего интеграла, строго говоря, нуждается в дополнительных разъяснениях. Мы не будем этим заниматься, поскольку естественной основою теоретического исследования дифференциальных уравнений является упоминаемая нами выше теорема А. Кроме того, весьма редко удается выразить общий интеграл через элементарные функции или квадратуры. Естественно понимать под *общим интегралом* такое решение дифференциального уравнения (42), содержащее произвольную постоянную, из которого можно получить все решения, определяемые теоремой А при начальных условиях (x_0, y_0), заполняющих какую-либо область плоскости XOY. Если общий интеграл получен в неявной форме

$$\psi(x, y, C) = 0, \tag{51}$$

то соответствующие значения C определятся уравнением

$$\psi(x_0, y_0, C) = 0.$$

Пусть имеется общий интеграл уравнения (42) в виде, разрешенном относительно C:

$$\omega(x, y) = C \tag{52}$$

В таком виде он получался для уравнения с отделяющимися переменными. Функция $\omega(x, y)$ или равенство (52) называются обычно *интегралом уравнения* (42).

При подстановке в эту функцию вместо y какого-либо частного решения уравнения (42) мы должны получить постоянную величину, т. е. *интеграл уравнения* (42) *есть такая функция x и y, полная производная которой по x равна нулю в силу уравнения* (42).

Беря полную производную по x от обеих частей уравнения (51), получим [1, 69]

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} y' = 0,$$

или, поскольку y есть по предположению решение уравнения (42), заменяя y' на $f(x, y)$, получим

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0. \tag{53}$$

Функция $\omega(x, y)$ должна удовлетворять этому уравнению независимо от того, какое именно решение уравнения (42) мы подставляли в эту функцию. Но в силу произвольности начального условия (43) в теореме существования и единственности значения x и y могут быть какие угодно, если мы берем все решения уравнения (42), т. е. *функция $\omega(x, y)$ должна удовлетворять уравнению* (53) *тождественно относительно x и y*. Покажем, наконец, каким образом можно проверить решение уравнения (42), когда оно дано в неявной форме

$$\omega_1(x, y) = 0. \tag{54}$$

Как и выше, получаем уравнение

$$\frac{\partial \omega_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0, \tag{55}$$

причем это соотношение должно быть выполнено во всех точках кривой (54), т. е. равенство (55) должно быть выполнено не обязательно тождественно относительно x и y, но лишь в силу равенства (54).

Рассмотрим, например, уравнение

$$y' = \frac{1 - 3x^2 - y^2}{2xy}.$$

Нетрудно видеть, что окружность

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

есть решение этого уравнения. Действительно, в данном случае

$$f(x, y) = \frac{1 - 3x^2 - y^2}{2xy} \text{ и } \omega_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

равенство (55) имеет вид

$$2x + 2y \frac{1 - 3x^2 - y^2}{2xy} = 0, \text{ т. е. } \frac{1 - x^2 - y^2}{x} = 0,$$

и оно очевидно выполняется в силу уравнения окружности. Покажем, что общий интеграл данного дифференциального уравнения будет

$$x^3 + xy^2 - x = C.$$

Подставляя в (53) $\omega_1(x, y)=x^3+xy^2-x$, получим

$$3x^2+y^2-1+2xy\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}=0,$$

и непосредственно видно, что это равенство выполнено тождественно при всяких x и y.

Уравнение (42) может иметь решения, которые и не заключаются в семействе общего интеграла, т. е. не могут быть получены из формулы (51) ни при каком частном значении C. Такие решения называются обычно *особыми решениями*. В качестве примера рассмотрим уравнение (18) и его общий интеграл (19). Решение $y=0$ уравнения (18) не заключается в семействе (19). Как мы видели, через каждую точку решения $y=0$ проходит несколько интегральных кривых. Решения, которые принадлежат области B теоремы А, мы не называем особыми. Обычно особыми решениями называют такие интегральные кривые, в каждой точке которых не выполнены условия теоремы существования и единственности. Они не получаются, обычно, из общего интеграла ни при каком численном значении C. В дальнейших примерах мы еще вернемся к ним. Но, как мы и выше указывали, основой дальнейшего будет служить теорема А.

10. Уравнения, не решенные относительно y'. Теория дифференциальных уравнений, не решенных относительно y':

$$\Phi(x, y, y')=0, \tag{56}$$

является значительно более сложной. Решая это уравнение относительно y', мы получим уравнение вида (42), но функция $f(x, y)$ может быть и многозначной. Мы ограничимся в общем плане тем случаем, когда левая часть (56) есть многочлен второй степени относительно y':

$$y'^2+2P(x, y)y'+Q(x, y)=0, \tag{57}$$

причем будем считать, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены от x и y. Решая относительно y', получим

$$y'=-P(x, y)\pm\sqrt{R(x, y)}, \tag{58}$$

где

$$R(x, y)=[P(x, y)]^2-Q(x, y). \tag{59}$$

Мы можем иметь одну или несколько областей B на плоскости XOY, в которых $R(x, y)>0$. В этих областях формула (58) определяет два различных дифференциальных уравнения (два различных знака у радикала). Правая часть каждого из них непрерывна в B и имеет непрерывную частную производную по y. Согласно теореме А через всякую точку M в области B проходит две и только две интегральные кривые, причем эти кривые в точке M не касаются, ибо они в этой точке имеют различные значения y', разность которых равна

$2\sqrt{R(x, y)}$. Никаких решений, помимо тех, которые получаются по теореме А, в области B нет (нет особых решений). В тех частях плоскости, где $R(x, y)<0$, уравнение (58) не дает вещественных значений y' (нет поля направлений), и никаких интегральных кривых там нет. Наконец рассмотрим уравнение

$$R(x, y)=0. \tag{60}$$

Оно может определять одну или несколько линий (границы областей B, если последние существуют). Эти линии могут быть интегральными кривыми уравнения (57), но могут и не быть таковыми.

Мы не будем рассматривать более сложных случаев уравнений, не решенных относительно y'.

Пример 1. Рассмотрим уравнение, отличное по типу от (57),

$$y'^2+\frac{y^2-a^2}{y^2}=0, \text{ или } y'=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}. \tag{61}$$

Для него имеются две области B_1, B_2 — внутренние части полос между прямыми $y=0$ и $y=\pm a$. Отметим, что границы $y=a$ и $y=-a$ суть решения уравнения (61). В уравнении (61) переменные отделяются; интегрируя, получим

$$(x-C)^2+y^2=a^2, \tag{62}$$

т. е. семейство окружностей с центром на оси OX и радиусом a. В упомянутых областях мы имеем два дифференциальных уравнения (61), и формула (62) есть общий интеграл для обоих этих уравнений. В каждой точке

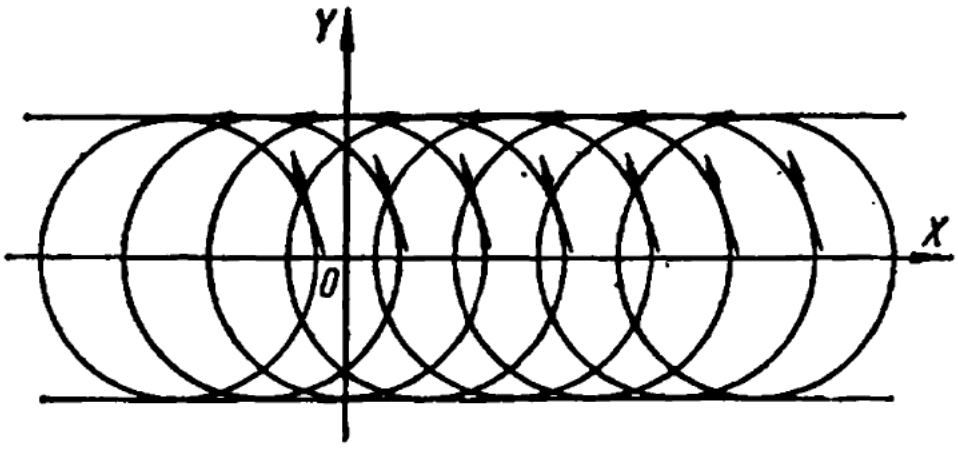


Рис. 8.

из B_1 пересекаются две окружности семейства (62). Прямые $y=\pm a$ суть особые решения уравнения (61) (рис. 8). Через каждую точку этих прямых проходит «в малом» четыре интегральные кривые уравнения (61) (ср. пример 4 из [4]). На частях плоскости $y>a$ и $y<-a$ дифференциальное уравнение (61) не определено.

Если точка (x_0, y_0) лежит внутри B_1, то при подстановке $x=x_0$, $y=y_0$ в уравнение (62) получится квадратное уравнение для C. Корни этого уравнения дадут те значения C, при которых две окружности (62) проходят через точку (x_0, y_0). Как мы упоминали, формула (62) есть общий интеграл обоих уравнений (61) и эти два уравнения в известном смысле естественно связаны между собою. На оси $y=0$ окружности касаются.

Пример 2. Рассмотрим еще одно уравнение, принципиально отличное от уравнения примера 1:

$$y'^2 - xy' = 0. \tag{63}$$

Левая часть разлагается на множители $y'(y' - x) = 0$, и уравнение (63) равносильно совокупности двух уравнений $y' = 0$ и $y' = x$, имеющих общие интегралы

$$y = C \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Мы можем, совершенно искусственно, объединить их в один общий интеграл

$$(y - C)\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right) = 0. \tag{63$_1$}$$

Это — общий интеграл уравнения (63). Но это последнее уравнение является по существу «искусственным» объединением уравнений $y' = 0$ и $y' = x$. К каждому из них применима теорема А, причем областью B для них обоих является вся плоскость XOY. Формула (63$_1$) является «искусственным» объединением общих интегралов упомянутых уравнений. Отметим, что функция $y = 0$ при $x \leqslant 0$ и $y = \frac{x^2}{2}$ при $x \geqslant 0$ является решением уравнения (63). При переходе через значение $x = 0$ значения y и y' изменяются непрерывно. Эта интегральная линия составлена из решений уравнений $y' = 0$ и $y' = x$.

Мы переходим теперь к изучению двух типов дифференциальных уравнений, не решенных относительно y'.

11. Уравнение Клеро. Предварительно введем одно новое понятие. Заменяя в дифференциальном уравнении (42) или (56) y' произвольной постоянной C_1, получим семейство линий

$$f(x, y) = C_1 \quad \text{или} \quad \Phi(x, y, C_1) = 0. \tag{64}$$

Каждая линия этого семейства есть геометрическое место точек плоскости, которым отвечает одно и то же направление касательной к интегральным кривым. Это семейство называется семейством *изоклин*, или семейством *линий равного уклона* поля направлений, определяемого дифференциальным уравнением.

Для однородного уравнения [5] изоклинами были прямые, проходящие через начало координат.

Посмотрим, в каких случаях изоклина является интегральной линией уравнения, т. е. дает решение уравнения. Возьмем какую-нибудь изоклину

$$\Phi(x, y, b) = 0,$$

соответствующую частному значению $C_1 = b$. В точках этой изоклины дифференциальное уравнение дает одно и то же направление касательных, и именно мы имеем $y' = b$. Для того чтобы изоклина была и решением, необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной к изоклине во всех ее точках был также равен b, откуда

непосредственно видно, что изоклина должна быть прямой с угловым коэффициентом b, ибо из $y'=b$ вытекает, что $y=bx+c$, где c — некоторая постоянная. Итак, *изоклина будет решением уравнения только в том случае, когда она есть прямая и когда направление этой прямой совпадает с тем постоянным направлением касательных, которое определяется дифференциальным уравнением в точках этой изоклины.*

Переходим к первому типу уравнений, не решенных относительно y'. *Уравнением Клеро* называется уравнение вида

$$y=xy'+\varphi(y'). \tag{65}$$

Семейство его изоклин определяется уравнением

$$y=xC_1+\varphi(C_1). \tag{66}$$

Все изоклины — прямые линий, и угловой коэффициент C_1 каждой из них есть та постоянная, которая заменила y', т. е. направление прямых (66) в каждой их точке совпадает с направлением касательных, которое определяется дифференциальным уравнением в точках этой прямой. Вспоминая сказанное выше, можем утверждать, что каждая из прямых (66) есть и решение уравнения (65), т. е. семейство изоклин (66) есть в то же время и семейство общего интеграла уравнения (65).

Укажем теперь другой способ получения общего интеграла уравнения (65), причем этот способ даст нам не только общий интеграл, но и особое решение уравнения (65). Обозначая $y'=p$, перепишем уравнение (65):

$$y=xp+\varphi(p). \tag{65_1}$$

Дело сводится к нахождению p как функции от x: $p=\omega(x)$ так, чтобы при подстановке $p=\omega(x)$ в правую часть (65_1) получить для y такую функцию от x, производная которой y' была бы равна: $y'=p=\omega(x)$. Взяв дифференциалы от обеих частей (65_1) и полагая слева $dy=y'\,dx=p\,dx$, получим дифференциальное уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx=p\,dx+x\,dp+\varphi'(p)\,dp \quad \text{или} \quad [x+\varphi'(p)]\,dp=0.$$

Приравнивая нулю каждый из множителей, мы получаем два случая. Случай $dp=0$ дает $p=C$, где C — произвольная постоянная; подставляя $p=C$ в уравнение (65_1), получим опять общий интеграл (66). Во втором случае мы имеем уравнение

$$x+\varphi'(p)=0.$$

Исключая p из двух уравнений

$$y=xp+\varphi(p) \quad \text{и} \quad x+\varphi'(p)=0,$$

получим решение уравнения (65), уже не содержащее произвольной постоянной. Это решение обычно является особым решением уравнения.

К уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по заданному свойству ее касательной, причем свойство это должно относиться лишь к самой касательной, но не к точке касания. Действительно, уравнение касательной имеет вид

$$Y - y = y'(X - x)$$

или

$$Y = y'X + (y - xy'),$$

и всякое свойство касательной выражается соотношением между $(y - xy')$ и y':

$$\Phi(y - xy',\ y') = 0.$$

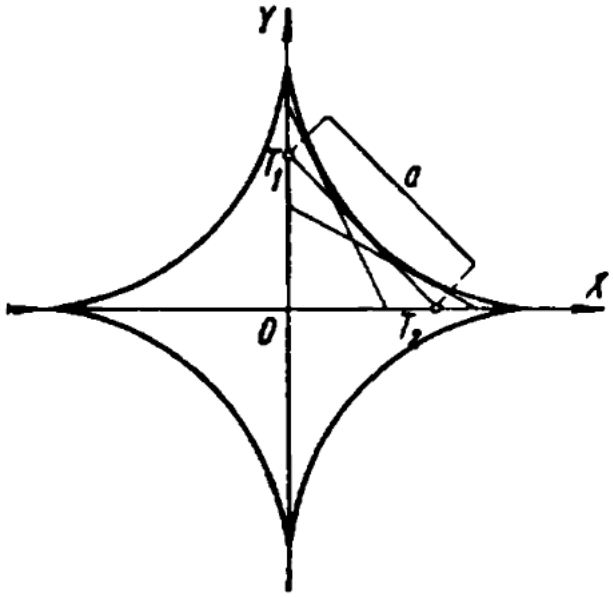


Рис. 9.

Решая его относительно $(y - xy')$, придем к уравнению вида (65). Прямые линии, образующие общий интеграл уравнения Клеро, очевидно, не представляют интереса в смысле ответа на задачу, и этот ответ будет даваться особым решением уравнения.

Пример 1. Уравнение

$$y = xy' + y'^2$$

имеет общий интеграл

$$y = xC + C^2.$$

Исключая p из уравнений

$$y = xp + p^2, \qquad x + 2p = 0,$$

получаем решение $y = -\frac{x^2}{4}$. Оно получается также, если применить к уравнению

$$y'^2 + xy' - y = 0,$$

совпадающему с данным, формулу (60). Прямые общего интеграла образуют семейство касательных к параболе $y = -\frac{x^2}{4}$.

Пример 2. Найти такую кривую, чтобы отрезок T_1T_2 ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a (рис. 9).

Определяя из уравнения касательной следы OT_1 и OT_2 касательной на координатных осях, составим без труда дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\frac{(y - xy')^2}{y'^2} + (y - xy')^2 = a^2, \quad \text{или} \quad y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Общий интеграл его

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} \tag{67}$$

представляет собой семейство прямых линий, длина отрезка которых между координатными осями равна a. Особое решение получится в результате исключения p из уравнения

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \tag{68}$$

и уравнения

$$x \pm \frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} = 0,$$

которое приводится к виду

$$x \pm \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} = 0.$$

Полагая $p = \operatorname{tg}\varphi$, получим

$$x = \mp a\cos^3\varphi$$

и из уравнения (68) для y будем иметь

$$y = \mp a\cos^3\varphi \operatorname{tg}\varphi \pm a\sin\varphi = \pm a\sin^3\varphi.$$

Возводя два последних равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно, исключим φ:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

т. е. искомая кривая есть астроида, о которой мы говорили в [I, 80]. Прямые (67) образуют семейство касательных к ней (рис. 9).

12. Уравнение Лагранжа. *Уравнением Лагранжа* называется уравнение вида

$$y = x\varphi_1(y') + \varphi_2(y'), \tag{69}$$

причем мы считаем $\varphi_1(y')$ отличным от y', так как при $\varphi_1(y') \equiv y$ мы получаем уже разобранное уравнение Клеро.

Применим к уравнению (69) тот же метод дифференцирования, что и к уравнению Клеро. Обозначая $y' = p$, перепишем уравнение в виде

$$y = x\varphi_1(p) + \varphi_2(p). \tag{70}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей, находим уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx = \varphi_1(p)\,dx + x\varphi_1'(p)\,dp + \varphi_2'(p)\,dp.$$

Деля на dp, получим уравнение

$$[\varphi_1(p) - p]\frac{dx}{dp} + \varphi_1'(p)\,x + \varphi_2'(p) = 0, \tag{71}$$

которое является линейным дифференциальным уравнением, если считать x функцией от p. Деля обе части его на коэффициент

$[\varphi_1(p)-p]$, приведем его к виду (28) и получим его общий интеграл в виде

$$x=\psi_1(p)\,C+\psi_2(p). \tag{72}$$

Подставляя это выражение x в уравнение (70), получим для y уравнение вида

$$y=\psi_3(p)\,C+\psi_4(p). \tag{73}$$

Формулы (72) и (73) выражают x и y через произвольную постоянную C и переменный параметр p, т. е. дают параметрическое представление общего интеграла уравнения Лагранжа. Если исключим из уравнений (72) и (73) параметр p, то получим обычное уравнение для общего интеграла.

Изоклины уравнения (69) прямые:

$$y=x\varphi_1(C_1)+\varphi_2(C_1).$$

Если значение C_1 таково, что $\varphi_1(C_1)=C_1$, то эта формула дает решение уравнения (69), что легко проверить и непосредственно.

Пример. Для уравнения

$$y'^2+2xy'+y=0, \quad \text{или} \quad y'=-x\pm\sqrt{x^2-y}. \tag{74}$$

Формула (60) дает $y=x^2$, и эта функция не есть решение уравнения, так что это уравнение не имеет особых решений. Область B теоремы А есть внешность параболы $y=x^2$ ($y<x^2$). Решая уравнение относительно y, приходим к уравнению вида (69), и уравнение (71) в этом примере имеет вид

$$3p\,dx+(2x+2p)\,dp=0. \tag{75}$$

Деля на dp, приходим к линейному уравнению

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{3p}x+\frac{2}{3}=0. \tag{75_1}$$

Поступая, как указано выше, получаем

$$x=Cp^{-2/3}-\frac{2}{5}p, \qquad y=-2Cp^{1/3}-\frac{1}{5}p^2. \tag{76}$$

Изоклины уравнения (74) суть: $y=-2C_1x-C_1^2$, и при $-2C_1=C_1$, т. е. при $C_1=0$, получаем решение $y=0$, которое не может быть получено из формул (76) ни при каком численном значении C. Но оно не является и особым решением, ибо уравнение (74), как мы видели, не имеет особых решений. Это решение $y=0$ потеряно в результате деления уравнения (75) на dp. Вдоль указанного решения $dp=dy'\equiv 0$, и переменная p не может быть независимой переменной, как это мы считаем в уравнении (75_1).

Отметим, что точка (0, 0) лежит на параболе $y=x^2$, так что области B принадлежит не вся ось OX ($y=0$), а два луча $x>0$ и $x<0$, т. е. $y(x)=0$ при $x>0$ и $y(x)=0$ при $x<0$. Формулы (76) дают при всяком фиксированном C две интегральные кривые: одна получается при $-\infty<p<0$, и другая при $0<p<+\infty$. Этим исчерпываются все решения уравнения (74), кроме $y=0$. Если задана точка $M_0(x_0, y_0)$, причем $x_0^2-y_0>0$, то для p в этой точке получаем два значения: $p_0=-x_0\pm\sqrt{x_0^2-y_0}$ и одно из уравнений (76) дает два значения C, соответствующих интегральным кривым, проходящим через точку M_0. Для точки $(x_0, 0)$ $(x_0\neq 0)$ получаем $p_0=0$ и $p_0=-2x_0$. Первому значению соответствует решение $y=0$.

13. Огибающие семейства кривых и особые решения. Мы имели уже два примера, в которых, кроме общего интеграла, были получены и особые решения. В примере из [10] общий интеграл представлял собою семейство окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2 \tag{77}$$

с центрами на оси OX и фиксированным радиусом a. Особыми решениями являлись две прямые $y = \pm a$, параллельные оси OX. Прямые эти в каждой своей точке касаются одной из окружностей семейства (77) (рис. 8). В примере из [11] общий интеграл представлял собою семейство прямых, длина отрезка которых между координатными осями равна заданной величине a, а особое решение представляло собою астроиду, касающуюся во всех своих точках одной из указанных прямых, т. е. упомянутое семейство прямых являлось семейством касательных для этой астроиды.

Эти примеры естественно приводят нас к понятию огибающей данного семейства линий. Пусть дано семейство линий

$$\psi(x, y, C) = 0, \tag{78}$$

где C — произвольная постоянная. *Огибающей этого семейства называется линия, которая во всех своих точках касается различных линий семейства*, т. е. *имеет в каждой своей точке касательную, общую с линией семейства* (78), *проходящей через эту же точку.*

Выясним правило нахождения этой огибающей. Прежде всего определим угловой коэффициент касательной к линии семейства (78). Дифференцируя равенство (78) и принимая во внимание, что y есть функция от x, а C — постоянная, получим

$$\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y}}. \tag{79}$$

Положим, что искомое уравнение огибающей будет

$$R(x, y) = 0. \tag{80}$$

Мы можем считать, что неизвестная нам пока левая часть этого уравнения, т. е. $R(x, y)$, имеет вид $\psi(x, y, C)$, где только C не постоянная, а какая-то неизвестная пока функция от x и y. Действительно, для любой функции $R(x, y)$ мы можем написать равенство

$$R(x, y) = \psi(x, y, C),$$

которое и определит нам C как функцию от x и y. Итак, мы можем искать уравнение огибающей также в виде (78), считая только C не постоянной, а искомой функцией от x и y. Беря дифференциал от обеих частей уравнения (78), мы получим, принимая во внимание, что C уже не постоянная:

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}dC=0. \qquad (81)$$

У искомой огибающей угловой коэффициент касательной dy/dx должен быть по условию таким же, что и у кривой семейства (78), проходящей через ту же точку, т. е. равенство (81) должно дать для dy/dx прежнее выражение (79), а это будет иметь место лишь в том случае, когда третье слагаемое в левой части формулы (81) будет равно нулю, т. е. $\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}dC=0$. Возможность $dC=0$ дает постоянную C, т. е. дает опять кривую семейства, а не огибающую, и следовательно, чтобы получить огибающую, мы должны положить

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}=0.$$

Это уравнение и определит нам C как функцию от (x, y). Подставляя это выражение C через x и y в левую часть равенства (78), получим искомое уравнение огибающей (80), т. е. *уравнение огибающей семейства* (78) *может быть получено исключением* C *из двух уравнений:*

$$\psi(x, y, C)=0, \quad \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}=0. \qquad (82)$$

Когда мы двигаемся по огибающей, то мы касаемся различных линий семейства (78), каждая из которых определяется своим значением постоянной C, таким образом, становится наглядно понятным тот факт, что мы искали уравнение огибающей также в виде (78), считая только C переменным.

Вернемся теперь к особым решениям дифференциального уравнения. Положим, что (78) есть семейство общего интеграла дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y')=0, \qquad (83)$$

т. е. что на любой линии семейства (78) координаты (x, y) и угловой коэффициент касательной y' удовлетворяют уравнению (83). В каждой точке огибающей x, y и y' будут совпадать с таковыми же величинами некоторой кривой семейства (78), т. е. x, y и y' огибающей будут также удовлетворять (83). Итак, *огибающая семейства общего интеграла есть также интегральная кривая уравнения.*

Таким образом, если $\psi(x, y, C)=0$ есть общий интеграл уравнения (83), то исключение C из уравнений (82) приводит нас в не-

которых случаях к особому решению. Мы оговорились здесь, добавив «в некоторых случаях» (а не всегда), из следующих соображений. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что линии (78) имеют касательную, поэтому, если мы исключим C из уравнений (82), то можем получить не только огибающую, а также и совокупность всех особых точек кривых семейства (78), т. е. геометрическое место тех точек кривых (78), в которых эти кривые не имеют определенной касательной [I, 76]. Кроме того, иногда случается, что сама огибающая входит в состав семейства линий (78). Мы не останавливаемся на строгом изложении теории огибающей и особых решений. Такая теория должна быть тесно связана с теоремой существования и единственности, о которой мы упоминали в [2], и ограничимся выяснением вопроса на некоторых примерах.

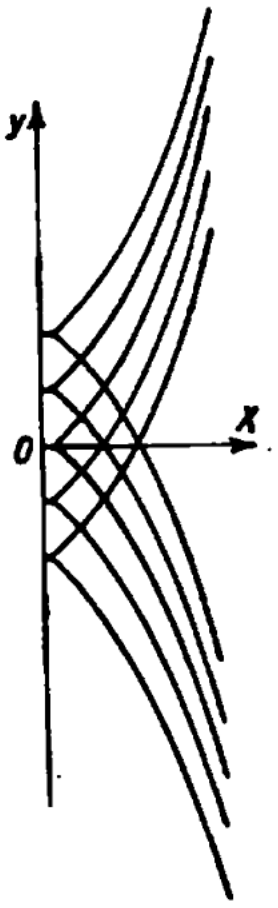


Рис. 10.

1. Будем искать огибающую семейства окружностей (62)

$$(x-C)^2+y^2=a^2.$$

Уравнения (82) имеют в данном случае вид

$$(x-C)^2+y^2=a^2, \qquad -2(x-C)=0.$$

Второе уравнение дает $C=x$, и, подставляя его в первое уравнение, получаем $y^2=a^2$, т. е. совокупность двух прямых $y=\pm a$, что мы имели и раньше.

2. Общий интеграл уравнения Клеро $y=xy'+\varphi(y')$ будет

$$y=xC+\varphi(C).$$

Огибающая получится исключением C из двух уравнений

$$y=xC+\varphi(C), \qquad 0=x+\varphi'(C).$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями из [11] с несущественной заменой буквы p на букву C, т. е. мы получили прежнее правило нахождения особого решения уравнения Клеро.

3. Кривая $y^2=x^3$ представляет собою так называемую полукубическую параболу (рис. 10). Двигая ее параллельно оси OY, получим семейство таких полукубических парабол:

$$(y+C)^2=x^3.$$

Каждая из этих кривых имеет острие на оси OY, и в этом острие имеется с правой стороны касательная, параллельная оси OX. Уравнения (82) в данном случае имеют вид

$$(y+C)^2=x^3, \qquad 2(y+C)=0.$$

Исключая C, получаем $x=0$, т. е. ось OY. В данном случае эта ось OY не является огибающей семейства, а геометрическим местом особых точек кривых семейства.

4. Рассмотрим семейство кривых

$$y=C(x-C)^2.$$

При $C \neq 0$ это есть парабола, а при $C = 0$ — ось OX. Уравнения (82) имеют вид

$$y = C(x - C)^2, \qquad (x - C)(x - 3C) = 0.$$

Второе уравнение дает $C = x$ или $C = \frac{1}{3}x$. Подставляя в первое уравнение, получим или $y = 0$, или $y = \frac{4}{27}x^3$. Первая линия $y = 0$ есть ось OX, которая содержится в самом семействе кривых, а кубическая парабола $y = \frac{4}{27}x^3$ есть огибающая семейства.

14. Изогональные траектории. Пусть имеется семейство кривых, зависящее от одной произвольной постоянной

$$\psi(x, y, C) = 0. \tag{84}$$

Поставим следующую задачу: составить дифференциальное уравнение, для которого семейство (84) есть семейство общего интеграла. Уравнение (84) определяет y как функцию x и C. Дифференцируя (84) по x, получим

$$\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y} y' = 0. \tag{85}$$

Исключая C из (84) и (85), придем к искомому дифференциальному уравнению:

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{86}$$

Вернемся к семейству (84). *Изогональными траекториями* семейства (84) называется семейство кривых, пересекающихся с кривыми семейства (84) под постоянным углом φ.

Займемся сначала определением *ортогональных траекторий*. По условию ортогональности, искомая кривая в точке ее пересечения с какой-либо кривой семейства (84) должна иметь угловой коэффициент касательной, обратный по величине и знаку по сравнению с угловым коэффициентом касательной к кривой семейства (84), и, следовательно, *чтобы получить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий, надо в дифференциальном уравнении заданного семейства заменить* y' *на* $\left(-\frac{1}{y'}\right)$.

Таким образом, нахождение ортогональных траекторий приводится к интегрированию уравнения

$$\Phi\left(x, y_1, -\frac{1}{y_1'}\right) = 0,$$

где y_1 — искомая функция от x.

Обратимся теперь к общей задаче изогональных траекторий, и пусть φ — постоянный угол, под которым искомые кривые должны

пересекать кривые семейства (84). Обозначая, как и выше, через y_1 ординату искомой кривой и принимая во внимание выражение для тангенса разности двух углов

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi_1},$$

где $\operatorname{tg}\psi = y'$ есть угловой коэффициент касательной к кривым (84) и $\operatorname{tg}\psi_1 = y_1$ — к искомым кривым, можем написать

$$\frac{y_1' - y'}{1 + y'y_1'} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{87}$$

где φ отсчитывается от кривой (84) к искомой кривой. Исключая y' из последнего уравнения и уравнения (86), получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий, которое и надо интегрировать.

Пример. Найти изогональные траектории семейства

$$y = Cx^m. \tag{88}$$

Исключая C из уравнений

$$y = Cx^m,$$

$$y' = Cmx^{m-1},$$

получим дифференциальное уравнение семейства (88):

$$y' = m\frac{y}{x}.$$

Подставляя это выражение для y' в формулу (87), получим дифференциальное уравнение искомого семейства:

$$\frac{y' - m\dfrac{y}{x}}{1 + m\dfrac{yy'}{x}} = \frac{1}{k},$$

причем постоянную $\operatorname{tg}\varphi$ мы обозначили через $1/k$ и вместо y_1 написали просто y. Это уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{km\dfrac{y}{x} + 1}{k - m\dfrac{y}{x}} \tag{89}$$

и, следовательно, есть однородное уравнение [5].

Если $m = 1$, то семейство (88) будет семейством лучей, проходящих через начало координат, а искомые кривые должны пересекать их под постоянным углом, т. е. будут логарифмические спирали [I, 83] или окружности.

Придавая $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные численные значения, получим *частное решение* уравнения (2). Дифференцируя (6) или (7) по x $(n-1)$ раз и подставляя затем $x=x_0$ и начальные условия (5), получим n уравнений. Предполагается, что эти уравнения разрешимы относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ при любых начальных данных $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ из некоторой области изменения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Таким образом, мы получаем решение, удовлетворяющее условиям (5). Определение *особого решения* то же, что и для уравнения первого порядка. Основой дальнейшего является теорема А.

Укажем кратко распространение метода степенных рядов [8] для уравнений n-го порядка. Если правая часть (2) есть ряд, расположенный по целым неотрицательным степеням разностей

$$x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}$$

и сходящийся при условии, что абсолютные значения этих разностей не превышают некоторого положительного числа, то решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), может быть представлено в виде ряда

$$y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ \ldots \qquad (8)$$

для всех x, достаточно близких к x_0. При этом уравнение (2) совместно с условиями (5), как и в случае уравнения первого порядка, определяет коэффициенты этого ряда. Действительно, подставляя в уравнение (2) $x=x_0$ и начальные значения (5), определяем $y^{(n)}=y_0^{(n)}$. Дифференцируя затем уравнение (2) по x и подставляя $x=x_0$, начальные значения (5) и $y^{(n)}=y_0^{(n)}$, определяем $y_0^{(n+1)}$ и т. д. Можно поступать и иначе, а именно подставить в обе части уравнения (2) вместо y степенной ряд

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \qquad (9)$$

с неопределенными коэффициентами $a_n, a_{n+1}, \ldots$ Располагая правую часть по целым неотрицательным степеням $(x-x_0)$, сможем постепенно определять упомянутые коэффициенты, приравнивая члены с одинаковыми степенями $(x-x_0)$ в обеих частях полученного равенства.

16. Графические способы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка. Всякому решению дифференциального уравнения n-го порядка соответствует некоторая линия на плоскости XOY, которую мы будем называть, как и для уравнения первого порядка, *интегральной линией* (кривой) этого уравнения. Самому дифференциальному уравнению первого порядка соответствовало поле направлений [2]. Выясним теперь геометрический смысл уравнения второго порядка

$$y''=f(x, y, y'). \qquad (10)$$

Пусть s — длина дуги интегральной кривой и α — угол, образованный положительным направлением касательной с положительным направлением оси OX.

произведение массы точки на ее ускорение равно действующей силе. Это дает нам дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right). \tag{3}$$

Интегрирование этого уравнения второго порядка определит зависимость x от t, т. е. движение точки под влиянием заданной силы. Для получения определенного решения задачи мы должны задать еще *начальные условия* движения, а именно положение точки и ее скорость в некоторый начальный момент времени, например при $t=0$:

$$x\Big|_{t=0}=x_0,\qquad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=x_0'. \tag{4}$$

Для уравнения n-го порядка (1) или (2) начальные условия состоят в задании функции y и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно при некотором определенном значении $x=x_0$:

$$y|_{x=x_0}=y_0,\qquad y'|_{x=x_0}=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \tag{5}$$

В этих условиях $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — определенные числа. Для уравнения n-го порядка (2) имеет место теорема существования и единственности, совершенно аналогичная теореме А из [2]. Сформулируем ее в несколько иной форме, чем это мы делали в [2].

Теорема А. *Если* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *есть функция своих аргументов, которые считаются все независимыми переменными, однозначная, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *при значениях аргументов* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *и всех значениях, достаточно близких к ним, то уравнение* (2) *имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее начальным условиям* (5).

Мы смогли бы сформулировать эту теорему совершенно так же, как и в [2], если бы ввели в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ область B, в которой правая часть уравнения (2) однозначна, непрерывна и имеет непрерывные производные по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Все эти аргументы вместе с x рассматриваются как независимые переменные функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. В следующей главе мы еще вернемся к этой теореме.

Изменяя в начальных условиях постоянные $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, получим семейство решений, зависящее от n произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные могут входить в решение и не как начальные условия:

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n). \tag{6}$$

Такое решение уравнения (2), содержащее n произвольных постоянных, называется *общим интегралом* уравнения (2). Оно может быть написано и в неявной форме:

$$\psi(x,\ y,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n)=0. \tag{7}$$

Придавая $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные численные значения, получим *частное решение* уравнения (2). Дифференцируя (6) или (7) по x $(n-1)$ раз и подставляя затем $x=x_0$ и начальные условия (5), получим n уравнений. Предполагается, что эти уравнения разрешимы относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ при любых начальных данных $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ из некоторой области изменения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Таким образом, мы получаем решение, удовлетворяющее условиям (5). Определение *особого решения* то же, что и для уравнения первого порядка. Основой дальнейшего является теорема А.

Укажем кратко распространение метода степенных рядов [8] для уравнений n-го порядка. Если правая часть (2) есть ряд, расположенный по целым неотрицательным степеням разностей

$$x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}$$

и сходящийся при условии, что абсолютные значения этих разностей не превышают некоторого положительного числа, то решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), может быть представлено в виде ряда

$$y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ \ldots \qquad (8)$$

для всех x, достаточно близких к x_0. При этом уравнение (2) совместно с условиями (5), как и в случае уравнения первого порядка, определяет коэффициенты этого ряда. Действительно, подставляя в уравнение (2) $x=x_0$ и начальные значения (5), определяем $y^{(n)}=y_0^{(n)}$. Дифференцируя затем уравнение (2) по x и подставляя $x=x_0$, начальные значения (5) и $y^{(n)}=y_0^{(n)}$, определяем $y_0^{(n+1)}$ и т. д. Можно поступать и иначе, а именно подставить в обе части уравнения (2) вместо y степенной ряд

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \qquad (9)$$

с неопределенными коэффициентами $a_n, a_{n+1}, \ldots$ Располагая правую часть по целым неотрицательным степеням $(x-x_0)$, сможем постепенно определять упомянутые коэффициенты, приравнивая члены с одинаковыми степенями $(x-x_0)$ в обеих частях полученного равенства.

16. Графические способы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка. Всякому решению дифференциального уравнения n-го порядка соответствует некоторая линия на плоскости XOY, которую мы будем называть, как и для уравнения первого порядка, *интегральной линией* (кривой) этого уравнения. Самому дифференциальному уравнению первого порядка соответствовало поле направлений [2]. Выясним теперь геометрический смысл уравнения второго порядка

$$y''=f(x, y, y'). \qquad (10)$$

Пусть s — длина дуги интегральной кривой и α — угол, образованный положительным направлением касательной с положительным направлением оси OX.

Мы имеем [I, 70]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha$$

и, дифференцируя по x, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos^3\alpha}\frac{d\alpha}{ds};$$

но $d\alpha/ds$ есть, как известно [I, 71], кривизна кривой

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}, \tag{11}$$

и предыдущее равенство дает

$$\frac{1}{R} = \cos^3\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{12}$$

Здесь R положительно, если α возрастает вместе с s, и отрицательно, если α убывает при возрастании s.

Положим, например, что ось OX направлена вправо и ось OY вверх (рис. 12). При этом, если $R>0$, то кривая будет при возрастании s закручиваться справа налево (против часовой стрелки), а при $R<0$ — в противоположную сторону.

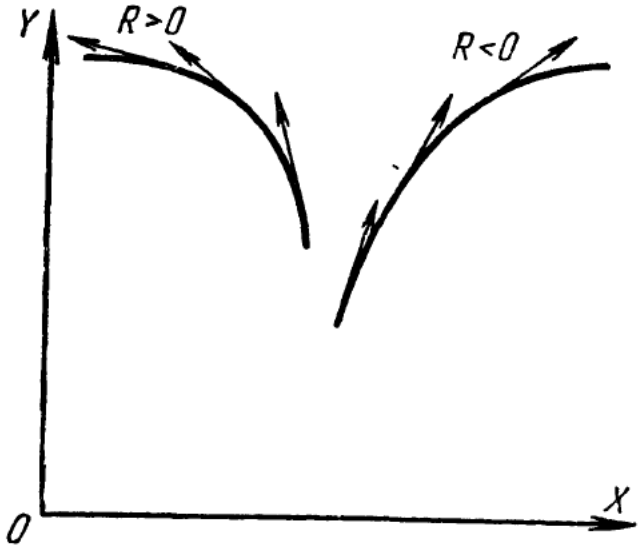


Рис. 12.

Согласно формуле (12), дифференциальное уравнение (10) можно переписать так:

$$\frac{1}{R} = f(x, y, \operatorname{tg}\alpha)\cos^3\alpha. \tag{13}$$

Отсюда видно, что *дифференциальное уравнение второго порядка дает величину радиуса кривизны, если заданы положение точки и направление касательной в этой точке.*

Из этого обстоятельства вытекает способ приближения к интегральной кривой уравнения второго порядка при помощи кривой *с непрерывно меняющейся касательной и составленной из дуг окружностей.* Этот способ аналогичен способу приближения к интегральной кривой уравнения первого порядка при помощи ломаной линии [2].

Положим, что начальные условия для искомой интегральной кривой

$$y|_{x=0} = y_0, \qquad y'|_{x=0} = y_0'.$$

Отмечаем точку M_0 с координатами (x_0, y_0) и через эту точку проводим направление M_0T_0 с угловым коэффициентом $y' = \operatorname{tg}\alpha = y_0'$ (рис. 13).

Уравнение (13) дает нам соответствующую величину $R = R_0$. Отложим отрезок M_0C_0, равный R_0 и перпендикулярный к направлению M_0T_0, и из точки C_0, как центра, опишем небольшую дугу M_0M_1 окружности радиуса R_0.

Заметим при этом, что направление отрезка M_0C_0, в силу сказанного выше, определится знаком R_0. Если, например, $R_0<0$, то движение по дуге окружности от M_0 к M_1 должно происходить по часовой стрелке (рис. 13). Пусть (x_1, y_1) — координаты точки M_1 и $\operatorname{tg}\alpha_1$ — угловой коэффициент касательной M_1T_1 к окружности, проведенной в точке M_1. Уравнение (13) даст

соответствующую величину $R=R_1$. Отложим отрезок M_1C_1, равный R_1 и перпендикулярный к M_1T_1, т. е. лежащий на прямой M_1C_0, причем направление его определится знаком R_1, и из точки C_1, как центра, опишем небольшую дугу M_1M_2 радиуса R_1. Для точки M_2 так же, как и для M_1, получим из уравнения (13) значение $R=R_2$, отложим отрезок M_2C_2, равный R_2 и т. д.

Для указанного построения употребляют линейку, в одном конце которой находится отверстие для карандаша. От этого отверстия вдоль линейки идет прямая линия с делениями, по которой отсчитывается величина R, и имеется небольшой треножник, одно отверстие которого устанавливается в соответствующей величине R точке прямой, а два других — только на бумаге. Передвигая в точках M_1, M_2 и т. д. треножник вдоль упомянутой прямой в зависимости от изменения величины R, мы не меняем в этих точках направление касательной и получаем таким образом требуемую кривую.

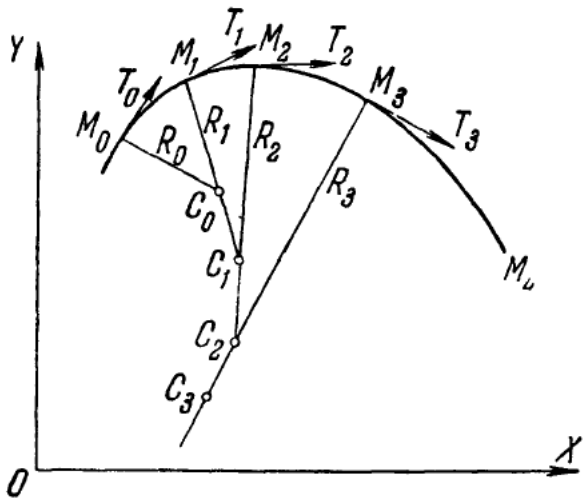


Рис. 13.

Укажем теперь другой способ графического интегрирования уравнения (10), дающий приближенное представление интегральной кривой в виде ломаной линии. Способ этот является обобщением способа, указанного нами на рис. 7. Кроме y, введем еще неизвестную функцию $z=y'$. Вместо одного уравнения второго порядка (10) мы получим тогда систему двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями y и z:

$$\frac{dy}{dx}=z, \qquad \frac{dz}{dx}=f(x, y, z). \quad (14)$$

Способ, который мы изложим, применим к общему случаю системы двух каких угодно уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx}=g(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx}=f(x, y, z) \quad (15)$$

при начальных условиях

$$y|_{x=x_0}=y_0, \qquad z|_{x=x_0}=z_0. \quad (16)$$

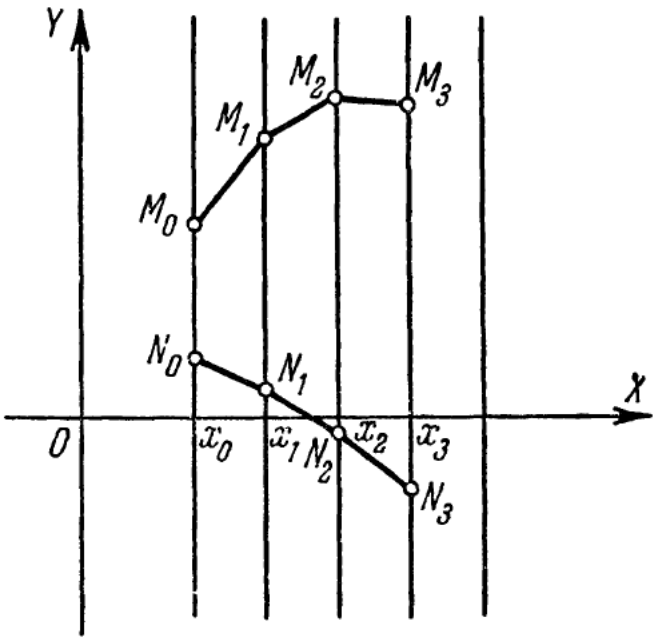


Рис. 14.

Ломаные вычерчиваются на плоскости XOY, как для $y(x)$, так и для $z(x)$ (рис. 14). Нанесем, как и в [7], на плоскости XOY прямые $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2$, ..., параллельные оси OY, причем $x_0<x_1<x_2<\ldots$ Отметим точки M_0 и N_0 с координатами (x_0, y_0) и (x_0, z_0). Из этих точек проводим лучи с угловыми коэффициентами соответственно $g(x_0, y_0, z_0)$ и $f(x_0, y_0, z_0)$ до пересечения с $x=x_1$, и пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $N_1(x_1, z_1)$ — точки пересечения. Из этих точек проводим лучи с угловыми коэффициентами $g(x_1, y_1, z_1)$ и $f(x_1, y_1, z_1)$ до пересечения с прямой $x=x_2$, и пусть $M_2(x_2, y_2)$ и $N_2(x_2, y_2)$ — точки пересечения и т. д.

Для ординат y_1, z_1; y_2, z_2 и т. д. мы имеем формулы, совершенно аналогичные формулам из [7].

17. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$. Уравнение

$$y^{(n)} = f(x) \tag{17}$$

является непосредственным обобщением уравнения $y' = f(x)$. Выясним сначала форму общего интеграла уравнения (17). Пусть $y_1(x)$ есть какое-либо решение уравнения (17), т. е.

$$y_1^{(n)}(x) = f(x). \tag{18}$$

Введем в уравнение (17) вместо y новую искомую функцию z по формуле

$$y = y_1(x) + z. \tag{19}$$

Подставляя в уравнение (17), получим для z уравнение

$$y_1^{(n)} + z^{(n)} = f(x)$$

или, в силу тождества (18),

$$z^{(n)} = 0.$$

Раз производная n-го порядка должна быть равна нулю, то сама функция z есть многочлен $(n-1)$-й степени с произвольными постоянными коэффициентами

$$z = C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1},$$

и формула (19) дает общий интеграл уравнения (17)

$$y = y_1(x) + C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1},$$

т. е. *общий интеграл уравнения* (17) *есть сумма какого-либо частного решения этого уравнения и многочлена* $(n-1)$*-й степени с произвольными постоянными коэффициентами.*

Нам остается, таким образом, найти какое-либо частное решение уравнения (17). Считаем, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке I, содержащем некоторую точку $x = x_0$, и будем искать то решение, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} y|_{x=x_0} &= 0, \\ y'|_{x=x_0} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Интегрируя уравнение (15) почленно от значения x_0 до переменного значения x, получим

$$y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

где $y_0^{(n-1)}$ есть значение $y^{(n-1)}$ при $x=x_0$. В силу последнего, из условий (20) $y_0^{(n-1)}=0$, и мы будем иметь

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Интегрируя правую часть по x еще раз в пределах от x_0 до x, получим $y^{(n-2)}$ и т. д. и, наконец, после n-го интегрирования получим искомую функцию. Это повторное интегрирование обычно записывают так:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\ldots\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{21}$$

Эти n повторных квадратур можно заменить одной, как мы сейчас покажем.

Напишем для $y(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в виде интеграла [**I, 126**]:

$$y(x)=y_0+(x-x_0)\frac{y_0'}{1!}+(x-x_0)^2\frac{y_0''}{2!}+\ldots+$$

$$+(x-x_0)^{n-1}\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}y^{(n)}(t)\,dt,$$

где y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ — значения y и его производных при $x=x_0$ и буква t обозначает просто переменную интегрирования. В силу начальных условий (20)

$$y_0=y_0'=y_0''=\ldots=y_0^{(n-1)}=0,$$

а, в силу дифференциального уравнения (17), $y^{(n)}(t)=f(t)$, так что вышеуказанная формула Тейлора дает

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt. \tag{22}$$

Итак, *формула* (22) *дает решение уравнения* (17) *при нулевых начальных условиях* (20) *или, что то же, дает выражение повторного интеграла* (21) *в виде однократного интеграла.*

Прибавляя к решению (22) многочлен $(n-1)$-й степени с произвольными коэффициентами, получим общий интеграл уравнения (17). Заметим, что в правой части формулы (22) x входит как в верхний предел интеграла, так и под знак интеграла. Интегрирование совершается по t, и при этом x считается постоянным. Формула (22) справедлива, очевидно, и при $n=1$, если считать $0!=1$.

18. Понижение порядка дифференциального уравнения. Укажем несколько частных случаев, когда порядок уравнения может быть понижен.

1. Положим, что уравнение не содержит функции y и ее нескольких последовательных производных $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, т. е. имеет вид

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Вводя новую функцию $z = y^{(k)}$, понизим порядок уравнения на k единиц:

$$\Phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Если найдем общий интеграл этого последнего уравнения

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

то y определится из уравнения:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

рассмотренного нами в [17].

2. Если уравнение не содержит независимой переменной x, т. е. имеет вид

$$\Phi(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

то примем y за независимую переменную и введем новую функцию $p = y'$.

Считая, что p есть функция от y и через посредство y зависит от x, и применяя правило дифференцирования сложных функций, получим для производных от y по x выражения

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} p\right) p = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p,$$

. . . . . .

откуда видно, что в новых переменных порядок уравнения будет $(n-1)$.

Если это преобразованное уравнение проинтегрировано

$$p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

то нахождение общего интеграла данного уравнения приводится к квадратуре

$$dy = p\,dx = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx,$$

откуда

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Одна из произвольных постоянных C_n входит в качестве слагаемого к x, а это равносильно тому, что всякую интегральную кривую можно перемещать параллельно оси OX.

3. Если левая часть уравнения

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

есть однородная функция [I, 154] аргументов $y, y', \ldots, y^{(n)}$, то, вводя вместо y новую функцию $u(x)$ по формуле

$$y = e^{\int u\,dx},$$

получим для u уравнение $(n-1)$-го порядка. Это следует из следующих очевидных формул:

$$y' = e^{\int u\,dx} u, \qquad y'' = e^{\int u\,dx}(u' + u^2), \ldots$$

и из того, что после подстановки в левую часть уравнения вынесется некоторая степень написанной показательной функции (в силу условия однородности), и на этот множитель можно разделить обе части уравнения. Аддитивная постоянная в интеграле, стоящем в показателе степени у e, будет произвольным множителем в y.

Примеры. **1.** Уравнение вида

$$y'' = f(y) \tag{23}$$

относится к случаю 2. Его можно проинтегрировать и непосредственно. Умножим обе его части на $2y'\,dx = 2dy$:

$$2y'y''\,dx = 2f(y)dy.$$

Слева стоит, очевидно, дифференциал от y'^2 и, интегрируя, получим

$$y'^2 = \int_{y_0}^{y} 2f(y)\,dy + C_1 = f_1(y) + C_1, \text{ откуда } \frac{dy}{dx} = \sqrt{f_1(y) + C_1}; \tag{24}$$

отделяя переменные и интегрируя, получим

$$x + C_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f_1(y) + C_1}}. \tag{25}$$

Если имеются начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y_0',$$

то, подставляя в (24) и (25) $x = x_0$, $y = y_0$ и $y' = y_0'$, получим

$$C_1 = y_0'^2, \qquad C_2 = -x_0,$$

и искомое решение будет

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y_0}^{y} 2f(y)\,dy + y_0'^2}}.$$

Положим, что точка движется по оси OX под действием силы $F(x)$, зависящей только от положения точки. Дифференциальное уравнение движения будет [15]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Пусть x_0 и v_0 — начальная абсцисса и начальная скорость точки при $t=0$:

$$x\Big|_{t=0}=x_0, \qquad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v_0.$$

Умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{dt}\,dt$ и интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\,mv_0^2=\int\limits_{x_0}^{x}F(x)\,dx \text{ или } \frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\int\limits_{x_0}^{x}F(x)\,dx=\frac{1}{2}mv_0^2. \quad (26)$$

Первое слагаемое в левой части $\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ представляет собой кинетическую энергию, а второе слагаемое $\left[-\int\limits_{x_0}^{x}F(x)\,dx\right]$ — потенциальную энергию движущейся точки, и из (26) следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной во все время движения. Решая равенство (26) относительно dt и интегрируя, получим зависимость между t и x.

2. Рассмотрим задачу: найти кривую $y=y(x)$, кривизна которой есть заданная функция абсциссы

$$\frac{1}{R}=\varphi(x). \quad (27)$$

Это есть дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

Вводя $p=y'$, получим уравнение первого порядка с отделяющимися переменными

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}=\varphi(x)\,dx$$

и, интегрируя, будем иметь

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt+C_1,$$

откуда

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt+C_1}{\sqrt{1-\left[\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt+C_1\right]^2}} \quad (28)$$

и окончательно

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}\psi(t)\,dt+C_2.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$x^2yy''=(y-xy')^2,$$

обе части которого однородные функции y, y', y''. Вводя подстановку

$$y = e^{\int u\,dx},$$

получим

$$x^2(u' + u^2) = (1 - xu)^2,$$

откуда для u получаем линейное уравнение

$$u' + \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2} = 0,$$

интегрирование которого дает

$$u = x^{-2}(C_1 + x) = C_1 x^{-2} + x^{-1}.$$

Подставляем в выражение y через u:

$$y = e^{-C_1 x^{-1} + \lg x + C}$$

или

$$y = C_2 x e^{C_1 x^{-1}},$$

причем $(-C_1)$ мы заменили на C_1 и положили $e^C = C_2$.

19. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Система n уравнений первого порядка с n неизвестными функциями в разрешенном относительно производных виде будет:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Решением системы (29) называется совокупность n функций $y_i = \psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ таких, что при подстановке их в уравнения системы (29) эти уравнения обращаются в тождества относительно x. Предполагается, естественно, что функции $\psi_i(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные. Как и в случае одного уравнения n-го порядка, имеет место теорема, совершенно аналогичная теореме А из [2]. *Начальные условия* имеют вид

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^{(0)},\ y_2|_{x=x_0} = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n|_{x=x_0} = y_n^{(0)}, \qquad (30)$$

и вместо значений аргументов $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ надо говорить о значениях аргументов $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Далее мы остановимся на общих понятиях, касающихся системы (29). Выше мы это делали для одного уравнения, и здесь мы не будем касаться подробностей. Поскольку мы можем менять в условиях (30) значения $y_i^{(0)}$, решение, получаемое согласно теореме А, содержит n произвольных постоянных. Произвольные постоянные могут

входить в решения не как начальные данные $y_i^{(0)}$, но и в общей форме

$$y_i = \psi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{31}$$

Придавая постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные численные значения, будем получать частные решения системы (29). Чтобы выделить из семейства *общего интеграла* (31) решение, удовлетворяющее начальным условиям (30), надо определить $C_1, C_2, \ldots, C_n$ из уравнений

$$y_i^{(0)} = \psi_i(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{32}$$

и подставить найденные значения в формулы (31). Если произвольные постоянные C_i суть $y_i^{(0)}$, и удовлетворены условия теоремы А, то можно показать, что уравнения (31) разрешимы относительно C_i, так что общий интеграл может быть записан в виде

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Для уравнений первого порядка мы имели одно такое равенство [9]. Здесь каждое из равенств (33) называется *первым интегралом*, или, просто, *интегралом системы* (29).

При решении системы мы, естественно, находим не сразу n интегралов системы, но нахождение каждого отдельного интеграла облегчает нам, как мы увидим, дальнейшее интегрирование системы. Укажем определение отдельного интеграла системы.

Соотношение

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C \tag{34}$$

называется *интегралом системы* (29), если функция $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ отлична от постоянной и при подстановке в нее любого решения $y_i = \psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (29) она обращается в постоянную. Говоря о «любом» решении системы (29), мы подразумеваем все решения, которые получаются согласно теореме А в какой-либо области изменения начальных данных. Значение этой постоянной различно при различном выборе начальных данных (произвольная постоянная).

Положим, что мы имеем несколько интегралов системы (29)

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{35}$$

где k — число интегралов. Любая из функций φ_i обращается в постоянную при подстановке вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ любого решения системы (29). Если мы возьмем произвольную функцию $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ от левых частей равенств (35), то и эта функция обратится в постоянную при подстановке вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ любого решения системы, т. е. мы имеем интеграл системы

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) = C. \tag{36}$$

Иначе говоря, любая функция левых частей интегралов системы есть также интеграл системы. Интеграл (36) есть очевидное следствие интегралов (35). Предыдущее рассуждение требует некоторых оговорок, а именно надо оговорить, что левые части всех равенств (35) обращаются в постоянную при подстановке в них решений $y_i = \psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получаемых, согласно теореме А, из некоторой одной и той же области изменения начальных данных.

При подсчете числа произвольных постоянных в решении (31) существенно, чтобы невозможно было свести их число к меньшему. Например, в формулах

$$y_1 = (C_1 + C_2)x + C_3, \quad y_2 = C_3x^2, \quad y_3 = x^2 + C_3x + C_1 + C_2$$

три произвольные постоянные можно свести к двум, полагая $C_1 + C_2 = C$. Критерий того, что этого сделать нельзя и что формулы (31) дают общий интеграл системы (29), заключается в том, что соответствующим подбором произвольных постоянных мы можем удовлетворить любым начальным данным из некоторой области их изменения, т. е. что система (32) разрешима относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ для некоторой области изменения величин $(x_0; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Мы считаем, естественно, при этом, что правые части системы (29) удовлетворяют условиям теоремы А.

Мы можем переписать систему (29) в виде пропорционального ряда

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \quad (37)$$

Умножая все знаменатели на один и тот же множитель, мы получим и в первом отношении знаменатель не единицу, а некоторую функцию от $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и обозначая для симметрии переменные буквами $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, перепишем систему (29) в виде:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \quad (38)$$

где X_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$—заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Запись системы (29) в виде (38) удобна в силу своей симметрии. При этом не фиксировано, какая именно из переменных x_i считается независимой переменной. Предположим, что в некоторой области изменения переменных x_i все функции X_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по всем независимым переменным. Положим, кроме того, что в некоторой точке M_0 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n+1}^{(0)})$ из этой области функция X_{n+1} отлична от нуля. При этом, в силу непрерывности, она будет отличной от нуля и в окрестности этой точки, и для системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dx_{n+1}} = \frac{X_i}{X_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

будет применима в окрестности M_0 теорема А. Особыми будут лишь те точки, в которых все X_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ обращаются в нуль.

Мы использовали выше при любом целом положительном $(n+1)$ геометрические термины «точка», «окрестность точки», «область». При $n=1$ и $n=2$ это геометрически наглядно. В общем случае эти понятия аналитически определяются аналогично тому, как это делается, например в трехмерном пространстве, при помощи прямолинейных прямоугольных координат. Мы вернемся к этому в дальнейшем. Интеграл системы (38) имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C. \qquad (34_1)$$

Положим, что мы имеем n интегралов

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (33_1)$$

Они называются *независимыми*, если эти равенства разрешимы относительно каких-либо n из переменных x_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$. Это решение дает нам n функций одной независимой переменной и n произвольных постоянных, т. е. формулы, аналогичные формулам (31), а в виде (33_1) эти формулы разрешены относительно произвольных постоянных, т. е. n независимых интегралов системы (38) дают общий интеграл системы. Все это относится, как всегда, к некоторой области изменения переменных.

Можно показать, что независимость интегралов (33_1) равносильна тому, что между левыми частями этих интегралов не существует никакого соотношения вида

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

тождественного относительно x_i. Предполагается, естественно, что все интегралы (33_1) определены в одной и той же области изменения переменных.

В предыдущем мы не дали никакого признака, по которому можно было бы судить, что интегралы (39_1) суть независимые интегралы. Рассмотрим случай $n=2$:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = C_1, \ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = C_2. \qquad (39)$$

Вспоминая теорему о неявных функциях [I, 159], можем утверждать, что для разрешимости уравнений (39) относительно x_2 и x_3 достаточно, чтобы выражение

$$\Delta_{x_2 x_3}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}$$

было отлично от нуля. Аналогичный результат будет иметь место относительно переменных x_3, x_1 и x_1, x_2. Предполагая φ_1 и φ_2 непрерывными с их производными первого порядка, можно доказать, что необходимое и достаточное условие независимости интегралов (39) сводится к тому, чтобы по крайней мере одно из выражений

$$\Delta_{x_2, x_3}(\varphi_1, \varphi_2), \ \Delta_{x_3, x_1}(\varphi_1, \varphi_2), \ \Delta_{x_1, x_2}(\varphi_1, \varphi_2)$$

было не равно тождественно нулю. В третьем томе мы вернемся к вопросу о независимости систем функций с любым числом переменных.

20. Примеры. 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{40}$$

Сокращая уравнение

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$$

на $\frac{1}{z}$, получим уравнение с отделенными переменными и, интегрируя, будем иметь

$$\lg x=\lg y-C, \quad \text{т. е. } \lg\frac{y}{x}=C,$$

что равносильно

$$\frac{y}{x}=C_1. \tag{41}$$

Напишем второе уравнение системы

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}$$

и, пользуясь уже найденным интегралом, заменим в нем $y=C_1x$. Сокращая на $\frac{1}{x}$, получим

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-(1+C_1^2)x}, \quad \text{т. е.} \quad (1+C_1^2)\,x\,dx+z\,dz=0.$$

Интегрируя, имеем

$$(1+C_1^2)\,x^2+z^2=C_2$$

или, заменяя $C_1=\frac{y}{x}$, получим второй интеграл системы

$$x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{42}$$

Итак, мы имеем два интеграла системы

$$\frac{y}{x}=C_1, \quad x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{43}$$

2. Система дифференциальных уравнений движения материальной точки массы m под влиянием заданной силы имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{44}$$

где X, Y, Z — проекции силы на координатные оси, зависят от времени, положения точки и ее скорости, т. е. от переменных t, x, y, z, x', y', z'.

Вводя новые неизвестные функции — производные x', y', z' от x, y и z по t, приведем систему (44) к системе шести уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z', \quad m\frac{dx'}{dt}=X, \quad m\frac{dy'}{dt}=Y, \quad m\frac{dz'}{dt}=Z, \tag{45}$$

Общее решение этой системы содержит шесть произвольных постоянных, для определения которых должны быть заданы положение точки и ее скорость в начальный момент времени.

Из равенств (44) вытекают следующие три равенства:

$$\left.\begin{aligned} m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=yZ-zY,\\ m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=zX-xZ,\\ m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=xY-yX,\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

которые, как нетрудно видеть, можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=yZ-zY,\\ \frac{d}{dt}m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=zX-xZ,\\ \frac{d}{dt}m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=xY-yX.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Положим, что сила центральна, т. е. что ее направление всегда проходит через некоторую неподвижную точку, называемую центром, которую мы принимаем за начало координат. Так как проекции вектора пропорциональны его направляющим косинусам, и в данном случае направление вектора проходит через начало координат и точку (x, y, z), то будем иметь

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z};$$

правые части равенства (47) обратятся в нуль, и мы получим три интеграла системы (46)

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C_1,\quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=C_2,\ m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C_3. \tag{48}$$

Они выражают, как известно из механики, постоянство секториальной скорости проекций движущейся точки на координатные плоскости.

Из равенств (48) вытекает

$$C_1x+C_2y+C_3z=0, \tag{49}$$

откуда видно, что траектория будет плоской кривой. Плоскость траектории определяется, очевидно, центром сил и вектором скорости в начальный момент времени.

Рассмотрим еще случай, когда X, Y, Z — частные производные некоторой функции U, зависящей от x, y, z. Функция U называется *потенциалом сил*, а $(-U)$ — *потенциальной энергией точки*

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{50}$$

Умножая уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z} \tag{51}$$

на dx/dt, dy/dt, dz/dt и складывая получим

$$m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{dU}{dt}, \tag{52}$$

откуда получаем интеграл

$$T-U=C, \tag{53}$$

где

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}mv^2 \tag{54}$$

есть *кинетическая энергия точки.*

Равенство (53) выражает постоянство суммы кинетической энергии T и потенциальной $(-U)$ во все время движения.

3. Представим себе систему n точек, связанных между собою такими связями, что координаты любой точки системы определяются как функции независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$ и времени t:

$$\begin{aligned} x_i&=\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ y_i&=\psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ z_i&=\omega_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{55}$$

Положим, что силы, действующие на точки системы, имеют потенциал U, зависящий только от координат точек, так что проекции на координатные оси X_i, Y_i, Z_i силы, действующей на i-ю точку, суть частные производные U по x_i, y_i, z_i. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — массы наших точек. При помощи равенств (55) мы можем выразить кинетическую энергию

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] \tag{56}$$

через q_i и производные по времени q'_i, а U через q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, и движение системы будет определяться, как известно из механики, следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, k). \tag{57}$$

Функция T есть, очевидно, многочлен второй степени относительно производных $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ от параметров по времени, и уравнения (57) представляют собою k уравнений второго порядка, что равносильно $2k$ уравнениям первого порядка; интегрирование уравнений (57) даст выражения q_k в виде функций от t и $2k$ произвольных постоянных.

Положим, что уравнения (55) не содержат t. Тогда T и U также не будут содержать t. Умножим уравнения (57) соответственно на $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ и сложим

$$\sum_{s=1}^{k}q'_s\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)-\sum_{s=1}^{k}q'_s\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{dU}{dt}. \tag{58}$$

Примем во внимание очевидное равенство

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

В рассматриваемом случае T — однородный многочлен q'_s и

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} = 2T, \tag{59}$$

в силу теоремы Эйлера об однородных функциях [I, 154]. Отсюда

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

и формула (58) дает

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

откуда получается интеграл системы (57) (*интеграл сохранения энергии*)

$$T - U = C. \tag{60}$$

4. Наличие интеграла дифференциальных уравнений движения системы позволяет в некоторых случаях решить вопрос об устойчивости колебаний системы около положения равновесия. Формулируем вопрос математически, ограничиваясь для краткости рассуждений случаем трех неизвестных функций x, y, z, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений [1])

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z, \tag{61}$$

где X, Y, Z — известные функции от x, y, z и t, обращающиеся в нуль при

$$x = y = z = 0. \tag{62}$$

Система (61) имеет при этом очевидное решение (62), которому соответствует положение равновесия. Это положение равновесия (или просто решение (62)) называется *устойчивым*, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что для всякого решения системы (61), удовлетворяющего начальным условиям

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad y|_{t=0} = y_0, \qquad z|_{t=0} = z_0,$$

будет при всех $t > 0$

$$|x|, \ |y| \ \text{и} \ |z| < \varepsilon, \tag{63}$$

если только

$$|x_0|, \ |y_0| \ \text{и} \ |z_0| < \eta. \tag{64}$$

Положим, что система (61) имеет интеграл

$$\varphi(x, y, z) = C, \tag{65}$$

---

[1]) В случае движения одной материальной точки имеется шесть неизвестных функций.

не содержащий t и такой, что *функция* $\varphi(x, y, z)$ *имеет при* $x=y=z=0$ *максимум или минимум.* Докажем, что при этом положение равновесия будет устойчивым. Изменяя, если надо, знак у φ, мы можем считать, что φ имеет минимум; прибавляя к φ постоянную, можем считать, что этот минимум равен нулю.

Итак, функция φ обращается в нуль в точке $x=y=z=0$ и положительна во всех точках (x, y, z), близких к $(0, 0, 0)$, но отличных от нее. Построим около начала координат куб δ_ε с центром в начале и длиной сторон 2ε. На поверхности этого куба непрерывная функция φ положительна и, следовательно, достигает своего наименьшего положительного значения m, так что на всей этой поверхности

$$\varphi \geqslant m > 0. \tag{66}$$

Построим теперь около начала координат концентрический куб δ_η с длиной сторон 2η так, чтобы внутри этого куба имело место неравенство

$$\varphi < m, \tag{67}$$

что возможно, ибо $\varphi(0, 0, 0)=0$. Положим, что в начальный момент точка (x, y, z) находится внутри куба δ_η, т. е. выполнено условие (64). Неравенство (67) будет выполняться не только в начальный момент, но и во все время движения. Действительно, φ, в силу (65), сохраняет постоянное значение C при движении. Но раз это так, то во все время движения точка (x, y, z) не сможет пройти через поверхность куба δ_ε, ибо на этой поверхности должно иметь место неравенство (66), которое противоречит (67); итак, условие (63) выполняется при всех $t>0$, что и требовалось доказать.

Функции x, y, z могут иметь любое геометрическое или механическое значение, и лишь для наглядности доказательства мы рассматривали их как координаты точки. Положим, например, что в уравнениях (57) T и U не содержат времени t, так что имеет место интеграл (60). Пусть при значениях $q_s=0$ выполнены необходимые условия экстремума U:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0.$$

Уравнения (57) имеют при этом очевидное решение:

$$q_s = q'_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{68}$$

которому соответствует положение равновесия системы. Если, кроме того, окажется, что при значениях $q_s=0$ потенциальная энергия $(-U)$ имеет минимум, то можно утверждать, что разность $(T-U)$ при значениях (68) также имеет минимум, ибо при этом T, которое не может быть отрицательным, обратится в нуль, т. е. тоже имеет минимум. Таким образом, мы видим, что в случае минимума потенциальной энергии соответствующее положение равновесия будет устойчивым в отношении величин q_s и q'_s (теорема Лагранжа — Дирихле).

21. Системы уравнений и уравнения высших порядков. Выясним связь между системой дифференциальных уравнений первого порядка и одним уравнением высшего порядка. Если мы имеем, например, одно дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = f(x, y, y', y''),$$

то, полагая $y=y_1$, $y'=y_2$, $y''=y_3$, мы можем заменить это уравнение третьего порядка системой трех уравнений первого порядка

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2, \quad \frac{dy_2}{dx}=y_3, \quad \frac{dy_3}{dx}=f(x, y_1, y_2, y_3).$$

Нетрудно видеть, что уравнение третьего порядка и последняя система равносильны в следующем смысле: если $y(x)$ — решение уравнения третьего порядка, то $y_1(x)=y(x)$, $y_2(x)=y'(x)$ и $y_3(x)=y''(x)$ есть решение системы, а если $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ есть решение системы, то $y(x)=y_1(x)$ есть решение уравнения третьего порядка.

Мы производили уже подобную замену в [16]. Совершенно так же, имея, например, систему двух уравнений второго порядка

$$y''=f_1(x, y, y', z, z'), \quad z''=f_2(x, y, y', z, z'),$$

где y и z — искомые функции от x, мы можем заменить ее системою четырех уравнений первого порядка, вводя четыре искомые функции $y=y_1$, $y'=y_2$, $z=y_3$, $z'=y_4$. Прежняя система перепишется в виде

$$y_1'=y_2, \quad y_2'=f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$
$$y_3'=y_4, \quad y_4'=f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Покажем, что, наоборот, интегрирование системы, можно, вообще говоря (не всегда), заменить интегрированием одного уравнения высшего порядка. Рассмотрим, для примера, систему трех уравнений первого порядка, решенную относительно производных

$$y_1'=f_1(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_2'=f_2(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_3'=f_3(x, y_1, y_2, y_3). \tag{69}$$

Положим, что первое из уравнений содержит y_2. Решая относительно него, получим

$$y_2=\omega_1(x, y_1, y_1', y_3). \tag{70}$$

Подставляя в остальные два уравнения системы, будем иметь уравнения вида

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_3}y_3'+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1'}y_1''=\psi_2(x, y_1, y_1', y_3),$$
$$y_3'=\psi_3(x, y_1, y_1', y_3).$$

Подставляя в первое уравнение выражение y_3' из второго и решая первое уравнение относительно y_1'', получим систему двух уравнений с двумя искомыми функциями y_1 и y_3 вида

$$y_1''=\varphi(x, y_1, y_1', y_3), \quad y_3'=\psi(x, y_1, y_1', y_3). \tag{71}$$

Положим, что первое из уравнений содержит y_3. Решая относительно него

$$y_3=\omega_3(x, y_1, y_1', y_1'') \tag{72}$$

и подставляя во второе из уравнений (71), получим уравнение третьего порядка относительно y_1, которое можем написать в виде

$$y_1''' = F(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1''). \tag{73}$$

Положим, что мы сумели проинтегрировать это уравнение

$$y_1 = \Phi(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3).$$

Подставляя в уравнение (72), получим y_3, и подставляя затем в (70), получим y_2 уже без всяких интегрирований. Если первое из уравнений (71) не содержит y_3, то мы имеем уже одно уравнение второго порядка для y_1. Его общий интеграл будет содержать две произвольные постоянные. Подставляя этот общий интеграл во второе из уравнений (71), получим уравнение первого порядка для y_3. Его интегрирование введет третью произвольную постоянную. Наконец, формула (70) определит y_2 уже без всяких интегрирований.

22. Линейные уравнения с частными производными. До сих пор мы рассматривали дифференциальные уравнения, содержащие производные от функций по одной независимой переменной. Такие уравнения, как мы уже упоминали, называются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Теперь мы рассмотрим некоторый класс *уравнений с частными производными,* поскольку эти уравнения непосредственно связаны с теорией систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вернемся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений (38)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}. \tag{74}$$

Равенство

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}) = C$$

или функция $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1})$, не сводящаяся тождественно к постоянной, называется *интегралом системы* (74), если при подстановке в нее какого-либо решения системы, которое имеется согласно теореме существования и единственности, получается постоянная.

Пусть, например, x_1 — независимая переменная, а $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ — функции от x_1, являющиеся решением системы (74). Подставляя эти функции в выражение $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1})$, мы должны получить постоянную, т. е. в результате подстановки независимая переменная x_1 должна исчезнуть и, следовательно, полная производная по x_1 должна равняться нулю [I, 69]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} = 0. \tag{75}$$

Но раз мы подставляли решение системы (74), то дифференциалы dx_s должны быть пропорциональны величинам X_s и, заменяя в формуле (75) dx_s пропорциональными величинами X_s, получим для φ следующее уравнение:

$$X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}} = 0. \tag{76}$$

Функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ должна удовлетворять этому уравнению независимо от того, какое именно решение системы (74) мы подставляли в эту функцию. Но в силу произвольности начальных условий в теореме существования и единственности, значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ могут быть какие угодно, если мы берем все решения системы (74), т. е. функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ должна удовлетворять уравнению (76) тождественно относительно $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Мы получаем таким образом следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ *есть интеграл системы* (74), *то функция* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *должна удовлетворять уравнению с частными производными* (76).

Нетрудно доказать обратное предложение.

Теорема 2. *Если* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *есть какое-нибудь решение уравнения* (76), *то* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ *есть интеграл системы* (74).

Действительно, подставим в функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ какое-нибудь решение системы (74) и возьмем полный дифференциал

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Поскольку мы подставили решение системы, мы можем, в силу (74), заменить dx_s пропорциональными величинами X_s, т. е. $dx_s = \lambda X_s$, где λ — некоторый коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \lambda \left(X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}} \right).$$

Но поскольку φ, по условию теоремы, удовлетворяет уравнению (76) тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, мы имеем $d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$. Выражение дифференциала первого порядка не зависит от того, являются ли переменные независимыми или нет [1, 153]. В нашем случае, при подстановке решения системы, φ будет функцией одной независимой переменной, например x_1, и оказалось, что дифференциал этой функции φ равен нулю, т. е. производная по x_1 (после подстановки) тождественно равна нулю, иначе говоря, после подстановки φ не зависит от x_1, т. е. является постоянной. Это и показывает, что $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ есть интеграл системы, что и требовалось доказать.

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятия интеграла системы (74) и решения уравнения в частных производ-

ных (76). Если

$$\varphi_1 = C_1; \quad \varphi_2 = C_2, \ \ldots, \ \varphi_k = C_k$$

суть k интегралов системы, то, как мы видели, произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ дает также интеграл системы, и мы можем, следовательно, сказать, *что произвольная функция каких-либо решений уравнения* (76) *есть также решение этого уравнения.* Если

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_1, \ \ldots, \ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_n \quad (77)$$

есть n независимых интегралов системы (74), то произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ есть решение уравнения (76).

Это можно и непосредственно проверить, если подставить $\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ в уравнение (76) и принять во внимание, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяют этому уравнению. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что при выполнении некоторых условий этой формулой выражается любое решение уравнения (76). Отсюда получается следующее правило интегрирования этого уравнения: *чтобы найти общее решение уравнения с частными производными* (76), *надо составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений* (74) *и найти n независимых интегралов* (77) *этой системы. Общее решение уравнения* (78) *будет*

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

где F — произвольная функция своих n аргументов.

Линейное относительно частных производных уравнение (76) обладает двумя особенностями: его коэффициенты X_i не содержат искомой функции φ и его свободный член равен нулю. В общем случае линейного уравнения будем иметь уравнение вида

$$Y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + Y_{n+1} = 0, \quad (78)$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ содержат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и φ. Будем искать семейство решений уравнения (78) в виде неявной функции

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi) = C, \quad (79_1)$$

где C — произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial \varphi}};$$

подставляя в (78), получим для ω уравнение

$$Y_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + Y_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0, \quad (79_2)$$

обладающее указанными выше двумя особенностями. Заметим, что ввиду произвольности C в (79_1) переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi$ могут иметь любые значения, и, как и выше, отсюда вытекает, что уравнение (79_2) должно выполняться тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi$. Его решение приводится к интегрированию соответствующей ему системы обыкновенных уравнений. Если ω найдено, то (79_1) определит нам φ. Можно показать, что при некоторых общих предположениях относительно Y_k таким путем можно получать все решения уравнения (78).

Обратим внимание на то, что общее решение уравнения с частными производными содержит произвольную функцию, тогда как в общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений входят лишь произвольные постоянные.

В томе IV мы более подробно изучим линейные уравнения с частными производными и установим соответствующую теорему существования и единственности.

23. Геометрическая интерпретация. Дадим геометрическую интерпретацию изложенной в [22] теории для случая трех переменных. Положим, что мы имеем в трехмерном пространстве поле направлений, т. е. в каждой точке пространства задано определенное направление. Введем какие-нибудь прямолинейные прямоугольные координатные оси. При этом всякое направление будет определяться тремя числами, пропорциональными направляющим косинусам этого направления, т. е. косинусам углов, образованных этим направлением с осями координат. Мы имеем в разных точках, вообще говоря, различные направления, и все поле направлений будет определяться тремя функциями

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z), \tag{80}$$

так что направляющие косинусы направления, заданного в точке (x, y, z), пропорциональны величинам (80).

Как и для уравнения первого порядка, поставим себе задачу найти в пространстве такие кривые, в каждой точке которых касательная имеет то самое направление, которое в этой точке задано данным полем направлений. Но, как известно [I, 160], направляющие косинусы касательной пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz, а при совпадении двух направлений величины, пропорциональные их направляющим косинусам, должны быть пропорциональны между собою, т. е. для определения искомых линий в пространстве мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)}. \tag{81}$$

Интегрирование этой системы сводится к нахождению ее двух независимых интегралов

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \qquad \varphi_2(x, y, z) = C_2, \tag{82}$$

т. е. таких, что уравнения (82) разрешимы относительно каких-либо двух переменных. Эти два уравнения определяют некоторую линию пространства [I, 160]; придавая C_1 и C_2 различные численные значения, получим семейство интегральных линий системы (81). Начальные условия сводятся к требованию, чтобы искомая линия проходила через заданную точку (x_0, y_0, z_0). По этим начальным условиям определяются произвольные постоянные C_1 и C_2.

Перейдем теперь к геометрической интерпретации уравнения с частными производными. Считаем опять, что функции (80), как и выше, определяют некоторое поле направлений. Требуется найти такие поверхности, чтобы в каждой точке поверхности направление, определяемое в этой точке полем направлений, лежало в касательной плоскости к поверхности в этой точке. Пусть уравнение некоторого семейства искомых поверхностей будет

$$\varphi(x, y, z) = C.$$

Направляющие косинусы нормали к этой поверхности, как известно [I, 160], пропорциональны $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, и направление нормали должно быть перпендикулярно к направлению, определяемому величинами (80), так как последнее должно находиться в касательной плоскости. Используя обычное условие перпендикулярности двух направлений [I, 160], получаем для определения φ линейное уравнение с частными производными

$$u(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \qquad (83)$$

Соответствующая этому уравнению система обыкновенных дифференциальных уравнений есть система (81), так что общее решение уравнения (83) имеет вид

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2),$$

а общее уравнение искомых поверхностей будет

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad (84)$$

где F — произвольная функция своих двух аргументов. Произвольную постоянную C можно не писать ввиду произвольности F, а φ_1 и φ_2 дают два независимых интеграла (82) системы (81). Если выберем определенным образом функцию F, то поверхность (84) будет, очевидно, геометрическим местом тех интегральных линий системы (81), у которых значения постоянных в равенствах (82) связаны соотношением

$$F(C_1, C_2) = 0. \qquad (85)$$

Решение уравнения (83) становится, вообще говоря, определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через за-

данную в пространстве кривую (L). Это требование является начальным условием для уравнения с частными производными (83). Искомая поверхность будет, очевидно, образована теми интегральными линиями системы (81), которые выходят из точек кривой (L), т. е. для которых координаты точек кривой (L) определяют начальные условия. В силу теоремы существования и единственности, для системы (81) мы получаем таким образом определенную поверхность. Исключительным представляется тот случай, когда сама данная кривая (L) является интегральной кривой системы (81). В этом случае предыдущее построение даст нам не поверхность, а саму кривую (L).

Можно показать, что в этом случае через линию (L) проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей $\varphi = 0$, где φ удовлетворяет уравнению (83). Подробно мы будем это излагать в четвертом томе.

Положим, что уравнение линии (L) задано в виде совокупности двух уравнений

$$\psi_1(x, y, z) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z) = 0. \tag{86}$$

Исключая из четырех уравнений (82) и (86) переменные x, y, z, получим соотношение между C_1 и C_2, которое, в силу (85), и определит вид функции F, которую надо взять, чтобы уравнение (84) давало искомую поверхность, проходящую через линию (86).

24. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение с частными производными

$$xz\frac{\partial \varphi}{\partial x} + yz\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (x^2 + y^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{87}$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}. \tag{88}$$

Выше [20] мы нашли ее два независимых интеграла

$$\frac{y}{x} = C_1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{89}$$

Первое из уравнений дает семейство плоскостей, проходящих через ось OZ, а второе — сферы с центром в начале координат. Интегральными линиями системы (88) будет семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (87) будет

$$\varphi = F\left(\frac{y}{x},\ x^2 + y^2 + z^2\right), \tag{90}$$

где F — произвольная функция своих двух аргументов. Найдем вид функции F так, чтобы поверхность

$$F\left(\frac{y}{x},\ x^2 + y^2 + z^2\right) = 0 \tag{91}$$

проходила через прямую

$$x = 1, \qquad y = z. \tag{92}$$

Исключаем x, y и z из уравнений (89) и (92). Первое из уравнений (89) и уравнения (92) дают

$$x=1, \quad y=C_1, \quad z=C_1;$$

подставляя во второе из уравнений (89), получаем соотношение между C_1 и C_2:

$$1+2C_1^2-C_2=0, \quad \text{т. е.} \quad F(C_1, C_2)=1+2C_1^2-C_2.$$

При таком виде функции F уравнение (91) дает уравнение искомой поверхности

$$1+2\frac{y^2}{x^2}-(x^2+y^2+z^2)=0 \quad \text{или} \quad x^2+2y^2-x^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

2. Положим, что поле направлений, определяемое системой дифференциальных уравнений, таково, что во всех точках пространства направление одно и то же. Пусть (a, b, c) — числа, пропорциональные направляющим косинусам этого фиксированного направления. Система дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c} \quad \text{или} \quad c\,dx-a\,dz=0, \quad c\,dy-b\,dz=0,$$

что дает сразу два интеграла

$$cx-az=C_1, \quad cy-bz=C_2.$$

Интегральные линии суть, очевидно, параллельные прямые линии, имеющие указанное выше фиксированное направление. Соответствующее уравнение с частными производными

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \tag{93}$$

определяет поверхности $\varphi(x, y, z)=0$, являющиеся геометрическим местом некоторых из указанных выше прямых линий, т. е. уравнение (93) есть уравнение цилиндрических поверхностей. Его общее решение имеет вид

$$\varphi=F(cx-az, cy-bz),$$

где F — произвольная функция, и общее уравнение цилиндрических поверхностей, образующие которых имеют указанное выше направление, будет

$$F(cx-az, cy-bz)=0.$$

3. Положим, что поле направлений таково, что в каждой точке $M(x, y, z)$ направление, даваемое полем, совпадает с направлением вектора, идущего из фиксированной точки $A(a, b, c)$ в точку $M(x, y, z)$. Проекции этого вектора на координатные оси будут

$$x-a, \quad y-b, \quad z-c$$

и, следовательно, эти же три величины пропорциональны направляющим косинусам заданного направления в точке M. Соответствующая система дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}=\frac{dz}{z-c},$$

и мы имеем два очевидных интеграла

$$\frac{x-a}{z-c}=C_1, \quad \frac{y-b}{z-c}=C_2.$$

Геометрически ясно, что семейством интегральных линий будет семейство прямых, проходящих через точку $A(a, b, c)$. Соответствующее уравнение с частными производными

$$(x-a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

будет определять конические поверхности, имеющие вершину в точке A, и общее уравнение таких поверхностей будет

$$F\left(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0,$$

где F — произвольная функция своих двух аргументов.

Отметим, что через заданную в пространстве линию (L) мы можем провести, вообще говоря, только одну коническую поверхность, которая будет образована прямыми, идущими из точки A в точки линии (L). Но если линия (L) есть линия, принадлежащая семейству интегральных линий системы, т. е. прямая, проходящая через точку A, то можно провести бесчисленное множество конических поверхностей, содержащих такую прямую (L).

4. Рассмотрим еще систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}. \tag{94}$$

Приравнивая все три отношения дифференциалу dt некоторой новой переменной t, можем написать

$$dx=(cy-bz)\,dt,\quad dy=(az-cx)\,dt,\quad dz=(bx-ay)\,dt. \tag{95}$$

Отсюда нетрудно составить два уравнения, которые непосредственно проинтегрируются. Для составления первого умножим уравнения (95) почленно на a, b, c и сложим, а для составления второго уравнения умножим уравнения (95) на x, y, z и сложим. Таким образом, получаются два уравнения

$$adx+bdy+cdz=0,\quad xdx+ydy+zdz=0,$$

интегрирование которых и дает два интеграла системы

$$ax+by+cz=C_1,\quad x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{96}$$

Первый из интегралов дает семейство параллельных плоскостей, направляющие косинусы нормали к которым пропорциональны числам (a, b, c). Второй из интегралов дает семейство сфер с центром в начале. В пересечении этих плоскостей и сфер получится семейство интегральных линий системы (94). Это будет, очевидно, семейство окружностей, расположенных на упомянутых выше плоскостях и имеющих центр на прямой

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \tag{97}$$

проходящей через начало координат и перпендикулярной ко всем упомянутым плоскостям.

Нетрудно видеть, что соответствующее уравнение с частными производными

$$(cy-bz)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(bx-ay)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

определяет поверхности вращения, для которых прямая (97) есть ось вращения, и общее уравнение таких поверхностей будет

$$F(ax+by+cz,\ x^2+y^2+z^2)=0,$$

где F — произвольная функция своих двух аргументов. Заметим, что вид знаменателей в системе (97) можно было бы определить из геометрических соображений, задавая соответственным образом поле направлений, как это мы делали в предыдущих примерах.

5. К линейному уравнению с частными производными приводит задача об ортогональных траекториях в пространстве. Положим, что задано семейство поверхностей

$$\omega(x, y, z) = C, \tag{98}$$

зависящее от параметра C, так что через всякую точку пространства проходит, вообще говоря, одна и только одна поверхность семейства. Требуется найти поверхность

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \tag{99}$$

которая пересекала бы все поверхности (98) под прямым углом. Условие перпендикулярности нормалей поверхностей (98) и (99) даст нам линейное уравнение с частными производными для искомой функции φ:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{\frac{\partial\omega}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\omega}{\partial z}} \tag{100}$$

определяет кривые, у которых в каждой их точке касательная есть нормаль к поверхности (98), проходящей через эту точку. Если

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2$$

— два независимых интеграла системы (100), то уравнение искомых поверхностей будет иметь вид

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

25. Линейные однородные уравнения второго порядка. Теория линейных дифференциальных уравнений является наиболее простой и разработанной частью теории дифференциальных уравнений, и именно линейные уравнения наиболее часто встречаются в приложениях. В [6] мы решали линейные уравнения первого порядка. В настоящей главе мы будем рассматривать линейные уравнения любого порядка и начнем с уравнений второго порядка.

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$P(y) = y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

где через $P(y)$ мы для краткости обозначили левую часть. Из линейности выражения $P(y)$ относительно функции y и ее производных вытекает, что при произвольных постоянных C, C_1 и C_2:

$$P(Cy) = CP(y), \qquad P(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1P(y_1) + C_2P(y_2).$$

Если $y = y_1$ есть решение уравнения, т. е. $P(y_1) = 0$, то, очевидно, $P(Cy_1) = 0$, т. е. и $y = Cy_1$ есть также решение уравнения. Точно так же, если y_1 и y_2 суть решения, то

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2}$$

есть также решение при произвольных постоянных C_1 и C_2, т. е. *решения линейного однородного уравнения* (1) *можно умножать на произвольные постоянные и складывать, после чего опять получается решение.* Очевидно, это же свойство имеет место и для линейного однородного уравнения любого порядка. Теорема существования и единственности для уравнения (1) формулируется особенно

просто, как это мы покажем в конце этой главы: *если $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции в некотором конечном замкнутом промежутке I ($a \leqslant x \leqslant b$) и x_0 — любое значение из этого промежутка, то имеется одно и только одно решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y_0', \tag{3}$$

где y_0 и y_0' — любые заданные числа, и это решение существует на всем промежутке I.

Если фиксировать x_0 и придавать y_0 и y_0' всевозможные численные значения, то указанные в теореме решения исчерпывают все решения уравнения (1). Во всех этих решениях функции $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ непрерывны вплоть до концов промежутка $a \leqslant x \leqslant b$ и предельные значения $y'(x)$ и $y''(x)$ при $x = a$ суть производные $y'(a+0)$, $y''(a+0)$ — справа, а при $x = b$ производные слева $y'(b-0)$, $y''(b-0)$. В дальнейшем мы в аргументах не будем писать ± 0 [ср. I]. Из формулированной выше теоремы непосредственно следует совершенно аналогичное утверждение и для открытого промежутка $a < x < b$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Мы будем всегда рассматривать решения уравнения (1) на промежутке непрерывности коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

Уравнение (1) имеет очевидное решение $y \equiv 0$ (нулевое решение). Ему соответствует $y_0 = y_0' = 0$. В дальнейшем, говоря о решениях уравнения (1), мы будем подразумевать, что эти решения отличны от нулевого решения. Введем одно новое понятие, которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть y_1 и y_2 — два решения уравнения (1). Рассмотрим следующее выражение, составленное из них:

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \tag{4}$$

Оно называется *определителем Вронского* решений y_1 и y_2. Для него имеет место следующая замечательная формула:

$$\Delta(y_1, y_2) = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}, \tag{5}$$

где Δ_0 — постоянная, равная, очевидно, значению $\Delta(y_1, y_2)$ при $x = x_0$. Для доказательства вычисляем производную

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Принимая во внимание, что y_1 и y_2 суть решения уравнения (1), можем написать

$$y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 = 0, \qquad y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0.$$

Умножая первое уравнение на $(-y_2)$, второе на y_1 и складывая почленно, получим

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p(x)(y_1 y_2' - y_2 y')) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx} + p(x)\Delta(y_1, y_2) = 0.$$

Это есть линейное однородное уравнение относительно $\Delta(y_1, y_2)$ и, применяя формулу (29) из [6], получаем формулу (5). Из этой формулы непосредственно следует, что *определитель* $\Delta(y_1, y_2)$ *или тождественно на промежутке* I *равен нулю, если постоянная* Δ_0 *равна нулю, или не равен нулю ни при одном* x *из* I, так как показательная функция в нуль не обращается. Напомним, что $p(x)$ считается непрерывной на I функцией.

Два решения y_1 и y_2 уравнения (1), отличные от нулевого, называются *линейно независимыми,* если не существует тождественного относительно x на промежутке I соотношения

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \tag{6}$$

с постоянными коэффициентами α_1 и α_2, отличными от нуля. Если такое соотношение имеется, то решения y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми.* Отметим, что если один из коэффициентов, например α_1, равен нулю и $\alpha_2 \neq 0$, то из (3) следует $y_2 \equiv 0$, а это противоречит тому, что оба решения отличны от нулевого. Отсюда следует естественность требования того, что оба коэффициента отличны от нуля. Линейная зависимость решений y_1 и y_2, выражаемая тождеством (6), равносильна, очевидно, тому, что одно из решений отличается от другого лишь постоянным множителем $y_2 = Cy_1$, где постоянная C отлична от нуля. Продифференцируем это соотношение: $y_2' = Cy_1'$; из двух соотношений

$$y_2(x) = Cy_1(x), \qquad y_2'(x) = Cy_1'(x)$$

непосредственно следует, что *определитель Вронского* $\Delta(y_1, y_2)$ *двух линейно зависимых решений тождественно равен нулю.* Положим теперь наоборот, что определитель Вронского $\Delta(y_1, y_2)$ — тождественно равен нулю, и покажем, что при этом решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно зависимы. Фиксируем такое значение $x = x_0$, при котором $y_1(x_0) \neq 0$, и напишем два уравнения, содержащие постоянную C, обозначая через y_{10}, y_{20}, y_{10}', y_{20}' значения y_1, y_2 и их производных при $x = x_0$:

$$y_{20} = Cy_{10}, \qquad y_{20}' = Cy_{10}'.$$

Из первого уравнения $C = \frac{y_{20}}{y_{10}}$ и, подставляя это во второе уравнение, убедимся, что оно также удовлетворено в силу того, что $\Delta(y_1, y_2)$ равно нулю тождественно, и в частности при $x = x_0$. Таким образом, решение $y(x) = y_2(x) - Cy_1(x)$ уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям (3) при $y_0 = 0$ и $y_0' = 0$, т. е. $y(x)$ есть нулевое решение, откуда и следует, что $y_2(x) - Cy_1(x) \equiv 0$ или $y_2(x) = Cy_1(x)$.

Мы приходим, таким образом, к следующему заключению: *равенство нулю определителя Вронского* $\Delta(y_1, y_2)$ *является необходимым и достаточным условием линейной зависимости решений* y_1 *и* y_2, *т. е. два решения* y_1 *и* y_2 *уравнения* (1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского отличен от нуля.*

Отметим еще следующую очевидную формулу для производной от частного двух решений:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{\Delta(y_1, y_2)}{y_1^2} = \Delta_0 \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}}{y_1^2}. \tag{7}$$

Она, очевидно, теряет смысл в тех точках, где y_1 обращается в нуль.

Покажем теперь, что если y_1 и y_2 — линейно независимых решения уравнения (1), то при надлежащем выборе постоянных C_1 и C_2 формула (2) дает нам решение уравнения (1), удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y_0'. \tag{8}$$

Опять через y_{10}, y_{20}, y_{10}', y_{20}' обозначим значения y_1, y_2 и их первых производных при $x = x_0$. Чтобы удовлетворить начальным условиям (8), надо определить C_1 и C_2 в формуле (2) из системы уравнений

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, \qquad C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0'.$$

Из линейной независимости y_1 и y_2 вытекает, что

$$\Delta_0 = y_{10} y_{20}' - y_{20} y_{10}' \neq 0,$$

и следовательно, из написанной системы мы получим определенные значения C_1 и C_2, что доказывает наше утверждение.

Но в силу теоремы существования и единственности [2] всякое решение уравнения (1) вполне определяется своими начальными условиями, и мы можем поэтому высказать следующее предложение: *если* y_1 *и* y_2 *— два линейно независимых решения уравнения* (1), *то формула* (2) *дает все решения этого уравнения.*

Таким образом, задача интегрирования (1) приводится к нахождению его двух линейно независимых решений. Пусть y_1 — одно из решений этого уравнения и y_2 — какое-либо его решение. Интегрируя соотношение (7), получим

$$\frac{y_2}{y_1} = \Delta_0 \int e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2} \quad \text{или} \quad y_2 = \Delta_0 y_1 \int e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2}, \tag{9}$$

т. е. если известно одно частное решение уравнения (1), то второе его решение может быть получено по формуле (9), где Δ_0 — постоянная, которую можно положить и равной единице.

Надо сказать, что найти это одно решение в конечном виде или даже при помощи квадратур в общем случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ — функции от x, оказывается невозможным. Для некоторых частных случаев и, между прочим, в том случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ суть постоянные, а не функции от x, — решения, как мы увидим, получаются в конечном виде.

В дальнейшем мы укажем также один способ построения решений, часто применяемый в приложениях, а именно построение решения в виде бесконечного ряда.

26. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. *Линейным неоднородным уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$u'' + p(x)\,u' + q(x)\,u = f(x). \tag{10}$$

Если $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны в некотором промежутке $a < x < b$, то мы имеем, как будет дальше доказано, совершенно такую же теорему существования и единственности, что и для однородного уравнения (1). В дальнейшем мы будем рассматривать решения уравнения (10) в промежутке непрерывности $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Пусть $u = u_1$ есть частное решение этого уравнения, так что

$$u_1'' + p(x)\,u_1' + q(x)\,u_1 = f(x). \tag{11}$$

Введем вместо u новую функцию y:

$$u = y + u_1. \tag{12}$$

Подстановка в уравнение (10) дает

$$[y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y] + [u_1'' + p(x)\,u_1' + q(x)\,u_1] = f(x)$$

или, в силу (11),

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{13}$$

Это последнее уравнение называется *однородным уравнением, соответствующим уравнению* (10). Если y_1 и y_2 — его два линейно независимых решения, то, согласно формуле (12) и предложению предыдущего номера, формула

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, будет давать все решения уравнения (10). Свойство это можно формулировать так: *общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.*

Приведенное выше доказательство годится, очевидно, и для линейных неоднородных уравнений любого порядка, так что и для них имеет место высказанное свойство.

Зная два линейно независимых решения однородного уравнения (13), можно, как мы сейчас увидим, найти и частное решение уравнения (10), а следовательно, и его общее решение. Мы применим при этом способ, который называется *способом изменения произвольных постоянных Лагранжа* [6].

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения (13). Его общее решение выражается, как известно, по формуле (2). Будем искать решение уравнения (10) в том же виде, считая только C_1 и C_2 не постоянными, а искомыми функциями от x:

$$u = v_1(x)\,y_1 + v_2(x)\,y_2. \tag{14}$$

Имея не одну, а две искомые функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, мы можем подчинить их, кроме уравнения (10), еще одному условию. Поставим следующее условие:

$$v_1'(x)\,y_1 + v_2'(x)\,y_2 = 0. \tag{15}$$

Дифференцируя выражение (14) и пользуясь условием (15), будем иметь

$$\begin{array}{r|l} q(x)\cdot & u = v_1(x)\,y_1 + v_2(x)\,y_2, \\ p(x)\cdot & u' = v_1(x)\,y_1' + v_2(x)\,y_2', \\ 1\cdot & u'' = v_1(x)\,y_1'' + v_2(x)\,y_2'' + v_1'(x)\,y_1' + v_2'(x)\,y_2'. \end{array}$$

Подставив в левую часть уравнения (10), получим

$$v_1(x)[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + v_2(x)[y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2] + \\ + v_1'(x)\,y_1' + v_2'(x)\,y_2' = f(x).$$

Принимая во внимание, что y_1 и y_2 суть решения однородного уравнения (13), и вспоминая условие (15), будем иметь алгебраическую систему уравнений первой степени

$$v_1'(x)\,y_1 + v_2'(x)\,y_2 = 0, \quad v_1'(x)\,y_1' + v_2'(x)\,y_2' = f(x) \tag{16}$$

для определения $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$.

Ввиду линейной независимости решений y_1 и y_2:

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0,$$

а потому система (16) дает вполне определенные выражения для $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$. Выполняя квадратуры, найдем $v_1(x)$ и $v_2(x)$, и подставляя в (14), получим решение уравнения (10).

27. Линейные уравнения высших порядков. Линейные уравнения высших порядков обладают многими свойствами уравнения второго порядка. Мы их формулируем, не останавливаясь на доказательствах.

Линейным однородным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0. \qquad (17)$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — его решения, то и сумма

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$$

также будет решением при произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Это доказывается совершенно так же, как и для уравнения второго порядка [25].

Теорема существования и единственности формулируется так же, как и для уравнения второго порядка, причем начальные условия имеют вид

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Решения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ называются *линейно независимыми*, если между ними не существует тождественного относительно x соотношения

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ky_k = 0$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых есть отличные от нуля.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — n линейно независимых решений уравнения, то формула

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (18)$$

где C_i — произвольные постоянные, дает все решения этого уравнения. Располагая постоянными C_i, можно получить решение, удовлетворяющее указанным выше начальным условиям.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$u^{(n)} + p_1(x)\,u^{(n-1)} + p_2(x)\,u^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)\,u = f(x). \qquad (19)$$

Если u_1 — какое-либо решение этого уравнения и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (17), то формула

$$u = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + u_1,$$

где C_i — произвольные постоянные, дает общее решение уравнения (19).

При этом, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ известны, то решение уравнения (19) может быть получено по формуле

$$u = v_1(x)\,y_1 + v_2(x)\,y_2 + \ldots + v_n(x)\,y_n,$$

где $v_i'(x)$ определяется из системы уравнений первой степени

$$\begin{aligned}
&v_1'(x)\,y_1 + v_2'(x)\,y_2 + \ldots + v_n'(x)\,y_n = 0,\\
&v_1'(x)\,y_1' + v_2'(x)\,y_2' + \ldots + v_n'(x)\,y_n' = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&v_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + v_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n'(x)\,y_n^{(n-2)} = 0,\\
&v_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + v_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}$$

Для читателя, знакомого с теорией определителей, можно указать необходимое и достаточное условие линейной независимости, совершенно аналогичное тому, которое мы дали выше для уравнений второго порядка. Пусть, как и выше, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения уравнения (17). *Определителем Вронского* этих решений называется следующий определитель n-го порядка:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

и для него можно доказать формулу, аналогичную формуле (5):

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$$

где Δ_0 — значение Δ при $x = x_0$. Из этой формулы, как и выше, вытекает, что Δ или тождественно равно нулю, или не обращается в нуль ни при каком значении x. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и состоит в том, что их определитель Вронского не равен тождественно нулю. При этом по любым начальным условиям вполне определяются произвольные постоянные формулы (18). Как и для уравнений второго порядка, теорема существования и единственности дает решение во всем том промежутке, где коэффициенты уравнения $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ суть непрерывные функции.

28. Однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Прежде чем переходить к уравнению с постоянными коэффициентами, мы докажем одну формулу дифференцирования. Положим, что мы имеем комплексную функцию вещественного переменного x:

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — вещественные функции. Производную функции $f(x)$ определим формулой

$$f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x).$$

Отсюда следует

$$f''(x) = \varphi''(x) + i\psi''(x) \text{ и т. д.}$$

Если r — некоторое вещественное число, то производная функции e^{rx}

$$(e^{rx})' = re^{rx}.$$

Покажем, что эта формула остается справедливой, если $r = a + bi$ есть любое комплексное число. Действительно, из определения показательной функции при комплексном показателе имеем

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx$$

и, согласно сказанному выше,

$$(e^{(a+bi)x})' = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx) + ie^{ax}(a \sin bx + b \cos bx),$$

откуда

$$(e^{(a+bi)x})' = ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + be^{ax}(-\sin bx + i \cos bx)$$

или

$$(e^{(a+bi)x})' = (a + bi)\, e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = (a + bi)\, e^{(a+bi)x},$$

что и требовалось доказать.

Далее, имеем

$$(e^{(a+bi)x})'' = (a + bi)^2\, e^{(a+bi)x}.$$

Займемся теперь решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{20}$$

Если числа p и q вещественны и некоторая комплексная функция $y(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ является решением этого уравнения, то вещественные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ также, очевидно, удовлетворяют уравнению (20). Подставим в левую часть (20)

$$y = e^{rx}, \tag{21}$$

где r — некоторое вещественное или комплексное число. Дифференцируя и вынося e^{rx} за скобки, получим

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0,$$

и функция (21) удовлетворяет уравнению (20), если r есть корень квадратного уравнения

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{22}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (20). В дальнейшем считаем, что p и q — вещественные числа. Если квадратное уравнение (20) имеет два различных вещественных корня r_1 и r_2, то формула (21) дает нам два решения уравнения (20)

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}. \tag{23}$$

Эти решения линейно независимы, ибо их отношение, равное $e^{r_1 x} : e^{r_2 x} = e^{(r_2 - r_1)x}$ $(r_2 \neq r_1)$ не есть постоянная. Если корни

не вещественны, то они мнимые сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$ и $r_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$). Взяв вещественную и мнимую части $e^{(\alpha+\beta i)x}$, получаем два также линейно независимых решения:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{1}{2}[e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}],$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{1}{2i}[e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}].$$

Положим теперь, что уравнение (22) имеет равные корни. Это будет иметь место, если $p^2 - 4q = 0$, и при этом

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}. \tag{24}$$

Изменим немного коэффициенты p и q так, чтобы корни сделались различными, например, сделаем так, чтобы корень r_1 по-прежнему имел значение (24), а корень r_2 немного отличался от него. При этом получаются два решения (23). Вычтем первое решение из второго и разделим на постоянную $(r_2 - r_1)$. Таким образом, мы опять получим решение [25]:

$$y = \frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}. \tag{25}$$

Будем теперь измененные значения коэффициентов p и q стремить к их исходным значениям, при которых уравнение (22) имело двойной корень. При этом r_2 будет стремиться к r_1, в формуле (25) числитель и знаменатель будут стремиться к нулю, а вся дробь будет иметь своим пределом производную от функции e^{rx} по r при $r = r_1$, т. е. второе решение уравнения будет $y_2 = xe^{r_1 x}$. Итак, в случае равных корней уравнения (22) мы имеем следующие два линейно независимых решения:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = xe^{r_1 x}. \tag{26}$$

Ввиду некоторой нестрогости предыдущих рассуждений убедимся непосредственной подстановкой, что y_2 — действительно решение уравнения. Подставляя y_2 в левую часть уравнения (20), получим

$$(r_1^2 xe^{r_1 x} + 2r_1 e^{r_1 x}) + p(r_1 xe^{r_1 x} + e^{r_1 x}) + qxe^{r_1 x} =$$
$$= xe^{r_1 x}(r_1^2 + pr_1 + q) + e^{r_1 x}(2r_1 + p).$$

Первое из слагаемых правой части будет равно нулю, так как $r = r_1$ есть корень уравнения (22), а второе слагаемое равно нулю в силу (24) и таким образом действительно y_2 есть решение уравнения (20).

В случае вещественных различных корней r_1 и r_2 уравнение (20) имеет общий интеграл

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \tag{27}$$

в случае не вещественных сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ ($\beta \neq 0$) общий интеграл будет

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{28}$$

в случае одного корня (двукратного) уравнения (20)

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}. \tag{29}$$

Отметим еще тот частный случай формулы (28), когда уравнение (22) имеет чисто мнимый корень, т. е. $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$. При этом должно быть $p = 0$, а q должно быть положительным числом. Обозначая $q = k^2$, мы будем для уравнения (22) иметь корни $\pm ki$, и следовательно, уравнение

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{30}$$

имеет общий интеграл

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{31}$$

29. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{32}$$

где p и q — по-прежнему заданные вещественные числа и $f(x)$ — заданная функция от x. Для нахождения общего интеграла этого уравнения достаточно найти его частное решение и сложить его с общим интегралом соответствующего однородного уравнения (20). Поскольку общий интеграл однородного уравнения известен, можно при помощи квадратур найти это частное решение, пользуясь методом изменения произвольных постоянных [26]. Проделаем это, например, для уравнения вида

$$y'' + k^2 y = f(x). \tag{33}$$

Общий интеграл соответствующего однородного уравнения определяется формулой (31), и нам надо искать частное решение уравнения (33) в виде

$$u = v_1(x) \cos kx + v_2(x) \sin kx, \tag{34}$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — искомые функции от x. Уравнения (16) дают в данном случае для производных этих функций систему двух уравнений первой степени

$$v_1'(x) \cos kx + v_2'(x) \sin kx = 0,$$

$$-v_1'(x) \sin kx + v_2'(x) \cos kx = \frac{1}{k} f(x).$$

Решая ее, получим

$$v_1'(x) = -\frac{1}{k} f(x) \sin kx, \qquad v_2'(x) = \frac{1}{k} f(x) \cos kx.$$

Напишем первообразные функции в виде интеграла с переменным верхним пределом и обозначим через ξ переменную интегрирования

$$v_1(x) = -\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi, \qquad v_2(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\, d\xi,$$

где x_0 — некоторое фиксированное число. Подставляя в формулу (34), получим частное решение

$$u = -\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi + \frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\, d\xi \qquad (34_1)$$

или, внося множители, не зависящие от переменной интегрирования, под знак интеграла,

$$u = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k(x-\xi)\, d\xi, \qquad (34_2)$$

и общий интеграл уравнения (33) будет

$$y = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k(x-\xi)\, d\xi.$$

Сделаем по поводу формулы (34_2) два замечания. Переменная x входит в правую часть этой формулы двояким образом. Во-первых, x является верхним пределом интеграла и, во-вторых, она входит под знак интеграла не как переменная интегрирования, но как добавочный параметр, который считается постоянным при интегрировании. Далее, нетрудно показать, что частное решение (34_2) удовлетворяет нулевым начальным условиям при $x = x_0$, т. е.

$$u|_{x=x_0} = 0, \qquad u'|_{x=x_0} = 0. \qquad (34_3)$$

Первое из этих равенств непосредственно вытекает из (34_2), так как при $x = x_0$ верхний предел интеграла совпадает с нижним, и интеграл равен нулю. Чтобы проверить второе равенство, определим u' из формулы (34_1), помня, что производная от интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции при верхнем пределе. После очевидного сокращения получим

$$u' = \sin kx\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi + \cos kx\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\, d\xi,$$

откуда и вытекает непосредственно вторая из формул (34_3).

30. Частные случаи. Если правая часть уравнения (32) имеет специальный вид, то можно гораздо проще отыскивать частные решения, не при-

бегая к методу изменения произвольных постоянных. Сделаем сначала одно замечание. Положим, что правая часть уравнения (32) есть сумма двух слагаемых:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x), \tag{35}$$

и положим, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ суть частные решения неоднородного уравнения, когда правая часть равна $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е.

$$u_1'' + pu_1 + qu_1 = f_1(x), \qquad u_2'' + pu_2' + qu_2 = f_2(x).$$

Складывая, получим

$$(u_1 + u_2)'' + p(u_1 + u_2)' + q(u_1 + u_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

т. е. $(u_1 + u_2)$ есть частное решение уравнения (35).

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = ae^{kx}, \tag{36}$$

где в правой части a и k — заданные числа. В дальнейшем, для сокращения письма, введем специальное обозначение для левой части уравнения (22):

$$\varphi(r) = r^2 + pr + q. \tag{37}$$

Будем искать решение уравнения (36) в том же виде, что свободный член, т. е. в виде

$$y = a_1 e^{kx},$$

где a_1 — искомый численный коэффициент. Подставляя это в (36) и сокращая на e^{kx}, получим для определения a_1 уравнение, которое, в силу (37), можно записать в виде

$$\varphi(k)\, a_1 = a.$$

Если k не есть корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) \neq 0$, то из этого уравнения определится a_1. Положим, что k есть простой корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) = 0$, но $\varphi'(k) \neq 0$ [I, 186]. В данном случае будем искать решение уравнения (36) в виде

$$y = a_1 x e^{kx}.$$

Подставляя в уравнение и сокращая на e^{kx}, получим

$$\varphi(k)\, a_1 x + \varphi'(k)\, a_1 = a,$$

или, в силу $\varphi(k) = 0$,

$$\varphi'(k)\, a_1 = a,$$

откуда определяется a_1, так как $\varphi'(k) \neq 0$. Если, наконец, число k_1 есть двукратный корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) = \varphi'(k) = 0$, то, как и выше, нетрудно показать, что решение уравнения надо искать в виде

$$y = a_1 x^2 e^{kx}.$$

Таким же методом можно находить решение и в более общем случае, когда свободный член имеет вид произведения $P(x)\, e^{kx}$, где $P(x)$ — многочлен от x. Если k не есть корень уравнения (22), то и решение надо искать в виде

$$y = P_1(x)\, e^{kx}, \tag{38}$$

где $P_1(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем искомыми являются коэффициенты $P_1(x)$. Подставляя (38) в уравнение, сокращая на e^{kx} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим уравнения для определения коэффициентов $P_1(x)$.

Если же k есть корень уравнения (22), то в правой части (38) надо ввести множитель x или x^2, смотря по тому, будет ли k простым или двукратным корнем уравнения (22).

Перейдем теперь к тем случаям, когда свободный член содержит тригонометрические функции. Рассмотрим сначала уравнение

$$y'' + py' + qy = e^{kx}(a\cos lx + b\sin lx). \tag{39}$$

Пользуясь формулами [I, 177]

$$\cos lx = \frac{e^{lxi} + e^{-lxi}}{2}, \qquad \sin lx = \frac{e^{lxi} - e^{-lxi}}{2i},$$

можем представить правую часть уравнения (39) в виде

$$Ae^{(k+li)x} + Be^{(k-li)x},$$

где A и B — некоторые постоянные. Если сопряженные числа $(k \pm li)$ не суть корни уравнения (22), то, согласно предыдущему, надо искать решение уравнения в виде

$$y = A_1 e^{(k+li)x} + B_1 e^{(k-li)x},$$

или, возвращаясь от показательных функций к тригонометрическим

$$e^{\pm lxi} = \cos lx \pm i\sin lx,$$

видим, что если $(k \pm li)$ не суть корни уравнения (22), то решение уравнения (39) надо искать в виде

$$y = e^{kx}(a_1\cos lx + b_1\sin lx), \tag{40}$$

где a_1 и b_1 — искомые постоянные. Совершенно так же можно показать, что в правой части формулы (40) надо ввести множитель x, если $(k \pm li)$ суть корни уравнения (22). Постоянные a_1 и b_1 определяются подстановкой выражения (40) в уравнение (39). Заметим, что если в правой части (39) участвуют, например, только $\cos lx$, то в решении (40) надо брать все же оба члена, содержащих как $\cos lx$, так и $\sin lx$.

Приведем, не останавливаясь на доказательстве, более общий результат. Если правая часть имеет вид

$$e^{kx}[P(x)\cos lx + Q(x)\sin lx],$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x, то решение надо искать в том же виде

$$e^{kx}[P_1(x)\cos lx + Q_1(x)\sin lx],$$

где $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — многочлены от x, степени которых надо принять равными наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Если $k \pm li$ суть корни уравнения (22), то надо приписать еще множитель x.

31. Корни решений и колеблющиеся решения. Мы рассмотрим в этом номере вопрос о корнях решений уравнений (1), т. е. о корнях уравнения $y(x) = 0$, где $y(x)$ — некоторое решение уравнения (1). Мы, естественно, будем предполагать, что решение $y(x)$ отлично от нулевого решения $y(x) \equiv 0$.

Все наши рассуждения будут, как и выше, относиться к промежутку изменения x, в котором коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывны. *Если x есть корень некоторого решения $y(x)$, отличного от нулевого, т. е. $y(x_0) = 0$, то обязательно $y'(x_0) \neq 0$, ибо*

начальным данным $y(x_0)=y'(x_0)=0$ *соответствует нулевое решение.*

Если x_0 есть корень двух решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то из (4) следует, что $\Delta(y_1, y_2)=0$ при $x=x_0$, т. е. решения y_1 и y_2 линейно зависимы. Таким образом, линейно независимые решения не имеют общих корней. Если решения линейно зависимы, т. е. отличаются лишь постоянным множителем, то они имеют, очевидно, одни и те же корни.

Пусть x_0 — корень решения $y(x)$, отличного от нулевого. Покажем, что *существует окрестность этой точки* $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$, *которая не содержит других корней* $y(x)$. Если бы при любом сколь угодно малом положительном δ в указанной окрестности были бы корни, отличные от x_0, то мы могли бы составить бесконечную последовательность корней $x_1, x_2, \ldots$, отличных от x_0, которая бы стремилась к x_0 ($x_n\to x_0$). Составим отношение

$$\frac{y(x_n)-y(x_0)}{x_n-x_0}.$$

Поскольку $y(x_n)=y(x_0)=0$, это отношение равно нулю при всяком n. С другой стороны, при $x_n\to x_0$ это отношение имеет предел $y'(x_0)$, и следовательно, $y'(x_0)=0$. Но, по условию, $y(x_0)=0$, и потому $y(x)$ есть нулевое решение, что противоречит нашему предположению. Из доказанного следует, что *на всяком конечном замкнутом промежутке* $a\leqslant x\leqslant b$ *может существовать только конечное число корней любого решения* $y(x)$. Если бы это было не так, то существовала бы, как нетрудно показать, последовательность различных корней x_n ($n=1, 2, \ldots$), принадлежащих промежутку $a\leqslant x\leqslant b$, имеющая предел, который мы обозначим через x_0. В силу непрерывности $y(x)$ и $x_n\to x_0$ из $y(x_n)=0$ следует, что и $y(x_0)=0$, причем любой окрестности x_0 принадлежит бесчисленное множество корней x_n решения $y(x)$, чего не может быть, как мы показали выше.

Пусть x_0 и x_1 — последовательные корни некоторого решения $y_2(x)$, т. е. $y_2(x_0)=y_2(x_1)=0$ и $y_2(x)\neq 0$ при $x_0<x<x_1$, а $y_1(x)$ — решение, линейно независимое с $y_2(x)$. Покажем, что $y_1(x)$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $x_0<x<x_1$. Будем вести доказательство от обратного. Пусть таких корней нет. Из линейной независимости следует, что $y_1(x)$ не равно нулю при $x=x_0$ и $x=x_1$, т. е. $y_1(x)\neq 0$ на замкнутом промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, и следовательно, частное $\frac{y_2}{y_1}$ есть непрерывная на этом промежутке функция, равная нулю на его концах. Но из формулы (7) следует, что это частное — монотонная на этом промежутке функция — возрастающая, если число $\Delta_0>0$, или убывающая, если $\Delta_0<0$. Полученное противоречие и доказывает, что $y_1(x)$ имеет по крайней мере

один корень на промежутке $x_0 < x < x_1$. Если бы эта функция имела два корня x_0' и x_1' на этом промежутке ($x_0 < x_0' < x_1' < x_1$), то, применяя предыдущие рассуждения, мы получили бы, что $y_2(x)$ имеет по крайней мере один корень между x_0' и x_1', а это противоречит тому, что x_0 и x_1 — последовательные корни $y_2(x)$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема 1 (Штурма). *Если x_0 и x_1 — два последовательных корня некоторого решения $y(x)$ уравнения* (1), *то всякое другое линейно независимое с $y(x)$ решение того же уравнения имеет в точности один корень между x_0 и x_1.*

Иначе эту теорему можно сформулировать так: *корни двух линейно независимых решений уравнения* (1) *взаимно разделяют друг друга.*

Из сказанного следует, что если некоторое решение уравнения (1) имеет m корней на конечном замкнутом промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то число k корней всякого другого решения (отличного от нулевого) уравнения (1) при $a \leqslant x \leqslant b$ подчиняется неравенству: $m - 1 \leqslant k \leqslant m + 1$. Введем новые понятия. Если решение $y(x)$ имеет в некотором промежутке I не более одного корня, то оно называется *неколеблющимся* в этом промежутке. Если же число корней в I не меньше двух, то оно называется *колеблющимся* в I.

Рассмотрим простейшее уравнение $y'' - k^2 y = 0$, где k^2 — положительная постоянная. Решения e^{kx} и e^{-kx} на всем бесконечном промежутке $-\infty < x < +\infty$ не имеют корней. Общее решение $C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$ также не имеет корней, если постоянные C_1 и C_2 имеют одинаковый знак, и имеют один корень $\frac{1}{2k} \lg\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$, если эти постоянные разных знаков. Таким образом, всякое решение указанного уравнения будет неколеблющимся на любом промежутке. Уравнение $y'' + k^2 y = 0$ имеет решения $\cos kx$ и $\sin kx$, которые на любом замкнутом промежутке, длина которого не меньше $\frac{2\pi}{k}$, имеют не меньше двух корней, т. е. будут колеблющимися на таком промежутке. Как легко видеть, то же можно утверждать и о любом решении указанного уравнения.

Разница в поведении решения рассмотренных уравнений обусловлена тем, что в первом из них коэффициент при y отрицателен ($-k^2$), а во втором положителен ($+k^2$). Докажем теперь теорему о неколеблющихся решениях для уравнения с переменным коэффициентом.

Теорема 2. *Если $r(x)$ — непрерывная функция на конечном замкнутом промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ и $r(x) \leqslant 0$ на этом промежутке, то все решения уравнения*

$$y'' + r(x)\, y = 0 \tag{41}$$

— неколеблющиеся на этом промежутке.

Будем доказывать от обратного. Пусть имеется решение $y_0(x)$ уравнения (16), отличное от нулевого и имеющее более одного корня на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть x_1 и x_2 — два последовательных корня $y_0(x)$, так что $y_0(x_1) = y_0(x_2) = 0$ и $y_0(x) \neq 0$ при $x_1 < x < x_2$. Не ограничивая общности, можем считать $y_0(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$, ибо если $y_0(x) < 0$, то мы заменим $y_0(x)$ на $[-y_0(x)]$. Из (41) и $r(x) \leqslant 0$ следует, что

$$y_0''(x) = -r(x)\, y_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

а потому $y_0'(x)$ не убывает на этом промежутке, т. е. $y_0'(\xi) \geqslant y_0(x_1)$ при $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$. Напишем формулу Лагранжа [I, 63]:

$$y_0(x_2) = y_0(x_1) + y_0'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2).$$

Заменяя множитель $y'(\xi)$ при положительной разности $(x_2 - x_1)$ на $y_0'(x_1) \leqslant y_0'(\xi)$, получим

$$y_0(x_2) \geqslant y_0(x_1) + y_0'(x_1)(x_2 - x_1)$$

или, в силу $y_0(x_1) = 0$,

$$y_0(x_2) \geqslant y_0'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Из $y_0(x_1) = 0$ и $y_0(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$ следует, что $y_0'(x_1) \geqslant 0$. Но, поскольку $y_0(x)$ не есть нулевое решение, должно быть $y_0'(x_1) > 0$, и предыдущее неравенство приводит к неравенству $y_0(x_2) > 0$, которое противоречит условию $y_0(x_2) = 0$. Теорема доказана.

Сформулируем еще одну теорему, доказательство которой в основном аналогично доказательству предыдущей теоремы. Она касается вопроса сравнения колебательности решений двух уравнений

$$y'' + r_1(x)\, y = 0, \qquad z'' + r_2(x)\, z = 0 \qquad (r_1(x) \not\equiv r_2(x)).$$

Теорема 3. *Если $r_2(x) \geqslant r_1(x)$ на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то между каждыми двумя корнями любого решения $y(x)$ первого уравнения находится по крайней мере один корень любого решения $z(x)$ второго уравнения.*

Короче говоря, увеличение коэффициента $r(x)$ в уравнении (41) может только увеличить колебательность всех его решений. Отметим, что теорема 2 является следствием последней теоремы.

Общее уравнение вида (1)

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

может быть приведено к виду (41) при помощи замены $y(x)$ новой искомой функцией $u(x)$:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}\, u(x).$$

Подставляя это выражение в первоначальное уравнение (1), получим, как нетрудно проверить, уравнение

$$u'' + r(x)\, u = 0,$$

причем

$$r(x) = q(x) - \frac{1}{4}[p(x)]^2 - \frac{1}{2}p'(x).$$

Отметим, что множитель показательного типа, входящий в выражение $y(x)$ через $u(x)$, не обращается в нуль, так что $y(x)$ и $u(x)$ имеют одни и те же корни.

32. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. В настоящем номере мы приведем без доказательства результаты, аналогичные предыдущим, для уравнений высших порядков. В дальнейшем мы изложим общую теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи особого метода — *метода символического множителя*, при этом будут доказаны и упомянутые результаты.

Однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0, \tag{42}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — заданные вещественные числа. Составим характеристическое уравнение, аналогичное уравнению (22):

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1}r + p_n = 0. \tag{43}$$

Всякому простому вещественному корню $r = r_1$ этого уравнения соответствует решение $y = e^{r_1 x}$. Если этот корень имеет кратность s, то ему будут соответствовать следующие s решений:

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ \ldots,\ x^{s-1}e^{r_1 x}.$$

Паре мнимых сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ первой кратности соответствуют решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Если эти корни не простые, а имеют кратность s, то им соответствуют следующие $2s$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким образом, используя все корни уравнения (43), мы получим n решений уравнения (42). Умножая эти решения на произвольные постоянные и складывая, будем иметь общий интеграл уравнения.

Для разыскания частного решения неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$$

можно применять метод изменения произвольных постоянных [27].

Если правая часть имеет вид $P(x)e^{kx}$, где $P(x)$ — многочлен и k не есть корень уравнения (43), то и решение уравнения можно искать в виде $y = P_1(x)e^{kx}$, где $P_1(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$. Если k

есть корень уравнения (43) кратности s, то надо положить $y = x^s P_1(x) e^{kx}$. Если правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{kx} [P(x) \cos lx + Q(x) \sin lx] \tag{44}$$

и $(k \pm li)$ не суть корни уравнения (43), то и решение надо искать в том же виде

$$y = e^{kx} [P_1(x) \cos lx + Q_1(x) \sin lx],$$

где степени многочленов $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ надо брать равными наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Если же $(k \pm li)$ суть корни (43) кратности s, то к правой части последней формулы надо приписать множитель x^s.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

имеет корни $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$. Общий интеграл однородного уравнения будет

$$C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \tag{45}$$

Частное решение уравнения надо искать в виде

$$y = a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$(2a_1 - 10b_1) \cos 2x + (10a_1 + 2b_1) \sin 2x = 4 \sin 2x,$$

что дает

$$2a_1 - 10b_1 = 0, \qquad 10a_1 + 2b_1 = 4,$$

откуда $a_1 = \frac{5}{13}$ и $b_1 = \frac{1}{13}$, т. е. частное решение будет

$$y = \frac{5}{13} \cos 2x + \frac{1}{13} \sin 2x,$$

Складывая его с (45), получим общий интеграл уравнения.

2. Возьмем уравнение четвертого порядка

$$y^{(IV)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = x \sin x.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$$

может быть представлено в виде

$$(r^2 + 1)(r - 1)^2 = 0$$

и имеет двойной корень $r_1 = r_2 = 1$ и пару мнимых сопряженных $r_{3,4} = \pm i$. Общий интеграл однородного уравнения будет

$$(C_1 + C_2 x) e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Сравнивая свободный член с формулой (44), видим, что в данном случае $k = 0$, $l = 1$ и $k \pm li = \pm i$ суть простые корни характеристического уравнения, так что частное решение надо искать в виде

$$y = x [(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x] = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x,$$

где a, b, c, d — искомые коэффициенты.

33. Линейные уравнения и колебательные явления. Выясним значение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами при рассмотрении колебательных явлений. В дальнейшем мы изменим обозначения и будем часто обозначать независимую переменную через t (время), а функцию — через x.

Рассмотрим вертикальные колебания подвешенного на пружине тела массы m около положения равновесия, в котором вес тела в точности уравновешивается упругой силой пружины.

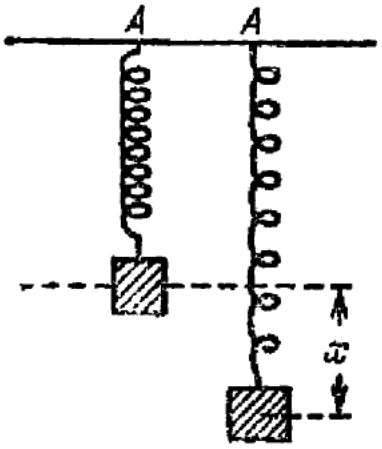


Рис. 15.

Пусть x — расстояние тела по вертикальному направлению от положения равновесия (рис. 15). Положим, что движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально скорости $\frac{dx}{dt}$.

На тело будут действовать следующие силы: 1) восстанавливающая сила пружины, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, которую мы будем считать пропорциональной удалению x тела от положения равновесия, и 2) сила сопротивления, пропорциональная скорости и имеющая направление, обратное скорости. Дифференциальное уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - cx \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

В качестве второго примера рассмотрим движение простого маятника длины l в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. Дифференциальное уравнение движения будет, как известно из механики,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - b\frac{d\theta}{dt}, \tag{46}$$

где θ — угол отклонения маятника от положения равновесия. Рассматривая случай малых колебаний маятника около положения равновесия, мы можем заменить $\sin\theta$ самим углом θ, и уравнение (46) приведется к виду

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0. \tag{47}$$

Если на маятник действует, кроме того, внешняя сила, зависящая от времени, то вместо уравнения (47) будем иметь уравнение со свободным членом

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\theta = f(t). \tag{48}$$

В обоих рассмотренных случаях движение определяется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

При дальнейшем рассмотрении этого уравнения мы будем писать его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \tag{49}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t). \tag{50}$$

К такому уравнению мы приходим вообще при рассмотрении малых колебаний системы с одной степенью свободы около ее положения равновесия. Член $2h\frac{dx}{dt}$ происходит от сопротивления среды или трения, и h называется *коэффициентом сопротивления*; член k^2x происходит от внутренней силы системы, которая стремится вернуть систему в положение равновесия, и k^2 называется *коэффициентом восстановления*; свободный член $f(t)$ в уравнении (50) происходит от внешней возмущающей силы, действующей на систему. Уравнение написанного вида встречается не только при рассмотрении колебаний механических систем, но и в разнообразных физических вопросах, связанных с колебательными явлениями. В качестве примера рассмотрим разряд конденсатора емкости C через цепь с сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L. Обозначая через v напряжение на обкладках конденсатора, будем иметь для цепи

$$v = Ri + L\frac{di}{dt}, \tag{51}$$

где i — сила тока в цепи. Кроме того, известна еще следующая зависимость:

$$i = -C\frac{dv}{dt}. \tag{52}$$

Положим, что в цепи имеется еще источник тока с электродвижущей силой E, которую мы будем считать положительной, если она действует в направлении, противоположном i. В этом случае вместо равенства (51) будем иметь

$$v - E = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Подставляя выражение (52) в написанное уравнение, получим дифференциальное уравнение

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = E$$

или

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{E}{LC}. \tag{53}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (50), видим, что член $\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}$ аналогичен члену, происходящему от сопротивления; член $\frac{1}{LC}v$ —

члену, происходящему от восстанавливающей силы; свободный член $\frac{E}{LC}$ — члену от возмущающей силы.

Если найдем v из уравнения (53) и подставим в формулу (52), то сможем определить i.

34. Собственные и вынужденные колебания. Рассмотрим однородное уравнение

$$x'' + 2hx' + k^2x = 0, \tag{54}$$

соответствующее тому случаю, когда отсутствует внешняя сила. Решение этого уравнения определяет *свободные*, или, как говорят, *собственные колебания*. Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0. \tag{55}$$

Дальнейшее исследование разобьем на отдельные случаи.

1. Затухающее колебание. В большинстве случаев коэффициент сопротивления h невелик по сравнению с коэффициентом восстановления k^2, так что разность $(h^2 - k^2)$ есть число отрицательное: $h^2 - k^2 = -p^2$. В этом случае уравнение (55) имеет мнимые сопряженные корни $r_{1,2} = -h \pm pi$, и мы имеем общий интеграл уравнения (54)

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt). \tag{56}$$

Полагая

$$C_1 = A \sin \varphi, \qquad C_2 = A \cos \varphi, \tag{57}$$

преобразуем решение (56) к виду

$$x = Ae^{-ht} \sin (pt + \varphi), \tag{58}$$

или, полагая $p = \frac{2\pi}{\tau}$,

$$x = Ae^{-ht} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \varphi\right). \tag{59}$$

Здесь τ есть *период свободных колебаний*, A — *начальная их амплитуда* и φ — *начальная фаза*. Если не принимать в расчет сопротивление среды, т. е. положить $h = 0$, то уравнение (55) будет иметь корни $r = \pm ki$, и вместо (58) получим

$$x = A \sin (kl + \varphi). \tag{60}$$

Это будет *чисто гармоническое колебание* с периодом $\tau = \frac{2\pi}{k}$. Формула (59) дает затухающее колебание [I, 59], причем множитель e^{-ht} характеризует быстроту затухания. В промежуток времени, равный периоду, амплитуда уменьшается в отношении $e^{-h\tau}$. Значения постоянных C_1 и C_2 в формуле (56) или, что то же, постоянных A и φ

з формуле (58) зависят от начальных условий. Положим, что начальные условия будут

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad x'|_{t=0} = x_0'. \tag{61}$$

Подставляя в формулу (56) $t = 0$, получим $C_1 = x_0$. Дифференцируем формулу (56) по t:

$$x' = -he^{-ht}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + pe^{-ht}(-C_1 \sin pt + C_2 \cos pt),$$

откуда, подставляя $t = 0$, получим

$$C_2 = \frac{x_0 + hx_0}{p}, \tag{62}$$

и окончательно решение, удовлетворяющее начальным условиям (61), будет

$$x = e^{-ht}\left(x_0 \cos pt + \frac{x_0' + hx_0}{p} \sin pt\right). \tag{63}$$

Заметим, что в решении (63) коэффициент затухания h и частота колебания $p = \sqrt{k^2 - h^2}$ определяются вполне по коэффициентам уравнения (54). Что же касается амплитуды A и начальной фазы φ, то они зависят от начальных условий, и, в силу (57), мы можем написать равенства

$$A \sin \varphi = x_0, \qquad A \cos \varphi = \frac{x_0' + hx_0}{p},$$

из которых A и φ и определяются. Если $h = 0$, то везде надо заменить p на k.

2. Апериодическое движение. Если разность $(h^2 - k^2)$ будет положительной:

$$h^2 - k^2 = q^2,$$

то корни уравнения (55) будут

$$r_1 = -h + q, \qquad r_2 = -h - q, \tag{64}$$

и мы имеем [28]:

$$x = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q+h)t}. \tag{65}$$

При этом очевидно, что $q < h$, и оба корня (64) отрицательны, а потому x стремится к нулю при беспредельном возрастании t.

Дифференцируем равенство (65) по t:

$$x' = C_1(q - h)e^{(q-h)t} - C_2(q + h)e^{-(q+h)t}. \tag{66}$$

Полагая в равенствах (65) и (66) $t = 0$, получим два уравнения для определения постоянных C_1 и C_2 через начальные данные (61):

$$C_1 + C_2 = x_0, \qquad (q - h)C_1 - (q + h)C_2 = x_0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{(q + h)x_0 + x_0'}{2q}, \qquad C_2 = \frac{(q - h)x_0 - x_0'}{2q}.$$

3. Специальный случай апериодического движения. Если, наконец, $h^2 - k^2 = 0$, то уравнение (55) имеет кратный корень $r_1 = r_2 = -h$, и окажется [28]:

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{67}$$

Ввиду того, что при беспредельном возрастании t функция te^{-ht} стремится к нулю [I, 66], выражение (67) также стремится к нулю.

Неоднородное уравнение

$$x'' + 2hx' + k^2 x = f(t), \tag{68}$$

в котором свободный член $f(t)$ происходит от внешней силы, определяет *вынужденные колебания*. В случае чисто гармонического собственного колебания

$$x'' + k^2 x = f(t) \tag{69}$$

мы имеем общий интеграл этого уравнения [29]:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du,$$

причем последнее слагаемое справа дает чисто вынужденное колебание, т. е. решение уравнения (69), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x|_{t=0} = x'|_{t=0} = 0. \tag{70}$$

Пользуясь тем же методом изменения произвольных постоянных, можно показать, что в том случае, когда собственное колебание есть затухающее колебание, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (70), будет

$$x_0(t) = \frac{1}{p} e^{-ht} \int_0^t e^{hu} f(u) \sin p(t-u)\, du, \tag{71}$$

и в апериодическом случае это частное решение будет

$$x_0(t) = \frac{1}{2q} e^{(q-h)t} \int_0^t e^{(h-q)u} f(u)\, du - \frac{1}{2q} e^{-(q+h)t} \int_0^t e^{(q+h)u} f(u)\, du. \tag{72}$$

Предоставляем сделать это читателю.

35. Синусоидальная внешняя сила и резонанс. В приложениях свободный член часто бывает синусоидальной величиной

$$x'' + 2hx' + k^2 x = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{73}$$

В настоящем случае будем искать решение уравнения в виде синусоидальной величины той же частоты ω, что и в свободном члене [30]:

$$x = N \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta). \tag{74}$$

Надо определить амплитуду N и сдвиг фазы δ этого колебания. Подставляем выражение (74) в уравнение (73)

$$-\omega^2 N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta)+2h\omega N\cos(\omega t+\varphi_0+\delta)+$$
$$+k^2 N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta)=H_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Аргумент тригонометрических функций, стоящих в левой части равенства, представим в виде суммы двух слагаемых $(\omega t+\varphi_0)$ и δ. Пользуясь формулами для синуса и косинуса суммы, получим

$$[(k^2-\omega^2)N\cos\delta-2h\omega N\sin\delta]\sin(\omega t+\varphi_0)+$$
$$+[2h\omega N\cos\delta+(k^2-\omega^2)N\sin\delta]\cos(\omega t+\varphi_0)=H_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Приравнивая коэффициент при $\sin(\omega t+\varphi_0)$ постоянной H_0 и при $\cos(\omega t+\varphi_0)$ нулю, получим два уравнения для определения N и δ:

$$(k^2-\omega^2)N\cos\delta-2h\omega N\sin\delta=H_0,\qquad 2h\omega N\cos\delta+(k^2-\omega^2)N\sin\delta=0.$$

Решаем их относительно $\cos\delta$ и $\sin\delta$:

$$\cos\delta=\frac{(k^2-\omega^2)H_0}{N[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]},\qquad \sin\delta=-\frac{2h\omega H_0}{N[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]}.$$

Возводя почленно в квадрат и складывая, получим

$$1=\frac{H_0^2}{N^2[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]},$$

откуда находим

$$N=\frac{H_0}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}. \tag{75}$$

Подставляя это значение N в предыдущие выражения $\cos\delta$ и $\sin\delta$, получим формулы для определения δ:

$$\cos\delta=\frac{k^2-\omega^2}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}},\qquad \sin\delta=\frac{2h\omega}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}. \tag{76}$$

Имея значения N и δ, согласно формуле (74), будем иметь синусоидальное частное решение уравнения (73). Общее решение этого уравнения будет

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta), \tag{77}$$

где A и φ — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. При этом мы считаем, что $h^2-k^2=-p^2<0$, т. е. что собственные колебания суть затухающие колебания. Ввиду наличия множителя e^{-ht} $(h>0)$ первое слагаемое в выражении (77) быстро убывает при увеличении t, так что это слагаемое заметно влияет на величину x лишь при t, близких к нулю (устанавливающийся процесс), а в дальнейшем величина x определяется почти исключительно вторым чисто синусоидальным слагаемым, не зависящим от начальных условий (установившийся процесс).

Исследуем теперь формулы (75) и (76), служащие для определения амплитуды N и разности фаз δ решения (74) и свободного члена в уравнении (73). Если бы в правой части уравнения (73) стояла только постоянная H_0, то уравнение

$$x''+2hx'+k^2x=H_0$$

имело бы очевидное частное решение в виде постоянной

$$\xi_0=\frac{H_0}{k^2}.$$

Эта постоянная есть величина того *статического отклонения*, которое произвела бы постоянная сила.

Введем в рассмотрение отношение

$$\lambda = \frac{N}{\xi_0},$$

которое служит мерою *динамической восприимчивости* системы по отношению к действующей внешней силе. Принимая во внимание формулу (75) и выражение ξ_0, получим

$$\lambda = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{k^2}\frac{\omega^2}{k^2}}}.$$

Из последнего выражения видно, что λ зависит только от двух отношений

$$q = \frac{\omega}{k}, \qquad \gamma = \frac{2h}{k}. \tag{78}$$

Выясним механический смысл первого отношения. Если бы сопротивление отсутствовало, то собственные колебания выражались бы по формуле (60)

$$x = A\sin(kt+\varphi)$$

и имели бы период $\tau = \frac{2\pi}{k}$. Период возмущающей силы обозначим через $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для q получим тогда

$$q = \frac{\tau}{T}, \tag{79}$$

т. е. q равно отношению периода свободного колебания системы без сопротивления к периоду возмущающей силы.

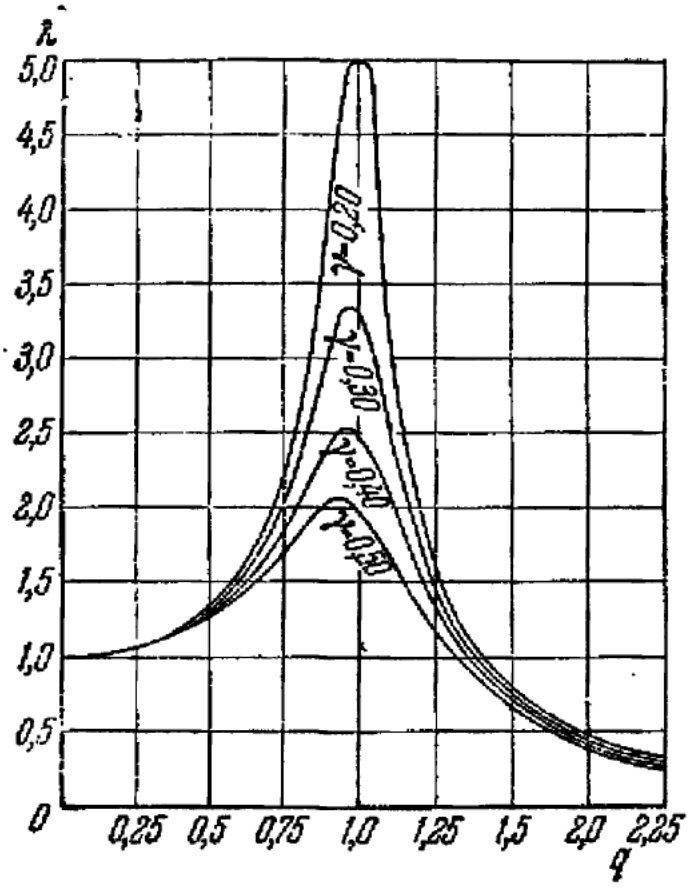


Рис. 16.

Таким образом, для величины λ получим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2 + \gamma^2 q^2}}, \tag{80}$$

где значение q объяснено выше, а постоянная γ, как это видно из ее определения, не зависит от действующей внешней силы. Ввиду малости h постоянная γ обычно мала, и если q не близко к единице, то λ близко к величине $\frac{1}{1-q^2}$. На рис. 16 представлены графики величины λ как функции q при нескольких заданных значениях γ.

Деля числитель и знаменатель в выражениях (76) на k^2, получим формулы

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta &= (1-q^2)\lambda,\\ \sin\delta &= -\gamma q\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

которые определяют разность фаз внешней силы и произведенного ею возмущения.

Величина λ зависит от периода T внешней силы через посредство величины q. Найдем максимум величины λ как функции от q. Для этого достаточно найти минимум

$$\frac{1}{\lambda^2} = (1-q^2)^2 + \gamma^2 q^2$$

как функции от q^2. Как нетрудно видеть, этот минимум будет достигаться при $q^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$ и будет равен $\left(\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{4}\right)$. Отсюда следует, что максимум λ будет достигаться при

$$q = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}} \tag{82}$$

и будет равен

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^4}{4}}}.$$

При малом γ величина q, которой соответствует максимум λ, близка к единице, т. е. период внешней силы, производящей, при данной ее амплитуде, наибольший эффект, близок к периоду свободного колебания. Разница между этими периодами, зависящими от величины γ, обусловливается наличием сопротивления.

Если сопротивление отсутствует, то $\gamma = 0$, и максимум λ достигается при $q = 1$ и равен бесконечности. В этом случае, характеризуемом условием $h = 0$ и $\omega = k$, уравнение (73) будет

$$x'' + k^2 x = H_0 \sin(kt + \varphi_0), \tag{83}$$

и его решение уже нельзя искать в виде (74).

Предоставляем читателю проверить, что уравнение (83) будет иметь решение

$$x = -\frac{H_0}{2k} t \cos(kt + \varphi_0),$$

которое содержит t множителем [30].

Вернемся вновь к рассмотрению того случая, когда имеется сопротивление, т. е. $h \neq 0$. Как видно из графика, величина λ, быстро возрастая перед максимумом, быстро убывает после него. В этом нетрудно убедиться и из формулы (80) при малом γ. Подставляя в формулы (81) $\lambda_{\max}$ и выражение q из формулы (82), получим

$$\cos\delta = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}, \qquad \sin\delta = -\frac{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}},$$

откуда видно, что при наибольшем эффекте внешней силы и малом γ разность фаз δ близка к $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Возвратимся теперь к формуле (77). При сравнительно уже небольших значениях t первое слагаемое, дающее собственные затухающие колебания, будет мало по сравнению со вторым. Будем теперь менять величину ω, т. е.

период T возмущающей силы. В силу вышесказанного при этом будет иметь место следующее явление: при приближении T к некоторому определенному значению вынужденные колебания будут быстро возрастать, достигнут максимума и затем при дальнейшем изменении T будут быстро падать. Это явление называется *резонансом*. Оно встречается при самых разнообразных явлениях, где мы имеем дело с колебаниями: при колебании механических систем, при электрических колебаниях, в явлениях звука и т. д.

Положим теперь, что правая часть уравнения содержит сумму нескольких синусоидальных величин

$$x'' + 2hx' + k^2x = \sum_{i=1}^{m} H_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \tag{84}$$

Каждому слагаемому правой части уравнения соответствует некоторое свое вынужденное колебание вида

$$N_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \delta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

причем N_i и δ_i определяются по формулам (75) и (76), если правая часть уравнения известна. Сумме всех внешних сил будет соответствовать сумма указанных выше вынужденных колебаний, т. е. частное решение уравнений (84) будет [30]

$$x = \sum_{i=1}^{m} N_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \delta_i). \tag{85}$$

Покажем теперь, каким образом, наблюдая вынужденное колебание, можно определить амплитуды и периоды слагаемых в правой части уравнения (84), если они неизвестны.

Положим, что мы можем изменять величину k^2, т. е. период τ свободных колебаний. При этом будет иметь место следующее явление: при приближении τ к некоторой величине τ_1 амплитуда вынужденных колебаний будет быстро возрастать, достигнет максимума и при дальнейшем изменении τ быстро упадет и будет оставаться малой, пока период τ не приблизится в величине τ_2, которой будет соответствовать второй максимум амплитуды вышеописанного характера и т. д.

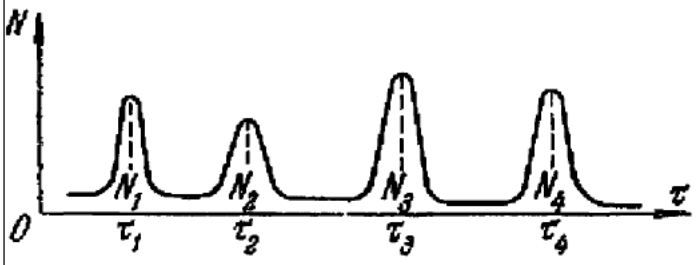


Рис. 17.

Эти максимумы объясняются явлением резонанса с одной из внешних сил, стоящих в правой части уравнения (84), и величины τ_1, τ_2, ... дают приближенное значение периодов этих внешних сил. Откладывая по оси абсцисс периоды свободных колебаний, а по оси ординат амплитуды вынужденных колебаний, получим кривую с несколькими максимумами (рис. 17).

При $\tau = \tau_j$ $\left(\text{или } k = k_j = \dfrac{2\pi}{\tau_j}\right)$ в сумме (85) будет велик по сравнению с другим один член, а именно тот, у которого ω_j близко к k_j. Наблюдая из опыта максимальную величину амплитуды вынужденного колебания, мы можем считать ее приблизительно равной N_j и из формулы

$$N_j \approx \frac{H_j}{\sqrt{(k_j - \omega_j)^2 + 4h^2\omega_j^2}}, \tag{86}$$

принимая во внимание, что k_j близко к ω_j, сможем найти приближенное значение напряжения силы

$$H_j \approx 2hk_jN_j. \tag{87}$$

36. Предельные задачи. Мы рассматривали выше задачу интегрирования дифференциального уравнения при заданных начальных условиях. В дальнейшем мы часто будем встречаться с задачами, в которых заданы не начальные условия, а условия на обоих концах того промежутка, в котором рассматривается задача интегрирования уравнения. Такого типа условия называются обычно *граничными* или *предельными условиями*. Их число должно равняться порядку уравнения. Выясним некоторые основные факты для задач с предельными условиями для случая линейных дифференциальных уравнений. Предварительно напомним некоторые сведения о системах линейных алгебраических уравнений.

Пусть имеется два уравнения с двумя неизвестными

$$a_1x + b_1y = c_1, \qquad a_2x + b_2y = c_2 \tag{88}$$

или

$$a_1x + b_1y = 0, \qquad a_2x + b_2y = 0. \tag{89}$$

Система (89) называется обычно однородной. При решении написанных систем имеют место следующие два случая: 1) если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (88) имеет решение и притом единственное при любых свободных членах c_1 и c_2, а однородная система (89) имеет только нулевое решение $x = y = 0$; 2) если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то однородная система (89) имеет ненулевые решения, а система (88) имеет решение не при всяких свободных членах, и если она имеет решения, то число решений бесконечно. Скажем подробнее о втором случае. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — ненулевое решение системы (89). Нетрудно видеть, что $x = cx_0$, $y = cy_0$, где c — произвольная постоянная, также является решением системы (89). Если свободные члены в системе (88) таковы, что эта система имеет решения $x = x_1$, $y = y_1$, то формулы $x = x_1 + cx_0$, $y = y_1 + cy_0$ при любом c дают также решение системы (88). Совершенно аналогичные обстоятельства имеют место и для n линейных уравнений с n неизвестными: или однородная система (со свободными членами, равными нулю) имеет только нулевое решение и при этом неоднородная система имеет решение и притом единственное при любых свободных членах, или однородная система имеет решения, отличные от нулевого, и при этом неоднородная система имеет решения не при любых свободных членах, и если имеет решения, то число решений бесконечно. В дальнейшем мы будем часто встречаться с альтернативой такого рода. Полное исследование систем линейных алгебраических уравнений будет изложено в первой части третьего тома.

Рассмотрим общую схему решения *предельной задачи* для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными предельными условиями. Пусть имеется уравнение вида

$$y'' + [\lambda r(x) + q(x)]y = 0, \tag{90}$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — функции, непрерывные в конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, и λ — численный параметр, который может принимать различные значения. Положим, что на концах указанного промежутка заданы однородные предельные условия

$$y(a)=0, \qquad y(b)=0 \tag{91}$$

или более общие

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0, \qquad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0, \tag{92}$$

где α, β, γ, δ — численные коэффициенты.

Введем в рассмотрение какие-либо линейно независимые решения уравнения (90). Они зависят, очевидно, не только от независимой переменной x, но и от того, какое значение имеет параметр λ, и мы обозначим их через $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$. Общее решение уравнения (90) имеет вид

$$y(x, \lambda)=C_1 y_1(x, \lambda)+C_2 y_2(x, \lambda), \tag{93}$$

и предельные условия (91) приводят нас к однородной системе для C_1 и C_2:

$$C_1 y_1(a, \lambda)+C_2 y_2(a, \lambda)=0, \qquad C_1 y_1(b, \lambda)+C_2 y_2(b, \lambda)=0. \tag{94}$$

Эта система имеет, очевидно, нулевое решение $C_1=C_2=0$, которому соответствует нулевое решение $y(x, \lambda)\equiv 0$ задачи (90), (91). Если λ выбрано так, что система (94) имеет только нулевое решение, то и предельная задача (90), (91) имеет только нулевое решение. Если же λ удовлетворяет уравнению

$$y_1(a, \lambda) y_2(b, \lambda)-y_1(b, \lambda) y_2(a, \lambda)=0, \tag{95}$$

то система (94) имеет решение, отличное от нулевого, и, подставляя значение C_1, C_2 в формулу (93), получим в этом случае ненулевое решение $y(x, \lambda)$ задачи (90), (91). При таких λ функция $y(x, \lambda)$ будет удовлетворять уравнению (90) и условиям (91). Это решение можно умножать на произвольную постоянную, т. е. $Cy(x, \lambda)$ также будет решением задачи (90), (91). Других решений при выбранном λ задача не будет иметь, ибо все решения, имеющие корень $x=a$, линейно зависимы. Таким образом, если λ не есть корень уравнения (95), то задача (90), (91) не имеет решений, отличных от нулевого. Если же λ — корень уравнения (95), то эта задача имеет решение $y(x, \lambda)$ — отличное от нулевого, и это решение определено с точностью до произвольного постоянного множителя. Корни уравнения (95), т. е. те значения λ, при которых задача (90), (91) имеет решение $y(x, \lambda)$, отличное от нулевого, называются обычно *собственными значениями* этой задачи, а решения $y(x, \lambda)$, *собственными функциями* задачи, соответствующей указанному собственному значению. Совершенно аналогично можно рассмотреть и случай предельных условий вида (92).

Если же рассмотрим неоднородное уравнение

$$z'' + [\lambda r(x) + q(x)]\, z = f(x) \tag{96}$$

при неоднородных предельных условиях

$$z(a) = c, \qquad z(b) = d, \tag{97}$$

то, обозначая по-прежнему через $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ линейно независимые решения уравнения (90), мы придем к неоднородной системе для C_1 и C_2, левые части которой совпадают с левыми частями уравнений (94). Если λ не есть собственное значение задачи (90), (91), т. е. однородная система имеет только нулевое решение, то неоднородная задача (96), (97) имеет при любых $f(x)$, c и d решение $z(x, \lambda)$ и притом единственное.

Для линейных дифференциальных уравнений четного порядка $2m$ естественно ставить m предельных условий при $x = a$ и столько же при $x = b$. При этом вместо системы (94) мы получим систему $2m$ уравнений для $2m$ неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$.

37. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{98}$$

на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и предельные условия

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

При $\lambda \leqslant 0$ уравнение не имеет колеблющихся решений [31] и, следовательно, при $\lambda \leqslant 0$ нет решений, имеющих корни $x = 0$ и $x = \pi$. Итак, задача может иметь только положительные собственные значения. При этом общий интеграл уравнения (98) имеет вид

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x, \tag{99}$$

где $\sqrt{\lambda}$ можно считать положительным, ибо изменение знака не влияет на величину $\cos \sqrt{\lambda}\, x$ и меняет знак $\sin \sqrt{\lambda}\, x$, причем это изменение знака может быть включено в произвольную постоянную C_2. Предельные условия $y(0) = y(\pi) = 0$ дают

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \qquad C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, \pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0.$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0$, и при этом второе уравнение дает $C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$. Постоянная C_2 не может равняться нулю, так как при $C_1 = C_2 = 0$ мы получаем нулевое решение $y \equiv 0$ и, следовательно, для λ получаем уравнение $\sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$, откуда $\sqrt{\lambda}\, \pi = \pm k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\sqrt{\lambda} = \pm k$ и $\lambda = k^2$. Таким образом, мы получаем бесчисленное множество собственных значений и соответствующих собственных функций: $\lambda_k = k^2$, $y_k(x) = C_k \sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где C_k — произвольные постоянные. При увеличении k число корней собственных функций на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ увеличивается.

Если λ — не есть квадрат целого числа, то любая неоднороднан задача будет иметь единственное решение. В качестве примера рассмотрим задачу

$$y'' - k^2 y = x, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = d \qquad (k > 0). \tag{100}$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} - \frac{x}{k^2},$$

и предельные условия дают

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 e^{k\pi} + C_2 e^{-k\pi} = d + \frac{\pi}{k^2},$$

откуда

$$C_1 = -C_2 = \frac{k^2 d + \pi}{k^2 (e^{k\pi} - e^{-k\pi})}.$$

2. Рассмотрим уравнение (98) на промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ при предельных условиях

$$y(0) = 0, \qquad y'(l) + hy(l) = 0 \qquad (h > 0). \tag{101}$$

Можно проверить, что значения $\lambda \leqslant 0$ не дают решений задачи. Первое из условий дает, как и выше, $C_1 = 0$, и, подставляя в формулу (99), получаем из второго предельного условия уравнение для λ:

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, l = -h \sin \sqrt{\lambda}\, l.$$

Полагая $\sqrt{\lambda}\, l = v$, получим

$$\operatorname{tg} v = \alpha v \qquad \left(\alpha = -\frac{1}{hl}\right).$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество корней $\pm v_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), и им соответствуют следующие собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \frac{v_k^2}{l^2}, \qquad y_k(x) = C_k \sin \frac{v_k}{l} x.$$

Корни v_k суть абсциссы точек пересечения графика $z = \operatorname{tg} v$ и прямой $z = \alpha v$ на плоскости (v, z).

38. Символический метод. Мы переходим теперь к изложению нового метода интегрирования одного линейного уравнения и систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Способ этот, соответственным образом обобщенный, применяется и к более сложным задачам. Сущность способа состоит в том, что мы будем обозначать символически операцию дифференцирования по независимой переменной t множителем D, стоящим слева от той функции, которую надо дифференцировать, так что если x есть некоторая функция t, то

$$Dx = \frac{dx}{dt}, \tag{102}$$

и вообще при любом целом положительном s

$$D^s x = \frac{d^s x}{dt^s}. \tag{103}$$

Если a — постоянная, то, очевидно,

$$D^s(ax) = aD^s x, \tag{104}$$

т. е. имеет место переместительный закон по отношению к произведению символического множителя на любой постоянный множитель.

Если $F(D)$ есть полином от D с постоянными коэффициентами

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n,$$

то операция $F(D)x$ определяется так:

$$F(D)x=a_0D^nx+a_1D^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}Dx+a_nx=$$
$$=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx.$$

Если $\varphi_1(D)$ и $\varphi_2(D)$ — два полинома и $\varphi(D)$ — их произведение, то, принимая во внимание формулу (104) и очевидное равенство $D^{n_1}(D^{n_2}x)=D^{n_1+n_2}x$, будем иметь

$$\varphi_1(D)[\varphi_2(D)x]=\varphi(D)x,$$

причем множители $\varphi(D)$ и $\varphi_2(D)$ можно переставлять.

Точно так же имеем, очевидно,

$$[\varphi_1(D)+\varphi_2(D)]x=\varphi_1(D)x+\varphi_2(D)x,$$

и полученный результат не зависит от порядка слагаемых $\varphi_1(D)$ и $\varphi_2(D)$.

Таким образом, обычные правила сложения, вычитания и умножения распространяются и на введенные нами символические полиномы.

В силу (104) постоянный множитель можно выносить за знак символического полинома, т. е. наряду с формулой (104) мы имеем

$$F(D)(ax)=aF(D)x,$$

но этого нельзя делать, конечно, с множителем, зависящим от t. Докажем теперь следующую формулу:

$$F(D)(e^{mt}x)=e^{mt}F(D+m)x, \tag{105}$$

где m — постоянная. Формула показывает, что *множитель вида e^{mt} можно выносить за знак символического полинома, заменяя в этом последнем букву D суммой $(D+m)$.*

Выражение $F(D)(e^{mt}x)$ состоит из слагаемых вида $a_{n-s}D^s(e^{mt}x)$, и достаточно доказать формулу (105) для каждого такого слагаемого, т. е. достаточно доказать формулу

$$D^s(e^{mt}x)=e^{mt}(D+m)^sx. \tag{106}$$

Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения, можем написать [I, 53]

$$D^s(e^{mt}x)=(e^{mt})^sx+(e^{mt})^{(s-1)}x'+C_s^1(e^{mt})^{(s-2)}x''+$$
$$+\ldots+C_s^k(e^{mt})^{(s-k)}x^{(k)}+\ldots+e^{mt}x^{(s)},$$

где значки наверху в скобках указывают порядок производной по t, и C_s^k есть число сочетаний из s элементов по k. Принимая во

внимание, что $(e^{mt})^{(p)} = m^p e^{mt}$ и $x^{(p)} = D^p x$, можем написать, вынося e^{mt} за скобку:

$$D^s(e^{mt}x) = e^{mt}(m^s x + C_s^1 m^{s-1} Dx + C_s^2 m^{s-2} D^2 x + \ldots + C_s^k m^{s-k} D^k x + \ldots + D^s x) =$$

$$= e^{mt}(m^s + C_s^1 m^{s-1} D + C_s^2 m^{s-2} D^2 + \ldots + C_s^k m^{s-k} D^k + \ldots + D^s)\, x.$$

Но правая часть совпадает с правой частью формулы (106). Таким образом, эта формула и формула (105) доказаны.

Определим теперь отрицательные степени D как операции, обратные дифференцированию, т. е. $D^{-s} f(t)$ определим как решение уравнения

$$D^s x = f(t), \tag{107}$$

причем, для того чтобы придать символу $D^{-s} f(t)$ определенный смысл, условимся брать то решение написанного уравнения, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x|_{t=t_0} = x'|_{t=t_0} = \ldots = x^{(s-1)}|_{t=t_0} = 0. \tag{108}$$

Иначе говоря, будем считать [17]:

$$D^{-s} f(t) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} f(u)\, du. \tag{109}$$

Общее решение уравнения (107) будет тогда [17]:

$$x = D^{-s} f(t) + P_{s-1}(t) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} f(u)\, du + P_{s-1}(t), \tag{110}$$

где $P_{s-1}(t)$ — многочлен $(s-1)$-й степени от t с произвольными коэффициентами.

Более общую операцию $(D-\alpha)^{-s} f(t)$ определим, как решение уравнения

$$(D-\alpha)^s x = f(t), \tag{111}$$

удовлетворяющее условиям (108). Чтобы найти это решение, введем вместо x новую неизвестную функцию z, полагая

$$x = e^{\alpha t} z. \tag{112}$$

Подставляя в уравнение (111) и пользуясь правилом, выраженным формулой (105), получим для z уравнение

$$e^{\alpha t}(D + \alpha - \alpha)^s z = f(t) \quad \text{или} \quad D^s z = e^{-\alpha t} f(t). \tag{113}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$z|_{t=t_0} = z'|_{t=t_0} = \ldots = z^{(s-1)}|_{t=t_0} = 0, \tag{114}$$

может быть определено по формуле (109), если только в ней заменить $f(t)$ на $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$z = \frac{1}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} e^{-\alpha u} f(u)\, du.$$

Но из формулы

$$D^j x = D^j e^{\alpha t} z = e^{\alpha t} (D+\alpha)^j z \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

вытекает, что если z удовлетворяет условиям (114), то x, определяемое по формуле (112), удовлетворяет условиям (108). Подставляя найденное выражение z в формулу (112), получим искомое решение уравнения (111)

$$(D-\alpha)^{-s} f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} e^{-\alpha u} f(u)\, du. \qquad (115)$$

Общее решение этого уравнения получим, если умножим общее решение уравнения (113) на $e^{\alpha t}$, т. е. это общее решение будет

$$x = (D-\alpha)^{-s} f(t) + e^{\alpha t} P_{s-1}(t) =$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} e^{-\alpha u} f(u)\, du + e^{\alpha t} P_{s-1}(t), \qquad (116)$$

где $P_{s-1}(t)$ — многочлен от t степени $(s-1)$ с произвольными коэффициентами.

В частности, полагая $f(t) = 0$, получим общее решение уравнения

$$(D-\alpha)^s x = 0 \qquad (117)$$

в виде

$$x = e^{\alpha t} P_{s-1}(t). \qquad (118)$$

39. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0. \qquad (119)$$

Обозначая символическим множителем D операцию дифференцирования по t и вводя полином

$$\varphi(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

можем написать уравнение в виде

$$\varphi(D)\, x = 0. \qquad (120)$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (119):

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0, \qquad (121)$$

и пусть это уравнение имеет корни $r_1, r_2, \ldots, r_m$ кратности $k_1, k_2, \ldots, k_m$:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n. \tag{122}$$

Разлагая полином $\varphi(D)$ на множители, можем представить уравнение (120) в виде

$$(D - r_1)^{k_1}(D - r_2)^{k_2}\ldots(D - r_m)^{k_m}x = 0. \tag{123}$$

Уравнение

$$(D - r_m)^{k_m}x = 0, \tag{124}$$

согласно формуле (118) [38], имеет общее решение

$$x = e^{r_m t}P_{k_m-1}(t), \tag{125}$$

где $P_{k_m-1}(t)$ — многочлен степени $(k_m - 1)$ с произвольными коэффициентами.

Функция (125) будет, очевидно, решением и уравнения (123). Действительно, подставляя в это уравнение выражение (125), в результате операции $(D - r_m)^{k_m}$ получим нуль, и операция

$$(D - r_1)^{k_1}(D - r_2)^{k_2} \ldots (D - r_{m-1})^{k_m - 1},$$

произведенная над нулем, даст очевидно также нуль. Переставляя множители, мы могли бы поставить ближайшим к x не множитель $(D - r_m)^{k_m}$, а какой-либо другой множитель $(D - r_s)^{k_s}$. Таким образом мы убеждаемся в существовании ряда частных решений:

$$x_s = e^{r_s t}P_{k_s-1}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \tag{126}$$

где $P_{k_s-1}(t)$ — многочлен степени $(k_s - 1)$ с произвольными коэффициентами.

Придавая в формуле (126) s все значения от 1 до m и складывая все полученные таким образом решения, будем иметь решение уравнения (123) [27]:

$$x = e^{r_1 t}P_{k_1-1}(t) + e^{r_2 t}P_{k_2-1}(t) + \ldots + e^{r_m t}P_{k_m-1}(t). \tag{127}$$

Всякий многочлен $P_{k_s-1}(t)$ степени $(k_s - 1)$ с произвольными коэффициентами содержит всего k_s произвольных постоянных, и следовательно, в силу соотношения (122), решение (127) содержит всего n произвольных постоянных. Ввиду этого обстоятельства можно думать, что формула (127) дает общее решение уравнения (119), т. е. что всякое решение этого уравнения заключается в формуле (127).

При $m = 1$ это было нами доказано выше формулой (118) из [38] и, таким образом, остается показать, что если наше утверждение справедливо для случая $(m - 1)$ сомножителей вида $(D - r_s)^{k_s}$, то оно будет справедливо и для m сомножителей. Докажем это. Урав-

нение (123) можно переписать в виде

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\ldots(D-r_{m-1})^{k_{m-1}}y=0,$$

где

$$y=(D-r_m)^{k_m}x.$$

Мы считаем доказанным наше утверждение для $(m-1)$ сомножителей, а потому для y имеем общее решение

$$y=(D-r_m)^{k_m}x=e^{r_1t}Q_{k_1-1}(t)+e^{r_2t}Q_{k_2-1}(t)+\ldots+e^{r_{m-1}t}Q_{k_{m-1}-1}(t),$$

где $Q_{k_s-1}(t)$ — произвольные многочлены степени (k_s-1). Полагая

$$x=e^{r_mt}z, \tag{128}$$

вынося e^{r_mt} за знак символического полинома и деля обе части равенства на e^{r_mt}, получим

$$D^{k_m}z=e^{(r_1-r_m)t}Q_{k_1-1}(t)+e^{(r_2-r_m)t}Q_{k_2-1}(t)+\ldots+e^{(r_{m-1}-r_m)t}Q_{k_{m-1}-1}(t).$$

Мы получим общее выражение для z, если проинтегрируем правую часть k_m раз по t и добавим многочлен степени (k_m-1) [17]. Но, как известно [1, 201], интеграл от произведения показательной функции e^{at} на многочлен k-й степени от t имеет тот же вид, т. е. z должно иметь вид

$$z=e^{(r_1-r_m)t}P_{k_1-1}(t)+e^{(r_2-r_m)t}P_{k_2-1}(t)+\ldots+e^{(r_{m-1}-r_m)t}P_{k_{m-1}-1}(t)+P_{k_m-1}(t).$$

В силу (128) получаем, что x должен обязательно иметь вид, даваемый формулой (127), что и требовалось доказать.

В частности, если все корни характеристического уравнения простые, то все многочлены $P_{k_s-1}(t)$ будут нулевой степени $(k_s=1)$, т. е. будут просто произвольные постоянные C_s, и общее решение уравнения будет иметь вид

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+\ldots+C_ne^{r_nt}.$$

Среди корней уравнения (121), коэффициенты которого мы считаем вещественными, могут быть и комплексные. Соответствующие им слагаемые в решении (127) нетрудно привести к вещественному виду, преобразуя показательные функции в тригонометрические. Положим, что уравнение (121) имеет пару мнимых сопряженных корней $(\gamma\pm\delta i)$ кратности k. Им соответствует решение вида

$$e^{(\gamma+\delta i)t}S_{k-1}(t)+e^{(\gamma-\delta i)t}T_{k-1}(t)=e^{\gamma t}[e^{\delta ti}S_{k-1}(t)+e^{-\delta ti}T_{k-1}(t)],$$

где $S_{k-1}(t)$ и $T_{k-1}(t)$ — многочлены степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами. Подставив

$$e^{\delta t i} = \cos \delta t + i \sin \delta t, \qquad e^{-\delta t i} = \cos \delta t - i \sin \delta t,$$

получим решение вида

$$e^{\gamma t} [U_{k-1}(t) \cos \delta t + V_{k-1}(t) \sin \delta t],$$

где $U_{k-1}(t)$ и $V_{k-1}(t)$ — многочлены степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами, связанные с $S_{k-1}(t)$ и $T_{k-1}(t)$ формулами

$$U_{k-1}(t) = S_{k-1}(t) + T_{k-1}(t), \qquad V_{k-1}(t) = i [S_{k-1}(t) - T_{k-1}(t)].$$

Из сказанного вытекает следующее правило [**32**]: *чтобы проинтегрировать уравнение* (119), *надо составить соответствующее ему характеристическое уравнение* (121) *и найти его корни. Всякому вещественному корню* $r = r'$ *кратности* k' *будет соответствовать решение вида*

$$e^{r't} P_{k'-1}(t),$$

где $P_{k'-1}(t)$ *— многочлен степени* $(k'-1)$ *с произвольными коэффициентами; всякой паре мнимых сопряженных корней* $r = \gamma \pm \delta i$ *кратности* k *соответствует решение вида*

$$e^{\gamma t} [U_{k-1}(t) \cos \delta t + V_{k-1}(t) \sin \delta t],$$

где $U_{k-1}(t)$ *и* $V_{k-1}(t)$ *— многочлены степени* $(k-1)$ *с произвольными коэффициентами. Складывая все таким образом полученные решения, будем иметь общее решение уравнения* (119). *В случае простых корней упомянутые полиномы суть произвольные постоянные.*

40. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$\varphi(D)\, x = f(t), \tag{129}$$

где $f(t)$ — заданная функция. Общий интеграл соответствующего однородного уравнения мы уже умеем составить, и нам остается найти лишь частное решение уравнения (129), которое и надо прибавить к упомянутому общему интегралу однородного уравнения, чтобы получить общий интеграл уравнения (129) [**26**]. Можно найти упомянутое частное решение, пользуясь символическим способом. Разложим рациональную дробь $\frac{1}{\varphi(D)}$ на простейшие [**I, 196**]:

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{q=1}^{k_s} \frac{A_s^{(q)}}{(D - r_s)^q}.$$

Определим функцию $\xi(t)$ по формуле

$$\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t), \tag{130}$$

которая имеет вполне определенный смысл, так как, согласно формуле (115) из [38], каждое слагаемое правой части имеет определенный смысл

$$\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t)=A_s^{(q)}\frac{e^{r_s t}}{(q-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{q-1}e^{-r_s u}f(u)\,du. \tag{131}$$

Нетрудно видеть, что формула (130) и дает решение уравнения (129). Действительно,

$$\varphi(D)\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\varphi(D)\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t).$$

Но, по определению символа $(D-r_s)^{-q}$, если к правой части (131) применить операцию $(D-r_s)^q$, то получится $A_s^{(q)}f(t)$. Полином $\varphi(D)$ делится на $(D-r_s)^q$, т. е. $\varphi(D)=\varphi_{sq}(D)(D-r_s)^q$, где $\varphi_{sq}(D)$ — полином, и следовательно, предыдущую формулу можно переписать так:

$$\varphi(D)\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}A_s^{(q)}\varphi_{sq}(D)f(t).$$

Но из разложения $\frac{1}{\varphi(D)}$ непосредственно вытекает, что

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}A_s^{(q)}\varphi_{sq}(D)=1,$$

и следовательно, $\varphi(D)\xi(t)=f(t)$, т. е. формула (130) дает действительно решение уравнения (129). Мы видим, таким образом, что нахождение решения уравнения (129) при любой заданной функции $f(t)$ приводится к разложению рациональной дроби на простейшие и к квадратурам.

В некоторых частных случаях бывает проще отыскивать частное решение уравнения (129) не по общей формуле (130), а способом неопределенных коэффициентов, как это мы указывали в [32].

Заметим, что, пользуясь указанным выше символическим способом, легко получить формулы (71) и (72) из [34].

41. Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$x^{(IV)}+2x''+x=t\cos t. \tag{132}$$

Характеристическое уравнение в данном случае будет

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (r^2+1)^2 = 0, \tag{133}$$

и оно имеет пару сопряженных корней $r = \pm i$ второй кратности. Общий интеграл однородного уравнения, соответствующего уравнению (132), будет

$$(C_1 t + C_2)\cos t + (C_3 t + C_4)\sin t. \tag{134}$$

Сравнивая свободный член уравнения с формулой (44) из [32], видим, что в данном случае $k = 0$, $l = 1$ и $P(t) \equiv t$, $Q(t) \equiv 0$. Числа $k \pm li = \pm i$ совпадают с парой корней второй кратности, так что решение уравнения (132), согласно [30], надо искать в виде

$$x = t^2 [(at + b)\cos t + (ct + d)\sin t]. \tag{135}$$

Вычисления будут проще, если мы преобразуем правую часть (132) к показательному виду. Делая это, а также написав левую часть в символической форме, перепишем (132) так:

$$(D^2+1)^2 x = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}. \tag{136}$$

Решение мы должны будем искать в виде

$$x = t^2 (at + b) e^{it} + t^2 (ct + d) e^{-it}. \tag{137}$$

Подставляем это выражение в левую часть уравнения

$$(D+i)^2 (D-i)^2 t^2 (at+b) e^{it} + (D+i)^2 (D-i)^2 t^2 (ct+d) e^{-it} = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Выносим e^{it} и e^{-it} за символический полином, согласно правилу (105):

$$e^{it} (D+2i)^2 D^2 (at^3 + bt^2) + e^{-it} (D-2i)^2 D^2 (ct^3 + dt^2) = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it},$$

или, заменяя D^2 второй производной

$$e^{it} (D^2 + 4iD - 4)(6at + 2b) + e^{-it} (D^2 - 4iD - 4)(6ct + 2d) = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Производим дифференцирование:

$$[-24at + (24ai - 8b)] e^{it} + [-24ct - (24ci + 8d)] e^{-it} = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Отсюда по методу неопределенных коэффициентов

$$-24a = \frac{1}{2}, \quad 24ai - 8b = 0, \quad -24c = \frac{1}{2}, \quad 24ci + 8d = 0,$$

или

$$a = -\frac{1}{48}, \quad b = \frac{1}{16} i, \quad c = -\frac{1}{48}, \quad d = \frac{1}{16} i.$$

Подставляя в (137), получим решение

$$x = -\frac{t^3}{24}\cos t - \frac{t^2}{8}\sin t, \tag{138}$$

и общий интеграл уравнения (132) будет

$$x = (C_1 t + C_2)\cos t + (C_3 t + C_4)\sin t - \frac{t^3}{24}\cos t - \frac{t^2}{8}\sin t. \tag{139}$$

42. Уравнение Эйлера. Это уравнение имеет вид

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0, \qquad (140)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные. Мы покажем, что оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами, если ввести вместо t новую независимую переменную τ по формуле

$$t = e^{\tau}. \qquad (141)$$

Операцию дифференцирования по t будем по-прежнему обозначать символическим множителем D, а дифференцирование по τ — символическим множителем δ. Имеем, очевидно,

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = e^{\tau}\frac{dx}{dt},$$

или, в символических обозначениях,

$$Dx = e^{-\tau}\delta x. \qquad (142)$$

Применяя к левой части операцию D, а к правой равносильную ей операцию $e^{-\tau}\delta$, получим

$$D^2 x = e^{-\tau}\delta\,(e^{-\tau}\delta)\,x.$$

Вынося множитель $e^{-\tau}$ за знак δ, согласно правилу, выраженному формулой (111), будем иметь

$$D^2 x = e^{-2\tau}(\delta - 1)\,\delta x = e^{-2\tau}\delta(\delta - 1)\,x.$$

Из этой формулы и формулы (142) подмечаем следующую общую формулу:

$$D^s x = e^{-s\tau}\delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)\,x. \qquad (143)$$

Надо доказать, что если эта формула справедлива для s символических множителей, то она справедлива и для $(s+1)$ множителей. Применяя к левой части формулы (143), которую мы считаем справедливой, операцию D, а к правой равносильную ей операцию $e^{-\tau}\delta$, получим

$$D^{s+1}x = e^{-\tau}\delta\,[e^{-s\tau}\delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)\,x],$$

откуда, вынося $e^{-s\tau}$ за знак δ,

$$D^{s+1}x = e^{-\tau}e^{-s\tau}(\delta - s)\,\delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)\,x = e^{-(s+1)\tau}\delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)(\delta - s)\,x,$$

что и доказывает справедливость формулы (143) при любом s.

Заменяя в этой формуле e^{τ} на t, можем переписать ее в виде

$$t^s D^s x = \delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)\,x. \qquad (144)$$

Таким образом, в результате преобразования (141) всякое слагаемое $a_{n-s}t^s x^{(s)}$ в левой части уравнения (140) заменяется слагаемым

$$a_{n-s}\delta(\delta - 1)\ldots(\delta - s + 1)\,x,$$

не содержащим независимой переменной τ, и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$[\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+1)+a_1\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+2)+\ldots+ \\ +a_{n-1}\delta+a_n]x=0. \quad (145)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение будет

$$r(r-1)\ldots(r-n+1)+a_1r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots+ \\ +a_{n-1}r+a_n=0 \quad (146)$$

и общее решение уравнения (145)

$$x=e^{r_1\tau}P_{k_1-1}(\tau)+e^{r_2\tau}P_{k_2-1}(\tau)+\ldots+e^{r_m\tau}P_{k_m-1}(\tau),$$

где r_s — корни уравнения (146), k_s — кратности этих корней и $P_{k_s-1}(\tau)$ — многочлены степени (k_s-1) с произвольными коэффициентами.

Пользуясь соотношением (141) и возвращаясь к прежней переменной, получим решение уравнения (140)

$$x=t^{r_1}P_{k_1-1}(\lg t)+t^{r_2}P_{k_2-1}(\lg t)+\ldots+t^{r_m}P_{k_m-1}(\lg t). \quad (147)$$

Если все корни уравнения (146) простые, то решение уравнения (140) будет

$$x=C_1t^{r_1}+C_2t^{r_2}+\ldots+C_nt^{r_n}. \quad (148)$$

Уравнение (146), как нетрудно видеть, получается, если непосредственно искать решение уравнения (140) в виде $x=t^r$.

Если имеется неоднородное уравнение вида

$$t^nx^{(n)}+a_1t^{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}tx'+a_nx=t^aP(\lg t), \quad (149)$$

где $P(\lg t)$ — многочлен от $\lg t$ степени p, то, пользуясь преобразованием (141), нетрудно показать, что решение уравнения (149) можно искать в виде

$$x=(\lg t)^st^aQ(\lg t), \quad (150)$$

где $Q(\lg t)$ — многочлен степени p от $\lg t$ и s — число корней уравнения (146), равных a.

Вместо уравнения (140) можно рассматривать более общее уравнение вида

$$(ct+d)^nx^{(n)}+a_1(ct+d)^{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+ \\ +a_{n-1}(ct+d)x'+a_nx=0. \quad (151)$$

В этом случае вместо формулы (141) надо воспользоваться следующей формулой преобразования переменных:

$$ct+d=e^{\tau},$$

и вместо формулы (144) будет иметь место формула

$$(ct+d)^s D^s x = c^s \delta(\delta-1)\ldots(\delta-s+1)x,$$

с помощью которой уравнение (151) и приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

43. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Во многих случаях положение механической системы определяется не одной, а несколькими независимыми величинами $q_1, q_2, \ldots, q_k$, которые называются *координатными параметрами*. Их число k дает *число степеней свободы*. Так, например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси мы имеем одну степень свободы — угол θ поворота тела вокруг оси. Вращение же тела вокруг неподвижной точки дает три степени свободы, и за координатные параметры можно, например, принять известные из кинематики твердого тела углы Эйлера: φ, ψ и θ. Движение точки по плоскости или сфере, или какой-либо иной поверхности представляет собой движение с двумя степенями свободы. В случае плоскости координатными параметрами могут служить обычные прямоугольные координаты x и y, а на сфере — долгота φ и широта ψ.

При движении механической системы ее координатные параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ являются функциями от времени t и определяются из системы дифференциальных уравнений и начальных условий. В частности, при рассмотрении малых колебаний системы около положения равновесия, которому соответствует значение параметров

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0,$$

обычно удерживают в дифференциальных уравнениях лишь члены первого измерения относительно q_s и $\frac{dq_s}{dt}$ и таким образом получают систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое из уравнений будет, вообще говоря, содержать все функции q_s и их производные по t первого и второго порядка.

В случае двух степеней свободы система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} a_1 q_1'' + b_1 q_1' + c_1 q_1 + a_2 q_2'' + b_2 q_2' + c_2 q_2 = 0, \\ d_1 q_1'' + e_1 q_1' + f_1 q_1 + d_2 q_2'' + e_2 q_2' + f_2 q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

где q_1', q_1'', q_2', q_2'' — произвольные от q_1 и q_2 по t.

Обозначая, как и выше, символическим множителем D операцию дифференцирования по t, можем переписать систему (152) так:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) q_1 + (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) q_2 = 0, \\ (d_1 D^2 + e_1 D + f_1) q_1 + (d_2 D^2 + e_2 D + f_2) q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Если на систему действуют внешние силы, то в правой части уравнений будут не нули, а известные функции t.

Начальные условия имеют вид

$$q_1|_{t=0}=q_{10},\quad q_1'|_{t=0}=q_{10}',\quad q_2|_{t=0}=q_{20},\quad q_2'|_{t=0}=q_{20}',$$

где q_{10}, q_{10}', q_{20}, q_{20}' — заданные числа, и общий интеграл системы (153) должен содержать четыре произвольные постоянные.

Покажем, каким образом интегрирование системы (153) приводится к интегрированию одного линейного уравнения четвертого порядка с одной неизвестной функцией [ср. **21**]. Для этого введем вспомогательную функцию V от t, полагая [**21**]

$$q_1=-(a_2D^2+b_2D+c_2)\,V,\quad q_2=(a_1D^2+b_1D+c_1)\,V. \tag{154}$$

Подставляя эти выражения q_1 и q_2 в уравнения (153), увидим, что первое уравнение будет удовлетворено при любом выборе V, и остается выбрать функцию V так, чтобы было удовлетворено и второе из уравнений (153).

Подставляя выражения (154) в это второе уравнение, получим для V уравнение четвертого порядка [1])

$$[(a_1D^2+b_1D+c_1)(d_2D^2+e_2D+f_2)- \\ -(a_2D^2+b_2D+c_2)(d_1D^2+e_1D+f_1)]\,V=0. \tag{155}$$

Найдя V, получим q_1 и q_2 из (154) простым дифференцированием.

Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — не кратные корни характеристического уравнения

$$(a_1r^2+b_1r+c_1)(d_2r^2+e_2r+f_2)- \\ -(a_2r^2+b_2r+c_2)(d_1r^2+e_1r+f_1)=0, \tag{156}$$

так что

$$V=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+C_3e^{r_3t}+C_4e^{r_4t}. \tag{157}$$

Подставляя это выражение в формулы (154) и принимая во внимание, что $De^{rt}=re^{rt}$ и $D^2e^{rt}=r^2e^{rt}$, получим общее выражение для q_1 и q_2. Оно будет представлять собою также линейную комбинацию четырех решений, каждое из которых будет содержать произвольный постоянный множитель. Так, например, решение $V=C_1e^{r_1t}$ даст

$$q_1=-C_1(a_2r_1^2+b_2r_1+c_2)\,e^{r_1t},\quad q_2=C_1(a_1r_1^2+b_1r_1+c_1)\,e^{r_1t}. \tag{158}$$

Если уравнение (156) имеет комплексные корни, что обычно и встречается в приложениях, то решение уравнений (155) полезно писать в тригонометрической форме, так что паре сопряженных корней $r=a\pm bi$ будут соответствовать решения для V:

$$C_1e^{at}\cos bt\quad\text{и}\quad C_2e^{at}\sin bt.$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $a_1d_2-a_2d_1\neq 0$; этот случай имеет всегда место при рассмотрении движения материальной системы.

Точно так же, если уравнение (156) имеет двукратный корень $r_1 = r_2$, то решения будут

$$C_1 e^{r_1 t} \quad \text{и} \quad C_2 t e^{r_1 t}.$$

Отметим теперь тот случай, когда предыдущие вычисления не дадут для q_1 и q_2 общего решения, содержащего четыре произвольные постоянные. Положим, что для некоторого корня r_1 уравнение (156) будет

$$a_1 r_1^2 + b_1 r_1 + c_1 = a_2 r_1^2 + b_2 r_1 + c_2 = 0. \tag{159}$$

В этом случае формулы (158) дадут для q_1 и q_2 тождественно нуль, и общее решение системы не будет содержать произвольной постоянной C_1. Мы можем попытаться восстановить эту потерянную произвольную постоянную тем путем, что для введения вспомогательной функции V воспользуемся вместо уравнений (154) уравнениями

$$q_1 = (d_2 D^2 + e_2 D + f_2)\, V, \qquad q_2 = -(d_1 D^2 + e_1 D + f_1)\, V. \tag{160}$$

При этом второе из уравнений (153) будет удовлетворено при всяком выборе V, и, подставляя выражения (160) в первое из уравнений (153), получим для V то же уравнение (155), что и выше. При этом корень r_1 характеристического уравнения (156) даст для q_1 и q_2 вместо (158) выражения

$$q_1 = C_1 (d_2 r_1^2 + e_2 r_1 + f_2) e^{r_1 t}, \qquad q_2 = -C_1 (d_1 r_1^2 + e_1 r_1 + f_1) e^{r_1 t}.$$

Если хоть один из множителей $(d_1 r_1^2 + e_1 r_1 + f_1)$ и $(d_2 r_1^2 + e_2 r_1 + f_2)$ будет отличен от нуля, то мы восстановим, таким образом, решение, соответствующее корню $r = r_1$ уравнения (156).

Остается еще рассмотреть тот случай, когда, кроме соотношений (159), имеют место соотношения

$$d_1 r_1^2 + e_1 r_1 + f_1 = d_2 r_1^2 + e_2 r_1 + f_2 = 0. \tag{161}$$

При этом нам не удается указанным путем восстановить решение, соответствующее корню $r = r_1$ уравнения (156). Но раз выполнены соотношения (159) и (161), то каждый из квадратных трехчленов, стоящих в левой части уравнения (156), будет иметь корень $r = r_1$, т. е. будет содержать множитель $(r - r_1)$. Следовательно, при выполнении соотношений (159) и (161) корень $r = r_1$ должен быть кратным корнем уравнения (156). Ограничимся рассмотрением того случая, когда $r = r_1$ будет двукратным корнем, и укажем два решения системы, соответствующие этому двукратному корню. Эти два решения будут

$$q_1 = C_1 e^{r_1 t}, \qquad q_2 = 0 \tag{162}$$

и

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = C_2 e^{r_1 t}. \tag{163}$$

Действительно, подставляя, например, выражения (162) в левую часть уравнений (153), получим, в силу соотношений (159) и (161), тождества.

Указанные два решения будут различны, так как в первом q_2 есть тождественно нуль, а во втором q_2 отлично от нуля.

Заметим, что если в случае кратного корня $r_1 = r_2$ не выполняется, например, одно из соотношений (159), то, подставляя в формулы (154):

$$V = C_1 e^{r_1 t} \quad \text{и} \quad V = C_2 t e^{r_1 t},$$

мы получим решение (158) и решение, содержащее t множителем

$$q_1 = -C_2 (a_2 r_1^2 + b_2 r_1 + c_2) t e^{r_1 t} + C_2 p_1 e^{r_1 t},$$
$$q_2 = C_2 (a_1 r_1^2 + b_1 r_1 + c_1) t e^{r_1 t} + C_2 p_2 e^{r_1 t},$$

где p_1 и p_2 — определенные постоянные.

Общий интеграл неоднородной системы

$$\left.\begin{aligned} (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) q_1 + (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) q_2 &= f_1(t), \\ (d_1 D^2 + e_1 D + f_1) q_1 + (d_2 D^2 + e_2 D + f_2) q_2 &= f_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

как и в случае одного уравнения, представляет собою сумму общего интеграла соответствующей однородной системы (153) и какого-либо частного решения неоднородной системы. Если свободные члены $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют вид

$$A_0 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_0 e^{\alpha t} \sin \beta t = D e^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi),$$

то и частные решения можно искать в виде

$$q_1 = A_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_1 e^{\alpha t} \sin \beta t, \qquad q_2 = A_2 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

если только $(\alpha \pm \beta i)$ не является корнем уравнения (156). Подставляя эти выражения в левые части уравнений (164) и приравнивая коэффициенты при $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$, получим уравнения для определения A_1, B_1, A_2, B_2.

Частные решения системы (164) можно получить при любых $f_1(t)$ и $f_2(t)$ так же, как мы это делали в случае одного уравнения [40]. Решая систему (164) относительно q_1 и q_2, получим, например, для

$$q_1 = \frac{d_2 D^2 + e_2 D + f_2}{\Delta(D)} f_1(t) - \frac{a_2 D^2 + b_2 D + c_2}{\Delta(D)} f_2(t),$$

где через $\Delta(D)$ мы обозначили для краткости символический полином, стоящий в левой части уравнения (155). Разлагая рациональные дроби и пользуясь указанным в [38] значением символического множителя $(D - r)^{-k}$, мы и получим искомое решение системы (164).

Заметим еще, что, пользуясь рассуждениями на [21], мы можем легко приводить интегрирование системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами к интегрированию одного линейного урав-

нения с постоянными коэффициентами. В томе III мы дадим общий прием интегрирования систем уравнений с постоянными коэффициентами.

44. Примеры. 1. Рассмотрим систему

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z+x, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}=y+2x,$$

где y и z — искомые функции от x. Определяя из первого уравнения z:

$$z=\frac{d^2y}{dx^2}-x \tag{165}$$

и подставляя во второе уравнение, получим уравнение четвертого порядка для y:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-y=2x,$$

общий интеграл которого определяется по обычным правилам:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-2x.$$

Подставляя это выражение в формулу (165), получим выражение для z:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x-x.$$

2. Рассмотрим систему трех уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=y+z, \qquad \frac{dy}{dt}=z+x, \qquad \frac{dz}{dt}=x+y, \tag{166}$$

где x, y и z — искомые функции от t. Решая первое уравнение относительно y:

$$y=\frac{dx}{dt}-z \tag{167}$$

и подставляя это выражение в остальные два уравнения, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dz}{dt}=z+x, \qquad \frac{dz}{dt}=x+\frac{dx}{dt}-z. \tag{168}$$

Подставляя выражение $\frac{dz}{dt}$ из второго уравнения в первое, получим уравнение второго порядка, содержащее одно только x (исключительный случай):

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0,$$

общий интеграл которого будет

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}. \tag{169$_1$}$$

Подставляя это во второе из уравнений (168), получаем уравнение первого порядка для z:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_1e^{2t},$$

общий интеграл которого будет

$$z=C_3e^{-t}+C_1e^{2t}. \tag{169$_2$}$$

Подставляя выражения (169_1) и (169_2) в формулу (167), получим выражение для y

$$y = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}. \qquad (169_3)$$

Здесь получился тот исключительный случай, о котором мы уже упоминали в [21]. Вместо одного дифференциального уравнения третьего порядка мы получили одно уравнение второго порядка и еще одно уравнение первого порядка.

3. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами встречаются не только при рассмотрении малых колебаний механических систем около положения равновесия, как мы уже упоминали выше, но и при исследовании электрических колебаний. Положим, что имеются две цепи, находящиеся в магнитной связи, т. е. ток одной из цепей создает магнитное поле, индуктирующее электродвижущую силу другой цепи. Если i_1 и i_2 — силы токов в цепях, то для первой цепи индуктированная электродвижущая сила будет $M\frac{di_2}{dt}$, а для второй $M\frac{di_1}{dt}$, где M — постоянный коэффициент взаимной индукции. Если мы предположим, что ни в одной из цепей нет источника тока, то уравнения будут

$$L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} + R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}i_1 + M\frac{d^2i_2}{dt^2} = 0, \qquad (170)$$

$$M\frac{d^2i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2i_2}{dt^2} + R_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}i_2 = 0, \qquad (171)$$

где L_1, R_1, C_1 — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость первой цепи, а L_2, R_2, C_2 — те же величины для второй цепи.

Покажем на примере этой системы, каким образом можно, не вводя вспомогательной функции V, исключить одну из неизвестных функций и составить одно дифференциальное уравнение четвертого порядка с одной неизвестной функцией.

Определяя из уравнения (171) $\frac{d^2i_2}{dt^2}$ и подставляя полученное выражение в уравнение (170), получим уравнение

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + L_2R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{C_1}i_1 - R_2M\frac{di_2}{dt} - \frac{M}{C_2}i_2 = 0. \qquad (172)$$

Дифференцируя это уравнение и заменяя $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ его выражением

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2} = -L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - R_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}i_1 \qquad (173)$$

из уравнения (170), получим

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + (L_1R_2 + L_2R_1)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt} + \\ + \frac{R_2}{C_1}i_1 - \frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt} = 0. \qquad (174)$$

Наконец, дифференцируя это уравнение еще раз и заменяя опять $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением (173), придем к линейному уравнению четвертого порядка для i_1:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4} + (L_1R_2 + L_2R_1)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \\ + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1C_2}i_1 = 0. \qquad (175)$$

Если бы мы стали исключать i_1, то для i_2 получили бы совершенно такое же уравнение четвертого порядка. Соответствующее ему характеристическое уравнение будет

$$(1-k^2)r^4+2(g_1+g_2)r^3+(n_1^2+n_2^2+4g_1g_2)r^2+ \\ +2(g_1n_2^2+g_2n_1^2)r+n_1^2n_2^2=0, \qquad (176)$$

где для краткости мы положили

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}, \quad n_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad n_2=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad g_1=\frac{R_1}{2L_1}, \quad g_2=\frac{R_2}{2L_2}.$$

Уравнение (176) можно переписать в виде

$$(r^2+2g_1r+n_1^2)(r^2+2g_2r+n_2^2)-k^2r^4=0. \qquad (177)$$

Если бы магнитной связи между цепями не было, то мы должны были бы в уравнениях (170) и (171) положить $M=0$ и получили бы два отдельных уравнения, определяющих явления разряда в цепях

$$\frac{d^2i_1}{dt^2}+2g_1\frac{di_1}{dt}+n_1^2i_1=0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2i_2}{dt^2}+2g_2\frac{di_2}{dt}+n_2^2i_2=0. \qquad (178)$$

Обыкновенно обе цепи бывают колебательными, иначе говоря, характеристические уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям (178)

$$r^2+2g_1r+n_1^2=0 \quad \text{и} \quad r^2+2g_2r+n_2^2=0, \qquad (179)$$

имеют комплексные корни, т. е. $g_1^2-n_1^2<0$ и $g_2^2-n_2^2<0$, или

$$\frac{R_1}{2L_1}<\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \quad \text{и} \quad \frac{R_2}{2L_2}<\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},$$

или иначе

$$\frac{R_1}{2}<\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad \text{и} \quad \frac{R_2}{2}<\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}.$$

Уравнение (177) при $k=0$ дает две пары комплексных сопряженных корней [корни уравнений (179)], и при небольших значениях M, каковые обычно и встречаются на практике, уравнение (177) будет также иметь две пары комплексных сопряженных корней с отрицательными вещественными частями: $r_{1,2}=-a\pm bi$ и $r_{3,4}=-c\pm di$, и общее выражение для i_1 будет

$$i_1=C_1e^{-at}\cos bt+C_2e^{-at}\sin bt+C_3e^{-ct}\cos dt+C_4e^{-ct}\sin dt.$$

Заметим, что, зная i_1, мы можем получить i_2 уже без всяких квадратур. Действительно, из уравнения (174) мы определим $\frac{di_2}{dt}$; подставляя найденное выражение в уравнение (172), получим уравнение первой степени относительно i_2. Выражение i_2 будет содержать члены того же вида, что и i_1, с коэффициентами, которые будут линейными комбинациями постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4.

Если пренебречь сопротивлениями, т. е. считать $g_1=g_2=0$ и, кроме того, считать, что цепи настроены на одну и ту же частоту, т. е. $n_1=n_2=n$, то уравнение (177) будет

$$(1-k^2)r^4+2n^2r^2+n^4=0,$$

откуда

$$r^2 = \frac{-n^2 \pm kn^2}{1-k^2} = -\frac{n^2}{1 \pm k},$$

и

$$r_{1,\,3} = \pm \frac{n}{\sqrt{1+k}}\,i, \qquad r_{2,\,4} = \pm \frac{n}{\sqrt{1-k}}\,i \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Этим чисто мнимым корням соответствует решение в виде тригонометрических функций. Таким образом, при магнитной связи цепей, настроенных на одинаковую частоту, возникают два колебания, частоты которых зависят от общей частоты n цепей и постоянной k, характеризующей магнитную связь следующим образом:

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1+k}}, \qquad n'' = \frac{n}{\sqrt{1-k}}.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

45. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда. Решения линейного уравнения с переменными коэффициентами выше первого порядка, как мы уже говорили, не выражаются, вообще говоря, через элементарные функции, и интегрирование такого уравнения не приводится, вообще говоря, к квадратурам. Наиболее употребительным приемом является представление искомого решения в виде степенного ряда, о чем мы уже говорили [15]. Этот прием является особенно удобным именно в применении к линейным дифференциальным уравнениям. Мы ограничимся рассмотрением уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{1}$$

Положим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представляются в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням x, так что уравнение имеет вид

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)\,y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)\,y = 0. \tag{2}$$

Обращаем внимание на то, что коэффициент при y'' мы считаем равным единице.

Будем искать решение уравнения (2) также в виде степенного ряда

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s. \tag{3}$$

Подставив это выражение y и его производных в уравнение (2), находим

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)\,a_s x^{s-2} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \sum_{s=1}^{\infty} s a_s x^{s-1} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s = 0.$$

Перемножая степенные ряды, собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x в левой части написанного равенства, получим ряд уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot 1a_2 + a_0a_1 + b_0a_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2a_3 + 2a_0a_2 + a_1a_1 + b_0a_1 + b_1a_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3a_4 + 3a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_2a_1 + b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0 = 0, \\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2} + Q_s(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{s+1}) = 0, \\ \cdot & \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \quad (4)$$

Через $Q_s(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{s+1})$ мы обозначили однородный многочлен первой степени от аргументов $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{s+1}$.

Каждое последующее из написанных уравнений содержит одним искомым коэффициентом больше предыдущего. Коэффициенты a_0 и a_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных. Первое из уравнений (4) дает a_2, а затем второе дает a_3, третье a_4 и т. д., и вообще из $(s+1)$-го уравнения можно определить a_{s+2}, зная предыдущие $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{s+1}$.

При этом удобно поступать следующим образом. Определим вышеуказанным способом два решения y_1 и y_2, причем для первого решения примем $a_0 = 1$ и $a_1 = 0$ и для второго $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$, что равносильно следующим начальным условиям:

$$y_1|_{x=0} = 1, \qquad y_1'|_{x=0} = 0,$$
$$y_2|_{x=0} = 0, \qquad y_2'|_{x=0} = 1.$$

Всякое решение уравнения будет линейной комбинацией этих решений, и если начальные условия имеют вид

$$y|_{x=0} = A, \qquad y'|_{x=0} = B,$$

то, очевидно,

$$y = Ay_1 + By_2.$$

Выше мы показали, что путем формальных вычислений можно постепенно определять коэффициенты степенного ряда (3). Но остается открытым вопрос о том, будет ли таким образом построенный степенной ряд сходящимся и будет ли он давать решение уравнения. В томе III мы дадим доказательство следующего предложения: *если ряды*

$$p(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s, \qquad q(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s$$

сходятся при $|x| < R$, то при этих значениях x построенный указанным выше образом степенной ряд будет также сходящимся и явится решением уравнения (2). В частности, если $p(x)$

и $q(x)$ — многочлены от x, то найденный степенной ряд будет сходиться при любом значении x.

Во многих случаях линейное уравнение имеет вид

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \tag{5}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлены от x. Чтобы привести его к виду (1), надо разделить обе части уравнения на $P_0(x)$, так что в этом случае надо считать

$$p(x) = \frac{P_1(x)}{P_0(x)}, \qquad q(x) = \frac{P_2(x)}{P_0(x)}. \tag{6}$$

Если свободный член многочлена $P_0(x)$ отличен от нуля, т. е. $P_0(0) \neq 0$, то, производя деление многочленов, расположенных по возрастающим степеням x, можно представить $p(x)$ и $q(x)$ в виде степенных рядов, и решение уравнения (5) также можно искать в виде степенного ряда. При этом нет необходимости приводить уравнение (5) к виду (1), но проще непосредственно подставить выражение (3) для y в левую часть уравнения (5) и затем применить способ неопределенных коэффициентов.

До сих пор мы рассматривали лишь степенные ряды, расположенные по целым положительным степеням x. Вместо этого можно было бы пользоваться рядами, расположенными по степеням разности $(x - a)$.

Все сказанное выше, очевидно, применяется и к линейным уравнениям выше второго порядка. Только в этом случае при отыскании решения в виде степенного ряда остаются неопределенными не первые два коэффициента, но число их, равное порядку уравнения.

Если имеется линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

у которого не только коэффициенты, но и свободный член суть степенные ряды, то его частное решение также можно искать в виде степенного ряда.

Сделаем одно замечание по поводу формул (6). Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена от x, причем $P(0) \neq 0$. Производя, как выше было сказано, деление многочленов, можем представить их частное в виде степенного ряда

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots; \tag{7}$$

но возникает вопрос: будет ли ряд, стоящий справа, сходящимся, и если это так, то в каком промежутке он будет сходиться, и будет ли его сумма равна левой части равенства? Решение этих вопросов очень просто вытекает из теории функций комплексной переменной, которая будет изложена в томе III. Мы приведем здесь лишь окончательный результат: *степенной ряд формулы (7) сходится при*

$|x|<R$, где R — модуль (или абсолютное значение) того корня уравнения $P(x)=0$, который имеет наименьший модуль, и равенство (7) имеет место при указанных значениях x. Отсюда вытекает, между прочим, что если интегрировать непосредственно уравнение (5) при помощи степенного ряда, то полученный ряд будет наверно сходящимся при $|x|<R$, где R — модуль наименьшего по модулю корня уравнения $P_0(x)=0$.

Заметим, что если доказать сходимость ряда (3) внутри промежутка $(-R, +R)$, то отсюда будет непосредственно вытекать, что сумма этого ряда дает решение уравнения. Действительно, прежде всего можно вычислять y' и y'' простым почленным дифференцированием ряда (3) [**I, 150**]. Далее, подставляя выражения y, y' и y'' в левую часть уравнения (2), мы можем почленно перемножать ряды y' и y на ряды $p(x)$ и $q(x)$ ввиду того, что степенные ряды сходятся абсолютно [**I, 137, 148**]. Наконец, в силу выбора коэффициентов a_n из равенств (4), мы имеем сокращение всех членов в левой части (2).

46. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y''-xy=0.$$

Подставляя ряд (3), получим

$$(2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots)-x(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2\cdot 1a_2=0,\\
x^1 & 3\cdot 2a_3-a_0=0,\\
x^2 & 4\cdot 3a_4-a_1=0,\\
x^3 & 5\cdot 4a_5-a_2=0,\\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2}-a_{s-1}=0,\\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Полагая $a_0=1$ и $a_1=0$, получим последовательно значения остальных коэффициентов

$$a_2=0,\qquad a_3=\frac{1}{2\cdot 3},\qquad a_4=a_5=0,\qquad a_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},$$

$$a_7=a_8=0,\qquad a_9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9},$$

т. е. отличными от нуля будут лишь коэффициенты a_s, у которых значок s делится на 3, и мы можем написать

$$a_{3k+1}=a_{3k+2}=0 \quad\text{и}\quad a_{3k}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3k-2)}{(3k)!}.$$

Построенное нами решение будет

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}.$$

Для построения второго решения положим $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. Нетрудно, как и выше, показать, что это второе решение будет

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

Построенные степенные ряды будут сходящимися при всяком значении x.

Проверим это для ряда y_1 по признаку Даламбера [I, 121]. В нем отношение последующего члена к предыдущему будет

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k+1)}{(3k+3)!} x^{3k+3} : \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} = \frac{1}{(3k+2)(3k+3)} x^2,$$

и при любом значении x абсолютное значение этого отношения стремится к нулю при беспредельном возрастании k, откуда и вытекает абсолютная сходимость ряда.

2. Рассмотрим уравнение

$$(1 - x^2) y'' - xy' + a^2 y = 0.$$

Подставляя ряд (3), получим, приравнивая коэффициент при x^n нулю, следующее соотношение между коэффициентами α_n:

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - n(n-1)\alpha_n - n\alpha_n + a^2\alpha_n = 0$$

или

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} = (n^2 - a^2)\alpha_n.$$

Полагая $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, получим решение

$$y_1 = 1 - \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^2(a^2-4)}{4!} x^4 - \frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{6!} x^6 + \ldots$$

Совершенно так же, подставляя $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$, получим

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!} x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-9)}{5!} x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-9)(a^2-25)}{7!} x^7 + \ldots$$

В рассматриваемом уравнении коэффициент $P_0(x) = 1 - x^2$ при y'' имеет корни $x = \pm 1$, а абсолютное значение обоих из этих корней равно единице. Отсюда вытекает, что ряды y_1 и y_2 должны сходиться при $-1 < x < +1$, т. е. при $|x| < 1$.

Нетрудно проверить это по признаку Даламбера. Беря отношение последующего члена к предыдущему, например, для ряда y_1, получим с точностью до знака

$$\frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n)^2]}{(2n+2)!} x^{2n+2} : \frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} x^{2n} =$$

$$= \frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} x^2.$$

Деля числитель и знаменатель на n^2, можем переписать абсолютное значение этого отношения в виде

$$\left| \frac{4 - \frac{a^2}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \right| |x|^2.$$

При беспредельном возрастании n это отношение стремится к $|x|^2$, и, очевидно, $|x|^2<1$ при $|x|<1$, т. е., согласно признаку Даламбера, ряд y_1 абсолютно сходится при $|x|<1$. Очевидно также, что он расходится при $|x|>1$, если только a не равно целому четному числу. В последнем случае ряд y_1 обрывается и превращается в многочлен. Аналогичные заключения получаются и для ряда y_2. Можно проверить, что решения y_1 и y_2 выражаются через элементарные функции

$$\cos(a \arccos x), \qquad \sin(a \arccos x).$$

47. Разложение решения в обобщенный степенной ряд. Значительное число уравнений, встречающихся в приложениях, имеет вид

$$x^2y'' + p(x)\cdot xy' + q(x)\,y = 0,$$

где $p(x)$ и $q(x)$, как и в уравнении (2), — ряды, расположенные по целым положительным степеням x, или просто многочлены. Ввиду наличия множителя x^2 при второй производной написанное уравнение не подходит под тип (2). Говорят, что написанное уравнение имеет в точке $x=0$ *регулярную особую точку*. Выписав явно степенные ряды $p(x)$ и $q(x)$

$$x^2y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)\,xy' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)\,y = 0, \qquad (8)$$

будем искать решение уравнения уже не в виде простого степенного ряда (3), а в виде произведения некоторой степени x на такой ряд:

$$y = x^\rho \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s, \qquad (9)$$

и первый коэффициент α_0 мы можем, конечно, считать отличным от нуля ввиду неопределенности показателя степени ρ у множителя x^ρ, стоящего перед знаком суммы.

Подставим в левую часть уравнения (8) выражения y, y' и y'':

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^{\rho+s}, \quad y' = \sum_{s=0}^{\infty} (\rho+s)\,\alpha_s x^{\rho+s-1},$$

$$y'' = \sum_{s=0}^{\infty} (\rho+s)(\rho+s-1)\,\alpha_s x^{\rho+s-2}$$

Собрав подобные члены и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях x, получим ряд уравнений

$$\left.\begin{array}{ll}
x^\rho & [\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0]\,\alpha_0 = 0, \\
x^{\rho+1} & [(\rho+1)\rho + a_0(\rho+1) + b_0]\,\alpha_1 + a_1\rho\alpha_0 + b_1\alpha_0 = 0, \\
x^{\rho+2} & [(\rho+2)(\rho+1) + a_0(\rho+2) + b_0]\,\alpha_2 + a_1(\rho+1)\,\alpha_1 + a_2\rho\alpha_0 + b_1\alpha_1 + \\
 & \qquad + b_2\alpha_0 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{\rho+s} & [(\rho+s)(\rho+s-1) + a_0(\rho+s) + b_0]\,\alpha_s + \\
 & \qquad + Q_s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}) = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Через $Q_s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1})$ мы обозначили однородный многочлен первой степени от аргументов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$.

Ввиду того, что, по условию, $\alpha_0 \neq 0$, первое из написанных уравнений дает квадратное уравнение для определения показателя ρ:

$$F(\rho) = \rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0. \qquad (11)$$

Уравнение это называется *определяющим уравнением.* Пусть ρ_1 и ρ_2 — его корни. Полагая в уравнениях (10) $\rho=\rho_1$ или $\rho=\rho_2$, будем иметь ряд уравнений, из которых каждое последующее будет содержать одним коэффициентом α_s больше предыдущего, и таким образом постепенно можно будет определить α_1, α_2, ... Коэффициент α_0 останется произвольным и будет играть роль произвольного множителя. Можно положить, например, $\alpha_0=1$.

После подстановки $\rho=\rho_1$ или $\rho=\rho_2$ первое из уравнений (10) обратится в тождество, второе даст α_1, третье α_2 и т. д. и вообще $(s+1)$-е даст α_s, если уже известны $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$. При этом надо только, чтобы коэффициент при α_s в этом уравнении был отличен от нуля. Непосредственно видно, что этот коэффициент может быть получен из левой части уравнения (11) заменою ρ на (ρ_1+s) или (ρ_2+s), т. е. он равен $F(\rho_1+s)$ или $F(\rho_2+s)$.

Положим, что при построении решения (9) мы исходили из корня уравнения (11) $\rho=\rho_2$. Если $F(\rho_2+s)\neq 0$ при любом целом положительном s, то указанный выше прием вычисления коэффициентов α_s будет выполним и даст определенные значения для этих коэффициентов.

Условие же $F(\rho_2+s)\neq 0$ равносильно, очевидно, тому условию, что второй корень ρ_1 уравнения (11) не есть число вида (ρ_2+s), где s — целое положительное число, т. е., иначе говоря, разность корней $(\rho_1-\rho_2)$ не должна быть целым положительным числом.

Из сказанного нетрудно вывести следующие заключения.

1. Если разность корней ρ_1 и ρ_2 уравнения (11) не равна целому числу или нулю, то можно использовать оба корня уравнения (11) и построить вышеуказанным способом два решения вида

$$y_1=x^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^s, \qquad y_2=x^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s x^s \qquad (\alpha_0 \text{ и } \beta_0\neq 0). \tag{12}$$

2. Если разность $(\rho_1-\rho_2)$ есть целое положительное число, то можно построить указанным выше способом, вообще говоря, лишь один ряд:

$$y_1=x^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^s. \tag{13}$$

3. Если уравнение (11) имеет кратный корень $\rho_1=\rho_2$, то также можно построить лишь один ряд (13).

По поводу сходимости построенных рядов имеет место предложение, аналогичное предложению, приведенному нами в [45]: *если ряды*

$$\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s \quad \text{и} \quad \sum_{s=0}^{\infty}b_s x^s$$

сходятся при $|x|<R$, *то при этих значениях* x *построенные выше ряды также будут сходящимися и будут давать решения уравнения* (8).

К разобранному приводится уравнение

$$x^2P_0(x)y''+xP_1(x)y'+P_2(x)y=0, \tag{14}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены или ряды, расположенные по целым положительным степеням x, причем $P_0(0)\neq 0$. Здесь, как и в [45], можно непосредственно подставлять ряд (9) в левую часть уравнения (14), не производя деление на $P_0(x)$. Кроме того, как и в [45], можно рассматривать ряды, расположенные по целым положительным степеням не x, а разности $(x-a)$.

В первом случае два построенных решения (12) будут линейно независимыми, т. е. их отношение не будет величиной постоянной, что вытекает

непосредственно из того факта, что выражения y_1 и y_2 содержат перед знаком суммы различные степени x^{ρ_1} и x^{ρ_2}. Во втором и третьем случаях мы построили только одно решение (13). Формула (9) из [25] дает возможность построить второе решение при помощи квадратуры. Пользуясь ею, нетрудно указать форму второго решения. Формулируем лишь результат. Если разность $\rho_1 - \rho_2$ есть целое положительное число или нуль, то, кроме (13), будет решение вида

$$y_2 = \beta y_1 \lg x + x^{\rho_2} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x^s \qquad (\beta_0 \neq s), \tag{15}$$

т. е. по сравнению с (12) появляется добавочное слагаемое $\beta y_1 \lg x$. Число β может оказаться и равным нулю, и тогда для y_2 получим формулу (12). Пусть $\rho_1 - \rho_2 = s$, где s — целое положительное число, т. е. $F(\rho_2 + s) = F(\rho_1) = 0$. Если при этом соответствующее Q_s в формуле (10) оказывается отличным от нуля, то $\beta \neq 0$. Если же $Q_s = 0$, то $\beta = 0$, и второе решение не содержит логарифма. Все высказанные выше утверждения будут нами доказаны в томе III.

48. Уравнение Бесселя. Это уравнение имеет вид

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0, \tag{16}$$

где p — заданная постоянная. Применения его встречаются в различных вопросах астрономии, физики и техники.

Сравнивая это уравнение с уравнением (8), видим, что $a_0 = 1$ и $b_0 = -p^2$, так что определяющее уравнение в данном случае будет

$$\rho(\rho - 1) + \rho - p^2 = 0, \qquad \text{или} \qquad \rho^2 - p^2 = 0,$$

и его корни

$$\rho_1 = p, \qquad \rho_2 = -p.$$

Ищем решение в виде

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

Подставляя в левую часть уравнения (16) и приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю, получим

$$\begin{array}{l|l} x^{p+1} & [(p+1)^2 - p^2]\, a_1 = 0, \\ x^{p+2} & [(p+2)^2 - p^2]\, a_2 + a_0 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{p+s} & [(p+s)^2 - p^2]\, a_s + a_{s-2} = 0. \end{array}$$

Подставляя $a_0 = 1$ и вычисляя последовательно коэффициенты, придем к решению

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2p+2)(2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\,(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots \right]. \tag{17}$$

Используя второй корень $\rho_2 = -p$, можем построить второе решение уравнения (16). Оно может быть получено, очевидно, из решения (17) простой заменой p на $(-p)$, так как уравнение (16) содержит только p^2 и не

меняется при замене p на $(-p)$:

$$y_2 = x^{-p}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots\right]. \quad (18)$$

Разность корней определяющего уравнения равна $2p$, а следовательно, оба написанных решения будут годиться, если p не равно целому числу или половине целого нечетного числа. Решение (17) с точностью до некоторого постоянного множителя дает *бесселеву функцию p-го порядка*, которую обозначают обычно через $J_p(x)$ и называют также *цилиндрической функцией первого рода*. Таким образом, если p не есть целое число или половина целого нечетного числа, то общее решение уравнения (16) будет

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x).$$

Степенной ряд, входящий в решение (17), сходится при любом значении x, в чем нетрудно убедиться по обычному признаку Даламбера.

Положим теперь, что $p = n$ есть целое положительное число. Решение (17) сохранит свою силу, а решение (18) потеряет силу, так как, начиная с некоторого числа, один из множителей в знаменателе членов разложения (18) будет равен нулю. При целом положительном $p = n$ бесселева функция $J_n(x)$ определяется из формулы (17) добавлением постоянного множителя $\frac{1}{2^n n!}$:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\right]. \quad (19)$$

Общий член в этом разложении будет

$$(-1)^s \frac{x^{n+2s}}{2^n\cdot n!\, 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2s\cdot(2n+2)(2n+4)(2n+6)\ldots(2n+2s)}.$$

В знаменателе каждый из $2s$ множителей, стоящих после $2^n\cdot n!$, содержит множитель 2. Относя этот множитель к 2^n, можем переписать общий член в виде

$$(-1)^s \frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s}\cdot n!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots s\cdot(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+s)} =$$
$$= \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

так что формула (19) может быть написана в виде

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (20)$$

причем, как всегда, считается, что $0! = 1$. В частности, при $n = 0$ получим

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \quad (21)$$

В силу сказанного в [47], уравнение (16) при целом положительном $p=n$ будем иметь наряду с решением (20) второе решение вида

$$K_n(x)=\beta J_n(x)\lg x+x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s x^s. \tag{22}$$

Это решение, очевидно, обращается в бесконечность при $x=0$.

Общий интеграл уравнения (16) при $p=n$ будет

$$y=C_1J_n(x)+C_2K_n(x). \tag{23}$$

Если мы хотим получить решение, конечное в точке $x=0$, то мы должны взять постоянную C_2 равной нулю, т. е. должны ограничиться решением (20).

Приведем более подробно вид решения (22) при $p=0$. В этом случае уравнение будет

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0, \tag{24}$$

и одно из его решений дается формулой (21). Второе решение можно искать в виде

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\ldots$$

Взяв линейную комбинацию этого решения с уже найденным, можем свободный член β_0 привести к нулю, так что окончательное решение можно искать в виде

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_1x+\beta_2x^2+\ldots$$

Подставляя это выражение в левую часть уравнения (24) и применяя способ неопределенных коэффициентов, последовательно определим коэффициенты β_n. Не приводя всех вычислений, мы только укажем окончательное выражение второго решения. При этом коэффициент β, который оказывается не равным нулю, мы полагаем равным единице

$$K_0(x)=J_0(x)\lg x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots \tag{25}$$

Эта функция называется *бесселевой, или цилиндрической, функцией нулевого порядка второго рода.*

Положим наконец, что $p=\frac{2n+1}{2}$ есть половина целого нечетного числа. Хотя в этом случае разность корней определяющего уравнения и равна целому числу $(2n+1)$, но оба решения (17) и (18) сохраняют силу и будут между собою линейно независимыми, так как у одного множитель перед степенным рядом будет $x^{\frac{2n+1}{2}}$, а у другого $x^{-\frac{2n+1}{2}}$, и следовательно, отношение этих двух решений не может быть постоянной величиной.

Подставляя, например, в решение (17) $p=\frac{1}{2}$, получим ряд

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot3\cdot5}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right]=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Умножая это решение на постоянный множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, получим бесселеву функцию $J_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \tag{26}$$

Точно так же формула (18) даст

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \tag{27}$$

и общий интеграл уравнения (16) при $p = \frac{1}{2}$ будет

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Укажем, не приводя доказательства, на то, что вообще бесселева функция со значком, равным половине нечетного числа, выражается через элементарные функции, а именно имеет вид

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin x + Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \cos x \right],$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ и $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлены от $1/x$. В частности,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right),$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right],$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x} \right),$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x \right].$$

Кроме того, для любого целого положительного n имеет место формула

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

В этой формуле надо четную функцию $\frac{\sin x}{x}$ дифференцировать n раз по x^2.

49. Уравнения, приводящиеся к уравнению Бесселя. Укажем некоторые уравнения, которые приводятся к уравнению Бесселя (16) заменой переменных. Рассмотрим уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - p^2) y = 0, \tag{28}$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Введем вместо x новую независимую переменную $\xi = kx$. При этом надо будет в уравнении (28) заменить

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = k\frac{dy}{d\xi} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{d\xi}\right) = k^2\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

так что уравнение (28) перепишется:

$$k^2x^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + kx\frac{dy}{d\xi} + (k^2x^2 - p^2)\,y = 0,$$

или

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi\frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)\,y = 0,$$

а это есть уравнение Бесселя (16) с независимой переменной ξ. Таким образом, в силу $\xi = kx$, общий интеграл уравнения (28) будет

$$y = C_1J_p(kx) + C_2J_{-p}(kx), \tag{29}$$

или, если $p = n$ есть целое положительное число или нуль,

$$y = C_1J_n(kx) + C_2K_n(kx). \tag{29$_1$}$$

Приведем еще обширный класс уравнений, приводящихся к уравнению Бесселя. Для этого введем в уравнение (16) новую независимую переменную t и новую функцию u по формулам

$$y = t^\alpha u \quad \text{и} \quad x = \gamma t^\beta, \tag{30}$$

где α, β и γ — постоянные, причем β и γ отличны от нуля. Дифференцируя, имеем очевидные равенства

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-\beta}{\beta\gamma}t^{-\beta}\frac{dy}{dt}\right)$$

и, кроме того,

$$\frac{dy}{dt} = t^\alpha\frac{du}{dt} + \alpha t^{\alpha-1}u, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t^\alpha\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha t^{\alpha-1}\frac{du}{dt} + \alpha(\alpha-1)\,t^{\alpha-2}u.$$

Подставляя выражения y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в уравнение (16) и заменяя $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ их последними выражениями через u, $\frac{du}{dt}$ и $\frac{d^2u}{dt^2}$, получим, после элементарных преобразований, уравнение для u:

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + (2\alpha+1)\,t\frac{du}{dt} + (\alpha^2 - \beta^2p^2 + \beta^2\gamma^2t^{2\beta})\,u = 0. \tag{31}$$

Уравнение (16) имело общий интеграл

$$y = C_1J_p(x) + C_2J_{-p}(x),$$

и следовательно, в силу (30), уравнение (31) будет иметь общий интеграл

$$u = t^{-\alpha}y = C_1t^{-\alpha}J_p(\gamma t^\beta) + C_2t^{-\alpha}J_{-p}(\gamma t^\beta), \tag{32}$$

причем, если $p = n$ — целое положительное число или нуль, то $J_{-p}(\gamma t^\beta)$ надо заменить на $K_n(\gamma t^\beta)$.

Уравнение (31) есть уравнение вида

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+at\frac{du}{dt}+(b+ct^m)u=0, \tag{33}$$

причем

$$2\alpha+1=a, \qquad \alpha^2-\beta^2p^2=b, \qquad \beta^2\gamma^2=c, \qquad 2\beta=m. \tag{34}$$

Можно, наоборот, для любого заданного уравнения вида (33), при условии, что постоянные c и m отличны от нуля, найти по формулам (34) α, β, γ и p и выразить общий интеграл уравнения (33), согласно формуле (32), через функции Бесселя.

Если c или m равно нулю, то уравнение (33) есть уравнение Эйлера [42] и приводится, следовательно, просто к уравнению с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим частный случай уравнения (33)

$$t\frac{d^2u}{dt^2}+a\frac{du}{dt}+tu=0. \tag{35}$$

Умножая уравнение на t, видим, что в данном случае a произвольно, $b=0$, $c=1$ и $m=2$. Уравнения (34) будут

$$2\alpha+1=a, \qquad \alpha^2-\beta^2p^2=0, \qquad \beta^2\gamma^2=1, \qquad 2\beta=2,$$

откуда можно считать

$$\alpha=\frac{a-1}{2}, \qquad \beta=1, \qquad \gamma=1, \qquad p=\frac{a-1}{2},$$

и, согласно (32), общий интеграл (35) будет

$$u=C_1t^{\frac{1-a}{2}}J_{\frac{a-1}{2}}(t)+C_2t^{\frac{1-a}{2}}J_{\frac{1-a}{2}}(t),$$

причем, если, например, значок $\frac{1-a}{2}$ окажется целым отрицательным или нулем, то надо заменить $J_{\frac{1-a}{2}}$ на $K_{\frac{a-1}{2}}$. При $a=1$ уравнение (35) совпадает с уравнением (24).

Вообще уравнение (33) дает обширный класс линейных уравнений, часто встречающихся в приложениях, общий интеграл которых выражается, как мы видим, через функции Бесселя.

§ 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

50. Метод последовательных приближений для линейных уравнений. Мы уже несколько раз упоминали о теореме существования и единственности для дифференциальных уравнений. Приведем доказательство этой теоремы сначала для случая линейных дифференциальных уравнений. Для доказательства мы применим так называемый метод последовательных приближений, которым мы уже пользовались для приближенного вычисления корней уравнений [I, 193].

Для определенности рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений

$$\frac{dy}{dx}=p_1(x)y+q_1(x)z, \qquad \frac{dz}{dx}=p_2(x)y+q_2(x)z \tag{1}$$

и начальные условия

$$y|_{x=x_0}=y_0, \qquad z|_{x=x_0}=z_0. \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнений (1) суть непрерывные функции x в некотором конечном замкнутом промежутке $I\,(a\leqslant x\leqslant b)$, содержащем начальное значение x_0, и в дальнейшем изложении мы считаем, что x принадлежит I.

Решения y и z системы (1) должны быть, конечно, непрерывными функциями, имеющими производную, и из самих уравнений видно, что и производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ будут непрерывными функциями [1]. Интегрируя уравнения (1) почленно от x_0 до x и принимая во внимание (2), получим

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}[p_1(t)\,y(t)+q_1(t)\,z(t)]\,dt,\\ z(x)&=z_0+\int\limits_{x_0}^{x}[p_2(t)\,y(t)+q_2(t)\,z(t)]\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь мы для отчетливости выписали аргументы у функций y и z, а переменную интегрирования обозначили через t, чтобы не путать ее с верхним пределом интегрирования x. Итак, уравнения (1) с начальными условиями (2) приводят нас к уравнениям (3).

Покажем теперь, наоборот, что если непрерывные функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнениям (3), то они удовлетворяют уравнениям (1) и начальным условиям (2). Действительно, полагая в уравнениях (3) $x=x_0$ и принимая во внимание, что интеграл с одинаковыми пределами равен нулю, получим начальные условия (2), а дифференцируя уравнения (3) по x, получим уравнения (1) [1, 96]. Из сказанного следует, что уравнения (3) в указанном смысле равносильны уравнениям (1) с начальными условиями (2), и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь уравнения (3). Отметим, что в этих уравнениях искомые функции $y(x)$ и $z(x)$ входят как в левую часть, так и под знак интеграла в правую часть.

Выясним идею метода последовательных приближений. Считая начальные значения y_0 и z_0 первыми приближениями к искомым функциям y и z, заменяем в правых частях уравнений (3) y и z на y_0 и z_0. Таким образом, получим функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)&=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}[p_1(t)\,y_0+q_1(t)\,z_0]\,dt,\\ z_1(x)&=z_0+\int\limits_{x_0}^{x}[p_2(t)\,y_0+q_2(t)\,z_0]\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

являющиеся вторым приближением к y и z. Эти функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$, очевидно, непрерывны в вышеупомянутом промежутке I [1,96]. Заменяя теперь в правых частях уравнений (3) y и z на $y_1(x)$ на $z_1(x)$, получим третье приближение $y_2(x)$ и $z_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t)\, y_1(t) + q_1(t)\, z_1(t)]\, dt,$$

$$z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(t)\, y_1(t) + q_2(t)\, z_1(t)]\, dt,$$

причем $y_2(x)$ и $z_2(x)$ опять непрерывны в промежутке I и т. д. Общая формула, дающая $(n+1)$-е приближение, будет

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t)\, y_{n-1}(t) + q_1(t)\, z_{n-1}(t)]\, dt, \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(t)\, y_{n-1}(t) + q_2(t)\, z_{n-1}(t)]\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

В промежутке I коэффициенты уравнений (1) суть, по условию, непрерывные функции, а потому в этом промежутке они будут по абсолютной величине не больше некоторого определенного положительного числа M [1, 35]:

$$|p_1(x)| \leqslant M, \quad |q_1(x)| \leqslant M, \quad |p_2(x)| \leqslant M, \quad |q_2(x)| \leqslant M \quad (x \text{ в } I). \qquad (6)$$

Обозначим, кроме того, буквой m наибольшее из двух положительных чисел $|y_0|$ и $|z_0|$, т. е.

$$|y_0| \leqslant m, \qquad |z_0| \leqslant m. \qquad (7)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь часть промежутка I, лежащую справа от x_0, т. е. будем считать $x - x_0 \geqslant 0$. Рассмотрение левой части может быть сделано так же.

Оценим разности между соседними последовательными приближениями. Первая из формул (4) дает

$$y_1(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} [p_1(t)\, y_0 + q_1(t)\, z_0]\, dt.$$

Заменяя под интегралом все величины абсолютными значениями и большими величинами, в силу (6) и (7) получим [1, 95]

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} (Mm + Mm)\, dt,$$

то есть

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant m2M(x - x_0), \qquad (8)$$

и совершенно так же

$$|z_1(x)-z_0|\leqslant m2M(x-x_0). \qquad (8_1)$$

Первое из уравнений (5) при $n=2$ будет

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_1(t)+q_1(t)z_1(t)]\,dt;$$

вычитая из него почленно первое из уравнений (4), получим

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)|y_1(t)-y_0|+q_1(t)|z_1(t)-z_0|\}\,dt.$$

Заменяя опять под интегралами все величины абсолютными значениями и пользуясь (6), (8) и (8_1), получим

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}\{Mm2M(t-x_0)+Mm2M(t-x_0)\}\,dt,$$

или

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant 2^2mM^2\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt=m2^2M^2\left[\frac{(t-x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

откуда окончательно

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}. \qquad (9)$$

Совершенно так же

$$|z_2(x)-z_1(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}. \qquad (9_1)$$

Далее, берем первые из уравнений (5) при $n=2$ и $n=3$. Почленно вычитая, получим

$$y_3(x)-y_2(x)=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y_2(t)-y_1(t)]+q_1(t)[z_2(t)-z_1(t)]\}\,dt.$$

Пользуясь (6), (9) и (9_1), как и выше, будем иметь

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant m\frac{2^3M^3}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^2dt,$$

откуда

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!},$$

$$|z_3(x)-z_2(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!}.$$

Продолжая так и дальше, можем написать общие оценки разности двух соседних приближений

$$\left.\begin{aligned} |y_n(x)-y_{n-1}(x)| &\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^n}{n!},\\ |z_n(x)-z_{n-1}(x)| &\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^n}{n!}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно показать, что функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ равномерно стремятся к некоторым предельным функциям $y(x)$ и $z(x)$[1]) при беспредельном увеличении значка n. Докажем это для последовательности функций $y_n(x)$. Эту последовательность мы можем заменить бесконечным рядом

$$y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+ \\ +[y_3(x)-y_2(x)]+\ldots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\ldots, \tag{11}$$

у которого сумма первых $(n+1)$ членов равна $y_n(x)$, и мы должны, таким образом, доказать равномерную сходимость ряда (11) [I, 144]. Если l есть длина промежутка I, в котором меняется x, то первая из формул (10) показывает, что члены ряда (11) по абсолютной величине не превосходят положительных чисел

$$m\frac{(2Ml)^n}{n!} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

а ряд, составленный из этих чисел, сходится по признаку Даламбера, так как отношение последующего члена к предыдущему, равное $\frac{2Ml}{n}$, стремится к нулю при беспредельном возрастании n. То же следует и из разложения e^x [I, 129]. Таким образом, согласно признаку Вейерштрасса [I, 147], ряд (11) равномерно сходится в промежутке I, т. е. в этом промежутке $y_n(x)$ равномерно стремятся к некоторой функции $y(x)$. Совершенно так же можно доказать, что и последовательность $z_n(x)$ равномерно стремится в I к некоторой предельной функции $z(x)$, т. е. в I имеет место равномерное по отношению x стремление к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x), \qquad \lim_{n\to\infty} z_n(x)=z(x). \tag{12}$$

Функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ непрерывны в I и, следовательно, то же можно утверждать и относительно предельных функций $y(x)$ и $z(x)$ [I, 145].

Отметим, что для части промежутка I, лежащей слева от x_0, где $x-x_0\leqslant 0$, мы должны в правых частях неравенств (8) и (8_1) заме-

---

[1]) Для дальнейшего существенно вспомнить параграфы о рядах с переменными членами и равномерной сходимости из тома I.

нить $(x - x_0)$ на $(x_0 - x)$. В дальнейших оценках надо будет $(t - x_0)$ заменить $(x_0 - t)$ и т. д. Неравенства (10) останутся справедливыми для всего промежутка I при условии замены $(x - x_0)$ абсолютным значением этой разности.

Докажем теперь, что предельные функции удовлетворяют уравнениям (3), т. е. уравнениям (1) и предельным условиям (2). Это непосредственно вытекает из формул (5), если в обеих частях этих уравнений перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда $y_n(x)$ и $y_{n-1}(t)$ будут стремиться к $y(x)$ и $y(t)$, а $z_n(x)$ и $z_{n-1}(t)$ — к $z(x)$ и $z(t)$, и в пределе для $y(x)$ и $z(x)$ получим уравнения (3). Проведем строго этот предельный переход. Из (12) следует

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [p_1(t)\, y_{n-1}(t) + q_1(t)\, z_{n-1}(t)] &= p_1(t)\, y(t) + q_1(t)\, z(t), \\ \lim_{n\to\infty} [p_2(t)\, y_{n-1}(t) + q_2(t)\, z_{n-1}(t)] &= p_2(t)\, y(t) + q_2(t)\, z(t). \end{aligned}\right\} \quad (12_1)$$

Докажем, что эти предельные переходы имеют место равномерно по отношению к t в промежутке I. Ограничимся первой формулой. Оценим разности между пределом и переменной:

$$\begin{aligned} |[p_1(t)\, y(t) + q_1(t)\, z(t)] - [p_1(t)\, y_{n-1}(t) + q_1(t)\, z_{n-1}(t)]| &\leqslant \\ \leqslant |p_1(t)|\,|y(t) - y_{n-1}(t)| + |q_1(t)|\,|z(t) - z_{n-1}(t)|. \end{aligned}$$

В силу равномерного стремления $y_{n-1}(t)$ и $z_{n-1}(t)$ к $y(t)$ и $z(t)$ при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует число N, одно и то же для всех t из I такое, что

$$|y(t) - y_{n-1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |z(t) - z_{n-1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{при } n > N.$$

Отсюда, в силу (6), следует, что при любых t из I имеет место при $n > N$ неравенство

$$|[p_1(t)\, y(t) + q_1(t)\, z(t)] - [p_1(t)\, y_{n-1}(t) + q_1(t)\, z_{n-1}(t)]| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерное стремление к пределу в формулах (12_1) во всем промежутке I и в любой его части (x_0, x). Обращаемся к формулам (5) и пользуемся возможностью перехода к пределу под знаком интеграла для равномерно сходящихся последовательностей [I, 145]. Переходя к пределу, получаем из этих формул уравнения (3) для $y(x)$ и $z(x)$.

Резюмируя, можем сказать, что метод последовательных приближений дал нам решение системы (1) при начальных условиях (2), т. е. мы доказали существование решения. Покажем теперь, что искомое решение единственно. Пусть уравнения (3) имеют два решения: $y(x)$, $z(x)$ и $Y(x)$, $Z(x)$. Подставляя в уравнение (3) сначала одно, а потом

другое решение и вычитая почленно, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} y(x)-Y(x)&=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y(t)-Y(t)]+q_1(t)[z(t)-Z(t)]\}\,dt,\\ z(x)-Z(x)&=\int_{x_0}^{x}\{[p_2(t)[y(t)-Y(t)]+q_2(t)[z(t)-Z(t)]\}\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Возьмем справа от x_0 промежуток l_1 такой длины l_1, чтобы произведение $2Ml_1=\theta$ было меньше единицы. Докажем, что в этом промежутке упомянутые два решения совпадают. Если бы это было не так, то абсолютные значения разностей

$$|y(x)-Y(x)|, \qquad |z(x)-Z(x)|$$

имели бы в l_1 положительный максимум, который мы обозначим числом δ. Пусть он достигается, например, первой разностью в точке $x=\xi$, т. е.

$$|y(\xi)-Y(\xi)|=\delta \quad (14)$$

и

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant\delta \quad \text{и} \quad |z(x)-Z(x)|\leqslant\delta \qquad (x \text{ в } l_1). \quad (14_1)$$

Рассмотрим первое из уравнений (13) при $x=\xi$. Оценивая интеграл, как это мы делали выше, получим, в силу (14_1),

$$|y(\xi)-Y(\xi)|<2M\delta(\xi-x_0),$$

откуда, пользуясь (14), а также тем, что ξ принадлежит промежутку l_1,

$$\delta<2Ml_1\delta, \qquad \text{то есть} \qquad \delta<\theta\delta,$$

а последнее неравенство нелепо, ибо, по условию, $0<\theta<1$.

Итак, нами доказано, что решения y, z и Y, Z должны совпадать на промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x_0+l_1$, где $2Ml_1<1$. Выбирая значения y, z при $x=x_0+l_1$ в качестве начальных условий, повторяем доказательство единственности для промежутка $x_0+l_1\leqslant x\leqslant x_0+l_1+l_2$, где $2Ml_2<1$. Покрывая, таким образом, часть промежутка I, лежащего справа от x_0, несколькими промежутками длины l_1 или меньшей (последний из покрывающих промежутков), можем утверждать совпадение решений на всей части I, лежащей справа от x_0. Аналогично поступаем и для части, лежащей слева от x_0. Формулируем теперь окончательный результат: *система* (1) *при начальных условиях* (2) *имеет одно определенное решение, которое существует в промежутке* I, *в котором коэффициенты системы* (1) *непрерывные функции, и это решение может быть получено по методу последовательных приближений.*

Отметим, что при вычислении первого приближения $y_1(x)$ и $z_1(x)$ мы можем в формулах (4) заменить под знаком интеграла y_0 и z_0

любыми функциями $y_0(x)$ и $z_0(x)$, непрерывными на промежутке I. Все последующее доказательство сохраняется. Не останавливаясь на доказательстве, приведем две оценки для абсолютного значения разностей $y(x)-y_n(x)$ и $z(x)-z_n(x)$ при $y_0(x)\equiv y_0$ и $z_0(x)\equiv z_0$:

$$|y(x)-y_n(x)|+|z(x)-z_n(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\left[e^{2M(x-x_0)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{[2M(x-x_0)]^k}{k!}\right](|y_0|+|z_0|),$$

$$|y(x)-y_n(x)|+|z(x)-z_n(x)|\leqslant$$

$$\leqslant M\int_{x_0}^{x}e^{2M(x-u)}[\,|y_n(u)-y_{n-1}(u)|+|z_n(u)-z_{n-1}(u)|\,]\,du$$

$$(x>x_0).$$

Для использования второй оценки надо знать оценку квадратной скобки, стоящей под знаком интеграла.

Указанный выше результат, касающийся существования и единственности решения, а также сходимости метода последовательных приближений, справедлив и в том случае, когда I есть открытый промежуток $c<x<d$, ибо, в силу указанного выше, мы будем иметь существование и единственность решения во всяком конечном замкнутом промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, содержащем значение x_0 и принадлежащем промежутку I.

Мы могли бы рассматривать и неоднородную систему, т. е. прибавить к правым частям уравнений (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, непрерывные в промежутке I, или общую линейную систему n уравнений с n искомыми функциями

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(x)\,y_k+f_i(x)\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$y_i|_{x=x_0}=y_i^{(0)}.$$

Предыдущее доказательство при этом остается в силе.

Линейное уравнение второго порядка

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \tag{15}$$

может быть написано в виде системы, если ввести, кроме y, искомую функцию $z=y'$:

$$\frac{dy}{dx}=z,\qquad\frac{dz}{dx}=-p(x)\,z-q(x)\,y,$$

и таким образом высказанный выше результат справедлив и для уравнения (15) при начальных условиях

$$y|_{x=x_0}=y_0,\qquad y'|_{x=x_0}=y_0' \tag{16}$$

в промежутке I непрерывности коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

Пользуясь условиями (16), можем переписать уравнение (15) в виде

$$y = y_0 + y_0' x - \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} [p(x) y' + q(x) y]\, dx, \tag{17}$$

причем двукратный интеграл можно заменить простым по формуле (22) из [17]. Равенство (17) дает возможность применять метод последовательных приближений к уравнению (15) и не приводя этого уравнения к системе.

Пример. Применим метод последовательных приближений к примеру, рассмотренному нами в [46]:

$$y'' - xy = 0.$$

Возьмем начальные условия $y|_{x=0} = 1$ и $y'|_{x=0} = 0$. Уравнение (17) в данном случае будет

$$y = 1 + \int_0^x dx \int_0^x xy\, dx.$$

Подставляя справа $y = 1$, получим второе приближение

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x\, dx = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}.$$

Третье приближение будет

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x\left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right) dx = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Переходя к пределу, получим степенной ряд

$$y = 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \ldots,$$

который мы имели в [46]. Коэффициент $(-x)$ есть непрерывная функция на бесконечном промежутке $-\infty < x < +\infty$, и написанный ряд сходится в этом промежутке. Это легко проверить, пользуясь признаком Даламбера [1, 121].

51. Случай нелинейного уравнения. Метод последовательных приближений применим и для нелинейных уравнений, но окончательный результат будет при этом несколько иным. Для простоты будем рассматривать сначала одно уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{18}$$

с начальным условием

$$y|_{x = x_0} = y_0. \tag{19}$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную по y в некоторой открытой области B (область, к которой не причисляется граница) плоскости XOY, причем

точка (x_0, y_0) принадлежит B. В дальнейшем, при рассмотрении непрерывных функций $y(x)$, определенных на некотором промежутке I изменения x, мы будем считать, что точки с координатами x, $y(x)$, при изменении x на I, принадлежат B, и $y(x)$ имеет производную. У такого решения $y=y(x)$ уравнения (18) производная $y'(x)$ непрерывна на I [ср. 1].

Если I содержит точку x и $y(x)$ есть решение задачи (18), (19), то $y(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t)]\,dt \qquad (x \text{ из } I), \tag{20}$$

и, наоборот, если $y(x)$ есть непрерывное на I решение этого интегрального уравнения, то $y(x)$ есть и решение задачи (18), (19) на I [50].

Выберем положительные числа a и b так, чтобы прямоугольник Q плоскости XOY, определяемый неравенствами (рис. 18)

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a, \qquad y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b, \tag{21}$$

принадлежал B. Поскольку функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, по предположению, непрерывны в замкнутом прямоугольнике Q, они ограничены по абсолютной величине, т. е. существуют такие положительные числа M и k, что

$$|f(x, y)|\leqslant M, \tag{22}$$

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|\leqslant k, \tag{23}$$

если (x, y) принадлежит Q. Отметим, что, если концы (x_1, y_1) и (x_1, y_2) отрезка, параллельного оси OX, принадлежат Q, то и все его точки принадлежат Q. Применяя формулу конечных приращений и учитывая (23), получим неравенство

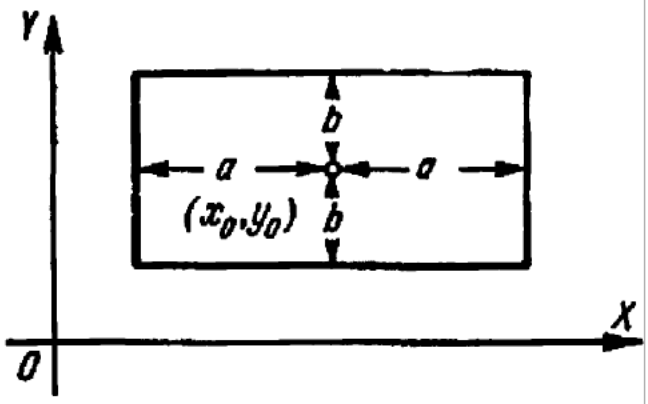


Рис. 18.

$$|f(x_1, y_2)-f(x_1, y_1)|\leqslant k\,|y_2-y_1|, \tag{24}$$

если (x_1, y_1) и (x_1, y_2) принадлежит Q. Это неравенство, обычно называемое *неравенством Липшица*, будет использовано в дальнейшем. Вычисление последовательных приближений будем производить по формулам, аналогичным (4) и (5):

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_{n-1}(t)]\,dt,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При вычислении по этим формулам надо прежде всего позаботиться о том, чтобы точки с абсциссами x и ординатами $y_n(x)$ не вышли из прямоугольника Q, определяемого условиями (21). Первое из них дает для x неравенство

$$|x - x_0| \leqslant a,$$

а второе сводится к неравенству

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b. \tag{26}$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось при всяком n, надо подчинить x, кроме уже поставленного условия $|x - x_0| \leqslant a$, еще условию $|x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}$, и окончательно получим два условия:

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}. \tag{27}$$

Покажем, что при этом все приближения будут удовлетворять условию (26). Первое приближение дает

$$y_1(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt,$$

и, оценивая, как всегда, интеграл, получим в силу (22):

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|,$$

откуда, в силу второго из условий (27), $|y_1(x) - y_0| \leqslant b$, т. е. неравенство (26) выполнено при $n = 1$. Кроме того, очевидно, функция $y_1(x)$, определяемая предыдущей формулой, непрерывна при соблюдении условий (27). Убедившись во всем этом, сможем вычислить $y_2(x)$ по формуле (25) при $n = 2$:

$$y_2(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\, dt,$$

откуда, как и выше,

$$|y_2(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0| \leqslant M\frac{b}{M} = b,$$

т. е. неравенство (26) выполнено и при $n = 2$, и, очевидно, $y_2(x)$ — непрерывная функция при соблюдении условий (27) и т. д. Таким образом, мы сможем определять последовательные приближения $y_n(x)$ в промежутке $(x_0 - c, x_0 + c)$, где, в силу (27), c есть наименьшее из двух чисел: a и $\frac{b}{M}$. Назовем этот промежуток через I. Все $y_n(x)$ суть непрерывные функции в I, и во всех дальнейших рассуждениях мы будем считать, что x принадлежит I.

Проведем теперь оценку разностей $y_n(x) - y_{n-1}(x)$, причем для простоты будем считать $x - x_0 > 0$, как это мы делали и в преды-

дущем. Первое из уравнений (25), в силу (22), дает

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant M(x - x_0). \tag{28}$$

Берем второе из уравнений (25) при $n = 2$ и вычитаем почленно из первого

$$y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \{f[t,\ y_1(t)] - f(t,\ y_0)\}\, dt,$$

откуда [I, 95]

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f[t,\ y_1(t)] - f(t,\ y_0)|\, dt,$$

или, в силу (24),

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} k\,|y_1(t) - y_0|\, dt.$$

Пользуясь неравенством (28), получим далее

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant kM \int_{x_0}^{x} (t - x_0)\, dt = kM \left[\frac{(t - x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

и окончательно

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant kM \frac{(x - x_0)^2}{2!}. \tag{29}$$

Далее, написав вторую из формул (25) при $n = 2$ и $n = 3$ и производя почленное вычитание, получим

$$y_3(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} \{f[t,\ y_2(t)] - f[t,\ y_1(t)]\}\, dt.$$

Пользуясь неравенствами (24) и (29), получим отсюда, как и выше,

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant k^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

и, продолжая так дальше, придем к общему неравенству

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{k} \frac{[k(x - x_0)]^n}{n!}. \tag{30}$$

Если справа разность $(x - x_0)$ заменить на $|x - x_0|$, то неравенство будет справедливо для всех x из I (справа и слева от x_0). Но при x из I мы имеем $|x - x_0| \leqslant a$, так что для всех x из I имеем оценку

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{k} \frac{(ka)^n}{n!},$$

из которой, как и в [50], следует, что $y_n(x)$ стремятся при $n \to \infty$ равномерно относительно x на промежутке I к предельной

функции $y(x)$. Эта функция непрерывна на I и удовлетворяет неравенству $|y(x)-y_0|\leqslant b$, которое следует из (26). Таким образом, точки с абсциссами x и ординатами $y(x)$ принадлежат прямоугольнику Q при изменении x на I. В силу непрерывности $f(x, y)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f[t,\ y_n(t)]=f[t,\ y(t)] \qquad (t \text{ из } I).$$

Нетрудно видеть, что этот предельный переход имеет место равномерно по отношению к t в промежутке I. Действительно, при любом заданном $\varepsilon>0$ существует, в силу равномерной непрерывности $f(x, y)$ в Q, такое $\delta>0$, что $|f(x'', y'')-f(x', y')|\leqslant\varepsilon$, если (x', y'), (x'', y'') такие точки из Q, что $|x''-x'|\leqslant\delta$ и $|y''-y'|\leqslant\delta$. Далее, в силу равномерного стремления $y_{n-1}(t)\to y(t)$ в I, существует такое число N (одно и то же для всех t из I), что $|y(t)-y_{n-1}(t)|\leqslant\delta$ при $n>N$ и всех t из I. Отсюда вытекает, что для всех t из I:

$$|f[t,\ y(t)]-f[t,\ y_{n-1}(t)]|\leqslant\varepsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant N,$$

что и доказывает равномерное по отношению t из I стремление к пределу

$$f[t,\ y_n(t)]\to f[t,\ y(t)].$$

Обращаемся ко второй из формул (25) и переходим в обоих частях к пределу при $n\to\infty$. В силу упомянутой только что равномерной сходимости, можем переходить к пределу под знаком интеграла и получим для предельной функции уравнение (20). Таким образом, мы пришли к следующему результату:

Задача (18), (19) *при сделанных относительно* $f(x, y)$ *предположениях имеет решение на промежутке* $x_0-c\leqslant x\leqslant x_0+c$, *где* c — *наименьшее из двух чисел* a *и* $\frac{b}{M}$, *и это решение может быть получено по методу последовательных приближений.*

Переходим к доказательству единственности решения задачи (18), (19), или, что то же, уравнения (20). Сначала, как и в **[50]**, докажем единственность для некоторого промежутка достаточно малой длины. Пусть на некотором промежутке $(x_0-l,\ x_0+l)$, где положительное число l удовлетворяет неравенствам $l\leqslant c$ и $kl=\theta<1$, имеются два решения $y(x)$ и $Y(x)$. Подставляя их в уравнение (20) и вычитая почленно полученные равенства, будем иметь

$$y(x)-Y(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[t,\ y(t)]-f[t,\ Y(t)]\}\,dt,$$

откуда

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f[t,\ y(t)]-f[t,\ Y(t)]|\,dt \qquad (x>x_0)$$

или, в силу (24),

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant k\int_{x_0}^{x}|y(t)-Y(t)|\,dt \qquad (x>x_0). \tag{31}$$

Предполагая, что решения различны на промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x_0+l$, можем утверждать, что $|y(x)-Y(x)|$ достигает на этом промежутке положительного наибольшего значения δ при некотором значении $x=\xi$. Подставляя в неравенство (31) $x=\xi$, придем, как и в [50], к неравенству: $\delta\leqslant kl\delta$ или $1\leqslant kl$, а, по условию, $kl<1$. Это противоречие и доказывает единственность на промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x_0+l$ и, аналогично, на промежутке $x_0-l\leqslant x\leqslant x_0$. Мы доказали, что если $(x_0,\ y_0)$ — любая точка из B, то решение задачи (18), (19) единственно на некотором промежутке $x_0-l\leqslant x\leqslant x_0+l$, т. е. мы доказали «единственность в малом».

Положим теперь, что задача имеет решение $y(x)$ на некотором промежутке I_1 и решение $Y(x)$ на промежутке I_2, причем как I_1, так и I_2 содержат $x=x_0$. Пусть I — промежуток, состоящий из точек, общих I_1 и I_2. На I существуют оба решения. Покажем, что они совпадают на I. Для определенности будем считать $x\geqslant x_0$ на I, что несущественно. Докажем совпадение $y(x)$ и $Y(x)$ на I от обратного. Положим, что $y(x)$ и $Y(x)$ не совпадают на I. В силу доказанного выше, они все же должны совпадать при всех $x>x_0$, и достаточно близких к x_0. Пусть E — множество таких значений x, что $y(x)$ и $Y(x)$ совпадают на промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x'$. Если некоторое x' принадлежит E, то всякое x'', удовлетворяющее условию $x_0<x''<x'$, также принадлежит E. По предположению, существуют такие значения x из I, при которых упомянутые решения не совпадают, откуда следует, что множество E должно иметь точную верхнюю границу, принадлежащую I. Обозначим ее через x_1. На каждом промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x'$ при $x_0<x'<x_1$ решения совпадают, и, в силу их непрерывности, они совпадают и на промежутке $x_0\leqslant x\leqslant x_1$. Но, по определению x_1, существуют такие $x>x_1$, и сколь угодно близкие x_1, при которых $y(x)$ и $Y(x)$ не совпадают. С другой стороны, приняв x_1 и $y(x_1)=Y(x_1)$ за начальные данные и применив доказанную выше «единственность в малом», мы можем утверждать, что $y(x)$ и $Y(x)$ должны совпадать при всех $x>x_1$ и достаточно близких к x_1. Полученное противоречие доказывает совпадение $y(x)$ и $Y(x)$ на всем I. Отметим, что в рассматриваемом случае промежуток $(x_0,\ x_0+c)$ изменения x определяется сложнее, чем это было в случае систем линейных уравнений, где он совпадал с промежутком непрерывности коэффициентов и свободных членов.

Пример. Рассмотрим задачу

$$y'=x^2+y^2, \qquad y|_{x=0}=0. \tag{32}$$

Уравнение (20) будет

$$y(x)=\int_0^x [t^2+y^2(t)]\,dt.$$

За область B мы можем брать всю плоскость XOY. Вычисляем $y_n(x)$:

$$y_1(x)=\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3}, \qquad y_2(x)=\int_0^x \left(t^2+\frac{t^6}{9}\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}, \ \ldots$$

Положительные числа a и b, определяющие прямоугольник Q, можно брать любыми. При этом $M=a^2+b^2$ и неравенства, определяющие искомый промежуток изменения x, имеют вид

$$|x|\leqslant a, \qquad |x|\leqslant\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Если брать b близким к нулю или большим, то второе неравенство дает тесный промежуток изменения x. То же будет, если брать a большим, а при a, близких к нулю, тесный промежуток дает первое неравенство. Таким образом, нам не удается получить для x сколь угодно большого промежутка изменения. Дробь $\frac{b}{a^2+b^2}$ имеет наибольшее значение $\frac{1}{2a}$ при $b=a$, откуда следуют неравенства: $|x|\leqslant a$ и $|x|\leqslant\frac{1}{2a}$, и наилучшей является оценка $|x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, но решение, очевидно, продолжимо как направо, так и налево во вне промежутка $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. Мы приведем более подробный разбор этого примера ниже. Нетрудно видеть, что решение задачи (32) есть кривая, симметричная относительно начала координат. Можно показать, что она уходит на бесконечность и имеет асимптоты $x=\pm h$, где

$$2{,}002<h<2{,}005.$$

Отметим, что решение задачи

$$y'=x^2-y^2, \quad y|_{x=0}=0$$

существует на бесконечном промежутке $-\infty<x<+\infty$.

52. Дополнения к теореме существования и единственности. Мы приведем теперь некоторые дополнительные результаты, непосредственно связанные с содержанием предыдущего номера. В нем было гарантировано существование решения задачи (18), (19) на промежутке $x_0-c\leqslant x\leqslant x_0+c$, где c — наименьшее из чисел a и $\frac{b}{M}$. Но решение может, конечно, существовать и на более широком промежутке. Мы можем взять значения $x=c$ и $y=y(c)$ за новые начальные данные и, таким образом, продолжить решение, оставаясь в области B. То же можно сделать и при $x=x_0-c$. При таком продолжении интегральная кривая беспредельно приближается к границе B. Если B — бесконечная область, то понятие приближения к границе B

включает в себя и бесконечное удаление точек интегральной кривой. В частности, если B есть вся плоскость и решение задачи (18), (19) продолжимо направо на промежуток $x_0 \leqslant x < h$, где h — конечное число, но не на больший промежуток, то можно показать, что решение $y = y(x)$ уходит на бесконечность, имея асимптоту $x = h$. Все эти утверждения являются следствием того, что во всякой ограниченной замкнутой области, принадлежащей B, имеют место оценки (22), (23), где M и k — некоторые положительные числа. Вообще при указанном продолжении решения $y = y(x)$ задачи (18), (19) получается максимальный открытый промежуток существования $p < x < q$ (конечный или бесконечный), так что всякое решение упомянутой задачи есть $y(x)$ на промежутке $p < x < q$ или на его части. Последнее совпадает с утверждением единственности решения задачи.

Обратимся теперь к условиям, которым мы подчинили $f(x, y)$. Отметим прежде всего, что при доказательстве нам было важно иметь в каждом прямоугольнике Q, принадлежащем B, не наличие и непрерывность производной $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, но лишь неравенство Липшица (24). Это неравенство вместе с непрерывностью функции $f(x, y)$ и можно взять как условия для $f(x, y)$. Но пример из [2] показывает, что одной непрерывности $f(x, y)$ недостаточно для единственности решения задачи (18), (19). Можно показать (теорема Пеано), что если $f(x, y)$ непрерывна в B и (x_0, y_0) — точка, принадлежащая B, то существует по крайней мере одно решение задачи (18), (19). Указанный выше пример из [2] показывает, что таких решений на промежутке $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$ при любом малом $\delta > 0$ может быть больше одного.

Доказательство из [51] применимо и для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_i|_{x=x_0} &= y_i^{(0)} \\ (i &= 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

В этом случае область B есть область изменения переменных $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. При $n = 2$ это есть область трехмерного пространства (x, y_1, y_2). При $n > 2$ это — область $(n+1)$-мерного пространства. Точка такой области есть последовательность $(n+1)$ чисел $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (координаты точки). Расстояние между двумя точками $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(n+1)$-мерного пространства определяется формулой

$$d = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k)^2}.$$

Открытая область B есть множество точек, обладающих следующими двумя свойствами: 1) если некоторая точка P принадлежит B,

то существует такое $\varepsilon > 0$, что B принадлежат и все точки, расстояние которых до P не больше ε; 2) если P и Q — любые две точки из B, то существуют такие непрерывные функции $\varphi_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, определенные на некотором конечном промежутке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что все точки, определяемые формулами

$$x = \varphi_0(t), \quad y_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

принадлежат B при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $t = \alpha$ дает координаты точки P и $t = \beta$ — координаты точки Q. Это условие на геометрическом языке означает, что P и Q могут быть соединены линией, все точки которой принадлежат B. В случае системы (33) условия теоремы А совершенно аналогичны условиям из [51]: функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные по всем y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в B, а точка $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ принадлежит B.

При доказательстве теоремы А в [51] мы исходили из рассмотрения прямоугольника Q, в центре которого находилась точка (x_0, y_0). Мы могли бы вместо этого рассматривать прямоугольник $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$, что привело бы к построению решения на промежутке $x_0 \leqslant x_0 \leqslant x + c$, и при этом числа a, b и c могли бы оказаться отличными от тех, которые мы имели в [51]. Как мы упоминали выше, условия, налагаемые на функцию $f(x, y)$, являются только достаточными для теоремы существования и единственности решения задачи (18), (19). Приведем другие, менее ограничительные условия, при которых имеет место упомянутая теорема и метод последовательных приближений, примененный в [51]. Мы сформулируем теорему для уравнения (18) и будем предполагать, что нулевое приближение есть некоторая функция $y_0(x)$ и что $x \geqslant x_0$. Аналогичная теорема имеет место и для систем.

Теорема (С. М. Лозинского). *Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области B (замкнутой или открытой) и существует такая неотрицательная интегрируемая (например, непрерывная) на конечном промежутке I $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$, принадлежащем B, функция $M(x)$, что $|f(x, y)| \leqslant M(x)$, если x принадлежит I, и точки (x, y) из B. Положим, далее, что конечная замкнутая область Q, определяемая неравенствами*

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad |y - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} M(u)\, du,$$

содержится в B, и существует такая неотрицательная, интегрируемая на I функция $k(x)$, что

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant k(x)\,|y_2 - y_1|,$$

если $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, и точки (x, y_2) и (x, y_1) принадлежат Q.

При этом: 1) *если функция* $y_0(x)$ *непрерывна на* I, *а точки* $(x, y_0(x))$ *при* $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, *принадлежат* B, *то формулы*

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt$$

определяют последовательность функций $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *таких, что точки* $(x, y_n(x))$ *принадлежат* Q *при* $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$; 2) *задача* (18), (19) *имеет на промежутке* I *единственное решение* $y = y(x)$, *принадлежащее* Q, *и последовательность функций* $y_n(x)$ *стремится к* $y(x)$ *равномерно на* I; 3) *имеют место оценки*

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{\int_{x_0}^{x} M(u)\,du + \max\limits_{x_0 \leqslant u \leqslant x} |y_0(u) - y_0|}{n!} \left[\int_{x_0}^{x} k(u)\,du\right]^n,$$

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} k(u)\,du} k(\xi)\,|y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)|\,d\xi.$$

Пример. Рассмотрим задачу

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y|_{x=0} = 0. \tag{34}$$

В качестве B возьмем замкнутую область, определяемую неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant x_1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant |y| \leqslant Ax^3,$$

где положительные числа x_1 и A — пока не определены. При этом

$$M(x) = x^2 + A^2x^6 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Область Q определяется неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad 0 \leqslant |y| \leqslant \frac{x^3}{3} + A^2\frac{x^7}{7},$$

и принадлежность Q к B равносильна неравенству

$$\frac{1}{3} + A^2\frac{x_1^4}{7} \leqslant A.$$

Для того чтобы при данном x_1 существовало A, удовлетворяющее этому неравенству, необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение

$$\frac{x_1^4}{7}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$$

имело вещественные корни, и для x_1 получаем оценку $x_1 \leqslant \sqrt[4]{\frac{21}{4}} = 1{,}51\ldots$, т. е. на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1{,}51$ существует решение задачи (34), и оно может быть получено методом последовательных приближений.

Можно показать, что решение имеет асимптоту $x = h$, где $h < 2{,}005$.

53. Сходимость метода Эйлера — Коши. Вернемся к задаче (18), (19) при указанных в [51] условиях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, и к прямоугольнику Q, определяемому неравенствами (21).

Проведем через центр этого прямоугольника в сторону возрастающих x прямые AB и AC с угловыми коэффициентами M и $(-M)$ [см. обозначение (22)] (рис. 19). Высота AD треугольника S с вершинами ABC равна, очевидно, $\frac{b}{M}$. Для определенности считаем, что $\frac{b}{M} < a$, так что на промежутке

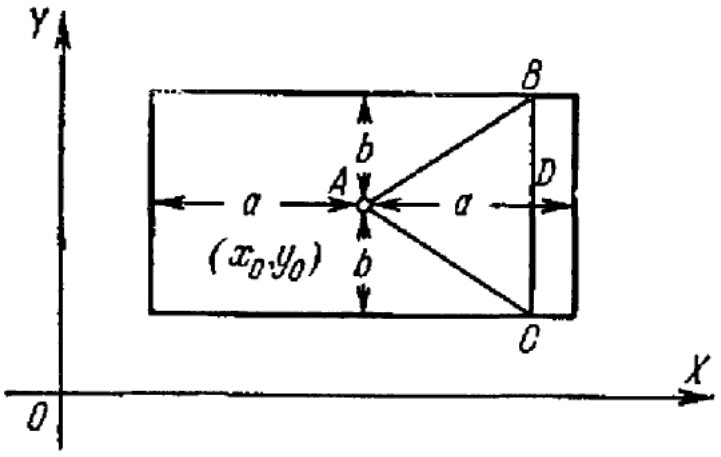


Рис. 19.

$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{M}$ имеется решение $y(x)$ задачи (18), (19).

Применим к этому промежутку метод Эйлера — Коши из [7]. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f(x, y)$, в Q существует такое число δ_ε, что

$$\left.\begin{aligned} &|f(x', y') - f(x, y)| \leqslant \varepsilon \\ &\text{при} \\ &|x' - x| \leqslant \delta_\varepsilon \\ &\text{и} \\ &|y' - y| \leqslant \delta_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

причем точки (x, y) и (x', y') считаются принадлежащими Q. При разбиении промежутка $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{M}$ на части

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_0 + \frac{b}{M} \quad (36)$$

считаем, что

$$\max |x_k - x_{k-1}| \leqslant \min\left(\delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M}\right). \quad (37)$$

Метод Эйлера — Коши приводит к следующей схеме для вычисления ординат ломаной линии l_ε, соответствующих абсциссам x_k [7]:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k &= y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Первое из этих равенств дает

$$|y_1 - y_0| \leqslant |f(x_0, y_0)|(x_1 - x_0) \leqslant M(x_1 - x_0),$$

откуда следует, что точка (x_1, y_1) принадлежит треугольнику S. Ему же принадлежит и весь отрезок ломаной l_ε, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Аналогично два первых равенства (38) дают

$$y_2 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

и

$$|y_2 - y_0| \leqslant M(x_1 - x_0) + M(x_2 - x_1) = M(x_2 - x_0),$$

откуда следует, что и точка (x_2, y_2) вместе с отрезком, соединяющим (x_1, y_1) и (x_2, y_2), принадлежат S. Продолжая так и далее, убедимся в том, что вся ломаная, построенная на основе разбиения (36) промежутка $\left(x_0, x_0 + \frac{b}{M}\right)$,

при соблюдениях условия (37) принадлежит S. Обозначим через $y = y_\varepsilon(x)$ уравнение этой ломаной. Производная функции $y'_\varepsilon(x)$ постоянна внутри каждого частичного промежутка $x_{k-1} < x < x_k$, а в точках $x = x_k$ имеет, вообще говоря, разрыв первого рода. Мы имеем, в силу (38),

$$y_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x_{k-1}) + f[x_{k-1}, y_\varepsilon(x_{k-1})](x - x_{k-1}) \text{ при } x_{k-1} < x < x_k$$

и

$$y'_\varepsilon(x) = f(x_{k-1}, y_\varepsilon(x_{k-1})) \qquad \text{при } x_{k-1} < x < x_k.$$

Из очевидной формулы

$$y'_\varepsilon(x) - f[x, y_\varepsilon(x)] = f[x_{k-1}, y_\varepsilon(x_{k-1})] - f[x, y_\varepsilon(x)] \quad \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k,$$

в силу (35) и (37), получаем

$$|y'_\varepsilon(x) - f[x, y_\varepsilon(x)]| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$, и, интегрируя разность, стоящую под знаком абсолютного значения от x_0 до x, где $x_0 < x \leqslant \frac{b}{M}$, получаем

$$\left|y_\varepsilon(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f[t, y_\varepsilon(t)]\, dt\right| \leqslant \varepsilon(x - x_0).$$

Для точного решения $y(x)$ задачи (18), (19) мы имели формулу (20). Вычитаем из выражения, стоящего под знаком абсолютного значения, величину

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt,$$

равную нулю:

$$\left|y_\varepsilon(x) - y(x) + \int_{x_0}^{x} \{f[t, y(t)] - f[t, y_\varepsilon(t)]\}\, dt\right| \leqslant \varepsilon(x - x_0)$$

при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{M}$. Обозначая $r_\varepsilon(x) = |y(x) - y_\varepsilon(x)|$, получаем

$$r_\varepsilon(x) \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \{f(t, y(t) - f[t, y_\varepsilon(t)]\}\, dt\right| + \varepsilon(x - x_0).$$

Точки $(x, y_\varepsilon(x))$ и $(x, y(x))$ при $x_0 \leqslant x \leqslant \frac{b}{M}$ принадлежат Q, и мы можем применить неравенство Липшица (24)

$$r_\varepsilon(x) \leqslant k \int_{x_0}^{x} r_\varepsilon(t)\, dt + \varepsilon(x - x_0).$$

Если положить

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} r_\varepsilon(t)\, dt,$$

то последнее неравенство принимает вид

$$R'(x) - kR(x) \leqslant \varepsilon(x - x_0).$$

Умножая обе части на $e^{-k(x-x_0)}$ и интегрируя по x от x_0 до x, придем к оценке

$$R(x) \leqslant -\frac{\varepsilon}{k^2}[1+k(x-x_0)] + \frac{\varepsilon}{k^2} e^{k(x-x_0)}.$$

Подставляя в правую часть (39) вместо интеграла правую часть последнего неравенства, придем к окончательному неравенству

$$r_\varepsilon(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1],$$

то есть

$$|y(x) - y_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1], \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{M}. \tag{40}$$

Это — оценка между истинным решением задачи (18), (19) и приближенным ее решением по методу Эйлера — Коши. Число $\varepsilon > 0$ можно задавать произвольно, но при уменьшении ε приходится прибегать к более мелким подразделениям промежутка $x_0 \leqslant x \leqslant \frac{b}{M}$ на части. Оценка (40) имеет место, очевидно, и на промежутке $x_0 - \frac{b}{M} \leqslant x \leqslant x_0$ при замене $x - x_0$ на $|x - x_0|$.

Мы рассмотрели случай $\frac{b}{M} \leqslant a$. При $a \leqslant \frac{b}{M}$, рассуждения по существу те же. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для системы уравнений. Можно показать, что указанная выше сходимость метода Эйлера — Коши имеет место на всяком замкнутом промежутке, принадлежащем промежутку существования этого решения.

54. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка. Если правая часть уравнения

$$y' = f(x, y)$$

в точке (x_0, y_0) и ее окрестности есть непрерывная функция, имеющая непрерывную производную по y, то через эту точку по теореме A [2] проходит одна и только одна интегральная кривая. Если эти условия не выполняются, то такое утверждение может и не иметь места. Напишем дифференциальное уравнение в форме, содержащей дифференциалы

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \tag{41}$$

и положим, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции однозначные, непрерывные и имеющие непрерывные производные по x и y на всей плоскости XOY. Если $P(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (41) запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{42$_1$}$$

и при соблюдении указанных условий точка (x_0, y_0) будет находиться внутри некоторой области B теоремы A для уравнения (42$_1$). Если

$P(x_0, y_0)=0$, но $Q(x_0, y_0)\neq 0$, то уравнение (41) запишем в виде

$$\frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (42_2)$$

и относительно точки (x_0, y_0) можем утверждать то же, что и выше для уравнения (42_1). *Особыми точками* уравнения (41) назовем те точки, координаты которых суть вещественные решения системы уравнений

$$P(x, y)=0, \qquad Q(x, y)=0. \qquad (43)$$

В таких точках уравнение (41) теряет смысл.

Таким образом, мы толкуем уравнение (41) как или уравнение (42_1), или уравнение (42_2) [см. 2].

В следующем параграфе мы заменим (41) системой

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \qquad (44)$$

и приведем в общих чертах исследование этой системы. Мы будем пользоваться этим приемом, как удобным практическим приемом, и в примере, к разбору которого мы переходим. Положим, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены первой степени, и особая точка находится в начале координат, т. е. уравнение (41) имеет вид

$$\frac{dx}{a_{11}x+a_{12}y}=\frac{dv}{a_{21}x+a_{22}y}, \qquad (45)$$

где

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0. \qquad (46)$$

При этом прямые $a_{11}x+a_{12}y=0$ и $a_{21}x+a_{22}y=0$ пересекаются в точке (0, 0), и все точки, кроме (0, 0), принадлежат области теоремы существования и единственности уравнения (42_1) или (42_2).

Уравнение (45), как нетрудно видеть, есть однородное уравнение и может быть проинтегрировано способом, указанным в [5]. Но мы применим другой способ, а именно, вводя новые переменные ξ и η, мы приведем сперва уравнение (45) к виду, более удобному для непосредственного исследования. Положим

$$\xi=m_1x+n_1y, \qquad \eta=m_2x+n_2y, \qquad (47)$$

где m_i, n_i $(i=1, 2)$ — постоянные. Имеем:

$$d\xi=m_1dx+n_1dy, \qquad d\eta=m_2dx+n_2dy.$$

Из уравнения (45), составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{d\xi}{m_1(a_{11}x+a_{12}y)+n_1(a_{21}x+a_{22}y)}=\frac{d\eta}{m_2(a_{11}x+a_{12}y)+n_2(a_{21}x+a_{22}y)}. \qquad (48)$$

Определим теперь коэффициенты в формулах (47) так, чтобы знаменатели написанных дробей были соответственно пропорциональны ξ и η. Для первого знаменателя будем иметь

$$m_1(a_{11}x+a_{12}y)+n_1(a_{21}x+a_{22})y=\rho(m_1x+n_1y),$$

откуда, сравнивая коэффициенты при x и y, получим систему уравнений для определения ρ, m_1, n_1 — линейную однородную по отношению m_1, n_1:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\rho)\,m_1+a_{21}n_1=0,\\ a_{12}m_1+(a_{22}-\rho)\,n_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (49_1)$$

Точно так же, обращаясь ко второму знаменателю и приравнивая его $\rho\eta$, получим систему

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\rho)\,m_2+a_{21}n_2=0,\\ a_{12}m_2+(a_{22}-\rho)\,n_2=0,\end{aligned}\right\} \qquad (49_2)$$

причем ρ может иметь и другое значение. Нулевые решения систем (49_1) и (49_2) не годятся, так как при этом преобразование переменных (47) теряет смысл. Нужно, чтобы эти системы имели решения, отличные от нулевого. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты указанных систем удовлетворяли условию

$$(a_{11}-\rho)(a_{22}-\rho)-a_{12}a_{21}=0,$$

то есть

$$\rho^2-(a_{11}+a_{22})\,\rho+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0. \qquad (50)$$

При выполнении этого условия как система (49_1), так и система (49_2) приведутся к одному уравнению, и можно получить для неизвестных (m_1, n_1) и (m_2, n_2) решения, отличные от нулевого. Отметим, что, в силу предположения (46), уравнение (50) не может иметь корня $\rho=0$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда уравнение (50) имеет различные вещественные корни $\rho=\rho_1$ и $\rho=\rho_2$. Подставляя в (49_1) $\rho=\rho_1$ и в (49_2) $\rho=\rho_2$, сможем найти отличные от нулевого решения (m_1, n_1) и (m_2, n_2) этих систем. Покажем, что

$$m_1n_2-m_2n_1\neq 0, \qquad (51)$$

т. е. что из уравнений (47) мы можем выразить x, y через ξ, η. Положим, например, что $a_{12}\neq 0$. Фиксируя $n_1\neq 0$ и $n_2\neq 0$, получаем $\frac{m_1}{n_1}=\frac{\rho_1-a_{22}}{a_{12}}$; $\frac{m_2}{n_2}=\frac{\rho_2-a_{22}}{a_{12}}$, откуда $\frac{m_1}{n_1}\neq\frac{m_2}{n_2}$, т. е. приходим к (51). Поскольку n_1 и n_2 можно полагать равными любому числу, отличному от нуля, можем считать, что $m_1n_2-m_2n_1=1$, и из (47) получаем

$$x=n_2\xi-n_1\eta, \qquad y=-m_2\xi+m_1\eta. \qquad (52)$$

В переменных ξ, η уравнение (45) имеет вид

$$\frac{d\xi}{\rho_1\xi}=\frac{d\eta}{\rho_2\eta}. \qquad (53)$$

Мы толкуем это уравнение, как и уравнение (41), в виде двух уравнений

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\rho_2\eta}{\rho_1\xi}, \qquad (53_1)$$

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\rho_1\xi}{\rho_2\eta}. \qquad (53_2)$$

Обозначая через dt общую величину отношений (53), придем к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\xi}{dt} = \rho_1 \xi, \tag{54_1}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \rho_2 \eta, \tag{54_2}$$

откуда

$$\xi = c_1 e^{\rho_1 t}, \qquad \eta = c_2 e^{\rho_2 t}, \tag{55}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Лишняя произвольная постоянная получилась за счет возможности замены t на $t + C_0$, где C_0 — произвольная постоянная. Отметим, что уравнение (53_2) имеет очевидное решение $\xi = 0$, а уравнение (53_1) решение $\eta = 0$, т. е. уравнение (45) имеет интегральными линиями прямые

$$m_1 x + n_1 y = 0, \tag{56_1}$$

$$m_2 x + n_2 y = 0. \tag{56_2}$$

Точнее говоря, мы должны говорить о четырех полупрямых, исключая начало, в котором уравнение (45) теряет смысл. Эти полупрямые стремятся к началу. Рассмотрим теперь отдельно следующие случаи:

1. Корни ρ_1 и ρ_2 вещественны, различны и одинаковых знаков. Подставляя в формулы (52) вместо ξ и η их выражения (55) и решая относительно x и y, получаем параметрическое уравнение интегральных линий

$$x = n_2 c_1 e^{\rho_1 t} - n_1 c_2 e^{\rho_2 t}, \qquad y = m_1 c_2 e^{\rho_2 t} - m_2 c_1 e^{\rho_1 t}, \tag{57_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_1 c_2 \rho_2 e^{(\rho_2 - \rho_1) t} - m_2 c_1 \rho_1}{n_2 c_1 \rho_1 - n_1 c_2 \rho_2 e^{(\rho_2 - \rho_1) t}}. \tag{57_2}$$

Если исключить прямые (56_1), (56_2) и значения $\xi = \eta = 0$, которым соответствует $x = y = 0$, то $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, переменные ξ и η не обращаются в нуль ни при каком t и формулы (57_1) не дают точки $x = y = 0$. Если ρ_1 и ρ_2 положительны, то, не нарушая общности, можем считать $\rho_2 > \rho_1$, а если ρ_1 и ρ_2 отрицательны, то будем считать $\rho_2 < \rho_1$. В первом случае из формул (57_1) и (57_2) следует, что $x \to 0$, $y \to 0$ и $\frac{dy}{dx} \to -\frac{m_2}{n_2}$ при $t \to -\infty$. Если же $\rho_2 < \rho_1 < 0$, то мы получим тот же результат при $t \to +\infty$, т. е. все интегральные линии (57_1) стремятся к точке (0, 0), и если мы добавим к ним эту точку, то получим линии, имеющие в этой точке общую касательную (56_2). Исключение в отношении последнего утверждения относительно касательной составляет интегральная прямая (56_1). Особая точка описанного типа называется *узлом*. В дальнейшем мы дадим полное определение узла. Отметим, что из (54_1) и (54_2) следует

равенство $\eta = C\,|\,m_1x + n_1y\,|^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$, т. е. уравнение (45) в рассматриваемом случае имеет общий интеграл вида

$$m_2x + n_2y = C\,|\,m_1x + n_1y\,|^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \tag{58}$$

где C — произвольная постоянная.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y},$$

которое имеет вид (45) ($\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$). Его интегральные линии — семейство парабол $y = Cx^2$ ($y = 0$ при $C = 0$) и ось $x = 0$ (рис. 20).

2. Корни ρ_1 и ρ_2 вещественны, различны и разных знаков. В этом случае формула (58) дает

$$|\,m_1x + n_1y\,|^{\mu}(m_2x + n_2y) = C \qquad \left(\mu = -\frac{\rho_2}{\rho_1} > 0\right). \tag{59}$$

Отсюда видно, что, кроме прямых (56_1) и (56_2), ни одна интегральная линия ($C \neq 0$) не приближается беспредельно к началу, т. е. невозможно, чтобы вдоль интегральной линии $x \to 0$ и $y \to 0$. Упомянутые интегральные прямые проходят через начало ($C = 0$). Каждая из них разбивается началом (особая точка) на две полупрямые. Особая точка такого типа называется *седлом*.

Обратимся к формулам (57_1), которые имеют место и в рассматриваемом случае. Положим, что $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 < 0$. Указанные прямые получаются, как нетрудно видеть, при $c_1 = 0$ и при $c_2 = 0$. На полупрямых, соответствующих первой прямой, $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to +\infty$ ($\rho_2 < 0$), а для другой прямой — при $t \to -\infty$ ($\rho_1 > 0$). На рис. 21 стрелкой отмечено направление, соответствующее стремлению t к $+\infty$.

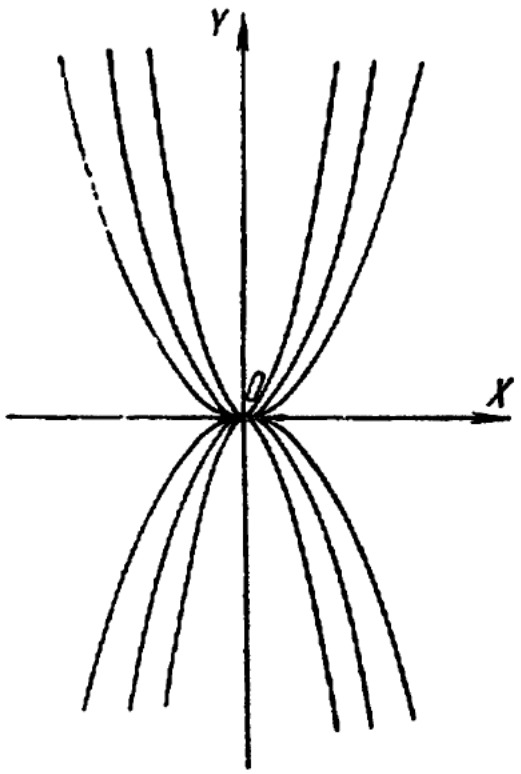


Рис. 20.

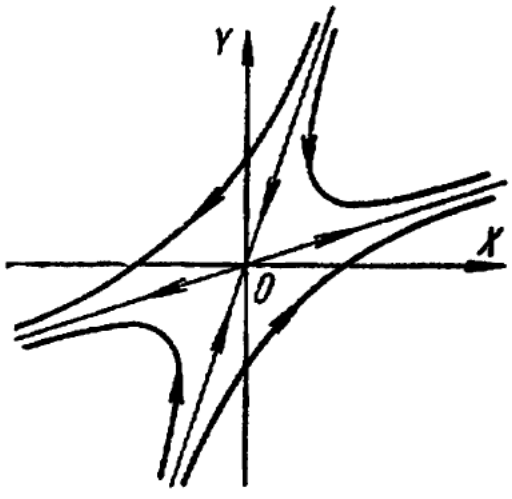


Рис. 21.

Отметим, что при $\mu = 1$ и $C \neq 0$ семейство (59) есть семейство двух гипербол, для которых прямые (56_1) и (56_2) суть асимптоты.

3. Корни ρ_1 и ρ_2 — мнимые сопряженные: $\rho_1 = \alpha + \beta i$ и $\rho_2 = \alpha - \beta i$, причем α и β отличны от нуля. Подставляя в коэффициенты системы (49_1) $\rho = \alpha + \beta i$, получим для (m_1, n_1) отличное от нуля решение, состоящее из комплексных чисел. Подставляя в коэффициенты системы (49_2) $\rho = \alpha - \beta i$, можем утверждать в виду вещественности a_{ik}, что отличное от нулевого решение системы будет $(\bar{m}_1, \bar{n}_1)$, причем через $\bar{a}$ мы обозначаем комплексное число, сопряженное с a.

Из формул (47) мы видим, что, в силу вещественности x и y, величины ξ и η суть комплексные сопряженные. Таким образом, левая и правая части равенства (53) должны быть комплексными сопряженными (или вещественными), и из самого факта их равенства следует, что эти величины должны быть вещественными. Обозначая их общую величину через dt, приходим к уравнениям (54_1) и (54_2), интегрирование которых с учетом того, что ξ и η — комплексные сопряженные, дает

$$\xi = Ce^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t), \qquad \eta = \bar{C}e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t), \qquad (60)$$

где $C = c_1 + c_2 i$ — комплексная постоянная. При $C = 0$ получаем $\xi = \eta = 0$, т. е. особую точку $x = y = 0$. При $C \neq 0$ имеем $|\xi| = |\eta| = |C| e^{\alpha t} \neq 0$, и эта величина $\to 0$ при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$, и при $t \to +\infty$ при $\alpha < 0$. Принимая во внимание линейную зависимость между переменными (ξ, η) и (x, y), можем утверждать, что все интегральные кривые уравнения (45) стремятся одним своим концом к особой точке (0, 0). Пользуясь формулами (60) и указанной зависимостью между переменными, нетрудно показать, что при приближении к точке (0, 0) все интегральные кривые спиралеобразно закручиваются вокруг этой точки в одном и том же направлении (рис. 22). Особая точка такого типа называется *фокусом*. Если мы положим $\xi = u + vi$ и $\eta = u - vi$, где u и v вещественны, то эти переменные выражаются через x и y по формулам вида

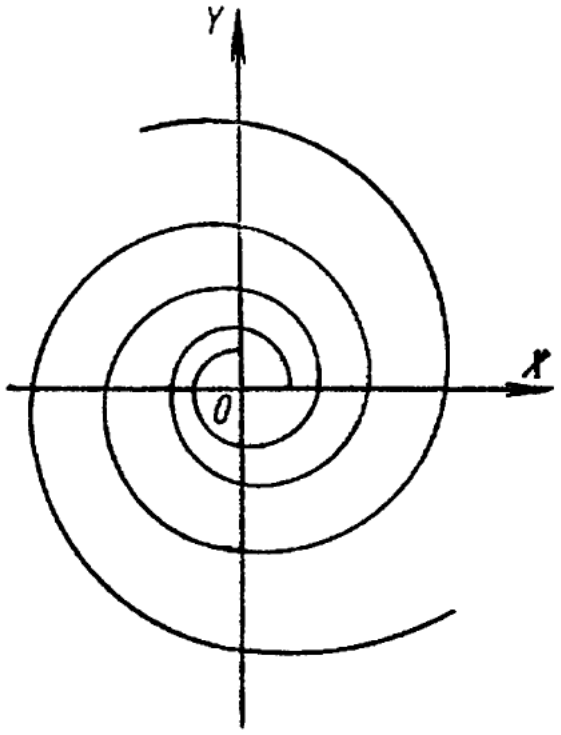


Рис. 22.

$$u = p_1 x + q_1 y, \qquad v = p_2 x + q_2 y, \qquad (61)$$

где p_k и q_k — вещественны и $p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$. Эти формулы дают возможность выразить x, y через u, v и убедиться на основании (60) в указанном выше поведении интегральных кривых на плоскости XOY вблизи точки (0, 0).

Для рассмотренных выше трех случаев мы имеем следующий характерный факт: при произвольном, но достаточно малом изменении

коэффициентов a_{ik} мы остаемся при прежнем предположении о корнях ρ_1, ρ_2, а следовательно, не меняется и характер расположения интегральных кривых в окрестности особой точки. Иное мы будем иметь в следующем случае.

4. Корни ρ_1 и ρ_2 — чисто мнимые: $\rho_1 = \beta i$, $\rho_2 = -\beta i$ ($\beta \neq 0$). Мы имеем формулы (60) при $\alpha = 0$, из которых следует, что $|\xi|^2 = |\eta|^2 = |C|^2$, т. е. $u^2 + v^2 = |C|^2$, откуда, принимая во внимание (61), получаем семейство интегральных кривых уравнения (45)

$$(p_1 x + q_1 y)^2 + (p_2 x + q_2 y)^2 = |C|^2, \tag{62}$$

т. е. интегральные кривые — подобные эллипсы или окружности. Ни одна интегральная кривая не проходит через особую точку, и эта последняя окружена замкнутыми интегральными линиями (рис. 23). Такая особая точка называется *центром*. В этом случае при сколь угодно малом изменении коэффициентов a_{ik} у чисто мнимых корней $\rho_{1,2} = \pm \beta i$ может появиться вещественная часть и центр превратится в фокус.

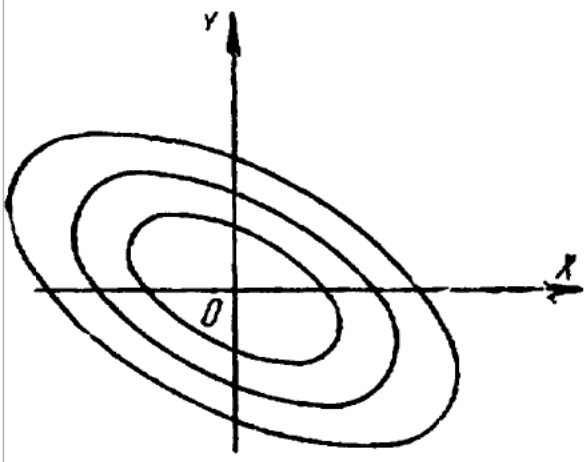


Рис. 23.

5. Уравнение (50) имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2$, отличный от нуля. При подстановке в коэффициенты системы (49_1) или (49_2) $\rho = \rho_1$ могут встретиться два случая: или все коэффициенты при этом обратятся в нуль, или среди коэффициентов будет по крайней мере один, отличный от нуля. Рассмотрим сначала первый случай

$$a_{12} = a_{21} = 0, \qquad a_{11} = a_{22} = \rho_1, \tag{63}$$

при этом система (45) будет иметь вид

$$\frac{dx}{\rho_1 x} = \frac{dy}{\rho_1 y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

и ее общий интеграл $y = Cx$ будет семейством прямых, проходящих через начало, т. е. начало координат будет *узлом*.

Среди коэффициентов a_{12}, a_{21}, $a_{11} - \rho_1$, $a_{22} - \rho_1$ есть по крайней мере один, отличный от нуля. Нетрудно видеть, что при этом a_{12} и a_{21} не могут оба быть равны нулю. Действительно, если $a_{12} = a_{21} = 0$, то, принимая во внимание кратность корня ρ_1 уравнения (50), получим $a_{11} = a_{22} = \rho_1$: при сделанном предположении уравнение (50) превращается в уравнение $\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} = 0$, и условие кратности корня этого уравнения дает $a_{11} = a_{22}$, и общая величина a_{11} и a_{22} и есть кратный корень уравнения. Итак, если предположить $a_{12} = a_{21} = 0$, то выполнены условия (63), что противоречит сделан-

ному нами предположению. Поэтому хотя бы один из коэффициентов a_{12} или a_{21} отличен от нуля. Положим, например, что $a_{21} \neq 0$. Кратный корень уравнения (50) будет, очевидно,

$$\rho_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2},$$

и система (49_1) при подстановке $\rho = \rho_1$ должна привестись, как мы выше упоминали, к одному уравнению

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{2} m_1 + a_{21} n_1 = 0.$$

Выберем $m_1 = a_{21}$ и $n_1 = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2}$, т. е.

$$\xi = a_{21} x - \frac{a_{11} - a_{22}}{2} y, \tag{64}$$

оставляя вторую переменную y прежней. Дифференциальное уравнение можно будет написать в виде

$$\frac{d\xi}{\rho_1 \xi} = \frac{dy}{a_{21} x + a_{22} y}$$

или, подставляя вместо x его выражение, определяемое из формулы (64),

$$\frac{d\xi}{\rho_1 \xi} = \frac{dy}{\xi + \rho_1 y}, \tag{65}$$

т. е.

$$\frac{dy}{d\xi} - \frac{y}{\xi} - \frac{1}{\rho_1} = 0.$$

Интегрируя это линейное уравнение, получаем

$$y = C\xi + \frac{\xi \lg |\xi|}{\rho_1}.$$

При $\xi \to 0$ имеем $y \to 0$ и $\frac{dy}{d\xi} \to +\infty$. Освобождаясь от знаменателя в уравнении (65), видим, что имеется еще решение $\xi = 0$, т. е.

$$a_{21} x - \frac{a_{11} - a_{22}}{2} y = 0. \tag{66}$$

Все интегральные линии стремятся одним своим концом к точке (0, 0) и касаются в этой точке прямой (66), т. е. мы имеем узел, но только с одной касательной в особой точке (рис. 24). Случай, когда уравнение (50) имеет корень $\rho = 0$, т. е. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, не представляет интереса. Считая естественно, что ни один из знаменателей в уравнении (45) не равен тождественно нулю, мы видим, что эти знаменатели в рассматриваемом случае отличаются лишь постоянным множителем, отличным от нуля, так что уравнение приводится к виду

$\frac{dy}{dx} = k$, где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Семейство интегральных линий есть семейство параллельных прямых.

Если мы в знаменателях уравнения (45) заменим x и y на $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, то получим, очевидно, те же картины расположения интегральных кривых, что и выше, но вместо (0, 0) особой будет точка (x_0, y_0).

Положим, что в уравнении (41) $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены, равные нулю в точке (0, 0), и выделим из них члены с первыми степенями

$$P(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + p(x, y), \quad Q(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + q(x, y), \quad (67)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ равны нулю в точке (0, 0) и их частные производные по x и y также равны нулю в этой точке. При этом в случаях: 1), 2) и 3) картина интегральных линий в окрестности точки (0, 0) будет того же характера, что и для уравнения (45), т. е. в случае 1) точка (0, 0) будет узлом; в случае 2) — седлом и в случае 3) — фокусом.

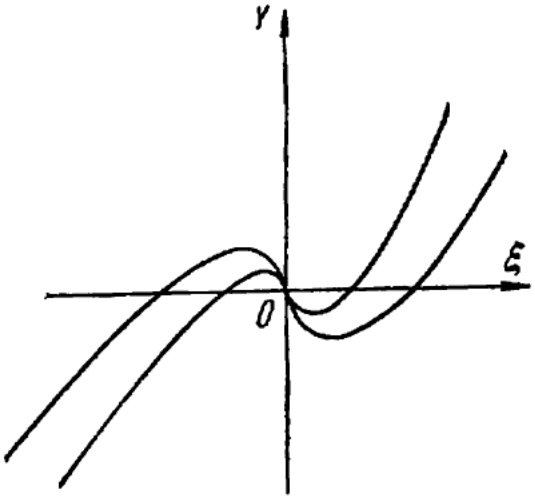


Рис. 24.

Сформулируем результат более точно.

В случае 1) все интегральные кривые, начинающиеся достаточно близко к точке (0, 0), стремятся одним своим концом к этой точке и при добавлении этой точки имеют в ней определенную касательную, причем две интегральные кривые имеют в точке (0, 0) общую касательную, т. е. составляют при добавлении этой точки одну кривую с непрерывно меняющейся касательной, а все остальные интегральные кривые имеют в точке (0, 0) другую общую касательную.

В случае 2) в окрестности (0, 0) существуют две пары интегральных кривых, стремящихся к точке (0, 0), причем кривые каждой пары вместе с точкой (0, 0) образуют одну кривую с непрерывно меняющейся касательной. Остальные интегральные кривые в окрестности (0, 0) не стремятся к этой точке и расположены примерно так, как и для уравнения (45).

В случае 3) все интегральные кривые в окрестности (0, 0), как и для уравнения (45), беспредельно приближаются к этой точке, спиралеобразно закручиваясь в одном и том же направлении.

В случае 4) особая точка может быть или фокусом или центром. В последнем случае все интегральные кривые, начинающиеся достаточно близко к особой точке, суть замкнутые кривые, содержащие особую точку внутри.

Указанные выше результаты сохраняются и для того, более общего случая, когда $p(x, y)$ и $q(x, y)$ определены только в окрестности (0, 0),

имеют в этой окрестности (включая точку (0, 0)) непрерывные частные производные до третьего порядка и частные производные первого порядка равны нулю в точке (0, 0).

55. Автономные системы. Вернемся к уравнению (41) и введем другие обозначения, а именно запишем его в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ x_2)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,\ x_2)}. \tag{68}$$

Вводя вспомогательную переменную dt, как это мы делали в [54], получим систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,\ x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,\ x_2). \tag{69}$$

Пусть $(x_1,\ x_2)$ — координаты точек плоскости X_1OX_2 и t — время. Будем считать, что $f_i(x_1,\ x_2)$ однозначные, непрерывные и имеют непрерывные частные производные первого порядка на всей плоскости. Таким образом, вся плоскость X_1OX_2 и промежуток $-\infty < t < +\infty$ изменения t являются областью B теоремы А существования и единственности в пространстве $(x_1,\ x_2,\ t)$. Уравнения (69) можно толковать как задание составляющих вектора скорости, т. е. самого вектора скорости, а решения его

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{70}$$

— как движения точек $(x_1,\ x_2)$ с течением времени. Решения уравнения (68) определяют траектории движущихся точек, а формулы (69) дают закон движения точек по этим траекториям в зависимости от времени.

Для системы (69) характерен тот факт, что правые части уравнений не содержат t, и такие системы называются обычно *автономными системами*. Мы рассматриваем случай движения на плоскости, т. е. случай двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Если при $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$ правые части уравнений обращаются в нуль: $f_1(a_1,\ a_2) = f_2(a_1,\ a_2) = 0$, т. е. точка $(a_1,\ a_2)$ есть особая точка уравнения (68), то система (69) имеет очевидное решение $x_1 \equiv a_1$ и $x_2 \equiv a_2$ при $-\infty < t < +\infty$ и точку $(a_1,\ a_2)$ естественно назвать *точкой покоя* системы. В [54] мы рассмотрели при некоторых предположениях вид траектории вблизи точек покоя. Положим для определенности, что во всякой ограниченной части плоскости имеется конечное число точек покоя. Если мы исключим все эти точки, то оставшаяся часть плоскости заполняется траекториями, каждая из которых имеет некоторый максимальный промежуток существования $a < t < b$, и эти траектории не пересекаются друг с другом. Из того факта, что t входит в уравнения (69) только под знаком дифференциала, непосредственно следует, что наряду с решением (70) имеется решение

$$x_i = \varphi_i(t + c) \qquad (i = 1,\ 2), \tag{70_1}$$

где c — произвольная постоянная. Если $a<t<b$ — максимальный промежуток существования решения (70), то для решения (70_1) это будет промежуток $a-c<t<b-c$. Обоим решениям соответствует одна и та же траектория. Решение (70_1) описывает ее с запаздыванием на величину c (при $c>0$) по сравнению с решением (70). Выше мы упоминали, что различные траектории не имеют общих точек. Рассмотрим одну определенную траекторию l (не точка покоя), у которой существуют совпадающие точки при различных t, т. е. $\varphi_i(t_1)=\varphi_i(t_2)$ $(i=1, 2)$ при $t_1\neq t_2$. Учитывая теорему существования и единственности, нетрудно видеть, что это замкнутая траектория, не содержащая, естественно, точек покоя (мы их исключили). Можно также доказать, что функции $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2)$, соответствующие такой траектории, имеют промежуток существования $-\infty<t<+\infty$ и обладают свойством периодичности, т. е. существует такое число ω, что $\varphi_i(t+\omega)=\varphi_i(t)$ $(i=1, 2)$ при всех t. Среди таких чисел ω имеется наименьшее, и все числа вида $k\omega$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ суть также периоды. Точка $x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1, 2)$ на всяком промежутке вида $d\leqslant t<d+\omega$ описывает замкнутую траекторию один раз.

Таким образом, кроме точек покоя, имеются два вида траекторий: 1) траектории, которые не самопересекаются (нет одинаковых точек при различных t); 2) замкнутые траектории. Последние называются также *циклами*. Все сказанное выше имеет место и в случае любого числа переменных

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{71}$$

Вернемся к случаю плоскости. Одной из основных задач теории дифференциальных уравнений является качественное изучение расположения траекторий на всей плоскости или, как говорят, «в целом». Существенную роль при этом играют точки покоя и циклы. Иначе говоря, это есть задача о качественной картине интегральных кривых уравнения (68) на всей плоскости. Точки покоя определяются решением системы уравнений

$$f_1(x_1, x_2)=0, \qquad f_2(x_1, x_2)=0.$$

Весьма сложной является задача разыскания циклов. Введем новое понятие. *Предельным циклом* называется изолированный цикл, т. е. цикл l, обладающий следующим свойством: существует такое положительное число ε, что траектория, проходящая через любую точку, кратчайшее расстояние которой до l меньше ε, не есть замкнутая траектория.

Траектории, проходящие через точку, лежащую внутри цикла l, в силу единственности лежат целиком внутри l. Аналогичное свойство имеет место и для траекторий, лежащих вне l. Приведем без доказательства еще два результата.

Внутри всякого цикла l находится по крайней мере одна точка покоя. Если l — предельный цикл, то все траектории, находящиеся как внутри, так и вне l и выходящие из точек, достаточно близких к l, наматываются спиралеобразно на l при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, причем возможны следующие случаи: 1) внутренние и внешние траектории наматываются на l при $t \to +\infty$; 2) то же самое при $t \to -\infty$; 3) один из указанных классов траекторий наматывается при $t \to +\infty$, а другой при $t \to -\infty$.

Предельные циклы имеют не только теоретическое, но и большое практическое значение в физике. Отметим, что, говоря о цикле, мы подразумеваем, как указано выше, замкнутую траекторию без точек покоя.

Можно доказать также следующие факты: траектории закручиваются вокруг точки покоя, являющейся фокусом, и стремятся к узлу при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$; если точка покоя — седло, то к ней стремятся четыре траектории: две при $t \to +\infty$ и две — при $t \to -\infty$, причем первые две и последние две образуют линии, проходящие через седло и имеющие непрерывно меняющуюся касательную.

Доказательство указанных выше утверждений и вообще изложение теории автономных систем можно найти в книге Л. С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

56. Примеры. 1. Возьмем пример из [9] и заменим дифференциальное уравнение системой

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 1 - 3x_1^2 - x_2^2. \tag{72}$$

Уравнение семейства траекторий имеет вид

$$x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = C. \tag{73}$$

Система (72) имеет четыре точки покоя $M_1(0, 1)$, $M_2(0, -1)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$. Пользуясь формулой Тейлора, разлагаем правые части уравнений (72) по степеням $(x_1 - \alpha)$, $(x_2 - \beta)$, где α, β — координаты особых точек, и составляем квадратное уравнение для ρ. Для точек M_1 и M_2 его корни вещественные и различных знаков, а для точек M_3 и M_4 — корни чисто мнимые. Таким образом, особые точки M_1 и M_2 типа седла, а M_3 и M_4 — или фокусы или центры. При $C = 0$ уравнение дает прямую $x_1 = 0$ и окружность L: $x_1^2 + x_2^2 = 1$, на пересечении которых лежат M_1 и M_2. Никакие другие траектории через эти точки проходить не могут, так что можно утверждать, что существует четыре типа траекторий: 1) траектории вне окружности L и справа от $x_1 = 0$, 2) симметричные с ними относительно оси $x_1 = 0$; 3) траектории внутри L и справа от $x_1 = 0$; 4) симметричные с ними относительно $x_1 = 0$. Указанная симметрия непосредственно следует из того, что левая часть уравнения (73) не меняется при замене x_2 на $(-x_2)$. Из (73) следует, что траектории, лежащие вне L, имеют ось $x_1 = 0$ асимптотой. Для исследования траекторий, лежащих внутри L, разложим левую часть (73)

по степеням $\left(x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и x_2:

$$\sqrt{3}\left(x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x_2^2+\left(x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x_2^2=C.$$

Из этого равенства следует, что траектории, лежащие внутри L, кроме части оси $x_1=0$, суть замкнутые кривые, внутри которых лежат точки покоя M_3 и M_4 — центры. Нетрудно показать, что вообще семейство алгебраических кривых не может иметь предельных циклов. Картина траекторий системы (72) изображена на рис. 25. Полагая во втором из уравнений (72) $x_1=0$, получим

$$\frac{dx_2}{dt}=1-x_2^2,$$

откуда $\frac{dx_2}{dt}>0$ при $|x_2|<1$ и $\frac{dx_2}{dt}<0$ при $|x_2|>1$, что определяет направление движения по оси $x_1=0$ при возрастании t. Легко получить это направление и на других траекториях (рис. 25).

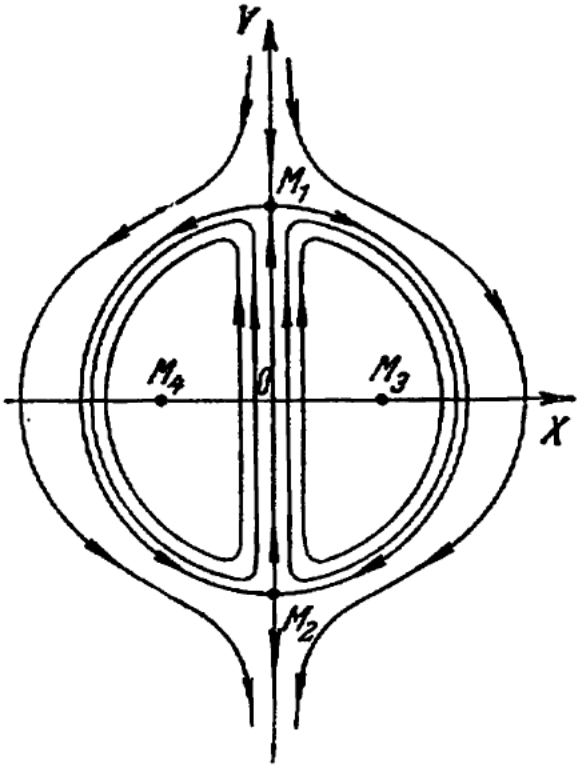


Рис. 25.

Введем полярные координаты $\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ и угол φ и определим производную ρ^2 по t вдоль траекторий. Пользуясь уравнениями (72), получим

$$\frac{d\rho^2}{dt}=2\left(x_1\frac{dx_1}{dt}+x_2\frac{dx_2}{dt}\right)=2x_2(1-\rho^2),$$

откуда

$$\frac{d\rho}{dt}=(1-\rho^2)\sin\varphi \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho^2-1}=-\sin\varphi\,dt$$

и

$$\frac{\rho-1}{\rho+1}=C_1e^{-2\int_{t_0}^{t}\sin\varphi\,dt}. \qquad (74)$$

Из этой формулы видно, что для траекторий, лежащих вне L, интервал изменения t конечен. Действительно, при беспредельном удалении вдоль этих траекторий наверх или вниз ($\rho\to+\infty$) левая часть равенства (74) стремится к единице, а $\sin\varphi\to\pm1$, откуда и следует, что t стремится при этом к конечным пределам.

2. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1(x_1^2+x_2^2-1)-x_2(x_1^2+x_2^2+1),\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_2(x_1^2+x_2^2-1)+x_1(x_1^2+x_2^2+1).\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Нетрудно показать, что она имеет единственную точку покоя — фокус (0, 0). Используя уравнения (75), получим

$$\frac{d\rho^2}{dt}=2\rho^2(\rho^2-1). \qquad (76)$$

Из этого равенства следует, что окружность L:

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \tag{77}$$

является замкнутой траекторией, ибо производная от левой части (77) по t в силу (76) равна нулю [9]. Из (76) следует, что на любой траектории, находящейся внутри L, ρ убывает при возрастании t, а на траекториях вне L — возрастает. Отсюда следует, что никаких замкнутых траекторий, кроме L, нет (L — предельный цикл) и что траектории закручиваются вокруг L при $t \to -\infty$ как изнутри, так и извне. Внутренние траектории закручиваются вокруг фокуса при $t \to +\infty$.

Получим явные выражения для ρ и φ через t. Уравнение (76) есть уравнение первого порядка для ρ, причем переменные в нем разделяются, и, интегрируя, получим

$$\rho^2 = \frac{1}{1 + Ce^{2t}}. \tag{78}$$

При $C > 0$ получаются внутренние траектории ($\rho < 1$), при $C < 0$ внешние ($\rho > 1$), а при $C = 0$ — окружность (77). Для полярного угла φ получаем вдоль траекторий

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

и, в силу (75),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 + 1 \tag{79}$$

и, пользуясь (78), получаем

$$\varphi = 2t - \frac{1}{2}\lg(1 + Ce^{2t}) + C_1. \tag{80}$$

Из (78) и (79) непосредственно следует сказанное выше о внутренних траекториях. Для внешних траекторий промежуток существования определяется неравенством

$$-\infty < t < -\frac{1}{2}\lg(-C) \qquad (C < 0).$$

При $t \to -\infty$ траектории закручиваются вокруг L, а при $t \to -\frac{1}{2}\lg(-C)$ траектории беспредельно удаляются, закручиваясь против часовой стрелки ($\rho \to +\infty$, $\varphi \to +\infty$). При $C = 0$ непосредственно получаем: $\rho = 1$ и $\frac{d\varphi}{dt} = 2$, т. е. $x_1 = \cos(2t + C_1)$, $x_2 = \sin(2t + C_1)$. На рис. 26 представлен характер расположения траекторий с указанием движения по ним при возрастании t.

3. Рассмотрим аналогичный по характеру, но более сложный пример

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 9) - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8),\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 9) + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8).\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Приравнивая правые части нулю, получаем три точки покоя:

$$M_1(0, 0), \quad M_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{35}}{2}\right), \quad M_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{35}}{2}\right).$$

Поступая, как в примере 1, нетрудно показать, что M_1 — фокус, M_2 — узел и M_3 — седло. Вместо (76) имеем уравнение

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2(\rho^2-1)(\rho^2-9), \tag{82}$$

из которого следуют, как и в примере 2, два решения системы

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \tag{83$_1$}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0. \tag{83$_2$}$$

Решение (83$_2$) разбивается точками покоя M_2 и M_3 на две траектории.

Кроме того, из (82) следует, что ρ возрастает при возрастании t внутри окружности (83$_1$), а так же вне окружности (83$_2$) и убывает между двумя этими окружностями и, следовательно, у системы (81) нет замкнутых траекторий кроме окружности (83$_1$).

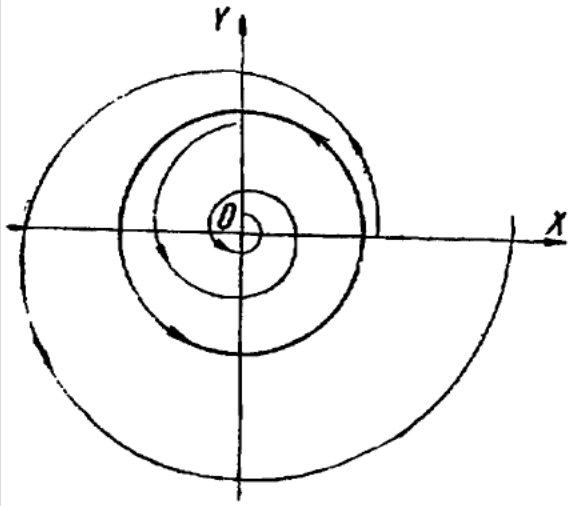


Рис. 26.

Траектории, находящиеся внутри окружности (83$_1$), закручиваются вокруг фокуса M_1 при $t \to -\infty$ и вокруг окружности (83$_1$) (предельный цикл) при $t \to +\infty$. Все траектории, находящиеся вне окружности (83$_2$), кроме одной, стремятся к узлу M_2 при $t \to -\infty$ и одна — к седлу M_3 также при $t \to -\infty$. Внутри кругового кольца между окружностями (83$_1$) и (83$_2$) траектории идут от точек M_2 и M_3 (из этой точки — только одна) и затем закручиваются вокруг предельного цикла (83$_1$) при $t \to +\infty$. Выше мы отметили, что окружность (83$_2$) разбивается точками M_2 и M_3 на две траектории l_1 и l_2. Касательная к окружности (83$_2$) в точке M_2 является касательной к l_1 и l_2, а остальные траектории имеют другую общую касательную в этой точке [ср. 54]. Аналогичным образом, в седле M_3 две траектории, отличные от l_1 и l_2, имеют в M_3 общую касательную, отличную от касательной к окружности.

Интегрируя уравнение (82), получим

$$\frac{\rho^{16}(\rho^2-9)}{(\rho^2-1)^9} = Ce^{144t}, \tag{84}$$

и при $\rho > 3$, т. е. для траекторий, находящихся вне окружности (83$_2$), постоянная C должна быть положительной. Левая часть (84) стремится к единице при $\rho \to +\infty$, и для указанных траекторий промежуток изменения t имеет вид $-\infty < t < -\frac{1}{144}\lg C$. Как и в примере 2, определим производную от угла φ по t:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi - 8, \tag{85}$$

откуда видно, что $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ при $\rho < 2$ и $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ при $\rho > 4$. В промежутке $2 < \rho < 4$ производная меняет знак при изменении φ. Исследуем поведение траекторий при удалении на бесконечность. Из (82) следует, что вне окружности (83$_2$) вдоль всех траекторий ρ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$.

Преобразуем уравнение (82) к новой переменной $\sigma = \frac{1}{\rho}$, которая стремится к нулю

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{(\sigma^2-1)(1-9\sigma^2)}{\sigma^3}. \tag{86}$$

Заменяя в уравнении (85) ρ на σ и деля полученное уравнение почленно на уравнение (86), придем к уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\sigma(1-2\sigma\cos\varphi-8\sigma^2)}{(\sigma^2-1)(1-9\sigma^2)}.$$

Для этого уравнения $\sigma=0$ и любое φ не является особой точкой, и, в силу теоремы существования и единственности для этого уравнения на плоскости (σ, φ), легко видеть, что для каждой из траекторий системы (81) при удалении ее на бесконечность φ стремится к определенному пределу, и эти пределы различны для различных траекторий.

На рис. 27 представлен характер расположения траекторий на плоскости X_1OX_2 с указанием движения по ним при возрастании t. Примеры 2 и 3 взяты из известной работы Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями».

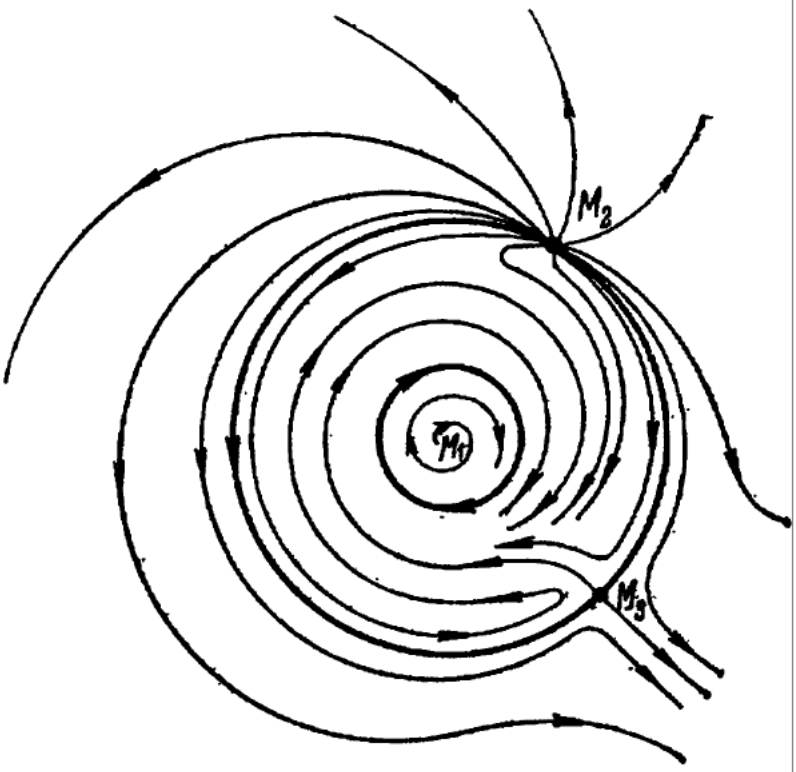


Рис. 27.

4. Рассмотрим еще один пример общего характера

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1\omega(x_1^2+x_2^2)-x_2,\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2\omega(x_1^2+x_2^2)+x_1,\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

где $\omega(\tau)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция в промежутке $0\leqslant\tau<+\infty$. Начало (0, 0) есть точка покоя системы (87). Других точек покоя нет. Это нетрудно показать так же, как и в примере 2. Переходя к полярным координатам, получим систему уравнений

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho\omega(\rho^2), \quad \frac{d\varphi}{dt}=1 \quad (\rho>0). \quad (88)$$

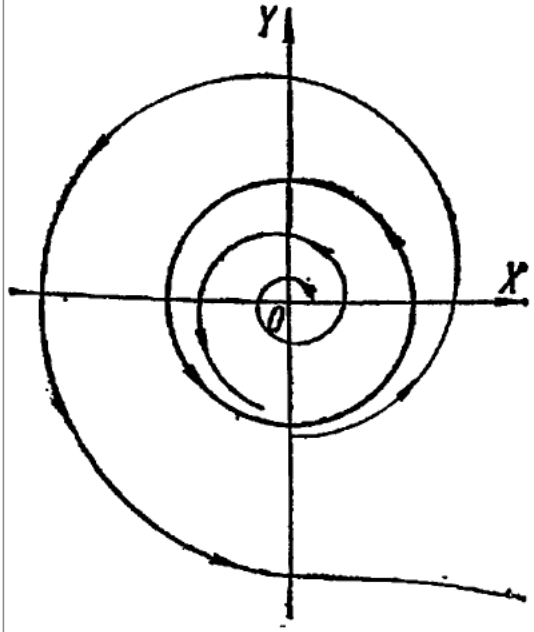


Рис. 28.

Если $\omega(\tau)$ имеет корень $\tau=\tau_0$ $(\tau_0>0)$, то система (88) имеет очевидное решение $\rho=\sqrt{\tau_0}$ — окружность с центром в начале. Если при этом $\tau=\tau_0$ — изолированный корень $\omega(\tau)$, т. е. $\omega(\tau)\neq 0$ при всех τ достаточно близких к τ_0 и отличных от τ_0, то окружность $\rho=\sqrt{\tau_0}$ — предельный цикл. Если $\omega(\tau)$ не равна нулю при $\tau_1<\tau<\tau_2$, а $\omega(\tau_1)=\omega(\tau_2)=0$, то окружности $\rho=\sqrt{\tau_1}$ и $\rho=\sqrt{\tau_2}$ суть замкнутые траектории системы, а траектории, находящиеся в кольце между ними, суть спиралеобразные кривые, которые закручиваются вокруг этих траекторий, при $t\to-\infty$ и $t\to+\infty$. Если $\omega(\tau)>0$ при $\tau_1<\tau<\tau_2$, то эти кривые закручиваются вокруг окружности $\rho=\sqrt{\tau_1}$ при $t\to-\infty$, а если $\omega(\tau)<0$, то — вокруг $\rho=\sqrt{\tau_2}$ при $t\to-\infty$. Если $\omega(\tau)=0$ при $\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2$ и отлична от нуля при $\tau<\tau_1$ и близких к τ_1,

а также при $\tau > \tau_2$ и близких к τ_2, то все окружности $\rho = \sqrt{\tau}$ при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ — суть замкнутые траектории, и вокруг окружности $\tau = \sqrt{\tau_1}$ закручиваются с одной стороны траектории; аналогично для $\tau = \sqrt{\tau_2}$. Возможны, естественно, и более сложные случаи распределения корней функции $\omega(\tau)$.

5. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + x_1. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Она имеет единственную точку покоя (0, 0), которая является фокусом. В полярных координатах система имеет вид

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2 (\rho^2 - 1)^2, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Единственной замкнутой траекторией является окружность (77), которая является предельным циклом. Величина ρ возрастает как внутри, так и вне этой окружности, и поэтому траектории наматываются на нее изнутри при $t \to +\infty$, а извне при $t \to -\infty$. Причиною этого является тот факт, что уравнения (89) содержат квадрат выражения $x_1^2 + x_2^2 - 1$. Внутренние траектории наматываются на фокус при $t \to -\infty$. Так же, как и в примере 3, легко показать, что внешние траектории при $\rho \to +\infty$ имеют предельные значения для φ, различные для различных траекторий. На рис. 28 изображена схема расположения траекторий с указанием направления на них при возрастании t.

ГЛАВА III

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 6. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

57. Объемы. До сих пор мы рассматривали определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

как предел суммы для того случая, когда функция $f(x)$ определена на отрезке (a, b) оси OX. Иначе говоря, областью интегрирования являлся всегда некоторый прямолинейный отрезок.

В настоящем параграфе мы обобщим понятие об интеграле на тот случай, когда областью интегрирования является некоторая область на плоскости, или некоторая область в пространстве, или, наконец, область на какой-либо поверхности. При изложении настоящего параграфа мы будем пользоваться интуитивным представлением площади и объема и не будем останавливаться на обосновании некоторых рассуждений, связанных с переходом к пределу. Основные моменты строгого изложения читатель может найти в последнем параграфе настоящей главы. Мы начнем с понятия о двойном интеграле, которое связано с вопросом о вычислении объема, так же как написанный выше интеграл связан с вычислением площади, а потому, прежде чем вводить понятие о двойном интеграле, мы займемся вопросом о вычислении объемов.

Мы знаем, что вопрос о вычислении площади, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и двумя ординатами: $x=a$, $x=b$, решается с помощью понятия об определенном интеграле, а именно указанная площадь выражается написанным выше определенным интегралом [I, 87].

Займемся аналогичной задачей для о б ъ е м а v тела, ограниченного данной поверхностью (S), уравнение которой

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

плоскостью XOY и цилиндром (C) с образующими, параллельными оси OZ. Пусть (σ) — проекция (S) на плоскость XOY (рис. 29).

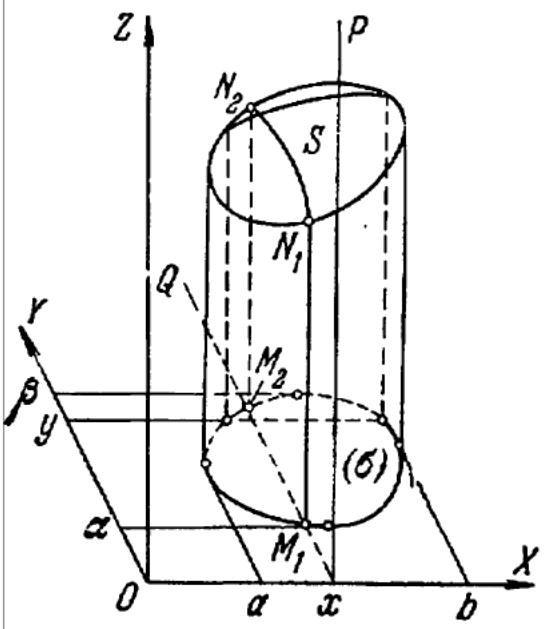


Рис. 29.

В [I, 104] мы привели вычисление объема тела также к определенному интегралу, для чего нужно только знать площади параллельных сечений тела; этот способ мы применим и в нашей задаче.

Допустим для простоты, что поверхность (S) целиком находится над плоскостью XOY и что контур (l), ограничивающий (σ), пересекается лишь в двух точках прямыми, параллельными координатным осям.

Будем рассекать рассматриваемое тело плоскостями, параллельными плоскости YOZ, следы которых на плоскости XOY суть прямые, параллельные оси OY (рис. 29 и 30). Абсциссы крайних сечений обозначим через a и b. Это будут, вместе с тем, абсциссы точек контура, разделяющих этот контур на две части (1) и (2), одна из

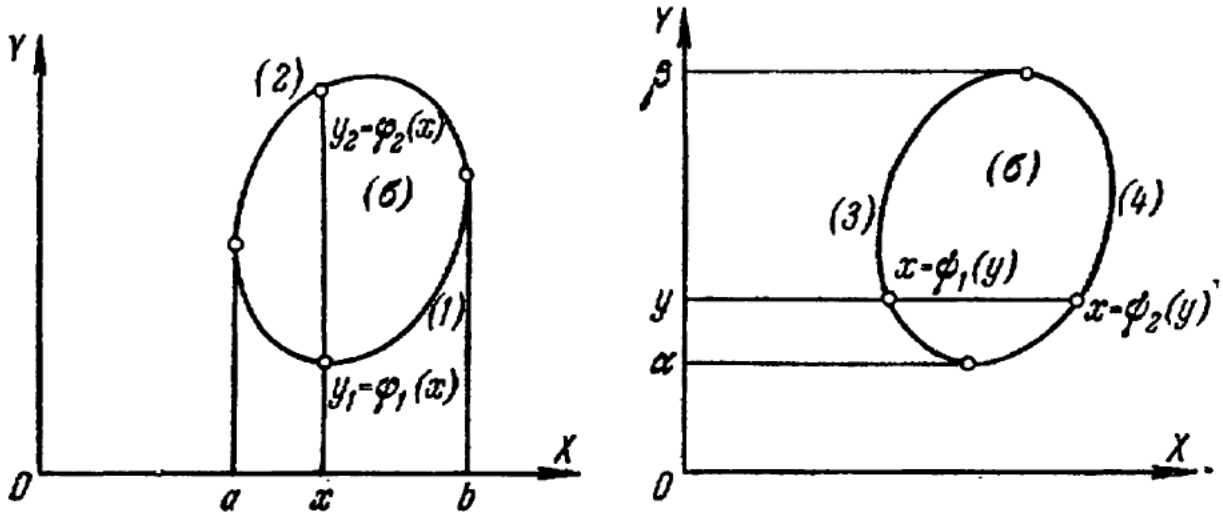


Рис. 30.

которых является местом входа в область (σ) прямых, параллельных оси OY, а другая — местом выхода (рис. 30). Каждая из этих частей имеет свое уравнение

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Площадь сечения тела с плоскостью PQ, проведенной на расстоянии x от YOZ, зависит от x; обозначим ее через $S(x)$. Мы имеем [I, 104]

$$v = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{3}$$

Остается найти выражение для функции $S(x)$. Это есть площадь фигуры $M_1N_1N_2M_2$; она лежит в плоскости PQ и ограничена кривой N_1N_2 пересечения плоскости PQ с поверхностью (S), прямой M_1M_2, параллельной оси OY, и двумя ординатами M_1N_1 и M_2N_2.

Так как для всех точек рассматриваемого сечения x постоянно, ординату кривой N_1N_2 можно считать функцией от y, определяемой уравнением

$$z=f(x,\ y)$$

при постоянном x; независимая переменная y будет при этом меняться в промежутке $(y_1,\ y_2)$, где y_1 и y_2 суть ординаты точек входа прямой M_1M_2 в область (σ) и выхода из этой области.

В силу [I, 87], можем писать

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)\,dy;$$

подставив в (3), имеем

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)\,dy. \qquad (4)$$

Мы получаем, таким образом, выражение объема в виде *повторного интеграла*, в котором интегрирование сперва выполняется по y при постоянном x, а затем полученный результат интегрируется по x.

Рассекая данное тело плоскостями, параллельными плоскости XOZ, мы получим для того же объема выражение

$$v=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx, \qquad (5)$$

причем x_1 и x_2 суть известные функции от y:

$$x_1=\psi_1(y),\quad x_2=\psi_2(y), \qquad (6)$$

а α и β означают крайние значения y на контуре (l) (рис. 29 и 30).

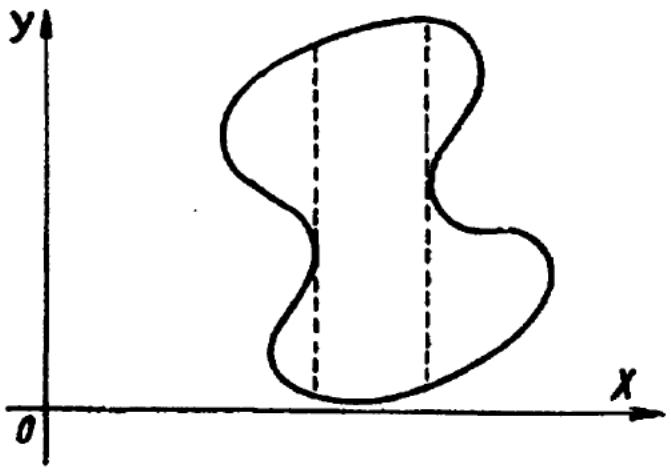


Рис. 31.

Формулы (4) и (5) были выведены при двух предположениях: 1) поверхность (S) лежит целиком над плоскостью XOY и 2) контур (l), ограничивающий проекцию (σ) поверхности (S) на плоскость XOY, пересекается лишь в двух точках со всякой прямой, параллельной одной из координатных осей. Если не выполнено условие 1, то правые части формул (4) и (5) дадут не объем, а *алгебраическую сумму объемов*, причем со знаком (+) получатся те объемы, которые лежат над плоскостью XOY, со знаком (—) те, которые лежат под ней. Если же не выполнено условие 2, например (рис. 31) имеется

несколько пар точек пересечения контура (l) с прямой $x=\text{const}$, то надо разбить область (σ) на части, каждая из которых удовлетворяет условию 2. В соответствии с этим поверхность (S) и объем v разобьются на части, и для вычисления объема каждой из этих частей будет годиться формула (4).

Примеры. 1. Объем усеченной прямоугольной призмы (рис. 32). Основание образовано осями OX, OY и прямыми $x=k$, $y=l$. Секущая плоскость имеет уравнение

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}=1.$$

Формула (4) в данном случае дает

$$v=\int_0^k dx\int_0^l z\,dy=\int_0^k dx\int_0^l \nu\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)dy=\nu\int_0^k dx\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Big|_{y=0}^{y=l}=$$

$$=\nu\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)dx=\nu\left(kl-\frac{k^2l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)=kl\cdot\nu\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h,$$

где σ есть площадь основания, h — ордината точки пересечения диагоналей верхнего сечения (соответствующая значениям $x=\frac{k}{2}$, $y=\frac{l}{2}$).

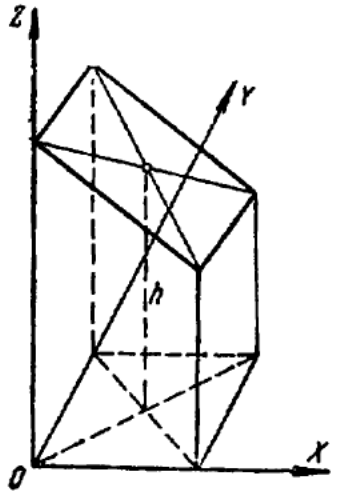


Рис. 32.

2. Объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

При пересечении эллипсоида плоскостями $z=\text{const}$ получаются эллипсы с полуосями

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\qquad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

и с площадью

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

а поэтому искомый объем будет

$$v=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc.$$

58. Двукратный интеграл. Для получения приближенного представления площади кривой $y=f(x)$ мы [I, 87] разбивали ее на вертикальные полосы и заменяли площадь каждой из них прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной некоторому среднему

значению ординаты кривой для данной полосы. При увеличении числа полос и стремлении каждой из них к нулю, ошибка $\to 0$, а приближенное выражение в пределе обращается в определенный интеграл, дающий точное выражение для площади.

Аналогичное построение можно проделать и при вычислении объемов. Область (σ) (рис. 33) разбиваем на большое число малых элементов $\Delta\sigma$ произвольной формы, причем через $\Delta\sigma$ обозначаем как сами эти малые области, так и их площади. Каждый из таких элементов примем за основание цилиндра, который, будучи продолжен до пересечения с поверхностью (S), вырежет из объема v элементарный объем. Очевидно, что за величину этого объема мы можем приближенно принять объем цилиндра, основание которого тоже $\Delta\sigma$, а высота — ордината, т. е. значение z любой точки элемента поверхности, который проектируется в виде элемента $\Delta\sigma$. Другими словами, взяв на элементе $\Delta\sigma$ любую точку N и обозначив для краткости через $f(N)$ ординату точки M поверхности (S), соответствующую этой точке N, или, что то же, значение функции $f(x, y)$ в этой точке, мы имеем для элементарного объема $f(N)\,\Delta\sigma$ и

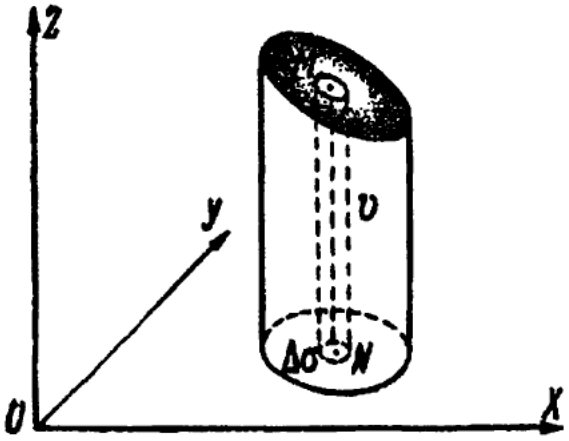


Рис. 33.

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma,$$

причем суммирование распространяется на все элементарные площади $\Delta\sigma$, заполняющие площадь (σ).

Чем меньше будет каждый элемент $\Delta\sigma$ и тем самым больше число n этих элементов, тем точнее будет полученная приближенная формула, и в пределе можно писать

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma = v.$$

Отвлекаясь от геометрических представлений, мы можем определить написанный предел суммы и независимо от геометрического изображения функции $f(N)$, этот предел и называется *двойным*, или *двукратным*, *интегралом* от функции $f(N)$ по области (σ) и изображается так:

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma.$$

Существование написанного предела наглядно ясно, ибо этот предел, как мы выяснили, должен давать объем v, описанный нами выше. Такое рассуждение не является, конечно, строгим, но можно доказать

и строго аналитически существование упомянутого предела при довольно общих условиях для $f(N)$ и области σ. Два знака интеграла указывают на двумерность области интегрирования (область на плоскости). Подынтегральное выражение $f(N)\,d\sigma$ чисто условно. Оно напоминает о том, что величина интеграла есть предел указанных выше сумм. Отметим, что мы при этом не вводим на плоскости никакой системы координат, что мы делали в случае формул (5) и (6). Определенный выше интеграл называем, как и в случае одного переменного, *интегралом Римана.*

Если мы положим $f(N)=1$, то получим выражение площади σ области (σ) в виде двойного интеграла

$$\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma.$$

Формулируем полностью определение двукратного интеграла: пусть (σ) — ограниченная плоская область и $f(N)$ — функция точки в этой области, т. е. функция, принимающая в каждой точке N области (σ) определенное значение. Разбиваем область (σ) на n частей, частичных областей, и пусть $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ — площади этих частей и $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — какие-либо точки, находящиеся на этих частях. Составляем сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot\Delta\sigma_k.$$

Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений n и беспредельном уменьшении каждой из частичных областей $\Delta\sigma_k$ называется двукратным интегралом от функции $f(N)$ по области (σ)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\lim\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Замечание. Пусть d_k — максимальное расстояние между двумя точками частичной области с площадью $\Delta\sigma_k$ (диаметр этой области) и d — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Беспредельное уменьшение каждой из частей $\Delta\sigma_k$, о котором говорится в определении, имеет тот смысл, что $d\to 0$. Если буквой I обозначить величину интеграла, то высказанное выше определение равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что [ср. I, 87]

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k\right|\leqslant\varepsilon,$$

если только $d\leqslant\eta$. В конце настоящей главы при изложении полной теории кратных интегралов мы введем строгое определение площади,

уточним понятие области (σ), по которой можно производить интегрирование, выясним, каким образом ее можно разбивать на частичные области и докажем существование предела упомянутых сумм.

59. Вычисление двукратного интеграла. Рассматривая двукратный интеграл как объем, мы сможем вывести способ приведения вычисления двукратного интеграла к двум простым квадратурам. Отнеся плоскость, на которой находится область (δ), к прямоугольной системе координат XOY, допустим, что элементы $\Delta\sigma$ получаются путем разбиения площади на прямоугольники со сторонами Δx и Δy, прямыми параллельными координатным осям (рис. 34), и пусть (x, y) — координаты точки N. При этом естественно писать

$$f(N) = f(x, y), \qquad \Delta\sigma = \Delta x\,\Delta y, \qquad d\sigma = dx\,dy$$

и

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

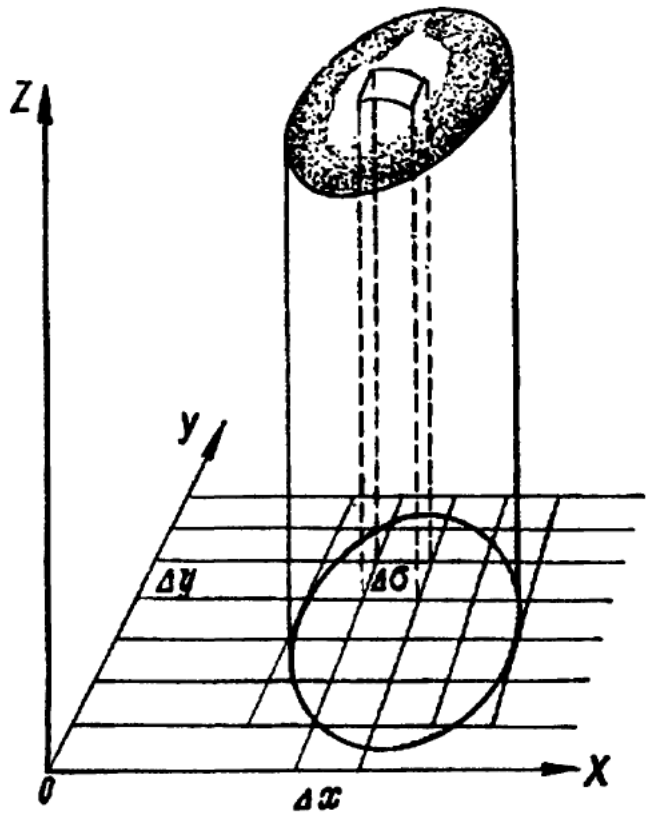


Рис. 34.

С другой стороны, применяя сказанное в [57] относительно выражения объема через повторный интеграл, можем написать

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx, \qquad (7)$$

что и дает правило для вычисления двукратного интеграла, независимо от геометрического значения функции $f(x, y)$.

Если первое интегрирование совершается по y, то x при этом считается постоянным, а пределы y_1 и y_2 суть функции от x, определяемые по формулам (2) [57]. Аналогичное обстоятельство имеет место, если первое интегрирование совершается по x. Пределы при первом интегрировании в повторном интеграле будут определенными постоянными, не зависящими от переменной второго интегрирования, лишь в том случае, когда область интегрирования есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Если (σ) есть прямоугольник, ограниченный прямыми (рис. 35):

$$x = a, \quad x = b, \quad y = \alpha, \quad y = \beta,$$

то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx. \qquad (8)$$

Выражение $d\sigma = dx\,dy$ называется *элементом площади в прямоугольных координатах.*

Заметим, что в формуле (7) первое интегрирование по y при постоянном x соответствует суммированию по прямоугольникам, содержащимся в полосе, параллельной оси OY, причем все эти прямоугольники имеют одну и ту же ширину dx, которая выносится за знак первого интегрирования. Второе интегрирование по x соответствует сложению всех сумм, полученных при суммировании по полоскам, параллельным оси OY. В последнем параграфе настоящей главы мы даем точное обоснование формул (8) и (7).

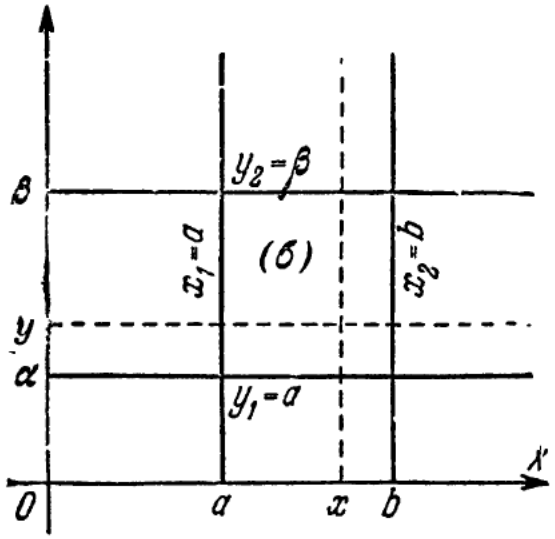


Рис. 35.

Если прямые, параллельные осям, пересекают границу (σ) более чем в двух точках, то надо поступать так, как это указано в [57].

Здесь и в дальнейшем мы, конечно, предполагаем, что интегралы, о которых идет речь, существуют. Для этого достаточно, чтобы подынтегральные функции были непрерывны в (σ) вплоть до ее границы, что мы и будем предполагать, а область (σ) удовлетворяла условию, о котором будет сказано при обосновании понятия интеграла.

Отнесем теперь площадь (σ) к полярным координатам $(r,\ \varphi)$. Уравнение поверхности (S) нужно будет тогда написать в виде $z = f(r,\ \varphi)$.

Элементы $\Delta\sigma$ получим, начертив семейство линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, т. е. концентрических окружностей и лучей, проходящих через начало координат (рис. 36). В частности, при пересечении двух окружностей радиусов r и $(r + \Delta r)$ и лучей, идущих под углами φ и $(\varphi + \Delta\varphi)$, образуется криволинейная фигура $\Delta\sigma$, которую, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно рассматривать как прямоугольник со сторонами Δr и $r\Delta\varphi$, так что

$$\Delta\sigma = r\,\Delta r\,\Delta\varphi,$$

тогда можно написать

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(r,\ \varphi)\,r\,\Delta r\,\Delta\varphi = \iint\limits_{(\sigma)} f(r,\ \varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Мы получили здесь двукратный интеграл, подынтегральная функция которого есть $f(r,\ \varphi)\,r$. Для его вычисления можно применить

то же правило приведения к повторному интегралу, но только здесь роль x и y играют r и φ.

Первое интегрирование по r при постоянном φ соответствует суммированию по элементам $\Delta\sigma$, содержащимся между двумя лучами φ и $(\varphi + d\varphi)$, причем $d\varphi$ выносится за знак первого интегрирования. Второе интегрирование по φ соответствует сложению всех сумм, полученных при первом суммировании. Применяя упомянутое правило, мы прежде всего отмечаем крайние значения α и β аргумента φ (в [57] крайние значения x), затем при фиксированном φ — радиусы-векторы r_1 и r_2 точек входа внутрь (σ) и выхода из (σ) луча $\varphi = \text{const}$ (это соответствует определению y_1 и y_2 в [57]). Определив эти данные, имеем

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(r,\ \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r,\ \varphi)\, r\, dr, \tag{9}$$

где r_1 и r_2 — известные функции φ.

Рис. 36 соответствует тому случаю, когда начало координат лежит вне контура (l). Если же начало лежит внутри контура (l), то

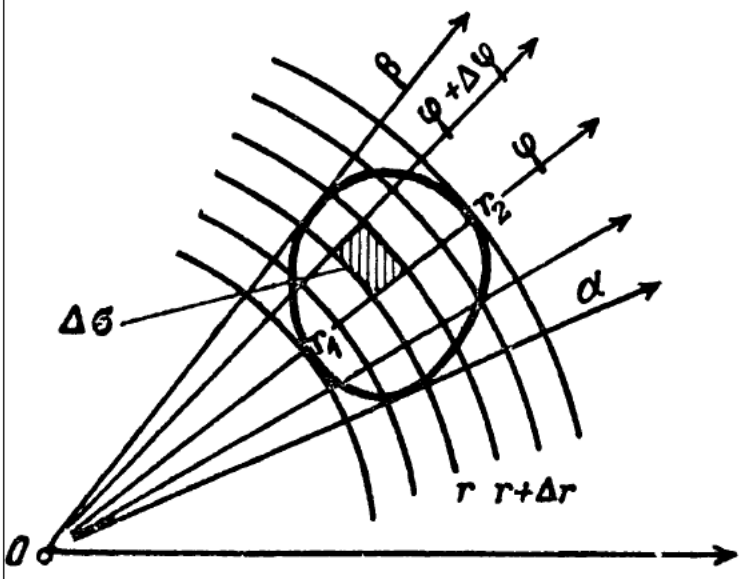


Рис. 36.

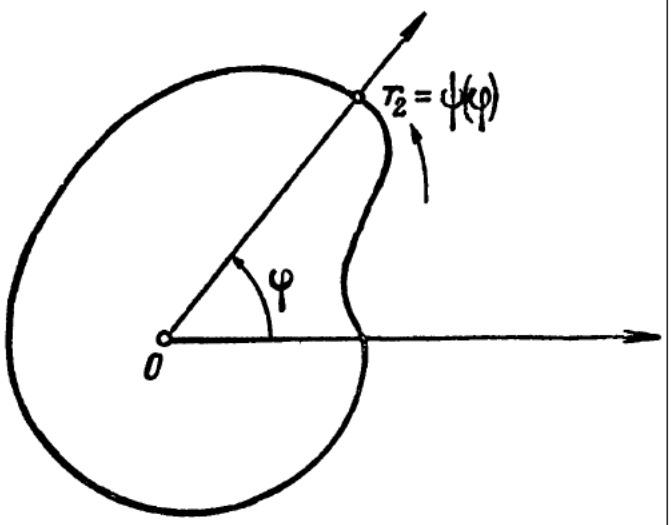


Рис. 37.

можно считать, что φ меняется от 0 до 2π и что r при заданном значении φ меняется от 0 до r_2, где r_2 получается из уравнения кривой (l): $r_2 = \psi(\varphi)$, что дает (рис. 37)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r_2} f(r,\ \varphi)\, r\, dr.$$

Выражение

$$r\, dr\, d\varphi \tag{10}$$

называется *элементом площади в полярных координатах.*

В частности, если $f(N)=1$, мы получаем выведенное в [I, 102] выражение для площади кривой в полярных координатах:

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2 - r_1^2)\,d\varphi.$$

(Формула из [I, 102] соответствует случаю $r_2 = r$ и $r_1 = 0$).

Пример. Вычислим объем, заключенный между шаром радиуса a и прямым круговым цилиндром радиуса $\frac{a}{2}$, проходящим через центр шара (рис. 38). За начало координат примем центр шара, плоскость XOY выберем перпендикулярно к оси цилиндра и ось OX проведем от центра шара к точке пересечения оси цилиндра с плоскостью XOY. В силу симметрии можем сказать, что искомый объем будет равен учетверенному объему части цилиндра, ограниченной плоскостями ZOX, XOY и верхним полушарием.

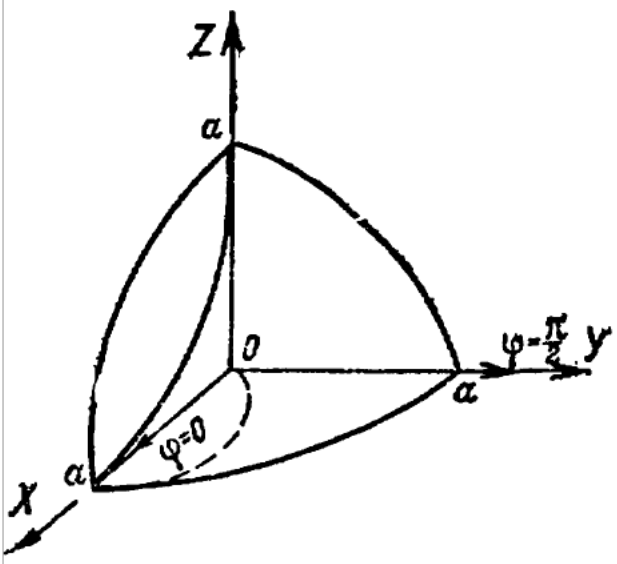


Рис. 38.

Областью интегрирования будет здесь половина основания цилиндра, контур которой состоит из полуокружности

$$r = a\cos\varphi$$

и отрезки оси OX, причем угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, и соответствующий луч — от оси OX к оси OY.

Уравнение поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

в нашем случае перепишется в виде

$$z^2 = a^2 - (x^2 + y^2), \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Поэтому искомый объем будет

$$v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi = \frac{4}{3}a^3\left[\varphi + \cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

69. Криволинейные координаты. В предыдущем номере мы определили элемент площади и рассмотрели вопрос о вычислении интеграла в случае прямолинейных прямоугольных координат (x, y) и

полярных координат (r, φ). Рассмотрим тот же вопрос для любых координат (u, v). Введем вместо прямоугольных координат x и y какие-нибудь новые переменные u и v по формулам

$$\varphi(x, y) = u, \quad \psi(x, y) = v. \tag{11}$$

Если мы фиксируем значение u и будем считать v переменным, то получим семейство линий на плоскости. Точно так же, если фиксируем значение v и будем считать u переменным, то получим другое семейство линий. Линии этих двух семейств могут быть как кривыми линиями, так и прямыми (рис. 39).

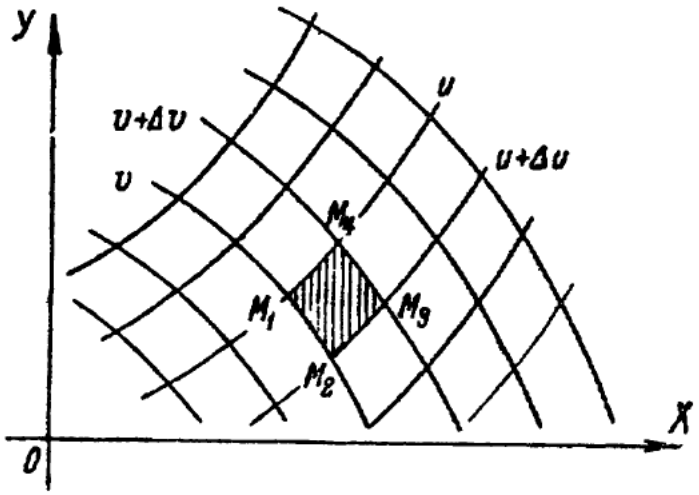


Рис. 39.

Положение точки M на плоскости определяется парой чисел (x, y) или, в силу (11), парой чисел (u, v). Эта пара чисел (u, v) называется *криволинейными координатами* точки M. Решая уравнения (11) относительно x и y, получим выражение прямоугольных координат (x, y) через криволинейные (u, v):

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \psi_1(u, v). \tag{12}$$

В случае полярных координат u есть r и v есть φ. Линии постоянного u и постоянного v, о которых мы говорили выше, называются координатными линиями криволинейных координат (u, v). Они образуют два семейства линий (окружности и лучи в полярных координатах).

Определим теперь *элемент площади $d\sigma$ в криволинейных координатах (u, v)*.

Для этого рассмотрим элемент площади $M_1M_2M_3M_4$ (рис. 39), образованный двумя парами бесконечно близких координатных линий:

$$\varphi(x, y) = u, \qquad \varphi(x, y) = u + du,$$
$$\psi(x, y) = v, \qquad \psi(x, y) = v + dv.$$

Координаты вершин четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$ с точностью до бесконечно малых высших порядков будут [I, 68]:

(M_1) $$x_1 = \varphi_1(u, v), \qquad y_1 = \psi_1(u, v);$$

(M_2) $$x_2 = \varphi_1(u + du, v) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} du,$$

$$y_2 = \psi_1(u + du, v) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} du,$$

причем здесь u и v — прямоугольные координаты точек области (Σ), и пределы интегрирования в интеграле по (Σ) определяются так, как это было указано в [59]. Если положить $f(x, y) = F(u, v) = 1$, то получим выражение площади σ области (σ) в виде интеграла по (Σ):

$$\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} |D| \, du \, dv.$$

Отсюда видно, между прочим, что при нашей новой точке зрения значение $|D|$ в какой-либо точке N области (Σ) есть коэффициент изменения площади в точке N при деформации области (Σ) в область (σ), т. е. предел отношения площади некоторой области, лежащей в (σ) и содержащей образ точки N, к площади, соответствующей области, лежащей в (Σ) (эта область содержит точку N), когда эта последняя область стягивается к точке N. Более подробно мы рассмотрим с этой точки зрения преобразование переменных в двойном интеграле в [80].

Примеры. 1. Рассмотрим на плоскости XOY круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ с центром в начале координат и радиусом единица. Введем новые переменные по формулам перехода к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, но будем рассматривать r и φ не как полярные координаты, а как прямолинейные прямоугольные координаты, т. е. будем считать, что точка с прямоугольными координатами (x, y) преобразовалась в точку с прямоугольными же координатами (r, φ). При этом, очевидно, вышеупомянутый круг перейдет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2\pi$ (или $r = 0$, $r = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$), причем началу координат $x = y = 0$ соответствует целая сторона $r = 0$ этого прямоугольника, а противоположные стороны $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ прямоугольника соответствуют одному и тому же радиусу круга. Применяя для прямоугольника правило приведения двойного интеграла к двум повторным, выражаемое формулой (8), непосредственно видим, что при интегрировании в полярных координатах по вышеуказанному кругу пределы интегрирования по r должны быть $r = 0$ и $r = 1$, а по φ соответственно $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Аналогично можно объяснить и те правила определения пределов при интегрировании в полярных координатах, которые даны в [59].

В данном случае

$$D = \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} = r,$$

и, как мы видели выше, $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$.

2. В качестве другого примера второй точки зрения рассмотрим прямоугольный треугольник (σ), ограниченный координатными осями и прямой $x + y = a$. Точки, лежащие внутри (σ), определяются следующими неравенствами, которым должны подчиняться их координаты

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < a. \tag{14}$$

Введем новые переменные (u, v), полагая:

$$x + y = u, \quad ay = uv,$$

т. е.

$$u = x + y, \qquad v = \frac{ay}{x + y},$$

или

$$x=\frac{u(a-v)}{a}, \quad y=\frac{uv}{a}.$$

Будем рассматривать (u, v) тоже как прямолинейные прямоугольные координаты. Из последних формул следует, что неравенства (14) в новых переменных равносильны неравенствам: $0<u<a$, $0<v<a$, которые определяют квадрат (Σ), имеющий вершину в начале и стороны, направленные по осям. Всякой точке (x, y) из (σ) соответствует определенная точка (u, v) из (Σ) и наоборот. Для D получаем выражение

$$D=\frac{a-v}{a}\frac{u}{a}+\frac{u}{a}\frac{v}{a}=\frac{u}{a},$$

и формула (13) будет иметь вид

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Sigma)} F(u, v)\frac{u}{a}\,du\,dv,$$

или, вводя пределы интегрирования согласно (7) и (8),

$$\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x} f(x, y)\,dy=\frac{1}{a}\int\limits_0^a u\,du\int\limits_0^a F(u, v)\,dv.$$

61. Трехкратный интеграл. Двукратный интеграл, о котором мы говорили в [58], можно истолковать не как объем тела, а как массу, распределенную на плоской области (σ). В самом деле, вообразим, что на (σ) распределена материя. Пусть Δm — количество материи на элементе $\Delta\sigma$, содержащем внутри себя некоторую точку N. Если при беспредельном сжатии $\Delta\sigma$ к точке N отношение $\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$ ($\Delta\sigma$ — площадь упомянутого элемента) стремится к определенному пределу $f(N)$, то этот предел определяет *плотность поверхностного распределения* материи в точке N:

$$\lim\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}=f(N).$$

Если (σ) разбита на малые элементы $\Delta\sigma$, то масса отдельного элемента приближенно равна произведению $f(N)\Delta\sigma$, а для полной массы на (σ) можем написать приближенно

$$m\approx\sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma,$$

где суммирование распространяется на все элементы $\Delta\sigma$, заполняющие (σ). Полученное приближенное равенство будет тем более точным, чем меньше каждый элемент $\Delta\sigma$. В пределе при беспредельном сжимании по всем направлениям каждого из элементов $\Delta\sigma$, причем число этих элементов тем самым беспредельно увеличивается, мы

будем иметь

$$m = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma.$$

Совершенно аналогичным путем рассмотрение массы пространственного распределения материи приведет нас к понятию трехкратного интеграла. Вообразим некоторый объем (v) в пространстве, ограниченный замкнутой поверхностью (S). Пусть в этом объеме распределена материя, общая масса которой есть m. Разобьем весь объем (v) на большое число n малых элементов Δv и обозначим массу каждого из них соответственно через Δm. Пусть отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta v}$$

при сужении элемента Δv к точке M, лежащей внутри этого элемента, имеет предел. Он определяет *плотность (пространственную) распределения* в точке M.

Обозначим этот предел через $f(M)$:

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta v} = f(M).$$

Как и выше, мы можем писать приближенно

$$m \approx \sum_{(v)} f(M)\,\Delta v,$$

где суммирование распространяется на все элементы Δv, заполняющие объем (v).

В пределе при беспредельном сужении по всем направлениям каждого из элементов Δv мы будем иметь

$$m = \lim \sum_{(v)} f(M)\,\Delta v.$$

Этот физический пример приводит нас к общему определению трехкратного интеграла, аналогичному определению двукратного интеграла. Пусть (v) — ограниченная область трехмерного пространства и $f(M)$ — функция точки, определенная в этой области, т. е. функция, принимающая в каждой точке M области (v) определенное значение. Разбиваем (v) на n частей, и пусть Δv_1, Δv_2, ..., Δv_n — объемы этих частей, а M_1, M_2, ..., M_n — какие-либо точки, находящиеся в этих частичных областях.

Составляем сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k. \qquad (15)$$

Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений и при беспредельном уменьшении каждой из частичных областей называется *трехкратным интегралом* от функции $f(M)$ по области v:

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \lim \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k.$$

Замечание [ср. 58]. Пусть d_k — максимальное расстояние между двумя точками частичной области Δv_k (диаметр этой области) и d — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Беспредельное уменьшение каждой из частичных областей имеет тот смысл, что $d \to 0$. Если буквой I обозначить величину интеграла, то высказанное определение равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k \right| \leqslant \varepsilon, \text{ если только } d \leqslant \eta.$$

Строгая теория трехкратных интегралов, как и двукратных, будет изложена в конце настоящей главы.

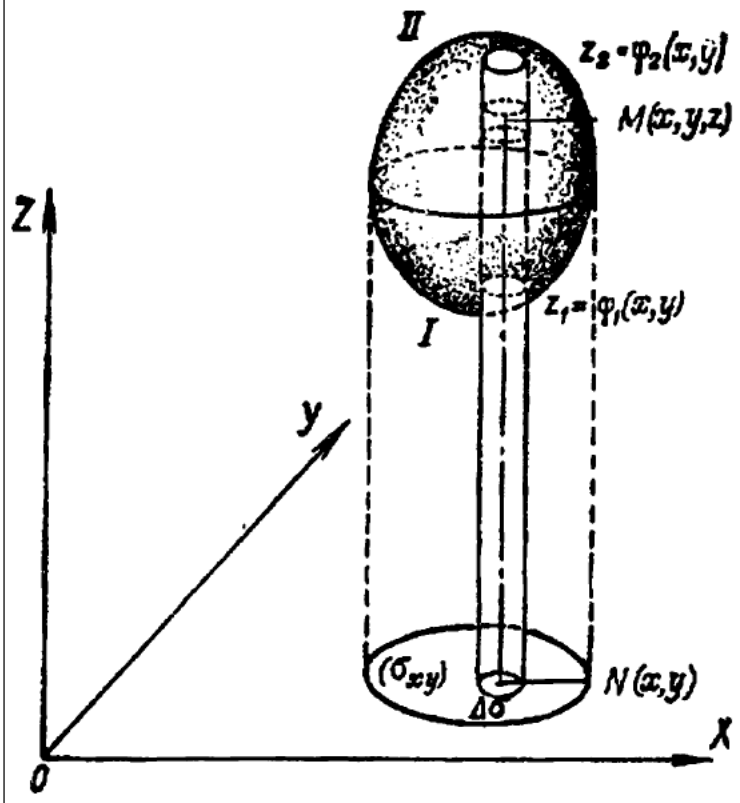


Рис. 40.

Если $f(M) = 1$ во всей области (v), то получится объем v этой области:

$$v = \iiint\limits_{(v)} dv.$$

Для вычисления трехкратного интеграла нужно уметь приводить его к простым или двукратным интегралам, способ вычисления которых был уже указан.

Отнесем пространство к прямоугольным координатам. Допустим, для простоты, что поверхность (S), ограничивающая объем (v), пересекается не более чем в двух точках любой прямой, параллельной одной из координатных осей. Построим цилиндр, проектирующий эту поверхность (S) на плоскость XOY, в виде области (σ_{xy}) (рис. 40).

Линия касания поверхности (S) с цилиндром разобьет ее на две части:

(I) $z_1 = \varphi_1(x,\ y)$,

(II) $z_2 = \varphi_2(x,\ y)$.

Прямая, параллельная оси OZ и проходящая через любую точку площади (σ_{xy}), войдет внутрь объема (v) через часть (I) и выйдет из него через (II); ординаты точек входа и выхода z_1 и z_2 будут известными функциями от (x, y).

Условимся теперь разбивать объем (v) на элементы Δv следующим образом: площадь (σ_{xy}) разобъем на большое число малых элементов $\Delta\sigma$; на каждом из них, как на основании, построим цилиндр, который вырежет из (v) столбик; этот столбик мы затем разобьем на элементарные цилиндры высоты Δz сечениями, параллельными плоскости XOY и проведенными на расстоянии Δz одно от другого. Полученные таким путем элементы объема Δv выражаются по формуле

$$\Delta v = \Delta\sigma\,\Delta z.$$

Возьмем один из элементов $\Delta\sigma$ и внутри него точку $N(x, y)$. Проведем через нее прямую, параллельную оси OZ, которая пересечет (S) в точках с ординатами z_1 и z_2; на каждом из ее отрезков, заключенных внутри элементов Δv, возьмем по точке $M(x, y, z)$.

Сумма, входящая в формулу (15), может быть переписана так:

$$\sum_{(v)} f(x, y, z)\,\Delta v = \sum_{(\sigma)} \Delta\sigma \sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z.$$

Фиксируем пока $\Delta\sigma$ и будем уменьшать Δz. Из основного понятия об определенном интеграле следует

$$\lim \sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z = \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz,$$

причем величины x, y надлежит рассматривать как постоянные параметры. Итак, приближенно имеем

$$\sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z \approx \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dy = \Phi(x, y).$$

Но тогда, очевидно, в силу определения двукратного интеграла

$$\sum_{(v)} f(x, y, z)\,\Delta v \approx \sum_{(\sigma_{xy})} \Delta\sigma\Phi(x, y) \to \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \Phi(x, y)\,d\sigma,$$

т. е.

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \qquad (16)$$

Предыдущие рассуждения, если отвлечься от геометрического истолкования, приводят нас к следующему правилу для вычисления трехкратных интегралов.

Для приведения трехкратного интеграла

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dv$$

к простому и двукратному: 1) *проектируем поверхность* (S), *ограничивающую объем* (v), *на плоскость* XOY *в виде области* (σ_{xy}); 2) *определяем координаты* z_1 *и* z_2 *точек входа и выхода прямой, параллельной* OZ *и проведенной через точку* (x, y) *области* (σ_{xy}); 3) *считая* (x, y) *постоянным, вычисляем интеграл*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz,$$

а затем двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Двукратный интеграл можно, в свою очередь, привести к повторному, пользуясь прямоугольными координатами (x, y), и мы получим окончательно

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz, \qquad (17)$$

причем пределы (y_1, y_2) и (a, b) определяются, как и в [**57**].

Мы предоставляем читателю разобрать другой порядок приведения трехкратного интеграла к повторному путем проектирования поверхности (S) на плоскость YOZ в виде площади (σ_{yz}) или на плоскость XOZ в виде (σ_{xz}).

Формулу (17) можно переписать так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Множитель $dx\,dy\,dz$ называется *элементом объема в прямоугольных координатах*; он получается разбиением объема (v) на бесконечно малые прямоугольные параллелепипеды плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Путь строгого обоснования формулы (17) будет указан в конце настоящей главы. Заметим, что если прямые, параллельные осям, пересекают (S) более чем в двух точках, то надо разбить (v) на части так, чтобы для каждой из частей пересечение имело место не более чем в двух точках. Вычисляя интеграл по каждой из полученных частей указанным выше способом и складывая эти интегралы, мы и получим интеграл по всей области (v).

Если (v) есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям

$$x=a, \quad x=b, \quad y=a_1, \quad y=b_1, \quad z=a_2, \quad z=b_2,$$

то и при первых интегрированиях пределы окажутся постоянными

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx \int\limits_{a_1}^{b_1} dy \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,\ y,\ z)\,dz. \qquad (18)$$

62. Цилиндрические и сферические координаты. Часто бывает удобно относить пространство не к прямолинейным прямоугольным координатам, а к другой системе координат. Наиболее употребительные из этих систем — *цилиндрические* и *сферические координаты*. В прямолинейной прямоугольной системе положение точки определяется ее тремя координатами $(a,\ b,\ c)$, и точка эта находится на пересечении трех плоскостей: $x=a$, $y=b$, $z=c$, параллельных координатным плоскостям. Таким образом в этом случае пространство как бы заполняется тремя семействами взаимно перпендикулярных плоскостей

$$x=C_1, \quad y=C_2, \quad z=C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные, и всякая точка пространства является точкой пересечения трех плоскостей различных семейств. Оставляя координату z, введем вместо x и y новые координаты r и φ, полагая

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z.$$

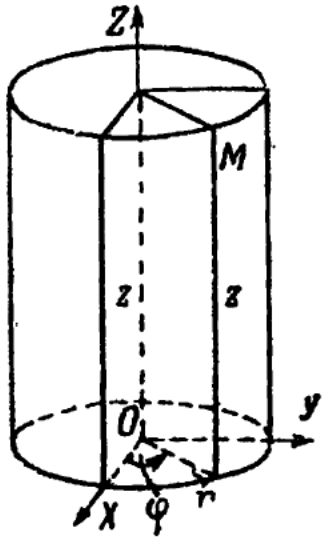


Рис. 41.

Координата r есть расстояние точки M до оси OZ и φ есть угол, образованный плоскостью, проходящей через ось OZ и точку M, с плоскостью XOZ (рис. 41), причем φ может меняться от 0 до 2π и r — от 0 до $(+\infty)$. Координаты $(r,\ \varphi,\ z)$ называются *цилиндрическими координатами* точки M. Точкам оси OZ соответствует $r=0$, а координата φ у них неопределенна.

Мы имеем в этом случае следующие три семейства координатных поверхностей:

$$r=C_1, \quad \varphi=C_2, \quad z=C_3.$$

Первое семейство $r=C_1$ есть семейство круговых цилиндров, ось вращения которых есть ось OZ. Второе семейство $\varphi=C_2$ есть семейство полуплоскостей, проходящих через ось OZ, и, наконец, третье семейство $z=C_3$ есть семейство плоскостей, параллельных плоскости, XOY.

Придавая переменным r, φ и z приращения Δr, $\Delta\varphi$, Δz и проводя по две близкие поверхности из каждого семейства, соответствующие взятым значениям переменных, получим элемент объема в цилиндрических координатах. Вдоль каждого из его ребер меняется только одна из координат, и эти ребра попарно ортогональны (рис. 42). С точностью до малых высших порядков такой элемент можно принять за прямоугольный параллелепипед с ребрами

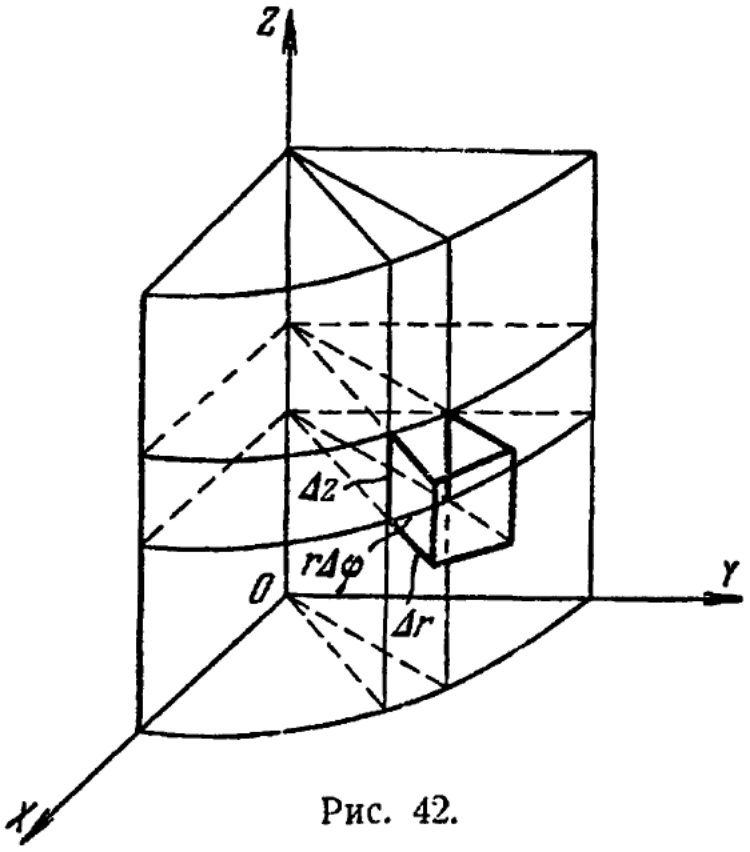


Рис. 42.

$$\Delta r, \quad r\,\Delta\varphi, \quad \Delta r,$$

что дает выражение *элемента объема в цилиндрических координатах*

$$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

и вместе с тем выражение *трехкратного интеграла в цилиндрических координатах*

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv =$$

$$= \iiint\limits_{(v)} f(r,\ \varphi,\ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz, \qquad (19)$$

причем пределы интегрирования определяются по тем же принципам как и в случае прямоугольных координат.

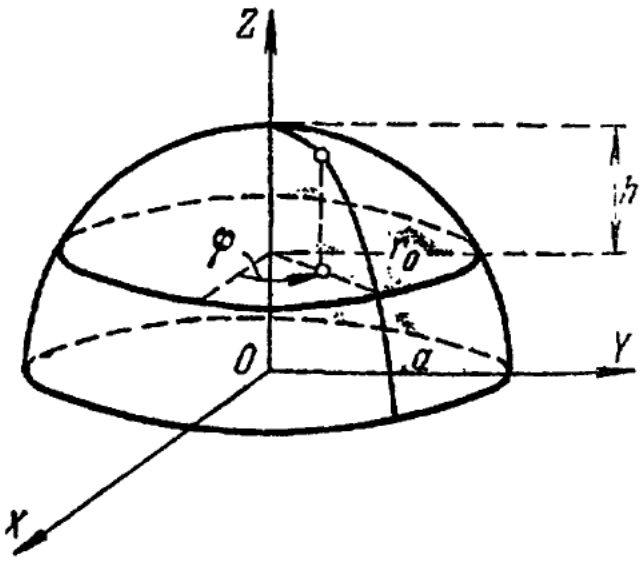


Рис. 43.

Пример. Найти массу сегмента шара, наполненного неоднородной материей, плотность которой изменяется пропорционально расстоянию от основания сегмента (рис. 43). Поместим начало координат в центр шара, за плоскость XOY примем диаметральную плоскость, параллельную основанию сегмента, ось OZ направим от начала координат к сегменту и обозначим через a радиус шара, через h высоту сегмента, через r_0 радиус основания сегмента.

Уравнение шара в цилиндрических координатах будет

$$r^2 + z^2 = a^2 \quad \text{или} \quad z^2 = a^2 - r^2.$$

Закон изменения плотности выразится формулой

$$f(r, \varphi, z) = b + cz,$$

где b и c — известные постоянные. Применение формулы (19) дает

$$m=\iiint\limits_{(v)}(b+cz)\,r\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r_0}r\,dr\int\limits_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}}(b+cz)\,dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{r_0}\left[bz+\frac{c}{2}z^2\right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr.$$

Производя подстановку значений z и интегрирование, что мы предоставляем сделать читателю, получим

$$m=bv+c\pi\frac{r_0^4}{4},$$

где v есть объем сегмента.

Рассмотрим еще *сферические координаты* или, как иногда говорят *полярные координаты в пространстве*. Пусть M — некоторая точка пространства и $\overline{OM}$ — отрезок, проведенный из начала координат O в точку M. Положение точки M можно определить следующими тремя величинами: длиною ρ отрезка $\overline{OM}$; углом φ, который полуплоскость, проходящая через ось OZ и точку M, образует с плоскостью XOZ; углом θ, который отрезок $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OZ (рис. 44). При этом ρ может изменяться от 0 до $(+\infty)$; угол φ отсчитывается против часовой стрелки от оси OX и может изменяться от 0 до 2π; наконец, угол θ отсчитывается от положительного направления оси OZ и может изменяться от 0 до π. Опустим из точки M перпендикуляр MN на плоскость XOY и из основания этого перпендикуляра N опустим перпендикуляр NK на ось OX. Отрезки $\overline{OK}$, $\overline{KN}$, $\overline{NM}$ дают, очевидно, прямоугольные координаты x, y, z точки M. Из прямоугольного треугольника ONM имеем

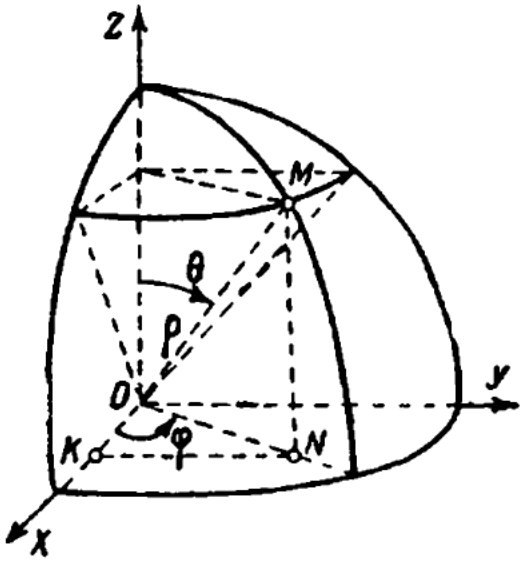


Рис. 44.

$$\overline{ON}=\rho\sin\theta$$

и, пользуясь еще прямоугольным треугольником ONK, получим окончательно формулы перехода от прямоугольных координат к сферическим

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Рассмотрим семейства координатных поверхностей

$$\rho=c_1,\quad \varphi=c_2,\quad \theta=c_3.$$

Первое семейство есть, очевидно, семейство сфер с центром в начале координат; второе — семейство полуплоскостей, проходящих через ось OZ, и третье — семейство круговых конусов, для которых осью вращения является ось OZ. Заметим, что началу координат O соответствует $\rho = 0$, а значение двух других координат φ и θ неопределенно. Для всех точек, лежащих на оси OZ, будет неопределенной координата φ, а $\theta = 0$ или π.

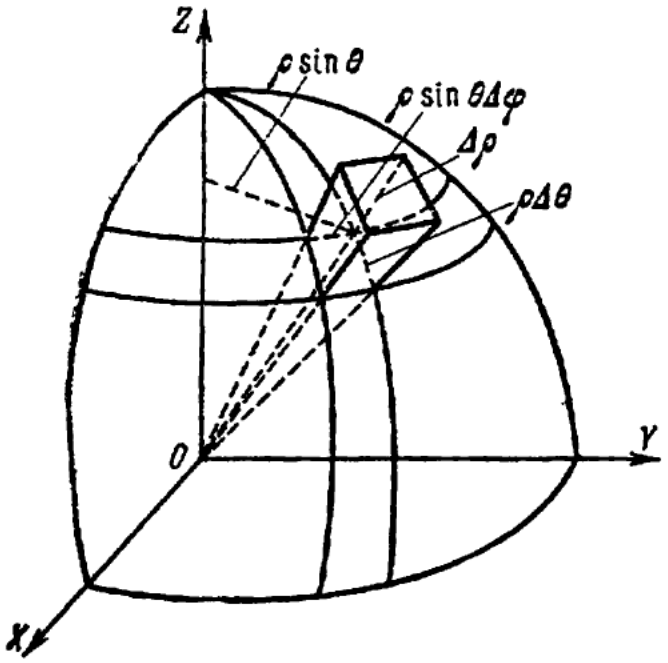


Рис. 45.

Придавая переменным ρ, θ и φ бесконечно малые приращения $\Delta\rho$, $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$, получим элементарный объем в сферических координатах. Вдоль каждого из его ребер меняется только одна из координат, и эти ребра попарно ортогональны (рис. 45). С точностью до малых высших порядков такой элемент можно принять за прямоугольный параллелепипед с ребрами $d\rho$, $\rho\, d\theta$, $\rho \sin\theta\, d\varphi$, так что выражение *элемента объема в сферических координатах будет*

$$dv = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

откуда получаем выражение *трехкратного интеграла в сферических координатах*

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\, dv = \iiint\limits_{(v)} f(\rho,\ \theta,\ \varphi)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \qquad (20)$$

Приведение трехкратного интеграла к повторным можно выполнить здесь, например, следующим образом: находим центральную проекцию объема (v) из начала координат на сферу радиуса единица (рис. 46); пусть это будет область (σ) [если начало координат внутри (v), то (σ) совпадает со всей поверхностью сферы].

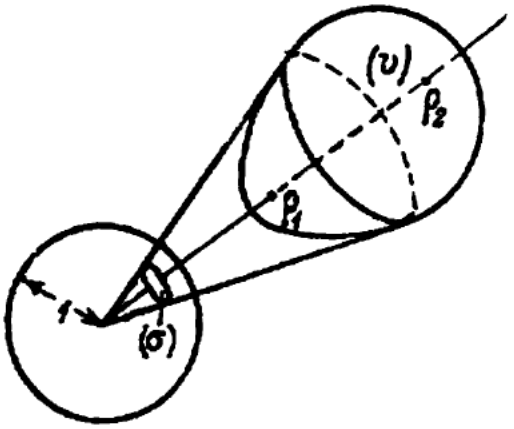


Рис. 46.

Проведем радиусы-векторы через все точки (σ); в простейшем случае каждый такой луч будет иметь точку входа внутрь (v) и выхода из (v); радиусы-векторы этих точек обозначим через ρ_1 и ρ_2 [в случае, когда начало координат лежит внутри (v), полагаем $\rho_1 = 0$]. Мы получим тогда

$$\iiint\limits_{(v)} f(\rho,\ \theta,\ \varphi)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \iint\limits_{(\sigma)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho,\ \theta,\ \varphi)\, \rho^2\, d\rho,$$

где ρ_1 и ρ_2 — известные функции θ и φ. Пределы интегрирования по θ и φ определяются по виду области (σ).

Пример. Определить массу шара, состоящего из концентрических слоев различной плотности. Можем считать в данном случае, согласно условию, что плотность зависит только от ρ. Обозначим ее $f(\rho)$, что дает

$$m=\iiint_{(v)} f(\rho)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a}f(\rho)\,\rho^2 d\rho=4\pi\int_0^{a}f(\rho)\,\rho^2\,d\rho.$$

Если плотность постоянна и равна единице, получаем выражение объема шара

$$v=4\pi\int_0^{a}\rho^2\,d\rho=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

Замечание. Множитель $\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ имеет весьма важное геометрическое значение: это есть *элемент площади поверхности сферы* радиуса единица, на которые она разбивается меридианами и параллельными кругами (рис. 47). Если мы будем разбивать поверхность сферы радиуса единица на элементы $d\sigma$ какой угодно формы, то получим [1])

$$\iiint_{(v)} f(M)\,dv=\iint_{(\sigma)}d\sigma\int_{\rho_1}^{\rho_2}f(M)\,\rho^2\,d\rho,$$

где (σ) есть область, в виде которой проектируется на поверхность сферы рассматриваемый объем при помощи центральной проекции из начала координат.

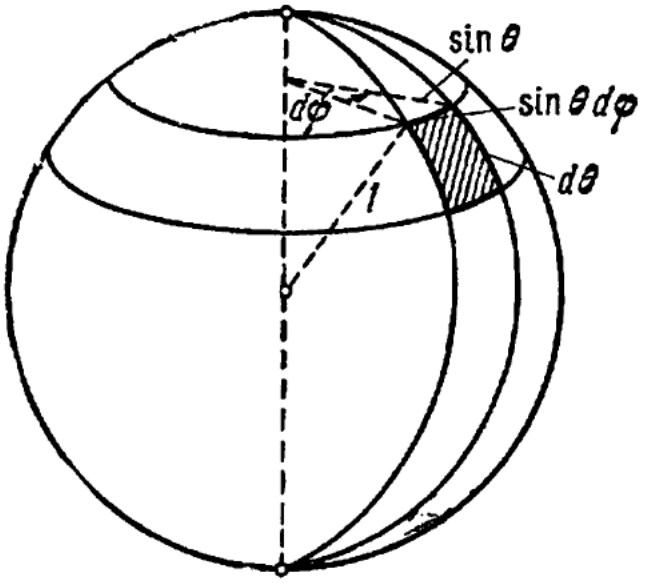


Рис. 47.

Построим элементарный конус, вершина которого в центре шара, а направляющая — контур элемента $d\sigma$. Раствор этого конуса, который измеряется площадью $d\sigma$, называется телесным углом, под которым виден из центра элемент любой поверхности (S), вырезываемый из нее этим элементарным конусом.

63. Криволинейные координаты в пространстве. В общем случае криволинейных координат в пространстве положение точки определяется тремя числами q_1, q_2, q_3, связанными с прямоугольными координатами x, y, z по формулам

$$\varphi(x,\ y,\ z)=q_1,\quad \psi(x,\ y,\ z)=q_2,\quad \omega(x,\ y,\ z)=q_3. \qquad (21)$$

Придавая q_1, q_2, q_3 различные постоянные значения, получим три семейства координатных поверхностей. *Элемент объема* dv будет

[1]) $d\sigma$ обозначает как сам элемент, так и его площадь.

образован тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей. Не останавливаясь на доказательстве, приведем результат, аналогичный результату из [60], для двух измерений. Упомянутый элементарный объем dv можно рассматривать с точностью до бесконечно малых высших порядков как параллелепипед, и если мы решим (21) относительно x, y, z:

$$x=\varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y=\psi_1(q_1, q_2, q_3), \quad z=\omega_1(q_1, q_2, q_3), \quad (21_1)$$

то выражение dv будет

$$dv=|D|\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

и формула *замены переменных в трехкратном интеграле* будет выглядеть так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(v)} F(q_1, q_2, q_3)|D|\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

где $F(q_1, q_2, q_3)$ получается из $f(x, y, z)$ в результате преобразования (21_1), а D — функциональный определитель от x, y, z по q_1, q_2, q_3:

$$D=\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}-\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right).$$

Так же, как и в [60], формулы (21) можно рассматривать иначе как деформацию пространства, причем точка с прямоугольными координатами (x, y, z) переходит в точку с прямоугольными координатами (q_1, q_2, q_3). При таком толковании $|D|$ дает коэффициент изменения объема в данном месте при переходе от (q_1, q_2, q_3) к (x, y, z).

Приведение тройного интеграла в координатах (q_1, q_2, q_3) к трем квадратурам и определение пределов в этих квадратурах производится аналогично тому, как это делалось в случае двойного интеграла [60].

Для читателя, знакомого с понятием определителя, заметим, что выражение D может быть написано в виде следующего определителя третьего порядка:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} \end{vmatrix}.$$

В томе III мы подробно займемся такими определителями.

Пример. Пусть имеется тетраэдр (v), ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$ и определяемый неравенствами

$$x>0, \quad y>0, \quad z>0, \quad x+y+z<a.$$

64

Введем новые переменные

$$x+y+z=q_1,\quad a(y+z)=q_1q_2,\quad a^2z=q_1q_2q_3$$

и будем толковать (q_1, q_2, q_3) как прямолинейные прямоугольные координаты. Из написанных формул следует

$$q_1=x+y+z,\quad q_2=\frac{a(y+z)}{x+y+z},\quad q_3=\frac{az}{y+z}$$

или

$$x=\frac{q_1(a-q_2)}{a},\quad y=\frac{q_1q_2(a-q_3)}{a^2},\quad z=\frac{q_1q_2q_3}{a^2}.$$

Совершенно так же, как и в [60], нетрудно видеть, что тетраэдр (v) переходит в куб (v_1): $0<q_1<a$; $0<q_2<a$; $0<q_3<a$. Нетрудно и здесь определить $D=\frac{1}{a^3}q_1^2q_2$, так что формула преобразования будет

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(v_1)} F(q_1, q_2, q_3)\frac{1}{a^3}q_1^2q_2\,dq_1\,dq_2\,dq_3;$$

или, если определить пределы интегрирования,

$$\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\,dz=\frac{1}{a^3}\int_0^a q_1^2\,dq_1\int_0^a q_2\,dq_2\int_0^a F(q_1, q_2, q_3)\,dq_3.$$

64. Основные свойства кратных интегралов. Раньше мы доказывали свойства определенного интеграла, пользуясь его определением, как предела сумм [I, 94]. Совершенно так же можно доказать и основные свойства кратных интегралов. Для простоты мы все функции будем считать непрерывными, так что интегралы от них безусловно имеют смысл.

I. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, и интеграл от конечной суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых:

$$\iint\limits_{(\sigma)}\sum_{k=1}^{m} c_kf_k(N)\,d\sigma=\sum_{k=1}^{m} c_k\iint\limits_{(\sigma)} f_k(N)\,d\sigma.$$

II. Если область (σ) разложена на конечное число частей [например на две части (σ_1) и (σ_2)], то интеграл по всей области равен сумме интегралов по всем частям:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)} f(N)\,d\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)} f(N)\,d\sigma.$$

III. Если $f(N)\leqslant\varphi(N)$ в области (σ), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma\leqslant\iint\limits_{(\sigma)}\varphi(N)\,d\sigma.$$

В частности [I, 94]:

$$\left|\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma\right|\leqslant\iint\limits_{(\sigma)}|f(N)|\,d\sigma.$$

IV. Если $\varphi(N)$ сохраняет знак в области (σ), то имеет место *теорема о среднем*, выражающаяся формулой

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,\varphi(N)\,d\sigma = f(N_0)\iint\limits_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma,$$

где N_0 — некоторая точка, лежащая внутри области (σ).

В частности, при $\varphi(N)=1$ получаем

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = f(N_0)\,\sigma,$$

где σ — площадь области (σ).

Аналогичные свойства имеют место и для трехкратного интеграла.

Заметим, что при определении двукратного и трехкратного интеграла как предела суммы считается всегда, что область интегрирования конечна и подынтегральная функция $f(N)$ во всяком случае ограничена, т. е. существует такое положительное число A, что $|f(N)| \leqslant A$ во всех точках N области интегрирования. Если эти условия не выполнены, то интеграл может существовать как несобственный интеграл аналогично тому, как это имело место для простого определенного интеграла [**I, 97** и **98**]. Мы займемся несобственными кратными интегралами в § 8.

65. Площадь поверхности. Предварительно рассмотрим искажение площади при проектировании плоских областей. Пусть на плоскости P имеется область S_1 (той же буквой обозначим ее площадь) и S_2 — ее проекция на плоскость Q, которая образует с P острый двугранный угол φ. Покроем P сетью прямоугольников со сторонами, параллельными и перпендикулярными линии l пересечения P и Q. При проектировании этой сетки на плоскость Q длины сторон, параллельных l, останутся неизменными, а длины сторон, перпендикулярных l, умножатся на $\cos\varphi$. При соответствующем выборе осей XY будем иметь

$$S_2 = \iint\limits_{(S_1)} \cos\varphi\,dx\,dy = \cos\varphi \iint\limits_{(S_1)} dx\,dy = S_1\cos\varphi,$$

т. е. при проектировании площадь плоской фигуры умножается на $\cos\varphi$. Пусть имеется поверхность (S), уравнение которой имеет вид

$$z = f(x, y). \tag{22}$$

Положим, что цилиндр (C) проектирует (S) на плоскость XOY в виде области (σ) (рис. 48). Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на (σ). Будем считать, что она имеет частные производные первого порядка,

Мы видели [I, 160], что направляющие косинусы нормали (n) к поверхности (S) в точке (x, y, z) пропорциональны p, q и (-1), т. е., как известно из аналитической геометрии, выражаются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, X) &= \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos(n, Y) = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos(n, Z) &= \frac{1}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Определим площадь части поверхности (S), вырезываемой цилиндром (C), который проектирует эту часть на плоскость XOY в виде области (σ) (рис. 48). Разобьем площадь (σ) на малые элементы $\Delta\sigma$; цилиндры, построенные на основаниях $\Delta\sigma$, разобьют (S) на элементы ΔS.

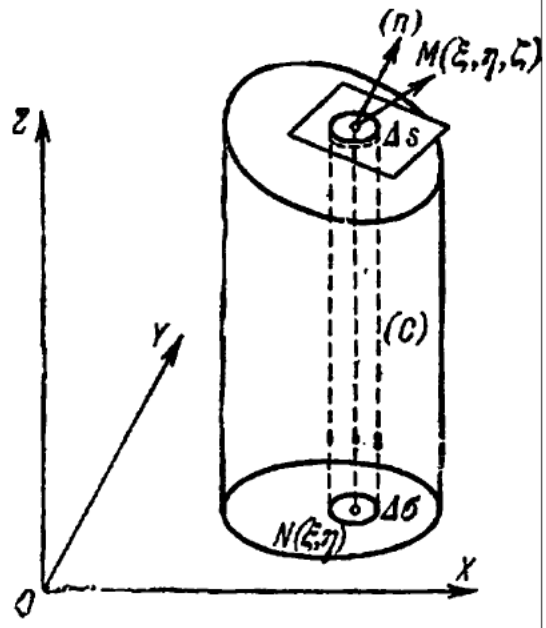


Рис. 48.

Возьмем в каждом из элементов $\Delta\sigma$ по точке $N(\xi, \eta)$, которой соответствует на поверхности (S) точка $M(\xi, \eta, \zeta)$, где $\zeta = f(\xi, \eta)$. Проведем в точке M касательную плоскость и нормаль (n) к поверхности и обозначим через $\Delta S'$ плоскую площадку, вырезываемую на этой касательной плоскости вышеупомянутым цилиндром с основанием $\Delta\sigma$.

Определим площадь упомянутой выше части поверхности (S) как предел суммы площадей плоских площадок $\Delta S'$, когда число элементов $\Delta\sigma$ беспредельно растет, а каждый из них беспредельно уменьшается по всем направлениям. Покажем, что этот предел выражается двойным интегралом по области (σ). Элемент $\Delta\sigma$ есть проекция плоского элемента $\Delta S'$ на плоскость XOY, причем нормали к плоскостям этих двух элементов образуют угол (n, Z), косинус которого выражается третьей из формул (24), а потому

$$\Delta\sigma = \Delta S' \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{или} \quad \Delta S' = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma,$$

и таким образом для площади S упомянутой поверхности мы получаем по определению:

$$S = \lim \sum \Delta S' = \lim \sum_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma.$$

Предел, стоящий в правой части равенства, представляет собою двойной интеграл по области (σ), и мы получаем

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \tag{25}$$

— искомую формулу для площади части кривой поверхности, вырезываемой из нее цилиндром, образующие которого параллельны оси OZ.

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет собой *элемент dS площади поверхности*. Пользуясь выражением $\cos(n, Z)$, можем написать

$$dS = \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy} = \frac{d\sigma_{xy}}{|\cos(n, Z)|} \text{ или } d\sigma_{xy} = |\cos(n, Z)|\,dS. \quad (26)$$

Здесь $d\sigma_{xy}$ есть проекция dS на плоскость XOY. Нужно брать абсолютное значение $\cos(n, Z)$, так как элементы площади $d\sigma_{xy}$ и dS считаются положительными.

Мы предполагаем, что p и q, определяемые формулами (23), суть непрерывные функции (x, y). Предыдущие рассуждения выражают предел суммы площадей $\Delta S'$ в виде интеграла (25) от непрерывной функции и тем самым показывают, что этот предел существует. Данное выше определение площади поверхности обладает тем недостатком, что в само определение входит операция проектирования, связанная с выбором плоскости XOY. Можно показать, что величина площади поверхности не зависит от выбора плоскости XOY. Заметим еще, что если прямые, параллельные оси OZ, встречают поверхность (S) в нескольких точках, то для вычисления площади поверхности по формуле (25) надо разбить поверхность на части и вычислять площадь для каждой отдельной части.

Можно дать определение площади поверхности, не зависящее от выбора осей. Пусть (S) — кусок гладкой поверхности, ограниченный кусочно гладким контуром. Разобьем (S) на части $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$, на каждой части возьмем какую-либо точку M_k и спроектируем (S_k) на касательную плоскость к (S) в точке M_k. Пусть p_k — площадь этой проекции. Можно показать при определенных условиях гладкости (S) и ее контура, что сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ стремится к определенному пределу S, если наибольший из диаметров δ каждой из частей стремится к нулю [ср. 58]. Это определение площади поверхности в случае явного уравнения поверхности (22) и при наличии непрерывных производных (23) и приведет к формуле (25) для площади S. (Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III).

Примеры 1. Вычислить площадь части шаровой поверхности, рассмотренной в примере [59]. Мы имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z},$$

$$q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{a}{z}.$$

$$S=\iint\limits_{(\delta)}\frac{a}{z}\,r\,dr\,d\varphi=2a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=$$

$$=2a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

2. Найти площадь части цилиндра

$$x^2+y^2=a^2, \tag{27}$$

вырезываемой из него цилиндром (рис. 49)

$$y^2+z^2=a^2. \tag{28}$$

В этой задаче удобнее считать независимыми переменными y и z, а x функцией от них, определяемой из уравнения (27). Область интегрирования в плоскости YOZ есть круг, окружность которого определяется уравнением (28). Заштрихованная на рис. 49 площадь равна, очевидно, $\frac{1}{8}$ части всей рассматриваемой площади, а потому имеем

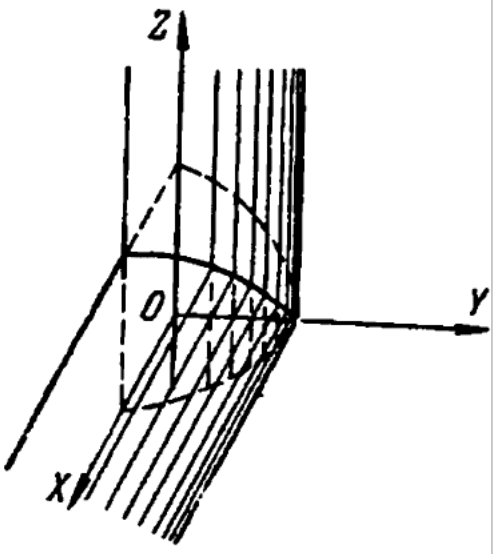


Рис. 49.

$$S=8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\,dz,$$

причем

$$p=\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{x},\qquad q=\frac{\partial x}{\partial z}=0,$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

так что

$$S=8a\int\limits_0^a dz\int\limits_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=8a\int\limits_0^a\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\,dz=$$

$$=8a\left[z\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\Big|_{z=0}^{z=a}+\int\limits_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz\right]=$$

$$=-8a\sqrt{a^2-z^2}\Big|_{z=0}^{z=a}=8a^2.$$

66. Интегралы по поверхности и формула Остроградского. Понятие о двукратном интеграле по плоской области без труда обобщается на случай интегрирования по поверхности. *Пусть* (S) — *поверхность (замкнутая или незамкнутая) и* $F(M)$ — *непрерывная функция точки на этой поверхности. Разбиваем* (S) *на* n *частей*

и пусть $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ *— площади этих частей и* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *— какие-либо точки, находящиеся на этих частях. Составляем сумму произведений*

$$\sum_{k=1}^{n} F(M_k)\,\Delta S_k.$$

Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений и беспредельном уменьшении каждой из частей ΔS_k *называется интегралом от функции* $F(M)$ *по поверхности* (S):

$$\iint\limits_{(S)} F(M)\,dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(M_k)\,\Delta S_k.$$

Положим, что прямые, параллельные оси Z, пересекают поверхность только в одной точке (рис. 48) и пусть (σ) — проекция (S) на плоскость XOY. Пользуясь формулой (26), устанавливающей связь между элементарной площадью поверхности (S) и соответствующей площадью ее проекции (σ_{xy}), сможем привести интеграл по поверхности (S) к интегралу по плоской области (σ_{xy}):

$$\iint\limits_{(S)} F(M)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{F(N)}{|\cos(n,\ Z)|}\,d\sigma_{xy}, \tag{29}$$

при этом считается, что $\cos(n, Z)$ отличен от нуля и что значение функции $F(N)$ в точке N области (σ) совпадает со значением заданной на поверхности функции $F(M)$ в той точке M, проекция которой совпадает с N. Если уравнение поверхности (S) задано в явной форме (22) и функция $F(M)$ выражена через координаты $F(x, y, z)$, то при интегрировании по (σ_{xy}) достаточно подставить $z = f(x, y)$ в выражение функции $F(x, y, z)$, т. е. $F(N) = F[x, y, f(x, y)]$. Знаменатель в правой части (29) определится по третьей из формул (24).

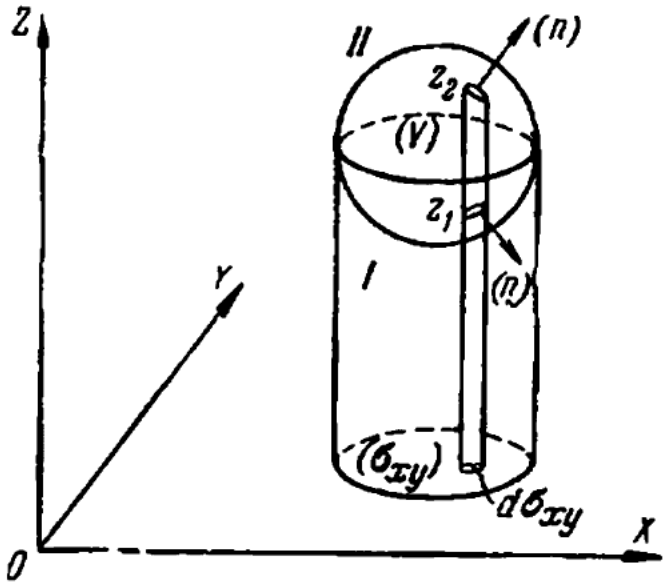


Рис. 50.

Отметим, что интегралы по поверхности, очевидно, обладают всеми свойствами двойного интеграла, указанными в [64], в частности для них имеет место теорема о среднем.

Докажем теперь одну из основных в теории кратных интегралов формул — формулу Остроградского, устанавливающую связь между трехкратным интегралом по объему (v) и интегралом по поверхности (S), ограничивающей этот объем. Будем считать, как и в [61], что прямые, параллельные оси Z, пересекают (S) не более чем в двух

точках. Сохраним те же обозначения, что и на рис. 40 [61]. Введем еще в рассмотрение направление (n) — нормали к (S), причем будем считать, что (n) направлено вовне объема (V) (внешняя нормаль) (рис. 50). Это направление (n) образует на верхней части поверхности (II) острый угол с осью OZ, а на нижней части (I) — тупой угол. Поэтому на нижней части (I) $|\cos(n, Z)| = -\cos(n, Z)$. Отметим, что $\cos(n, Z) = 0$ на линии касания поверхности (S) с проектирующим цилиндром (рис. 50). Формула (26) дает

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, Z)\,dS \text{ (на II)} \quad \text{и} \quad d\sigma_{xy} = -\cos(n, Z)\,dS \text{ (на I)}. \tag{30}$$

Пусть $R(x, y, z)$ вместе с производной $\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$ непрерывна в области (v) вплоть до (S). Рассмотрим тройной интеграл по (v) от функции $\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$. Пользуясь формулой (16), будем иметь

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy} \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dz.$$

Но интеграл от производной равен разности значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах:

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\,d\sigma_{xy}$$

или

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x, y, z_2)\,d\sigma_{xy} - \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x, y, z_1)\,d\sigma_{xy}.$$

Заменяя $d\sigma_{xy}$ на dS по формулам (30), мы сведем интегрирование по (σ_{xy}) к интегрированию по (S), причем в первом интеграле, содержащем переменную ординату z_2 части (II) поверхности (S), придется пользоваться первой из формул (30), и получится интеграл по (II), а во втором интеграле, содержащем z_1, придется пользоваться второй из формул (30), и получится интеграл по (I):

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dv = \iint\limits_{(II)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\,dS + \iint\limits_{(I)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\,dS.$$

Значки у z можно уже не писать, так как указано, по какой именно части поверхности производится интегрирование. В правой части стоит сумма интегралов по частям (II) и (I), т. е. интеграл по всей

поверхности (S):

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(S)} R(x, y, z) \cos(n, Z)\, dS. \qquad (31)$$

Если $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ — функции, обладающие свойствами функции R, то, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

можем на основании (31) написать формулу интегрирования по частям:

$$\iiint\limits_{(v)} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial z}\, dv = -\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\, dv + \iint\limits_{(S)} \varphi\psi \cos(n, Z)\, dS. \qquad (31_1)$$

Совершенно так же, взяв две другие функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$, мы могли бы доказать

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}\, dv = \iint\limits_{(S)} P(x, y, z) \cos(n, X)\, dS$$

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}\, dv = \iint\limits_{(S)} Q(x, y, z) \cos(n, Y)\, dS.$$

Складывая почленно полученные три формулы, придем *к формуле Остроградского*

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [P \cos(n, X) + Q \cos(n, Y) + R \cos(n, Z)]\, dS. \qquad (32)$$

Аналогично (31_1) записываются формулы интегрирования по частям для производных по x и y.

Мы не пишем здесь для краткости аргументов x, y, z у функций P, Q и R, но надо помнить, что это суть функции, определенные в объеме (v) и непрерывные со своими производными.

В следующей главе мы приведем большое число примеров применения формулы Остроградского.

Величины $\cos(n, X)$, $\cos(n, Y)$, $\cos(n, Z)$ суть функции, определенные на поверхности (S). Мы их считали непрерывными. Можно сделать более общее предположение, а именно считать, что (S) разбивается на конечное число кусков, на каждом из которых указанные функции непрерывны. Это будет, например, иметь место, если (S) есть многогранник.

При выводе формулы (31) мы предполагали, что прямые, параллельные оси OZ, пересекают поверхность (S) области (v) не более чем в двух точках. Нетрудно обобщить эту формулу и на области более общего вида. Заметим прежде всего, что если поверхность (S), кроме верхней части (II) и нижней части (I), имеет цилиндрическую боковую часть с образующими, параллельными оси OZ, то на этой боковой части $\cos(n, Z) = 0$, и добавление этой части к правой части формулы (31) не меняет величины интеграла по поверхности, так что все доказательство формулы остается справедливым. В более общем случае достаточно при помощи цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси OZ, разбить (v) на конечное число частей, удовлетворяющих предыдущим условиям, и применить к каждой части формулу (31). Складывая полученные таким образом формулы, будем иметь в левой части тройной интеграл по всему объему (v). В правой части будем иметь сумму интегралов по всем поверхностям тех частей, на которые мы разбили (v). Интегралы по приведенным вспомогательным цилиндрическим поверхностям, как указано выше, равны нулю. Таким образом в результате сложения в правой части мы будем иметь интеграл по поверхности (S) первоначального объема (v). Итак, формула (31) оказывается справедливой и для областей (v) более общего вида.

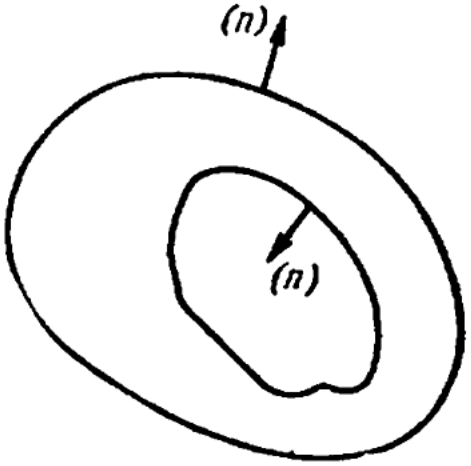


Рис. 51.

Заметим, что эти рассуждения справедливы и для того случая, когда (v) ограничено несколькими поверхностями: одной поверхностью извне и остальными изнутри. На рис. 51 изображен тот случай, когда (v) ограничено двумя поверхностями. При этом в правой части (31) надо интегрировать по всем поверхностям, ограничивающим (v), и направление (n) будет на внутренних поверхностях направлено внутрь этих поверхностей [т. е. вовне (v)].

67. Интегралы по определенной стороне поверхности. Иногда пользуются другим определением и другой формой записи интеграла по поверхности. Рассмотрим сначала тот случай, когда поверхность (S), изображенная на рис. 50, удовлетворяет условиям, указанным в начале предыдущего номера. В каждой точке поверхности можно придать нормали два противоположных направления: одно направленное во вне (V), а другое внутрь (V). В соответствии с этим у поверхности можно различать *две стороны — внешнюю и внутреннюю*. Пусть $R(x, y, z)$, как и выше, — функция, заданная на (S). Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(S)} R \cos(n, Z)\, dS. \tag{33}$$

Величина этого интеграла зависит от выбора направления нормали или, что то же, от указания на то, по какой стороне поверхности (S) производится интегрирование. При интегрировании по внешней стороне $\cos(n, Z) > 0$

и $\cos(n, Z)\,dS = d\sigma_{xy}$ на части II, а при интегрировании по части I $\cos(n, Z) < 0$, и $\cos(n, Z)\,dS = -d\sigma_{xy}$, где $d\sigma_{xy}$ — проекция элемента площади поверхности (S) на плоскость XOY, т. е. элементы площади области (σ) в формуле (29). В координатах (x, y) мы можем написать $d\sigma_{xy} = dx\,dy$, так что интеграл (33) приведется к интегралу по области (σ) плоскости XOY:

$$\iint\limits_{(\sigma)} R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy \quad \text{или} \quad -\iint\limits_{(\sigma)} R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy, \tag{34}$$

смотря по тому, по какой части (I или II) поверхности производится интегрирование. Но часто его в обоих случаях записывают одинаково

$$\iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy, \tag{35}$$

указывая, по какой стороне (внешней или внутренней) поверхности производится интегрирование. Если интегрирование производится, например, по внешней стороне и части I, то интеграл (35) сводится ко второму из интегралов (34). Можно определить интеграл (35) непосредственно, как предел суммы произведений $\sum R(M_k)\Delta\sigma_k$ значений функции $R(M)$ в точках поверхности на площади $\Delta\sigma_k$ проекций на плоскость XOY элементов ΔS_k, на которые разбита поверхность (S), причем $\Delta\sigma_k$ считаются положительными, если интегрирование совершается по внешней стороне поверхности и части II, и отрицательными, если оно совершается тоже по внешней стороне, но по части I.

Рассмотрим теперь общий случай поверхности (S). Пусть M_0 — некоторая точка этой поверхности. Фиксируем определенное направление нормали (n) в этой точке и будем, выходя из точки M_0 и двигаясь непрерывно по (S), следить за непрерывным изменением направления нормали (n). Если при любом непрерывном движении это приведет нас к определенному направлению нормали в любой точке поверхности, то поверхность называется двусторонней. Если бы на такой поверхности мы фиксировали направление (n) в исходной точке M_0 иначе, то при непрерывном движении мы и во всех остальных точках получили бы противоположное направление нормали. Это дает нам возможность говорить о двух сторонах поверхности (S), смотря по тому, какое направление нормали мы фиксировали в точке M_0, а тем самым и в остальных точках. Фиксируя сторону поверхности, мы получаем определенное значение для интеграла (33), и этот интеграл записывают при этом в виде (35) с указанием, по какой стороне поверхности производится интегрирование.

Аналогичным образом определяются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q\,dx\,dz,$$

где $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — функции, заданные на (S). Интегралы эти совпадают с интегралами

$$\iint\limits_{(S)} P\cos(n, X)\,dS \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q\cos(n, Y)\,dS.$$

При таком определении этих интегралов формулу (32) можно записать так:

$$\int\int\limits_{(v)}\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy,$$

где в правой части интегрирование производится по внешней стороне поверхности (S).

Заметим, что существуют и односторонние поверхности, на которых при непрерывном движении вдоль поверхности нормаль, непрерывно меняясь по направлению, может перейти в противоположное направление при возвращении в исходную точку. Простейшим примером является так называемый лист Мебиуса. Для его получения надо взять прямоугольный лист бумаги $ABCD$, перекрутить его один раз и склеить сторону AB со стороной CD так, чтобы точка A совпадала с C, а B с D (рис. 52). Если полученное кольцо начать красить, то, не переходя через границу кольца, его можно покрасить с обеих сторон.

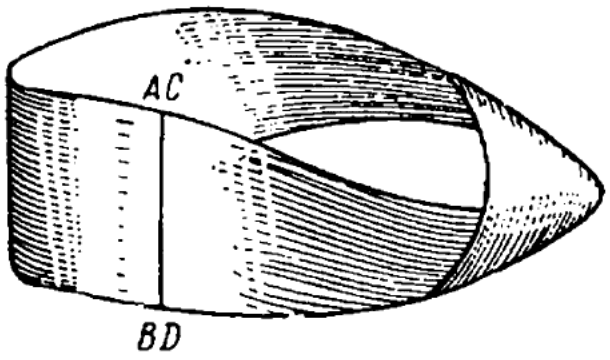


Рис. 52.

68. Моменты. Одно из приложений понятия о кратном интеграле — к теории моментов различных порядков материальных систем. Пусть дана система n материальных точек:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n,$$

массы которых равны соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Моментом k-го порядка данной системы относительно плоскости (Δ), *прямой* (d) *или точки* (D) называется сумма произведений массы каждой точки системы на k-ю степень расстояния от (Δ), (d) или (D):

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^k m_i.$$

С этой точки зрения момент нулевого порядка есть просто вся масса системы

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Момент первого порядка относительно данной плоскости (Δ) называется *статическим моментом системы относительно этой плоскости.* Статические моменты относительно координатных плоскостей мы встречаем в выражениях для *координат центра тяжести системы*

$$x_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}. \tag{36}$$

В данном случае расстояния x_i, y_i, z_i до координатных плоскостей берутся алгебраически, т. е. как положительными, так и отрицательными.

Моменты второго порядка называются обыкновенно *моментами инерции системы.* Так, выражения

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 m_i$$

суть: *моменты инерции системы относительно координатных плоскостей;* выражения

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)\, m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} (z_i^2 + x_i^2)\, m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i$$

суть *моменты инерции относительно осей OX, OY, OZ*; наконец, выражение

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\, m_i$$

есть *момент инерции относительно точки O.*

Кроме указанных выше выражений, приходится иметь дело с выражениями

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i x_i m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i,$$

которые называются *центробежными моментами системы относительно осей OX, OY, OZ.*

Если мы имеем дело не с системами конечного числа точек, а с непрерывно распределенными массами, то предыдущие суммы заменятся определенными интегралами, простыми, двукратными и трехкратными, в зависимости от того, будут ли массы распределены по прямым, поверхностям или объемам; вместо множителя m_i нужно будет тогда ввести произведение плотности $f(M)$ в данной точке M на элемент длины, площади или объема.

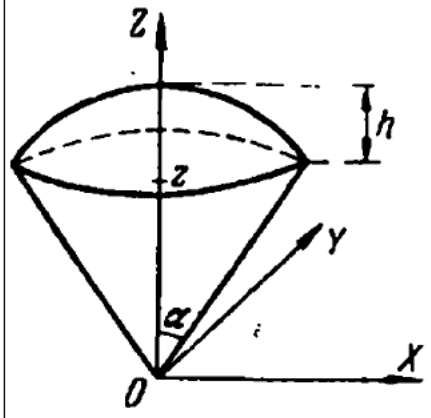


Рис. 53.

Так, например, момент инерции трехмерной области (v) относительно оси OX выразится тройным интегралом

$$\iiint_{(v)} (y^2 + z^2)\, f(M)\, dv.$$

Если считать плотность $f(M)$ постоянной f_0, то этот постоянный множитель будет выноситься из-под знака интеграла, и в формулах (36) в числителе будут стоять интегралы с подынтегральной функцией x, y и z, а в знаменателе — объем или площадь всей области, причем постоянная f_0 сократится.

Примеры. 1. Центр тяжести однородного шарового сектора (рис. 53). При том выборе координат, который указан на чертеже, достаточно найти только ординату

$$z_g = \frac{\iiint_{(v)} z\, dv}{v}.$$

Мы имеем здесь

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^2\, d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3 (1 - \cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi a^2 h$$

$$\iiint_{(v)} z\, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho \cos\theta \rho^2\, d\rho = 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{8} a^4 (1 - \cos 2\alpha),$$

$$z_g = \frac{3}{16} a \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{3}{8} a (1 + \cos\alpha) = \frac{3}{8} (2a - h),$$

где a — радиус шара.

2. Если считать, что масса распределена лишь по шаровой поверхности (S) сектора, то ордината центра тяжести будет

$$z_g = \frac{\iint\limits_{(S)} z\,ds}{s},$$

где s — площадь поверхности (S). В данном случае уравнение поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$ или $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$, и нетрудно проверить, что

$$\cos(n,\ z) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{z}{a},$$

так что

$$\iint\limits_{(S)} z\,ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} z\,\frac{d\sigma_{xy}}{\cos(n,\ Z)} = a\iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy} = \pi a^2\sin^2\alpha,$$

где (σ_{xy}) есть очевидно круг с центром в начале и радиусом $a\sin\alpha$.

Площадь s будет

$$s = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy} = a\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{d\sigma_{xy}}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\alpha} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi a^2(1-\cos\alpha),$$

и окончательно

$$z_g = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{2\pi a^2(1-\cos\alpha)} = a\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

В предыдущем примере мы имели для z_g меньшую величину

$$\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha) = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

3. Если центр тяжести совпадает с началом координат, то все статические моменты равны нулю, что непосредственно вытекает из соотношений:

$$\iiint\limits_{(v)} xf\,dv = mx_g,$$

$$\iiint\limits_{(v)} yf\,dv = my_g,$$

$$\iiint\limits_{(v)} zf\,dv = mz_g.$$

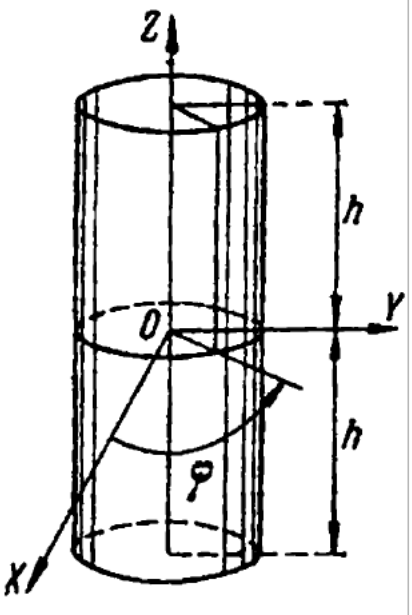


Рис. 54.

4. Моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра (рис. 54) относительно оси цилиндра и относительно диаметра его среднего сечения. Считая плотность постоянной и равной f_0,

мы имеем

$$J_z = f_0 \iiint\limits_{(v)} r^2 r\,dr\,d\varphi\,dz = 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3\,dr \int\limits_0^h dz = \pi a^4 h f_0 = m\frac{a^2}{2},$$

$$J_x = f_0 \iiint\limits_{(v)} (z^2 + r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr\,d\varphi\,dz = 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h dz \int\limits_0^a (z^2 + r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr =$$

$$= 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h z^2\,dz \int\limits_0^a r\,dr + 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^h dz \int\limits_0^a r^3\,dr =$$

$$= \frac{2}{3}\pi h^3 a^2 f_0 + \frac{\pi}{2} h a^4 f_0 = m\left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right),$$

где $2h$ — высота цилиндра, a — радиус его основания и m — его масса.

5. Моменты инерции однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Обозначая плотность через f_0, имеем, разбивая на слои, параллельные плоскости XOY:

$$J_{xy} = f_0 \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz = f_0 \int\limits_{-c}^{+c} z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz =$$

$$= 2\pi abf_0\left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{5}\right) = m\frac{1}{5}c^2.$$

Переставляя буквы, найдем без труда

$$J_{yz} = m\cdot\frac{1}{5}a^2, \quad J_{zx} = m\frac{1}{5}b^2,$$

$$J_x = J_{xy} + J_{xz} = m\frac{1}{5}(b^2 + c^2), \quad J_y = m\frac{1}{5}(c^2 + a^2), \quad J_z = m\frac{1}{5}(a^2 + b^2),$$

$$J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = m\frac{1}{5}(a^2 + b^2 + c^2).$$

6. Кинетическая энергия при вращении твердого тела вокруг оси (δ).

Как известно, при вращении тела вокруг оси (δ) с угловой скоростью ω, скорость V каждой точки тела равна по величине произведению угловой скорости на расстояние точки от оси вращения. Для вычисления кинетической энергии тела разобьем его на элементы массы Δm и кинетическую энергию соответствующего элемента обозначим через ΔT. Мы имеем

$$T = \sum \Delta T.$$

Ввиду малости элемента Δm можно представить, что вся его масса сосредоточена в одной какой-нибудь его точке M; тогда кинетическая энергия ΔT элемента Δm будет равна

$$\Delta T = \frac{1}{2}V^2\Delta m = \frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M)\,\Delta v,$$

где $f(M)$ есть плотность тела в точке M и r_δ — расстояние точки M от

оси (δ). В силу определения трехкратного интеграла получаем отсюда

$$T=\int\int\int_{(v)}\frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M)\,dv=\frac{1}{2}\omega^2 J_\delta,\quad\text{где}\quad J_\delta=\iiint_{(v)} r_\delta^2 f(M)\,dv$$

есть момент инерции тела относительно оси вращения (δ).

Замечание. Иногда при вычислении объема тела или какого-нибудь его момента удается произвести все вычисления не с помощью тройного, а с помощью двойного или даже простого интеграла. Дело здесь заключается в том, что при представлении тройного интеграла, как двойного от простого или простого от двойного, удается иногда вычислить внутренний интеграл из каких-либо элементарных соображений, не производя интегрирования. Это и создает такое впечатление, что для вычисления понадобился не тройной интеграл, а двойной или простой.

Так, например, момент инерции J_{xy} относительно плоскости XOY тела (v), ограниченного плоскостями $z=0$, $z=h$ и поверхностью, образованной вращением линии $x=f(z)$ вокруг оси OZ, можно вычислить простым интегралом, если представить себе тело составленным из круглых плоских дисков, параллельных плоскости XOY. Объем такого элементарного диска равен $\pi[f(z)]^2\,dz$, и можно написать

$$J_{xy}=\pi\int_0^h z^2[f(z)]^2\,dz.$$

Тот же момент инерции выражается тройным интегралом

$$J_{xy}=\iiint_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^h z^2\,dz\iint_{(\sigma_z)}dx\,dy,$$

где (σ_z) — сечение (v) плоскостью, параллельной плоскости XOY на расстоянии z от этой плоскости. Внутренний двойной интеграл дает площадь (σ_z), т. е. он равен $\pi[f(z)]^2$.

§ 7. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

69. Определение криволинейного интеграла. Положим, что мы имеем в пространстве некоторую кривую (l), которая имеет определенное направление (рис. 55). Пусть A — начало и B — конец этой кривой. Будем на кривой (l) отсчитывать длину дуги от начальной точки A. Положим, что на (l) задана непрерывная функция $f(M)$. Разделим (l) на n частей промежуточными точками: M_0, M_1, ..., M_{n-1}, M_n, причем M_0 совпадает с A и M_n с B. На каждом участке M_kM_{k+1} $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ возьмем какую-нибудь точку N_k и составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(N_k)\,\Delta s_k,$$

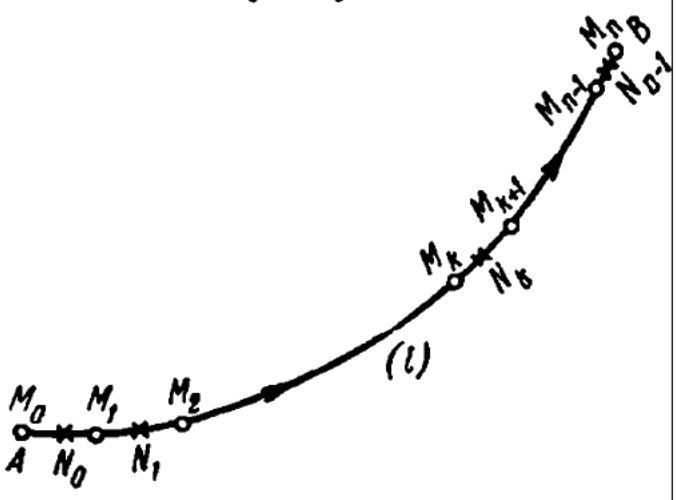


Рис. 55.

где Δs_k — длина дуги M_kM_{k+1} кривой (l). Предел этой суммы при

беспредельном возрастании числа делений n и беспредельном уменьшении каждого из участков M_kM_{k+1} называется *криволинейным интегралом* от функции $f(M)$ по l и обозначается так:

$$\int_{(l)} f(M)\,ds = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(N_k)\,\Delta s_k. \qquad (1)$$

Положение переменной точки M кривой (l) вполне определяется длиною дуги $s = \cup AM$, так что функцию $f(M)$ можно считать функцией независимой переменной s, т. е. $f(M) = f(s)$, и интеграл (1) является обычным определенным интегралом

$$\int_{(l)} f(M)\,ds = \int_0^l f(s)\,ds,$$

где l — длина дуги кривой (l). Заметим, что кривая (l) может быть и замкнутой, т. е. B может совпадать с A.

До сих пор мы не использовали того факта, что кривая (l) имеет направление. В дальнейшем нам это будет важно. Отнесем пространство к прямолинейным прямоугольным осям. Положение переменной точки M определится координатами (x, y, z). Пусть $P(x, y, z)$ — некоторая непрерывная вдоль кривой (l) функция. Обозначим через (ξ_k, η_k, ζ_k) — координаты точки N_k и через Δx_k — проекцию направленного отрезка $\overline{M_kM_{k+1}}$ на ось OX. Величина Δx_k может быть, конечно, и положительной и отрицательной и даже равной нулю. Составим сумму произведений $P(N_k) = P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ не на Δs_k, а на Δx_k, т. е. сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k.$$

Предел этой суммы называется *криволинейным интегралом* от $P(x, y, z)$ по (l) и обозначается так:

$$\int_{(l)} P(x, y, z)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k.$$

Совершенно аналогично определяются интегралы:

$$\int_{(l)} Q(x, y, z)\,dy$$

и

$$\int_{(l)} R(x, y, z)\,dz,$$

где $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — непрерывные функции вдоль (l). Складывая эти три интеграла, получим *криволинейный интеграл общего*

вида, который обозначается так:

$$\int_{(l)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

По определению интеграл (2) является пределом суммы следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta z_k], \qquad (3)$$

где Δy_k, Δz_k — проекции отрезка $\overline{M_k M_{k+1}}$ на оси OY и OZ. Нетрудно установить связь между интегралом вида (2) и интегралом вида (1). Координаты (x, y, z) переменной точки M кривой (l) можно считать функциями длины дуги $s = \smile AM$. Производные этих функций дают, как известно [I, 160], направляющие косинусы касательной к кривой (l), т. е.

$$\frac{dx}{ds} = \cos(t, X), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(t, Y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(t, Z),$$

где t — направление касательной к (l) в переменной точке M, имеющее то же направление, что и направление кривой. Символом (α, β) мы обозначаем, как всегда, угол, образованный направлениями α и β, причем значение косинуса этого угла не зависит от направления его отсчета, которое мы в данном случае и не фиксируем. С точностью до малых высших порядков можно считать, что

$$\Delta x_k = \cos(t_k, X)\,\Delta s_k, \qquad \Delta y_k = \cos(t_k, Y)\,\Delta s_k, \qquad \Delta z_k = \cos(t_k, Z)\,\Delta s_k,$$

где t_k — направление касательной в точке N_k, и интеграл (2), как предел суммы (3), приводится к виду (1):

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{(l)} [P\cos(t, X) + Q\cos(t, Y) + R\cos(t, Z)]\,ds, \qquad (4)$$

где P, Q, R можно считать функциями s вдоль (l).

Пусть имеется уравнение кривой (l) в параметрической форме:

$$x = \varphi(\tau), \qquad y = \psi(\tau), \qquad z = \omega(\tau), \qquad (5)$$

причем при изменении параметра τ от a до b точка (x, y, z) описывает кривую (l) от A до B. Мы будем считать, что функции (5) непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка в замкнутом промежутке (a, b), причем для определенности мы считаем $a < b$.

Положим, что точкам M_k соответствуют значения параметра $\tau = \tau_k$. Рассмотрим первую из сумм (3). Пусть $\tau' = \tau_1'$ — значение параметра,

соответствующее точке (ξ_k, η_k, ζ_k) кривой. По формуле конечных приращений [I, 63] можем написать

$$\Delta x_k = \varphi(\tau_{k+1}) - \varphi(\tau_k) = \varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1} - \tau_k),$$

где τ_k'' — некоторое значение τ из промежутка (τ_k, τ_{k+1}). Таким образом упомянутую сумму можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')]\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1} - \tau_k). \quad (6)$$

Эта сумма очень схожа с суммой

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1} - \tau_k),$$

которая в пределе, при стремлении наибольшей из разностей $(\tau_{k+1} - \tau_k)$ к нулю, стремится к определенному интегралу

$$\int_a^b P[\varphi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)]\varphi'(\tau)\,d\tau. \quad (7)$$

Докажем теперь, что разность суммы (6) и σ стремится к нулю. Отсюда будет непосредственно следовать, что сумма (6) имеет предел, равный интегралу (7). Упомянутая разность имеет вид

$$\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \{P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')] - P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]\}\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1} - \tau_k).$$

Значения τ_k' и τ_k'' принадлежат промежутку (τ_k, τ_{k+1}), и в силу равномерной непрерывности непрерывной функции $P[\varphi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)]$ для любого малого положительного ε существует такое δ, что [I, 32]

$$|P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')] - P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]| < \varepsilon,$$

если только $\tau_{k+1} - \tau_k < \delta$. Таким образом абсолютное значение η будет иметь оценку

$$|\eta| < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\tau_k'')|(\tau_{k+1} - \tau_k).$$

Но непрерывная в промежутке (a, b) функция $\varphi'(\tau)$ будет и ограниченной в этом промежутке, то есть $|\varphi'(\tau)| < K$, где K — определенное число [I, 35]. Отсюда имеем:

$$|\eta| < \varepsilon K \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{k+1} - \tau_k) = \varepsilon K(b - a).$$

Так как $\varepsilon \to 0$, если $\max(\tau_{k+1} - \tau_k) \to 0$, то мы видим, что η действительно стремится к нулю, и сумма (6) имеет предел (7). Рассматривая точно так же остальные суммы (3), покажем, что при сделанных предположениях интеграл (2) может быть представлен в виде обычного определенного интеграла:

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b [P\varphi'(\tau) + Q\psi'(\tau) + R\omega'(\tau)]\,d\tau, \qquad (8)$$

где P, Q и R надо выразить через τ согласно формулам (5).

Некоторые из свойств простого интеграла, указанные в [I, 94], непосредственно обобщаются на случай криволинейного интеграла. Так, например:

I. Если кривая (l) состоит из отдельных частей (l_1), (l_2), ..., (l_m), то

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \ldots + \int_{(l_m)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

II. Величина криволинейного интеграла определяется не только подынтегральным выражением и кривой интегрирования, но и указанием направления на кривой (l), причем *при изменении направления кривой интегрирования интеграл лишь меняет знак.*

Если кривая (l) целиком не удовлетворяет указанным выше условиям, но ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых имеет параметрическое уравнение (5), то формула (7) применима к каждой части, а интеграл по всей кривой можно представить как сумму интегралов по отдельным частям. Нетрудно показать, что это равносильно пределу суммы (3) для всей кривой. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие кривые (l), которые удовлетворяют указанному выше условию. Заметим, наконец, что если τ есть длина дуги $s = \cup AM$, то формула (8) переходит в формулу (4).

Если кривая (l) есть плоская кривая, находящаяся на плоскости XOY, то интеграл (2) имеет вид

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy,$$

где P и Q — функции от (x, y), определенные вдоль (l).

70. Работа силового поля. Примеры. К понятию криволинейного интеграла (2) естественно приводит задача вычисления работы. Пусть точка M описывает траекторию (l) под действием силы $\mathbf{F}$, являющейся функцией точки вдоль (l). Для вычисления работы разобьем (l)

на малые части и рассмотрим одну из этих частей M_kM_{k+1}. Ввиду малости этой части можем считать приближенно, что на этой части вектор силы $\mathbf{F}$ имеет постоянное значение, хотя бы то, которое он имеет в точке M_k, и можем заменить дугу $\smile M_kM_{k+1}$ хордой $\overline{M_kM_{k+1}}$. Таким образом на этом малом участке работа приближенно выразится произведением

$$\Delta E_k \sim |\mathbf{F}_k|\,|\overline{M_kM_{k+1}}|\cos(\mathbf{F}_k,\ \overline{M_kM_{k+1}}),$$

где через $|\mathbf{F}_k|$ мы обозначали длину вектора $\mathbf{F}$ в точке M_k, через $|\overline{M_kM_{k+1}}|$ — длину отрезка $\overline{M_kM_{k+1}}$ и через ΔE_k — работу на участке $\smile M_kM_{k+1}$. Пользуясь известной из аналитической геометрии формулой для угла между двумя направлениями, можем написать

$$\Delta E_k \sim |\mathbf{F}_k|\,|\overline{M_kM_{k+1}}|\,[\cos(\mathbf{F}_k,\ X)\cos(\overline{M_kM_{k+1}},\ X) + \\ + \cos(\mathbf{F}_k,\ Y)\cos(\overline{M_kM_{k+1}},\ Y) + \cos(\mathbf{F}_k,\ Z)\cos(\overline{M_kM_{k+1}},\ Z)],$$

или, раскрывая скобки и обозначая через P, Q и R проекции вектора $\mathbf{F}$ на координатные оси,

$$\Delta E_k \sim P_k\Delta x_k + Q_k\,\Delta y_k + R_k\,\Delta z_k,$$

где значок у P, Q и R показывает, что берутся значения этих функций в точке M_k. Суммируя затем по всем участкам и переходя к пределу, получим точное выражение для всей работы

$$E = \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Примеры. **1.** Работа, производимая постоянной силой тяжести при перемещении точки M массы m из положения $M_1(a_1, b_1, c_1)$ в $M_2(a_2, b_2, c_2)$ по любой кривой (l), выражается интегралом

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{c_1}^{c_2} mg\,dz = mg\,(c_2 - c_1)$$

(ось OZ мы направили вертикально вниз), откуда видно, что эта работа зависит только от начального и конечного положений точки, но не от пути, по которому точка двигалась. Здесь мы имеем пример криволинейного интеграла, величина которого зависит только от начальной и конечной точек интегрирования, но не от пути.

2. Работа сил ньютонова притяжения к неподвижному центру массы m при перемещении точки единичной массы из положения M_1 в положение M_2. Поместив притягивающий центр в начале координат и обозначая r радиус-вектор точки, мы видим, что сила F направлена противоположно $\overline{OM}$, а по величине равна $\frac{fm}{r^2}$, где f — постоянная тяготения. Таким образом оказывается

$$P = -\frac{fm}{r^2}\frac{x}{r},\quad Q = -\frac{fm}{r^2}\frac{y}{r},\quad R = -\frac{fm}{r^2}\frac{z}{r},$$

$$E = -fm\int_{(l)}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -fm\int_{(l)}\frac{r\,dr}{r^3} = fm\int_{(l)} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

и если мы через r_2 и r_1 обозначим расстояния точек M_1 и M_2 от притягивающего центра, то

$$E = fm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

и здесь работа, т. е. соответствующий криволинейный интеграл, зависит только от начальной и конечной точек, но не от пути.

Если ввести потенциал точечной массы

$$U = \frac{fm}{r},$$

так что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то работа E будет выражаться разностью значений потенциала U в точках M_2 и M_1, т. е.

$$E = U(M_2) - U(M_1).$$

В последующих примерах мы рассмотрим криволинейные интегралы по плоским кривым.

3. Рассмотрим плоское установившееся течение несжимаемой жидкости постоянной плотности, которую мы примем равной единице. При таком движении скорость $\mathbf{v}$ частицы жидкости, находящейся в точке $M(x, y)$, зависит только от (x, y). Вычислим количество жидкости q, протекающей в единицу времени через данный контур (l) (рис. 56). Обозначим через u и v проекции скорости $\mathbf{v}$ на координатные оси. Выделим элемент $\smile MM' = ds$ контура (l). Считая приближенно скорости всех частиц этого элемента одинаковыми, мы увидим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt все частицы этого элемента продвинутся на отрезок $|\mathbf{v}|\,dt$ в направлении вектора $\mathbf{v}$ и займут положение NN'. Площадь параллелограмма $MNN'M'$ может быть выражена произведением основания ds на величину проекции вектора $\mathbf{v}\,dt$ на направление внешней нормали (n) к кривой (l), т. е.

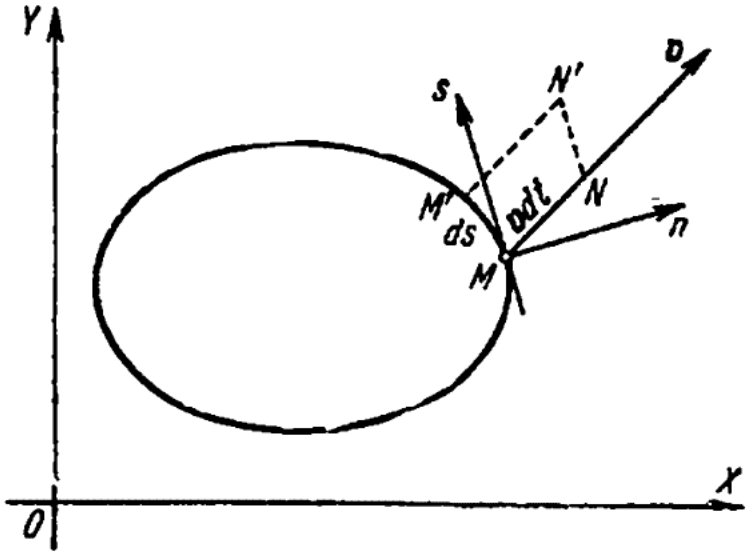


Рис. 56.

$$\text{площадь } MNN'M' = |\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, n)\,dt\,ds,$$

где $|\mathbf{v}|$ есть длина вектора $\mathbf{v}$. Обозначая через (s) направление касательной к контуру (l), указанные на рис. 56, имеем

$$(n, X) = (s, Y), \qquad (n, Y) = (s, X) - \pi, \tag{9}$$

где символом (α, β) мы обозначаем угол, отсчитываемый от направления α до направления β против часовой стрелки. Таким образом мы имеем

$$\cos(n, X) = \cos(s, Y) \quad \text{и} \quad \cos(n, Y) = -\cos(s, X).$$

Но, как известно, угол между двумя направлениями выражается по формуле

$$\cos(\mathbf{v}, n) = \cos(\mathbf{v}, X)\cos(n, X) + \cos(\mathbf{v}, Y)\cos(n, Y),$$

или, в силу (9),

$$\cos(\mathbf{v}, n) = \cos(\mathbf{v}, X)\cos(s, Y) - \cos(\mathbf{v}, Y)\cos(s, X).$$

Подставляя в выражение площади и принимая во внимание, что

$$|\mathbf{v}|\cos(v, X) = u, \qquad |\mathbf{v}|\cos(v, Y) = v,$$
$$ds\cos(s, X) = \Delta x, \qquad ds\cos(s, Y) = \Delta y,$$

получим окончательно

$$\text{площадь } MNN'M' = (-v\,\Delta x + u\,\Delta y)\,dt.$$

При этом, если угол $(\mathbf{v}, n)$ тупой, то $\cos(\mathbf{v}, n)$ будет отрицательным, и площадь получится со знаком (—).

Полное количество жидкости, протекающей за время dt через контур (l), будет

$$dt\sum(-v\,\Delta x + u\,\Delta y) = dt\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy,$$

а за единицу времени:

$$q = \int_{(l)} -v\,dx + u\,dy. \tag{10}$$

Заметим, что контур (l) может быть замкнутым и при этом (l) надо обходить против часовой стрелки. Количество жидкости q подсчитывается по формуле (10) со знаком (+), если жидкость течет в ту сторону, куда направлена нормаль (n), и со знаком (—), если в обратную сторону.

Направление (n) указано нами выше. Оно связано с направлением интегрирования по (l) и ориентировкой осей x, y согласно формулам (9). Если (l) — замкнутый контур и интегрирование совершается против часовой стрелки (рис. 56), то величина q дает разность между вытекающей в единицу времени в область, ограниченную линией (l), жидкостью и втекающей. Уменьшаемое или вычитаемое могут и отсутствовать.

Если внутри (l) не имеется ни источников, откуда жидкость вытекает *(положительный источник)*, ни точек поглощения, куда она втекает *(отрицательный источник)*, то q должно равняться нулю, так как в противном случае количество жидкости, находящейся внутри (l), увеличилось бы или уменьшилось, что противоречит свойству несжимаемости и отсутствию источников.

Таким образом *установившееся плоское течение несжимаемой жидкости характеризуется равенством*

$$\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy = 0, \tag{11}$$

которое должно выполняться для всякого замкнутого контура (l), не имеющего внутри источников.

4. В термодинамике состояние всякого тела определяется тремя физическими величинами: давлением p, объемом v и температурой (абсолютной) T. Эти величины связаны одним соотношением

$$f(v, p, T) = 0;$$

например, в случае идеального газа — формулой Клапейрона

$$pv - RT = 0.$$

Таким образом состояние тела определяется двумя величинами из трех, например: p и v, т. е. точкой $M(p, v)$ плоскости pOv.

Если состояние меняется, то определяющая его точка M описывает кривую в плоскости pOv, которая называется диаграммой рассматриваемого процесса; если тело возвращается к первоначальному состоянию, процесс называется круговым процессом или циклом, и диаграмма его будет замкнутая кривая (l).

Для определения количества тепла Q, поглощенного телом во время процесса, разобьем его на бесконечно малые элементарные процессы, соответствующие бесконечно малым изменениям величин p, v, T на Δp, Δv, ΔT. Если бы менялась только одна из этих величин, то количество поглощенного тепла было бы приближенно пропорционально приращению соответствующей переменной; если же меняются сразу все три переменные, то по принципу наложения малых действий [1, 68] полное приращение ΔQ будет равно сумме этих частных приращений. Другими словами, мы имеем приближенное равенство вида

$$\Delta Q \approx A\Delta p + B\Delta v + C\Delta T$$

и окончательно получим

$$Q = \sum \Delta Q = \int A\,dp + B\,dv + C\,dT. \tag{12}$$

Выразив, в силу уравнения состояния, T через v и p, мы получим

$$T = \varphi(v,\ p); \qquad dT = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv;$$

подставив эти выражения вместо T и dT в правую часть (12), найдем окончательно

$$Q = \int_{(l)} P\,dp + V\,dv,$$

где P и V суть известные функции от v и p.

5. Пусть изучаемый процесс есть расширение или сжатие газа или пара в рабочем цилиндре газового или простого двигателя. Изменение объема Δv будет тогда пропорционально смещению поршня в цилиндре под действием давления p, а потому работа ΔE, которая будет произведена давлением p, при этом изменении объема, будет выражаться при надлежащем выборе единиц произведением $p\Delta v$, а полная работа, произведенная в течение всего кругового процесса

$$E = \int_{(l)} p\,dv.$$

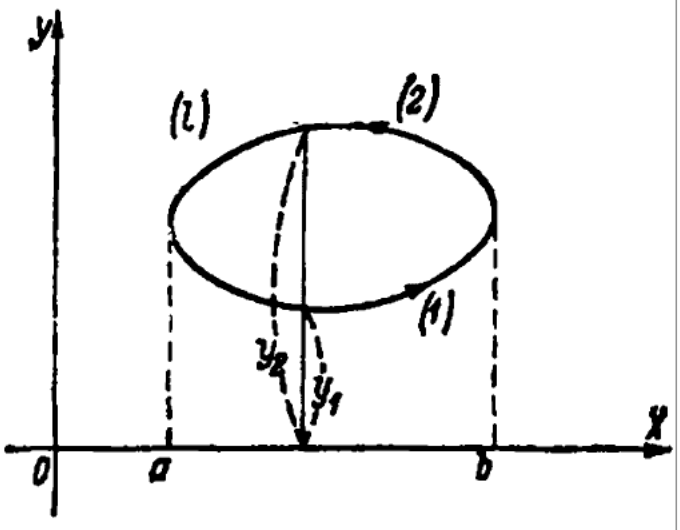


Рис. 57.

71. Площадь и криволинейный интеграл. Вычислим площадь σ области (σ), находящейся в плоскости XOY и ограниченной замкнутой кривой (l). Допустим для простоты (рис. 57), что кривая (l) пересекается прямыми, параллельными оси OY, не более чем в двух точках. Обозначив через y_1 ординату точек входа в область (σ), y_2 — ординату точек выхода прямой, параллельной оси OY, из области (σ), а через a и b — абсциссы крайних точек кривой (l),

мы имеем [I, 101]

$$\sigma = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx.$$

Пусть (1) и (2) — части кривой, соответствующие точкам входа и выхода. Интеграл

$$\int_a^b y_2\, dx$$

есть не что иное, как криволинейный интеграл

$$\int_{(2)} y\, dx,$$

с направлением от точки $x = b$ до $x = a$, взятый с обратным знаком. Точно так же интеграл

$$\int_a^b y_1\, dx,$$

совпадает с криволинейным интегралом

$$\int_{(1)} y\, dx,$$

взятым от $x = a$ до $x = b$.

Окончательно имеем

$$\sigma = \int_a^b y_2\, dx - \int_a^b y_1\, dx = -\left[\int_{(1)}^{b} y\, dx + \int_{(2)}^{a} y\, dx\right] = -\int_{(l)} y\, dx, \quad (13)$$

причем кривая (l) обходится в направлении, обратном часовой стрелке.

Совершенно таким же путем находим

$$\sigma = \int_{(l)} x\, dy. \quad (14)$$

Складывая и деля на два, находим еще

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{(l)} x\, dy - y\, dx. \quad (15)$$

Мы получили формулу (13) в предположении, что прямые, параллельные оси OY, пересекают (l) не более чем в двух точках. Нетрудно видеть, что формула справедлива и для более общих контуров. Рассмотрим сначала тот случай, когда область (σ) ограничена линиями (1), (2) и двумя отрезками прямых, параллельных оси OY (рис. 58). Повторяя прежние рассуждения, получим

$$\sigma = -\left[\int_{(1)} y\, dx + \int_{(2)} y\, dx\right].$$

по x — постоянно на CD и BA и $dx=0$, так что $\int y\,dx$ по этим отрезкам равен нулю. Добавляя эти интегралы со знаком минус к правой части, получим и для рассматриваемого случая формулу (13).

области (σ) с контуром (l) более общей формы (рис. 59) мы

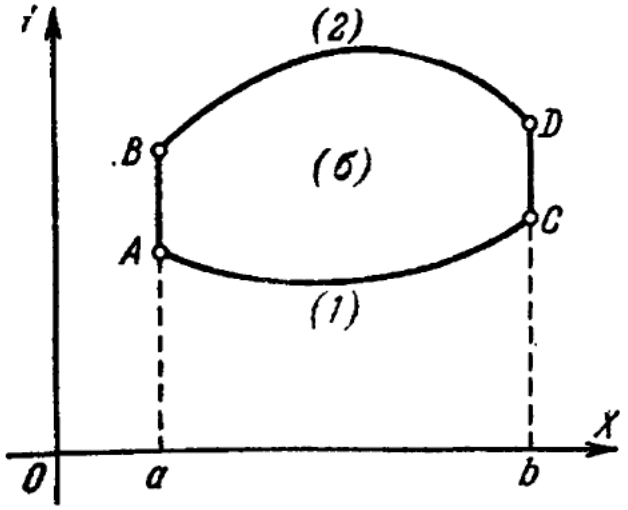


Рис. 58.

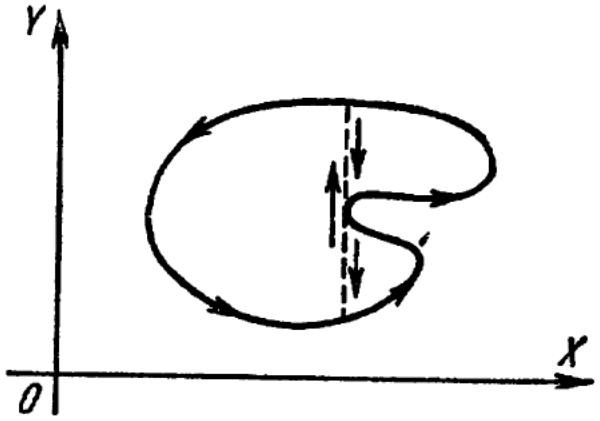


Рис. 59.

поступаем следующим образом. Проводя отрезки прямых, параллельных оси OY, разбиваем (σ) на конечное число частей, к каждой из которых применима формула (13). Складывая эти формулы, получим слева площадь σ всей области, а справа интеграл по контуру (l), так как интегралы по проведенным вспомогательным контурам, как и выше, равны нулю, т. е. формула (13) справедлива и для взятой области. Точно так же формулы (14) и (15) справедливы для контуров общего вида.

В случае эллипса

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

формула (15) дает

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)\,dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

В указанных формулах для площади существенно, что при интегрировании по (l) этот контур обходится против часовой стрелки, или лучше сказать, контур (l) обходится в таком направлении, в каком надо повернуть OX на угол $\frac{\pi}{2}$, чтобы она совпала по направлению с OY. Если бы мы направили OY не вверх, а вниз, то в формулах для площади надо было бы интегрировать по (l) по часовой стрелке. В дальнейшем мы всегда будем держаться указанного выше условия о направлении замкнутого контура на плоскости.

72. Формула Грина. Установим теперь связь между интегралом по плоской области (σ) и интегралом по ее границе (l). Применяем формулу (7) [59] к вычислению интеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, d\sigma,$$

где $P(x, y)$ непрерывна вместе с $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ в (σ) вплоть до (l).

Производя сперва интегрирование по y и считая, что контур (l) области (σ) пересекается только в двух точках прямыми, параллельными оси OY (рис. 57), мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\, dx.$$

С другой стороны, интегралы

$$\int\limits_a^b P(x, y_1)\, dx, \qquad \int\limits_a^b P(x, y_2)\, dx$$

будут не что иное, как криволинейные интегралы

$$\int P(x, y)\, dx,$$

взятые соответственно по частям (1) и (2) контура (l) от точки $x = a$ до точки $x = b$.

Изменяя во втором из них направление интегрирования, получим

$$\int\limits_a^b P(x, y_2)\, dx = -\int\limits_b^a P(x, y_2)\, dx = -\int\limits_{(2)\,b}^{a} P(x, y)\, dx,$$

откуда

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = -\int\limits_{(2)\,b}^{a} P\, dx - \int\limits_{(1)\,a}^{b} P\, dx$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = -\int\limits_{(l)} P\, dx, \tag{16}$$

причем кривую (l) нужно обходить против часовой стрелки (рис. 57).

Из этой формулы непосредственно следует, как и в [66], формула интегрирования по частям для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, обладающих

такими же свойствами, что и $P(x, y)$:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\sigma = -\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi \, d\sigma - \int\limits_{(l)} \varphi\psi \, dx. \qquad (16_1)$$

Таким же путем мы вычислим и интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} d\sigma,$$

где Q есть другая функция от (x, y). Предположив для простоты, что контур (l) пересекается только в двух точках прямыми, параллельными оси OX, мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] \, dy,$$

причем это выражение может быть тоже приведено к криволинейному интегралу по замкнутому контуру

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \int\limits_{(l)} Q \, dy. \qquad (17)$$

Вычитая уравнение (16) из (17), мы и получим *формулу Грина*

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \int\limits_{(l)} P \, dx + Q \, dy. \qquad (18)$$

Формула (18) выведена в предположении, что функции P и Q вместе с указанными частными производными непрерывны в (σ) вплоть до (l) и что прямые, параллельные осям OX и OY, пересекают (l) не более чем в двух точках. Для областей более общего вида применимы рассуждения из [71]. Эти рассуждения применимы и к тому случаю, когда область (σ) ограничена несколькими кривыми (рис. 60). При этом в правой части (18) надо интегрировать по всем граничным кривым, причем при принятом направлении осей надо интегрировать по внешнему контуру против часовой стрелки, а по внутренним контурам — по часовой стрелке, т. е. по всем контурам так, чтобы область (σ) оставалась слева.

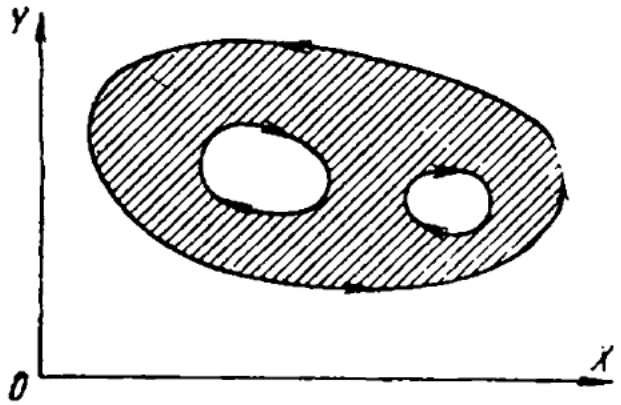


Рис. 60.

Отметим, что формулу Грина (18) мы можем записать в другом виде. Пусть t — касательная к линии l, имеющая то же направление, что и l, и n — нормаль к l, направленная вовне (σ). Направление t получается из направления n, поворотом на прямой угол против часовой стрелки, и, следовательно, для углов, образованных t и n с осями координат, мы имеем: $(t, X) = \pi + (n, Y)$ и $(t, Y) = (n, X)$. Если ds есть элемент дуги кривой, то

$$dx = ds \cos(t, X) \text{ и } dy = ds \cos(t, Y),$$

т. е.

$$dx = -ds \cos(n, Y)$$

и

$$dy = ds \cos(n, X).$$

Подставляя это в формулу (18) и заменяя в этой формуле P на $(-Q)$ и Q на P, получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\sigma = \int\limits_{(l)} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, Y)]\, ds.$$

В этом виде формула Грина представляет собой формулу Остроградского для плоскости.

73. Формула Стокса. Рассмотрим теперь случай любой незамкнутой поверхности (S) с контуром l (рис. 61). Предполагаем, что прямые, параллельные оси z, пересекают (S) только в одной точке, и сохраняем все обозначения из [65]. Проекция l на плоскость XOY дает контур (λ) области (σ_{xy}). За положительный обход контура (λ) принимаем обход против часовой стрелки и соответственно считаем положительный обход по (l). Направление нормали n к (S) берем так, чтобы оно составляло острый угол с осью OZ, так что $\cos(n, Z) > 0$. При этом в формулах (24) [65] надо брать нижний знак, и эти формулы дают

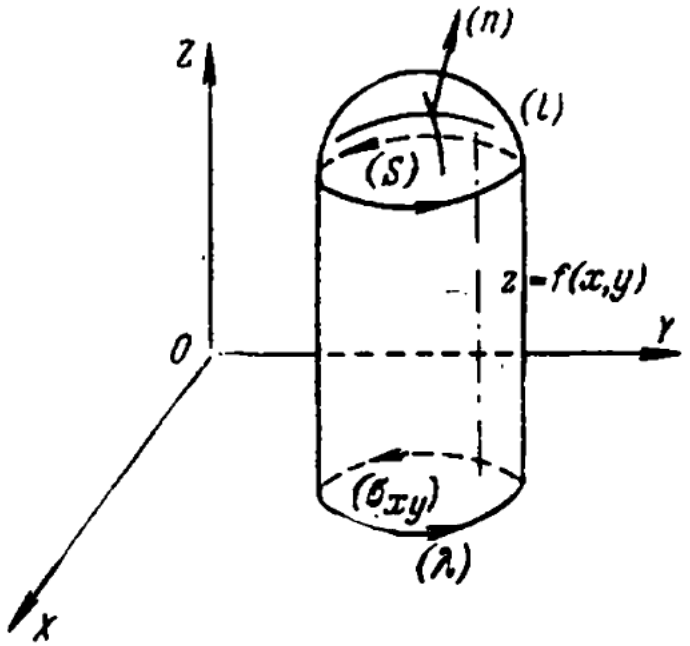


Рис. 61.

$$p \cos(n, Z) = -\cos(n, X),$$
$$q \cos(n, Z) = -\cos(n, Y), \quad (19)$$

а формулу (26) из [65] можно переписать так:

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, Z)\, dS. \quad (20)$$

Пусть $P(x, y, z)$ — какая-либо функция, заданная вблизи поверхности (S) и непрерывная со своими производными первого порядка.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{(l)} P(x,\ y,\ z)\,dx.$$

Линия (l) лежит на (S) и, пользуясь уравнением этой поверхности: $z=f(x,\ y)$, мы можем заменить под знаком интеграла z на $f(x,\ y)$. При этом подынтегральная функция $P[x,\ y,\ f(x,\ y)]$ будет содержать только x и y. Координаты $(x,\ y)$ переменной точки (λ) такие же, что и в соответствующих точках на (l), а потому интегрирование по (l) можно заменить интегрированием по (λ):

$$\int_{(l)} P(x,\ y,\ z)\,dx = \int_{(\lambda)} P[x,\ y,\ f(x,\ y)]\,dx.$$

Применим к интегралу, стоящему направо, формулу Грина (18), причем в данном случае $P=P[x,\ y,\ f(x,\ y)]$; $Q=0$ и (l) есть (λ). При вычислении $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ надо будет дифференцировать P как непосредственно по y, так и через посредство третьего аргумента z, который заменен на $f(x,\ y)$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y},$$

причем в выражении P под буквой z надо подразумевать $f(x,\ y)$. Формула (18) дает

$$\int_{(l)} P(x,\ y,\ z)\,dx=\int_{(\lambda)} P[x,\ y,\ f(x,\ y)]\,dx=$$

$$=-\iint_{(\sigma_{xy})}\left[\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right]d\sigma_{xy}.$$

Выражая $d\sigma_{xy}$ через элемент dS поверхности (S), согласно (20), приведем двойной интеграл к интегралу по поверхности (S) [66]:

$$\int_{(l)} P(x,\ y,\ z)\,dx=$$

$$=-\iint_{(S)}\left[\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right]\cos(n,\ Z)\,dS,$$

и, наконец, пользуясь второй из формул (19), получим окончательно

$$\int_{(l)} P\,dx=\iint_{(S)}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(n,\ Y)-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(n,\ Z)\right]dS. \qquad (21)$$

Если $Q(x,\ y,\ z)$ и $R(x,\ y,\ z)$ — две другие функции, заданные вблизи (S), то, совершая круговую перестановку координат x, y и z,

получим две аналогичные формулы

$$\int_{(l)} Q\,dy = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n,\ Z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n,\ X)\right] dS$$

$$\int_{(l)} R\,dz = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(n,\ X) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(n,\ Y)\right] dS.$$

Складывая три полученные формулы, придем к *формуле Стокса*

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,\ X) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,\ Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,\ Z)\right] dS. \quad (22)$$

Формула эта связывает криволинейный интеграл по контуру поверхности с интегралом по самой поверхности, и в этом отношении она аналогична формуле Остроградского [66], которая связывала интеграл по поверхности трехмерной области с интегралом по самой области. Формула Грина есть тот частный случай формулы Стокса, когда (S) есть плоская область на плоскости XOY. При этом (l) есть замкнутая кривая на плоскости XOY и $dz = 0$, а направление (n) совпадает с осью OZ, так что $\cos(n, X) = \cos(n, Y) = 0$ и $\cos(n, Z) = 1$. Подставляя все это в (22), получим формулу (18).

По поводу косинусов, входящих в формулу (22), делаются те же предположения, что и при выводе формулы Остроградского [66].

Формула (21) выведена нами в предположении, что прямые, параллельные оси OZ пересекают (S) только в одной точке. Если это не так, то разбиваем (S) на части вспомогательными линиями так, чтобы каждая часть удовлетворяла указанному выше условию, так что к каждой части формула (21) применима. Складывая полученные таким образом для всех частей формулы, будем иметь слева интеграл по контуру (l), так как интегралы по вспомогательным контурам будут браться два раза в противоположных направлениях и сократятся. Справа получим двойной интеграл по всей поверхности (S), т. е. формула (21) окажется справедливой в общем случае. То же самое замечание справедливо и для общей формулы (22). При этом только нужно соблюдать следующее условие для обхода (l) и направления нормали (n): *наблюдатель, обходящий (l) и направленный по нормали (n), должен иметь поверхность (S) слева.* Это правило связано с выбором координатной системы, указанной на рис. 61. В этой системе наблюдатель, направленный по OZ, видит OX переходящей в OY при вращении на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Если бы это вращение было по часовой стрелке, то в предыдущем правиле слово «слева» надо было бы заменить словом «справа».

Если воспользоваться обозначением интеграла по поверхности, указанным в [67], то формулу (22) можно переписать в виде:

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (23)$$

Определение стороны поверхности (S) и направления (n) производится по вышеуказанному правилу.

74. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости. Примеры криволинейных интегралов, разобранные в [70], показывали, что в некоторых случаях величина криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования, но лишь от начальной и конечной точек интегрирования, а в других случаях вид самого пути влияет на величину интеграла.

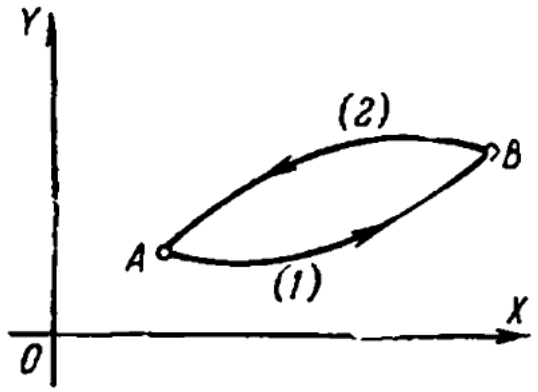


Рис. 62.

Теперь, пользуясь формулами Грина и Стокса, мы выясним те условия, при которых величина интеграла не зависит от пути интегрирования. Мы начнем со случая плоской кривой и выясним условия независимости криволинейного интеграла

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

от пути. Все дальнейшие рассуждения будут относиться к внутренней части некоторой конечной области (D), ограниченной одним контуром. Функции P и Q вместе с указанными ниже частными производными считаются непрерывными внутри (D). Соединяя точки (A) и (B) кривыми (1) и (2) (рис. 62), мы должны иметь

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = (2)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy, \qquad (24)$$

или, пользуясь свойством II [69],

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy - (2)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + (2)\int_{(B)}^{(A)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = 0, \qquad (25)$$

где (l) — замкнутый контур, составленный из кривой (1) с направлением от (A) к (B) и кривой (2) с направлением от (B) к (A). Таким образом, ввиду произвольности точек A и B, мы видим, что интеграл по любому замкнутому контуру (l) должен равняться нулю. Наоборот, если интеграл по замкнутому контуру (l) равен нулю, то интеграл по (1) равен интегралу по (2), так как из равенства (25), наоборот, вытекает равенство (24). Если кривые (1) и (2), соединяющие точки A и B, пересекаются, то, соединив A с B кривой (3), которая не пересекается ни с кривой (1), ни с (2), из равенств

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy=(3)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy,$$

$$(2)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy=(3)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy$$

будем иметь

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy=(2)\int_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy.$$

Итак, *условие независимости интеграла от пути совпадает с условием, что интеграл по любому замкнутому контуру* (l) *равен нулю.*

Если последнее условие выполнено, то из формулы (18) мы получим

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma\equiv 0, \tag{26}$$

причем область интегрирования (σ) может быть взята *совершенно произвольно.*

Покажем, что отсюда вытекает

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{27}$$

тождественно, т. е. *при всех значениях* x *и* y *из* (D).

В самом деле, пусть в некоторой точке $C(a, b)$ разность

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f(x, y)$$

отлична от нуля, например положительна. В силу непрерывности производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, что мы предполагаем, указанная разность будет положительной в некотором малом круге (σ_0) с центром в C. Составим интеграл

$$\iint_{(\sigma_0)} f(x, y)\,d\sigma=\iint_{(\sigma_0)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma,$$

и применим к нему теорему о среднем [64]:

$$\iint\limits_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = f(\xi,\ \eta)\,\sigma,$$

где $(\xi,\ \eta)$ — некоторая точка из (σ_0), и потому $f(\xi,\ \eta) > 0$, откуда вытекает, что

$$\iint\limits_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma > 0,$$

а это противоречит тому, что интеграл (26) равен нулю при любом выборе области (σ). Итак, условие (27) необходимо для независимости интеграла от пути. Нетрудно видеть, что оно и достаточно, ибо из него, в силу (18), вытекает, что интеграл $\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy$ по любой замкнутой кривой равен нулю, что и равносильно независимости интеграла от пути.

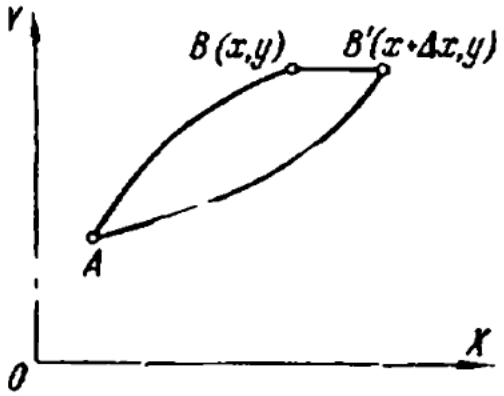


Рис. 63.

Итак, *условие* (27) *необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл*

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy \qquad (28)$$

не зависел от пути интегрирования и был только функцией координат точек A *и* B.

Если это условие выполнено, и мы закрепим точку $A(x_0,\ y_0)$, а будем считать переменной только точку $B(x,\ y)$, то интеграл (28) будет функцией $(x,\ y)$, или, как говорят, функцией точки B:

$$\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy = U(x,\ y). \qquad (29)$$

Исследуем свойства этой функции. Оставив без изменения y, дадим приращение Δx только переменной x. Мы получим

$$U(x+\Delta x,\ y) - U(x,\ y) = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x+\Delta x,\ y)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Ввиду независимости интеграла от пути интегрирования, мы можем считать, что путь интегрирования в первом интеграле состоит из кривой AB (рис. 63), соединяющей A с B, той же самой, что и для второго интеграла, и отрезка прямой BB'. Интеграл по AB

сократится и останется

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\int\limits_{(x,\ y)}^{(x+\Delta x,\ y)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,\ y)\,dx,$$

ибо на прямой BB' y не меняется, и $dy=0$. Применяя теорему о среднем [I, 95], мы находим

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\Delta x P(x+\theta\Delta x,\ y) \qquad (0<\theta<1).$$

Разделив на Δx и приближая Δx к 0, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x,\ y)=P(x,\ y). \tag{30}$$

Таким же точно образом мы найдем

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,\ y). \tag{31}$$

Соотношения (30) и (31) дают нам [I, 68]

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy.$$

Таким образом оказывается, что при выполнении условия (27) подынтегральное выражение

$$P\,dx+Q\,dy \tag{32}$$

является полным дифференциалом функции $U(x,\ y)$, определяемой по формуле (29). Нетрудно показать, что самое общее выражение функции $U_1(x,\ y)$, от которой полный дифференциал равен (32), дается формулой

$$U_1(x,\ y)=U(x,\ y)+C, \tag{33}$$

где C — произвольная постоянная. В самом деле, мы должны иметь

$$dU=P\,dx+Q\,dy,$$
$$dU_1=P\,dx+Q\,dy,$$

откуда

$$d(U_1-U)=0.$$

Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по всем независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная, т. е.

$$U_1-U=C,$$

что и требовалось доказать.

Отметим очевидное равенство, которое будет иметь место при соблюдении условия (27):

$$\int_{A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(B)} dU_1 = U_1(B) - U_1(A). \tag{34}$$

Обратно, пусть существует такая функция U_1, что

$$dU_1 = P\,dx + Q\,dy. \tag{35}$$

Покажем, что необходимо должно быть

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0,$$

и что функция U_1 определяется по формуле

$$U_1(x,\ y) = \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy + C.$$

В самом деле, соотношение (35) можно переписать в виде

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial U_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U_1}{\partial y}\,dy,$$

и так как величины dx и dy, как дифференциалы независимых переменных, совершенно произвольны [1, 68], то это равенство может иметь место только при условии, что равны коэффициенты при dx и dy в обеих частях равенства, т. е.

$$P = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U_1}{\partial y},$$

откуда уже ясно, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial x\,\partial y} \equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial y\,\partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Итак, при этом выполнено условие (27), а тогда, в силу предыдущих рассуждений, интеграл

$$U(x,\ y) = \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy$$

зависит только от $(x,\ y)$ и обладает свойством

$$dU = P\,dx + Q\,dy = dU_1,$$

откуда следует

$$U_1 = U + C,$$

что и требовалось доказать. Итак, *необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение* $P\,dx + Q\,dy$ *было полным дифференциалом некоторой функции* U_1, *заключается в том,*

чтобы существовало тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

при выполнении которого функция U_1 *определяется по формуле*

$$U_1(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy+C. \tag{36}$$

75. Случай многосвязной области. Доказательство того, что условие (27) является необходимым и достаточным для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy$$

не зависел от пути, существенным образом основано на следующих двух обстоятельствах:

1) Функции P и Q и их частные производные первого порядка непрерывны в рассматриваемой области (D) изменения (x, y).

2) Если в области (D) начерчен какой-либо замкнутый контур (l), то вся часть плоскости, заключенная внутри (l), принадлежит той области, где выполнены условия непрерывности и условие (27).

Первое условие важно потому, что упомянутые в нем функции входят под знак интеграла при доказательстве. Второе существенно для применения формулы Грина, т. е. для преобразования криволинейного интеграла к двукратному. Оно равносильно тому, что всякий замкнутый контур, начерченный в области, может быть непрерывным сужением приведен к точке, не выходя из области, или проще говоря, это условие равносильно тому, что область не имеет дыр.

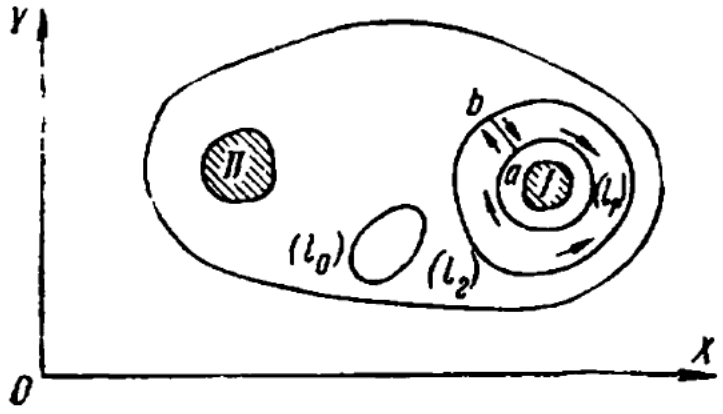


Рис. 64.

Положим теперь, что функции P и Q непрерывны со своими производными и условие (27) выполнено в некоторой области, имеющей две дыры (рис. 64). Если в такой области взять замкнутый контур (l_0), внутри которого нет дыр, то к такому контуру и области, им ограниченной, приложима формула Грина (18), и в силу условия (27) интеграл по такому замкнутому контуру (l_0) будет нуль. Возьмем теперь замкнутый контур (l_1), обходящий вокруг дыры (I). Здесь формула (18) неприменима, и интеграл (28) по (l_1), вообще говоря, окажется отличным от нуля. Покажем, что величина этого интеграла не зависит от вида контура (l_1), и важно лишь, что этот

контур обходит вокруг одной дыры (I). Возьмем два контура (l_1) и (l_2), обходящих вокруг (I). Нам надо показать, что величины интеграла (28) по (l_1) и (l_2) одинаковы. Проведем вспомогательный контур (ab), соединяющий (l_1) с (l_2). Кривые (l_1), (l_2) и (ab) совместно являются контуром области, уже не имеющей дыр, причем этот контур должен обходиться в направлении, указанном стрелкой. К этому контуру, следовательно, приложима формула (18), и, в силу (27), интеграл по этому контуру будет нуль:

$$\int_{(l_1)} + \int_{(ba)} + \int_{(l_2)} + \int_{(ab)} = 0.$$

При этом интегралы по (ba) и (ab), взятые в противоположных направлениях, сокращаются, интегрирование по (l_1) надо производить по часовой стрелке и по (l_2) — против часовой стрелки. Меняя направление интегрирования по (l_1) и знак при интеграле, что не меняет результата, получим

$$\int_{(l_2)} - \int_{(l_1)} = 0$$

или окончательно

$$\int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. действительно интегралы по (l_1) и (l_2), взятые оба, как всегда, против часовой стрелки, одинаковы по величине. Таким образом *дыре* (I) *соответствует определенная постоянная* ω_1, *равная величине интеграла* (28), *взятого по любому замкнутому контуру, обходящему вокруг* (I). *Точно так же дыре* (II) *соответствует другая постоянная* ω_2.

Если в области (D) проведем два разреза (ab) и (cd) от дыр к внешнему контуру (рис. 65), то получится новая область, не имеющая уже внутри дыр, и, в силу (27), в этой области можно построить однозначную функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy,$$

но, в силу предыдущего, значения этой функции на противоположных краях разреза (ab) отличаются на постоянную ω_1, а на (cd) — на постоянную ω_2. Если уничтожить разрезы и вернуться к исходной области (D), то в ней *функция* $U(x, y)$ *будет многозначной*. Обход вокруг дыр будет придавать этой функции слагаемые ω_1 и ω_2, т. е. *функция* $U(x, y)$ *будет*

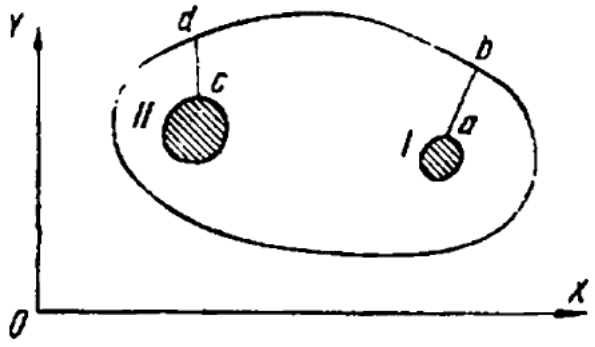


Рис. 65.

содержать неопределенное слагаемое вида $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — *любые целые числа*. Все наши рассуждения очевидно годятся для любого числа дыр в области, причем дыры могут быть и точечными, т. е. состоять из одной лишь точки. Число дыр, увеличенное на единицу, называется обычно *степенью связности области* (D), а сама область с дырами — *многосвязной областью*. Числа ω_1 и ω_2 называются *циркуляциями* выражения $P\,dx + Q\,dy$ или *циклическими постоянными* функции $U(x, y)$.

Пример. Рассмотрим функцию

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

определенную в области (D), ограниченной двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат. Определим P и Q по формулам

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ Q &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Эти функции непрерывны в (D) со своими производными, и, как нетрудно проверить, удовлетворяют соотношению (27). Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

и возьмем его по окружности (l_1) с центром в начале и некоторым радиусом a. Подставляя $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, получим

$$\int_{(l_1)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В данном случае область (D) имеет одну дыру, и циклическая постоянная $\omega_1 = 2\pi$. Функция $U_1(x, y)$ является полярным углом

$$U_1(x, y) = \int P\,dx + Q\,dy = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = \varphi$$

и при обходе вокруг дыры приобретает слагаемое 2π. Заметим, что радиус внутренней окружности можно считать нулем, т. е. можно считать дыру точечной. Дело сведется к исключению точки $(0, 0)$. В этой точке функции P и Q (37) принимают неопределенную форму $\frac{0}{0}$.

76. Независимость криволинейного интеграла от пути в пространстве. Так же как и на плоскости, условие независимости криволинейного интеграла от пути в пространстве совпадает с условием, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Рассмотрим интеграл

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{38}$$

Пользуясь формулой Стокса (22), можно доказать так же, как и в предыдущем, что *необходимые и достаточные условия независимости интеграла* (38) *от пути выражаются тремя тождествами*:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\equiv 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\equiv 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0. \tag{39}$$

Если эти условия выполнены, то можно построить функцию точки $U(x, y, z)$

$$U(x, y, z)=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{40}$$

причем совершенно так же, как и раньше, можно показать, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R \tag{41}$$

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=dU \tag{42}$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=U(B)-U(A). \tag{43}$$

Кроме того, условия (39) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ было полным дифференциалом некоторой функции U_1, и, если эти условия выполнены, то U_1 определяется по формуле

$$U_1=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Понятие многосвязной области в пространстве представляет некоторые особенности. В качестве примера рассмотрим область (D), образованную внутренностью сферы, из которой выделены две трубки (I) и (II), концами упирающиеся в поверхность сферы, как это указано на рис. 66. Если возьмем замкнутый контур (l_1), обходящий вокруг трубки (I), то на него нельзя натянуть поверхность, которая бы заключалась в области (D), и, следовательно, если даже в области (D) условия (39) и выполнены, то все же нельзя к (l_1) применять формулу Стокса, и величина интеграла (38) по (l_1) будет, вообще говоря, отлична от нуля. Но эта величина не будет зависеть от вида (l_1). Важно лишь, что (l_1) есть замкнутый контур в (D), обходящий вокруг одной трубки (I). Таким образом получится циклическая постоян-

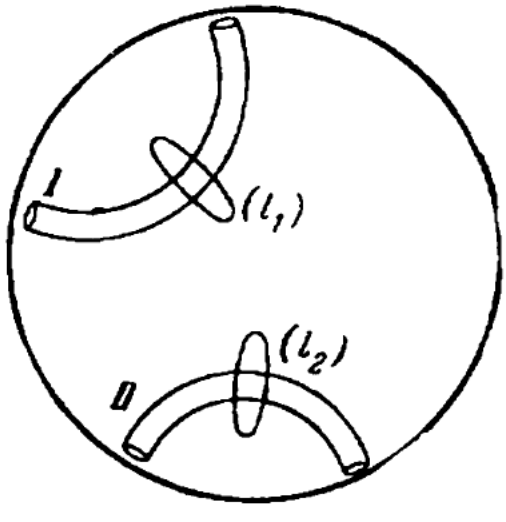


Рис. 66.

ная ω_1 для трубки (I). Совершенно так же будем иметь вторую циклическую постоянную ω_2 для второй трубки (II). Функция $U(x, y, z)$, определяемая по формуле (40), в этом случае есть многозначная функция и содержит неопределенное слагаемое $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — любые целые числа.

Заметим, что если область (D) есть часть пространства между двумя концентрическими сферами, и в этой области выполнены условия (39), то никаких циклических постоянных не будет, и функция (40) будет однозначной. Действительно, геометрически ясно, что на всякий замкнутый контур, находящийся в (D), можно в данном случае натянуть поверхность, также находящуюся в (D), а потому ко всякому замкнутому контуру в (D) применима формула Стокса (22), и из условия (39) вытекает равенство нулю интеграла по такому контуру.

Пример. Рассмотрим угол φ, входящий в систему цилиндрических и сферических координат

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

и определим P и Q по формулам (37). Эти выражения принимают неопределенную форму $\frac{0}{0}$ вдоль всей оси OZ. При рассмотрении криволинейного интеграла в пространстве

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

придется исключить трубку, идущую вдоль оси OZ, или просто саму ось, и величина написанного интеграла по любому замкнутому контуру вокруг такой трубки даст циклическую постоянную 2π.

77. Установившееся течение жидкости. Пусть в плоском установившемся течении несжимаемой жидкости $\mathbf{v}(x, y)$ — вектор скорости, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — его проекции на координатные оси. В примере 3 [70] мы видели, что условие отсутствия источников сводится к тому, что интеграл

$$\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy \tag{44}$$

по любому замкнутому контуру есть нуль или, что то же, что этот интеграл не зависит от пути. В силу (27) для этого необходимо и достаточно

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \tag{45}$$

что и является характерным для несжимаемой жидкости. При выполнении условия (45) выражение

$$-v\,dx + u\,dy$$

оказывается полным дифференциалом некоторой функции $\psi(M)$, которая определяется соотношением

$$\psi(B) - \psi(A) = \int_{(A)}^{(B)} -v\,dx + u\,dy. \tag{46}$$

Функция $\psi(M)$ называется *функцией тока* и имеет простое физическое значение: *разность* $\psi(B)-\psi(A)$ *дает количество жидкости, протекающей за единицу времени через произвольный контур, начало и конец которого находятся в точках* A *и* B. Это вытекает непосредственно из формулы (10) [70] для количества протекающей жидкости.

Если в отдельных точках области находятся источники, то, исключая эти точки, получим область с дырами, в которых условие (45) выполнено. Циклическая постоянная для некоторой дыры, равная интегралу (44) по замкнутому контуру вокруг этой дыры, даст, очевидно, количество жидкости q, даваемой соответственным источником в единицу времени. Функция типа $\psi(M)$ будет при этом многозначной. Если $q<0$, то источник будет отрицательной силы (сток).

Рассмотрим, кроме интеграла (44), еще интеграл

$$\int_{(l)} u\,dx+v\,dy, \tag{47}$$

величина которого называется обычно циркуляцией скорости вдоль контура (l). Предположим, что циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е. интеграл (47) не зависит от пути. Это выражают иначе, говоря, что течение безвихренное. Сделанное предположение равносильно существованию функции $\varphi(M)$:

$$\varphi=\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} u\,dx+v\,dy, \tag{48}$$

такой, что проекции u и v вектора скорости $\mathbf{v}$ суть частные производные

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{49}$$

Функция φ называется потенциалом скорости. Если условие независимости интеграла (48) от пути выполнено в многосвязной области (области с дырами), то потенциал скорости φ будет, вообще говоря, многозначной функцией, и циклическая постоянная интеграла (48) относительно какой-нибудь дыры будет давать напряженность вихря, соответствующего этой дыре.

Из равенства (46) вытекает [74]

$$-v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Сравнивая эти равенства с (49), получаем два уравнения, связывающих потенциал скорости φ и функцию тока ψ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{50}$$

Эти уравнения, которые обычно называются *уравнениями Коши — Римана*, имеют основное значение в теории функций комплексной переменной, и их гидродинамическое значение, установленное выше, служит основанием тех обширных приложений, которые теория функций комплексной переменной имеет в плоской задаче гидродинамики.

В случае установившегося движения в пространстве вектор скорости $\mathbf{v}(x, y, z)$ имеет три составляющие: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, а вместо интеграла (48) надо рассматривать интеграл

$$\int_{(l)} u\,dx+v\,dy+w\,dz,$$

и если выполнены условия независимости его от пути

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

то существует потенциал скорости

$$\varphi=\int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} u\,dx+v\,dy+w\,dz,$$

причем

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Обобщение условия несжимаемости (45) на случай пространства мы приведем в следующей главе.

78. Интегрирующий множитель. Если выражение

$$P\,dx+Q\,dy \tag{51}$$

не есть полный дифференциал, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\not\equiv 0,$$

то, как мы покажем, всегда можно найти такую функцию μ, по умножении на которую выражение (51) обратится в полный дифференциал

$$\mu(P\,dx+Q\,dy)=dU. \tag{52}$$

Всякая такая функция называется *интегрирующим множителем* выражения (51).

Для того чтобы функция μ была интегрирующим множителем выражения (51), в силу (27), необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=0, \tag{53}$$

которое, будучи переписано в виде

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0, \tag{54}$$

может быть рассматриваемо как уравнение для определения множителя μ. Фактически, вообще говоря, этим уравнением трудно пользоваться, так как оно является уравнением в частных производных, задача интегрирования которых еще более сложна, чем задача интегрирования обыкновенных уравнений.

Если выражение (51) есть полный дифференциал, то дифференциальное уравнение

$$P\,dx+Q\,dy=0 \tag{55}$$

называется *уравнением типа полного дифференциала.*

Оно может быть сразу проинтегрировано. В самом деле, пусть U и есть та функция, для которой

$$dU = P\,dx + Q\,dy.$$

Функция эта при сделанном предположении, которое равносильно условию (27), может быть найдена всегда по формуле (29). Уравнение (55) равносильно равенству $dU = 0$, т. е.

$$U = C, \tag{56}$$

каковое равенство и дает общий интеграл данного дифференциального уравнения (55).

Пусть теперь выражение (51) не есть полный дифференциал. Дифференциальное уравнение (55) всегда имеет, в силу теоремы существования, общий интеграл, который мы запишем в виде

$$F(x,\ y) = C.$$

Функция $F(x,\ y)$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

где $\frac{dy}{dx}$, в силу (55), мы должны заменить на $\left(-\frac{P}{Q}\right)$, т. е. должно иметь место тождество

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}.$$

Обозначая через μ общую величину этих двух равных отношений, мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q,$$

т. е. μ есть интегрирующий множитель выражения (51).

Это рассуждение доказывает, что *всякое выражение* $P\,dx + Q\,dy$ *имеет интегрирующий множитель.*

Найдя интегрирующий множитель выражения (51) и по нему функцию F, можно написать общий интеграл дифференциального уравнения (55):

$$F = C.$$

Примеры. 1. Линии тока установившегося плоского течения жидкости имеют дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{или} \quad -v\,dx + u\,dy = 0, \tag{57}$$

где u и v — проекция вектора скорости v на координатные оси. Если жидкость несжимаема, то выполняется условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

которое показывает, что выражение

$$-v\,dx+u\,dy \tag{58}$$

есть полный дифференциал некоторой функции; действительно, в [77] мы видели, что

$$-v\,dx+u\,dy=d\psi,$$

где ψ есть функция тока, и уравнение линий тока будет:

$$\psi=C,$$

что и дает общий интеграл уравнения

$$-v\,dx+u\,dy=0.$$

2. В примере **4** [70] мы упоминали об элементарном тепловом процессе и дали выражение бесконечно малого количества тепла, получающегося при таком процессе, в зависимости от бесконечно малых изменений давления p, объема v и температуры T.

Напишем три выражения для dQ в зависимости от того, какие из трех величин p, v, T считаются независимыми переменными:

$$dQ=\begin{cases} c_v\,dT+c_1\,dv & (T,\ v\text{ — независимые переменные}),\\ c_p\,dT+c_2\,dp & (T,\ p\text{ — независимые переменные}),\\ P\,dp+V\,dv & (p,\ v\text{ — независимые переменные}). \end{cases} \tag{59}$$

Величины c_v и c_p особенно важны и называются теплоемкостями вещества при постоянном объеме и постоянном давлении.

Если мы в (59) будем выражать одни независимые переменные через другие, то получим ряд соотношений между коэффициентами. Так, в равенстве

$$c_p\,dT+c_2\,dp=c_v\,dT+c_1\,dv \tag{60}$$

будем считать независимыми переменными T и v. Положим

$$dp=\frac{\partial p}{\partial T}\,dT+\frac{\partial p}{\partial v}\,dv.$$

Подставив это выражение для dp в (60) и приравняв коэффициенты при dT и dv, имеем

$$c_v=c_p+c_2\frac{\partial p}{\partial T} \tag{61}$$

$$c_1=c_2\frac{\partial p}{\partial v}. \tag{62}$$

Таким же путем из равенства

$$c_v\,dT+c_1\,dv=P\,dp+V\,dv$$

мы получим

$$c_v=P\frac{\partial p}{\partial T}, \tag{63}$$

$$c_1=V+P\frac{\partial p}{\partial v}. \tag{64}$$

В случае идеального газа мы имеем уравнение состояния

$$pv=RT,$$

откуда следует

$$\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{v},\quad \frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{p}{v},\quad \frac{\partial v}{\partial T}=\frac{R}{v},\quad \frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{v}{p},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{v}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial v}=\frac{p}{R},$$

и тогда соотношения (61)—(64) дают

$$c_v = c_p + c_2 \frac{R}{v}, \quad c_1 = -c_2 \frac{p}{v}, \quad c_v = P \frac{R}{v}, \quad c_1 = -P \frac{p}{v} + V. \tag{65}$$

Эти равенства позволяют выразить величины c_1, c_2, P, V через основные c_v и c_p:

$$c_1 = (c_p - c_v) \frac{p}{R}, \quad c_2 = -(c_p - c_v) \frac{v}{R}, \quad P = c_v \frac{v}{R}, \quad V = c_p \frac{p}{R}. \tag{66}$$

Выражение dQ, вообще говоря, не есть полный дифференциал. Но в силу двух основных начал термодинамики можно утверждать, что:

I. Разность между dQ и элементарной работой давления $p\,dv$ есть полный дифференциал

$$dQ - p\,dv = dU,$$

причем функция U называется *внутренней энергией.*

II. Частное от деления dQ на абсолютную температуру T есть полный дифференциал, или, другими словами, $\frac{1}{T}$ есть интегрирующий множитель выражения dQ:

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

причем функция S называется *энтропией.*

Начало I, в силу первой из формул (59), дает нам

$$dU = dQ - p\,dv = c_v\,dT + (c_1 - p)\,dv,$$

откуда

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial (c_1 - p)}{\partial T}\right|_v. \tag{67}$$

Значки T и v означают те переменные, которые считаются постоянными при указанном дифференцировании.

Точно так же начало II дает

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v}{T}\,dT + \frac{c_1}{T}\,dv,$$

откуда

$$\frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{c_1}{T}\right)\right|_v = \frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T^2},$$

или

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T}. \tag{68}$$

Сравнивая уравнения (67) и (68), находим

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{c_1}{T}. \tag{69}$$

Переходя опять к случаю идеального газа, мы заключаем отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v} = \frac{c_1}{T}, \qquad c_1 = \frac{RT}{v} = p. \tag{70}$$

С другой стороны, уравнение (66) дает

$$c_1 = p = (c_p - c_v)\frac{p}{R}, \quad \text{т. е.} \quad c_p - c_v = R. \tag{71}$$

На основе экспериментальных данных считают, что:

III. Величина c_p — теплоемкость идеального газа при постоянном давлении — есть величина постоянная, а потому и $c_v = c_p - R$ есть также величина постоянная.

Из (71) следует, что $c_p > c_v$ и, обозначив для краткости

$$\frac{c_p}{c_v} = k,$$

где $k > 1$, мы без труда найдем окончательно, в силу формул (66) и (71):

$$c_1 = p, \quad c_2 = -v, \quad P = \frac{v}{k-1}, \quad V = p\frac{k}{k-1},$$

после чего формула (59) дает следующее выражение для dQ, dU и dS:

$$dQ = \begin{cases} c_v\,dT + p\,dv, \\ c_p\,dT - v\,dp, \\ \dfrac{v\,dp + kp\,dv}{k-1}, \end{cases} \tag{72}$$

$$dU = c_v\,dT, \tag{73}$$

$$dS = c_v\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dv = c_v\frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v}. \tag{74}$$

При изотермическом процессе температура остается постоянной, т. е. $dT = 0$ и

$$dQ = p\,dv,$$

т. е. все поглощаемое тепло идет на работу давления, и полное изменение количества поглощенного тепла при переходе от объема v_1 к объему v_2 будет

$$\int_{(v_1)}^{(v_2)} p\,dv.$$

График процесса при постоянной температуре называется *изотермой*.

Адиабатическим процессом называется процесс, совершающийся без притока или утери тепла. Он характеризуется условием

$$dQ = 0 \text{ или } dS = 0, \quad S = \text{const},$$

или постоянством энтропии в частице газа или во всем его объеме. Энтропию можно определить из формулы (74):

$$S = c_v \lg T + R \lg v + C,$$

так что адиабатический процесс характеризуется условием

$$c_v \lg T + R \lg v = \text{const},$$

или, переходя от логарифмов к основаниям

$$T^{c_v} v^R = T^{c_v} v^{c_p - c_v} = \text{const},$$

или, возвышая в степень $\frac{1}{c_v}$,

$$Tv^{k-1} = \text{const},$$

и так как $T = \frac{pv}{R}$, то окончательно

$$pv^k = \text{const}. \tag{75}$$

Наконец, при постоянном объеме мы имеем $dv = 0$, и

$$dQ = c_v\, dT, \quad dQ = c_v (T_2 - T_1), \tag{76}$$

если газ переходит от температуры T_1 к температуре T_2.

79. Уравнение в полных дифференциалах для случая трех переменных. Обобщая уравнение (55) на три переменные, получим

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{77}$$

где P, Q и R — заданные функции (x, y, z). Если выполнены условия (39), то левая часть уравнения (77) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, и общий интеграл уравнения (77) будет

$$U(x, y, z) = C, \tag{78}$$

где C — произвольная постоянная. Геометрически уравнение (78) дает семейство поверхностей в пространстве. Если левая часть (77) не есть полный дифференциал, то будем искать интегрирующий множитель, т. е. такую функцию $\mu(x, y, z)$, чтобы левая часть уравнения

$$\mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0 \tag{79}$$

была полным дифференциалом. Условия (39) дают при этом:

$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = 0,$$

что можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) &= Q\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial y}, \qquad \mu\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = R\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) &= P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Умножая эти равенства почленно на P, Q, R, складывая и сокращая на μ, получим соотношение между P, Q и R:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{81}$$

Таким образом, предполагая существование интегрирующего множителя μ, мы пришли к необходимому условию (81), которому должны удовлетворять коэффициенты P, Q, R. Можно показать (на чем мы не останавливаемся), что это условие и достаточно, т. е. *уравнение* (77) *не всегда имеет интегрирующий множитель, и равенство* (81) *дает необходимое и достаточное условие существования такого множителя*. Если μ существует, то левая часть уравнения (79) есть полный дифференциал некоторой функции U, и равенство (78) дает общий интеграл уравнений (79) и (77). Если же условие (81) не

выполнено, то уравнение (77) не имеет общего интеграла вида (78). Условие (81) называется иногда условием полной интегрируемости уравнения (77).

Выясним геометрический смысл уравнения (77) и его общего интеграла (78), если последний существует. Функции

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z)$$

определяют в каждой точке некоторый вектор $\mathbf{v}(x, y, z)$, проекциями которого на оси они и являются. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

определяет семейство некоторых линий (L) в пространстве, в каждой точке которых соответствующий вектор $\mathbf{v}$ направлен по касательной. Уравнение (77) равносильно условию перпендикулярности бесконечно малого перемещения с составляющими dx, dy, dz к вектору $\mathbf{v}$, т. е. уравнение (77) определяет в каждой точке некоторый плоский элемент, перпендикулярный к $\mathbf{v}$ или, что то же, лежащий в нормальной плоскости к той из линий (L), которая проходит через взятую точку. Общий интеграл (78) и дает семейство поверхностей, касательные плоскости которых в каждой точке удовлетворяют этому условию, т. е. нормальны к $\mathbf{v}$. Иначе говоря, поверхности (78) будут ортогональны к линиям (L). Если задано семейство линий (L), заполняющих пространство, то можно определить в каждой точке касательный к ним вектор $\mathbf{v}$, взяв его длину хотя бы равной единице, его составляющие P, Q, R и построить уравнение (77). Равенство (81) дает при этом условие, чтобы заданное семейство линий (L) было ортогонально к некоторому семейству поверхностей.

80. Замена переменных в двойном интеграле. В заключение настоящего параграфа дадим вывод формулы замены переменных в двойном интеграле, указанной нами в [**60**]. Пусть имеется преобразование переменных

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \tag{82}$$

причем мы рассматриваем (x, y) и (u, v) как прямолинейные прямоугольные координаты точек на плоскости. Формулы (82) дают нам точечное преобразование плоскости, при котором точка (u, v) переходит в точку (x, y). Положим, что мы имеем на плоскости область (σ_1) с контуром (l_1) и область (σ) с контуром (l). Предположим, что: 1) функции (82) непрерывны вместе со своими производными первого порядка в области (σ_1) вплоть до (l_1); 2) формулы (82) дают биоднозначное соответствие области (σ_1) с контуром (l_1) и области (σ) с контуром (l), т. е. всякой точке (u, v) из (σ_1) соответствует определенная точка (x, y) из (σ) и, наоборот, точкам (l_1) — точки (l);

3) функциональный определитель от функций (82) по переменным (u, v):

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi(u, v)}{\partial u} \tag{83}$$

сохраняет определенный знак в области (σ_1).

Будем говорить, что *соответствие между* (σ) *и* (σ_1) *прямое*, если при обходе по (l_1) против часовой стрелки соответствующая точка (x, y) обходит (l) тоже против часовой стрелки. В противном случае, когда обходу по (l_1) соответствует обход в противоположном направлении по (l), назовем соответствие *обратным*. Площадь σ области (σ) выражается интегралом [71]:

$$\sigma = \int_{(l)} x\, dy,$$

где интегрирование совершается против часовой стрелки.

Вводя новые переменные по формулам (82), получим.

$$\sigma = \pm \int_{(l_1)} \varphi(u, v)\, d\psi(u, v) = \pm \int_{(l_1)} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \varphi \frac{\partial\psi}{\partial v} dv. \tag{84}$$

Мы условливаемся интегрировать по (l_1) против часовой стрелки. Если соответствие прямое, то в результате преобразования и получится именно это направление у (l_1), а потому в формуле (84) надо брать знак $(+)$. Если же соответствие обратное, то на (l) в результате преобразования получится противоположное направление, но, приписав знак $(-)$, мы можем опять интегрировать против часовой стрелки.

Применим к интегралу (84) формулу Грина (18), полагая $x = u$, $y = v$, $P = \varphi \frac{\partial\psi}{\partial u}$, $Q = \varphi \frac{\partial\psi}{\partial v}$. При этом получится

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}, \tag{85}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \pm \iint_{(\sigma_1)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} du\, dv.$$

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем [64], получим

$$\sigma = \pm \sigma_1 \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]_{(u_0, v_0)}, \tag{86}$$

где значение функционального определителя (83) берется в некоторой точке (u_0, v_0), принадлежащей (σ_1). Из последней формулы следует, между прочим, в силу положительности σ и σ_1, что если соответствие прямое, то определитель (83) имеет знак $(+)$, а при обратном соответствии — знак $(-)$.

Перейдем теперь к выводу формулы замены переменных. Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная в области (σ_1) и тем самым в (σ).

Разделим (σ_1) на части: $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_n'$. Этим частям будет соответствовать, в силу (82), разбиение (σ) на некоторые части $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Будем обозначать теми же буквами τ_k' и τ_k площади этих частей. По формуле (86) имеем

$$\tau_k = \tau_k' \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)},$$

где (u_k, v_k) — некоторая точка из τ_k'. Ей соответствует некоторая точка $x_k = \varphi(u_k, v_k)$, $y_k = \psi(u_k, v_k)$, и мы можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\tau_k = \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)} \cdot \tau_k'.$$

Переходя к пределу, получим формулу *замены переменных в двойном интеграле*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f[\varphi(u, v); \psi(u, v)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du\,dv, \quad (87)$$

которая совпадает с формулой (13) из [60].

Отметим одно следствие формулы (86). Положим, что область (σ_1) беспредельно сжимается к точке (u, v). При этом (σ) будет беспредельно сжиматься к соответствующей точке (x, y), и точка (u_0, v_0), принадлежащая (σ_1), будет стремиться к (u, v). Переходя к пределу, получим из (86)

$$\left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| = \lim \frac{\sigma}{\sigma_1},$$

т. е. отношение площадей будет иметь своим пределом абсолютное значение функционального определителя в соответствующей точке, как мы об этом уже упоминали в [60]. Совершенно так же, если рассматривать функцию одной переменной $x = f(u)$, как точечное преобразование на прямой, при котором точка с абсциссой u переходит в точку с абсциссой x, то абсолютное значение производной $|f'(u)|$ дает предел отношения соответствующих длин на упомянутой прямой, т. е., иными словами, дает коэффициент линейного искажения в данной точке с абсциссой u при упомянутом точечном преобразовании.

Заметим, что при выводе формулы (85) нам приходится пользоваться второй производной $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}$ и ее независимостью от порядка дифференцирования. Таким образом, строго говоря, к сделанным в начале настоящего номера предположениям надо добавить еще существование и непрерывность $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}$, откуда, как известно [1, 155], следует и ее независимость от порядка дифференцирования.

Если (v) — область в пространстве, ограниченная поверхностью (S), то, применяя формулу Остроградского [66], можем, полагая $P=Q=0$ и $R=z$, выразить объем v этой области в виде интеграла по поверхности:

$$v=\iint\limits_{(S)} z\cos(n,\ Z)\,dS.$$

Пользуясь этим выражением объема, можно доказать формулу замены переменных в тройном интеграле [63] приблизительно тем же путем, каким мы это сделали выше для двойного интеграла.

§ 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

81. Интегрирование под знаком интеграла. При вычислении кратных интегралов мы встретились с определенными интегралами, у которых подынтегральная функция и даже пределы интегрирования зависят от некоторого переменного параметра. Здесь мы остановимся несколько подробнее на таких интегралах.

Мы исследуем интеграл

$$I(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx,$$

в котором переменная интегрирования обозначена через x, подынтегральная же функция зависит не только от x, но и от параметра y, от которого зависят и пределы интегрирования x_1 и x_2. В этом случае очевидно и результат интегрирования $I(y)$ будет, вообще говоря, функцией от y. Формула (7) из [59]:

$$\int\limits_a^3 I(y)\,dy=\int\limits_a^\beta dy\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)\,dy \qquad (1)$$

называется *формулой интегрирования определенного интеграла по параметру под знаком интеграла*. Она получает особенно простой вид, когда пределы x_1 и x_2 не зависят от y и приводятся к постоянным числам a, b [59]:

$$\int\limits_a^\beta I(y)\,dy=\int\limits_a^\beta dy\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_a^\beta f(x,\ y)\,dy. \qquad (2)$$

Во всех этих формулах подынтегральная функция $f(x,\ y)$ считается непрерывной функцией двух переменных в области интегрирования, а эта область считается конечной.

Пример. Указанный выше прием применяется иногда для вычисления определенных интегралов от функций, для которых неопределенный интеграл неизвестен. Применим его для вычисления *интеграла Лапласа*:

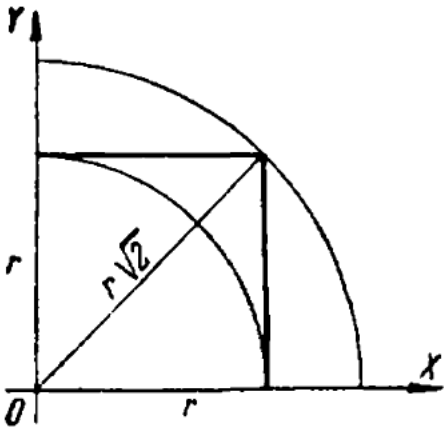


Рис. 67.

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx. \tag{3}$$

Пусть (D') — четверть круга с центром в начале и радиусом r, лежащая в первом координатном углу, (D'') — квадрат, ограниченный прямыми $x=0$; $x=r$; $y=0$; $y=r$ и, наконец, (D''') — четверть круга с центром в начале и радиусом $r\sqrt{2}$ (рис. 67). Очевидно (D') есть часть (D'') и (D'') — часть (D'''). Возьмем двойной интеграл по этим областям от положительной функции $e^{-x^2-y^2}$. Имеем очевидные неравенства

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\iint\limits_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\iint\limits_{(D''')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Вводя полярные координаты: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, получим [59]

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{r} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=r}=\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}).$$

Заменяя r на $r\sqrt{2}$, будем иметь

$$\iint\limits_{(D''')} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2}).$$

Интегрирование по квадрату (D'') даст

$$\iint\limits_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{r} e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^{r} e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^{r} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

и написанное выше неравенство принимает вид

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2})<\left(\int_0^{r} e^{-x^2}\,dx\right)^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2}).$$

При стремлении r к бесконечности крайние члены неравенства стремятся к $\frac{\pi}{4}$, а следовательно, к тому же пределу должен стремиться и средний член, откуда вытекает следующее значение для интеграла (3):

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что [I, 96]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Если пользоваться несобственным интегралом по всему первому координатному углу, который мы обозначим через (P), то результат получится непосредственно. Действительно

$$\iint_{(P)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2,$$

и вводя полярные координаты:

$$I^2 = \iint_{(P)} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = \frac{\pi}{4},$$

откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, что и совпадает с полученным выше результатом.

82. Формула Дирихле. Задав в формуле (1) x_1 и x_2 как функции y и промежуток (α, β) изменения y мы тем самым определяем некоторую область (σ) в плоскости XOY. В приложениях часто встречается случай, когда эта область приводится к равнобедренному треугольнику, образованному тремя прямыми (рис. 68)

$$y = x,\ x = a,\ y = b.$$

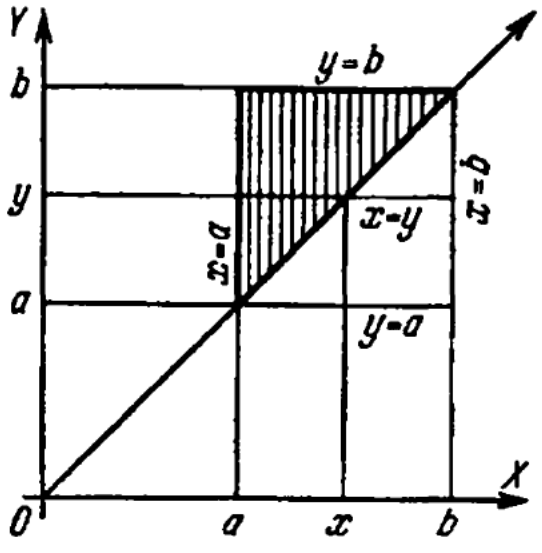


Рис. 68.

Приводя двойной интеграл по площади этого треугольника к повторному и интегрируя в одном случае сначала по x, а потом по y, а в другом случае сначала по y и потом по x, получим формулу

$$\int_a^b dy \int_a^y f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_x^b f(x, y)\,dy, \tag{6}$$

которая называется *формулой Дирихле*.

Пример. (Задача Абеля). *Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущена без начальной скорости из любой точки кривой M на высоте h* (рис. 69) *над самой низкой точкой кривой O, приходит в точку O в течение времени T, которое есть данная функция от высоты h:*

$$T = \varphi(h).$$

Направим ось OY вертикально вверх, ось OX горизонтально, начало координат поместим в самую низкую точку искомой кривой, уравнение которой ищем в виде

$$x = f(y).$$

Положим

$$ds = dy\sqrt{1 + [f'(y)]^2} = u(y)\,dy, \qquad u(y) = \sqrt{1 + [f'(y)]^2}. \tag{7}$$

По закону живых сил приращение кинетической энергии при переходе точки из начального положения M в N будет равно работе силы тяжести, так как реакция кривой перпендикулярна перемещению точки и потому не дает работы, т. е.

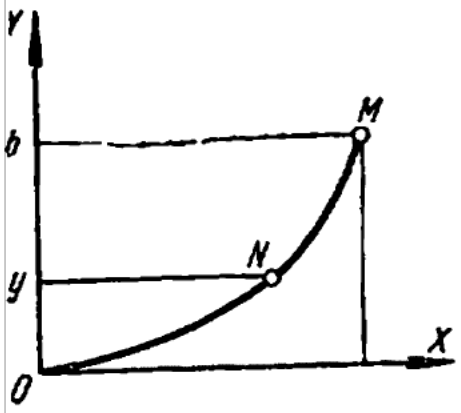


Рис. 69.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y), \qquad v = \frac{ds}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g(h-y),$$

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{-u(y)}{\sqrt{h-y}}\,dy,$$

причем мы берем знак (—), так как при увеличении t высота y точки убывает.

Время падения из точки M в O соответствует изменению y от h до 0, а потому

$$\varphi(h) = T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}. \tag{8}$$

Таким образом нам предстоит определить неизвестную функцию $u(y)$ из уравнения (8), которое называется *интегральным уравнением*, так как неизвестная функция $u(y)$ входит под знак интеграла.

Умножим обе части уравнения (8) на $\frac{1}{\sqrt{z-h}}$ и проинтегрируем по h в пределах от 0 до z:

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)}{\sqrt{z-h}}\,dh = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Повторный интеграл, стоящий в правой части, можем преобразовать по формуле Дирихле следующим образом:

$$\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}} = \int_0^z dy\int_y^z \frac{u(y)}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}\,dh =$$

$$= \int_0^z u(y)\,dy\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}. \tag{9}$$

Внутренний интеграл вычисляется без особого труда, если ввести новую переменную t по формуле

$$h = y + t(z-y).$$

Когда h меняется от y до z, переменная t меняется от 0 до 1, и мы имеем

$$z-h = (z-y)(1-t), \qquad h-y = (z-y)t, \qquad dh = (z-y)\,dt,$$

откуда

$$\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin(2t-1)\Big|_{t=0}^{t=1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

и окончательно получаем

$$\frac{\pi}{\sqrt{2g}} \int_0^z u(y)\,dy = \int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}},$$

или

$$\int_0^z u(y)\,dy = F(z), \tag{10}$$

где $F(z)$ есть известная функция от z, определяемая по формуле

$$F(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Дифференцируя соотношение (10) по z, находим

$$u(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}, \tag{11}$$

что и дает решение задачи, так как, зная функцию $u(y)$, без труда найдем и $x = f(y)$ по формуле (7).

Мы проделаем это до конца для частного случая *таутохронной кривой*, для которой время падения в самую низкую точку вообще не зависит от высоты h, т. е.

$$\varphi(h) = \text{const} = c.$$

Мы имеем тогда

$$F(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^z \frac{c\,dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi} 2\sqrt{z},$$

$$u(z) = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{z}}.$$

Для определения $x = f(y)$ имеем теперь, в силу (7),

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \frac{2gc^2}{\pi^2} \frac{(dy)^2}{y} = \frac{A}{y}(dy)^2 \qquad \left(A = \frac{2gc^2}{\pi^2}\right).$$

Положим

$$y = a(1+\cos t), \quad dy = -a\sin t\,dt, \quad A = 2a.$$

Мы найдем

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}(-a\sin t)\,dt = -2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt;$$

$$x = x_0 - a(t - \sin t),$$

где x_0 — постоянная интегрирования. Читатель легко покажет, что полученная кривая есть циклоида, но только расположенная не так, как циклоида [I, 79].

В дальнейшем мы покажем, как выполнить дифференцирование по z в общей формуле (11).

Сделаем некоторые замечания по поводу полученного решения. Отметим, что мы получили решение (11) интегрального уравнения (8), предполагая, что такое решение существует. Строго говоря, мы должны еще проверить решение (11), т. е. подставить выражение (11) для $u(z)$ в уравнение (8), и показать совпадение левой и правой частей. Заметим еще, что двойной интеграл (9) является несобственным в том смысле, что его подынтегральная функция обращается в бесконечность. Из дальнейшего мы увидим, что он существует, и нетрудно показать, что формула (1), приводящая его к повторным интегралам, применима в данном случае.

83. Дифференцирование под знаком интеграла. Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра y:

$$I(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx. \tag{12}$$

Пределы a и b будем считать пока независящими от y. Положим, что $f(x,\ y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ в прямоугольнике: $a\leqslant x\leqslant b$; $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$. Покажем, что при этих предположениях существует производная $\frac{dI(y)}{dy}$, которую можно получить, *дифференцируя по y под знаком интеграла*, т. е.

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx. \tag{13}$$

Приращение $\Delta I(y)$ функции $I(y)$ определяется формулой

$$\Delta I(y)=I(y+\Delta y)-I(y)=\int_a^b [f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]\,dx. \tag{14}$$

Применяя формулу конечных приращений, получим

$$f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=\Delta y\,\frac{\partial f(x,\ y+\theta\,\Delta y)}{\partial y}\qquad (0<\theta<1). \tag{15}$$

Принимая во внимание равномерную непрерывность функции $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ в упомянутом выше прямоугольнике, можем написать

$$\frac{\partial f(x,\ y+\theta\,\Delta y)}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}+\eta(x,\ y,\ \Delta y) \tag{16}$$

и утверждать, что $\eta(x,\ y,\ \Delta y)$ равномерно по отношению к x и y стремится к нулю, когда $\Delta y\to 0$, т. е. при любом положительном ε

существует такое δ, что $|\eta(x, y, \Delta y)| \leqslant \varepsilon$, если только $|\Delta y| \leqslant \delta$. Отсюда следует, между прочим, что

$$\left|\int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx\right| \leqslant \int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b-a) \qquad (|\Delta y| < \delta),$$

и ввиду произвольной малости ε мы имеем

$$\int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx \to 0 \quad \text{при } \Delta y \to 0. \tag{17}$$

Вернемся к формуле (14). Пользуясь (15) и (16), можем написать, принимая во внимание, что Δy не зависит от x:

$$\Delta I(y) = \Delta y \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \Delta y \int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx.$$

Деля на Δy и переходя к пределу, получим, в силу (17),

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx,$$

т. е. формула (13) доказана. Заметим, что если предположить непрерывность только самой функции $f(x, y)$, то из формулы (14) и из того, что разность $[f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$ равномерно по отношению x и y стремится к нулю при $\Delta y \to 0$, вытекает уже, что $I(y)$ есть непрерывная функция от y.

Рассмотрим теперь при прежних предположениях относительно $f(x; y)$ интеграл

$$I_1(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx, \tag{18}$$

в котором и пределы интегрирования x_1 и x_2, принадлежащие промежутку (a, b), зависят от y, причем мы предположим, что эти функции имеют производную по y, а тем самым и непрерывны.

Обозначим через Δx_1 и Δx_2 приращения, которые получают x_1 и x_2, когда y получает приращение Δy. Мы имеем

$$\Delta I_1(y) = I_1(y+\Delta y) - I_1(y) =$$

$$= \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx. \tag{19}$$

Заметив, что [I, 94]

$$\int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} = \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1},$$

мы можем переписать равенство (19) так:

$$\Delta I_1(y)=\int_{x_1}^{x_2}[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]\,dx+$$

$$+\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f(x,\ y+\Delta y)\,dx-\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x,\ y+\Delta y)\,dx. \quad (20)$$

При этих вычислениях мы предполагаем, конечно, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет указанным выше условиям при $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ и при всех значениях x, которые принадлежат промежуткам интегрирования в написанных интегралах.

По теореме о среднем [I, 95] можем написать

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x, y+\Delta y)\,dx=\Delta x_1 f(x_1+\theta_1\Delta x_1,\ y+\Delta y)=\Delta x_1\,[f(x_1, y)+\eta_1],$$

$$\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)\,dx=\Delta x_2 f(x_2+\theta_2\Delta x_2,\ y+\Delta y)=\Delta x_2\,[f(x_2, y)+\eta_2]$$

$$(0<\theta_1 \text{ и } \theta_2<1).$$

Если $\Delta y\to 0$, то и Δx_1, $\Delta x_2\to 0$, и, в силу непрерывности $f(x, y)$, можем утверждать, что при этом η_1, $\eta_2\to 0$.

Подставив эти выражения в формулу (20) и пользуясь формулами (15) и (16), получим, деля на Δy:

$$\frac{\Delta I_1(y)}{\Delta y}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx+[f(x_2,\ y)+\eta_2]\frac{\Delta x_2}{\Delta y}-$$

$$-[f(x_1,\ y)+\eta_1]\frac{\Delta x_1}{\Delta y}+\int_{x_1}^{x_2}\eta(x,\ y,\ \Delta y)\,dx.$$

Переходя к пределу, получим, в силу (17), следующую формулу для дифференцирования интеграла (18):

$$\frac{d}{dy}\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy+f(x_2,\ y)\frac{dx_2}{dy}-f(x_1,\ y)\frac{dx_1}{dy}. \quad (21)$$

Если x_1 и x_2 не зависят от y, то получается формула (13). Эта последняя формула справедлива и при дифференцировании кратного интеграла по параметру, если только область интегрирования (B) не зависит от параметра. Если, например, в двукратном интеграле по области (B) подынтегральная функция $f(M, t)$ зависит не только от

переменной точки M интегрирования, но и от параметра t, то

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(B)} f(M, t)\, d\sigma = \iint\limits_{(B)} \frac{\partial f(M, t)}{\partial t}\, d\sigma. \tag{22}$$

При этом считается, что $f(M, t)$ и $\frac{\partial f(M, t)}{\partial t}$ суть непрерывные функции при изменении M в области (B), включая контур, и при изменении t в некотором промежутке.

Заметим, что при доказательстве формул (13) и (22) существенно, что промежуток интегрирования конечен. В примерах мы будем применять формулу (13) и для бесконечного промежутка. В дальнейшем мы укажем условия законности такого применения.

Из предыдущих формул вытекает также, что если $f(x, y)$, $x_2(y)$ и $x_1(y)$ суть непрерывные функции, то и интеграл (18) есть непрерывная функция от y.

84. Примеры. 1. В [29] мы нашли частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = f(t),$$

удовлетворяющее условиям

$$y\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \tag{23}$$

Оно имеет вид

$$y = \frac{1}{k}\int\limits_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du.$$

Нетрудно проверить это непосредственным дифференцированием согласно правилу (21). Мы имеем

$$\frac{dy}{dt} = \int\limits_0^t f(u) \cos k(t-u)\, du + \frac{1}{k} f(u) \sin k(t-u)\Big|_{u=t} =$$

$$= \int\limits_0^t f(u) \cos k(t-u)\, du,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\int\limits_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du + f(u) \cos k(t-u)\Big|_{u=t} = -k^2y + f(t),$$

т. е. действительно,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = f(t).$$

Равенства же (23) получаются непосредственно из предыдущих формул, если положить там $t = 0$.

2. Пусть требуется вычислить интеграл [1, 110]

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Введем параметр α и рассмотрим

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

Непосредственно ясно, что

$$I(0) = 0 \quad \text{и} \quad I(1) = I_1.$$

Формула (21), применительно к параметру α, дает

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx + \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

Разлагая рациональную дробь на простейшие, получим:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{1+x^2}\right],$$

и, интегрируя по x:

$$\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx = -\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Окончательно

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} = \frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha + \int_0^\alpha \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha, \tag{24}$$

причем постоянного слагаемого мы не пишем, так как $I(0) = 0$. Применяем ко второму слагаемому интегрирование по частям:

$$\int_0^\alpha \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha\, d\lg(1+\alpha^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha \cdot \lg(1+\alpha^2)\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha} - \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,dx,$$

и, следовательно, в силу (24)

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha \cdot \lg(1+\alpha^2),$$

откуда при $\alpha=1$:

$$I_1=\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\lg 2.$$

3. Вычислим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx.$$

Вместо этого интеграла мы рассмотрим более сложный по внешнему виду

$$I(\alpha,\ \beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin \beta x}{x}\,dx \qquad (\alpha>0). \tag{25}$$

Дифференцируем по β:

$$\frac{\partial I(\alpha,\ \beta)}{\partial \beta}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta}\left(e^{-\alpha x}\,\frac{\sin \beta x}{x}\right)dx=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos \beta x\,dx.$$

Последний интеграл вычисляется без труда [1, 201]:

$$\frac{\partial I(\alpha,\ \beta)}{\partial \beta}=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos \beta x\,dx=e^{-\alpha x}\,\frac{-\alpha\cos \beta x+\beta \sin \beta x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда

$$I(\alpha,\ \beta)=\int \frac{\alpha\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2}+C=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}+C. \tag{26}$$

Остается только определить постоянную интегрирования C, не зависящую от β. Для этого мы будем приближать β к 0 в равенствах (25) и (26):

$$\lim_{\beta\to 0} I(\alpha,\ \beta)=I(\alpha,\ 0)=0, \qquad I(\alpha,\ 0)=\operatorname{arc\,tg} 0+C=0,$$

откуда ясно, что $C=0$. Итак, мы имеем

$$I(\alpha,\ \beta)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Интеграл, который нам надо вычислить, получается из $I(\alpha, \beta)$ при $\alpha=0$, причем α надо приближать к нулю со стороны положительных чисел, т. е. $\alpha\to+0$. Если мы будем приближать α к 0 в предыдущем равенстве, то получим разные пределы, в зависимости от того, будут ли $\beta>0$ или $\beta<0$:

$$\lim_{\alpha\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad \beta>0,\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad \beta<0,\\ 0 & \text{при} \quad \beta=0\end{cases}$$

и потому окончательно [1]):

$$I(\beta)=\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} \text{ при } \beta>0,\\ -\frac{\pi}{2} \text{ при } \beta<0,\\ 0 \text{ при } \beta=0.\end{cases}$$

Отметим, что интеграл, стоящий слева, даст нам разрывную функцию

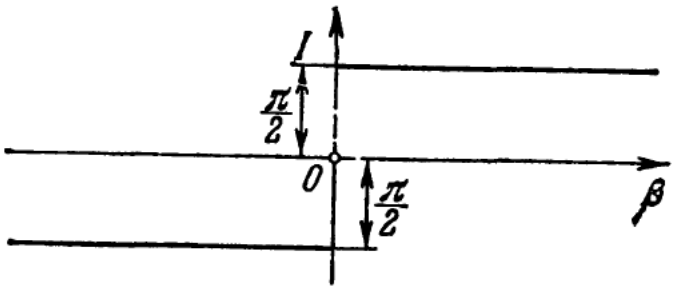


Рис. 70.

$I(\beta)$ от β. График этой разрывной функции, состоящий из двух полупрямых и точки, изображен на рис. 70.

4. Дифференцируя k раз по α очевидное равенство

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha>0),$$

получим

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,x^k\,dx=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_n=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,x^n\,dx \qquad (\alpha>0).$$

Если n есть число нечетное: $n=2k+1$, то I_n вычисляется подстановкой $x^2=t$:

$$I_{2k+1}=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,x^{2k}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,t^k\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Для рассмотрения случая четного n введем в формуле (4) новую переменную интегрирования $x=\sqrt{\alpha}t$. Заменяя в полученном результате t опять

---

[1]) Предыдущие рассуждения не строги, так как предполагают равенства: $\lim\limits_{\beta\to 0} I(\alpha,\beta)=I(\alpha,0)$, $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha,\beta)=I(0,\beta)$, которые могут считаться очевидными, если известно, что $I(\alpha,\beta)$ есть непрерывная функция как от β, так и от α. Заметим, кроме того, что если бы мы не ввели под знаком интеграла множитель $e^{-\alpha x}$, то получили бы после дифференцирования по β интеграл $\int_0^\infty \cos\beta x\,dx$, не имеющий смысла. Строгое доказательство непрерывности $I(\alpha,\beta)$ будет дано в [88].

на x, будем иметь формулу

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Дифференцируя ее k раз по α, находим

$$\frac{d^k I_0}{d\alpha^k} = (-1)^k \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2k}\,dx,$$

откуда

$$I_{2k} = (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^k \cdot \alpha^{k+\frac{1}{2}}}.$$

5. В интеграле

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x\,dx \qquad (\alpha > 0),$$

зависящем от двух параметров α и β, будем рассматривать α постоянным. Дифференцируем по β:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \cdot x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty \sin \beta x\,de^{-\alpha x^2}.$$

Интегрируем по частям:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x\,dx = -\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x\,dx,$$

т. е.

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta).$$

В этом дифференциальном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dI(\beta)}{I(\beta)} = -\frac{\beta}{2\alpha}\,d\beta,$$

откуда, интегрируя, получим

$$I(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \tag{27}$$

где постоянная C уже не зависит от β. Подставляя $\beta = 0$, будем иметь

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

С другой стороны, в силу (27),

$$I(0) = C,$$

следовательно, $C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ и окончательно, подставляя это выражение C в (27),

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Заменяя α на α^2, получим результат, которым мы затем воспользуемся при исследовании уравнения распространения тепла:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

85. Несобственные интегралы. Мы неоднократно встречали интегралы, у которых либо подынтегральная функция, либо пределы интегрирования обращаются в бесконечность. В [I, 97, 98] мы условились приписывать таким интегралам определенный смысл, если выполнены некоторые условия. Теперь мы остановимся на этих интегралах подробнее.

1. Подынтегральная функция обращается в бесконечность. Пусть в интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (b > a)$$

функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$, но обращается в бесконечность при $x = b$, или, точнее говоря, пусть $f(x)$ становится неограниченной при стремлении x к b от меньших значений. Мы принимаем тогда по определению [I, 97]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

если только предел, написанный в правой части равенства, существует. Выясним условия его существования. Согласно основному признаку Коши [I, 31], необходимым и достаточным условием существования предела переменной является то, чтобы разность каких-либо двух значений этой переменной, начиная с некоторого ее значения, для всех последующих была по абсолютному значению меньше любого наперед заданного положительного числа. В рассматриваемом случае эта разность будет

$$\int_a^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx - \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx \qquad (\varepsilon'' < \varepsilon'),$$

и мы получим таким образом следующее общее условие: *для существования (сходимости) несобственного интеграла*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

у которого подынтегральная функция $f(x)$ обращается в бесконечность при $x = b - 0$, необходимо и достаточно, чтобы при

заданном сколь угодно малом положительном числе δ *существовало такое* $\eta > 0$, *чтобы было*

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| < \delta \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon' \text{ и } \varepsilon'' < \eta.$$

Принимая во внимание известное неравенство [I, 95]

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} |f(x)|\,dx,$$

непосредственно заключаем, что из сходимости интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \tag{28}$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{29}$$

Обратное заключение — неправильно, т. е. из сходимости интеграла (29) не вытекает сходимость интеграла (28). Если интеграл (28) сходится, то интеграл (29) называется *абсолютно сходящимся* [ср. I, 124].

Из общего признака вытекает весьма важный для приложений

Признак Коши: *если подынтегральная функция* $f(x)$, *непрерывная при* $a \leqslant x < b$, *удовлетворяет при* x, *близких к* b, *условию*

$$|f(x)| < \frac{A}{(b-x)^p}, \tag{30}$$

где A *и* p — *положительные постоянные, причем* $p < 1$, *то несобственный интеграл* (29) *сходится и притом абсолютно.*

Если же

$$|f(x)| > \frac{A}{(b-x)^p} \quad \text{и} \quad p \geqslant 1, \tag{31}$$

то интеграл (29) *не существует.*

В самом деле, мы имеем в случае (30):

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} |f(x)|\,dx < A \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} \frac{dx}{(b-x)^p} = A\,\frac{\varepsilon'^{1-p} - \varepsilon''^{1-p}}{1-p},$$

причем правая часть будет сколь угодно малой при достаточно малых ε' и ε'', так как показатель $(1-p)$ положителен $(p < 1)$.

В случае же (31) мы можем прежде всего быть уверены в том, что в соседстве с точкой $x = b$ непрерывная функция $f(x)$

сохраняет постоянный знак, так как, в силу (31), абсолютное значение $f(x)$ остается больше положительного числа, и, следовательно, $f(x)$ в нуль не обращается, а потому и не может переменить знака. Ограничиваясь случаем положительной функции $f(x)$, имеем

$$\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx > A\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} A\lg\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \text{ при } p=1, \\ A\dfrac{\varepsilon'^{1-p}-\varepsilon''^{1-p}}{1-p}, \end{cases}$$

причем правая часть может быть сделана сколь угодно большой при сколь угодно малых ε' и ε'', ибо по условию $1-p<0$.

Геометрически признак Коши совершенно нагляден, так как в случае (30) кривая $y=f(x)$

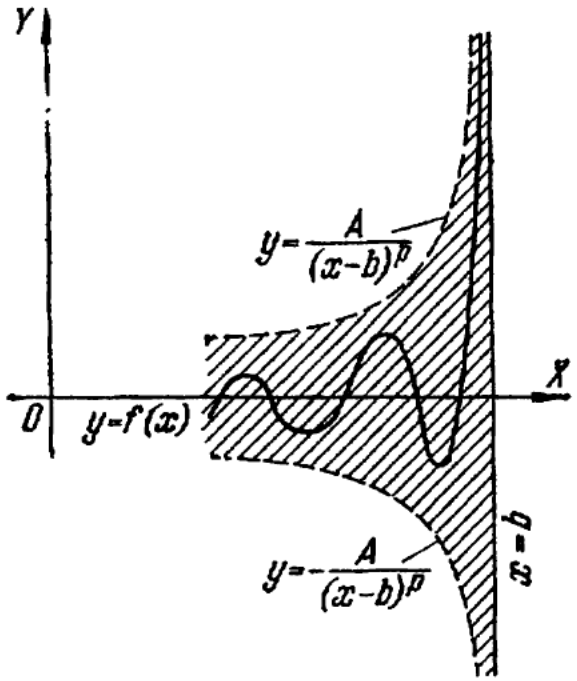


Рис. 71.

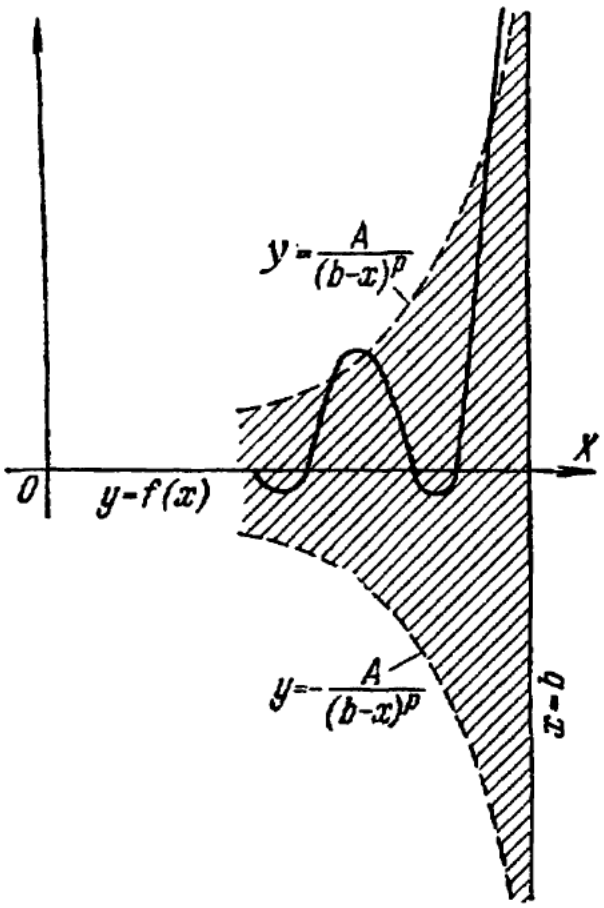


Рис. 72.

при x, близких к b, находится целиком внутри области, заключенной между двумя симметричными кривыми

$$y=\pm\frac{A}{(b-x)^p} \tag{32}$$

(рис. 71), которые при $p<1$ имеют конечную площадь, а потому и $f(x)$ имеет таковую. В случае же (31) кривая $y=f(x)$ в соседстве с точкой $x=b$ выйдет из указанной области, и так как кривые (32) при $p\geqslant 1$ не имеют конечной площади, то и кривая $y=f(x)$ также не будет ее иметь (рис. 72).

Совершенно аналогично можно рассмотреть те случаи, когда $f(x)$ обращается в бесконечность при нижнем пределе $x=a$ или в некоторой средней точке $x=c$ промежутка интегрирования [1, 97].

2. Бесконечные пределы интегрирования. Мы рассмотрим теперь случай $b=+\infty$, т. е. несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

в предположении, что $f(x)$ непрерывна при $x\geqslant a$. Отметим, что символ $b\to+\infty$ обозначает, что b беспредельно возрастает, принимая все достаточно большие значения. Применяя признак Коши, как и в предыдущем случае, получим: *для существования (сходимости) несобственного интеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{33}$$

необходимо и достаточно: при заданном сколь угодно малом положительном числе δ *существует такое положительное число* N, *что*

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right|<\delta \quad \text{при} \quad b' \text{ и } b''>N.$$

В частности, совершенно так же, как и в случае 1, докажем

Признак Коши: *если подынтегральная функция* $f(x)$ *непрерывна при* $x\geqslant a$ *и*

$$|f(x)|<\frac{A}{x^p} \text{ и } p>1, \tag{34}$$

то несобственный интеграл (33) *абсолютно сходящийся.*

Если же

$$|f(x)|>\frac{A}{x^p} \quad \text{и} \quad p\leqslant 1, \tag{35}$$

то интеграл (33) *не существует.*

Совершенно аналогичным путем можно рассмотреть несобственные интегралы [I, 98]

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Укажем практически удобный способ применения признака Коши. Остановимся сначала, на интеграле вида (33). Условие его сходимости (34) сводится к тому, что существует такое $p>1$, что произведение $f(x)\,x^p$ при $x\to+\infty$ остается ограниченным. Это условие наверно выполнено, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,x^p.$$

Точно так же условие расходимости (35) имеет место, если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)\, x^p \qquad (p \leqslant 1)$$

отличный от нуля (конечный или бесконечный). Так, например, интеграл из примера 5 [84] будет абсолютно сходящимся, так как произведение $e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \cdot x^p$ при любом положительном p стремится к нулю при $x \to +\infty$. Действительно, множитель $\cos \beta x$ не превышает единицы по абсолютной величине, а произведение $e^{-\alpha x^2} x^p \to 0$, как в этом нетрудно убедиться по правилу Лопиталя, положив, например, $p = 2$ [I, 65].

Интеграл вида

$$\int_0^{\infty} \frac{5x^2 + 1}{x^3 + 4}\, dx$$

будет расходящимся, так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 1}{x^3 + 4}\, x = 5 \qquad (p = 1).$$

Вообще интеграл от рациональной дроби с одним или двумя бесконечными пределами будет сходиться только в том случае, если степень знаменателя по крайней мере на две единицы выше степени числителя. Кроме того, для сходимости такого интеграла необходимо, чтобы после возможных сокращений дроби знаменатель не обращался в нуль в промежутке интегрирования. Если этот промежуток $(-\infty, +\infty)$, то знаменатель не должен иметь вещественных корней.

Совершенно аналогично можно применять условия (30) и (31) сходимости и расходимости интеграла в случае обращения подынтегральной функции в бесконечность. Так, например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^m}\, dx$$

сходится при $m < 2$, ибо произведение $\frac{\sin x}{x^m}\, x^{m-1} = \frac{\sin x}{x}$ стремится к единице при $x \to +0$, и $p = m - 1 < 1$.

86. Неабсолютно сходящиеся интегралы. Признак Коши дает лишь достаточное условие (30) или (34) сходимости несобственного интеграла. Например, он неприменим для неабсолютно сходящихся интегралов, т. е. таких, что

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится, а интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{или} \quad \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

не сходится. Приведем признак сходимости, применимый и для неабсолютно сходящихся интегралов: *если интеграл*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (a>0)$$

при беспредельном возрастании x остается ограниченным, то интеграл

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^p}\,dx$$

будет сходящимся при любом $p>0$. Действительно, интегрируя по частям, получим

$$\int_a^N\frac{f(x)}{x^p}\,dx=\int_a^N\frac{1}{x^p}\,dF(x)=\frac{F(x)}{x^p}\Big|_{x=a}^{x=N}+p\int_a^N\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx$$

или, принимая во внимание, что $F(a)=0$:

$$\int_a^N\frac{f(x)}{x^p}\,dx=\frac{F(N)}{N^p}+p\int_a^N\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx.$$

При беспредельном возрастании N первое слагаемое правой части стремится к нулю, ибо $F(N)$ по условию остается ограниченным и $p>0$. Второе слагаемое представляется интегралом, сходящимся по признаку Коши, так как под интегралом числитель $F(x)$ по условию остается ограниченным при $x\to+\infty$, а в знаменателе степень x выше единицы. Таким образом существует предел

$$\int_a^\infty\frac{f(x)}{x^p}\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^N\frac{f(x)}{x^p}\,dx=p\int_a^\infty\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx.$$

Примеры. 1. Возьмем интеграл

$$\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}\,dx, \tag{36}$$

рассмотренный нами в примере 3 [84]. Заметим, что при $x\to 0$ подынтегральная функция стремится к β, так что несобственный характер этого интеграла происходит только от бесконечного предела. Далее очевидно

$$\int_a^N\sin\beta x\,dx=\left[-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right]_{x=a}^{x=N},$$

откуда

$$\left|\int_a^N \sin \beta x\, dx\right| \leqslant \frac{2}{\beta} \qquad (\beta > 0),$$

т. е. интеграл $\int_a^N \sin \beta x\, dx$ при любых a и N остается ограниченным. Следовательно, к интегралу (36) применима доказанная теорема, и он сходится.

2. Рассмотрим еще интеграл

$$\int_0^\infty \sin (x^2)\, dx. \tag{37}$$

Совершая замену переменных $x = \sqrt{t}$, приведем его к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

и совершенно так же, как и в примере 1, докажем, что он сходится. Выясним несколько подробнее причины, обусловливающие сходимость интеграла (37). Подынтегральная функция $f(x) = \sin (x^2)$, график которой изображен на рис. 73, даже не стремится к нулю при $x \to +\infty$, признак Коши, очевидно, не применим. Разобьем промежуток $(0, +\infty)$ на части:

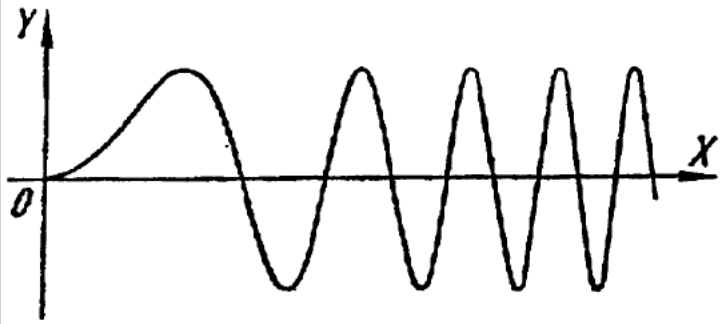


Рис. 73.

$$(0, \sqrt{\pi}),\ (\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}),$$
$$(\sqrt{2\pi}, \sqrt{3\pi}), \ldots,$$
$$(\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}), \ldots,$$

в каждой из которых функция $y = \sin (x^2)$ сохраняет неизменный знак: в первой $(+)$, во второй $(-)$, в третьей $(+)$ и т. д. Положим

$$u_n = (-1)^n \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin (x^2)\, dx.$$

Вводя вместо x новую переменную t

$$x = \sqrt{t + n\pi},$$

получим

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2}\int_0^\pi \frac{\sin (t + n\pi)}{\sqrt{t + n\pi}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{t + n\pi}}\, dt,$$

откуда видно, что числа u_n положительны и убывают при возрастании целого положительного числа n. Кроме того, из неравенства

$$u_n < \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

следует, что $u_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Из всего сказанного вытекает, что знако-

переменный ряд

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots \tag{38}$$

будет сходящимся [I, 123]. Положим теперь, что

$$\sqrt{m\pi}\leqslant b<\sqrt{(m+1)\pi}, \tag{39}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_0^b \sin(x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)\,dx+\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\,dx+\ldots+\int_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}}\sin(x^2)\,dx+$$

$$+\int_{\sqrt{m\pi}}^{b}\sin(x^2)\,dx=u_0-u_1+\ldots+(-1)^{m-1}u_{m-1}+\theta(-1)^m u_m, \tag{40}$$

где $0\leqslant\theta<1$, так как последний промежуток $(\sqrt{m\pi},\ b)$ составляет лишь часть промежутка $(\sqrt{m\pi},\ \sqrt{(m+1)\pi})$ или даже отсутствует при $b=\sqrt{m\pi}$. При $b\to+\infty$ и целое число m, определяемое неравенством (39), стремится к $(+\infty)$, и из сходимости ряда (38) и равенства (40) вытекает существование несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\sin(x^2)\,dx=u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots$$

В настоящем случае существование несобственного интеграла обусловливается знакопеременностью подынтегральной функции, а также тем, что последовательные площади, находящиеся над и под осью OX, по мере удаления от начала по величине убывают и стремятся к нулю, причем последнее обстоятельство происходит не от того, что их высота стремится к нулю, но от беспредельного суживания этих площадей.

Совершенно так же можно рассмотреть и интеграл (36).

В томе III мы получим следующее значение для интеграла (37):

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Написанные интегралы называются *интегралами Френеля* или *интегралами дифракции*. Последнее название связано с той ролью, которую играют эти интегралы в оптике.

87. Равномерно сходящиеся интегралы.[1]) Если подынтегральная функция несобственного интеграла зависит от параметра y, то числа η и N, о которых говорилось в общих признаках 1 и 2 из [85], вообще говоря, зависят от y. *Если при изменении y в промежутке $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ числа η и N в условиях*

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''}f(x,\ y)\,dx\right|<\delta \quad при \quad 0<\varepsilon'\ и\ \varepsilon''<\eta, \tag{41}$$

$$\left|\int_{b'}^{b''}f(x,\ y)\,dx\right|<\delta \quad при \quad b'\ и\ b''>N \tag{42}$$

[1]) Перед чтением настоящего параграфа полезно вспомнить теорию равномерно сходящихся рядов из тома I.

можно выбрать независимо от значений y, то несобственные интегралы

$$\int_a^b f(x, y)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{43}$$

называются равномерно сходящимися относительно y.

В частности, интегралы, которые встречаются при применении признаков Коши, будут равномерно сходящимися, если постоянные A и p не зависят от y.

Всякий сходящийся несобственный интеграл мы можем представить в виде сходящегося ряда, каждый член которого есть уже обычный интеграл. Этим приемом мы уже пользовались в предыдущем. Обратимся к первому из интегралов (43). Задав ряд положительных, убывающих и стремящихся к нулю чисел

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots, \tag{44}$$

можем написать

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^{b-\varepsilon_1} f(x, y)\,dx + \int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} + \int_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_3} + \ldots +$$

$$+ \int_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}} + \ldots = u_0(y) + u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_n(y) + \ldots, \tag{45}$$

где

$$u_n(y) = \int_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}} f(x, y)\,dx. \tag{46}$$

В случае второго из интегралов (43), задав ряд беспредельно возрастающих чисел

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots, \tag{47}$$

будем иметь

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{b_1} f(x, y)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} + \int_{b_2}^{b_3} + \ldots + \int_{b_n}^{b_{n+1}} + \ldots =$$

$$= u_0(y) + u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_n(y) + \ldots \tag{48}$$

Из определения равномерной сходимости интеграла и ряда [I, 143] непосредственно вытекает, что если несобственный интеграл сходится равномерно, то и соответствующий ему ряд будет равномерно сходящимся при любом выборе чисел (44) или (47). Действительно, например, сумма далеких членов ряда (45) равна интегралу по отрезку, близкому к b, для которого соблюдено неравенство (41).

Свойства равномерно сходящихся интегралов аналогичны свойствам равномерно сходящихся рядов [I, 146]. Для определенности формулируем их для второго из интегралов (43), но сказанное применимо и для первого.

1) *Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x$ и при изменении y в некотором конечном промежутке $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \tag{49}$$

равномерно сходится, то он есть непрерывная функция от y при $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

2) *При тех же условиях имеет место и формула интегрирования под знаком интеграла:*

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy. \tag{50}$$

3) *Если при непрерывности $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ интеграл (49) сходится, а интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \tag{51}$$

сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{52}$$

Докажем для примера свойства 1) и 3). Члены ряда (48)

$$u_n(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, y)\, dx, \tag{53}$$

по доказанному в [83], суть непрерывные функции, и, в силу равномерной сходимости интеграла, этот ряд сходится равномерно, и, следовательно, сумма ряда, т. е. интеграл (49), тоже есть непрерывная функция [I, 146].

Для доказательства (3) заметим, что из [83] следует, что интегралы (53) можно дифференцировать под знаком интеграла, т. е.

$$u_n'(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Но, в силу равномерной сходимости интеграла (51), мы имеем равномерно сходящийся ряд

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(y). \qquad (54)$$

Итак, ряд (48) сходится, а ряд из производных сходится равномерно. Отсюда следует [I, 146], что сумма ряда (54) есть производная от суммы ряда (48), что и приводит к формуле (52).

Укажем простой признак абсолютной и равномерной сходимости несобственного интеграла, аналогичный признаку абсолютной и равномерной сходимости ряда [I, 147]. Сделаем это для второго из интегралов (43). Аналогичный признак имеет место и для первого интеграла.

Пусть, как всегда, $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x$ и $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. *Если существует такая непрерывная при* $a \leqslant x$ *и положительная функция* $\varphi(x)$, *что* $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ *при* $a \leqslant x$ *и* $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ *и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx \qquad (55)$$

сходится, то интеграл (49) *сходится абсолютно и равномерно* (*относительно* y). В силу сходимости (55) при любом заданном $\delta > 0$ существует N такое, что

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x)\, dx < \delta \quad \text{при} \quad b' \text{ и } b'' > N,$$

причем это N не зависит от y, так как $\varphi(x)$ не содержит y. Но из $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ вытекает

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\, dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x, y)|\, dx \leqslant \int_{b'}^{b''} \varphi(x)\, dx < \delta \text{ при } b' \text{ и } b'' > N,$$

т. е. то же самое N, не зависящее от y, годится и для интеграла (49) и даже для интеграла

$$\int_a^{+\infty} |f(x, y)|\, dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

88. Примеры. 1. Рассмотрим более подробно пример 3 из [84]:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx. \qquad (56)$$

Считаем пока, что α — фиксированное положительное число, и рассматриваем интеграл (56) как интеграл, зависящий от параметра β. Заметим, что

отношение $\frac{\sin \beta x}{x}$ сохраняет непрерывность и при $x=0$ и обращается при $x=0$ в β, так что интеграл (56) является несобственным только вследствие бесконечного предела. При положительных $x>1$ мы имеем $\left|\frac{\sin \beta x}{x}\right|<1$ и, следовательно, $\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\right|<e^{-\alpha x}$, а интеграл

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_{x=1}^{x=\infty}=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha}$$

сходится, и, следовательно, по доказанному признаку, интеграл (56) сходится равномерно относительно β. Дифференцируя его по β под знаком интеграла, получим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos \beta x\,dx,$$

который, в силу $|e^{-\alpha x}\cos \beta x|<e^{-\alpha x}$, также сходится равномерно. Отсюда вытекает, что интеграл (56) есть непрерывная функция от β и что его можно дифференцировать под знаком интеграла. Для оправдания всех вычислений упомянутого примера остается еще доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha, \beta)=I(0, \beta)$, т. е. что интеграл (56) при фиксированном β есть непрерывная функция от α справа от нуля. Мы докажем, что он есть непрерывная функция от α при $\alpha\geqslant 0$. Выше мы уже показали, что он сходится и при $\alpha=0$.

Не ограничивая общности, можем считать $\beta>0$, так как случай $\beta<0$ приводится к случаю $\beta>0$ простой переменой знака интеграла, в случае же $\beta=0$ утверждение очевидно.

Будем поступать аналогично тому, как это мы делали в [86] с интегралом Френеля. Разобьем весь промежуток $(0, +\infty)$ на части

$$\left(0, \frac{\pi}{\beta}\right), \left(\frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}\right), \ldots, \left(\frac{n\pi}{\beta}, \frac{(n+1)\pi}{\beta}\right), \ldots$$

такие, что в первой части подынтегральная функция

$$f(x)=e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x} \qquad (\alpha\geqslant 0 \text{ и } \beta>0)$$

имеет знак $(+)$, во второй — знак $(-)$ и т. д. Положим

$$u_n(\alpha)=(-1)^n\int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\,dx.$$

Вводя вместо x новую переменную $t=x-\frac{n\pi}{\beta}$, получим

$$u_n(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\alpha t-\frac{n\alpha\pi}{\beta}}\frac{\sin \beta t}{t+\frac{n\pi}{\beta}}\,dt,$$

откуда видно, что $u_n(\alpha)$ — положительные и убывают при возрастании n.

Кроме того, из неравенства

$$|u_n(\alpha)| < \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \frac{1}{\frac{n\pi}{\beta}}\, dt = \frac{1}{n} \tag{57}$$

следует, что $u_n(\alpha) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Итак, мы можем представить при $\alpha \geqslant 0$ наш интеграл в виде суммы знакопеременного ряда

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = u_0(\alpha) - u_1(\alpha) + u_2(\alpha) - \ldots + (-1)^n u_n(\alpha) + \ldots \tag{58}$$

Остаточный член этого ряда, в силу (57) и теоремы [1, 123], имеет оценку

$$|r_n(\alpha)| < |u_{n+1}(\alpha)| < \frac{1}{n+1},$$

не зависящую от α, причем $\frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда при $\alpha \geqslant 0$ и, следовательно [1, 146], непрерывность его суммы, поскольку члены ряда $u_n(\alpha)$, в силу [89], суть, непрерывные функции.

Заметим, что из одной равномерной сходимости ряда (58) при $\alpha \geqslant 0$ без дополнительных рассуждений еще не следует равномерной сходимости интеграла. В данном случае можно доказать, что и интеграл равномерно сходится при $\alpha \geqslant 0$.

Заметим, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx,$$

равный $\frac{\pi}{2}$ при $\beta > 0$, $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ при $\beta < 0$ и нулю при $\beta = 0$, дает функцию от β, имеющую разрыв непрерывности при $\beta = 0$. Отсюда вытекает, что написанный интеграл не может сходиться равномерно относительно β в промежутке изменения β, содержащем $\beta = 0$. Если мы возьмем этот промежуток правее нуля, то величина интеграла $\frac{\pi}{2}$ имеет производную по β, равную нулю, но интеграл нельзя дифференцировать по β под знаком интеграла, так как после такого дифференцирования получается интеграл по промежутку $(0, \infty)$ от $\cos \beta x$, не имеющий смысла.

2. В примере 4 из [84] мы дифференцировали k раз по α интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

под знаком интеграла. Для доказательства законности этой операции достаточно показать, что при целом положительном k интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^k\, dx$$

сходятся равномерно во всяком промежутке $c \leqslant \alpha \leqslant d$, где $c > 0$. Так как в промежутке интегрирования $x \geqslant 0$, то очевидно $e^{-\alpha x} \leqslant e^{-cx}$ и $e^{-\alpha x} x^k \leqslant e^{-cx} x^k$, и в силу доказанного в [87] признака равномерной сходимости нам достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int_0^\infty e^{-cx} x^k \, dx.$$

Но если обозначить $f(x) = e^{-cx} x^k$, то, применяя обычным образом правило Лопиталя [I, 65], убедимся, что $f(x) x^2 = e^{-cx} x^{k+2} \to 0$ при $x \to +\infty$, и по признаку, указанному в [85], видим, что написанный интеграл действительно сходится.

3. В [82] мы получили решение задачи Абеля в виде

$$u(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)\, dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Покажем, как можно вычислить производную в правой части этого равенства. Обозначим

$$I(z) = \int_0^z \frac{\varphi(h)\, dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Дифференцируя по z под знаком интеграла, мы получили бы под знаком интеграла $(z-h)^{-\frac{3}{2}}$, что дало бы расходящийся интеграл [85], а потому надо поступать иначе. Преобразуем интеграл $I(z)$ интегрированием по частям, предполагая существование непрерывной и ограниченной в окрестности $h = 0$ производной $\varphi'(h)$ при $h > 0$:

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)\, dh}{\sqrt{z-h}} = -2 \int_0^z \varphi(h)\, d\sqrt{z-h} = -2\varphi(h) \sqrt{z-h} \Big|_{h=+0}^{h=z} +$$

$$+ 2 \int_0^z \varphi'(h) \sqrt{z-h}\, dh = 2\varphi(+0) \sqrt{z} + 2 \int_0^z \varphi'(h) \sqrt{z-h}\, dh.$$

Напомним, что $\varphi(+0) = \lim\limits_{h \to +0} \varphi(h)$. Это будет постоянная, которая будет, вообще говоря, отличной от нуля, тогда как по самому своему определению $\varphi(0) = 0$. Дифференцируя написанную выше формулу, мы найдем, в силу (21), из [83]:

$$\frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)\, dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\varphi(+0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{\varphi'(h)}{\sqrt{z-h}}\, dh. \tag{59}$$

Если $\varphi(h)$ есть постоянная, то $\varphi'(h) = 0$, и мы имеем полученную уже ранее формулу. Если $\varphi(+0) = 0$, то оказывается

$$\frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)\, dh}{\sqrt{z-h}} = \int_0^z \frac{\varphi'(h)\, dh}{\sqrt{z-h}}. \tag{59$_1$}$$

Мы не привели доказательства того, что для несобственного интеграла $I(z)$ применима формула (21) из [83]. Заметим, что если вместо h ввести новую переменную интегрирования u по формуле: $h = zu$, то для $I(z)$ получим интеграл с постоянными пределами

$$I(z) = \sqrt{z} \int_0^1 \frac{q(zu)\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

Предполагая, как и выше, существование непрерывной и ограниченной производной $q'(h)$ при $h > 0$, можем, как нетрудно проверить, дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^1 \frac{q'(zu)\,du}{\sqrt{1-u}} + \sqrt{z} \int_0^1 \frac{q'(z)\,u\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

Производя в первом слагаемом интегрирование по частям и возвращаясь к прежней переменной h, получим опять формулу (59).

89. Несобственные кратные интегралы. Переходим теперь к рассмотрению несобственных кратных интегралов и начнем с двойных интегралов. Как и выше, несобственные интегралы могут быть двух типов: или подынтегральная функция становится неограниченной, или сама область интегрирования неограничена. Остановимся сначала на первом случае. Пусть $f(M)$ — непрерывна в конечной области (σ) за исключением точки C, в окрестности которой $f(M)$ не ограничена. Пусть (Δ) — малая область, содержащая C внутри себя. Исключим из (σ) ту ее часть, которая принадлежит (Δ), а оставшуюся часть обозначим $(\sigma - \Delta)$. Существует интеграл

$$\iint_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma.$$

Если при беспредельном сужении (Δ) к точке C этот интеграл стремится к определенному пределу, не зависящему от того, каким именно образом (Δ) сужается к C, то этот предел и называют *несобственным интегралом* от $f(M)$ по (σ) (C может быть и на границе (σ)):

$$\iint_{(\sigma)} f(M)\,d\sigma = \lim \iint_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma. \tag{60}$$

Дальше будем считать (это не существенно), что Δ пробегает пронумерованную последовательность (Δ_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, сжимающуюся к C. Точнее говоря: C лежит внутри всех (Δ_n), причем (Δ_{n+1}) принадлежит (Δ_n) при любом n и (Δ_n) принадлежит кругу с центром C и радиусом ε_n, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Положим сначала, что $f(M) > 0$. При этом последовательность чисел

$$x_n = \iint_{(\sigma-\Delta_n)} f(M)\,d\sigma \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

не убывает при возрастании n и, следовательно, или имеет некоторый конечный предел I, или стремится к $(+\infty)$. Покажем, что то же будет иметь место и для всякой другой последовательности (δ_n) областей, сужающихся к C:

$$y_n = \iint\limits_{(\sigma-\delta_n)} f(M)\,d\sigma,$$

т. е. если $x_n \to I$, то и $y_n \to I$, а если $x_n \to +\infty$, то и $y_n \to +\infty$. Пусть $x_n \to I$. При этом $x_n \leqslant I$ и при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное N, что $x_n \geqslant I - \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Рассмотрим какое-либо (δ_n). Существует, очевидно, такое n', что $(\Delta_{n'})$ принадлежит (δ_n), так что $y_n \leqslant x_{n'} \leqslant I$, т. е. $y_n \leqslant I$ при всех n. Далее, существует такое N', что (δ_m) при $m \geqslant N'$ принадлежит Δ_N и при $m \geqslant N'$ имеем $y_m \geqslant x_N \geqslant I - \varepsilon$, откуда и следует, что $y_n \to I$ при $n \to \infty$.

Совершенно аналогично доказывается, что если для одной из последовательностей (Δ_n) имеем $x_n \to +\infty$, то и $y_n \to +\infty$ для всякой другой последовательности. В первом случае, т. е. если для некоторой последовательности $x_n \to I$, то интеграл по (σ) сходится и его величина равна I, а во втором случае он расходится.

Если $f(M) \leqslant 0$ в окрестности C, то, вынося минус за знак интеграла, придем к предыдущему случаю. Положим теперь, что $f(M)$ бывает разных знаков. В этом случае мы будем рассматривать только *абсолютно сходящиеся интегралы*, т. е. такие интегралы, что

$$\iint\limits_{(\sigma)} |f(M)|\,d\sigma \tag{61}$$

имеет смысл, т. е. сходится. В нем подынтегральная функция уже неотрицательна, и к нему применимы предыдущие замечания. В частности, из этих замечаний следует, что если $f_1(M)$ и $f_2(M)$ — две положительные функции, $f_1(M) \leqslant f_2(M)$, и интеграл от $f_2(M)$ сходится, то интеграл от $f_1(M)$ и подавно сходится. Нашу функцию $f(M)$ можно представить в виде разности двух положительных функций: $f(M) = |f(M)| - [|f(M)| - f(M)]$. Интеграл (61) по условию сходится. Тем самым сходится интеграл от функций $2|f(M)|$. Функция $[|f(M)| - f(M)]$ равна $2|f(M)|$ в тех точках, где $f(M) \leqslant 0$, и равна нулю, где $f(M) > 0$, т. е. положительная функция $|f(M)| - f(M) \leqslant 2|f(M)|$, и, следовательно, интеграл от нее тоже сходится. Но тогда сходится и интеграл от разности $|f(M)| - [|f(M)| - f(M)]$, т. е. от $f(M)$. Итак, *если интеграл* (61) *сходится, то сходится и интеграл от* $f(M)$.

Укажем одно достаточное условие сходимости интеграла (61): *если в окрестности точки* C *функция удовлетворяет условию* $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, *где* r *— расстояние от* C *до переменной точки* M, A *и* p *— постоянные и* $p < 2$, *то интеграл* (61) *сходится.*

Доказательство этого условия такое же, что и приведенное далее доказательство аналогичного условия для случая неограниченной области интегрирования.

Совершенно аналогичным образом определяется несобственный трехкратный интеграл по конечной области (v), если $f(M)$ становится неограниченной в окрестности некоторой точки C, и все предыдущие рассуждения годятся и для такого интеграла. Только высказанное выше достаточное условие абсолютной сходимости интеграла в данном случае формулируется так: *если в окрестности точки C функция удовлетворяет условию* $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, *где* r — *расстояние от C до переменной точки M, A и p — постоянные и* $p < 3$, *то интеграл*

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\, dv \tag{62}$$

абсолютно сходится. В данном случае условие $p < 2$ заменяется условием $p < 3$, так как в полярных координатах в пространстве элемент объема имеет выражение $dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ (r^2 вместо r в $d\sigma = r\, dr\, d\varphi$).

Рассмотрим теперь тот случай, когда область интегрирования (σ) простирается в бесконечность во всех направлениях или просто неограничена. Пусть (σ_1) — конечная область, содержащаяся в (σ) и беспредельно расширяющаяся таким образом, что всякая точка M области (σ) попадает, начиная с некоторого этапа расширения, в (σ_1). Считая $f(M)$ непрерывной в (σ), может составить интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} f(M)\, d\sigma. \tag{63}$$

Если при беспредельном расширении (σ_1) этот интеграл стремится к определенному пределу, не зависящему от того, каким образом (σ_1) расширяется, то этот предел и называют интегралом от $f(M)$ по бесконечной области (σ):

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(M)\, d\sigma = \lim \iint\limits_{(\sigma_1)} f(M)\, d\sigma. \tag{64}$$

Если $f(M) \geqslant 0$ для всех достаточно далеких точек M, то интеграл (63) при расширении (σ_1) или имеет определенный предел, или беспредельно возрастает. Для первого случая характерным является тот факт, что интеграл по любой области или даже по конечному числу любых областей, принадлежащих (σ) и лежащих вне круга с центром в начале и некоторым радиусом r_0, остается ограниченным (при этом он будет стремиться к нулю, если $r_0 \to \infty$). Обозначим через (σ') совокупность вышеупомянутых областей. Отметим еще, что из определения несобственного интеграла следует, что, если сходится интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} |f(M)|\, d\sigma, \tag{65}$$

то интеграл (64) также сходится. Он называется в этом случае абсолютно сходящимся, и только такие интегралы мы и рассматриваем. Нетрудно доказать следующее достаточное условие сходимости: *если для всех достаточно удаленных точек M функция удовлетворяет условию* $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, *где* r — *расстояние от любой фиксированной точки (начала) до переменной точки* M, A *и* p — *постоянные и* $p > 2$, *то интеграл* (64) *сходится.* Пользуясь написанным неравенством и вводя полярные координаты, получим

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \iint\limits_{(\sigma')} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr\, d\varphi.$$

Совокупность областей (σ') обязательно содержится в кольце, ограниченном окружностями $r = r_0$ и $r = R$, где R может быть сколь угодно большим. Интегрируя по всему кольцу, получим

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{R} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr = \frac{2\pi A}{p-2}\left(\frac{1}{r_0^{p-2}} - \frac{1}{R^{p-2}}\right).$$

Принимая во внимание, что $p - 2 > 0$, получим искомую оценку интеграла по (σ'):

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant \frac{2\pi A}{p-2}\,\frac{1}{r_0^{p-2}},$$

что и доказывает высказанное выше утверждение. При достаточно большом r_0 интеграл по (σ') будет сколь угодно малым.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл по бесконечной области. В последней теореме для тройного интеграла условие $p > 2$ надо заменить условием $p > 3$. Заметим еще, что сказанное выше о несобственных двойных интегралах в случае, когда $f(M)$ обращается в бесконечность, применимо и к несобственным интегралам, распространенным по поверхности. Такие интегралы сводятся, как мы видели, к интегралам по плоскости (66).

Мы рассматривали только абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Но имеет место следующая важная теорема: *если несобственный интеграл сходится, то он и абсолютно сходится* (см. Г. М. Фихтенгольц «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. III). Она относится ко всем упомянутым выше несобственным интегралам. Для случая двойных интегралов из сходимости интеграла (60) следует сходимость интеграла (61) и из сходимости (61) следует сходимость (65).

Если $f(M) \geqslant 0$, то для несобственных интегралов неважно, каким образом (Δ) стягивается к точке C или (σ_1) расширяется. Можно считать, например, что (Δ_η) есть круг или сфера с центром C, радиус η которой

стремится к нулю, и что (σ_1) есть часть (σ), содержащаяся в круге с фиксированным центром, радиус которого беспредельно растет. Если же $f(x, y)$ меняет знак, то мы должны предварительно убедиться в том, что несобственный интеграл сходится, и нельзя доказывать его сходимость при помощи специального выбора областей (Δ).

Пользуясь сказанным выше, нетрудно определить понятие равномерной сходимости несобственного кратного сходящегося интеграла, зависящего от параметра. Например, *интеграл* (60), *подынтегральная функция которого зависит от параметра* α, *назовем равномерно сходящимся относительно* α, *если при любом положительном* δ *существует такое положительное* η, *не зависящее от* α, *что*

$$\left|\iint\limits_{(\sigma')} f(M)\,d\sigma\right| < \delta,$$

если (σ') — *любая часть* (σ), *содержащаяся в круге* (Δ_η). Аналогично определяется равномерная сходимость и других несобственных интегралов. В частности, из оценки (62) вытекает, что интеграл будет равномерно сходящимся, если числа A и p не зависят от α.

Для равномерно сходящихся интегралов имеют место свойства и признак равномерной сходимости, указанные в [87].

Более сложными являются несобственные кратные интегралы, в которых подынтегральная функция становится неограниченной не в окрестности некоторой точки, а в окрестности некоторой линии (l). При этом надо исключить эту линию некоторой областью (Δ) и затем суживать (Δ) к линии (l).

Можно доказать, что если интеграл по (σ) сходится, то он выражается через повторные квадратуры (формула (7) из [59]). Если $f(x, y) \geqslant 0$ в (σ) и повторные квадратуры от нее приводят к конечному числу A, то интеграл от $f(x, y)$ по (σ) сходится и равен A. Если для знакопеременной $f(x, y)$ повторные квадратуры для $|f(x, y)|$ приводят к конечному числу, то интеграл от $f(x, y)$ по (σ) сходится (ср. [110]).

90. Примеры. 1. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}, \qquad (\alpha \neq 1),$$

где (σ) — вся плоскость. Вводя полярные координаты и интегрируя по кругу (K_R) с центром в начале и радиусом R, получим

$$\iint\limits_{(K_R)} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1+r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}} - 1\right].$$

Если $\alpha < 1$, то при беспредельном возрастании R правая часть беспредельно возрастает, и интеграл расходится. Если $\alpha > 1$, то правая часть имеет конечный предел $\frac{\pi}{\alpha-1}$, т. е. интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{\alpha-1}$. В последнем

случае сходимость можно доказать, пользуясь достаточным условием, указанным в предыдущем номере. При $\alpha = 1$ интеграл расходится.

2. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}},$$

где (σ) есть квадрат, ограниченный прямыми: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$. Вдоль стороны $x=0$ подынтегральная функция обращается в бесконечность. Выключаем эту сторону узенькой вертикальной полоской, т. е. интегрируем по прямоугольнику (σ_ε), ограниченному прямыми: $x=\varepsilon$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ $(\varepsilon > 0)$:

$$\iint\limits_{(\sigma_\varepsilon)} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

и при $\varepsilon \to 0$ будем иметь предел, равный единице, т. е. наш интеграл сходится и равен единице.

3. *Притяжение, оказываемое массой на точку, расположенную вне или внутри нее* (рис. 74). Пусть масса притягиваемой точки $C(x, y, z)$ есть единица. Разобьем притягивающее тело (v) на элементы массы Δm и в каждом из них возьмем точку $M(\xi, \eta, \zeta)$. Обозначив через r расстояние CM, мы получаем для величины притяжения точки C элементом Δm приближенное выражение (сосредоточив всю массу Δm в точке M)

$$\frac{\Delta m}{r^2},$$

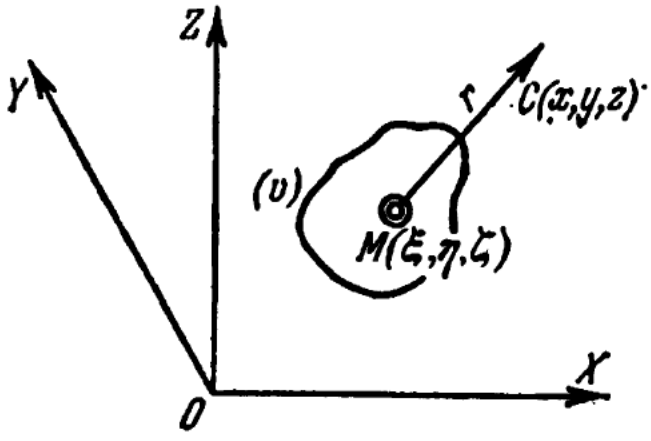


Рис. 74.

причем постоянную тяготения мы считаем равной единице. Так как указанная сила притяжения имеет направление отрезка CM, то проекции этого элементарного притяжения на координатные оси будут:

$$\frac{\Delta m}{r^2}\,\frac{\xi - x}{r}, \qquad \frac{\Delta m}{r^2}\,\frac{\eta - y}{r}, \qquad \frac{\Delta m}{r^2}\,\frac{\zeta - z}{r}.$$

Проекции же полного притяжения будут иметь приближенные выражения

$$X \sim \sum \frac{\xi - x}{r^3}\,\Delta m, \qquad Y \sim \sum \frac{\eta - y}{r^3}\,\Delta m, \qquad Z \sim \sum \frac{\zeta - z}{r^3}\,\Delta m.$$

Обозначив через $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ плотность массы в точке M, мы приближенно имеем

$$\Delta m \sim \mu\,\Delta v,$$

и окончательно, увеличивая число элементов и уменьшая беспредельно каждый из них:

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu\,\frac{\xi - x}{r^3}\,dv, \quad Y = \iiint\limits_{(v)} \mu\,\frac{\eta - y}{r^3}\,dv, \quad Z = \iiint\limits_{(v)} \mu\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,dv. \qquad (66)$$

Обращаем внимание на то, что в написанных интегралах переменными интегрирования являются координаты (ξ, η, ζ) переменной точки M

области (v), и плотность $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ является функцией этих переменных. Координаты (x, y, z) точки C входят под знак интеграла как непосредственно в числители, так и через посредство

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

и являются параметрами, так что величины X, Y и Z суть функции x, y и z.

Если точка C находится вне притягивающей массы, величина r никогда не обращается в нуль, и мы будем иметь дело с обыкновенными интегралами. Если же точка C попадает внутрь массы, то подынтегральные функции в выражениях (66) обращаются в бесконечность при совпадении переменной точки интегрирования M с C, и мы имеем дело с несобственными интегралами. Они, однако, наверно имеют смысл, если мы будем считать, что μ есть непрерывная функция, ибо, назвав через μ_0 верхнюю границу значений функции $|\mu|$, мы получим

$$\left|\mu \frac{\xi - x}{r^3}\right| = \left|\mu \frac{1}{r^2} \frac{\xi - x}{r}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}, \qquad \left|\mu \frac{\eta - y}{r^3}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}, \qquad \left|\mu \frac{\zeta - z}{r^3}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}, \quad (67)$$

число p предыдущего правила в данном случае равно 2 и $A = \mu_0$.

Тем более будет иметь смысл и интеграл

$$U = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu\, dv}{r}, \qquad (68)$$

выражающий *потенциал* рассматриваемой массы в точке C. (С этим понятием мы познакомимся подробнее ниже.)

4. Мы имеем очевидные формулы

$$\frac{\xi - x}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \frac{\eta - y}{r} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \qquad \frac{\xi - z}{r} = -\frac{\partial r}{\partial z},$$

$$\frac{\xi - x}{r^3} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\xi - x}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\eta - y}{r^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\xi - z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right),$$

а потому интегралы (66) можно переписать в виде:

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dv, \qquad Y = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$Z = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

т. е. эти интегралы получаются путем дифференцирования интеграла (68) по x, y и z под знаком интеграла. Дифференцирование производится по координатам точки (x, y, z), в которой подынтегральная функция терпит разрыв, и рассматриваемый случай не подходит под тот случай, для которого были установлены выше [87] теоремы, касающиеся непрерывности и возможности дифференцирования под знаком интеграла. Дальше мы увидим, что при условии непрерывности $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ интегралы X, Y, Z суть непрерывные функции (x, y, z) во всем пространстве, U — непрерывная функция с непрерывными частными производными первого порядка, и эти производные могут быть получены дифференцированием интеграла (68) под знаком интеграла, т. е.

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Дифференцируя потенциал U второй раз по x, y и z под знаком интеграла

и помня, что $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ не зависит от (x, y, z), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Эти формулы справедливы только в том случае, если точка $C(x, y, z)$ находится вне притягивающих масс, т. е. вне (v). При этом все интегралы — собственные. Если же C внутри (v), то двукратное дифференцирование $1/r$ даст, как нетрудно проверить непосредственным дифференцированием:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(\eta - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

и к интегралам (69) не будет уже применим признак сходимости из [90], т. е. если C внутри (v), то вторые производные от потенциала U нельзя определять, два раза дифференцируя под знаком интеграла.

Складывая равенства (70), будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0,$$

и, следовательно, складывая равенства (69), справедливые, если C вне (v), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{71}$$

Итак, *потенциал объемных масс $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению* (71) *в точках $C(x, y, z)$, находящихся вне этих масс.* В дальнейшем мы выясним, как надо изменить это уравнение, если точка C находится внутри масс.

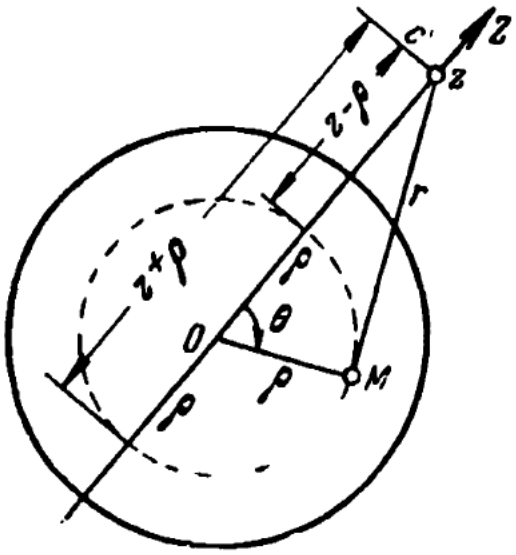


Рис. 75.

5. Рассмотрим случай однородного шара радиуса a (μ — постоянно). Направим ось OZ по прямой OC, где O — центр шара (рис. 75), и введем сферические координаты (ρ, θ, φ):

$$U = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{dv}{r} = \mu \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\rho^2 \sin\theta}{r} d\varphi\, d\theta\, d\rho. \tag{72}$$

Но очевидно

$$r^2 = \rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos\theta. \tag{73}$$

Мы выполним сперва интегрирование по θ:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{r}.$$

Введем вместо θ переменную r, причем ρ и φ считаются постоянными. Здесь придется различать два случая: если $z > \rho$, то при постоянных ρ и φ и при изменении θ от 0 до π величина r меняется от $(z-\rho)$ до $(z+\rho)$. Если же $z < \rho$, то r меняется от $(\rho - z)$ до $(\rho + z)$ (рис. 76). Сверх того, в силу (73) при постоянных ρ и φ:

$$r\,dr = \rho z \sin\theta\,d\theta, \qquad \frac{\sin\theta\,d\theta}{r} = \frac{dr}{\rho z}.$$

Итак, оказывается

$$\int_\delta^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{r} = \begin{cases} \int_{z-\rho}^{z+\rho} \frac{dr}{\rho z} = \frac{2}{z} & (z > \rho) \\ \int_{\rho-z}^{\rho+z} \frac{dr}{\rho z} = \frac{2}{\rho} & (z < \rho). \end{cases}$$

Подставляя это в (72), мы должны различить два случая:

1) Точка C находится вне сферы или на ее поверхности; тогда $a \leqslant z$, и в промежутке $(0, a)$ все значения $\rho \leqslant z$; в этом случае мы имеем

$$U = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{2\rho^2\,d\rho}{z} = \frac{4\pi a^3 \mu}{3z} = \frac{m}{z}, \tag{74}$$

где m есть полная масса шара.

2) Точка C находится внутри сферы (рис. 76); здесь промежуток $(0, a)$ нужно разбить на два: $(0, z)$ и (z, a), и мы получим

$$U = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^z \frac{2\rho^2\,d\rho}{z} + \int_z^a \frac{2\rho^2\,d\rho}{\rho} \right] = 2\pi\mu \left(a^2 - \frac{1}{3} z^2 \right); \tag{75}$$

при $z = a$, т. е. когда точка находится на поверхности шара, обе формулы (74) и (75) дают одинаковую величину для U, что доказывает непрерывность функции U. Переходим к вычислению притяжения. В силу симметрии, оно должно быть направлено по оси OZ, так что нужно вычислить только

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

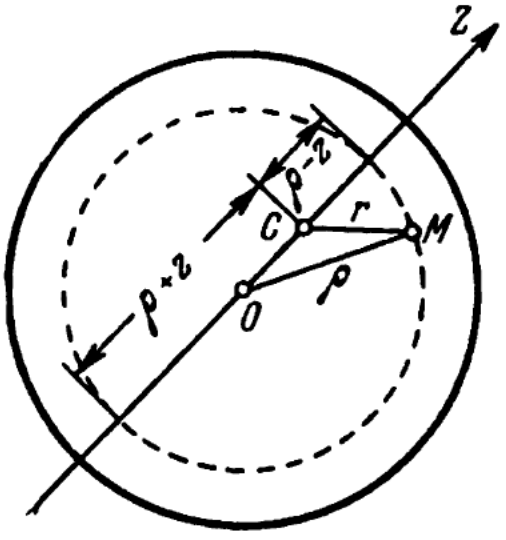


Рис. 76.

Когда точка C находится вне шара, мы пользуемся формулой (74):

$$Z = -\frac{m}{z^2}; \tag{76}$$

когда же точка C находится внутри шара, применяем формулу (75):

$$Z = -\frac{4}{3}\pi\mu z. \tag{77}$$

При $z = a$ обе формулы (57) и (58) совпадают, что доказывает непрерывность притяжения Z.

Формулы (74), (76), (77) показывают, что *потенциал и притяжение однородного шара в точке вне шара можно получить, сосредоточив всю*

массу шара в его центре. Притяжение же в точке внутри шара пропорционально расстоянию притягиваемой точки от центра шара.

Для простоты вычислений мы выбрали оси координат специальным образом, направив ось OZ в точку C, так что в предыдущих формулах z есть расстояние точки C до центра сферы. При любом расположении координатных осей с началом в центре сферы надо заменить z на $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где (x, y, z), как всегда, координаты точки C. Формулы (74) и (75) дадут

$$U=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (C \text{ вне сферы}),$$

$$U=2\pi\mu\left[a^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right] \quad (C \text{ внутри сферы}).$$

Первое из выражений для U очевидно удовлетворяет уравнению (71). Дифференцируя второе выражение два раза по x, y и z, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi\mu \quad (C \text{ внутри сферы}). \tag{78}$$

Как мы увидим в дальнейшем, это уравнение оказывается справедливым и для любого объема (v) с переменной плотностью, если C находится внутри (v).

6. Положим, что притягивающие массы распределены по поверхности (S) с поверхностной плотностью $\mu(M)$, которая является функцией переменной точки M поверхности (S). Обозначая, как и выше, через $C(x, y, z)$ притягиваемую точку с массой единица и через r расстояние $|CM|$, получим для потенциала U выражение

$$U=\iint\limits_{(S)}\frac{\mu(M)}{r}\,dS \tag{79}$$

и для проекций притяжения

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS; \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

Потенциал (79) называется обычно *потенциалом простого слоя*. Выше мы рассматривали тот случай, когда C находится не на (S) (внутри или вне (S)), так что все интегралы собственные. При этом потенциал (79) удовлетворяет, как и в примере 4, уравнению (71).

§ 9. МЕРА И ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

91. Предварительные понятия. При изложении теории простого и кратного интегралов мы исходили из интуитивного представления площади и объема. В настоящем параграфе мы дадим обоснование этих понятий и строгое изложение основ теории кратных интегралов. Отсюда будет, естественно, следовать и теория простого (однократного) интеграла. Теория измерения длин, площадей и объемов называется обычно общим термином — *теория меры*. Сначала мы изложим более элементарную теорию меры — так называемую *меру Жордана*

(французский математик второй половины XIX начала XX веков), связанную с понятием *интеграла Римана*, которым мы пользовались в настоящей главе. В настоящее время она уже не играет большой роли в математическом анализе, и мы приводим ее для того, чтобы дать законченное теоретическое изложение интеграла Римана.

Далее мы переходим к теории *меры Лебега* (французский математик первой половины XX века), которая связана с новым понятием интеграла — с *интегралом Лебега*.

Этот и следующий номера содержат некоторые сведения о множествах точек, необходимые как для теории Жордана, так и для теории Лебега. Рассматриваются в основном множества на плоскости, но все сказанное легко переносится на случай прямой и трехмерного пространства.

Мы будем пользоваться геометрической терминологией (точка, линия, область и т. д.), но в основе будет лежать арифметизированная плоскость, в которой точка определяется парой чисел (x, y) — координатами.

Назовем ε-окрестностью точки $M(a, b)$ круг с центром M и радиусом ε, т. е. множество тех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2.$$

Будем рассматривать множества точек на плоскости, содержащие конечное или бесконечное число точек. В первом случае множество называется *конечным*, а во втором — *бесконечным*. Пусть E — бесконечное множество. Введем некоторые важные для дальнейшего понятия. Точка M называется *предельной точкой* множества E, если любой ε-окрестности M принадлежит бесконечное число точек E. Сама точка M может как принадлежать, так и не принадлежать E. Конечное множество, очевидно, не имеет предельных точек.

Множество E называется *ограниченным*, если все его точки принадлежат некоторому квадрату: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ $(b-a=d-c)$ со сторонами, параллельными осям. В следующем номере мы покажем, что всякое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку. Множество E, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым множеством*. Если E не имеет предельных точек, то его также естественно называть замкнутым. Точка M, принадлежащая E, называется *внутренней точкой* E, если этому множеству принадлежат все точки некоторой ε-окрестности точки M. *Открытым множеством* называется множество E, все точки которого суть внутренние точки, и *областью* (*открытой областью*) — такое открытое множество E, что любые две точки E можно соединить ломаной линией (состоящей из конечного числа отрезков прямых), все точки которой принадлежат E. Отметим, что иногда вместо термина «открытое множество» применяют термин

«область», и при этом вышеуказанный термин «область» заменяют термином «связная область». Мы будем применять указанную выше терминологию.

Внутренние точки квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ образуют область, а внутренние точки двух квадратов, не имеющих общих точек, образуют открытое множество, но не область. Вся плоскость E_2 есть одновременно и замкнутое и открытое множество. Назовем *границей* открытого множества множество l точек M', обладающих следующим свойством: сама точка M' не принадлежит E, но является предельной для E точкой. Отметим, что всякая точка M, принадлежащая открытому множеству E, является и предельной для E, ибо все точки некоторой ε-окрестности M принадлежат E.

Покажем, что l — замкнутое множество. Пусть N — предельная точка l. Надо доказать, что N принадлежит l. По определению предельной точки в любой ε-окрестности N находятся точки l, а потому и точки E, ибо l — граница E. Но точка N не принадлежит E, ибо все точки E — внутренние. Таким образом, N — предельная точка E, не принадлежащая E, т. е. N принадлежит l, что и требовалось доказать. Если присоединить к открытому множеству E его границу l, то полученное множество $\bar{E}$, как нетрудно показать, замкнуто. Переход от E к $\bar{E}$ обычно называется *замыканием* E. Замыкание открытого квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ приводит к замкнутому квадрату $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отметим, что все точки l или некоторые из них могут стать внутренними точками $\bar{E}$. Это будет иметь место, например, если E — все точки плоскости, кроме точек окружности $x^2 + y^2 = 1$. При этом $\bar{E}$ есть вся плоскость. Если E есть круг $x^2 + y^2 < 1$ с исключенным радиусом из точки (0, 0) в точку (1, 0), т. е. с исключенными точками $(x, 0)$, где $0 \leqslant x < 1$, то $\bar{E}$ есть весь замкнутый круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Точки исключенного радиуса стали внутренними точками $\bar{E}$. Если E — область, то $\bar{E}$ называют часто *замкнутой областью*.

Введем еще некоторые понятия, связанные с любым множеством точек плоскости. Назовем *производным множеством* E' множества E совокупность всех предельных точек E. Как и выше для l, можно доказать, что всякое производное множество E' — замкнуто. Пусть E_1 — множество всех точек плоскости, не принадлежащих E. Оно называется обычно *дополнительным* для E. *Границей* l любого множества E называется множество точек, принадлежащих одному из множеств E или E_1 и производной другого, т. е. E и E' или E_1 и E'. Для открытого множества это определение границы равносильно приведенному выше.

Дадим и другое определение границы любого множества E, равносильное, как нетрудно показать, указанному выше. Назовем точку M из E *изолированной точкой* E, если существует ε-окрестность M,

не содержащих точек E, отличных от M. *Границей* l множества E назовем множество изолированных точек E и тех предельных точек E, которые не являются внутренними точками этого множества. Можно, как и выше, показать, что l — замкнутое множество. Точки l могут как принадлежать, так и не принадлежать к E. Если присоединить l к E, то получим замкнутое множество $\bar{E}$. Это доказывается, как и выше, для открытого множества.

92. Основные теоремы. Докажем две теоремы, связанные с введенными понятиями.

Теорема 1. *Всякое бесконечное, ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

В силу ограниченности множества E все его точки принадлежат некоторому квадрату: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, который мы будем обозначать символом $[a, b; c, d]$. Разделим этот квадрат на четыре равных квадрата. По крайней мере один из них $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ содержит бесчисленное множество точек из E. Квадрат $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ опять разделим на четыре равных квадрата, и по крайней мере один из них содержит бесчисленное множество точек из E, и т. д. Мы имеем, таким образом, две бесконечные последовательности замкнутых промежутков

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$
$$(c, d), (c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_n, d_n), \ldots,$$

и в каждой из них следующий промежуток есть половина предыдущего. Последовательность a_n есть неубывающая последовательность, а b_n — невозрастающая, и обе последовательности ограничены. Таким образом a_n и b_n имеют предел при $n \to \infty$. Но разность $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, и следовательно, a_n и b_n имеют один и тот же предел: $a_n \to p$ и $b_n \to p$ при $n \to \infty$. Совершенно аналогично, $c_n \to q$ и $d_n \to q$ при $n \to \infty$, и точка M с координатами (p, q) есть, как нетрудно видеть, предельная точка для E.

Поскольку в любой ε-окрестности предельной точки M находится бесконечное число точек E, мы можем выбрать такую бесконечную последовательность различных точек $M_n(p_n, q_n)$ из E, что $M_n \to M$, т. е. $p_n \to p$ и $q_n \to q$. Итак, *если E имеет предельную точку M, то существует бесконечная последовательность различных точек M_n из E, стремящихся к M.* Бесконечное множество, состоящее из точек M_n с координатами $x_n = n$, $y_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, не имеет предельных точек (это множество — не ограничено).

Пусть E и E_1 — какие-либо множества точек. Берем всевозможные расстояния MN любой точки M из E и любой точки N из E_1. Полученное множество неотрицательных чисел MN имеет некоторую точную нижнюю границу $\delta \geqslant 0$ [I, 42]. Это число δ называется *расстоянием*

между множествами E и E_1. Если эти множества имеют хотя бы одну общую точку, то, очевидно, $\delta = 0$. Но это равенство может иметь место и для множеств без общих точек.

Теорема 2. *Если* E *и* E_1 *— замкнутые ограниченные множества без общих точек, то расстояние* δ *между ними положительно.*

Доказываем от обратного. Пусть $\delta = 0$. Из определения точной нижней границы следует, что при этом должна существовать такая последовательность точек M_n из E и N_n из E_1, что расстояния $M_nN_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отметим, что среди точек M_n и среди точек N_n могут быть и совпадающие. Возможны два случая: или среди M_n бесчисленное множество различных точек, или таких точек лишь конечное число, и то же возможно и для N_n. Пусть для M_n и N_n имеет место первый случай. В силу ограниченности E и теоремы 1 можно утверждать, что множество M_n имеет по крайней мере одну предельную точку, и мы оставим только те отрезки прямых M_nN_n, в которых M_n стремится к некоторой предельной точке M при беспредельном возрастании значка. Из этой подпоследовательности выделим новую так, чтобы и последовательность N_n стремилась к некоторой предельной точке N. Нумеруя полученную бесконечную последовательность опять целыми положительными значками, можем считать, что в последовательности M_nN_n и M_n и N_n стремятся к предельным точкам M и N при $n \to \infty$. В силу замкнутости E и E_1, можем утверждать, что M принадлежит E, а N принадлежит E_1. С другой стороны, из $M_nN_n \to 0$ следует, что M и N совпадают, а это противоречит тому, что E и E_1 не имеют общих точек.

Переходим ко второму случаю. Пусть он имеет место для M_n. При этом имеется бесчисленное множество совпадающих M_n. Сохраняя лишь те пары M_n и N_n, где M_n совпадают с некоторой точкой M, получим, сохраняя прежнюю нумерацию, последовательность отрезков MN_n, где M из E и N_n из E_1. Среди точек N_n не может быть бесчисленного множества одинаковых, ибо $MN_n \to 0$, а E и E_1 не имеют, по условию, общих точек. Применяя то же рассуждение, что и выше, можем считать, что N_n стремятся к некоторой точке N из E_1, и из $MN_n \to 0$ получаем, что M и N должны совпадать, что опять приводит к противоречию. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *если точка* M *не принадлежит замкнутому множеству* E (*ограниченному или неограниченному*), *то расстояние между* M *и* E *положительно.*

Легко доказать и следующее утверждение: *если* E *и* E_1 *— ограниченные замкнутые множества, то существует по крайней мере одна такая пара точек* M *из* E *и* N *из* E_1, *что* $MN = \delta$. Отметим, что расстояние между двумя неограниченными замкнутыми множествами, не имеющими общих точек, может равняться нулю, так как эти множества могут безгранично сближаться при удалении на бесконечность. Этого не может быть, если одно из них ограничено.

Введем еще одно понятие. Возьмем всевозможные расстояния $M'M''$, где M' и M'' принадлежат некоторому множеству E. Множество неотрицательных чисел $M'M''$ имеет [I, 42] точную верхнюю границу d, которая может равняться и $+\infty$. Число d называется *диаметром множества* E. Для ограниченных множеств d не равно $+\infty$, а для неограниченных $d=+\infty$.

Все сказанное выше имеет место для прямой и трехмерного пространства. Точки прямой определяются одним вещественным числом x, *ε-окрестность точки* $x=c$ определяется неравенством $c-\varepsilon \leqslant x \leqslant x+\varepsilon$, ограниченная *область* есть некоторый открытый промежуток $a<x<b$, а *граница* состоит из двух точек $x=a$ и $x=b$. Нетрудно показать, что *открытое множество* E есть множество точек конечного или бесконечного числа открытых промежутков, без общих точек, причем в последнем случае складываемые промежутки можно пронумеровать: $a_n<x<b_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. В трехмерном случае точка определяется тройкой чисел (x, y, z), а *ε-окрестность точки* (a, b, c) неравенством

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<\varepsilon^2$$

и внутренность куба неравенствами

$$a<x<b, \qquad c<y<d, \qquad e<z<f \qquad (b-a=d-c=f-e).$$

93. Счетные множества. Действия над точечными множествами. Введем новый термин. Пусть имеется некоторое множество, содержащее бесконечное число элементов. Оно называется *счетным множеством*, если все содержащиеся в нем элементы можно пронумеровать целыми положительными числами. Мы будем часто говорить в этом случае, что *множество содержит счетное число элементов*. Пусть мы имеем не одно счетное множество, а счетное число счетных множеств. Их элементы можно обозначить буквой с двумя значками $a_{p, q}$ $(p, q=1, 2, \ldots)$: первый указывает номер множества, а второй — номер элемента в этом множестве. Все эти элементы также можно пронумеровать по возрастанию суммы значков и первого из них при одинаковой сумме:

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{3,1}, \ldots,$$

т. е. *объединение счетного числа счетных множеств есть также счетное множество.*

То же будет и при объединении конечного числа счетных множеств, а также и в том случае, когда среди объединяемых множеств кроме счетных есть и конечные множества. Рассмотрим еще множество рациональных чисел из промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$. Их можно пронумеровать по возрастанию суммы числителя и знаменателя и по возрастанию числителя при одинаковой сумме. При этом дроби берутся

в несократимой форме:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Так же можно пронумеровать дроби из любого промежутка или из всей числовой оси.

Введем обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Если точка M принадлежит множеству E, то будем писать: $M \in E$. Если же M не принадлежит E, то будем писать $M \overline{\in} E$. Если все точки множества E принадлежат множеству $\tilde{E}$, то будем писать $E \subset \tilde{E}$.

Определим действия над точечными множествами.

Суммой конечного или счетного числа множеств

$$S = \sum_k E_k \tag{1}$$

называется множество, состоящее из точек, принадлежащих хотя бы одному из E_k.

Разностью множеств E_1 и E_2:

$$R = E_1 - E_2 \tag{2}$$

называется множество, состоящее из точек E_1, не принадлежащих E_2.

Произведением конечного или счетного числа множеств

$$T = \prod_k E_k \tag{3}$$

называется множество, состоящее из точек, принадлежащих всем E_k. Отметим, что если $E_2 \subset E_1$, то из (2) следует

$$E_1 = E_2 + R.$$

Если $E_1 \subset E_2$, то R, определяемое формулой (2), не содержит ни одной точки. Такое множество называется *пустым множеством*. Множество E, определяемое формулой (3), будет пустым, если нет точек, принадлежащих всем E_k.

Указанные выше определения имеют, очевидно, смысл и для множеств, состоящих из любых элементов. Отметим при этом, что указанный выше результат (объединение счетного числа счетных множеств есть счетное множество) надо формулировать так: сумма счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

Напомним еще об одном понятии [91]. Мы рассматриваем в основном множества точек на некоторой плоскости. Совершенно аналогично можно рассматривать точки на прямой или в трехмерном пространстве. *Множеством дополнительным* для E (см. [91]) на плоскости называется множество всех точек этой плоскости, не принадлежащих E (аналогично для прямой или трехмерного пространства).

Это множество обозначается обычно символом CE. Очевидно, что $C(CE)=E$. Если E и $\tilde{E}$ — два множества и $E\subset\tilde{E}$, то $C\tilde{E}\subset CE$. В дальнейшем равенство $A=B$ для двух множеств A и B означает, что эти множества состоят из одних и тех же точек, т. е. если $M\in A$, то $M\in B$, и наоборот, если $M\in B$, то $M\in A$. Для дополнительных множеств имеют место следующие формулы:

$$CE_1 - CE_2 = E_2 - E_1, \tag{4}$$

$$C\prod_k E_k = \sum_k CE_k, \tag{5}$$

$$C\sum_k E_k = \prod_k CE_k, \tag{6}$$

$$C\sum_k CE_k = \prod_k E_k. \tag{7}$$

Докажем, например, первую из них. Пусть M принадлежит множеству, стоящему в левой части (4), т. е. $M\in CE_1$ и $M\overline{\in}CE_2$. Докажем, что она принадлежит множеству, стоящему в правой части (4). Из $M\in CE_1$ следует, что $M\overline{\in}E_1$, и из $M\overline{\in}CE_2$ следует, что $M\in E_2$. Но раз $M\overline{\in}E_1$ и $M\in E_2$, то M принадлежит правой части (4). Совершенно аналогично доказывается, что если точка M принадлежит правой части (4), то она принадлежит и левой части (4). Формула (7) непосредственно следует из (5), а (6) из (7).

Основную роль в дальнейшем будут играть открытые и замкнутые множества. Сформулируем ряд теорем, касающихся этих множеств.

Теорема 1. *Если E — открытое множество, то CE — замкнутое, а если E — замкнутое, то CE — открытое.*

Теорема 2. *Сумма конечного или счетного числа открытых множеств — открытое множество. Произведение конечного числа открытых множеств — открытое множество.*

Теорема 3. *Произведение конечного или счетного числа замкнутых множеств — замкнутое множество. Сумма конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*

Теорема 4. *Если E_1 — открытое и E_2 — замкнутое множества, то $R=E_1-E_2$ — открытое множество. Если же E_1 — замкнутое, а E_2 — открытое множество, то R — замкнутое множество.*

Отметим, что пустое множество считаем как замкнутым, так и открытым. Доказательство всех этих теорем очень просты. Для примера докажем теорему 2. Пусть E_k — открытые множества и точка $M\in S$, где S — сумма E_k. При этом M принадлежит какому-либо слагаемому E_k, но поскольку это слагаемое открытое множество, ему принадлежит некоторая ε-окрестность M, а отсюда следует, что эта окрестность

принадлежит и S. Таким образом, если $M \in S$, то в S входит и некоторая ε-окрестность M, то есть S — открытое множество. Положим теперь, что произведение (3) конечно ($k = 1, 2, \ldots, m$), и все E_k — открытые множества. Если $M \in T$, то она входит во все E_k, причем E_k принадлежит и некоторая ε_k-окрестность M. Пусть $\varepsilon' > 0$ наименьшее из положительных чисел ε_k ($k = 1, 2, \ldots, m$). При этом ε'-окрестность M входит во все E_k, следовательно и в T, т. е. T — открытое множество. Теорема 3 следует из теорем 1 и 2 при помощи перехода к дополнительным множествам с использованием формул (5) и (6).

94. Мера Жордана. Здесь мы считаем, что все множества, о которых мы будем говорить, ограничены, и не будем этого оговаривать особо. За основу меры мы примем, что мера (площадь) квадрата со сторонами, параллельными осям, т. е. квадрата: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, где $b - a = d - c$, равна $(b - a)^2$. Проводя прямые

$$x = p + kr, \qquad y = q + lr \qquad (k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $r > 0$, мы покрываем плоскость сеткой квадратов со сторонами, параллельными осям, и r — длина сторон этих квадратов. Назовем множеством типа (α) множество, состоящее из конечного числа замкнутых квадратов сетки. *Площадью* такого множества назовем сумму площадей, составляющих его квадратов. Это определение площади нуждается в оправдании. Проводя прямые, параллельные осям, всякое множество типа (α) можно подразделить на квадраты и нетрудно показать, что сумма площадей этих квадратов при этом остается неизменной, и таким образом всякое множество типа (α) имеет определенную площадь. Всякое множество типа (α) будем обозначать большою буквою в скобках, а его площадь той же буквой, но без скобок. Если множество (U) типа (α) находится строго внутри множества (V) типа (α), то $U < V$.

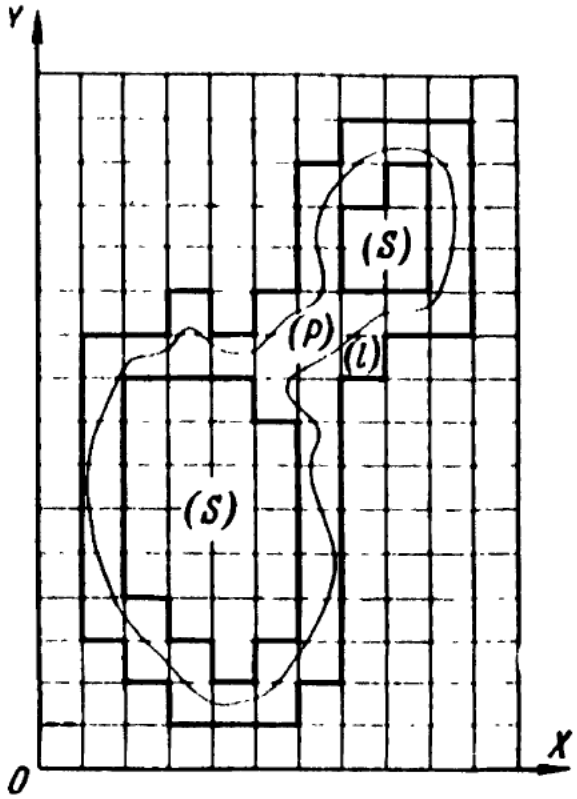


Рис. 77.

Пусть E — какое-либо ограниченное множество точек. Покроем плоскость сеткою равных квадратов, и пусть (S) — совокупность тех квадратов, все точки которых, включая и точки их границ, суть внутренние точки E, а S' — совокупность тех квадратов, которые имеют общие точки с границей l множества E. Квадраты из (S') не входят в (S). Отметим, что если (S) не содержит ни одного квадрата (пустое множество точек), то надо считать $S = 0$ (рис. 77).

Беря всевозможные сетки равных квадратов, получим бесконечное множество неотрицательных чисел S. Все эти числа не больше площади квадрата, которому принадлежит ограниченное множество E. Точная верхняя граница множества чисел S называется *внутренней мерой множества E*. Обозначим ее через a. Точная нижняя граница множества положительных чисел $S+S'$ называется *внешней мерой множества E*. Обозначим ее A. Пусть r — длина сторон квадратов сетки.

Теорема. *Если $r\to 0$, то $S\to a$ и $S+S'\to A$, т. е. при беспредельном измельчании сетки S стремится к внутренней и $S+S'$ к внешней мере E.*

По определению точной нижней границы, при любой сетке квадратов $S+S'\geqslant A$. Нам надо доказать, что при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что $S+S'<A+\varepsilon$, если $r<\eta$. По определению точной нижней границы, существует такая сетка, что соответствующая ей сумма $S+S'$, которую мы обозначим через S_0+S_0', меньше $A+\varepsilon$. Пусть r_0 — длина сторон квадратов этой сетки. Окаймим (S_0+S_0') квадратами со стороной $\frac{r_0}{n}$, где n — целое положительное число, так, чтобы получилось множество (S_1) типа (α), которое образовано квадратами со стороной $\frac{r_0}{n}$ и содержит (S_0+S_0') строго внутри себя. Если мы возьмем n достаточно большим, то S_1 будет сколь угодно мало отличаться от S_0+S_0', и мы можем считать $S_1<A+\varepsilon$. Пусть λ_1 — граница (S_1). Замкнутые множества λ_1 и l не имеют общих точек, и пусть δ — расстояние между ними $(\delta>0)$. Если мы возьмем $r<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то все квадраты сетки, имеющие общие точки с E или l, будут находиться внутри (S_1) и, следовательно, при $r<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ будем иметь $S+S'<S_1<A+\varepsilon$. Таким образом, число η, о котором мы говорили выше, можно взять равным $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, и доказано, что $S+S'\to A$ при $r\to 0$.

Если E не имеет внутренних точек, то $S=0$ для любой сетки квадратов. Если же внутренние точки имеются, то $S>0$ при достаточно малом r, и аналогично предыдущему можно доказать, что $S\to a$ при $r\to 0$.

Следствие 1. При определении a и A мы можем исходить из какой-либо фиксированной сетки квадратов и измельчать эту сетку путем деления каждого квадрата на четыре равных квадрата. При этом мы получим неубывающую последовательность S_n и невозрастающую последовательность S_n+S_n' $(n=1, 2, \ldots)$, причем $S_n\to a$ и $S_n+S_n'\to A$ при $n\to\infty$, где n — номер сетки, которая получилась при n-м шаге измельчения. Этим соображением удобно пользоваться при доказательстве приводимых далее утверждений.

Следствие 2. Из $S \leqslant S + S'$ следует при $r \to 0$, что $a \leqslant A$, т. е. *внутренняя мера не больше внешней*. Если $A = 0$, то и $a = 0$, и следовательно, E не имеет внутренних точек. Можно показать, что существуют такие замкнутые кривые l, которые не пересекают сами себя и имеют параметрическое представление $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, и у которых внешняя мера положительна. Такие кривые, как можно показать, являются границей области, и у этой области $a < A$.

95. Квадрируемые множества. *Множество* E называется *квадрируемым*, если $a = A$, т. е. если его внутренняя и внешняя меры одинаковы. Общая величина этих мер называется при этом *мерою множества* E и обозначается $m(E)$.

Отметим, что если мы будем говорить о мере какого-нибудь множества, то этим самым утверждается, что это множество квадрируемо. Если $A = 0$, то, как мы видели, E — квадрируемо и $m(E) = 0$. Обратно, если $m(E) = 0$, то $A = 0$. Такие множества *меры нуль* будут дальше играть большую роль. Необходимое и достаточное условие квадрируемости состоит, очевидно, в том, что S и $S + S'$ имеют одинаковые пределы при $r \to 0$, т. е. в том, что $S' \to 0$ при $r \to 0$. Пусть l, как и выше, граница некоторого ограниченного множества E. Точечное множество l не имеет внутренних точек, для него (S) — пустое множество при любой сетке квадратов и $a = 0$. Множество (S') — состоит из тех квадратов сетки, которые имеют общие точки с l, и необходимое и достаточное условие квадрируемости ($S' \to 0$ при $r \to 0$) сводится к тому, что $A = 0$ для l, т. е. к тому, что $m(l) = 0$. Итак,

Теорема. *Для квадрируемости* E *необходимым и достаточным условием является равенство* $m(l) = 0$.

Нетрудно показать, что всякое множество типа (α) квадрируемо и его мера равна его площади, т. е. сумме площадей, составляющих его квадратов. Пусть некоторое множество E_1 имеет меру нуль, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Выбирая r достаточно малым, мы получим для величины S', соответствующей E_1, неравенство $S' < \frac{\varepsilon}{9}$. Окружая каждый квадрат, принадлежащий к (S'), восемью прилегающими квадратами сетки, и причисляя их к (S'), если они раньше не входили в (S'), придем к следующему результату: *при любом заданном* $\varepsilon > 0$ *множество меры нуль можно заключить строго внутрь множества типа* (α), *площадь которого меньше* ε.

Результаты последних двух номеров легко приводят к следующим утверждениям:

1. *Всякая часть множества меры нуль есть множество меры нуль. Сумма конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

2. *Если множества E_1 и E_2 — квадрируемы и $E_1 \subset E_2$, то* $m(E_1) \leqslant m(E_2)$.

3. *Если E_1 и E_2 — квадрируемые множества, не имеющие общих внутренних точек, то их сумма $E = E_1 + E_2$ — квадрируемое множество и* $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$.

Докажем последнее утверждение. Пусть (S_k) и $(S_k + S'_k)$ $(k = 1, 2)$ — множества типа (α) для E_k, а (S) и $(S + S')$ — для E. По условию, (S_1) и (S_2) не имеют общих точек, но при сложении E_1 и E_2 могут появиться в E новые квадраты, так что $S_1 + S_2 \leqslant S$. С другой стороны, сумма множеств $(S_1 + S'_1)$ и $(S_2 + S'_2)$, покрывающих E_1 и E_2 вместе с их границами, покрывает и E с ее границей, ибо всякая точка границы E является граничной по крайней мере для одного из E_k, откуда $S + S' \leqslant (S_1 + S'_1) + (S_2 + S'_2)$. Отметим, что некоторые из квадратов (S'_1) и (S'_2) могут совпадать. Таким образом, приходим к неравенству

$$S_1 + S_2 \leqslant S \leqslant S + S' \leqslant (S_1 + S'_1) + (S_2 + S'_2).$$

При беспредельном измельчении сетки $S'_k \to 0$, $S_1 \to m(E_1)$ и $S_2 \to m(E_2)$, откуда $S' \to 0$ и $S \to m(E_1) + m(E_2)$, т. е. E — квадрируемое множество и

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2).$$

Доказанное свойство имеет место и для конечного числа слагаемых E_k, не имеющих попарно общих внутренних точек (**свойство аддитивности меры**).

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с открытыми множествами и областями. Пусть E — открытое квадрируемое множество и l — его граница (меры нуль). Разобьем E при помощи конечного числа линий l_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$, каждая из которых есть замкнутое множество меры нуль. Сумма замкнутых множеств l_s и множества l есть замкнутое множество меры нуль. Обозначим его буквою F. Вычитая из E сумму l_s, получим открытое квадрируемое множество E_1. Все точки его границы принадлежат F.

Положим, что разбиение E производится прямыми, параллельными осями, и рассмотрим те частичные прямоугольники (или квадраты), которые содержат точки E_1. Число таких прямоугольников конечно, и множество точек E_1 внутри каждого из них, есть некоторое открытое квадрируемое множество, граничные точки которого могут лежать или на F или на границе соответствующего прямоугольника. Мы получаем, таким образом, конечное число квадрируемых открытых множеств H_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, сумма мер которых равна мере E и диаметр H_k не больше диагонали соответствующего прямоугольника. В дальнейшем при разбиении квадрируемого открытого множества (или области) на части мы будем всегда подразумевать,

что это производится линиями, имеющими меру нуль. Если E — область, то при некоторых свойствах l мы и в каждом частичном прямоугольнике будем иметь область.

Дадим теперь простой пример линии λ меры нуль, а именно положим, что λ имеет явное уравнение $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция на конечном промежутке $a\leqslant x\leqslant b$. В силу равномерной непрерывности $\varphi(x)$, при заданном $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|\varphi(x'')-\varphi(x')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, если $|x''-x'|\leqslant\delta$. Выберем r так, чтобы оно было меньше δ и меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. При построении сетки квадратов промежуток (a, b) разобьется на части: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, причем для средних частей $x_k-x_{k-1}=r$, а $x_1-a\leqslant r$ и $b-x_{n-1}\leqslant r$. Возьмем те квадраты сетки, которые находятся в одной полосе между $x=x_{k-1}$ и $x=x_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ (рис. 78). В силу $x_k-x_{k-1}\leqslant\delta$, можем утверждать, что колебание $\varphi(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Квадрат, имеющий общую точку с самой нижней (верхней) точкой линии $y=\varphi(x)$ на промежутке (x_{k-1}, x_k), может идти вниз (наверх), самое большее на r. Таким образом, сумма высот квадратов сетки, имеющих общие точки с линией λ и содержащихся в упомянутой полосе, меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}+2r$,

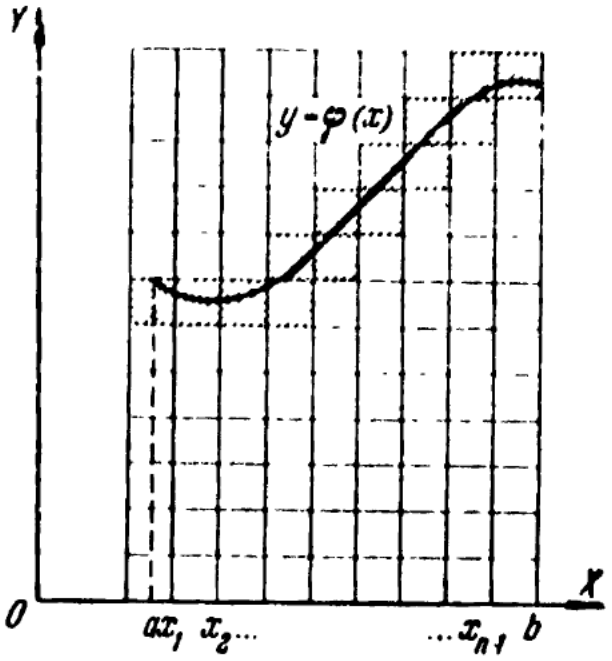


Рис. 78

или, в силу $r<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, эта сумма меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$, а сумма площадей этих квадратов меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})$. Суммируя по k от $k=1$ до $k=n$, видим, что сумма площадей квадратов, имеющих с λ точки, меньше ε, откуда, в виду произвольности ε, следует, что $m(\lambda)=0$. Совершенно также можно показать, что линия $x=\psi(y)$, где $\psi(y)$ непрерывна в некотором конечном замкнутом промежутке, имеет меру, равную нулю. Назовем *простой* всякую кривую, которая может быть разбита на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны в соответствующих конечных замкнутых промежутках. Из предыдущего следует, что простая кривая также имеет меру, равную нулю. Такая кривая может быть замкнутой кривой, которая не пересекает сама себя. При этом она является границей квадрируемой области.

Можно показать, что если кривая l имеет параметрическое представление $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а также их производные непрерывны на некотором конечном промежутке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, кривая не пересекает сама себя, и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ не обращаются одновременно в нуль, если t принадлежит к указанному промежутку, то $m(l)=0$. Если $\varphi(t_1)=\varphi(t_0)$ и $\psi(t_1)=\psi(t_0)$, но кривая не пересекает сама себя при $t_0<t<t_1$, то l — замкнутая, сама себя не пересекающая кривая и, при указанных условиях гладкости, ее мера равна нулю.

Интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, как нетрудно показать, дает площадь в указанном выше смысле области, ограниченной кривой $y=\varphi(x)$, осью $y=0$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем мы считаем, что $\varphi(x)$ непрерывна при $a\leqslant x\leqslant b$ и положительна.

Отметим, что при определении внутренней и внешней меры и квадрируемости мы могли бы пользоваться не сеткой равных квадратов, а сеткой прямоугольников со сторонами, параллельными осям, и считать при этом площадь прямоугольника $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ равной $(b-a)(d-c)$, т. е. произведению его сторон.

96. Независимость от выбора осей. Определение внутренней и внешней меры, а также понятие квадрируемости тесно связано с выбором осей, поскольку мы производим измерение площадей с помощью сетки квадратов со сторонами, параллельными осям. Хорошо известны формулы для новых координат точки при параллельном переносе координатных осей и их повороте. Параллельный перенос оставляет направление осей прежними и ничто не меняется при определении площади. Иное будет при повороте осей. Граница любого квадрата есть простая линия, и следовательно, любой квадрат квадрируем. Конечная сумма квадратов любой сетки также квадрируема [95]. При параллельном переносе площадь квадрата, очевидно, не меняется. Покажем, что площадь любого квадрата равна квадрату длины его стороны. Достаточно, очевидно, доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Если повернуть квадрат со сторонами, параллельными осям, вокруг начала, то площадь его остается прежней.*

Пусть (q) — исходный квадрат со стороной r и (q_1) — квадрат, полученный после поворота. Такими же буквами будем обозначать их площади и положим $\frac{q_1}{q}=s$. При помощи параллельного переноса, не меняющего площади, мы можем совместить (q) с любым параллельным квадратом со стороною r и, следовательно, для всех квадратов со стороной r отношение $\frac{q_1}{q}$ при данном повороте плоскости будет одно и то же. Совершим теперь над плоскостью преобразование подобия с центром в начале, при котором длины всех радиусов-векторов,

выходящих из начала, умножаются на некоторое положительное число k. Такое преобразование сводится к переходу точки (x, y) в точку с координатами (kx, ky). При этом преобразовании все линейные размеры умножаются на k. Всякий квадрат со сторонами, параллельными осям, переходит в такой же квадрат, но длины его сторон умножаются на k. Отсюда следует, что площади (внутренние и внешние) при этом умножаются на k^2. Обозначим через (q') и (q_1') те квадраты, которые получаются из (q) и (q_1) при помощи указанного преобразования подобия. Очевидно, что (q_1') получается из (q') при помощи того же вращения, при помощи которого (q_1) получается из (q). Но $q_1' = k^2 q_1$ и $q' = k^2 q$ и, следовательно, $\frac{q_1'}{q'} = s$. Но, подбирая соответственным образом число k, мы можем перевести квадрат q в квадрат с любой длиной стороны. Таким образом, мы видим, что отношение $\frac{q_1}{q} = s$ при данном повороте плоскости имеет одну и ту же величину для всех исходных квадратов q. Покажем теперь, что $s = 1$. Рассмотрим круг $x^2 + y^2 < 1$ с центром в начале и радиусом единица, покрытый сеткой квадратов со сторонами, параллельными осям. Этот круг есть, очевидно, квадрируемая область.

При повороте вокруг начала площадь квадрата получит множитель s, и в силу определения площади и доказанной выше теоремы, площадь круга также должна умножаться на s. Но при упомянутом повороте круг перейдет сам в себя, и его площадь не должна измениться, т. е. $s = 1$, что и требовалось доказать.

Положим, что имеются две различные по направлению сетки равных квадратов. В первой имеем множества типа (α), а аналогичные множества второй сетки назовем множествами типа (β). Такие области квадрируемы при любом выборе сетки квадратов и их мера равна сумме площадей составляющих их квадратов (площадь квадрата — квадрат длины его стороны).

Покажем, что при переходе от одной сетки к другой не нарушается свойство квадрируемости и не меняется мера квадрируемого множества. Пусть E — ограниченное множество точек плоскости, и пусть оно квадрируемо в первой сетке. Отсюда следует, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ его границу l можно [9б] заключить строго внутрь некоторого множества (L) типа (α), мера которого $< \varepsilon$. Расстояние между l и границей L положительно, и при достаточном измельчании второй сетки можно заключить l строго внутрь множества (L_1) типа (β), содержащегося внутри (L). Поскольку $L_1 < L < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ произвольно, можно утверждать, что l имеет меру нуль и при использовании второй сетки, т. е. E квадрируемо и во второй сетке. Аналогично доказывается, что если E квадрируемо во второй сетке, то оно квадрируемо и в первой сетке. Для доказательства совпадения меры E в указанных сетках достаточно доказать совпадение внутренних мер.

Пусть a — внутренняя мера E в первой сетке и a_1 — во второй. При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует в первой сетке такое множество (S) типа (α), состоящее из внутренних точек E, что $S > a - \varepsilon$. Расстояние между (S) и l положительно, и при достаточном измельчании второй сетки существует множество $(\tilde{S})$ типа (β), состоящее из внутренних точек $\tilde{E}$ и содержащее (S). При этом $\tilde{S} > a - \varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, следует, что $a_1 \geqslant a$. Аналогично доказывается, что $a \geqslant a_1$, т. е. $a_1 = a$. Если E не имеет внутренних точек, то $a = a_1 = 0$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *При использовании различно направленных сеток равных квадратов свойство квадрируемости и величина меры не меняются.*

97. Случай любого числа измерений. Как мы указывали, вся теория площадей переносится и на трехмерное пространство, и мы получаем, таким образом, понятия внутреннего и внешнего объема и квадрируемой трехмерной области или множества. Роль квадратов играют кубы.

Можно построить совершенно аналогичную теорию измерения «площадей» или теорию меры для любого n-мерного пространства. Точкой такого пространства назовем последовательность n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Расстояние между двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определим формулой

$$r = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (y_s - x_s)^2}.$$

Шаром с центром $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и радиусом ρ назовем совокупность точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s - a_s)^2 \leqslant \rho^2.$$

Наконец, кубок с ребром r назовем совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_s \leqslant x_s \leqslant b_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где $b_s - a_s = r$. Мерой куба будем считать число r^n. Все эти определения дают нам возможность повторить предыдущую теорию для n-мерного пространства и установить понятия внутренней и внешней меры области или вообще множества, и при их совпадении говорить, что область (или множество) измерима (на плоскости — квадрируема). Все доказанные теоремы будут справедливы и для n-мерного пространства. Параллельный перенос в n-мерном пространстве выражается формулами преобразования: $x'_s = x_s + a_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, а поворот вокруг начала выражается некоторым линейным преобразо-

ванием, при котором расстояние точки до начала остается неизменным. Более подробно об этих преобразованиях мы будем говорить в томе III_1.

При определении связной области мы пользовались понятием ломаной линии, т. е. линии, состоящей из конечного числа отрезков прямых. В n-мерном пространстве прямой мы назовем линию (т. е. множество точек), имеющую параметрическое уравнение $x_s = \varphi_s(t)$, где $\varphi_s(t)$ — многочлены первой степени. Примерами областей в n-мерном пространстве являются множества внутренних точек шара или куба. Обычно область n-мерного пространства определяется некоторыми неравенствами, которым должны удовлетворять координаты точек этой области. Заметим, что при $n = 1$, т. е. на прямой, связная область есть обязательно множество внутренних точек некоторого промежутка. То, что мы говорили о простых кривых, можно обобщить на n-мерное пространство. В частности, если в трехмерном пространстве имеется поверхность с явным уравнением $z = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция в некоторой ограниченной замкнутой области плоскости XOY, то такая поверхность есть измеримое множество, и ее мера равна нулю. Далее легко, как и в [95], построить понятие простой поверхности, и всякая область, ограниченная простой поверхностью, будет измеримой.

98. Интегрируемые функции. Пусть (σ) — ограниченная квадрируемая область или открытое множество и $f(N)$ — ограниченная функция, определенная на (σ) и ее границе. Разобьем (σ) на конечное число квадрируемых областей (или открытых множеств) (σ_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$, как это указано в [95]. Пусть δ — это разбиение и σ_k — меры множеств (σ_k), так что $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = \sigma$, N_k — любая точка, принадлежащая множеству (σ_k) или его границе, d_k — диаметр (σ_k) и $\mu(\delta)$ — наибольшее из чисел d_k. *Функция* $f(N)$ называется *интегрируемой* по (σ), если существует определенный предел сумм

$$\sigma(\delta) = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\sigma_k$$

при стремлении $\mu(\delta)$ к нулю [ср. **I, 116**]. Этот предел называется *интегралом* от функции $f(N)$ по (σ):

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\sigma_k.$$

Пусть m_k и M_k — точная нижняя и точная верхняя границы значения $f(N)$ на (σ_k) (включая границу). Составим суммы

$$s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k, \qquad S(\delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k,$$

которые зависят только от разбиения δ. Имеет место очевидное неравенство

$$s(\delta) \leqslant \sigma(\delta) \leqslant S(\delta).$$

Пусть l — точная верхняя граница значений $s(\delta)$ и I — точная нижняя граница значений $S(\delta)$ при всевозможных разбиениях δ. Имеем [I, 115]

$$s(\delta) \leqslant l \leqslant I \leqslant S(\delta).$$

Как и в [I, 116] можно показать, что *необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции* $f(N)$ *заключается в том, что разность*

$$S(\delta) - s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\sigma_k$$

стремится к нулю, если $\mu(\delta)$ *стремится к нулю.*

Если это условие выполнено, то $l = I$ и величина интеграла равна l. Можно показать, что $s(\delta) \to l$ и $S(\delta) \to I$ при $\mu(\delta) \to 0$ для любой ограниченной функции $f(N)$, и отсюда следует, что равенство $l = I$ является не только необходимым, но и достаточным условием существования интеграла от $f(N)$. Если $f(N) \equiv 1$, то сумма $\sigma(\delta)$ равна площади (мере) (σ):

$$\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = m(\sigma).$$

Используя указанное выше условие интегрируемости, можно указать некоторые классы интегрируемых функций:

1. *Если* $f(N)$ *непрерывна на замыкании* (σ) *ограниченного открытого множества* (σ), *то она интегрируема.* Это доказывается совершенно так же, как и в [I, 116].

2. *Если множество* (R) *точек разрыва ограниченной функции* $f(N)$ *имеет меру нуль, то* $f(N)$ *интегрируема.*

Будем для простоты считать, что (R) лежит строго внутри (σ). Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из того, что $m(R) = 0$, следует, что (R) можно заключить строго внутрь множества (T) типа (α), лежащего внутри (σ), мера которого меньше ε. Пусть l — граница (T). Мера l, очевидно, равна нулю, и мы можем заключить l внутрь множества (T_1) типа (α), лежащего внутри (σ), площадь которого так же, как и у (T), меньше ε. Пусть d_1 — расстояние от l до границы (T_1). Отметим, что если (σ) разбита на части, и диаметр каждой из частей меньше d_1, то сумма площадей тех из частей, которые имеют общие точки с l, меньше ε. Если мы выделим из (σ) внутреннюю часть (T), то на оставшемся замкнутом множестве (σ_1) функция $f(N)$ равномерно непрерывна, и, следовательно, существует такое $d_2 > 0$, что колебание $f(N)$ на всяком множестве, принадлежащем (σ_1), диаметр которого меньше d_2, меньше ε.

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые мы применили в [I, 116], можно показать, что если $\mu(\delta)$ меньше d_1 и d_2, то

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\sigma_k \leqslant [\sigma + (M - m)]\varepsilon,$$

где σ — мера (σ), а m и M — точные нижняя и верхняя границы значений $f(N)$ на (σ), включая границу. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $f(N)$ интегрируема на (σ).

Как и в [I, 117], можно доказать основные свойства интегрируемых функций:

1. *Если $f(N)$ интегрируема на (σ) и мы изменим значения $f(N)$ на множестве (R) меры нуль, сохраняя ограниченность функции, то и новая функция интегрируема и величина интеграла при этом не изменится.*

2. *Если $f(N)$ интегрируемо на (σ) и (σ) разбита на конечное число квадрируемых областей или открытых множеств (σ_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то $f(N)$ интегрируема по каждой (σ_k) и интеграл по (σ) равен сумме интегралов по (σ_k).*

Отметим еще, что из интегрируемости по всем (σ_k) следует и интегрируемость по (σ). Остаются справедливыми и остальные свойства интегрируемых функций, указанные в [I, 117]: вынесение постоянного множителя за знак интеграла, интегрируемость суммы, произведения и частного интегрируемых функций, интегрируемость абсолютного значения интегрируемой функции и теорема о среднем.

Отметим еще, что, поскольку граница l квадрируемой области или открытого множества имеет меру нуль, значения ограниченной функции $f(N)$ на l не влияют на величину интеграла.

99. Вычисление двойного интеграла. Установим теперь формулу, которая приводит вычисление двойного интеграла к двум квадратурам. Рассмотрим сначала случай прямоугольника (R) со сторонами

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d, \tag{8}$$

параллельными осям. Положим, что $f(N) = f(x, y)$ интегрируема по (R), т. е. существует интеграл

$$\iint\limits_{(R)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Положим, кроме того, что при всяком x из промежутка (a, b) существует интеграл

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{10}$$

и повторный интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right] dx. \tag{11}$$

Разобьем (R) на части при помощи промежуточных точек деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d,$$

и пусть (R_{lk}) — частичный прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = x_l$, $x = x_{l+1}$; $y = y_k$, $y = y_{k+1}$. Пусть, далее, m_{lk}, M_{lk} — точные нижняя и верхняя границы значений $f(x,\ y)$ в замкнутом прямоугольнике (R_{lk}); $\Delta x_l = x_{l+1} - x_l$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Интегрируя неравенство

$$m_{lk} \leqslant f(x,\ y) \leqslant M_{lk} \qquad [(x,\ y) \text{ из } (R_{lk})]$$

по промежутку $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$, получим

$$m_{lk}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,\ y)\,dy \leqslant M_{lk}\Delta y_k \qquad (x_l \leqslant x \leqslant x_{l+1}),$$

причем $(y_k,\ y_{k+1})$ есть часть $(c,\ d)$, и написанный интеграл существует в силу существования интеграла (10) [I, 117]. Складывая эти неравенства, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{lk}\Delta y_k \leqslant \int_c^d f(x,\ y)\,dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{lk}\Delta y_k.$$

Интегрируем по промежутку $(x_l,\ x_{l+1})$:

$$\sum_{k=1}^{m} m_{lk}\Delta y_k \Delta x_l \leqslant \int_{x_l}^{x_{l+1}} \left[\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_{lk}\Delta y_k \Delta x_l,$$

написанный интеграл существует в силу существования интеграла (11). Суммируем последнее неравенство по l:

$$\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{lk}\Delta y_k \Delta x_l \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{lk}\Delta y_k \Delta x_l.$$

Принимая во внимание, что произведение $\Delta y_k \Delta x_l$ выражает площадь (R_{ik}), можем утверждать, что крайние члены неравенства при беспредельном измельчании прямоугольников стремятся к интегралу (9), что и приводит к требуемой формуле:

$$\iint\limits_{(R)} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right] dx, \tag{12}$$

т. е. *если существуют двойной интеграл* (9) *и повторный интеграл* (11), *то имеет место формула* (12), т. е. *эти интегралы равны.*

Заметим, что существование интеграла (11) предполагает существование интеграла (10). Если $f(N)$ — непрерывная функция в замкнутом прямоугольнике (R), то интегралы (9) и (10), очевидно, существуют. При этом, как мы видели [83], формула (10) дает непрерывную функцию от x и, следовательно, интеграл (11) также существует. Рассмотрим теперь область (σ), ограниченную двумя кривыми $y=\varphi_2(x)$ и $y=\varphi_1(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 79). Положим, что существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(x,\ y)\,dx\,dy, \quad (13)$$

простые интегралы

$$F(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy \quad (14)$$

и повторный интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right] dx. \quad (15)$$

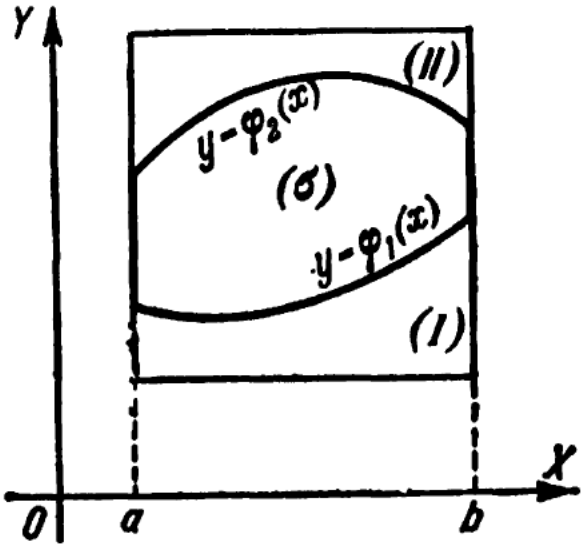


Рис. 79.

Пусть (R) — прямоугольник, образованный прямыми (8), причем мы выбираем c и d так, чтобы при всех x из $(a,\ b)$ мы имели $c<\varphi_1(x)$, а $d>\varphi_2(x)$, т. е. (σ) составляет часть (R). Определяем в (R) функцию $f_1(N)=f_1(x,\ y)$, которая равна $f(N)$ в точках области (σ) и равна нулю в тех точках (R), которые не принадлежат (σ). Кривые $y=\varphi_2(x)$ и $y=\varphi_1(x)$ разбивают (R) на три части: (σ) и области (I) и (II), лежащие под и над (σ) (рис. 79). Функция $f_1(N)$ интегрируема по (σ), так как там она совпадает с $f(N)$ и интегрируема по (I) и (II), так как во внутренних точках этих областей она равна нулю.

Следовательно, $f_1(N)$ интегрируема по (R), [98] и

$$\iint\limits_{(R)} f_1(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma. \quad (16)$$

Точно так же существуют при всяком x из промежутка $(a,\ b)$ интеграл

$$F(x)=\int\limits_c^d f_1(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy \quad (17)$$

и интеграл (15). Следовательно, к функции $f_1(N)$ применима

формула (12) и, в силу (16) и (17), эта формула дает формулу приведения двойного интеграла по (σ) к повторному:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx. \tag{18}$$

При этом выводе мы предполагали *существование интегралов* (13), (14) и (15). Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области (σ), то, как и выше, интегралы (13) и (14) существуют. Кроме того, в силу [83], формула (14) определяет непрерывную функцию от x, и следовательно, интеграл (15) также существует. Совершенно аналогично можно доказать и формулу приведения трехкратного интеграла к повторному интегралу, содержащему три квадратуры [61].

100. n-кратные интегралы. Все сказанное в [96] и [97] переносится непосредственно на случай n-мерного пространства и приводит к понятию интеграла от ограниченной функции по ограниченной измеримой n-мерной области, к указанному выше условию интегрируемости и к обычным свойствам интегралов. Точно так же, аналогично [99], имеет место формула приведения n-кратного интеграла к повторному, содержащему n квадратур. Формулу эту можно доказать путем индукции, изменяя n на единицу. Пределы в кратном интеграле вычисляются из тех неравенств, которыми определяется область интегрирования. Пусть $f(N) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в замкнутой квадрируемой области (P_n) n-мерного пространства, внутренние точки которой определяются условиями: точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ суть внутренние точки некоторой измеримой области Q_{n-1} из $(n-1)$-мерного пространства и x_n удовлетворяет неравенствам

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) < x_n < \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — непрерывные функции в Q_{n-1}. При этом n-кратный интеграл выразится квадратурой по x_n и $(n-1)$-кратным интегралом по (Q_{n-1}):

$$\iint\limits_{(P_n)}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{(Q_{n-1})}\ldots\int \left[\int\limits_{\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n\right] dx_1 \ldots dx_{n-1}. \tag{19}$$

Обобщением прямоугольника плоскости со сторонами, параллельными осям, является призматоид (R_n) n-мерного пространства, определяемый неравенствами:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n. \tag{20}$$

Интегрирование по этому призматоиду приводится к повторному интегралу, все пределы которого постоянны:

$$\int\int\ldots\int_{(R_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n,$$

и можно менять произвольно порядок интегрирования, оставляя по каждой переменной прежние пределы.

Для читателя, знакомого с понятием определителя, укажем и формулу *замены переменных в n-кратном интеграле*. Положим, что вместо переменных $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ вводятся новые переменные $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, и пусть

$$x_i = \varphi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

— формулы, выражающие старые переменные через новые.

Введем в рассмотрение так называемый *функциональный определитель* системы функций (21):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2'} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2'} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1'} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2'} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Формула замены переменных имеет вид

$$\int\int\ldots\int_{(P_n)} f\,dx_1 \ldots dx_n = \int\int\ldots\int_{(P_n')} f\,|D|\,dx_1' \ldots dx_n', \tag{23}$$

где неравенства, определяющие новую область интегрирования (P_n'), получаются из неравенств, определяющих (P_n), если там заменить x_i их выражениями (21). Условия применимости формулы (23) те же, которые были указаны для двойного интеграла в [80]. Несобственные n-кратные интегралы определяются так же, как и несобственные двойные и тройные интегралы [89]. Перейдем теперь к примерам.

101. Примеры. 1. Тетраэдр n-мерного пространства, ограниченный гиперплоскостями:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \qquad (a > 0),$$

определяется неравенствами:

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \ldots, x_n > 0, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n < a. \tag{24}$$

При $n=3$ получается обычный тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$. Введем новые переменные, положив

$$x_1'=x_1+x_2+\ldots+x_n, \quad x_2'=\frac{a(x_2+\ldots+x_n)}{x_1+x_2+\ldots+x_n},$$

$$x_3'=\frac{a(x_3+\ldots+x_n)}{x_2+\ldots+x_n}, \quad \ldots, \quad x_n'=\frac{ax_n}{x_{n-1}+x_n},$$

откуда следует

$$x_1+\ldots+x_n=x_1', \qquad a(x_2+\ldots+x_n)=x_1'x_2',$$
$$a^2(x_3+\ldots+x_n)=x_1'x_2'x_3', \ \ldots, \ a^{n-1}x_n=x_1'x_2'\ldots x_n'.$$

Старые переменные выражаются через новые по формулам:

$$x_1=\frac{x_1'(a-x_2')}{a}, \quad x_2=\frac{x_1'x_2'(a-x_3')}{a^2}, \ \ldots,$$

$$x_{n-1}=\frac{x_1'x_2'\ldots x_{n-1}'(a-x_n')}{a^{n-1}}, \quad x_n=\frac{x_1'x_2'\ldots x_n'}{a^{n-1}}.$$

Из этих формул непосредственно вытекает, что тетраэдр (24) можно заменить n-мерным кубом:

$$0<x_1'<a, \ 0<x_2'<a, \ \ldots, \ 0<x_n'<a. \tag{25}$$

2. Определим меру (объем) n-мерного шара с центром в начале и радиусом r, определяемого неравенством

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant r^2. \tag{26}$$

Если совершить преобразование подобия с коэффициентом подобия k, то объем всякого куба умножится на k^n, а радиус r умножится на k. Отсюда непосредственно следует, что искомая мера v_n, являющаяся функцией одного r, должна иметь вид

$$v_n=C_nr^n, \tag{27}$$

где C_n — численная постоянная, различная для различных n. Если пересечь шар (26) плоскостью постоянного x_1, то, как это видно из формулы (26), получится $(n-1)$-мерный шар, квадрат радиуса которого равен $(r^2-x_1^2)$. В силу (27), мера этого шара будет $C_{n-1}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Часть n-мерного шара, заключенная между плоскостями x_1 и (x_1+dx_1), будет иметь меру $C_{n-1}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1$, откуда вытекает следующее выражение для v_n:

$$v_n=C_nr^n=C_{n-1}\int_{-r}^{+r}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1,$$

или, совершая подстановку $x_1=r\cos\varphi$, получим следующую связь между C_n и C_{n-1}:

$$C_n=C_{n-1}\int_0^{\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi=2C_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi, \tag{28}$$

где, как известно [I, 100],

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = \frac{(n-1)(n-3)\ \dots\ 1}{n(n-2)\ \dots\ 2}\frac{\pi}{2} \text{ при четном } n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = \frac{(n-1)(n-3)\ \dots\ 2}{n(n-2)\ \dots\ 3} \text{ при нечетном } n.$$

Заменяя в (28) n на $(n-1)$, получим

$$C_{n-1} = 2C_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \varphi \, d\varphi.$$

Из написанных равенств вытекает при любом целом n:

$$C_n = C_{n-2}\frac{2\pi}{n}. \tag{29}$$

Но, как известно, $C_2 = \pi$ и $C_3 = \frac{4}{3}$. Применяя формулу (29), получим отсюда

$$C_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\ \dots\ 2} \text{ при четном } n,$$

$$C_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\ \dots\ 1} \text{ при нечетном } n.$$

102. Внешняя мера Лебега. Переходя к теории меры и интеграла Лебега, отметим прежде всего, что некоторые из результатов этой теории мы приводим без доказательства. В соответствующих местах мы приводим ссылку на том V, содержащий доказательства упомянутых результатов.

В дальнейшем мы часто будем встречаться с суммами конечного или счетного числа неотрицательных слагаемых. При этом мы будем допускать, что отдельные слагаемые или суммы равны $(+\infty)$. Если какое-либо слагаемое равно $(+\infty)$, то и сумма естественно считается равной $(+\infty)$. Но сумма счетного числа слагаемых (предел суммы первых n слагаемых при $n \to \infty$) может быть равна $(+\infty)$ и тогда, когда среди слагаемых нет равных $(+\infty)$. Отметим еще, что сумма неотрицательных слагаемых не зависит от их порядка.

В теории меры Лебега допускаются как ограниченные, так и неограниченные множества. Мы начнем с определения внешней меры. Существенное различие по сравнению с мерой Жордана состоит в том, что при определении внешней меры допускается покрытие множества не только конечным, но и счетным числом квадратов Δ_n

($n=1, 2, \ldots$) со сторонами, параллельными осям. Эти квадраты могут принадлежать разным сеткам квадратов и перекрываться. Мы будем считать Δ_n открытыми квадратами, что несущественно, но это будет нам удобнее, поскольку в дальнейшем изложении открытые множества играют важную роль.

Определение. *Внешней мерой любого точечного множества E называется нижняя граница сумм*

$$\sum_n \text{пл. } \Delta_n \tag{30}$$

площадей квадратов Δ_n при всевозможных покрытиях E этими квадратами.

Если при любом покрытии сумма (30) равна $(+\infty)$, то внешняя мера E считается равной $(+\infty)$. Если E — ограниченное множество, то его можно покрыть одним квадратом Δ_1 и, следовательно, его внешняя мера конечна. Но внешняя мера может быть конечной и для неограниченного точечного множества. Внешняя мера пустого множества естественно считается равной нулю. Внешнюю меру всякого множества E обозначаем символом $|E|$.

В дальнейшем сумму (30) для какого-либо покрытия A некоторого множества E будем обозначать через $\sigma(A)$.

Переходим к доказательству основных свойств внешней меры.

Теорема 1. *Если $E_2 \subset E_1$, то $|E_2| \leqslant |E_1|$.*

Непосредственно следует из того, что всякое покрытие E_1 есть и покрытие E_2.

Теорема 2. *Для конечного и счетного числа слагаемых внешняя мера суммы не больше суммы внешних мер слагаемых:*

$$\left|\sum_k E_k\right| \leqslant \sum_k |E_k|. \tag{31}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу определения точной нижней границы, существует такое покрытие A_k множеств E_k, что $\sigma(A_k) \leqslant |E_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Берем квадраты, входящие хотя бы в одно из A_k (их конечное или счетное число [93]). Они совершают некоторое покрытие A суммы E_k, и для него имеем

$$\sigma(A) = \sum \sigma(A_k) \leqslant \sum_k |E_k| + \varepsilon \sum_k \frac{1}{2^k} \leqslant \sum_k |E_k| + \varepsilon,$$

откуда

$$\left|\sum_k E_k\right| \leqslant \sum_k |E_k| + \varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε, получаем (31).

Отметим, что в формуле (31) может иметь место знак $<$ даже в том случае, когда E_k не имеют попарно общих точек. Таким образом, для внешней меры мы не имеем свойства аддитивности. В дальнейшем мы часто будем обозначать открытые множества буквою O (французское слово ouvert — открытый), а замкнутые множества буквою F (французское слово fermè — замкнутый).

Теорема 3. *Для всякого множества E при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество O, покрывающее E, что*

$$|O| \leqslant |E| + \varepsilon. \tag{32}$$

Если $|E| = +\infty$, то это очевидно при любом O, покрывающем E. Положим, что $|E|$ конечна. При любом заданном $\varepsilon > 0$ выбираем такое покрытие A множества E, что

$$\sigma(A) \leqslant |E| + \varepsilon. \tag{33}$$

Сумма открытых квадратов Δ_n, входящих в A, есть открытое множество O. Оно покрывается промежутками Δ_n и покрывает E. По определению внешней меры,

$$|O| \leqslant \sigma(A)$$

и из (33) следует (32).

103. Измеримые множества. Мы не будем вводить понятия внутренней меры, как это мы делали в теории меры Жордана, а с помощью открытых множеств непосредственно перейдем к понятию измеримого множества (аналог квадрируемости по Жордану). Свойство, выражаемое теоремой 3, имеет место для всякого множества E. Но не для всякого множества E внешняя мера разности $O - E$ соответствующим выбором O может быть сделана $< \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — задано. Если E обладает таким свойством, то мы будем называть его измеримым.

Определение. *Множество E называется измеримым, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество O, что $E \subset O$ и $|O - E| \leqslant \varepsilon$.*

Внешнюю меру измеримого множества E будем называть просто *мерою* E и обозначать символом $m(E)$. Переходим к выяснению свойств измеримых множеств. Отметим, что пустое множество считается измеримым и его мера — равной нулю. Прежде всего возникает вопрос — будет ли всякий квадрат или прямоугольник (открытый или замкнутый) со сторонами, параллельными осям, измеримым множеством, и если это так, то чему равна его мера. Не останавливаясь на доказательстве, сформулируем результат.

Теорема 4. *Множество точек замкнутого или открытого прямоугольника со сторонами, параллельными осям, есть измеримое множество и его мера равна произведению длин его сторон.*

Теорема 5. *Открытые множества измеримы.*

Если E — открытое множество, то для проверки его измеримости достаточно взять O совпадающим с E, и при этом $|O-E|=0$.

Теорема 6. *Если* $|E|=0$, *то* E — *измеримое множество и* $m(E)=0$. *Если* E — *измеримое множество и* $m(E)=0$, *то* $|E|=0$.

Если $|E|=0$, то, согласно теореме 3, для любого заданного $\varepsilon>0$, существует такое O, что $E\subset O$ и $|O|\leqslant\varepsilon$, а потому, в силу теоремы 1, тем более $|O-E|\leqslant\varepsilon$, т. е. E измеримо и $m(E)=0$, ибо $m(E)$ совпадает, по определению, с внешней мерой. Наоборот, если E измеримо и $m(E)=0$, то и $|E|=0$. Теорема доказана.

В силу доказанного измеримое множество E меры нуль, или, как обычно говорят, *множество* E *меры нуль*, определяется следующим свойством: при любом заданном $\varepsilon>0$ можно покрыть E конечным или счетным числом квадратов, сумма площадей которых $\leqslant\varepsilon$.

Теорема 7. *Сумма конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество.*

Пусть $E_n\,(n=1, 2, \ldots)$ — измеримые множества, E — их сумма и $\varepsilon>0$ — заданное число. Согласно определению измеримого множества, существуют такие открытые множества O_n, что $E_n\subset O_n$ и $|O_n-E_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$. Сумма O_n есть некоторое открытое множество O и $E\subset O$. Но для любых множеств P_n и Q_n легко проверить, что

$$\sum_n P_n-\sum_n Q_n\subset\sum_n(P_n-Q_n).$$

Применяя это к O_n и E_n, имеем

$$O-E\subset\sum_n(O_n-E_n).$$

Пользуясь теоремами 1 и 2, получаем

$$|O-E|\leqslant\left|\sum_n(O_n-E_n)\right|\leqslant\sum_n|O_n-E_n|$$

и, в силу $|O_n-E_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$,

$$|O-E|\leqslant\varepsilon,$$

что и доказывает измеримость E.

Теорема 8. *Замкнутые множества измеримы.*

Не приводя довольно сложного доказательства этой теоремы, мы сформулируем еще лемму, на которой оно основано [V, 35].

Лемма. *Если расстояние между двумя множествами* E_1 *и* E *положительно, то* $|E_1+E_2|=|E_1|+|E_2|$.

Теорема 9. *Если E — измеримое множество, то и CE измеримо.*

В силу измеримости E существуют такие открытые множества O_n, что $E \subset O_n$ и $|O_n - E| \leqslant \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем замкнутые множества $F_n = CO_n$. Из $E \subset O_n$ следует $F_n \subset CE$, и в силу (4) из [93] имеем $CE - F_n = O_n - E$. Заменяя в левой части F_n на сумму F_n, получим

$$CE - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \subset O_n - E,$$

откуда

$$\left| CE - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Левая часть не зависит от n, а правая стремится к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$\left| CE - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \right| = 0,$$

т. е. разность, стоящая слева, есть множество E_0 меры нуль. Поскольку $F_n \subset CE$, мы имеем

$$CE = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

и из теоремы 7 и 8 следует, что CE — измеримое множество.

Следствие. *Из измеримости CE следует измеримость $E = C(CE)$.*

Следующая теорема дает критерий измеримости E не через открытые множества, покрывающие E (определение измеримых множеств), а через замкнутые множества, содержащиеся в E.

Теорема 10. *Для того чтобы множество E было измеримым, необходимо и достаточно следующее: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество F, что $F \subset E$ и $|E - F| \leqslant \varepsilon$.*

Измеримость E равносильна измеримости CE, а для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного $\varepsilon > 0$ существовало такое открытое множество O, что $CE \subset O$ и $|O - CE| \leqslant \varepsilon$. Если положить $F = CO$ и принять во внимание, что, в силу (4) из [93], $O - CE = E - CO = E - F$, то $|O - CE| \leqslant \varepsilon$ можно переписать в виде $|E - F| \leqslant \varepsilon$ и $F \subset E$, ибо $CE \subset O$ [93]. Теорема доказана.

Теорема 11. *Произведение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество. Разность измеримых множеств есть измеримое множество.*

Если E_n — измеримые множества, то измеримость их произведения вытекает из формулы [93]:

$$\prod_n E_n = C \sum_n CE_n$$

и теорем 9 и 7. Измеримость разности следует из очевидной формулы $A - B = A \cdot CB$ и измеримости произведения.

Теорема 12. *Мера суммы конечного или счетного числа измеримых множеств попарно без общих точек равно сумме мер слагаемых множеств.*

Пусть E_n — измеримые множества попарно без общих точек. Измеримость их суммы следует из теоремы 7. Проведем доказательство при предположении, что все E_n ограничены, но их число бесконечно. Согласно теореме 10 при любом заданном $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутые множества F_n, что $F_n \subset E_n$ и $|E_n - F_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Множества F_n, очевидно, ограничены и не имеют попарно общих точек. Из формулы $E_n = F_n + (E_n - F_n)$ непосредственно следует

$$|E_n| \leqslant |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{34}$$

Для конечной суммы F_n имеем по теореме 1:

$$\Big|\sum_{n=1}^{m} F_n\Big| \leqslant \Big|\sum_{n=1}^{m} E_n\Big|, \quad \text{откуда} \quad \Big|\sum_{n=1}^{m} F_n\Big| \leqslant \Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big|.$$

Применяя лемму к сумме F_n и пользуясь (34), получим

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| \geqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n| \geqslant \sum_{n=1}^{m} |E_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} |E_n| - \varepsilon,$$

откуда при $m \to \infty$

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| - \varepsilon,$$

или, ввиду произвольности ε,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

Сравнивая с неравенством (31), получаем

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$$

или, в силу измеримости слагаемых и суммы,

$$m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Свойство, выражаемое теоремой 12, называется обычно *полной аддитивностью меры Лебега*. Прилагательное «полный» выражает тот факт, что аддитивность меры имеет место не только для конечного, но и для счетного числа множеств, не имеющих попарно общих точек. Таким свойством не обладает мера Жордана.

Замечание. Отметим, что из теорем 2 и 6 следует, что сумма конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль. При этом не предполагается, что слагаемые множества попарно без общих точек.

Теорема 13. *Если A и B измеримы, $B \subset A$ и B — конечной меры, то $m(A-B) = m(A) - m(B)$.*

Разность $A - B = D$ измерима по теореме 11. В силу $B \subset A$ имеем $A = B + D$, причем B и D без общих точек и, следовательно, $m(A) = m(B) + m(D)$. Вычитая почленно $m(B) < +\infty$, получаем $m(A-B) = m(A) - m(B)$.

Приведем еще два результата, касающиеся предельного перехода для множеств. Пусть P_n — невозрастающая последовательность измеримых множеств, т. е. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ Пределом P_n при $n \to \infty$ назовем произведение всех P_n:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} P_n \qquad (P_1 \supset P_2 \supset \ldots). \tag{35}$$

Множество P может быть и пустым. Множество P_1 состоит, очевидно, из элементов (точек) P и тех элементов, которые входят в какое-либо P_k, а, следовательно, и во все P_l при $l < k$, но не входят в P_{k+1}. Мы можем, таким образом, представить P_1 в виде следующей суммы множеств, не имеющих попарно общих точек:

$$P_1 = P + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k - P_{k+1}),$$

откуда

$$m(P_1) = m(P) + \sum_{k=1}^{\infty} [m(P_k) - m(P_{k+1})] =$$

$$= m(P) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [m(P_k) - m(P_{k+1})],$$

и из этой формулы непосредственно следует

$$m(P) = \lim_{n\to\infty} m(P_n). \tag{36}$$

Отметим одно следствие полученной формулы. Пусть имеется бесконечная сумма измеримых множеств: $E=E_1+E_2+\ldots$, и положим $R_n=E-(E_1+E_2+\ldots+E_n)$. Последовательность R_n не возрастает, и предельное множество R пусто. Действительно, если предположить, что имеется точка M, принадлежащая R, т. е. всем R_n, то отсюда следует, что M принадлежит E, но не принадлежит ни одному из E_k $(k=1, 2, \ldots)$, а это противоречит тому, что E есть сумма E_k. Таким образом, мы можем утверждать, что $m(R_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Если S_n — неубывающая последовательность измеримых множеств S_n, т. е. $S_1\subset S_2\subset\ldots$, то *предельным множеством* S называется сумма всех S_n, и нетрудно показать, что

$$m(S)=\lim_{n\to\infty} m(S_n). \tag{37}$$

Вся изложенная выше теория меры легко переносится на случай прямой и n-мерного пространства [97]. Отметим, что в случае прямой всякое открытое множество есть сумма конечного или счетного числа открытых промежутков. Как и для меры Жордана, можно показать, что мера Лебега не зависит от выбора осей координат.

Приведем некоторые замечания, связанные с теорией меры. Введем полуоткрытые квадраты, определяемые неравенствами: $a<x\leqslant b$, $c<y\leqslant d$ $(b-a=d-c)$, и нанесем на плоскости сетку таких квадратов. Они не имеют попарно общих точек. Пусть O — некоторое ограниченное открытое множество. Отметим те квадраты, которые входят в O (их конечное число). Каждый из оставшихся квадратов поделим на четыре равные части и отметим те из полученных квадратов, которые входят в O, и т. д. Поскольку расстояние любой точки O до ее границы положительно, всякая точка O попадает в один из отмеченных квадратов, т. е. O есть сумма счетного числа полуоткрытых квадратов, а мера O равна сумме площадей этих квадратов. Отсюда видно, что мера Лебега множества O совпадает с внутренней мерой Жордана. Если присоединить к множеству O его границу l, то получим замкнутое множество. Оно измеримо по Лебегу, но его мера может быть больше меры O.

Если F — ограниченное замкнутое множество, то мы можем покрыть его открытым квадратом O и разность $O_1=O-F$ есть открытое множество, причем $F=O-O_1$, и $m(F)=m(O)-m(O_1)$. Таким образом, мера F определяется через меры открытых множеств.

104. Измеримые функции. Переходим к выяснению того класса функций, который является основным в теории Лебега. Мы будем рассматривать функции точки $f(x)$, определенные на измеримых множествах и принимающие вещественные значения. Буква x обозначает точку измеримого множества на прямой или на плоскости, или вообще в n-мерном пространстве. Для $f(x)$ считаются допустимыми и значе-

ния ($\pm\infty$). Если $f(x)$ не принимает этих значений, то будем говорить, что функция принимает конечные значения. Функция называется *ограниченной*, если абсолютная величина всех ее значений не превышает некоторого числа (конечного).

Введем некоторые обозначения. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. Символ $E[f(x)>a]$ или $E[f>a]$ обозначает множество тех точек x из E, в которых $f(x)>a$. Аналогичный символ применяется и для других типов неравенств или равенств. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, определенные на E, то символ $E[f>g]$ обозначает множество тех точек x из E, в которых $f(x)>g(x)$. Аналогичный смысл имеет символ $E[f=g]$ и т. д. Введем еще новый термин: «почти везде». Если некоторое свойство имеет место во всех точках некоторого измеряемого множества E, кроме, может быть, множества точек меры нуль, то будем говорить, что это свойство имеет место почти везде на E. Определим теперь класс функций, который лежит в основе теории Лебега.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется измеримой (или измеримой на E), если для любого вещественного числа a, как конечного так и бесконечного ($\pm\infty$), измеримы множества:*

$$E[f\geqslant a],\quad E[f<a],\quad E[f>a],\quad E[f\leqslant a],\quad E[f=a]. \tag{38}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с измеримыми множествами и измеримыми функциями, определенными на измеримых множествах. Введем еще одно важное в теории Лебега понятие.

Определение. *Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на E, называются эквивалентными на E, если они равны почти везде на E, т. е. если мера множества $E[f\neq g]$ равна нулю.*

Отметим, что если мера E равна нулю, то любая функция на нем измерима и любые две функции эквивалентны. Это следует непосредственно из того, что всякая часть E имеет меру нуль. Нетрудно показать, что если функция f_1 эквивалентна g_1 и f_2 эквивалентна g_2, то f_1+f_2 эквивалентна g_1+g_2, f_1f_2 эквивалентна g_1g_2 и $\frac{f_1}{f_2}$ эквивалентна $\frac{g_1}{g_2}$, если соответствующие действия имеют смысл. Если мы изменим значение $f(x)$ на множестве меры нуль, то получим функцию, эквивалентную $f(x)$. Отметим еще, что функция, равная постоянной на E, очевидно, измерима.

Переходим к теоремам, связанным с понятием измеримых функций и эквивалентных функций.

Теорема 1. *Для измеримости множеств* (38) *при любом a достаточно, чтобы одно из этих множеств, кроме пятого, было измеримо при любом a.*

Множества $[f \geqslant a]$ и $E[f < a]$ — дополнительные множества, и измеримость одного из них при любом a равносильна измеримости другого. Точно так же измеримость третьего из множеств (38) при любом a равносильна измеримости четвертого. Множество пятое есть разность первого и третьего множеств. Докажем, например, что из измеримости третьего множества при любом a следует измеримость остальных множеств. Действительно, из измеримости третьего множества следует измеримость четвертого, а также измеримость первого, в силу формулы

$$E[f \geqslant a] = \prod_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right],$$

а тем самым и второго. Заметим, что множества $E[f = +\infty]$ и $E[f = -\infty]$ могут быть представлены в виде

$$E[f = +\infty] = \prod_{n=1}^{\infty} E[f > n],$$

$$E[f = -\infty] = \prod_{n=1}^{\infty} E[f < -n].$$

Теорема 2. *Если $f(x)$ измерима на E, то она измерима и на любой измеримой его части E'. Если $f(x)$ измерима на конечном или счетном числе множеств E_n, то она измерима и на их сумме.*

Утверждения теоремы вытекают из следующих формул:

$$E'[f > a] = E[f > a]\,E', \qquad E[f > a] = \sum_n E_n[f > a].$$

Теорема 3. *Если $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на E и одна из них измерима, то и другая измерима.*

По условию теоремы, множество $A = E[f \neq g]$ имеет меру нуль. На измеримом множестве $E' = E - A$ имеем $f(x) = g(x)$, и из измеримости $f(x)$ на E, и тем самым на E', следует измеримость $g(x)$ на E'. Но $g(x)$ измерима на A (меры нуль), а тем самым и на $E = E' + A$.

Теорема 4. *Если $f(x)$ — измеримая функция, то и $|f(x)|$ — измеримая функция.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из формулы

$$E[|f| > a] = E[f > a] + E[f < -a] \qquad (a \geqslant 0).$$

Теорема 5. *Если $f(x)$ — измеримая функция и c — вещественное число, то $f(x) + c$ и $cf(x)$ — измеримые функции.*

При $c = 0$ теорема очевидна. Считаем, что $c \neq 0$.

Первое утверждение следует из формулы

$$E[f + c > a] = E[f > a - c],$$

а второе из формул

$$E[cf > a] = E\left[f > \frac{a}{c}\right] \text{ при } c > 0,$$

$$E[cf > a] = E\left[f < \frac{a}{c}\right] \text{ при } c < 0.$$

Теорема 6. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые функции, то множество $E[f > g]$ измеримо.*

Пронумеруем все рациональные числа [93]: $r_1, r_2, \ldots$ Утверждение теоремы следует из формулы

$$E[f > g] = \sum_{n=1}^{\infty} E[f > r_n] E[g < r_n].$$

Теорема 7. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые функции, принимающие конечные значения, то функции $f-g$, $f+g$, fg и $\frac{f}{g}$ (при $g \neq 0$) измеримы.*

Измеримость $f-g$ следует из формулы

$$E[f-g > a] = E[f > g+a]$$

и теорем 5 и 6. Измеримость суммы — из формулы $f+g = f-(-g)$ и теоремы 5 при $c=-1$. Измеримость f^2 — из формулы

$$E[f^2 > a] = E[f > \sqrt{a}] + E[f < -\sqrt{a}] \qquad (a \geqslant 0),$$

а измеримость fg из формулы

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 + (f-g)^2].$$

Измеримость $\frac{1}{g}$ (при $g \neq 0$) следует из формул

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = E[g > 0] E\left[g < \frac{1}{a}\right] \quad \text{при } a > 0,$$

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = E[g > 0] + E\left[g < \frac{1}{a}\right] \quad \text{при } a < 0,$$

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = E[g > 0] \quad \text{при } a = 0.$$

Наконец, измеримость частного следует из формулы $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. Оговорка о конечных значениях необходима, ибо в противном случае действия над функциями могут потерять смысл. Если в некоторой точке $f = +\infty$ и $g = -\infty$, то сумма $f+g$ не имеет смысла. Но если, например, измеримые функции f и g могут принимать конечные значения и значение $(+\infty)$, то сумма $f+g$ имеет всегда смысл и свойство измеримости ее сохраняется.

Большое принципиальное значение имеет следующая теорема, которую мы приводим без доказательства [V, 44]:

Теорема 8. *Если $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность измеримых на E функций, сходящихся везде или почти везде на E, то и предельная функция $f(x)$ измерима на E.*

Эта теорема показывает, что предельный переход в классе измеримых функций не выводит из этого класса. Совершенно иную картину имели мы для класса непрерывных функций. Предельный переход для последовательности непрерывных функций может приводить к разрывным функциям [I, 144] даже при наличии предела везде.

Если $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на E, то на множестве меры нуль, где нет сходимости, функция $f(x)$ доопределяется любым образом, например нулем. При различном доопределении получаются эквивалентные функции.

Приведем еще результат, касающийся предельного перехода, который будет нам нужен в дальнейшем [V, 44].

Теорема 9. *Пусть E — измеримое множество конечной меры и $f_n(x)$ — последовательность измеримых на E функций, которые принимают почти везде на E конечные значения и сходятся почти везде на E к функции $f(x)$, также принимающей почти везде на E конечные значения. При этом для любого заданного $\varepsilon > 0$ мера множества точек x, в которых выполнено неравенство $|f(x) - f_n(x)| > \varepsilon$, стремится к нулю при $n \to \infty$.*

105. Дополнительные сведения. Прежде чем переходить к понятию интеграла Лебега, приведем некоторые примеры и дополнительные теоремы.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — эквивалентные функции, непрерывные на некотором замкнутом квадрате или прямоугольнике Δ. Покажем, что их значения совпадают во всех точках Δ. Действительно, если в некоторой точке x_0 имеем, например, $f(x_0) - g(x_0) > 0$, то, в силу непрерывности функций, это неравенство сохранится и в некоторой ε-окрестности x_0. Мера этой окрестности больше нуля, а это противоречит предположенной эквивалентности функций.

Таким образом, понятие эквивалентности функций не имеет смысла в классе непрерывных на Δ функций. Всякая непрерывная на Δ функция $f(x)$ строго индивидуальна. Если две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются в одной точке x_0, то они отличаются, как мы видели, и на множестве положительной меры из Δ. Совсем иное мы имеем в классе измеримых функций $f(x)$. Изменяя произвольным образом значения $f(x)$ на множестве меры нуль, мы приходим к функции, эквивалентной $f(x)$. Легко видеть, что если $f(x)$ эквивалентна $g(x)$ и $g(x)$ эквивалентна $h(x)$, то $f(x)$ эквивалентна $h(x)$, и в классе измеримых на некотором множестве E функций функции распределяются на группы эквивалентных функций, причем в каждой такой

группе содержится бесчисленное множество функций таких, что значения каждых двух из них отличаются на множестве точек из E, имеющем меру нуль. Во многих вопросах теории Лебега целесообразно отождествлять все функции одной группы. Отметим еще один факт. Если $f(x)$ — функция, непрерывная на некотором замкнутом множестве E, имеющем изолированные точки [91], то, меняя значение $f(x)$ в изолированной точке, мы, не нарушая непрерывности $f(x)$, получаем функцию, эквивалентную $f(x)$. Укажем примеры измеримых функций. Положим, что $f(x)$ непрерывна на Δ. Нетрудно показать, что множество $\Delta[f \geqslant a]$ при любом a замкнуто, откуда следует измеримость $f(x)$. Можно показать, что если $f(x)$ принимает на Δ конечные значения и множество точек разрыва ее непрерывности имеет меру нуль, то $f(x)$ измерима на Δ. Но это условие измеримости является только достаточным. Дадим пример функции $f(x)$ одной переменной, определенной на промежутке Δ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ и измеримой на нем, причем каждая точка x из Δ есть точка разрыва непрерывности $f(x)$.

Определим $f(x)$ на Δ — следующим образом: $f(x)=0$, если x — рациональное число, и $f(x)=1$, если x — иррациональное число. Счетное множество рациональных точек имеет меру нуль [93], а потому множество иррациональных точек из Δ имеет меру — единица. Отсюда легко следует, что $f(x)$ — измеримая функция. Она эквивалентна функции, тождественно равной единице. Но нетрудно видеть, что всякая точка x_0 из Δ есть точка разрыва непрерывности. Действительно, в любой ε-окрестности $x=x_0$ находятся как рациональные, так и иррациональные значения x, т. е. в любой ε-окрестности x_0 функция $f(x)$ принимает как значение 0, так и значение 1, откуда следует, что всякая точка x_0 из Δ есть точка разрыва непрерывности.

Приведем результат Н. Н. Лузина (1913), вскрывающий связь между измеримыми и непрерывными функциями.

Теорема. *Пусть $f(x)$ определена на измеримом множестве E конечной меры и принимает почти везде на E конечные значения. При этом для измеримости $f(x)$ необходимо и достаточно следующее: при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое замкнутое множество F, принадлежащее E, что $m(E-F)<\varepsilon$ и $f(x)$ непрерывна на F. Отметим, что $m(E-F)=m(E)-m(F)$, в силу $F \subset E$.*

Сформулируем еще результат Д. Ф. Егорова (1911), устанавливающий связь между сходимостью измеримых функций и их равномерной сходимостью.

Теорема. *Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, принимающих на измеримом множестве E конечной меры почти везде конечные значения и сходящаяся почти везде на E к функции $f(x)$, также принимающей на E почти везде конечные значения. При этом для любого заданного ε существует такое*

замкнутое множество F, принадлежащее E, что $m(E-F)<\varepsilon$ и сходимость $f_n(x)\to f(x)$ на F равномерная.

106. Интеграл Лебега. Переходим к определению интеграла Лебега. Пусть на измеримом множестве конечной меры E задана ограниченная измеримая функция. Из ограниченности $f(x)$ следует существование такого числа $L>0$, что $|f(x)|\leqslant L$ при $x\in E$. Разбиваем E на конечное число измеримых подмножеств попарно без общих точек:

$$E=\sum_{k=1}^{n} E_k, \tag{39}$$

и пусть m_k и M_k — точная нижняя и верхняя границы значений на E_k. Составляем суммы [ср. 98]

$$s(\delta)=\sum_{k=1}^{n} m_k m(E_k), \qquad S(\delta)=\sum_{k=1}^{n} M_k m(E_k), \tag{40}$$

где δ обозначает подразделение (39). Эти суммы, очевидно, ограничены при любых подразделениях: $|s(\delta)|\leqslant Lm(E)$ и $|S|(\delta)|\leqslant Lm(E)$. Пусть I — точная верхняя граница $s(\delta)$ и I — точная нижняя граница $S(\delta)$ при всевозможных δ.

Определение. *Если $I=I$, то говорят, что $f(x)$ интегрируема по E, и величину интеграла считают равной $I=I$:*

$$\int_E f(x)\,dx=I=I. \tag{41}$$

Определенный таким образом интеграл называется *интегралом Лебега*. Отметим вид $f(x)dx$ подынтегрального выражения и тот факт, что мы пишем один знак интеграла во всех случаях: прямой, плоскости, n-мерного пространства. В дальнейшем мы будем придерживаться этих обозначений. Только в [110], при изложении вопроса о приведении кратного интеграла к последовательным квадратурам, мы будем записывать подынтегральное выражение в более подробной форме и знак интеграла при кратном интегрировании будем писать несколько раз. Так, например, для интеграла на плоскости можно писать

$$\iint_E f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 \quad \text{или} \quad \iint_E f(x, y)\,dx\,dy.$$

Введем понятие произведения подразделений [ср. I, 115—117]. Положим, что наряду с подразделением (39) мы имеем другое подразделение δ':

$$E=\sum_{i=1}^{n'} E'_i. \tag{42}$$

Произведением подразделений (41) и (42) называется подразделение $\delta\delta'$, состоящее из всевозможных частичных множеств E_kE_l'. Эти последние не имеют попарно общих точек, но могут быть и пустыми. Подразделение

$$E=\sum_{l=1}^{m} E_l'$$

называем *продолжением подразделения* (39), если каждое E_l' принадлежит только одному из E_k. При переходе от некоторого подразделения δ к его продолжению сумма $s(\delta)$ не убывает и $S(\delta)$ не возрастает. Если δ_1 и δ_2 — два каких-либо подразделения, то $s(\delta_1)\leqslant S(\delta_2)$, откуда $s(\delta_1)\leqslant l\leqslant I\leqslant S(\delta_2)$ и, в частности [I, 115],

$$s(\delta)\leqslant l\leqslant I\leqslant S(\delta). \tag{43}$$

Кроме сумм (40), составим сумму

$$\sigma(\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,m(E_k),$$

где $x_k\in E_k$. Имеем, очевидно,

$$s(\delta)\leqslant\sigma(\delta)\leqslant S(\delta). \tag{44}$$

Теорема. *Для равенства $l=I$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность подразделений δ_n, для которой $S(\delta_n)-s(\delta_n)\to 0$.*

Доказываем достаточность. Если $S(\delta_n)-s(\delta_n)\to 0$, то из (43) следует, что $l=I$.

Доказываем необходимость. Пусть $l=I$. По определению l и I, существуют такие последовательности подразделений δ_n' и δ_n'', что $s(\delta_n')\to l$ $(s(\delta_n')\leqslant l)$ и $S(\delta_n'')\to I$ $(S(\delta_n'')\geqslant I)$. Для последовательности подразделений $\delta_n=\delta_n'\delta_n''$, тем более $s(\delta_n)\to l$ и $S(\delta_n)\to I$. Но $l=I$ и, следовательно, $S(\delta_n)-s(\delta_n)\to 0$.

Доказанная теорема дает необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x)$. Отметим, что в подразделениях δ_n частичные множества не должны обязательно измельчаться, т. е. наибольший из их диаметров не должен обязательно стремиться к нулю.

Если существует последовательность подразделений δ_n, для которой $S(\delta_n)-s(\delta_n)\to 0$, то $s(\delta_n)\to l$ $(l=I)$, $S(\delta_n)\to l$, и из (44) следует, что и $\sigma(\delta_n)\to l$ при любом выборе точек x_k из E_k. Если $\bar{\delta}_n$ суть продолжение δ_n, то все сказанное выше имеет место и для $\bar{\delta}_n$. Мы укажем сейчас такую последовательность подразделений δ_n, что для любой ограниченной измеримой функции, определенной на множестве E конечной меры, $S(\delta_n)-s(\delta_n)\to 0$, откуда будет следовать интегрируемость такой функции. Пусть m и M — точные нижняя и верхняя границы значений $f(x)$ на E. Разобьем промежуток (m, M)

на части

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M \tag{45}$$

и определим следующим образом разбиение δ множества E на частичные множества:

$$E_1 = E[y_0 \leqslant f(x) \leqslant y_1], \quad E_k = E[y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k] \tag{46}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что $y_{k-1} \leqslant m_k$ и $y_k \geqslant M_k$, и, таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leqslant s(\delta) \leqslant S(\delta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \tag{47}$$

и тем более

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leqslant l \leqslant I \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k). \tag{48}$$

Образуем разность между крайними членами этого неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) m(E_k).$$

Пусть $\mu(\delta)$ — наибольшая из разностей $y_k - y_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Имеем в силу того, что сумма $m(E_k)$ равна $m(E)$,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leqslant \mu(\delta)\, m(E).$$

Если мы возьмем такую последовательность подразделений δ_n, для которых соответствующая величина $\mu(\delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то разность между крайними членами неравенства (48) стремится к нулю, и, следовательно, $l = I$, т. е. $f(x)$ интегрируема. Отметим, что условие $\mu(\delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$ сводится к беспредельному измельчению разбиения промежутка (m, M) изменения функции $f(x)$. Подразделение (46) множества E называется обычно *подразделением Лебега*, а обе суммы, входящие в неравенство (47), соответствующими *суммами Лебега*. Из сказанного выше следует

Основная теорема. *Всякая ограниченная, измеримая на измеримом множестве E конечной меры функция $f(x)$ интегрируема по E, и величина интеграла равна пределу сумм Лебега или сумм $\sigma(\delta_n)$ при любом выборе x_k для подразделений Лебега при беспредельном измельчении промежутка (m, M) изменения функции.*

Суммы $\sigma(\delta_n)$ будут иметь, как мы упоминали выше, тот же предел и для любых продолжений $\bar{\delta}_n$ подразделений δ_n, о которых говорилось в теореме.

Пусть ограниченная функция $f(x)$ определена, например, на конечном замкнутом промежутке $\Delta (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$. Как показал Лебег, для существования интеграла Римана от $f(x)$ по Δ необходимо и достаточно, чтобы лебегова мера точек разрыва $f(x)$ имела меру нуль. Из этого результата легко следует, что при этом $f(x)$ измерима на Δ и ее интеграл Лебега по Δ совпадает с интегралом Римана.

107. Свойства интеграла Лебега. Поскольку интеграл Лебега может быть определен как предел сумм $\sigma(\delta_n)$ для подразделений Лебега при $\mu(\delta_n) \to 0$, или для их продолжений $\tilde{\delta}_n$, он имеет свойства, аналогичные свойствам интеграла Римана. Мы отметим и еще некоторые важные дополнительные свойства, которых не было у интеграла Римана. В этом номере мы считаем везде, что $f(x)$ и $f_k(x)$ — измеримые ограниченные функции и E — множество конечной меры.

1. *Если C — постоянная, то*

$$\int_E C\,dx = Cm(E). \tag{49}$$

Для любого подразделения δ суммы $s(\delta)$ и $S(\delta)$ имеют значение $Cm(E)$, откуда и следует (49).

2.

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx. \tag{50}$$

Пусть δ_n и δ'_n — последовательность подразделений, при которых $\sigma(\delta_n)$ для $f_1(x)$ и $\sigma(\delta'_n)$ для $f_2(x)$ имеют пределом соответствующие интегралы. Для $\delta''_n = \delta_n \delta'_n$ суммы $\sigma(\delta''_n)$ как для $f_1(x)$, так и для $f_2(x)$ имеют пределом соответствующие интегралы, и (50) получается на основе теоремы о пределе суммы.

3.

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} C_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} C_k \int_E f_k(x)\,dx. \tag{51}$$

Применяем несколько раз формулу (50), а вынесение постоянного множителя за знак интеграла следует из возможности вынесения его за знак сумм $\sigma(\delta_n)$.

4. *Если $f(x) \geqslant 0$ на E, то*

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{52}$$

Все суммы $\sigma(\delta_n)$ неотрицательны.

5. *Если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ на E, то*

$$\int_E f_1(x)\,dx \geqslant \int_E f_2(x)\,dx. \tag{53}$$

Достаточно применить 4 к разности $f_1(x) - f_2(x)$ и воспользоваться 3.

6.

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx. \tag{54}$$

Для доказательства достаточно взять произведение подразделений для $f(x)$ и $|f(x)|$ и написать аналогичное неравенство для сумм $\sigma(\delta_n)$.

7. *Если* $a \leqslant f(x) \leqslant b$, *то*

$$am(E) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant bm(E). \tag{55}$$

Непосредственно следует из 5 и 1.

8. *Если* $|f(x)| \leqslant L$, *то*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant Lm(E). \tag{56}$$

Неравенство $|f(x)| \leqslant L$ равносильно: $-L \leqslant f(x) \leqslant L$ и (56) является следствием 7.

9. *Если* $E = E' + E''$, *где* E' *и* E'' *измеримы и без общих точек, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E'} f(x)\,dx + \int_{E''} f(x)\,dx. \tag{57}$$

Достаточно взять последовательности подразделений для E' и E'', составить для них суммы $\sigma(\delta_n)$, сложить их и перейти к пределу.

10. *Пусть* $f(x)$ — *ограниченная функция, определенная на множестве* E *конечной меры. При этом для любого заданного* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta > 0$, *что*

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

если $e \subset E$ *и* $m(e) \leqslant \eta$.

Это свойство следует из неравенства

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right| \leqslant Lm(e).$$

Оно называется *абсолютной непрерывностью интеграла.*

11. *Если* E *разбито на конечное или счетное число измеримых множеств* E_k (*попарно, без общих точек*), *то*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{58}$$

В случае конечного числа слагаемых формула следует из 9. В случае бесконечного числа E_k положим: $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + R_n$, где

$m(R_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx + \int_{R_n} f(x)\,dx,$$

причем последнее слагаемое по абсолютной величине $\leqslant Lm(R_n)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда и следует

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{59}$$

Доказанное свойство называется *полной аддитивностью интеграла.*

12. *Если E — множество меры нуль, т. е. $m(E)=0$, то для любой ограниченной на E функции*

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Функция $f(x)$ измерима на E и для любого подразделения суммы $s(\delta)$ и $S(\delta)$ равна нулю.

13. *Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ эквивалентны на E, то*

$$\int_E f_1(x)\,dx = \int_E f_2(x)\,dx. \tag{60}$$

Пусть E' та часть E, где $f_1(x) \neq f_2(x)$. По условию, $m(E')=0$ и на множестве $E''=E-E'$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают. Имеем равенства

$$\int_{E'} f_1(x)\,dx = \int_{E'} f_2(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{E''} f_1(x)\,dx = \int_{E''} f_2(x)\,dx,$$

сложение которых и дает (60).

14. *Если $f(x) \geqslant 0$ на E и*

$$\int_E f(x)\,dx = 0, \tag{61}$$

то $f(x)$ эквивалентна нулю.

Надо доказать, что мера множества $E[f>0]$ равна нулю. Это множество можно представить в виде

$$E[f>0] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant \frac{1}{n}\right],$$

и если его мера была бы положительной, то положительной должна быть мера по крайней мере одного из слагаемых правой части. Пусть,

например, положительная мера $E' = E\left[f \geqslant \frac{1}{n_0}\right]$. Обозначая $E'' = E - E'$, имеем

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E'} f(x)\,dx + \int_{E''} f(x)\,dx.$$

Первое слагаемое правой части $\geqslant \frac{1}{n_0} m(E') > 0$, а второе, в силу $f(x) \geqslant 0$, неотрицательно, откуда следует, что левая часть положительна, что противоречит (61).

15. *Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность функций, определенных на E и равномерно по отношению к значку n ограниченных, т. е. $|f_n(x)| \leqslant L$, где L — положительное число (L не зависит от n) и $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на n. При этом*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{62}$$

Предельная функция $f(x)$ почти везде на E удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant L$. Переходя к эквивалентной функции, можем считать, что оно выполнено везде на E. Нам надо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0. \tag{63}$$

Из свойства 6 следует

$$\left|\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx. \tag{64}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть $E_n = E[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]$. В силу теоремы из [104] $m(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$, а в точках $E - E_n$ выполняется неравенство $|f - f_n| < \varepsilon$. Кроме того, в любой точке E

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x)| + |f_n(x)| \leqslant 2L. \tag{65}$$

Из формулы

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \int_{E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int_{E - E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx$$

следует

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant 2Lm(E_n) + \varepsilon m(E - E_n)$$

и тем более

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant 2Lm(E_n) + \varepsilon m(E).$$

Поскольку $m(E_n)\to 0$ при $n\to\infty$, существует такое $N>0$, что $m(E_n)\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$, и таким образом,

$$\int_E |f(x)-f_n(x)|\,dx\leqslant[2L+m(E)]\,\varepsilon \quad \text{при } n\geqslant N,$$

откуда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$ и (64), следует (63). Доказанное свойство дает возможность переходить к пределу под знаком интеграла при единственном предположении ограниченности $f_n(x)$ по абсолютной величине независимо от знака. Отметим, что достаточно предположить, что неравенство $|f_n(x)|\leqslant L$ имеет место лишь почти везде на E.

108. Интегралы от неограниченных функций. Мы определили интеграл от ограниченной функции по множеству E конечной меры. Положим теперь, что $f(x)$ — неограниченная неотрицательная измеримая функция на множестве E конечной меры. Определим *«урезанную функцию»*:

$$[f(x)]_m=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant m,\\ m, & \text{если } f(x)>m \end{cases} \tag{66}$$

($m>0$), т. е. значения $f(x)$, не большие m, сохраняются, а значения, большие m, заменяются на m. Функция $[f(x)]_m$ ограничена и измерима (легко доказать), а потому существует интеграл

$$\int_E [f(x)]_m\,dx, \tag{67}$$

который не убывает при возрастании m. *Если этот интеграл имеет конечный предел при $m\to+\infty$, то величину указанного предела принимают за величину интеграла от $f(x)$ по E:*

$$\int_E f(x)\,dx=\lim_{m\to+\infty}\int_E [f(x)]_m\,dx \tag{68}$$

и говорят, что $f(x)$ суммируема по E.

Отметим, что закон беспредельного возрастания m — несущественен. Если $f(x)$ — ограниченная функция, то это определение интеграла совпадает с прежним, ибо $[f(x)]_m\equiv f(x)$ при всех достаточно больших m. Если интегралы (67) беспредельно возрастают при $m\to+\infty$, то говорят, что интеграл от $f(x)$ по E равен $(+\infty)$. Отметим, что *если $f(x)$ суммируема на E, то мера множества*

$$E_0=E[f(x)=+\infty]$$

равна нулю, т. е. $f(x)$ принимает на E почти везде конечные значения. Действительно, очевидно, что при любом $m>0$ имеем $[f]_m=m$

на E_0 и для неотрицательных ограниченных функций $f(x)$ имеем

$$\int_E [f(x)]_m\,dx \geqslant \int_{E_0} [f(x)]_m\,dx = m\cdot m(E_0).$$

Если $m(E_0)>0$, то правая часть и тем более интеграл, стоящий в левой части, стремятся к $(+\infty)$ при $m\to+\infty$, т. е. $f(x)$ не суммируема на E.

Положим теперь, что $f(x)$ — неограниченная функция, принимающая значения разных знаков. Определим положительную и отрицательную части $f(x)$:

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0,\end{cases}\qquad f^-(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)>0,\\ -f(x), & \text{если } f(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

Обе эти функции неотрицательны и измеримы на E:

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x) \tag{69}$$

и

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x). \tag{70}$$

Если $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируемы на E, то говорят, что и функция $f(x)$ суммируема на E и величина интеграла от $f(x)$ по E определяется формулой

$$\int_E f(x)\,dx=\int_E f^+(x)\,dx-\int_E f^-(x)\,dx. \tag{71}$$

Если уменьшаемое правой части равно $(+\infty)$, а вычитаемое конечно, т. е. $f^-(x)$ суммируема по E, то говорят, что интеграл от $f(x)$ по E равен $(+\infty)$. Совершенно аналогично, если $f^+(x)$ суммируема по E, а вычитаемое правой части (71) равно $(+\infty)$, то говорят, что интеграл от $f(x)$ по E равен $(-\infty)$.

Из определения неотрицательных функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ следует, что если в некоторой точке $f^+(x_0)>0$, то $f^-(x_0)=0$, а если $f^-(x_0)>0$, то $f^+(x_0)=0$, и, пользуясь (69) и (70), получаем

$$[\,|f(x)|\,]_m=[f^+(x)]_m+[f^-(x)]_m,$$

$$[f^+(x)]_m\leqslant[\,|f(x)|\,]_m,\quad [f^-(x)]_m\leqslant[\,|f(x)|\,]_m$$

при $m>0$. Отсюда легко вытекает, что суммируемость $f(x)$ равносильна суммируемости $|f(x)|$, т. е. суммируемость есть абсолютная суммируемость [ср. **89**]. Отметим еще, что суммируемая на E функция имеет почти везде на E конечные значения. Это непосредственно следует из того, что у неотрицательной суммируемой функции мера множества $E_0=E[\,|f|=+\infty]$ равна нулю.

Укажем теперь остальные свойства интеграла от суммируемости функции по множеству конечной меры. Будем считать, что $f(x)\geqslant 0$.

Для функций, меняющих знак, все сводится к $f^+(x)$ и $f^-(x)$ в силу (71). Без изменения сохраняются свойства 4, 9, 12, 13 и 14, причем свойство 12 без условия ограниченности $f(x)$. Свойство 3 формулируется так:

1. *Если* $f_k(x) \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *суммируемы по* E, *то и их линейная комбинация с постоянными положительными коэффициентами есть суммируемая функция и имеет место формула* (51).

Имеет место и следующее, просто доказываемое свойство:

2. *Если* $f(x)$ *суммируема на* E, *то она суммируема и на любой измеримой части* E' *множества* E *и*

$$\int_{E'} f(x)\,dx \leqslant \int_{E} f(x)\,dx. \tag{72}$$

Докажем абсолютную непрерывность интеграла.

3. *Если* $f(x)$ *суммируема на* E, *то при любом заданном* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta > 0$, *что*

$$\int_{e} f(x)\,dx \leqslant \varepsilon, \tag{73}$$

если $e \subset E$ *и* $m(e) \leqslant \eta$.

Существует такое $m > 0$, что

$$\int_{E} \{f(x) - [f(x)]_m\}\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

При этом, в силу (72), для любого $e \subset E$

$$\int_{e} \{f(x) - [f(x)]_m\}\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$\int_{e} f(x)\,dx \leqslant \int_{e} [f(x)]_m\,dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

и при $m(e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2m}$ получаем (73).

4. *Если* $f(x)$ *суммируема на* E *и множество* E *разбито на конечное или счетное число множеств* E_k (*попарно, без общих точек*), *то имеет место формула* (58).

Рассмотрим случай бесконечного числа множеств E_k. Для ограниченной функции $[f(x)]_m$ имеем

$$\int_{E} [f(x)]_m\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} [f(x)]_m\,dx,$$

откуда

$$\int_E [f(x)]_m\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx,$$

и при $m \to +\infty$ получим

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{74}$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Из $f(x) \geqslant 0$ следует, что при любом $m > 0$ и любом конечном p,

$$\int_E [f(x)]_m\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k} [f(x)]_m\,dx,$$

и при $m \to +\infty$ получим

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k} f(x)\,dx,$$

откуда при $p \to \infty$ и следует неравенство, противоположное (74), т. е.

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{74$_1$}$$

Просто доказываются и следующие два свойства:

5. *Если E разбито на счетное число измеримых множеств E_k, функция $f(x)$ суммируема на каждом E_k и ряд с неотрицательными слагаемыми*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx \tag{75}$$

сходится, то $f(x)$ суммируема на E и имеет место формула (74$_1$).

6. *Если $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant 0$ на E и $f_1(x)$ суммируема на E, то и $f_2(x)$ суммируема и*

$$\int_E f_1(x)\,dx \geqslant \int_E f_2(x)\,dx. \tag{76}$$

Отметим те изменения, которые надо внести в формулировку свойств, если $f(x)$ — неограниченная функция, меняющая знак: в свойстве 1 постоянные коэффициенты могут быть любого знака; свойство 2 сохраняется, но без неравенства (72); свойство 5 сохраняется, если в сумме (75) $f(x)$ заменить на $|f(x)|$. Свойство 6 заменяется следующим:

7. Если $f_2(x)$ измерима на E, $f_1(x)$ — измерима, неотрицательна и суммируема на E и $|f_2(x)| \leqslant f_1(x)$, то $f_2(x)$ суммируема на E и

$$\left|\int_E f_2(x)\,dx\right| \leqslant \int_E f_1(x)\,dx. \tag{77}$$

Нетрудно ввести понятие суммируемых функций и определить интеграл для функций $f(x)$, принимающих комплексные значения. Разделим у такой функции вещественную и мнимую части:

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x). \tag{78}$$

функция $f(x)$ называется *суммируемой* на E, если суммируемы $f_1(x)$ и $f_2(x)$, и *интеграл* определяется в этом случае формулой

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f_1(x)\,dx + i\int_E f_2(x)\,dx. \tag{79}$$

Имеет место следующее свойство: *для суммируемости $f(x)$ необходима и достаточна суммируемость модуля $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$.* Это непосредственно следует из неравенств

$$|f_1| \leqslant \sqrt{f_1^2+f_2^2}, \quad |f_2| \leqslant \sqrt{f_1^2+f_2^2}, \quad \sqrt{f_1^2+f_2^2} \leqslant |f_1| + |f_2|.$$

109. Предельный переход под знаком интеграла. Приведем простые по форме и важные для приложений теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 1. *Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность функций, суммируемых на E, причем для всякого n имеется почти везде на E оценка*

$$|f_n(x)| \leqslant F(x) \text{ на } E, \tag{80}$$

где $F(x)$ суммируема на E, и $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на E. При этом $f(x)$ суммируема на E и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{81}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству свойства 15 из [107]. Суммируемость $f(x)$ следует из того, что $|f(x)| \leqslant F(x)$ почти везде на E. Как и в [107], вводятся множества E_n, причем $m(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Вместо (65) имеем

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2F(x)$$

и

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant 2\int_{E_n} F(x)\,dx + \int_{E-E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла от $F(x)$ существует такое N, что

$$\int_{E_n} F(x)\,dx \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N$$

и

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant [2 + m(E)]\,\varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует (81).

Теорема 2. *Пусть* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *неотрицательны и суммируемы на* E, $f_n(x) \to f(x)$ *почти везде на* E *и*

$$\int_E f_n(x)\,dx \leqslant A, \tag{82}$$

где A *— некоторое число (не зависит от* n*). При этом* $f(x)$ *суммируема на* E *и*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant A. \tag{83}$$

Отметим сначала, что если в некоторой точке $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то $[f_n(x_0)]_m \to [f(x_0)]_m$. В этом легко убедиться, разбирая отдельно случаи $f(x_0) \leqslant m$ и $f(x_0) > m$. Таким образом, $[f_n(x)]_m \to [f(x)]_m$ почти везде на E при любом m. Очевидное неравенство $[f_n(x)]_m \leqslant f_n(x)$ и (82) дает

$$\int_E [f_n(x)]_m\,dx \leqslant A \tag{84}$$

и, в силу свойства 15 из [107], причем роль L играет m, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [f_n(x)]_m\,dx = \int_E [f(x)]_m\,dx.$$

Переходя в (84) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int_E [f(x)]_m\,dx \leqslant A,$$

откуда следует суммируемость $f(x)$ на E, и при $m \to \infty$ неравенство (83).

Теорема 3. *Пусть* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *— неубывающая последовательность суммируемых на* E *функций. При этом у предельной функции* $f(x)$ *интеграл по* E *равен конечной величине или* $(+\infty)$ *и имеет место формула* (81).

Суммируемые функции $f_n(x)$ почти везде на E конечны, и неубывающая последовательность в каждой точке имеет предел, который может быть и бесконечным. Для простоты будем считать, что

все значения всех $f_n(x)$ конечны. Но значения $f(x)$ могут, очевидно, равняться и $(+\infty)$.

Рассмотрим неубывающую последовательность неотрицательных функций $0 \leqslant f_n(x) - f_1(x)$. Мы имеем

$$0 \leqslant f_n(x) - f_1(x) \leqslant f(x) - f_1(x).$$

Если $f(x) - f_1(x)$ — суммируема на E, то и $f(x)$ — суммируема. Разность $f(x) - f_1(x)$ может играть роль $F(x)$ теоремы 1, и применяя эту теорему, получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [f_n(x) - f_1(x)]dx = \int_E [f(x) - f_1(x)]\,dx,$$

откуда следует (81).

Положим теперь, что интеграл от $f(x) - f_1(x)$ равен $(+\infty)$. Поскольку $f_1(x)$ — суммируема, отсюда следует, что $f^-(x)$ суммируема, а интеграл от $f^+(x)$ равен $(+\infty)$, т. е. интеграл от $f(x)$ равен $(+\infty)$.

В силу свойства 15 из [107], имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [f_n(x) - f_1(x)]_m dx = \int_E [f(x) - f_1(x)]_m dx. \tag{85}$$

Пусть K — любое заданное положительное число. Ввиду того, что интеграл от $[f(x) - f_1(x)]$ равен $(+\infty)$, существует такое фиксированное m, что правая часть (85) больше K, и, в силу (85), для всех достаточно больших n

$$\int_E [f_n(x) - f_1(x)]_m\,dx > K$$

и тем более

$$\int_E [f_n(x) - f_1(x)]\,dx \geqslant K.$$

Отсюда, ввиду произвольности K, следует

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_E f_n(x)\,dx - \int_E f_1(x)\,dx\right] = +\infty,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = +\infty,$$

и формула (81) доказана и в том случае, когда интеграл от $f(x)$ равен $(+\infty)$.

Замечание. Аналогичный результат справедлив и для невозрастающей последовательности суммируемых функций $f_n(x)$, причем предельная функция может иметь интеграл, равный $(-\infty)$. Он непосредственно получается из доказанной теоремы заменою $f_n(x)$ на $[-f_n(x)]$.

Отметим еще важное следствие доказанной теоремы.

Теорема 4. *Если функции* $u_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ *неотрицательны и суммируемы на* E *и ряд с неотрицательными членами*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)\,dx \tag{86}$$

сходится, то почти везде на E *сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{87}$$

и $u_k(x) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *почти везде на* E.

Рассмотрим неубывающую последовательность неотрицательных суммируемых на E функций

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

и применим теорему 3. В силу сходимости ряда (86), интеграл от $f_n(x)$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел. Следовательно, предельная функция, в данном случае выражаемая рядом (87)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

суммируемая на E, а потому имеет на E почти везде конечные значения, т. е. ряд (87) сходится почти везде на E, откуда непосредственно следует, что $u_k(x) \to 0$ при $k \to \infty$ почти везде на E.

110. Теорема Фубини. Для кратного интеграла Лебега теоремы о сведении такого интеграла к одномерным интегралам имеют очень простую и общую форму. Мы приведем лишь результат [V, 68]. Сначала сформулируем теорему для двойного интеграла на прямоугольнике.

Теорема 1. *Пусть* $f(x, y)$ *— суммируемая функция на прямоугольнике* $\Delta (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$. *При этом* $f(x, y)$ *измерима и суммируема по* y *на промежутке* $c \leqslant y \leqslant d$ *для всех или почти всех значений* x *из промежутка* $a \leqslant x \leqslant b$, *функция*

$$h(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy \tag{88}$$

суммируема по промежутку $a \leqslant x \leqslant b$ *и имеет место равенство*

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{89}$$

Совершенно аналогичные утверждения имеют место и при перемене порядка интегрирования:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy. \tag{90}$$

Отметим, что если функция $h(x)$ определена лишь почти везде, то ее можно доопределить на множестве меры нуль, полагая ее, например, равной нулю на этом множестве. Совершенно такое же замечание относится и к функции

$$l(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{91}$$

определенной везде или почти везде на промежутке $c \leqslant y \leqslant d$. Указанная выше теорема была установлена итальянским математиком Фубини. Из (89) и (90) следует

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy, \tag{92}$$

т. е. возможность для суммируемой на Δ функции менять порядок интегрирования.

При предположении суммируемости $f(x, y)$ на Δ мы имели формулы (89) и (90). Обратное заключение о существовании двойного интеграла по Δ, если имеют смысл повторные интегралы, стоящие в правых частях формул — неправильно. Но если $f(x, y)$ неотрицательна на Δ, то имеет место следующая

Теорема 2. *Если $f(x, y)$ измерима и неотрицательна на Δ и существует повторный интеграл правой части формулы* (89) *или* (90), *то $f(x, y)$ суммируема на Δ.*

Но из суммируемости $f(x, y)$ на Δ следуют формулы (89), (90) и (92).

Замечание. Если $f(x, y)$ меняет знак, но для $|f(x, y)|$ существует повторный интеграл правой части формулы (89) или (90), то, согласно теореме 2, $|f(x, y)|$ суммируема на E, но при этом и $f(x, y)$ суммируема на E. Таким образом, *формулы* (89), (90) *и* (92) *имеют место, если мы убедились, что один из повторных интегралов существует для* $|f(x, y)|$.

Если $f(x, y)$ суммируема на измеримом ограниченном множестве E, то имеет место формула

$$\iint_E f(x, y)\,dx\,dy = \int_{E_x'} \left[\int_{E_x} f(x, y)\,dy\right] dx = \int_{E_y'} \left[\int_{E_y} f(x, y)\,dx\right] dy, \tag{93}$$

где E_x — множество точек E, имеющих заданную абсциссу x, E_y — аналогичное множество, а E_x' и E_y' — проекции E на оси OX и OY.

Интегралы по E_x и E_y могут не иметь смысла для значений x и y, образующих на осях OX и OY множества меры нуль. (E_x и E_y могут быть на этих множествах меры нуль неизмеримы.) Для доказательства формулы (93) достаточно покрыть E конечным промежутком Δ и применить формулы (89) и (90) к функции $f_0(x, y)$, определенной на Δ, равной $f(x, y)$ на E и нулю на оставшейся части Δ. Формула (93) имеет место и для функций, суммируемых на неограниченных множествах конечной меры.

Все сказанное выше об измеримых множествах, измеримых функциях и интеграле Лебега сохраняет справедливость как в линейном случае, так и в n-мерном пространстве [ср. **100**]. В линейном случае теорема Фубини, естественно, отсутствует. Сформулируем эту теорему в многомерном случае.

Теорема 3. *Пусть Δ_{m+n} — промежуток в пространстве R_{m+n}, имеющем $m+n$ измерений:*

$$\Delta_{m+n}: \quad a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ \ldots, \quad a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n},$$

а Δ_m и Δ_n следующие промежутки в пространствах R_m и R_n:

$$\Delta_m: \quad a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ \ldots, \ a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

$$\Delta_n: \ a_{m+1} \leqslant x_{m+1} \leqslant b_{m+1}, \ a_{m+2} \leqslant x_{m+2} \leqslant b_{m+2}, \ \ldots, \ a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n}.$$

Пусть, далее, $f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ — функция, суммируемая на Δ_{m+n}. Если мы фиксируем некоторую точку N из Δ_m, то $f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ будет измеримой и суммируемой в Δ_n при любом выборе N, кроме, может быть, множества точек меры нуль в Δ_m. Интеграл от этой функции по Δ_n

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \int\limits_{\Delta_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})\, dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}$$

дает суммируемую в Δ_m функцию и имеет место формула

$$\int\limits_{\Delta_{m+n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m+n} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_m} \left[\int\limits_{\Delta_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})\, dx_{m+1} \ldots dx_{m+n} \right] dx_1 \ldots dx_m. \quad (94)$$

Приведем еще два результата, непосредственно связанных с теоремой Фубини. Мы формулируем их для случая функции двух независимых переменных $f(x, y)$, определенной на конечном промежутке $\Delta\,[a \leqslant x \leqslant b; \quad c \leqslant y \leqslant d]$.

1. *Если $f(x, y)$ измерима на Δ, то для почти всех x из промежутка $a \leqslant x \leqslant b$ она измерима по y на промежутке $c \leqslant y \leqslant d$.* Роли x и y при этом можно поменять.

2. *Если $f(x, y)$ измерима на Δ и для почти всех x из $a \leqslant x \leqslant b$ существует интеграл*

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

то $\varphi(x)$ измерима на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

111. Интегралы по множеству бесконечной меры. До сих пор мы рассматривали интегралы на измеримых множествах конечной меры. Расширение понятия интеграла на случай множества бесконечной меры производится по существу так же, как и для интеграла Римана [89]. Пусть на измеримом множестве E бесконечной меры задана измеримая неотрицательная функция $f(x)$. Рассмотрим какую-либо возрастающую последовательность множеств конечной меры

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots, \tag{95}$$

для которой E является предельным множеством [103]. Мы можем, например, считать, что E_n есть произведение E и промежутка Δ_n $(-n \leqslant x_1 \leqslant n;\ -n \leqslant x_2 \leqslant n)$. Для ограниченных множеств E_n существуют интегралы

$$\int_{E_n} f(x)\, dx, \tag{96}$$

которые в силу неотрицательности $f(x)$ не убывают при возрастании n.

Предел монотонной последовательности (96) *называется интегралом от $f(x)$ по E*

$$\int_E f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f(x)\, dx, \tag{97}$$

и функция $f(x)$ называется суммируемой на E, если указанный предел конечен.

Нетрудно показать, что этот предел не зависит от выбора возрастающей последовательности E_n, имеющей E своим предельным множеством [ср. 89].

Отметим, что интегралы (96) могут равняться $(+\infty)$. При этом интеграл от $f(x)$ по E также равен $(+\infty)$. Но может случиться, что все интегралы (96) конечны, а предел этой последовательности равен $(+\infty)$.

Измеримая на $f(x)$ функция, не удовлетворяющая условию $f(x) \geqslant 0$, называется *суммируемой* на E, если суммируемы неотрицательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, и величина интеграла от $f(x)$ на E определяется формулой

$$\int_E f(x)\, dx = \int_E f^+(x)\, dx - \int_E f(x)\, dx. \tag{98}$$

Если только одна из функций $f^+(x)$ или $f^-(x)$ суммируема, то, как и в [108], интеграл от $f(x)$ по E имеет смысл, но его величина равна $(-\infty)$ или $(+\infty)$.

Для интеграла на измеримом множестве бесконечной меры справедливо все сказанное в [108], а также теоремы из [109] и теорема Фубини. Доказательства проводятся в основном следующим образом: сначала используются соответствующие свойства интегралов на множествах E_n или на произведении некоторого множества и множества E_n, а затем проводится предельный переход при $n \to \infty$.

Напомним, что при изложении несобственных кратных интегралов Римана мы указали на то, что эти интегралы сходятся абсолютно [89]. Это относится и к интегралам по бесконечным областям, например к интегралу по всей плоскости. Несобственный простой интеграл определялся при помощи предельного перехода [85]

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{99}$$

если указанный предел существует (сходящийся интеграл). При этом из сходимости интеграла не следует его абсолютная сходимость.

Указанное выше определение интеграла по множеству E бесконечной меры таково, что из суммируемости функции $f(x)$ на E следует и ее абсолютная суммируемость, т. е. суммируемость

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Если мы для функции, суммируемой на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ при любом $b > a$, определим интеграл по промежутку $a \leqslant x < +\infty$ формулой (99), причем указанный в этой формуле предел (конечный) существует, то это определение отлично от указанного выше, и может оказаться, что для $|f(x)|$ предел, входящий в формулу (99), равен $(+\infty)$.

ГЛАВА IV

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 10. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

112. Сложение и вычитание векторов. Настоящая глава будет посвящена главным образом изложению векторного анализа. В настоящее время имеется большое число специальных курсов векторного анализа, и мы, не вдаваясь в подробности, выясним лишь основные понятия и факты, непосредственно связанные с предшествующим материалом и необходимые нам для изложения основ математической физики.

При рассмотрении физических явлений мы встречаемся с величинами двух родов — скалярными и векторными.

Скалярной величиной или просто *скаляром* называется величина, которая при определенном выборе единицы меры вполне характеризуется числом, ее измеряющим.

Так например, если в пространстве имеется нагретое тело, то температура в каждой точке этого тела характеризуется определенным числом, и мы можем сказать поэтому, что температура есть величина скалярная. Плотность, энергия, потенциал представляют собою также скалярные величины.

В качестве примера векторной величины рассмотрим скорость. Чтобы вполне охарактеризовать скорость, недостаточно знать число, измеряющее величину скорости, но необходимо указать и ее направление. Мы можем охарактеризовать скорость, строя вектор — отрезок, имеющий в данном масштабе длину, равную величине скорости, и направление, совпадающее с направлением скорости. Таким образом *вектор* вполне определяется своей длиной и направлением. Сила, ускорение, импульс представляют собой также векторные величины.

Вернемся к примеру нагретого тела. Температура u в каждой точке этого тела характеризуется определенным числом или, как говорят, есть функция точки в пространстве, занятом телом. Относя пространство к системе прямоугольных координат XYZ, мы можем

сказать, что скаляр u есть функция независимых переменных (x, y, z) определенная в той области пространства, которая занята нагретым телом. Здесь мы имеем пример так называемого *поля скалярной величины*, или *скалярного поля*.

Если же в каждой точке некоторой области определен вектор, то мы имеем векторное поле. Таков пример электромагнитного поля, в каждой точке которого имеется определенная электрическая и магнитная сила.

В некоторых случаях бывает важно знать точку приложения вектора, т. е. ту точку пространства, с которой совпадает начало вектора. В этом случае мы имеем дело со связанными векторами. Однако в дальнейшем мы будем иметь дело преимущественно со *свободными векторами*, т. е. такими, для которых точка приложения может лежать где угодно. Поэтому мы будем считать равными два вектора, если они равны по величине (длине) и имеют одинаковое направление.

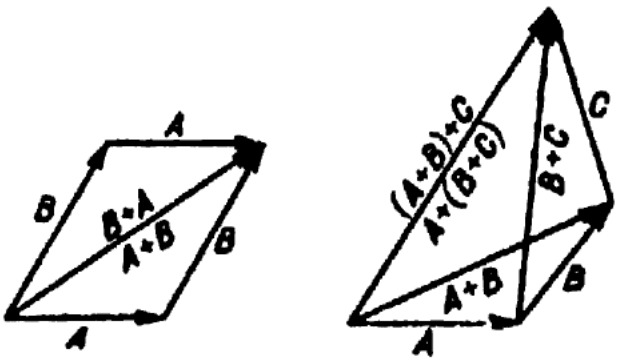


Рис. 80.

Векторы в дальнейшем мы будем обозначать полужирным шрифтом $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$, их величины (длины) — соответственно символами $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|, \ldots$, скаляры же — обычными буквами латинского алфавита.

Пусть имеются несколько векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Из некоторой точки O построим вектор $\mathbf{A}$, из его конца построим вектор $\mathbf{B}$, из конца этого вектора — вектор $\mathbf{C}$. Вектор $\mathbf{S}$, который имеет начало в начале первого вектора, а конец в конце последнего вектора, называется *суммой данных векторов*:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Сумма векторов обладает основными свойствами обыкновенной суммы, а именно — свойствами переместительным и сочетательным, выражающимися формулами (рис. 80)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

Если из конца вектора $\mathbf{A}$ построим вектор $\mathbf{C}$, по величине равный, а по направлению противоположный вектору $\mathbf{B}$, то вектор $\mathbf{M}$, имеющий начало в начале вектора $\mathbf{A}$, а конец в конце вектора $\mathbf{C}$, называется *разностью векторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ (рис. 81):

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Нетрудно видеть, что этот вектор вполне определяется соотношением

$$\mathbf{B} + \mathbf{M} = \mathbf{A}.$$

Обозначим, вообще, через $(-\mathbf{N})$ вектор, по величине равный, а по направлению противоположный вектору N. Тогда разность векторов A и B можно определить, как сумму A и $(-\mathbf{B})$, т. е.

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\mathbf{A}-\mathbf{B}.$$

Нетрудно показать, что определенные таким образом понятия о сумме и разности векторов подчиняются тем же правилам, что и обыкновенные алгебраические сумма и разность, на чем мы останавливаться не будем.

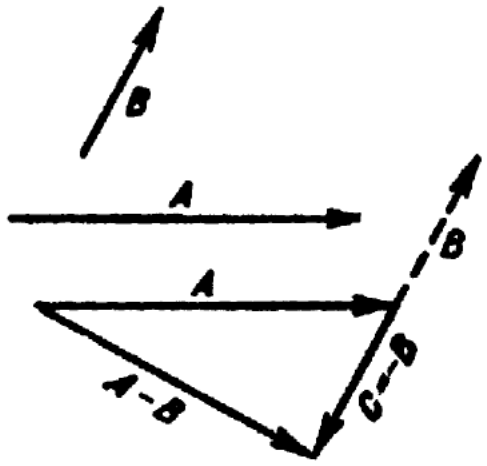


Рис. 81.

Правило сложения векторов имеет много приложений в механике и физике. Если, например, точка участвует в нескольких движениях, то ее окончательная скорость получается по правилу сложения из тех скоростей, которые она имеет в отдельных движениях. По тому же правилу получается равнодействующая нескольких сил, действующих на одну и ту же точку.

Заметим, что если при сложении конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого, т. е. если построенная по указанному выше правилу ломаная линия будет замкнутой, то говорят, что сумма рассматриваемых векторов равна нулю

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=0.$$

В частности, очевидно, что

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0.$$

Вообще, вектор называется равным нулю, если его величина равна нулю. В этом случае о его направлении говорить не приходится.

113. Умножение вектора на скаляр. Компланарность векторов. Если имеем вектор A и вещественное число a, то *произведением* $a\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}a$ называется вектор, по величине равный $|a|\cdot|\mathbf{A}|$, а по направлению совпадающий с A, если $a>0$, или противоположный A, если $a<0$. В случае $a=0$ произведение $a\mathbf{A}$ также равно нулю.

Таким образом, если A и B — два вектора, имеющих одинаковые или противоположные направления, то между ними существует соотношение

$$\mathbf{B}=n\mathbf{A},$$

которое можно написать в более симметричном виде

$$a\mathbf{A}+b\mathbf{B}=0,$$

положив $n=-\frac{a}{b}$.

Наоборот, наличие написанного соотношения указывает на то, что векторы **A** и **B** имеют одинаковые или противоположные направления.

Пусть теперь даны два каких-нибудь вектора **A** и **B**, направления которых не совпадают и не противоположны. Через произвольную точку O (рис. 82) проведем две прямые, параллельные данным векторам. Они определят плоскость, параллельную не только векторам **A** и **B**, но и всем векторам вида $m\mathbf{A}$ и $n\mathbf{B}$ при произвольных значениях чисел m и n, а в силу правила сложения — также и их сумме

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}.$$

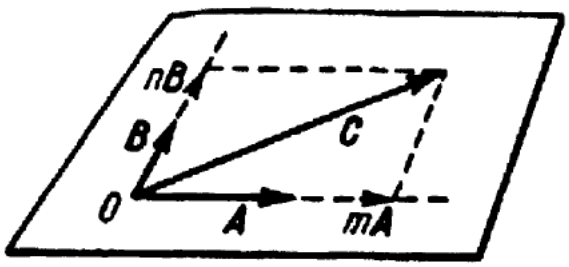


Рис. 82.

Обратно, всякий вектор **C**, параллельный построенной плоскости, можно представить в виде $m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно отложить этот вектор от точки O и представить его, как диагональ параллелограмма, стороны которого параллельны **A** и **B**. Написанное выше соотношение можно переписать в более симметричном виде

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0,$$

и оно выражает условие *компланарности трех векторов*, т. е. того обстоятельства, что эти три вектора параллельны одной и той же плоскости. Если **A** и **B** имеют одинаковые или противоположные направления, то векторы **A** и **B** компланарны с любым вектором **C**, и в предыдущем соотношении надо считать $c = 0$.

114. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Предположим теперь, что имеются три некомпланарных вектора **A**, **B** и **C**. Всякий вектор можно представить как диагональ параллелепипеда, три ребра которого параллельны векторам **A**, **B** и **C**. Таким образом всякий вектор может быть выражен через три некомпланарных вектора в виде (рис. 83):

$$\mathbf{D} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C}.$$

Отсюда следует, что между всякими четырьмя векторами существует соотношение вида

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + d\mathbf{D} = 0.$$

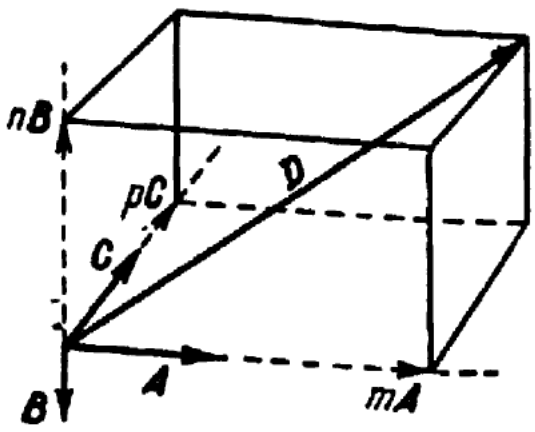


Рис. 83.

Если три первых вектора компланарны, то надо считать лишь $d = 0$.

Особенно важный частный случай предыдущего правила разложения вектора по трем векторам мы имеем тогда, когда пространство

отнесено к прямоугольной системе координат XYZ, векторы же $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ по длине равны единице (такие векторы мы будем называть вообще *единичными)* и имеют направление осей OX, OY, OZ. В этом случае они называются *основными векторами* или *ортами* и обозначаются буквами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Всякий вектор $\mathbf{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{A} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}. \tag{1}$$

Если отложить вектор $\mathbf{A}$ от начала координат, то числа m, n, p дадут координаты его конца и выразят проекции вектора $\mathbf{A}$ на координатные оси. Эти проекции мы в дальнейшем будем обозначать через A_x, A_y, A_z и называть *слагающими* или *составляющими вектора* $\mathbf{A}$ по координатным осям. Предыдущее соотношение может быть тогда переписано в виде:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}. \tag{2}$$

Если n — любое направление в пространстве, то проекция вектора $\mathbf{A}$ на это направление будет

$$A_n = |\mathbf{A}| \cos(n, \mathbf{A})$$

или, принимая во внимание выражение для косинуса угла между двумя направлениями, известное из аналитической геометрии:

$$A_n = |\mathbf{A}|[\cos(n, X)\cos(\mathbf{A}, X) + \cos(n, Y)\cos(\mathbf{A}, Y) + \cos(n, Z)\cos(\mathbf{A}, Z)] = A_x\cos(n, X) + A_y\cos(n, Y) + A_z\cos(n, Z).$$

При сложении векторов составляющие их, очевидно, складываются (проекция замыкающей равна сумме проекций составляющих).

115. Скалярное произведение. *Скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется скаляр, величина которого равна произведению величин этих векторов, умноженному на косинус угла, образованного ими.

Скалярное произведение обозначают символом $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, так что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \tag{3}$$

Из этого определения непосредственно следует, что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A},$$

т. е. для скалярного произведения имеет место переместительный закон.

Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ образуют прямой угол, то, очевидно

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

В частности, для основных векторов будем иметь

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одно и то же направление, то

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$$

а если их направления противоположны, то

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-|\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

В частности,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2 \tag{4}$$

и

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \tag{5}$$

Скалярное произведение выражается через слагающие векторов следующим образом

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|[\cos(\mathbf{A},\ X)\cos(\mathbf{B},\ X)+\\&+\cos(\mathbf{A},\ Y)\cos(\mathbf{B},\ Y)+\cos(\mathbf{A},\ Z)\cos(\mathbf{B},\ Z)]=\\&=|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ X)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ X)+|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ Y)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ Y)+\\&+|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ Z)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ Z)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих слагающих этих векторов.

Заметим, что левая часть написанного равенства не зависит от выбора координатных осей, а потому и правая часть также не зависит от выбора координатных осей, что по виду этой части не очевидно.

При выводе формулы (6) мы воспользовались известной из аналитической геометрии формулой для угла между двумя направлениями [114].

Нетрудно показать, что для скалярного произведения имеет место и распределительный закон, т. е. соотношение

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \tag{7}$$

Действительно, пользуясь только что выведенным выражением скалярного произведения, можем написать

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}&=(A_x+B_x)C_x+(A_y+B_y)C_y+(A_z+B_z)C_z=\\&=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)+(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z)=\\&=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.\end{aligned}$$

Из распределительного свойства непосредственно вытекает и более общая формула

$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1)\cdot(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2, \tag{8}$$

выражающая обычное правило раскрытия скобок при перемножении многочленов.

116. Векторное произведение. Из какой-либо точки O пространства проведем векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и построим на них параллелограмм. Перпендикуляр в точке O к плоскости построенного параллелограмма имеет два противоположных направления. Одно из этих направлений обладает тем свойством, что для наблюдателя, стоящего вдоль него, направление вектора $\mathbf{A}$ может быть переведено в направление вектора $\mathbf{B}$ вращением на угол, меньший π, в ту же сторону, в какую для наблюдателя, стоящего вдоль оси OZ, положительное направление оси OX может быть переведено в направление оси OY вращением на угол $\frac{\pi}{2}$.

На рис. 84 изображено это направление перпендикуляра в случае правой и левой систем координат.

Векторным произведением вектора $\mathbf{A}$ на вектор $\mathbf{B}$ называется вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на этих векторах, и по направлению совпадающий с вышеуказанным направлением перпендикуляра к плоскости этого параллелограмма.

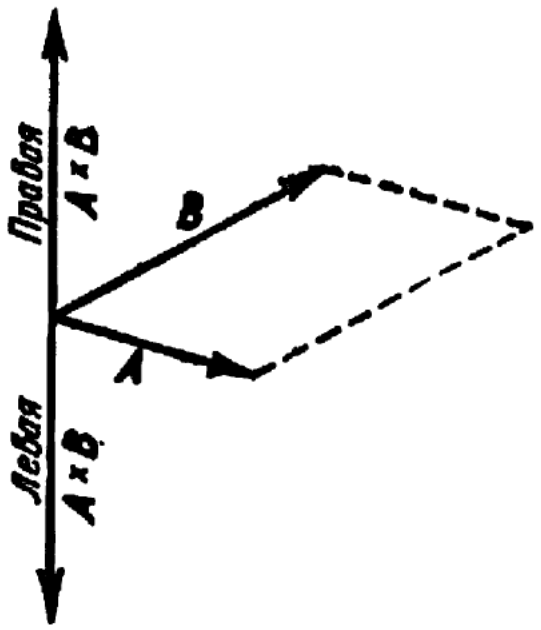


Рис. 84.

Векторное произведение вектора $\mathbf{A}$ на вектор $\mathbf{B}$ обычно обозначают символом $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Его величина, согласно предыдущему определению, равна

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \qquad (9)$$

Его направление зависит от ориентировки координатной системы и при перемене ориентировки переходит в противоположное.

Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковые или противоположные направления, то векторное произведение равно нулю. Вектор, у которого направление зависит от ориентировки осей, как, например, у $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, называется часто *псевдовектором*. Отметим, что для определения вектора достаточно задать тройку чисел (A_x, A_y, A_z) в какой-либо определенной прямоугольной системе координат XYZ. Во всякой другой прямоугольной системе $X'Y'Z'$ составляющие $(A_{x'}, A_{y'}, A_{z'})$ получатся из (A_x, A_y, A_z) по формулам преобразования координат. Если $X'Y'Z'$ имеют ориентировку, отличную от XYZ, то для псевдовектора надо еще изменить знак у составляющих.

Отметим еще очевидные формулы

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}; \qquad (10)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}. \qquad (11)$$

Найдем теперь выражение составляющих векторного произведения $\mathbf{P}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ через составляющие векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Принимая во внимание перпендикулярность вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ векторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, можем написать

$$P_xA_x+P_yA_y+P_zA_z=0, \qquad P_xB_x+P_yB_y+P_zB_z=0.$$

Воспользуемся следующей элементарной алгебраической леммой, доказательство которой предоставляем читателю:

Лемма. *Решение двух однородных уравнений с тремя переменными*

$$ax+by+cz=0, \qquad a_1x+b_1y+c_1z=0$$

имеет вид

$$x=\lambda(bc_1-cb_1), \qquad y=\lambda(ca_1-ac_1), \qquad z=\lambda(ab_1-ba_1),$$

где λ — произвольный множитель. При этом считается, что хотя бы одна из написанных разностей отлична от нуля.

Применяя эту лемму, получим

$$P_x=\lambda(A_yB_z-A_zB_y), \qquad P_y=\lambda(A_zB_x-A_xB_z), \qquad P_z=\lambda(A_xB_y-A_yB_x),$$

где λ надо еще определить. Заметим, что если все три написанные разности равны нулю, то векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ образуют углы 0 или π, и $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$, т. е. $P_x=P_y=P_z=0$. Воспользуемся для определения λ тождеством, которое называется обычно *тождеством Лагранжа:*

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2= \\ =(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2, \qquad (12)$$

справедливость которого нетрудно проверить, раскрывая скобки в его обеих частях. Отметим далее, что $(P_x^2+P_y^2+P_z^2)$ есть квадрат длины вектора $\mathbf{P}$, т. е.

$$\lambda^2[(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2]= \\ =|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2(\mathbf{A},\ \mathbf{B}).$$

Применяя к левой части тождество Лагранжа, можем переписать это равенство так:

$$\lambda^2[(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2]= \\ =|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2(\mathbf{A},\ \mathbf{B}),$$

или, принимая во внимание (4) и (6),

$$\lambda^2[|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2(\mathbf{A},\ \mathbf{B})]=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2(\mathbf{A},\ \mathbf{B}),$$

откуда непосредственно следует, что $\lambda=\pm 1$.

Докажем, наконец, что $\lambda=+1$. Подвергнем векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ непрерывной деформации, которая привела бы вектор $\mathbf{A}$ к совпадению

с основным вектором $\mathbf{i}$, а вектор $\mathbf{B}$ — к совпадению с основным вектором $\mathbf{j}$. Деформацию можно производить так, что векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в нуль не обращаются и не бывают параллельны между собой. Тогда векторное произведение $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, не обращаясь в нуль, также будет непрерывно изменяться и в результате обратится в

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},$$

так как $\mathbf{A}$ совпадает с $\mathbf{i}$ и $\mathbf{B}$ с $\mathbf{j}$.

Принимая во внимание непрерывность изменения, а также то обстоятельство, что λ может иметь лишь два значения (± 1), можем утверждать, что λ вообще не будет меняться при указанной деформации и что, следовательно, значение λ после деформации будет таким же, каким оно было и до нее. Но после деформации мы будем иметь

$$A_x = 1, \quad A_y = A_z = 0, \quad B_y = 1, \quad B_x = B_z = 0, \quad P_z = 1, \quad P_x = P_y = 0,$$

и из соотношения

$$P_z = \lambda (A_x B_y - A_y B_x)$$

мы можем заключить, что $\lambda = +1$.

Мы получаем, таким образом, следующие выражения слагающих векторного произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x. \tag{13}$$

Пользуясь этими выражениями, читатель без труда проверит справедливость распределительного закона для векторного произведения, т. е. соотношение

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}. \tag{14}$$

С помощью формулы (10) без труда получим отсюда

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B},$$

а затем и более общую формулу:

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_2, \tag{15}$$

вполне аналогичную формуле (8) для скалярного произведения.

117. Соотношения между скалярным и векторным произведениями. Составим скалярное произведение вектора $\mathbf{A}$ на векторное произведение $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

Величина векторного произведения $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{N}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Но

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{N}| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{N}),$$

и, следовательно, это произведение можно рассматривать как произведение площади $|\mathbf{N}|$ упомянутого параллелограмма на проекцию вектора $\mathbf{A}$ на направление $\mathbf{N}$, перпендикулярное к этой площади, т. е. *скалярное произведение* $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ *выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. Его знак зависит от ориентировки координатных осей. Нетрудно видеть, что если совокупность векторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ или, что то же, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ имеет ту же ориентировку, что и оси координат, то мы будем иметь знак $(+)$. В этом можно убедиться тем же методом непрерывной деформации, которым мы уже пользовались выше [1]).

При вычислении объема параллелепипеда мы за основание его принимали параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Но точно так же мы могли бы принимать за основание параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Мы получаем, таким образом, следующие соотношения:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \tag{16}$$

Следует только обратить внимание на знаки этих трех скалярных произведений. Они будут одинаковы, так как совокупность векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A})$ и $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет одинаковую ориентировку. Две последние совокупности получаются из первой путем круговой перестановки. При другом порядке векторов знак перейдет в обратный, т. е., например,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}). \tag{17}$$

Если три вектора $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ компланарны, то объем параллелепипеда будет равен нулю, т. е. в этом случае

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0. \tag{18}$$

Это равенство есть необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$.

Рассмотрим теперь векторное произведение $\mathbf{A}$ на векторное произведение $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, т. е.

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}).$$

Так как вектор $\mathbf{D}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, то он компланарен с $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, а поэтому |113|:

$$\mathbf{D}=m\mathbf{B}+n\mathbf{C}; \tag{19}$$

---

[1]) Зависимость знака произведения $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ от ориентировки координатных осей происходит оттого, что множитель $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ зависит от ориентировки осей. Таким образом, рассматриваемая величина $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ не есть обычный скаляр, величина которого не должна зависеть от выбора координатных осей. Вообще величины, зависимость которых от координатных осей заключается лишь в изменении знака при перемене ориентировки осей, называются *псевдоскалярами*.

но D перпендикулярен и к A, а потому [115]:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=m\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+n\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=0,$$

откуда

$$m=\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\qquad n=-\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},$$

после чего оказывается

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{D}=\mu\{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\},$$

и остается только определить коэффициент пропорциональности μ. Для этого достаточно сравнить слагающие по какой-нибудь из координатных осей векторов в левой и правой частях предыдущей формулы. Направим ось OX параллельно A и вычислим слагающие по оси OZ. Заметив, что при сделанном выборе осей

$$A_x=|\mathbf{A}|=a,\qquad A_y=A_z=0,$$

мы имеем для левой части [116]

$$D_z=A_x(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_y=a(B_zC_x-B_xC_z),$$

а для правой [115]

$$\mu(aC_xB_z-aB_xC_z),$$

отсюда, сравнивая, получим, что $\mu=1$.

Это приводит нас к следующей формуле:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{20}$$

Как следствие из этой формулы, выведем *разложение вектора* B ***по двум направлениям: параллельному и перпендикулярному к данному вектору*** A. Положив в формуле (20) $\mathbf{C}=\mathbf{A}$, перепишем ее в виде

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

или

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}'+\mathbf{B}'', \tag{21}$$

где

$$\mathbf{B}'=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A},\qquad \mathbf{B}''=-\frac{\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}},$$

что и дает искомое разложение, так как очевидно, что вектор $\mathbf{B}'$ параллелен, вектор же $\mathbf{B}''$ перпендикулярен вектору A.

118. Скорости точек вращающегося твердого тела; момент вектора. Понятие векторного произведения имеет многочисленные применения в механике и, в частности, при исследовании движения твердого тела. В дальнейшем мы пользуемся правовращающейся системой координат.

Рассмотрим сперва твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (L). При этом всякая точка M тела будет иметь скорость v, по величине

равную произведению расстояния PM точки M от оси вращения (рис. 85) на угловую скорость вращения ω, по направлению же перпендикулярную к плоскости, проходящей через ось вращения и точку M. Эту скорость $\mathbf{v}$ геометрически можно представить следующим образом.

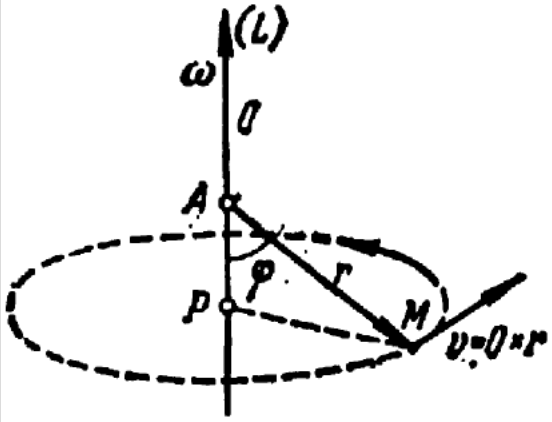


Рис. 85.

Выберем на оси (L) то из двух ее направлений, по отношению к которому вращение совершается против часовой стрелки, и будем считать его положительным. Отложив от произвольной точки A оси в указанном направлении отрезок, длина которого равна ω, мы будем иметь вектор $\boldsymbol{\omega}$, который называется *вектором угловой скорости*. Обозначив далее через $\mathbf{r}$ вектор, определенный отрезком $\overrightarrow{AM}$, и вспомнив определение векторного произведения, получим без труда следующее выражение для скорости $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

ибо величина векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ равна

$$|\mathbf{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\sin(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \omega \cdot |\overrightarrow{MA}| \cdot \sin\varphi = \omega \cdot |MP| = |\mathbf{v}|,$$

а направление совпадает с направлением $\mathbf{v}$.

Как известно из кинематики, при любом движении твердого тела, имеющего неподвижную точку O, скорости точек тела в каждый данный момент таковы, как будто бы тело вращалось вокруг некоторой оси, проходящей через точку O (мгновенная ось) с некоторой угловой скоростью ω (мгновенная угловая скорость); положение оси вращения и величина ω, вообще говоря, будут меняться с течением времени. Согласно сказанному выше, *в каждый данный момент скорость точки твердого тела определяется векторным произведением вектора мгновенной угловой скорости на вектор* $\overrightarrow{OM}$.

Рассмотрим другой пример. Пусть к точке M приложена сила, изображенная вектором $\mathbf{F}$, и пусть A есть некоторая точка пространства (рис. 86).

Моментом силы $\mathbf{F}$ *относительно точки* B называется векторное произведение $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ есть вектор, имеющий начало в точке M и конец в точке A. Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую, на которой лежит сила $\mathbf{F}$. Из прямоугольного треугольника AMP получим

$$|\overrightarrow{AP}| = |\mathbf{r}|\,|\sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})|$$

и, следовательно, *величина момента силы* $\mathbf{F}$ относительно точки A будет

$$|\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}|\,|\sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})| = |\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AP}|,$$

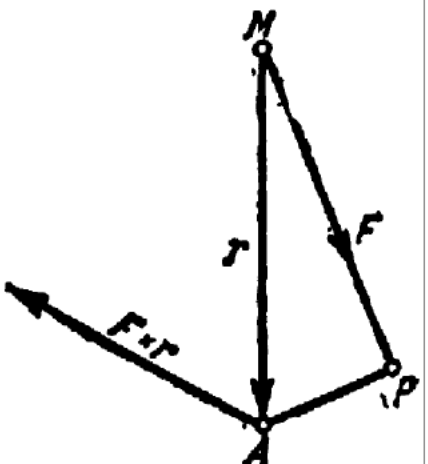


Рис. 86.

т. е. *равна произведению из величины силы на расстояние точки* A *до прямой, на которой лежит сила*. Направление момента определяется по вышеуказанному правилу определения направления векторного произведения. Из сказанного вытекает, между прочим, что момент силы не меняется при перемещении точки ее приложения M по прямой, на которой лежит сила. Вместо момента силы относительно точки можно, очевидно, говорить о моменте любого вектора.

Выведем выражения слагающих момента. Пусть (a, b, c) — координаты точки A и (x, y, z) — координаты точки M. Слагающие вектора $\mathbf{r}$ будут

$$a-x, \quad b-y, \quad c-z.$$

Пользуясь выражением слагающих векторного произведения, получим следующие слагающие момента:

$$(y-b)F_z-(z-c)F_y, \quad (z-c)F_x-(x-a)F_z, \quad (x-a)F_y-(y-b)F_x.$$

Возвращаясь к примеру вращения твердого тела вокруг оси, можем сказать, что скорость точки M твердого тела равна моменту вектора угловой скорости относительно точки M. Обозначая через (x, y, z) координаты этой точки, через (x_0, y_0, z_0) — координаты начала вектора угловой скорости и через O_x, O_y, O_z — слагающие этого вектора, получим следующие выражения слагающих скорости точки M:

$$(z-z_0)O_y-(y-y_0)O_z, \quad (x-x_0)O_z-(z-z_0)O_x,$$
$$(y-y_0)O_x-(x-x_0)O_y.$$

Определим теперь момент вектора относительно оси. Пусть в пространстве имеется некоторая прямая Δ, которой придано определенное направление (ось).

Моментом вектора $\mathbf{F}$ *относительно оси* Δ называется алгебраическая величина проекции на эту ось момента вектора $\mathbf{F}$ относительно какой-либо точки A оси Δ.

Чтобы доказать законность этого определения, выясним независимость указанной в определении проекции от положения точки A на оси Δ. Примем ось Δ за ось OZ и пусть $(0, 0, c)$ — координаты точки A и (x, y, z) — координаты начала M вектора $\mathbf{F}$. При таком выборе координатных осей проекция на ось Δ момента вектора $\mathbf{F}$ относительно точки A совпадает со слагающей его по оси OZ и, в силу предыдущих формул, будет равна xF_y-yF_x, так как $a=b=0$. Эта разность не зависит от c, т. е. от положения точки A на оси Δ.

§ 11. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

119. Дифференцирование вектора. Обобщим понятие дифференцирования на случай переменного вектора $\mathbf{A}(\tau)$, зависящего от некоторого численного параметра τ. Будем откладывать вектор от некоторой определенной точки — например начала координат O (рис. 87). При изменении параметра τ конец переменного вектора $\mathbf{A}(\tau)$ опишет некоторую кривую (L). Пусть OM_1 и OM — положения переменного вектора при значениях $(\tau+\Delta\tau)$ и τ параметра. Отрезку MM_1 соответствует разность $\mathbf{A}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{A}(\tau)$, и отношение

$$\frac{\mathbf{A}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{A}(\tau)}{\Delta\tau}$$

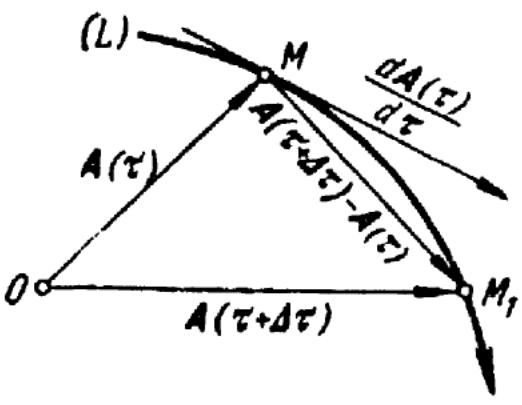


Рис. 87.

дает некоторый вектор, параллельный отрезку MM_1. Предельное положение этого вектора при $\Delta\tau\to 0$, если

оно существует, и будет представлять собою производную

$$\frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\mathbf{A}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{A}(\tau)}{\Delta\tau}. \tag{22}$$

Эта производная есть очевидно вектор, направленный по касательной к кривой (L) в точке M. Он также зависит от τ, и его производная по τ дает вторую производную $\frac{d^2\mathbf{A}(\tau)}{d\tau^2}$ и т. д.

Разложим вектор $\mathbf{A}(\tau)$ по трем основным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{A}(\tau) = A_x(\tau)\,\mathbf{i} + A_y(\tau)\,\mathbf{j} + A_z(\tau)\,\mathbf{k}.$$

Определение (22) даст тогда

$$\frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau} = \frac{dA_x(\tau)}{d\tau}\,\mathbf{i} + \frac{dA_y(\tau)}{d\tau}\,\mathbf{j} + \frac{dA_z(\tau)}{d\tau}\,\mathbf{k} \tag{23}$$

и вообще

$$\frac{d^m\mathbf{A}(\tau)}{d\tau^m} = \frac{d^mA_x(\tau)}{d\tau^m}\,\mathbf{i} + \frac{d^mA_y(\tau)}{d\tau^m}\,\mathbf{j} + \frac{d^mA_z(\tau)}{d\tau^m}\,\mathbf{k}, \tag{23$_1$}$$

т. е. *дифференцирование вектора сводится к дифференцированию слагающих этого вектора.*

Известное правило дифференцирования произведения обобщается на случай произведения скаляра на вектор, а также и на случай скалярного и векторного произведений, так что имеют место формулы:

$$\frac{d}{d\tau}\{f(\tau)\,\mathbf{A}(\tau)\} = \frac{df(\tau)}{d\tau}\,\mathbf{A}(\tau) + f(\tau)\,\frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{d\tau}\,\mathbf{A}(\tau)\cdot\mathbf{B}(\tau) = \frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau}\cdot\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{A}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{B}(\tau)}{d\tau}, \tag{24$_1$}$$

$$\frac{d}{d\tau}\,\mathbf{A}(\tau)\times\mathbf{B}(\tau) = \frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{A}(\tau)\times\frac{d\mathbf{B}(\tau)}{d\tau}, \tag{24$_2$}$$

где $f(\tau)$ — скаляр, $\mathbf{A}(\tau)$ и $\mathbf{B}(\tau)$ — векторы, зависящие от τ. Проверим, например, формулу (24$_1$). Левая часть ее представляется в виде

$$\frac{d}{d\tau}\{A_x(\tau)B_x(\tau) + A_y(\tau)B_y(\tau) + A_z(\tau)B_z(\tau)\} =$$
$$= \frac{dA_x(\tau)}{d\tau}B_x(\tau) + \frac{dA_y(\tau)}{d\tau}B_y(\tau) + \frac{dA_z(\tau)}{d\tau}B_z(\tau) + A_x(\tau)\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} +$$
$$+ A_y(\tau)\frac{dB_y(\tau)}{d\tau} + A_z(\tau)\frac{dB_z(\tau)}{d\tau}.$$

Тот же результат получим, как нетрудно видеть, и для правой части. Считается, конечно, что производные, о которых идет речь, существуют. В формулах (24), (24$_1$), (24$_2$) из существования производных

от сомножителей вытекает существование производных и у произведения [ср. I, 47]. Совершенно элементарно доказывается обычное правило дифференцирования суммы векторов. Если точка M движется по некоторой кривой (L), то радиус-вектор $\mathbf{r}$ этой точки есть функция времени t. Дифференцируя радиус-вектор по t, получим вектор скорости движущейся точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{25}$$

Длина этого вектора будет равна производной от пути s по времени t, а направление будет касательно кривой (L). Полученный вектор скорости также зависит от времени и, дифференцируя его, получим вектор ускорения $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Если мы примем за независимую переменную длину кривой s, *то производная от* $\mathbf{r}$ *по* s *будет представляться единичным вектором касательной* $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, т. е. вектором длины единица, направленным по касательной. Действительно, в [I, 70] мы имели $\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \to 1$, т. е. отношение длины хорды к длине соответствующей дуги стремится к единице. То же справедливо, очевидно, и для кривых в пространстве [I, 160]. Из этого факта и определения (22) при $\tau = s$ непосредственно вытекает, что длина упомянутого выше вектора касательной действительно равна единице.

120. Скалярное поле и его градиент. Если некоторая физическая величина имеет определенное значение в каждой точке пространства или части пространства, то таким путем определяется поле этой величины. Если данная величина есть скаляр (температура, давление, электростатический потенциал), то и поле ее называется *скалярным*. Если же данная величина есть вектор (скорость, сила), то поле, ею определяемое, называется *векторным* [112].

Начнем с исследования скалярного поля. Для задания такого поля достаточно определить функцию точки $U(M) = U(x, y, z)$.

Так, например, нагретое тело дает скалярное поле температуры. В каждой точке M тела температура $U(M)$ имеет определенное значение, которое может меняться от точки к точке.

Возьмем определенную точку и проведем через нее прямую, причем придадим этой прямой определенное направление (l) (рис. 88). Рассмотрим значение функции $U(M)$ в самой точке M и в близкой к ней точке M_1 на взятой прямой (l). Предел отношения

$$\frac{U(M_1) - U(M)}{MM_1},$$

если он существует, называется *производной от функции* $U(M)$ *по направлению* (l) и обозначается так:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\overline{MM_1}}. \tag{26}$$

Эта производная характеризует быстроту изменения функции $U(M)$ в точке M в направлении (l). Отметим, что число $\overline{MM_1}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Если направление от M и M_1 совпадает с направлением (l), то это число положительно. При замене направления (l) противоположным (l') число $\overline{MM_1}$ меняет знак, и производная по направлению (l') лишь знаком отличается от производной по направлению (l). Будем считать, что в каждой точке M некоторой области ω функция $f(M)$ имеет производную по любому направлению и что производная по любому фиксированному направлению (l) есть непрерывная функция точки M в ω. Дальнейшие рассуждения будут относиться к упомянутой области.

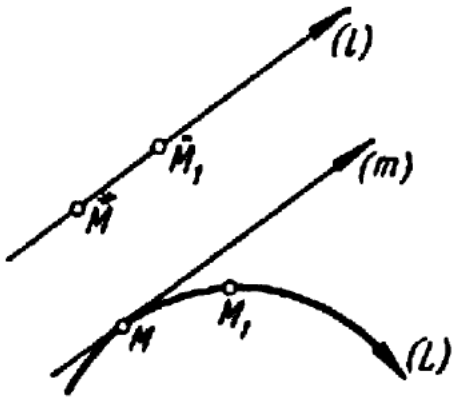


Рис. 88.

Как мы видим, функция $U(M)$ имеет в каждой точке бесчисленное множество производных, но нетрудно показать, что производная по любому направлению выражается через производные по трем взаимно перпендикулярным направлениям X, Y, Z по формуле

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos(l, X) + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos(l, Y) + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos(l, Z). \tag{27}$$

Заметим прежде всего, что при составлении производной (26) мы могли бы проводить через точку M не прямую, а какую-нибудь направленную кривую (L) (рис. 88). Вместо формулы (26) нам надо было бы рассматривать предел

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\smile MM_1}.$$

Этот предел есть очевидно не что иное, как производная от функции $U(M)$ по длине дуги s взятой кривой (L), и, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, мы можем написать

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\smile MM_1} = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}. \tag{28}$$

Но, как известно [I, 160], $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ суть направляющие косинусы касательной к линии (L) в точке M, и в случае, когда (L) есть прямая, мы и получаем как раз формулу (27). Кроме того, формула (28)

показывает, что производная по кривой совпадает с производной по направлению (m), касательному к кривой в точке M.

Введем теперь в рассмотрение *поверхности уровня* нашего скалярного поля. Эти поверхности характеризуются тем условием, что во всех точках такой поверхности функция $U(M)$ сохраняет одно и то же постоянное значение C. Придавая этой постоянной различные численные значения, получим семейство поверхностей уровня $U(M)=C$. Будем считать, что через каждую точку M некоторой области ω проходит гладкая поверхность уровня. Для случая нагретого тела поверхности уровня суть поверхности равной температуры. Пусть (S) есть поверхность уровня, проходящая через точку M (рис. 89). Введем в этой точке три взаимно перпендикулярных направления: направление (n), нормальное к поверхности (S), и два направления (t_1) и (t_2), лежащих в касательной плоскости. Направления (t_1) и (t_2) являются касательными к некоторым кривым (L_1) и (L_2), лежащим на поверхности уровня. Вдоль этих кривых функция $U(M)$ сохраняет постоянное значение, а потому

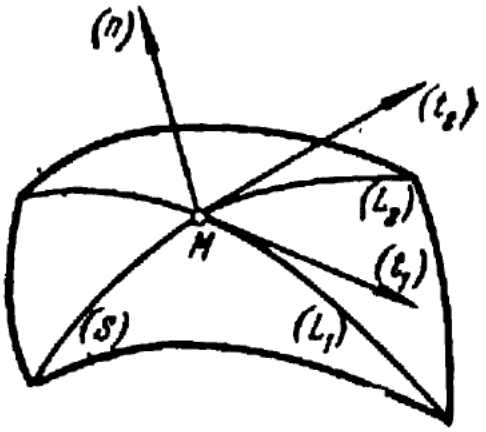


Рис. 89.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial t_1}=\frac{\partial U(M)}{\partial t_2}=0. \tag{29}$$

Возьмем теперь любое направление (l). Применяя формулу (27) к трем взаимно перпендикулярным направлениям (n), (t_1) и (t_2) и принимая во внимание (29), будем иметь

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\frac{\partial U(M)}{\partial n}\cos(l,\ n). \tag{30}$$

Если мы отложим на направлении (n) вектор, равный $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$ с учетом знака $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$, то, согласно (30), проекция этого вектора на любое направление (l) дает производную $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$.

Построенный по вышеуказанному правилу вектор называется *градиентом функции* $U(M)$, т. е. *градиентом скалярного поля* называется векторное поле, построенное по следующему правилу: в каждой точке вектор направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня, а по алгебраической величине равен производной от функции $U(M)$ по направлению упомянутой нормали. Градиент скалярного поля $U(M)$ обозначается символом $\operatorname{grad} U(M)$, и формула (30) может быть записана в виде

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\operatorname{grad}_l U(M), \tag{31}$$

где $\operatorname{grad}_l U(M)$ есть проекция вектора $\operatorname{grad} U(M)$ на направление (l).

Нетрудно видеть, что выбор направления нормали (n) к поверхности уровня (S) не влияет на направление $\operatorname{grad} U(M)$. Этот вектор всегда направлен в ту сторону нормали к (S), куда функция $U(M)$ возрастает.

Отнесем пространство к декартовой системе координат XYZ. Вместо $U(M)$ можем писать $U(x, y, z)$, и величины проекций вектора $\operatorname{grad} U(x, y, z)$ на указанные оси равны частным производным функции $U(x, y, z)$ по x, y, z.

Упомянутое выше определение градиента с помощью поверхностей уровня может оказаться неприменимым, например, в таких точках, где поверхность уровня вырождается в точку или линию, а также если эта поверхность не имеет определенной касательной плоскости. Рассмотрим три функции: $U_1 = x^2 + y^2 + z^2$, $U_2 = x^2 + y^2$, $U_3 = x^2 + y^2 - 4xy$. В точке $(0, 0, 0)$ поверхность уровня U_1 вырождается в точку, U_2 — в линию (ось OZ), а уравнение $x^2 + y^2 - 4xy = 0$ есть совокупность двух плоскостей, проходящих через ось OZ, и в точках этой оси указанная поверхность уровня не имеет определенной касательной плоскости. Для всех трех функций частные производные первого порядка равны нулю в точке $(0, 0, 0)$, и в этих точках градиент указанных функций надо считать равным нулю (нулевой вектор).

Примеры. 1. Поле тяготения, которое мы рассматривали в [90], приводит к скалярному полю потенциала тяготения

$$U(M) = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu(M_1)\, dv}{r},$$

где $\mu(M_1)$ есть плотность материи, занимающей объем (v), и r — расстояние точки M до переменной точки M_1 интегрирования. Мы имели следующие выражения для слагающих силы тяготения:

$$F_x = \frac{\partial U(M)}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U(M)}{\partial z},$$

где F_x, F_y, F_z — составляющие вектора силы $\mathbf{F}$. Отсюда непосредственно следует, что вообще $F_l = \frac{\partial U(M)}{\partial l}$, т. е. векторное поле силы тяготения есть градиент *потенциала* $U(M)$. Работа силы тяготения выражается формулой

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = \int\limits_{(A)}^{(B)} dU(M) = U(B) - U(A),$$

т. е. работа эта выражается разностью потенциала в точках A и B.

Последним свойством обладает, очевидно, всякое консервативное силовое поле, т. е. такое поле, для которого $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U(M)$. Часто *потенциалом* называют не самую функцию $U(M)$, а $-U(M)$.

2. Если различные точки тела имеют различную температуру $U(M)$, то в поле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к ме-

нее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность и на ней малый элемент dS около точки M. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент dS за время dt, пропорционально $dt\,dS$ и нормальной производной температуры $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q = k\,dt\,dS\left|\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right|, \tag{32}$$

где k — коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом внутренней теплопроводности, а (n) — направление нормали к dS.

Построим вектор $-k\,\mathrm{grad}\,U(M)$, который называется вектором потока тепла; знак $(-)$ мы ставим в силу того, что тепло течет от более высоких температур к более низким, а вектор $\mathrm{grad}\,U(M)$ направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции $U(M)$. В силу формулы (32) можно сказать, что количество тепла ΔQ, проходящее за время dt через элемент dS, будет

$$\Delta Q = k\,dt\,dS\,|\,\mathrm{grad}_n\,U(M)\,|. \tag{33}$$

Отметим, что мы рассматриваем изотропное тело. Если оно однородно, то k — постоянная. При неоднородности тела k — функция точки.

121. Векторное поле; расходимость и вихрь. Обратимся теперь к рассмотрению *векторного поля* $\mathbf{A}(M)$. В каждой точке M той части пространства, где поле задано, $\mathbf{A}(M)$ есть определенный вектор. Например, при течении жидкости в каждый заданный момент времени мы имеем векторное поле скоростей $\mathbf{v}(M)$.

Векторной линией поля называется такая кривая (L), в каждой точке которой касательная имеет направление вектора $\mathbf{A}(M)$ (рис. 90). Совершенно так же, как и в [23], нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения векторных линий поля можно написать в виде

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}, \tag{34}$$

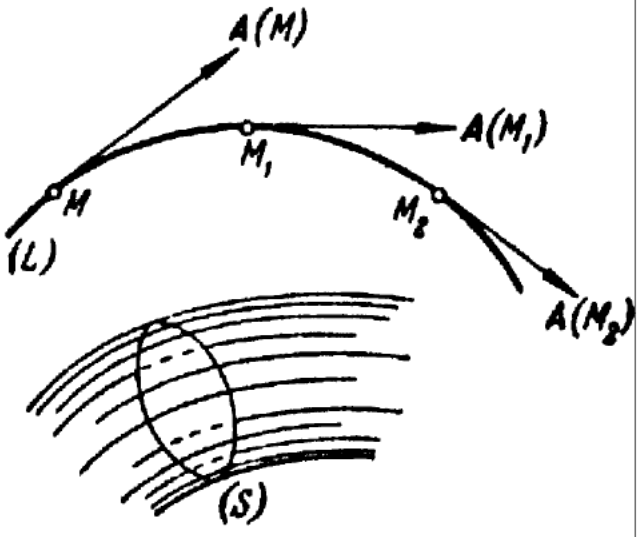


Рис. 90.

где составляющие A_x, A_y и A_z суть определенные функции x, y, z. В силу теоремы существования и единственности через каждую точку M, при соблюдении условий этой теоремы, будет проходить одна определенная векторная линия. Если провести все векторные линии, проходящие через точки некоторого куска поверхности (S), то их совокупность даст векторную трубку (рис. 90).

Выделим в векторном поле некоторый объем (v), и пусть (S) есть поверхность, ограничивающая этот объем, а (n) — направление нормали к (S), внешней по отношению к объему (v). Применим формулу Остроградского [66] к функциям A_x, A_y, A_z, считая, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого

порядка в области (v) вплоть до ее границы:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} [A_x \cos(n, X) + A_y \cos(n, Y) + A_z \cos(n, Z)]\, dS$$

или [114]:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS. \tag{35}$$

Интеграл по поверхности, стоящей в правой части равенства, называется *потоком поля через поверхность*. Физический смысл его будет выяснен в дальнейшем. Подынтегральная функция в объемном интеграле называется *расходимостью* (*дивергенцией*) *векторного поля*[1]) и обозначается символом div A:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{36}$$

Таким образом формулу Остроградского можно записать так:

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dv = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS, \tag{37}$$

т. е. *объемный интеграл от расходимости равен потоку поля через поверхность этого объема.* Определение расходимости (36) связано с выбором координатных осей X, Y, Z, но, пользуясь формулой (37), нетрудно дать другое определение расходимости, не связанное с выбором координатных осей. Окружим точку M небольшим объемом (v_1), и пусть (S_1) есть поверхность этого объема. Применяя формулу (37) и пользуясь теоремой о среднем [64], можем написать

$$\operatorname{div} \mathbf{A}\big|_{M_1} \cdot v_1 = \iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS, \quad \text{то есть} \quad \operatorname{div} \mathbf{A}\big|_{M_1} = \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS}{v_1},$$

где значение div A берется в некоторой точке M_1 объема (v_1), и v_1 есть величина этого объема. При беспредельном сжимании объема к точке M, точка M_1 будет стремиться к точке M, и предыдущая формула в пределе даст величину расходимости в самой точке M:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS}{v_1}, \tag{38}$$

---

[1]) div — первые три буквы французского слова divergence, что значит расходимость.

т. е. *расходимость поля в точке M есть предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему, ограниченному этой поверхностью.*

Предыдущие рассуждения показывают, что всякое векторное поле **A** дает некоторое скалярное поле div **A**, а именно поле своей расходимости. Мы покажем сейчас, что, пользуясь формулой Стокса, мы естественно придем кроме того и к некоторому векторному полю, порождаемому исходным полем **A**. Принимая

$$P = A_x, \quad Q = A_y, \quad R = A_z,$$

напишем формулу Стокса, считая, что функции A_x, A_y, A_z непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой области, внутри которой находится поверхность (S):

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz =$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos(n, X) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos(n, Y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos(n, Z)\right] dS. \qquad (39)$$

Пусть ds — направленный элемент дуги кривой (l), т. е. элемент дуги этой кривой, рассматриваемый как малый вектор. Его составляющие на оси будут dx, dy, dz, и выражение, стоящее под знаком криволинейного интеграла, представляет собою скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$, т. е. равно $A_s\, ds$, где A_s — проекция **A** на касательную к (l).

Введем вектор с составляющими в любой системе XYZ:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (40)$$

Можно показать, что это псевдовектор [116]. Он образует векторное поле, которое называется *вихрем поля* **A**, и его обозначают символом rot **A** или curl **A**[1]).

Формулу (39) при этом можно переписать так:

$$\int_{(l)} A_s\, ds = \iint_{(S)} [\mathrm{rot}_x \mathbf{A} \cos(n, X) + \mathrm{rot}_y \mathbf{A} \cos(n, Y) + \mathrm{rot}_z \mathbf{A} \cos(n, Z)]\, dS$$

или

$$\int_{(l)} A_s\, ds = \iint_{(S)} \mathrm{rot}_n \mathbf{A}\, dS, \qquad (41)$$

[1]) rot представляет собою три первые буквы французского слова rotation, что значит вращение, а curl есть английское слово, которое равносильно русскому термину „вихрь".

где $\mathrm{rot}_n\ \mathbf{A}$ — составляющая $\mathrm{rot}\ \mathbf{A}$ по нормали (n) к поверхности (S). Криволинейный интеграл, стоящий в левой части, называется обычно *циркуляцией вектора* $\mathbf{A}$ *вдоль контура* (l), и формулу Стокса можно формулировать так: *циркуляция поля вдоль контура некоторой поверхности равна интегралу по самой поверхности от нормальной составляющей вихря*, т. е. *равна потоку вихря через поверхность*. Формула (41) дает возможность дать определение вихря, не связанное с выбором координатных осей. Пусть (m) есть некоторое направление, проходящее через точку M, и (σ) — малая плоская площадка, проходящая через эту же точку нормально к (m). Применим к (σ) формулу (41) и воспользуемся теоремой о среднем (направление на границе (m) связано с ориентировкой осей):

$$\int\limits_{(\lambda)} A_s\,ds = \mathrm{rot}_m \mathbf{A}\,|_M\,\sigma, \text{ т. е. } \mathrm{rot}_m \mathbf{A}\,|_{M_1} = \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_s\,ds}{\sigma},$$

где (λ) есть контур (σ) и M_1 — некоторая точка этой площадки. Беспредельно сжимая площадку к точке M и переходя к пределу, получим, как и в случае расходимости, значение составляющей вихря на любое заданное направление (m) в точке M:

$$\mathrm{rot}_m \mathbf{A} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_s\,ds}{\sigma}. \tag{42}$$

В дальнейшем мы будем иметь многочисленные примеры применения понятий вихря и расходимости и выясним физический смысл этих понятий.

122. Потенциальное и соленоидальное поля. В [120] мы получили векторное поле $\mathrm{grad}\ U(M)$, являющееся градиентом некоторой скалярной функции $U(M)$. Такое векторное поле называется *потенциальным полем*. Не всякое векторное поле будет, конечно, полем потенциальным, и мы укажем сейчас необходимые и достаточные условия, при которых заданное векторное поле будет потенциальным. Соотношение $\mathbf{A} = \mathrm{grad}\ U(M)$ равносильно [120]

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x},\quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. равносильно тому, что выражение

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz \tag{43}$$

есть полный дифференциал некоторой функции. В [76] мы видели, что для этого необходимо и достаточно выполнение трех условий:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

Эти три условия в свою очередь равносильны равенству нулю вихря поля: $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, т. е. *для того, чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы вихрь этого поля равнялся нулю.* Если это условие выполнено, то, согласно [76], потенциал поля определяется в виде контурного интеграла

$$U(M) = \int_{(M_0)}^{(M)} A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \int_{(M_0)}^{(M)} A_s\,ds. \tag{44}$$

При этом $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U(M)$, и [76]

$$\int_{(A)}^{(B)} A_s\,ds = \int_{(A)}^{(B)} \operatorname{grad}_s U(M)\,ds = U(B) - U(A).$$

Может случиться, что выражение (43) не будет полным дифференциалом, но будет допускать интегрирующий множитель, т. е. будет существовать такая функция точки $\mu(M)$, что выражение

$$\mu(A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz) = dU \tag{45}$$

будет полным дифференциалом. Назовем такое поле *квазипотенциальным.* Как мы видели в [79], характерной особенностью такого поля будет существование семейства поверхностей $U(M) = C$, ортогональных к векторным линиям поля, причем из (45) следует, что $\mu\mathbf{A} = \operatorname{grad} U$ или

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} U,$$

т. е. поле $\mathbf{A}$ будет в этом случае отличаться от потенциального поля численным множителем $\frac{1}{\mu}$, имеющим в различных точках пространства различные значения.

Необходимое и достаточное условие квазипотенциальности поля выражается формулой [79]:

$$A_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + A_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + A_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0,$$

что можно написать так:

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \tag{46}$$

т. е. *необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям поля, является условие* (46), т. е. *перпендикулярность векторов* $\mathbf{A}$ *и* $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ *или равенство нулю* $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Заметим, что если пространство, занятое полем, многосвязно, то потенциал поля, определяемый по формуле (44), может оказаться многозначной функцией [76].

Выше мы исследовали векторное поле, у которого вихрь равен нулю, и обнаружили, что такое поле есть поле потенциальное. Векторное поле $\mathbf{A}$, у которого расходимость равна нулю, т. е. выполнено тождественное условие $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, называется *соленоидальным*. В силу формулы (37) для такого поля имеем

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS=0, \tag{47}$$

где (S) — произвольная замкнутая поверхность, внутри которой наше поле везде существует.

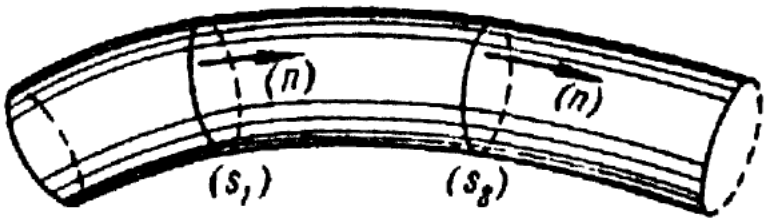


Рис. 91.

Примем за поверхность (S) часть некоторой векторной трубки, выделенную двумя ее сечениями (S_1) и (S_2) (рис. 91). На боковой поверхности трубки $A_n=0$, так как $\mathbf{A}$ находится в касательной плоскости к этой боковой поверхности. Если для сечений (S_1) и (S_2) возьмем направление нормали (n) в одну и ту же сторону по отношению к движению вдоль трубки, то на одном сечении (S_1) это будет внутренняя нормаль, а на другом (S_2) — внешняя по отношению к выделенной части векторной трубки. Применяя к ней формулу (47), будем иметь

$$\iint\limits_{(S_2)} A_n\,dS-\iint\limits_{(S_1)} A_n\,dS=0,$$

причем знак $(-)$ в интеграле по (S_1) вызван тем обстоятельством, что на (S_1) направление (n) противоположно направлению внешней нормали. Предыдущее равенство показывает, что интеграл

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS \tag{48}$$

в случае соленоидального поля имеет одно и то же значение для всех сечений (S) векторной трубки. Он дает поток поля через сечение (S) и называется обычно *напряжением векторной трубки в сечении* (S). Таким образом *для соленоидального поля напряжение имеет одно и то же значение во всех сечениях векторной трубки.* Если при движении вдоль векторной трубки площадь ее сечения увеличивается, т. е. векторная трубка расширяется, то интенсивность потока, т. е. величина A_n, вообще говоря, уменьшается так, что величина интеграла (48) остается неизменной.

123. Направленный элемент поверхности. Подобно направленному элементу кривой [121], можно ввести в рассмотрение направленный элемент поверхности $d\mathbf{S}$. Положим, что мы различили на данной поверхности две стороны, так что в каждой точке поверх-

ности имеются два взаимно противоположных направления нормали, связанных с той или другой стороной поверхности, причем в случае непрерывного движения по поверхности направление нормали, определенное с той или другой стороны поверхности, будет изменяться непрерывно [67]. В случае замкнутой поверхности имеются внутренняя и внешняя нормали по отношению к объему, ограниченному поверхностью. *Направленным элементом* $d\mathbf{S}$ *поверхности* назовем вектор, длина которого равна площади dS элемента, а направление совпадает с определенным направлением нормали (n) к этому элементу. В случае замкнутой поверхности условимся принимать за таковое направление внешней нормали, а для внутренней нормали вместо (n) будем писать (n_1).

Проекции вектора $d\mathbf{S}$ на координатные оси будут давать проекции элемента площади поверхности на соответствующие координатные плоскости со знаком плюс или минус, смотря по тому, будет ли угол, образованный (n) с координатной осью, острым или тупым.

Пусть $f(M)$ есть некоторая скалярная функция и $\mathbf{A}(M)$ — вектор, определенные на поверхности (S). Составим выражения

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\, d\mathbf{S}, \tag{49}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}, \tag{49_1}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}(M) \times d\mathbf{S}. \tag{49_2}$$

Первое из них есть вектор, составляющие которого суть

$$\iint\limits_{(S)} f(M) \cos(n, X)\, dS, \quad \iint\limits_{(S)} f(M) \cos(n, Y)\, dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(M) \cos(n, Z)\, dS.$$

Выражение (49_1) есть скаляр

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS$$

и, наконец, выражение (49_2) есть вектор с составляющими

$$\iint\limits_{(S)} [A_y \cos(n, Z) - A_z \cos(n, Y)]\, dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_z \cos(n, X) - A_x \cos(n, Z)]\, dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_x \cos(n, Y) - A_y \cos(n, X)]\, dS.$$

Пусть (S) — замкнутая поверхность и (v) — объем, ею ограниченный, причем $f(M)$ и $\mathbf{A}(M)$ определены во всем объеме. Пользуясь формулой Остроградского, нетрудно проверить следующие три равенства:

$$\iint\limits_{(S)} f\,d\mathbf{S} = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{grad} f\,dv, \tag{50}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\mathbf{A}\,dv, \tag{50_1}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}\times d\mathbf{S} = -\iiint\limits_{(v)} \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dv. \tag{50_2}$$

Равенство (50_1) совпадает с формулой (37). Проверим еще равенство (50_2). Слагающие по оси OX левой и правой частей выражаются интегралами

$$\iint\limits_{(S)} [A_y\cos(n, Z) - A_z\cos(n, Y)]\,dS, \qquad -\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dv,$$

которые совпадают по величине, в чем нетрудно убедиться преобразованием тройного интеграла по формуле Остроградского.

Совершенно аналогично, пользуясь формулой Стокса и направленным элементом поверхности, можем написать следующие формулы:

$$\int\limits_{(l)} f\,ds = -\iint\limits_{(S)} \operatorname{grad} f\times d\mathbf{S}, \tag{51}$$

$$\int\limits_{(l)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}. \tag{51_1}$$

Здесь (S) — некоторая поверхность и (l) — ее контур. Вторая из этих формул совпадает с формулой (41), так как в силу определения скалярного произведения $\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \operatorname{rot}_n A\,dS$. Для формулы (51) составляющие левой и правой частей на ось OX будут

$$\int\limits_{(l)} f\,dx; \qquad -\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n, Z) - \frac{\partial f}{\partial z}\cos(n, Y)\right] dS;$$

пользуясь формулой (22) из [73], нетрудно показать, что эти выражения равны.

124. Некоторые формулы векторного анализа. Укажем некоторые соотношения, связывающие введенные нами векторные операции. В [122] мы видели, что вихрь потенциального поля равен нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0. \tag{52}$$

Нетрудно проверить, что вихревое поле имеет расходимость, равную нулю, т. е.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0. \tag{53}$$

Действительно,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0.$$

Введем еще в рассмотрение расходимость потенциального поля

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{grad}_x U+\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{grad}_y U+\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{grad}_z U,$$

или

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{54}$$

Дифференциальный оператор

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{55}$$

называется *оператором Лапласа*. Из левой части (54) видно, что он не зависит от выбора координатных осей. Применяя формулу (38) к вектору $\operatorname{grad}U$, получим определение ΔU в точке M в виде

$$\Delta U=\lim_{(v_1)\to M}\frac{\iint\limits_{(S_1)}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS}{v_1}. \tag{56}$$

Мы определили ΔU для случая, когда U — скаляр. Символ $\Delta\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторное поле, означает вектор, составляющие которого суть ΔA_x, ΔA_y и ΔA_z. Укажем еще следующие формулы:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}, \tag{57}$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A})=f\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{grad}f\cdot\mathbf{A}, \tag{57_1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}, \tag{57_2}$$

$$\operatorname{rot}f\mathbf{A}=\operatorname{grad}f\times\mathbf{A}+f\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{57_3}$$

$$\Delta(\varphi\psi)=\psi\Delta\varphi+\varphi\Delta\psi+2\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi. \tag{57_4}$$

Мы проверим лишь первую из этих формул, предоставляя проверку остальных читателю. Возьмем составляющую по оси OX вектора, стоящего в левой части (57), и покажем, что она совпадает с составляющей вектора, стоящего в правой части:

$$\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{rot}_z\mathbf{A}-\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{rot}_y\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

откуда, открывая скобки и прибавляя и вычитая $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$,

$$\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta A_x,$$

что и требовалось доказать. Заметим при этом, что из формулы (57) следует независимость $\Delta\mathbf{A}$ от выбора осей, ибо

$$\Delta\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

125. Движение твердого тела и малая деформация. В [118] мы видели, что при вращении твердого тела вокруг точки O скорость любой точки выражается формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{o} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{o}$ — вектор мгновенной угловой скорости и $\mathbf{r}$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Самый общий случай движения твердого тела мы получим, придавая ему еще переносное движение со скоростью $\mathbf{v}_0$, и при этом полная скорость выразится формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{o} \times \mathbf{r}. \tag{58}$$

Найдем теперь обратно — вектор угловой скорости по заданному полю скоростей $\mathbf{v}$. Заметим прежде всего, что векторы $\mathbf{v}_0$ одинаковы в данный момент для всех точек тела, а потому они не зависят от (x, y, z). Мы имеем тогда по формуле (40) $\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 = 0$.

Пусть p, q, r — составляющие $\mathbf{o}$ относительно осей, имеющих начало в O. Составляющие векторного произведения $\mathbf{o} \times \mathbf{r}$ будут: $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, так что согласно (40) составляющие $\operatorname{rot}(\mathbf{o} \times \mathbf{r})$ будут $2p$, $2q$, $2r$, а потому вектор угловой скорости выразится через $\mathbf{v}$ в виде

$$\mathbf{o} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{59}$$

Отсюда и самое название вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ — вращение вектора скорости.

Если помножим вектор скорости $\mathbf{v}$ на величину dt малого промежутка времени, то получится вектор $\mathbf{v}\,dt$, который будет давать приближенно смещение точки за малый промежуток времени dt. Таким образом получим векторное поле малых смещений точек твердого тела:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\,dt.$$

Обращаясь к формуле (58) и считая, что переносное движение отсутствует, т. е. что точка O закреплена, получим следующую формулу для вектора смещения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{o}_1 \times \mathbf{r}, \tag{60}$$

где $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}\,dt$ есть малый вектор, направленный по оси вращения и равный малому углу поворота за промежуток времени dt. Пусть p_1, q_1, r_1 — составляющие этого вектора и (x, y, z) — координаты переменной точки твердого тела. Составляющие вектора $\mathbf{A}$ будут

$$A_x = q_1 z - r_1 y, \quad A_y = r_1 x - p_1 z, \quad A_z = p_1 y - q_1 x.$$

Отсюда, как и выше, нетрудно выразить вектор малого поворота через вектор смещения

$$\mathbf{o}_1 = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{61}$$

Кроме того, последние формулы показывают, что составляющие вектора $\mathbf{A}$ суть линейные однородные функции координат (x, y, z).

Рассмотрим теперь общий случай линейной однородной деформации, при которой составляющие вектора смещения суть линейные однородные функции координат:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ A_y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ A_z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Коэффициенты a, b и c будем считать малыми и ограничимся рассмотрением малого объема (v) вблизи начала координат. Всякая точка этого объема сместится на вектор $\mathbf{A}$ и ее новые координаты после преобразования будут:

$$\xi = x + A_x, \quad \eta = y + A_y, \quad \zeta = z + A_z,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1 + a_1)\, x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta &= a_2 x + (1 + b_2)\, y + c_2 z, \\ \zeta &= a_3 x + b_3 y + (1 + c_3)\, z. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Такое преобразование будет только в частных случаях сводиться к вращению объема (v), как твердого целого вокруг O. В общем случае оно будет связано и с деформацией этого объема, т. е. с изменением расстояний между его точками. Выясним несколько подробнее это обстоятельство.

Составляющие вихря вектора смещения $\mathbf{A}$ согласно (62) будут: $b_3 - c_2$, $c_1 - a_3$, $a_2 - b_1$. Если бы преобразование сводилось к вращению элементарного объема, как целого, то мы получили бы вектор смещения $\mathbf{A}^{(1)}$ с составляющими

$$A_x^{(1)} = \frac{1}{2}(c_1 - a_3) z - \frac{1}{2}(a_2 - b_1) y, \quad A_y^{(1)} = \frac{1}{2}(a_2 - b_1) x - \frac{1}{2}(b_3 - c_2) z,$$

$$A_z^{(1)} = \frac{1}{2}(b_3 - c_2) y - \frac{1}{2}(c_1 - a_3) x.$$

Вычитая этот вектор из $\mathbf{A}$, представим этот последний в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)}, \tag{64}$$

где вектор чистой деформации $\mathbf{A}^{(2)}$ имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} A_x^{(2)} &= a_1 x + \frac{1}{2}(b_1 + a_2) y + \frac{1}{2}(c_1 + a_3) z, \\ A_y^{(2)} &= \frac{1}{2}(b_1 + a_2) x + b_2 y + \frac{1}{2}(c_2 + b_3) z, \\ A_z^{(2)} &= \frac{1}{2}(c_1 + a_3) x + \frac{1}{2}(c_2 + b_3) y + c_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Нетрудно видеть, что этот вектор будет потенциальным вектором, а именно:

$$A^{(2)} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} [a_1 x^2 + b_2 y^2 + c_3 z^2 + (b_1 + a_2)\, xy + (c_1 + a_3)\, xz + (c_2 + b_3)\, yz],$$

и, очевидно, вихрь этого вектора будет нуль.

Определим теперь изменение элементарного объема в результате деформации. После деформации новый объем будет выражаться интегралом

$$v_1 = \iiint\limits_{(v)} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Совершая замену переменных по формуле из [63], должны будем заменить

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \{(1 + a_1)[(1 + b_2)(1 + c_3) - c_2 b_3] + b_1 [c_2 a_3 - a_2 (1 + c_3)] + \\ + c_1 [a_2 b_3 - (1 + b_2)\, a_3]\}\, dx\, dy\, dz.$$

Раскрывая скобки и удерживая лишь свободный член и первые степени малых коэффициентов a, b и c, получим

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = [1 + (a_1 + b_2 + c_3)]\, dx\, dy\, dz,$$

и предыдущая формула дает

$$v_1 = \iiint\limits_{(v)} [1 + (a_1 + b_2 + c_3)]\, dx\, dy\, dz = v + (a_1 + b_2 + c_3)\, v,$$

где v — величина объема до деформации. Коэффициент кубического изменения будет

$$\frac{v_1 - v}{v} = a_1 + b_2 + c_3,$$

но нетрудно видеть, в силу (62), что сумма, стоящая справа, есть div **A**, т. е. *расходимость поля смещений дает коэффициент кубического изменения.*

126. Уравнение непрерывности. Пусть **v** означает скорость течения жидкости. Вычислим количество жидкости, протекающей через данную поверхность (S) (рис. 92). Пусть dS — малый элемент поверхности. Частицы, занимавшие в момент t положение dS, за промежуток времени dt передвинутся на отрезок $\mathbf{v}\,dt$, и таким образом за этот промежуток времени через dS протечет количество жидкости dQ, занимающее объем цилиндра с основанием dS и образующей $\mathbf{v}\,dt$. Высота этого цилиндра равна, очевидно, $v_n dt$, где v_n есть проекция **v** на нормаль (n) к поверхности, а потому

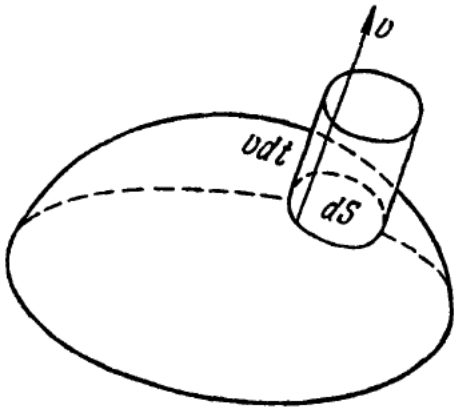


Рис. 92.

$$dQ = \rho v_n\, dt\, dS,$$

где ρ есть плотность жидкости. Величина dQ получится отрицательной, если угол (n, v) окажется тупым. В случае замкнутой поверхности направление (n) совпадает с направлением внешней нормали поверхности, и величина dQ получится отрицательной, если жидкость втекает в объем, ограниченный этой поверхностью, через площадку dS. Общее количество жидкости, вытекающей через поверхность, отнесенное к единице времени, будет

$$Q = \iint\limits_{(S)} \rho v_n\, dS, \tag{66}$$

при этом втекающая жидкость подсчитывается этой формулой со знаком минус.

Количество жидкости, занимающей объем (v), ограниченный (S), выражается интегралом

$$\iiint\limits_{(v)} \rho\, dv,$$

и за время dt это количество изменит свою величину на

$$dt \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv,$$

а потому отнесенное к единице времени приращение количества жидкости будет

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv,$$

а количество вытекающей жидкости выразится тем же интегралом, но с обратным знаком, так что для Q получим два выражения

$$Q = \int\limits_{(S)}\int \rho v_n \, dS = -\int\limits_{(v)}\int\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv,$$

или, согласно формуле (37),

$$Q = \int\limits_{(v)}\int\int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dv = -\int\limits_{(v)}\int\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv,$$

причем мы оставляем плотность ρ под знаком расходимости, так как она может быть переменной, т. е. зависеть от положения точки. Последняя формула дает нам соотношение, справедливое для любого объема внутри жидкости:

$$\int\limits_{(v)}\int\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\right] dv = 0.$$

В [74] мы показали, что если двойной интеграл по любой области от некоторой непрерывной функции равен нулю, то эта функция тождественно равна нулю. То же доказательство годится и для тройного интеграла. Отсюда следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{67}$$

Это соотношение, связывающее плотность и вектор скорости любой жидкости, сжимаемой или нет, называется *уравнением непрерывности*. Соотношение (67) может быть записано иначе, если мы учтем изменение плотности ρ жидкой частицы, причем $\rho(t, x, y, z)$ есть плотность частицы, которая в момент t имела координаты (x, y, z). Плотность этой частицы зависит от t как непосредственно, так и через посредство (x, y, z), поскольку частица движется и ее координаты зависят от t. Полная производная от ρ по t будет

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

что можно записать и так:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z,$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho \cdot \mathbf{v}. \tag{68}$$

Мы можем переписать равенство (67), пользуясь (57_1), в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

т. е., в силу (68),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{69}$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Таким образом *расходимость поля скоростей* $\mathbf{v}$ *дает относительное изменение плотности элемента жидкости, находящегося в данном месте, — изменение, отнесенное к единице времени.*

Если жидкость несжимаема, то это изменение должно равняться нулю, и мы получим из (69) условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{70}$$

Мы вывели условие непрерывности путем подсчета количества жидкости, вытекающей из объема, подсчета, произведенного двумя способами. При этом предполагается, конечно, что в объеме нет источников жидкости — ни положительной, ни отрицательной силы (сток).

Если течение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциально, т. е. вектор $\mathbf{v}$ есть потенциальный вектор

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то φ называется потенциалом скорости. Подставляя в уравнение (70), получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{71}$$

т. е. *потенциал скорости для случая несжимаемой жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа* (71).

127. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Под идеальной жидкостью мы будем подразумевать такую деформируемую сплошную среду, в которой внутренние силы — находится ли она в состоянии равновесия или движения — приводятся к нормальному давлению, так что если выделить в этой среде некоторый объем (v), ограниченный поверхностью (S), то действие на него остальной части среды приводится к силе, направленной в каждой точке (S) по внутренней нормали. Обозначим величину этой силы (давление), отнесенную на единицу площади, буквой p. В каждый данный момент давление $p(M)$ дает некоторое скалярное поле. Равнодействующая сил давления на поверхности объема (v) выразится, в силу (50), интегралом

$$-\iint_{(S)} p \, d\mathbf{S} = -\iiint_{(v)} \operatorname{grad} p \, dv,$$

где знак $(-)$ поставлен потому, что положительное давление действует в направлении внутренней нормали, а вектор $d\mathbf{S}$ по условию направлен по внешней нормали.

Применяя принцип Даламбера, мы должны уравновесить силу давления внешними силами, которые мы относим к единице массы и обозначаем $\mathbf{F}$, что дает в объеме (v) равнодействующую

$$\iiint_{(v)} \rho \mathbf{F} \, dv,$$

и, наконец, силою инерции, которая на элемент массы будет $-\rho \, dv \, \mathbf{W}$, где ρ — плотность, $\mathbf{W}$ — вектор ускорения жидкой частицы. На объем (v) сила инерции будет

$$-\iiint_{(v)} \rho \mathbf{W} \, dv.$$

Итак, согласно принципу Даламбера, мы должны иметь

$$\iiint_{(v)} [\rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p - \rho \mathbf{W}] \, dv = 0,$$

откуда, в силу произвольности (v), как и выше, можно заключить, что подынтегральная функция равна нулю, и тогда получим

$$\rho \mathbf{W} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p. \tag{72}$$

В этой формуле заключаются три уравнения, которые являются основными уравнениями гидродинамики идеальной жидкости.

Пусть u, v, w — составляющие вектора скорости, выраженные как функции координат точек (x, y, z) и времени t. Слагающая вектора ускорения $\mathbf{W}$ по оси OX будет равна полной производной по времени от составляющей $u(t, x, y, z)$ вектора скорости, так что мы можем написать

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

или

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w.$$

Совершенно так же

$$W_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w,$$

$$W_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w.$$

Таким образом векторное уравнение (72) приведет нас к трем уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Это — так называемые *уравнения гидродинамики в форме Эйлера*. К этим уравнениям надо присоединить еще уравнение непрерывности, которое мы вывели в предыдущем номере. Пользуясь настоящими обозначениями, можем переписать уравнение (69) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}u + \frac{\partial \rho}{\partial y}v + \frac{\partial \rho}{\partial z}w + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{74}$$

Характерной особенностью написанных уравнений является то обстоятельство, что при исследовании движения мы выбрали за независимые переменные координаты точки пространства (x, y, z) и время t. В некоторых случаях вместо координат точек пространства (x, y, z) за независимые переменные выбирают координаты того положения жидкой частицы, которое она имела в начальный момент времени. При таком выборе независимых переменных уравнения гидродинамики, конечно, будут выглядеть иначе. Уравнения (73) и (74) — четыре уравнения, содержащие пять неизвестных функций (u, v, w, ρ, p). К этой системе надо добавить еще одно уравнение. Можно считать, например, что плотность постоянна или что имеется определенная зависимость между плотностью и давлением $p = f(\rho)$ (уравнение состояния).

128. Уравнения распространения звука. Уравнения (72) или (73) имеют место не только для жидкости в тесном смысле слова, но и для газа. Существенным является лишь гипотеза о том, что внутренняя сила сводится к одному давлению. Будем считать движение настолько малым, чтобы в левых частях уравнений (73) можно было пренебречь членами, содержащими произведение скоростей на их производные по координатам. При этом уравнения (73) перепишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{75}$$

или в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{76}$$

Точно так же, отбрасывая в уравнении (74) члены с произведениями проекций скорости на производные от плотности по координатам, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{77}$$

Пусть ρ_0 — постоянная плотность среды в состоянии покоя. Введем малую величину s, характеризующую относительное изменение плотности при движении и определяемую равенством

$$\rho = \rho_0 (1 + s).$$

Отсюда

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{ds}{1+s} \sim ds,$$

причем в знаменателе $(1 + s)$ мы отбрасываем малую величину s. В силу написанного, можно считать $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$, и равенство (77) дает

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{78}$$

Можно считать, что градиент давления пропорционален градиенту величины s, характеризующей сжатие или разрежение, т. е.

$$\operatorname{grad} p = e \operatorname{grad} s,$$

где e — коэффициент упругости среды. Подставляя это в уравнение (76) и считая в этом уравнении $\rho = \rho_0$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{e}{\rho_0} \operatorname{grad} s.$$

Возьмем операцию расходимости от обеих частей этого равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{e}{\rho_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} s.$$

Принимая во внимание (78), можем написать это уравнение так:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s - \operatorname{div} \mathbf{F} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right). \tag{79}$$

Этому уравнению должна удовлетворять величина s, которая есть функция времени и координат точки. Заметим, что при вычислении расходимости производной $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ мы переставили дифференцирование по t с операцией расходимости, что представляется законным, так как результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Если внешние силы отсутствуют, то уравнение (79) будет

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s \qquad \left(a = \sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right). \tag{80}$$

Последнее уравнение называется обычно *волновым уравнением.* Вспоминая, что величина s характеризует величину сгущения или разрежения,

мы можем сказать, что в нашем случае это уравнение дает закон распространения звука. Те части пространства, где $\operatorname{div}\mathbf{F}$ отлична от нуля, будут источниками звука.

129. Уравнение теплопроводности. В [120] мы видели, что количество тепла, проходящее за время dt через элемент поверхности dS, принимается равным

$$dQ = k\,dt\,dS\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = k\,dt\,dS\left|\operatorname{grad}_n U(M)\right|,$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности, U — температура и (n) — направление, нормальное к dS. Рассмотрим замкнутую поверхность (S), ограничивающую объем (v), и подсчитаем полное количество тепла, проходящее через (S). Нетрудно видеть, что мы получим

$$dQ = -\,dt\iint\limits_{(S)} k\operatorname{grad}_n U\,dS. \tag{81}$$

При этом, если в направлении внешней нормали (n) температура убывает, то $\frac{\partial U}{\partial n} < 0$, и соответствующий элемент интеграла будет отрицательным, а при возрастании температуры картина будет обратная. Принимая во внимание, что тепло течет в направлении убывания температуры и знак $(-)$ в правой части (81), можем утверждать, что Q есть количество тепла, отдаваемого объемом (v) за промежуток времени dt. Втекающее в (v) тепло будет подсчитываться формулой (81) со знаком $(-)$.

То же количество отдаваемого тепла можно подсчитать иначе, следя за изменением температуры внутри объема. Рассмотрим элемент объема dv. На увеличение температуры этого элемента на dU за промежуток времени dt нужно затратить количество тепла, пропорциональное повышению температуры и массе элемента, т. е. количество тепла:

$$\gamma\,dU\cdot\rho\,dv = \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dt\,dv,$$

где ρ — плотность вещества, γ — коэффициент пропорциональности, который называется теплоемкостью вещества. Таким образом отдаваемое всем объемом тепло выразится по формуле

$$dQ = -\,dt\int\int\limits_{(v)}\int \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dv,$$

причем знак $(-)$ мы ставим потому, что подсчитывается отдаваемое, а не получаемое тепло.

Приравнивая полученные два выражения для dQ и применяя формулу (37) из [121], будем иметь

$$\int\int\limits_{(v)}\int \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dv = \int\int\limits_{(v)}\int \operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)\,dv, \tag{82}$$

т. е. при произвольном объеме должно иметь место соотношение

$$\int\int\limits_{(v)}\int\left[\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)\right]dv = 0,$$

откуда мы получим дифференциальное *уравнение теплопроводности*

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}U) \tag{83}$$

или

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial U}{\partial z}\right). \qquad (83_1)$$

Это уравнение должно выполняться во всех точках внутри рассматриваемого тела. Температура U зависит от координат точки и времени.

Если тело не только изотропно [120], но и однородно, то γ, ρ и k — постоянные, и уравнение (83) можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U \qquad \left(a=\sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}\right) \qquad (84)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \qquad (84_1)$$

Если тепловое явление стационарно, т. е. температура не зависит от времени t, а только от координат (x, y, z), то уравнение (84) перепишется в виде

$$\Delta U=0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \qquad (85)$$

Мы получили таким образом для температуры в стационарном тепловом процессе *уравнение Лапласа*, которое мы уже встречали выше.

При выводе уравнения теплопроводности (83) мы предполагали, что в рассматриваемом теле отсутствуют источники тепла. В противном случае мы должны были бы вместо равенства (82) написать другое равенство, а именно

$$\int\int_{(v)}\int\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dv=\int\int_{(v)}\int\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)\,dv+\int\int_{(v)}\int e\,dv,$$

где последнее слагаемое в правой части представляет количество тепла, выделяемого в объеме (v), причем это количество тепла рассчитано на единицу времени.

Подынтегральная функция $e(t, M)$ дает напряженность источников тепла, непрерывно распределенных в объеме (v), и эта функция может зависеть как от времени, так и от положения точки M. Вместо дифференциального уравнения теплопроводности (83) мы получили бы уравнение вида

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)+e \qquad (86)$$

или, в случае однородного тела, вместо уравнения (84) мы имели бы

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U+\frac{1}{\gamma\rho}e. \qquad (87)$$

Уравнения (87) и (84) аналогичны уравнениям (79) и (80) из [128]. Наличие источников тепла в уравнениях теплопроводности аналогично наличию внешних сил или, точнее говоря, источников звука — $\operatorname{div}\mathbf{F}$ в уравнениях распространения звука. Как то, так и другое обстоятельства делают дифференциальное уравнение неоднородным, т. е. уравнения (79) и (87), кроме членов, содержащих искомую функцию s или U, содержат еще и свободные члены — $\operatorname{div}\mathbf{F}$ или e, которые надо считать заданными функциями. Обратим внимание и на существенную разницу между уравнениями (80) и (84). Первое

из них содержит вторую производную от искомой функции по времени, тогда как второе содержит первую производную по времени. Это обстоятельство существенным образом скажется при интегрировании этих уравнений.

130. Уравнения Максвелла. При рассмотрении электромагнитного поля вводятся следующие векторы: **E** и **H** — векторы электрической и магнитной сил; **r** — вектор полного тока; **D** — вектор электрического смещения; **B** — вектор магнитной индукции. Два основных закона электродинамики, являющихся обобщением законов Био-Савара и Фарадея, могут быть написаны в виде

$$\int_{(l)} H_s\, ds = \frac{1}{c} \int_{(S)}\int r_n\, dS, \tag{88}$$

$$\int_{(l)} E_s\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int_{(S)}\int B_n\, dS, \tag{89}$$

где c — скорость света в пустоте.

Первое из уравнений связывает циркуляцию вектора магнитной силы вдоль контура некоторой поверхности с потоком вектора полного тока через самую поверхность. Второе уравнение связывает циркуляцию вектора электрической силы с производной по времени от потока магнитной индукции через поверхность. В написанных уравнениях (l) — произвольный замкнутый контур и (S) — поверхность, им ограниченная. Кроме того, в покоящейся однородной среде векторы **D** и **B** связаны с векторами **E** и **H**:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где ε и μ — постоянные, называемые диэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью среды. Вектор полного тока состоит из двух слагаемых — тока проводимости и тока смещения:

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где λ — коэффициент проводимости среды. Таким образом окончательно уравнения (88), (89) принимают вид

$$\int_{(l)} H_s\, ds = \frac{1}{c} \int_{(S)}\int \left(\lambda E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t}\right) dS, \tag{90_1}$$

$$\int_{(l)} E_s\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int_{(S)}\int \mu H_n\, dS. \tag{90_2}$$

Интегралы, стоящие в левых частях этих равенств, могут быть по формуле Стокса преобразованы в интегралы по поверхности:

$$\int_{(S)}\int \mathrm{rot}_n \mathbf{H}\, dS \quad \text{и} \quad \int_{(S)}\int \mathrm{rot}_n \mathbf{E}\, dS,$$

так что уравнения переписываются в виде

$$\int_{(S)}\int \left[c\, \mathrm{rot}_n \mathbf{H} - \left(\lambda E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t}\right)\right] dS = 0$$

$$\int_{(S)}\int \left[c\, \mathrm{rot}_n \mathbf{E} + \mu \frac{\partial H_n}{\partial t}\right] dS = 0.$$

Ввиду произвольности поверхности (S), а следовательно, и направления нормали (n), из последних уравнений вытекает

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{91_1}$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{91_2}$$

Эти уравнения и представляют собою *уравнения Максвелла* в дифференциальной форме. Мы имеем здесь шесть дифференциальных уравнений, содержащих шесть составляющих

$$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z.$$

Непосредственным следствием уравнений (91_1) и (91_2) в рассматриваемом случае является соленоидальность векторов

$$\lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

ибо их расходимость равна, в силу (91_1) и (91_2),

$$c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad \text{и} \quad c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

и, следовательно, обращается в нуль [124].

Но можно доказать еще и то, что сами векторы **E** и **H** соленоидальны в некоторой части пространства, если они были там таковыми в начальный момент времени.

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, введем две величины

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho_e = \rho, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = \rho_m, \tag{92}$$

которые называются плотностями электрического и магнитного заряда. Из уравнения

$$\operatorname{div} \left(\lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

следует

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

и, интегрируя это линейное уравнение первого порядка, получим [6]

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} t},$$

где ρ_0 есть значение ρ при $t = 0$. Стало быть, если в начальный момент времени мы имели $\rho_0 = 0$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0,$$

то и при всяком t будет $\rho = 0$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Точно так же из уравнения (91_2) следует

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

и если $\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0$, то $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ при всяком t.

Последнее уравнение равносильно условию равенства нулю магнитного заряда, что обычно и допускается.

Из уравнений Максвелла можно вывести другие уравнения, в которые каждый из векторов **E** и **H** входит отдельно. Производя операцию rot над

обеими частями уравнения (91_2), мы имеем

$$-c\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\mu\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}}{\partial t}$$

или, в силу формулы (57_1) и уравнения (91_1),

$$c\,(\Delta\mathbf{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E})=\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\lambda\mathbf{E}\right),$$

откуда окончательно

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,(\Delta\mathbf{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}). \tag{93}$$

Совершенно такое же уравнение получается и для вектора $\mathbf{H}$.

При отсутствии электрических зарядов, т. е. в случае $\mathrm{div}\,\mathbf{E}=0$, уравнение (93) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\Delta\mathbf{E}. \tag{94}$$

Это уравнение называется обычно *телеграфным уравнением*, так как оно было получено впервые при изучении распространения тока по кабелю. Наконец, если мы имеем дело с совершенным диэлектриком, т. е. непроводящей средой, то $\lambda=0$, и уравнение (94) будет:

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=a^2\,\Delta\mathbf{E}\left(a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right). \tag{95}$$

С уравнением такого вида мы уже встречались в [128].

Если процесс стационарен, т. е. векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от t, то уравнение (91_2) дает $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0$, т. е. $\mathbf{E}$ есть потенциальный вектор: $\mathbf{E}=\mathrm{grad}\,\varphi$, и первое из уравнений (92) дает

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}\ \text{ или }\ \Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{96}$$

В тех местах, где $\rho=0$, т. е. где электрические заряды отсутствуют, получим для потенциала φ уравнение Лапласа $\Delta\varphi=0$.

131. Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах. В [63] мы вводили в рассмотрение любые криволинейные координаты в пространстве. Теперь мы рассмотрим один частный случай таких координат, а именно тот, когда элементарный объем, который, как мы упоминали в [63], представляется в виде параллелепипеда, будет прямоугольным параллелепипедом. Этот случай ортогональных криволинейных координат представляется наиболее важным и чаще всего встречается в приложении.

Пусть вместо декартовых координат x, y, z вводятся три новые переменные

$$q_1=\varphi(x,\ y,\ z),\qquad q_2=\psi(x,\ y,\ z),\qquad q_3=\omega(x,\ y,\ z), \tag{97}$$

или в форме, решенной относительно x, y, z,

$$x=\varphi_1(q_1,\ q_2,\ q_3),\qquad y=\varphi_2(q_1,\ q_2,\ q_3),\qquad z=\varphi_3(q_1,\ q_2,\ q_3). \tag{98}$$

Мы считаем, что все указанные функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Придавая новым переменным q_1, q_2 и q_3 постоянные значения A, B, C, получим три семейства координатных поверхностей. Уравнения этих новых координатных поверхностей в координатах x, y, z будут:

$$\varphi(x, y, z) = A\,(\mathrm{I}), \quad \psi(x, y, z) = B\,(\mathrm{II}), \quad \omega(x, y, z) = C\,(\mathrm{III}). \tag{99}$$

Возьмем две какие-либо координатные поверхности из разных семейств, например, из семейств (II) и (III). Они пересекаются вдоль некоторой линии, уравнение которой будет

$$\psi(x, y, z) = B, \qquad \omega(x, y, z) = C,$$

где B и C — определенные постоянные. Вдоль этой линии меняется только переменная q_1, и эту линию можно назвать *координатной линией* q_1. Аналогичным образом получаются координатные линии q_2 и q_3.

Вычислим квадрат элемента длины в новых координатах:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}dp_3\right)^3. \tag{100}$$

Раскрывая скобки, получим однородный полином второй степени относительно dq_1, dq_2, dq_3. Выясним условия, при которых этот полином не будет содержать членов с произведениями различных дифференциалов dq.

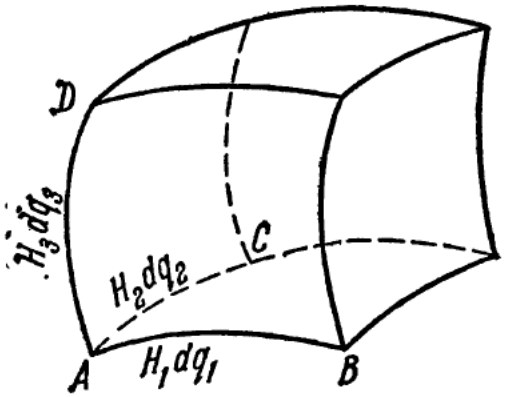


Рис. 93.

Рассмотрим, например, в выражении (100) слагаемое, содержащее произведение $dq_1\,dq_2$. Коэффициент при этом произведении будет

$$2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right). \tag{101}$$

Элемент объема в новых координатах (рис. 93) будет ограничен тремя парами координатных поверхностей. Из его основной вершины A, которой соответствуют значения q_1, q_2, q_3 новых координат, будут выходить три ребра: AB, AC и AD. Вдоль ребра AB меняется только q_1, вдоль AC — только q_2 и вдоль AD — только q_3. Рассмотрим первое и второе ребра. На первом ребре функции (94) суть функции только q_1, и направляющие косинусы касательной к этому ребру пропорциональны [I, 160]

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}.$$

Совершенно так же направляющие косинусы касательной ко второму ребру пропорциональны

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}.$$

Равенство нулю выражения (101), таким образом, равносильно требованию перпендикулярности рассматриваемых двух ребер. Если потребовать, чтобы в выражении (100) обратились в нуль и коэффициенты при $dq_1\,dq_3$ и $dq_2\,dq_3$, то это будет равносильно требованию, чтобы все три ребра элементарного объема в новых координатах были взаимно перпендикулярны. Таким образом *необходимым и достаточным условием ортогональности системы криволинейных координат является то, чтобы выражение* ds^2 *содержало только члены с квадратами дифференциалов*, т. е. *члены* с dq_1^2, dq_2^2 и dq_3^2.

Будем считать в дальнейшем, что криволинейные координаты ортогональны.

При этом получим для ds^2 выражение вида:

$$ds^2 = H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2 + H_3^2\,dq_3^2, \tag{102}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Принимая во внимание, что вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна из переменных, мы получим, согласно формуле (102), длины этих ребер

$$ds_1 = H_1\,dq_1, \quad ds_2 = H_2\,dq_2, \quad ds_3 = H_3\,dq_3, \tag{104}$$

и элемент объема в новых координатах будет выражаться формулой

$$dv = ds_1\,ds_2\,ds_3 = H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{105}$$

Положим теперь, что в пространстве имеется векторное поле **A**. Расходимость этого поля в некоторой точке M определяется, как известно [**121**], по формуле

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\,dS}{v_1},$$

где (S_1) — поверхность, ограничивающая некоторый объем (v_1), содержащий точку M и беспредельно сжимающийся к этой точке, и v_1 — величина этого объема. Применим это к случаю элементарного объема в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 и определим поток поля через поверхность этого элементарного объема. Начнем с определения потока через правую и левую грани. В основной вершине A криволинейные координаты имеют значения q_1, q_2, q_3, а на правой грани надо будет заменить q_1 на $(q_1 + dq_1)$. Кроме того на правой грани направление внешней нормали совпадает с направлением

координатной линии q_1, а на левой эти направления противоположны. Таким образом на правой грани слагающая A_n по внешней нормали (n) будет A_{q_1}, а на левой грани это будет $(-A_{q_1})$, где A_{q_1} — проекция вектора $\mathbf{A}$ на касательную к координатной линии q_1 или, как говорят обычно, на координатную линию q_1. Ввиду малости граней заменяем поверхностный интеграл по ним $\iint A_n\,dS$ просто произведением подынтегральной функции на площадь соответствующей грани и таким образом получим для потока через правую и левую грани выражение

$$A_{q_1}\,ds_2\,ds_3\,|_{q_1+dq_1} \quad \text{и} \quad -A_{q_1}\,ds_2\,ds_3\,|_{q_1},$$

а поток через обе грани будет

$$A_{q_1}\,ds_2\,ds_3\,|_{q_1+dq_1} - A_{q_1}\,ds_2\,ds_3\,|_{q_1}$$

или, согласно формулам (104),

$$A_{q_1}H_2H_3\,dq_2\,dq_3\,|_{q_1+dq_1} - A_{q_1}H_2H_3\,dq_2\,dq_3\,|_{q_1} = \\ = [H_2H_3A_{q_1}\,|_{q_1+dq_1} - H_2H_3A_{q_1}\,|_{q_1}]\,dq_2\,dq_3.$$

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим окончательно выражение потока через правую и левую грани:

$$\frac{\partial(H_2H_3A_{q_1})}{\partial q_1}\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

Совершенно так же поток через заднюю и переднюю грани будет

$$\frac{\partial(H_3H_1A_{q_2})}{\partial q_2}\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

и поток через верхнюю и нижнюю грани

$$\frac{\partial(H_1H_2A_{q_3})}{\partial q_3}\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

Складывая полученные три выражения и деля на величину элементарного объема, получаемую из формулы (105), придем к выражению расходимости поля в ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3A_{q_1})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3H_1A_{q_2})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_{q_3})}{\partial q_3}\right]. \quad (106)$$

Положим теперь, что поле $\mathbf{A}$ есть потенциальное поле, т. е. поле градиента некоторой функции $U(M)$, то есть $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U$. В этом случае составляющая поля A_{q_1} есть производная функции U по направлению q_1:

$$A_{q_1} = \lim_{\Delta s_1 \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},$$

совершенно аналогично

$$A_{q_2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2},\qquad A_{q_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (106), получим выражение оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (107)$$

Уравнение Лапласа $\Delta U=0$ будет выглядеть в координатах q_1, q_2, q_3 следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)=0. \quad (108)$$

1. Сферические координаты. В случае сферических координат формулы (98) имеют вид [62]

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\theta,$$

причем $q_1=r$, $q_2=\theta$ и $q_3=\varphi$. Вычисляем ds^2:

$$ds^2=(\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi)^2+(\sin\theta\sin\varphi\,dr+$$
$$+r\cos\theta\sin\varphi\,d\theta+r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi)^2+(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)^2,$$

или, открывая скобки,

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2, \quad (109)$$

т. е. $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=r\sin\theta$, причем $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, так что $H_3\geqslant 0$. Подставляя в (108), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}=0. \quad (110)$$

Найдем решения этого уравнения, зависящие только от радиуса-вектора. При этом надо считать $\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$, и, следовательно,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0,$$

откуда

$$r^2\frac{dU}{dr}=-C_1\quad\text{или}\quad\frac{dU}{dr}=-\frac{C_1}{r^2},$$

и, интегрируя, получим

$$U=\frac{C_1}{r}+C_2, \quad (111)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Напомним, что r есть расстояние переменной точки M до любой фиксированной точки M_0, которую мы можем выбрать за начало. В частности, при $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$ мы имеем решение $\frac{1}{r}$, о котором мы уже говорили в [90].

2. Цилиндрические координаты. В этом случае

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

так что $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Для ds^2 имеем:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

откуда $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$ и $H_3 = 1$, и уравнение Лапласа в цилиндрических координатах будет, согласно (108),

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{112}$$

Нетрудно показать, как и выше, что решение этого уравнения, зависящее только от расстояния ρ точки до OZ, будет

$$U = C_1 \lg \rho + C_2. \tag{113}$$

Положим, что значения U не зависят от z, т. е. что U имеет одинаковые значения в соответствующих точках всех плоскостей, параллельных плоскости XOY. При этом достаточно рассматривать значения U на одной плоскости XOY (плоский случай). В прямолинейных прямоугольных координатах уравнение Лапласа в этом случае будет

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0..$$

Относя плоскость к полярным координатам (ρ, φ), получим, в силу (112), уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Из выражения (113) видно, что в плоском случае $\lg \rho$ будет давать решение уравнения Лапласа, где ρ — расстояние переменной точки плоскости до какой-либо фиксированной точки. Вместо $\lg \rho$ можно, конечно, брать решение $\lg \frac{1}{\rho} = -\lg \rho$. Таким образом в трехмерном пространстве основным решением уравнения Лапласа является величина, обратная расстоянию переменной точки до некоторой постоянной точки, а в плоском случае основным решением будет логарифм этого обратного расстояния или самого расстояния.

132. Операция дифференцирования для случая переменного поля. Положим, что мы имеем в пространстве некоторое скалярное поле $U(t, M)$ или векторное поле $\mathbf{A}(t, M)$, причем в обоих случаях это поле меняется с течением времени, т. е. в каждой точке величина скаляра или вектор суть функции времени t. Положим, кроме того, что все пространство находится в движении, которое характеризуется полем вектора скорости $\mathbf{v}$. Последний вектор мы также считаем зависящим от времени.

Будем следить за изменением величины U с течением времени. Мы можем сделать это двояким образом.

1. Фиксируя свое внимание на определенной точке пространства, мы будем определять скорость изменения величины U в этой точке пространства. Таким образом мы придем к частной производной $\frac{\partial U}{\partial t}$, которую можно назвать *локальной производной*, поскольку мы связываем себя с определенным местом пространства.

2. Иначе мы можем определить скорость изменения величины U, фиксируя свое внимание на определенной частичке движущейся среды (субстанции). При этом мы должны, дифференцируя по времени, принимать во внимание и движение самих точек среды, т. е. мы должны дифференцировать величину U не только непосредственно по t, но также и через посредство координат (x, y, z) точки M Мы приходим в этом случае к полной производной или, как иначе говорят, к *субстанциональной производной:*

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\,v_x+\frac{\partial U}{\partial y}\,v_y+\frac{\partial U}{\partial z}\,v_z,$$

что можно переписать в следующей сжатой форме:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}U. \tag{114}$$

Мы уже имели пример субстанциональной производной в [126], где мы рассматривали полную производную по времени от плотности частицы движущейся непрерывной среды.

Точно так же для переменного вектора $\mathbf{A}(t, M)$ в движущейся среде будет иметь место формула

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\,v_x+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\,v_y+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\,v_z,$$

или

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{A}, \tag{115}$$

где символ $(\mathbf{v}\operatorname{grad})$ имеет следующее значение:

$$(\mathbf{v}\operatorname{grad})=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

В формулах (114) и (115) первое слагаемое, т. е. частная производная по времени, характеризует изменение величины в данном месте, а второе слагаемое является результатом движения самой среды.

Мы установим теперь некоторые формулы для дифференцирования интегралов по областям, связанным с движущейся средой. В данном случае зависимость величины интеграла от времени будет иметь место как вследствие того, что подынтегральная функция зависит от t, так и потому, что область интегрирования меняется с течением времени. Мы можем здесь при вычислении производной по t считать эту двоякую зависимость от t за зависимость от двух переменных и применить правило дифференцирования сложных

функций [I, 69]. Дело по существу приведется к принципу наложения бесконечно малых действий. Производная от интеграла по t будет состоять из двух слагаемых: первое слагаемое, вычисленное в предположении неизменности области интегрирования, определяется простым дифференцированием по t под знаком интеграла [83], а второе слагаемое учитывает лишь эффект от изменения самой области интегрирования, и при его вычислении подынтегральная функция считается неизменной с течением времени.

Переходим к рассмотрению ряда случаев.

1. Пусть (v) — некоторый переменный объем и $U(t, M)$ — скалярная функция. Установим формулу для производной

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv.$$

Каждый элемент dS поверхности (S), ограничивающей область (v), за промежуток времени dt опишет объем $dtv_n\,dS$, где (n) — направление внешней нормали к поверхности (S) [126].

Деля на dt и добавляя слагаемое, происшедшее от изменения подынтегральной функции, получим выражение производной интеграла в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial t}\,dv + \iint\limits_{(S)} Uv_n\,dS,$$

откуда, применяя формулу Остроградского, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\mathbf{v})\right] dv. \tag{116}$$

Заменяя $\frac{\partial U}{\partial t}$ его выражением через $\frac{dU}{dt}$ согласно формуле (114) и пользуясь формулой (57_1) [124]

$$\operatorname{div}(U\mathbf{v}) = U\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}U,$$

можем переписать формулу (116) в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{dU}{dt} + U\operatorname{div}\mathbf{v}\right] dv. \tag{117}$$

2. Рассмотрим теперь производную от потока переменного вектора поля $\mathbf{A}(t, M)$ через движущуюся поверхность (S):

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n\,dS.$$

Здесь (S) — некоторая поверхность, связанная с движущейся средой, и (n) — определенное направление нормали к (S). Одним из слагаемых в искомом выражении производной будет

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial A_n}{\partial t}\,dS. \tag{118}$$

Определим теперь второе слагаемое, происходящее от движения самой поверхности (S). Пусть (l) — контур этой поверхности и $d\mathbf{s}$ — направленный

элемент этого контура, причем в дальнейшем мы определим направление контура (l) (рис. 94). За промежуток времени dt поверхность (S) опишет объем (δV), ограниченный тремя поверхностями: положением (S_t) поверхности (S) в момент t, положением (S_{t+dt}) поверхности (S) в момент $t+dt$ и поверхностью (S'), описанной контуром (l) за промежуток времени dt. Элемент площади поверхности (S') будет

$$dS' = |\, d\mathbf{s} \times \mathbf{v} \,|\, dt.$$

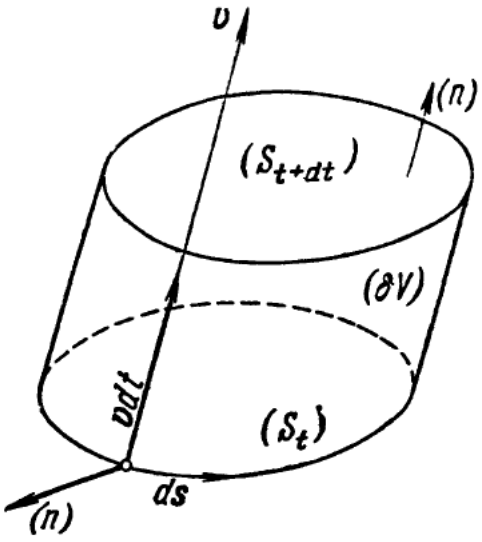


Рис. 94.

Пусть (n) — направление нормали на (S_t) и (S_{t+dt}), взятое в одну и ту же сторону, а именно положим, что на (S_{t+dt}) оно направлено вовне объема (δV). Обозначим также через (n) направление нормали к (S'), внешней для (δV), и придадим (l) такое направление, чтобы $d\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$ и (n) на (S') имели ту же ориентировку, что и координатные оси. При этом очевидно

$$A_n\, dS' = \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v})\, dt,$$

так что формула Остроградского дает нам

$$\iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n\, dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n\, dS + dt \int\limits_{(l)} \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = \iiint\limits_{(\delta V)} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dv. \qquad (119)$$

Знак (—) перед интегралом по (S_t) поставлен в силу того, что на (S_t) нормаль (n) направлена внутрь (δV). Но, как известно [117],

$$\mathbf{A} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{A})_s\, ds,$$

где $(\mathbf{v} \times \mathbf{A})_s$ — проекции $\mathbf{v} \times \mathbf{A}$ на направление $d\mathbf{s}$, и, следовательно, по формуле Стокса

$$\int\limits_{(l)} \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = \int\limits_{(l)} (\mathbf{v} \times \mathbf{A})_s\, ds = \iint\limits_{(S_t)} \operatorname{rot}_n (\mathbf{v} \times \mathbf{A})\, dS.$$

Разбивая объем (δV) на элементарные объемы $dv = v_n\, dS\, dt$, где dS — элемент площади поверхности (S_t), мы получим из формулы (119):

$$\iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n\, dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n\, dS = dt \iint\limits_{(S_t)} [v_n \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot}_n (\mathbf{v} \times \mathbf{A})]\, dS.$$

Деля обе части на dt и переходя к пределу, мы будем иметь то слагаемое в выражении производной, которое происходит от движения поверхности (S). Прибавляя еще слагаемое (118), получим окончательно

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_{(S)} A_n\, dS = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{rot}_n (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right] dS. \qquad (120)$$

Если (S) есть замкнутая поверхность, то в выражении производной будет отсутствовать член, содержащий $\operatorname{rot}_n (\mathbf{A} \times \mathbf{v})$, и соответствующая этому случаю формула непосредственно вытекает из (116). Действительно, пусть (v) — переменный объем, ограниченный замкнутой поверхностью (S).

Пользуясь формулой Остроградского и (116), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(S)}\int A_n\,dS=\frac{d}{dt}\int\limits_{(v)}\int\int\operatorname{div}\mathbf{A}\,dv=\int\limits_{(v)}\int\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{div}(\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A})\right]dv=$$

$$=\int\limits_{(v)}\int\int\operatorname{div}\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A}\right]dv=\int\limits_{(S)}\int\left(\frac{\partial A_n}{\partial t}+v_n\operatorname{div}\mathbf{A}\right)dS.$$

3. Рассмотрим теперь производную от циркуляции переменного вектора по движущейся кривой

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)}A_s\,ds.$$

Одним из слагаемых в искомом выражении, как всегда, будет

$$\int\limits_{(l)}\frac{\partial A_s}{\partial t}\,ds. \tag{121}$$

Определим теперь добавочное слагаемое, происходящее от движения самой кривой. За промежуток времени dt кривая (l) опишет поверхность (δS), ограниченную четырьмя линиями (рис. 95): кривой A_1A_2, которая является положением (l_t) линии (l) в момент времени t; кривой B_1B_2, которая дает положение (l_{t+dt}) линии в момент $t+dt$; наконец, кривыми A_1B_1 и A_2B_2, которые опишут концы A_1 и A_2 кривой (l) за промежуток времени dt. Формула Стокса дает

$$\int\limits_{(l_t)}A_s\,ds+\int\limits_{(A_2B_2)}A_s\,ds-\int\limits_{(l_{t+dt})}A_s\,ds+\int\limits_{(B_1A_1)}A_s\,ds=\int\limits_{(\delta S)}\int\operatorname{rot}_n\mathbf{A}\,dS, \tag{122}$$

причем интегрирование по (l_t) и (l_{t+dt}) производится в направлении от A_1 и B_1 к A_2 и B_2, и (n) — направление нормали к (δS) такое, что на (l_t) векторы $d\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$ и (n) имеют ту же ориентировку, что и оси. Интегралы по малым кривым (A_2B_2) и (B_1A_1) можно заменить одним элементом, т. е. произведением величины подынтегральной функции на длину пути интегрирования. Мы получим для них скалярные произведения вектора $\mathbf{A}$ на малое перемещение $\mathbf{v}\,dt$:

$$\mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)}\,dt \text{ и } -\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)}\,dt,$$

где знак (—) поставлен ввиду того, что по кривой B_1A_1 интегрирование производится от B_1 к A_1, т. е. противоположно $\mathbf{v}$, и значки наверху показывают, что значение соответствующих величин надо брать в точках A_1 и A_2.

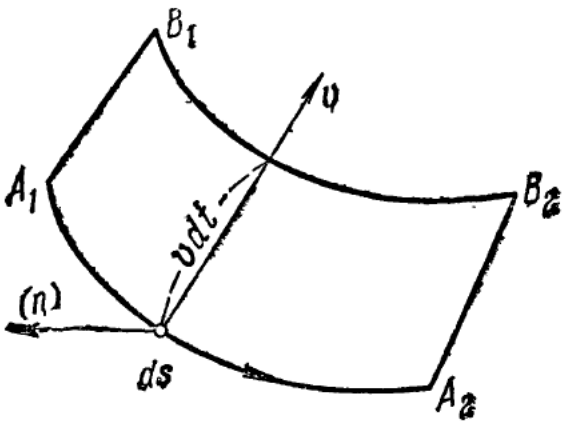


Рис. 95.

Элемент площади поверхности dS будет

$$dS=|\,ds\times\mathbf{v}\,|\,dt,$$

и нормаль (n) к поверхности будет иметь направление вектора $ds\times\mathbf{v}$, так что, очевидно,

$$\operatorname{rot}_n\mathbf{A}\,ds=(ds\times\mathbf{v})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dt=(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A})\cdot ds\,dt,$$

и формула (122) дает

$$\int\limits_{(l_{t+dt})}A_s\,ds-\int\limits_{(l_t)}A_s\,ds=\mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)}\,dt-\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)}\,dt+dt\int\limits_{(l_t)}(\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\,ds.$$

Деля обе части на dt, переходя к пределу и добавляя слагаемое (121), получим искомое выражение для производной, причем вместо (l_t) мы пишем просто (l):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s\,ds = \mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)} + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \quad (123)$$

Если кривая (l) замкнутая, то внеинтегральные слагаемые пропадут, и мы получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s\,ds = \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \quad (124)$$

Эту формулу можно просто вывести, преобразуя криволинейный интеграл по формуле Стокса и применяя затем формулу (120).

Рассмотрим еще циркуляцию скорости вдоль некоторого движущегося контура (l). Согласно формуле (123)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} v_s\,ds = \mathbf{v}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)} + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_s\right]ds =$$

$$= |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2 + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \quad (125)$$

Составляющая вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}$ по оси OX будет

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y.$$

Раскрывая скобки и прибавляя и вычитая $\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x$, можем написать:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_z\right),$$

и, пользуясь (115), нетрудно получить отсюда

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{w} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2,$$

где $\mathbf{w}$ — вектор ускорения. Подставляя в (125), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} v_s\,ds = |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2 + \int\limits_{(l)}\left(w_s - \frac{1}{2}\operatorname{grad}_s|\mathbf{v}|^2\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[|\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2\right] + \int\limits_{(l)} w_s\,ds, \quad (126)$$

ибо, очевидно,

$$\int\limits_{(l)}\operatorname{grad}_s|\mathbf{v}|^2\,ds = |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2.$$

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 12. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

133. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта. В настоящей главе мы дадим основы теории кривых и поверхностей, причем начнем с исследования плоских кривых, затем перейдем к кривым в пространстве и к поверхностям. При изложении мы будем пользоваться векторами, так что читателю необходимо твердо помнить содержание первых номеров предыдущей главы включительно до [**119**], содержащего вопрос о дифференцировании вектора. Начнем с доказательства леммы:

Лемма. *Если* $\mathbf{A}$ *есть вектор длины единицы (единичный вектор), зависящий от скалярного параметра* t, *то* $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 0$, то есть $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$.

Действительно, по условию леммы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 1$, и, дифференцируя это равенство по t, получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0,$$

или, в силу независимости скалярного произведения от порядка множителей:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A},$$

причем условие $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$ имеет очевидно смысл лишь в том случае, если вектор $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ отличен от нуля.

Здесь и в дальнейшем мы всегда предполагаем существование и непрерывность тех производных, о которых говорится в тексте.

Пусть на плоскости имеется некоторая кривая (L) и скалярный параметр t определяет положение переменной точки M на этой кривой. Мы можем охарактеризовать нашу кривую радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$

из некоторой постоянной точки O в переменную точку кривой (рис. 96). Как мы видели [119], производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ дает вектор, направленный по касательной к кривой, а если за параметр принять длину дуги s кривой, отсчитываемую от определенной точки кривой в определенном направлении, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ даст *единичный вектор касательной* $\mathbf{t}$, направление которого совпадает с направлением увеличения параметра s вдоль кривой:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}. \tag{1}$$

Производная от единичного вектора-касательной по s называется *вектором кривизны*:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \tag{2}$$

Длина этого вектора характеризует быстроту изменения направления вектора $\mathbf{t}$ и называется *кривизной кривой.*

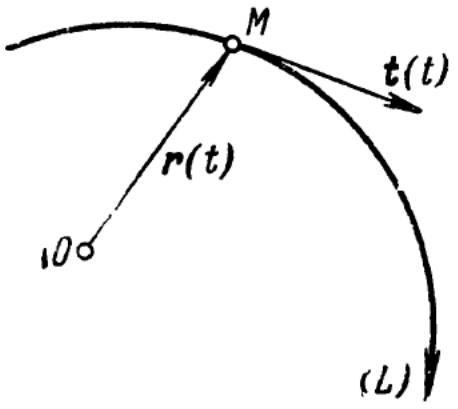


Рис. 96.

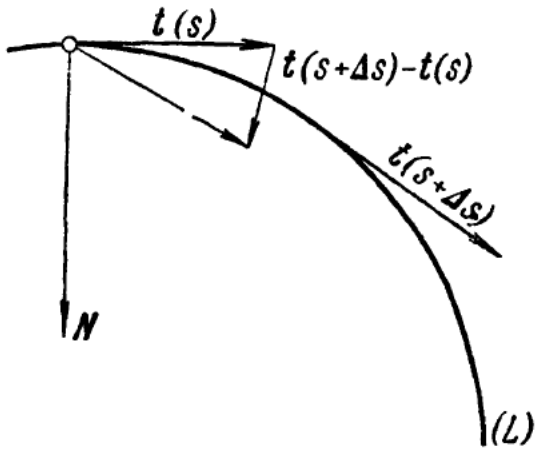


Рис. 97.

В силу доказанной леммы вектор кривизны перпендикулярен касательной, т. е. направлен по нормали.

Кроме того из его определения непосредственно следует, что он направлен в сторону вогнутости кривой, так как в эту сторону направлена разность $\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)$ при $\Delta s > 0$ (рис. 97).

Длина вектора $\mathbf{N}$, как мы уже указали, называется кривизной кривой, и если ввести обозначение

$$|\mathbf{N}| = \frac{1}{\rho}, \tag{3}$$

то величина ρ, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны.* Введем в рассмотрение единичный вектор кривизны $\mathbf{n}$, то есть вектор длины единица, по направлению совпадающий с $\mathbf{N}$.

Если длина $|\mathbf{N}| = 0$, то надо считать $\rho = \infty$, и вектор $\mathbf{n}$ не определен. Если, например, (L) — прямая, то во всех ее точках

$|\mathbf{N}|=0$, и мы можем выбирать любое из двух направлений нормали к прямой в той плоскости, в которой мы рассматриваем прямую. В дальнейшем будем считать, что $|\mathbf{N}|\neq 0$.

В силу (3) имеем

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \tag{4}$$

Отложим на направлении $\mathbf{n}$, т. е. на направлении нормали кривой в сторону вогнутости, отрезок MC, равный радиусу кривизны ρ в точке M (рис. 98). Его конец C называется *центром кривизны* кривой в точке M. Если M двигается вдоль кривой (L), то C меняется и описывает некоторую кривую (L_1), которая называется *эволютой кривой* (L), т. е. эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

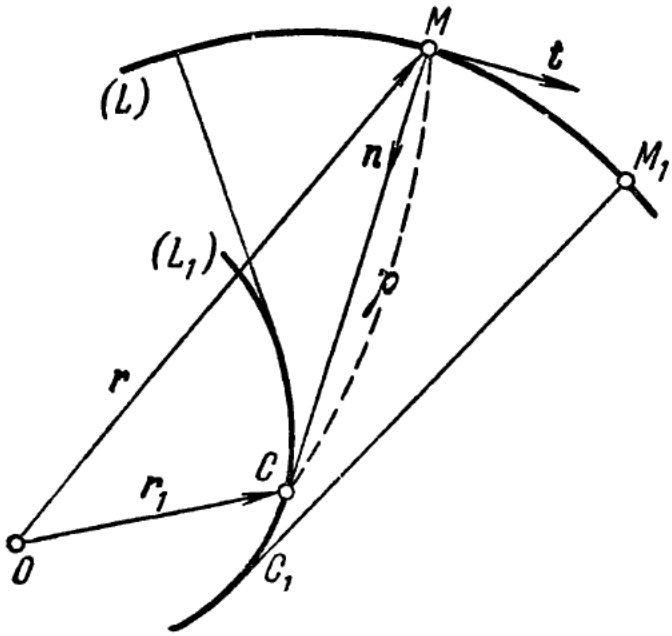


Рис. 98.

Для дальнейшего нам необходимо определить производную $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. Вектор $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, и, следовательно, $\frac{d\mathbf{n}}{ds}\perp\mathbf{n}$, то есть $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ параллелен касательной. Дифференцируя очевидное равенство $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$ по s, будем иметь

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=0.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, в силу (4), $\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\rho}$, так что из последнего равенства следует $\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}$. Сопоставляя это с параллельностью векторов $\mathbf{t}$ и $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$, видим, что $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ по направлению противоположен $\mathbf{t}$ и имеет длину $\frac{1}{\rho}$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}. \tag{5}$$

Пусть, как и выше, $\mathbf{r}$ и s — радиус-вектор и длина дуги для кривой (L), а $\mathbf{r}_1$ и s_1 — те же величины для эволюты (L_1). Дифференцируя равенство (рис. 98)

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$$

по s, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\mathbf{t}+\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}+\rho\frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

или, в силу (5),

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \mathbf{t} + \frac{d\rho}{ds}\mathbf{n} - \mathbf{t}, \quad \text{то есть} \quad \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}. \tag{6}$$

Правая часть этой формулы есть вектор, направленный по нормали к (L), а левая — вектор, направленный по касательной к эволюте, и, следовательно, нормаль кривой (L) параллельна касательной эволюты. Но обе эти линии проходят через одну и ту же точку C, а поэтому должны совпадать, и мы имеем первое свойство эволюты: *нормаль к кривой касается эволюты в соответствующей точке.*

Вспоминая определение огибающих семейств линий, мы можем высказать и следующее второе свойство эволюты: *эволюта есть огибающая семейства нормалей к кривой.*

Естественным параметром для эволюты является ее длина дуги s_1, и, согласно правилу дифференцирования сложных функций,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{ds_1}{ds}\mathbf{t}_1,$$

где $\mathbf{t}_1$ — единичный вектор касательной эволюты. Подставляя в (6), получим

$$\frac{ds_1}{ds}\mathbf{t}_1 = \frac{d\rho}{ds}\mathbf{n},$$

откуда, сравнивая длины векторов, стоящих в обеих частях этого равенства, будем иметь

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| = \left|\frac{d\rho}{ds}\right|, \quad \text{т. е.} \quad |ds_1| = |d\rho|.$$

Считая для простоты, что на рассматриваемом участке кривой и эволюты величины s_1 и ρ увеличиваются, можно написать $ds_1 = d\rho$. Интегрируя это соотношение по рассматриваемому участку, обнаружим, что приращение длины дуги эволюты совпадает с приращением радиуса кривизны исходной кривой. Таким образом мы получаем третье свойство эволюты: *на участке монотонного изменения радиуса кривизны приращение его равно приращению длины дуги эволюты между соответствующими точками.* В случае рис. 98 это свойство выразится равенством: $M_1C_1 - MC = \smile CC_1$.

Выберем на плоскости определенные координатные оси OX и OY, и пусть φ есть угол, образованный направлением касательной $\mathbf{t}$ с осью OX. Выражая единичный вектор через его составляющие, получим

$$\mathbf{t} = \cos\varphi\ \mathbf{i} + \sin\varphi\ \mathbf{j},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ суть единичные векторы по осям OX и OY. Дифференцируем предыдущее равенство по s:

$$\mathbf{N} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\mathbf{i} + \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\mathbf{j},$$

откуда квадрат длины вектора кривизны будет

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\left(\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \text{ или } \frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

Мы получим таким образом выражение для кривизны, которое мы уже приводили в [**I, 71**].

Положим, что уравнение кривой (L) дано в явной форме

$$y=f(x). \tag{7}$$

Семейство нормалей к этой кривой будет иметь уравнение

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \quad \text{или} \quad (X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{8}$$

Здесь (X, Y) суть текущие координаты нормали, а (x, y) — координаты точки M кривой (L), причем y есть функция (7) от x. Таким образом роль параметра в уравнении семейства нормалей (8) играет абсцисса x переменной точки кривой. Применяя к семейству (8) обычное правило нахождения огибающей [**13**], мы должны написать два уравнения: уравнение (8) и новое уравнение, которое получается из него дифференцированием по параметру x:

$$\left.\begin{aligned}(X-x)+y'(Y-y)&=0,\\ -1+y''(Y-y)-y'^2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исключая из этих уравнений параметр x, мы получим уравнение, связывающее X и Y. Это и будет уравнение огибающей семейства нормалей, т. е. уравнение эволюты. Можно поступать и иначе, а именно, решая систему (9) относительно X и Y, мы выразим последние через параметр x, т. е. получим параметрическое уравнение эволюты

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{10}$$

Если уравнение кривой (L) задано само в параметрической форме, то надо в формулах (10) выразить производные от y по x через дифференциалы переменных [**I, 74**]:

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^3},$$

и, подставляя эти выражения в (10), получим параметрическое уравнение эволюты для этого случая:

$$X=x-\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}, \quad Y=y+\frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}. \tag{11}$$

Примеры. **1.** Найдем эволюты эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b).$$

Написав уравнение эллипса в параметрической форме

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

и подставляя в уравнение (11), найдем после несложных вычислений:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad Y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Исключим параметр t из этих двух уравнений. Умножая первое из уравнений на a, второе на b, возводя в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим уравнение эволюты эллипса в неявной форме:

$$a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

Нетрудно, пользуясь этими уравнениями

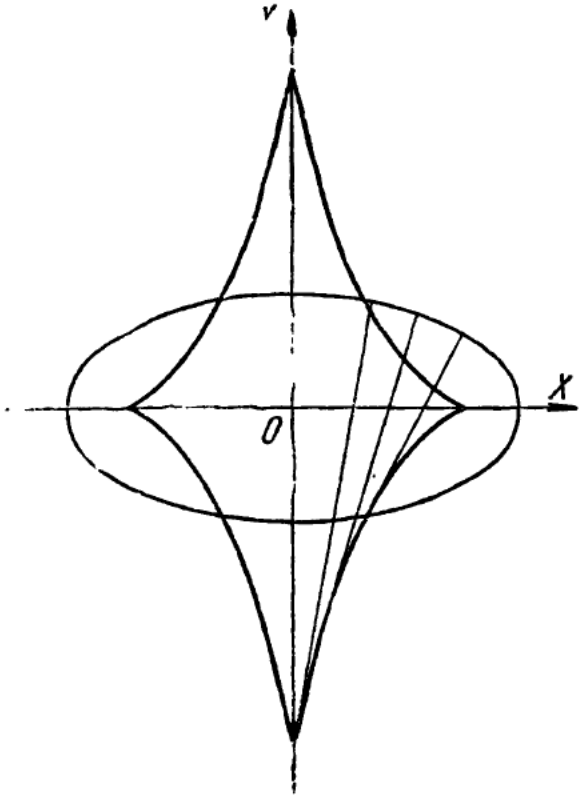


Рис. 99.

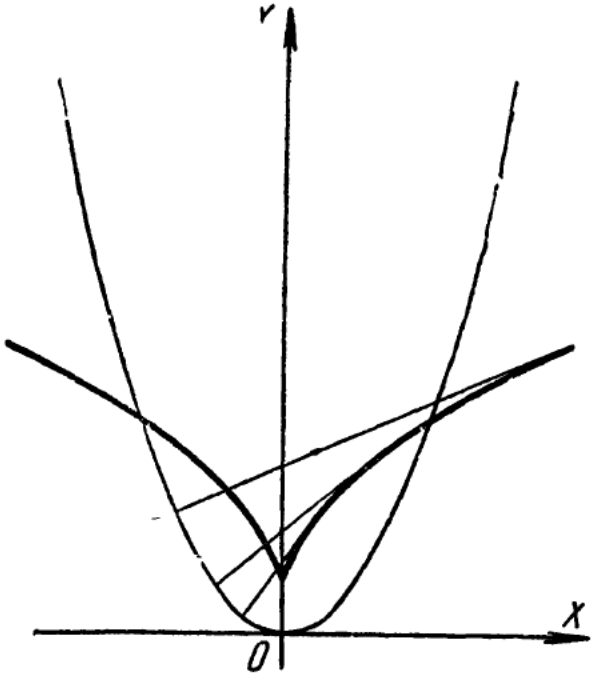


Рис. 100.

построить эволюту эллипса. Заметим, что в вершинах эллипса его радиус кривизны принимает наименьшее и наибольшее значения, и в соответствующих точках эволюта имеет особые точки, а именно точки возврата (рис. 99).

2. Найдем эволюту параболы $y = ax^2$. Пользуясь уравнениями (10), получим без труда

$$X = -4a^2x^3, \quad Y = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Исключая отсюда параметр x, получим уравнение эволюты параболы в явной форме (рис. 100):

$$Y = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2a}}X^{\frac{2}{3}}.$$

3. Рассмотрим циклоиду

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Пользуясь формулами (11), найдем для ее эволюты параметрическое уравнение

$$X = a(t + \sin t), \quad Y = -a(1 - \cos t).$$

Нетрудно показать, что эта кривая будет такая же циклоида, что и заданная кривая, но иначе расположенная относительно осей (рис. 101).

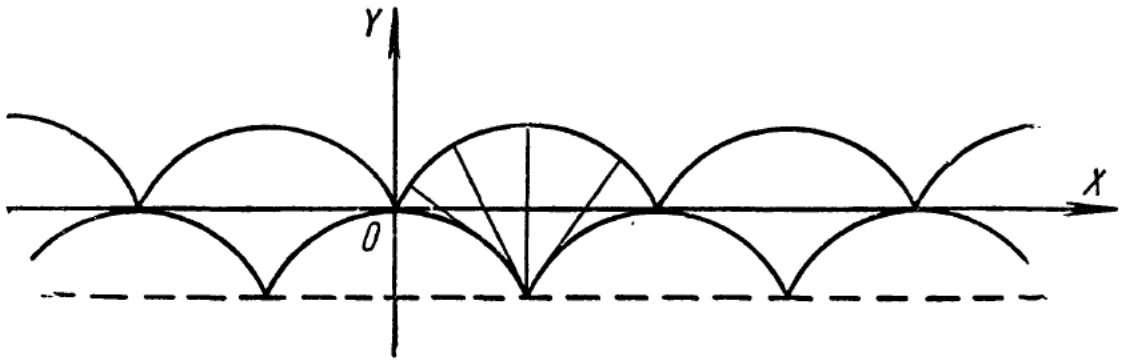


Рис. 101.

Действительно, полагая $t = \tau - \pi$, последние формулы можно переписать в виде

$$X + a\pi = a(\tau - \sin\tau), \qquad Y + 2a = a(1 - \cos\tau),$$

откуда и следует непосредственно наше утверждение.

134. Эвольвента. Сама кривая (L) по отношению к своей эволюте (L_1) называется *эвольвентой*. Из свойств эволюты нетрудно получить правило построения эвольвенты по заданной эволюте. Если C — переменная точка на (L_1) и s_1 — длина дуги этой кривой, то, откладывая на касательной к (L_1) в точке C в отрицательном направлении отрезок $\overline{CM} = s_1 + a$, где a — некоторая постоянная, получим геометрическое место (L) концов M. Нетрудно показать, что это геометрическое место и будет искомой эвольвентой (рис. 102). Чтобы обнаружить это, достаточно доказать, что отрезок CM будет служить нормалью к кривой (L). Пусть, как и выше, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ — радиусы-векторы кривых (L) и (L_1), $\mathbf{t}_1$ — единичный вектор касательной к (L_1). По построению

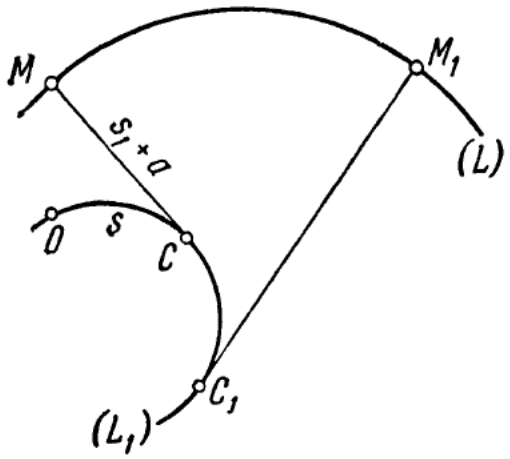


Рис. 102.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - (s_1 + a)\,\mathbf{t}_1,$$

откуда, дифференцируя по s_1,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds_1} = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_1 - (s_1 + a)\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}, \text{ то есть } \frac{d\mathbf{r}}{ds_1} = -(s_1 + a)\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}.$$

Отсюда видно, что вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds_1}$, параллельный касательной к (L), в то же время параллелен вектору $\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}$, т. е. параллелен нормали к (L_1), а отсюда следует, что касательная $\overline{CM}$ к (L_1) есть нормаль к (L).

Мы можем придавать произвольное значение постоянной a в формуле $\overline{CM} = s_1 + a$, а потому можем получить бесчисленное множество эвольвент для заданной эволюты. Из самого способа построения следует, что любые две эвольвенты будут иметь общие нормали и что отрезок нормали между этими двумя эвольвентами будет сохранять постоянную длину, равную разности значений постоянной a, соответствующих взятым эвольвентам. Такие две кривые называются *параллельными кривыми.*

135. Естественное уравнение кривой. Вдоль всякой кривой кривизна есть определенная функция длины дуги

$$\frac{1}{\rho} = f(s). \tag{12}$$

Покажем, наоборот, что всякому уравнению вида (12) соответствует одна определенная кривая. Действительно, выберем какое-нибудь направление за направление оси X и пусть φ есть угол, образованный касательной кривой с этой осью. Как известно, $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d\varphi}{ds}$, и уравнение (12) дает

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm f(s),$$

откуда

$$\varphi = \pm \int_0^s f(s)\, ds + C.$$

Можно считать, что направление оси OX совпадает с направлением касательной при $s = 0$, так что в последней формуле можно считать $C = 0$, т. е. мы получаем выражение для угла φ:

$$\varphi = \pm F(s), \quad \text{где} \quad F(s) = \int_0^s f(s)\, ds.$$

Далее мы знаем, что [**I, 70**]

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

откуда, в силу предыдущего равенства,

$$x = \int_0^s \cos[F(s)]\, ds + C_1, \qquad y = \pm \int_0^s \sin[F(s)]\, ds + C_2.$$

Помещая начало координат в точку кривой, для которой $s = 0$, мы должны будем считать $C_1 = C_2 = 0$ и получим вполне опреде-

ленную кривую

$$x = \int_0^s \cos[F(s)]\,ds, \qquad y = \pm \int_0^s \sin[F(s)]\,ds. \tag{12_1}$$

Двойной знак дает только симметрию относительно оси OX.

Мы показали таким образом, что уравнению (12) может соответствовать определенная в указанном выше смысле кривая и что при выбранной системе координат уравнения (12_1) должны давать параметрическое задание этой кривой. Нетрудно проверить, что, действительно, для кривой, определяемой уравнениями (12_1), кривизна имеет значение, определяемое формулой (12).

Уравнение (12) называется *естественным уравнением кривой* в том смысле, что уравнение это не связано ни с каким случайным выбором осей координат и ему соответствует одна вполне определенная кривая (с точностью до симметрии).

Примеры. **1.** Если уравнение (12) имеет вид $\frac{1}{\rho} = C$, т. е. радиус кривизны ρ есть величина постоянная, то, как мы знаем, такому уравнению удовлетворяет окружность [**I, 71**]. Из предыдущего следует, что *окружность есть единственная кривая с постоянным радиусом кривизны.*

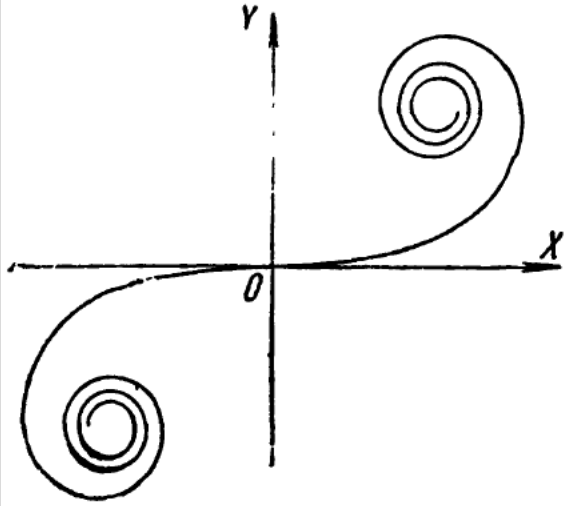


Рис. 103.

2. Положим, что кривизна $\frac{1}{\rho}$ пропорциональна длине дуги

$$\frac{1}{\rho} = 2as,$$

где $2a$ — положительный коэффициент пропорциональности. Предыдущие вычисления дадут в данном случае

$$x = \int_0^s \cos(as^2)\,ds, \quad y = \int_0^s \sin(as^2)\,ds. \tag{13}$$

В силу сходимости интегралов [**86**]

$$\int_0^\infty \cos(as^2)\,ds, \qquad \int_0^\infty \sin(as^2)\,ds$$

можно утверждать, что при беспредельном возрастании s кривая будет стремиться к точке плоскости с координатами, равными значениям вышенаписанных интегралов, причем она будет спиралеобразно закручиваться вокруг этой точки (рис. 103). Если в формулах (13) будем придавать s и отрицательные значения, то получим часть кривой, содержащуюся в третьем координатном угле. Полученная здесь кривая называется спиралью Корню. Она встречается в оптике.

136. Основные элементы кривой в пространстве. Кривая (L) в пространстве может быть определена заданием переменного радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ из начала в переменную точку кривой M (рис. 104).

Принимая за параметр t длину дуги кривой s и дифференцируя $\mathbf{r}$ по s, получим единичный вектор касательной к кривой [119]

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{t}. \tag{14}$$

Производная от $\mathbf{t}$ по s называется *вектором кривизны*:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\mathbf{N}, \tag{15}$$

и длина этого вектора кривизны дает *кривизну кривой* $\frac{1}{\rho}$, а обратная величина ρ называется *радиусом кривизны*. Как и в случае плоской кривой, вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен к $\mathbf{t}$, и направление вектора $\mathbf{N}$ называется направлением *главной нормали кривой*. Вводя единичный вектор главной нормали $\mathbf{n}$, можно написать

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \tag{16}$$

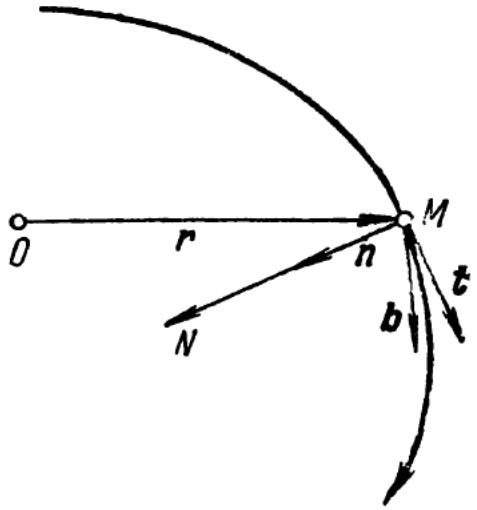


Рис. 104.

Введем еще один единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}. \tag{17}$$

Этот вектор называется *единичным вектором бинормали*.

Три единичных вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, имеющих ту же ориентировку, что и координатные оси, составляют, как говорят, *переменный триэдр, связанный с кривой* (L). Если кривая плоская, то векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ находятся в плоскости кривой и, следовательно, единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ есть постоянный вектор длины единица, перпендикулярный к плоскости кривой. Для кривой неплоской производная $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ характеризует отклонение кривой от плоской формы и называется *вектором кручения*. Докажем, что *вектор кручения параллелен главной нормали*. Согласно формуле (17)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\mathbf{N}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, следовательно, их векторное произведение равно нулю, т. е.

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \tag{18}$$

откуда вытекает перпендикулярность векторов $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ и $\mathbf{t}$. С другой стороны, как всегда, производная единичного вектора $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендику-

лярна к самому вектору **b**. Таким образом вектор $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, перпендикулярный векторам **t** и **b**, будет действительно параллелен вектору **n**, и мы можем записать

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{n}, \tag{19}$$

где численный коэффициент $\frac{1}{\tau}$ называется *кручением кривой*, а обратная величина τ — *радиусом кручения*, или *радиусом второй кривизны*. Заметим, что величина $\frac{1}{\tau}$ может быть как положительной, так и отрицательной, в противоположность кривизне $\frac{1}{\rho}$, которая всегда не отрицательна. Существование вектора касательной, вектора кривизны и вектора кручения связано, конечно, с существованием производных, через которые они выражаются.

Выведем теперь формулы для вычисления кривизны и кручения. Вводя координатные оси OX, OY, OZ и соответствующие им единичные векторы **i**, **j** и **k**, можно написать

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{t} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{N} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k},$$

откуда для длины вектора **N** получим

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{20}$$

Из формулы (19) вытекает, что кручение $\frac{1}{\tau}$ можно выразить как скалярное произведение

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n}$$

или, в силу (18),

$$\frac{1}{\tau} = \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) \cdot \mathbf{n}.$$

Заменяя **n** его выражением из формулы (16)

$$\mathbf{n} = \rho\mathbf{N},$$

получим

$$\frac{1}{\tau} = \left(\mathbf{t} \times \frac{d(\rho\mathbf{N})}{ds}\right) \cdot \rho\mathbf{N} = \left[\mathbf{t} \times \left(\frac{d\rho}{ds}\mathbf{N} + \rho\frac{d\mathbf{N}}{ds}\right)\right] \cdot \rho\mathbf{N} =$$

$$= \rho\frac{d\rho}{ds}(\mathbf{t} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} + \rho^2 \cdot \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}\right) \cdot \mathbf{N}.$$

Но векторное произведение $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}$, а потому первое из слагаемых в последнем выражении равно нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{\tau} = \rho^2 \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}\right) \cdot \mathbf{N},$$

или, переставляя множители в векторном произведении,

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \times \mathbf{t}\right) \cdot \mathbf{N}.$$

Совершая круговую перестановку векторов и пользуясь формулами (14) и (15), получим окончательно

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right) \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}. \tag{21}$$

Заметим, что коэффициент при $(-\rho^2)$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, $\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$ [117].

Возвратимся к формуле (20) для кривизны. В ней предполагается, что координаты x, y, z выражены как функции длины дуги. Преобразуем теперь формулу (20) к новому виду, годному для любого параметрического задания кривой. Для этого нам надо будет выразить производную от координат по длине дуги через дифференциалы координат. Дифференцируя формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{22}$$

получим

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z. \tag{23}$$

Кроме того, имеем [I, 74]

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2x\, ds - d^2s\, dx}{ds^3}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y\, ds - d^2s\, dy}{ds^3}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2z\, ds - d^2s\, dz}{ds^3}. \tag{24}$$

Подставляя это в формулу (20), будем иметь в силу (22)

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - 2ds\, d^2s\,(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z) + (d^2s)^2 ds^2}{ds^6}$$

или, в силу (22) и (23),

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2}{ds^6}. \tag{25}$$

Вспомним теперь элементарное алгебраическое тождество, необходимое нам в дальнейшем [116]:

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2= \\ =(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2. \quad (26)$$

Применяя это тождество к числителю в выражении (25), можем написать окончательную формулу для квадрата кривизны

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3}, \quad (27)$$

где

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y, \qquad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z, \qquad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

Если кривая (L) есть траектория движущейся точки, то вектор скорости определится из формулы

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\mathbf{t}.$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим вектор ускорения

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

или, в силу (15) и (16),

$$\mathbf{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \quad \left(v=\frac{ds}{dt}\right),$$

откуда видно, что вектор ускорения имеет составляющую по касательной, равную $\frac{d^2s}{dt^2}$, и по главной нормали — равную $\frac{v^2}{\rho}$, а составляющая по бинормали равна нулю.

137. Формулы Френе. Введем обозначение для направляющих косинусов осей подвижного триэдра относительно неподвижных координатных осей, указанное в прилагаемой таблице.

	X	Y	Z
t	α	β	γ
n	α_1	β_1	γ_1
b	α_2	β_2	γ_2

Формулы Френе дают выражения производной от написанных девяти направляющих косинусов по s.

Составляющие единичного вектора $\mathbf{t}$ суть α, β и γ, и формула

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}$$

дает первые три формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}. \quad (28)$$

Точно так же формула (19) приводит к следующим трем формулам

Френе:

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau},\quad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{\beta_1}{\tau},\quad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{\gamma_1}{\tau}. \tag{28$_1$}$$

Рассмотрение подвижного триэдра дает непосредственно $\mathbf{n}=-\mathbf{t}\times\mathbf{b}$, и, дифференцируя по s, получим

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{n}\times\mathbf{b}-\frac{1}{\tau}\mathbf{t}\times\mathbf{n}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}-\frac{1}{\tau}\mathbf{b}.$$

Это дает три последние формулы Френе:

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau},\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}. \tag{28$_2$}$$

Пользуясь формулами (28), нетрудно показать, что *если вдоль линии (L) кривизна* $\frac{1}{\rho}$ *равна нулю, то это есть прямая линия.* Действительно, тождество $\frac{1}{\rho}=0$ дает

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0,$$

откуда видно, что α, β и γ суть постоянные. Но, как известно [**I, 160**], направляющие косинусы касательной α, β и γ равны соответственно $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, и раз эти производные — постоянные, то сами координаты x, y, z суть полиномы первой степени от s, т. е. линия есть действительно прямая.

Точно так же нетрудно показать, что *если вдоль кривой кручение равно нулю, то эта кривая есть плоская кривая.*

138. Соприкасающаяся плоскость. Плоскость, определяемая векторами **t** и **n**, называется *соприкасающейся плоскостью* кривой. Нормалью к этой плоскости служит вектор **b**. Найдем выражения для направляющих косинусов этого вектора.

Ввиду того, что это — единичный вектор, его направляющие косинусы равны его составляющим b_x, b_y, b_z. Из формул (17) вытекает

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2=b_x&=t_yn_z-t_zn_y,\\ \beta_2=b_y&=t_zn_x-t_xn_z,\\ \gamma_2=b_z&=t_xn_y-t_yn_x,\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где t_x, ..., n_x, ... — составляющие векторов **t** и **n**. Но, как мы видели выше, t_x, t_y, t_z пропорциональны dx, dy, dz, а n_x, n_y, n_z — пропорциональны составляющим вектора **N**, которые равны $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ и $\frac{d^2z}{ds^2}$,

а эти последние в свою очередь, в силу (24), пропорциональны разностям

$$d^2x\,ds - d^2s\,dx, \qquad d^2y\,ds - d^2s\,dy, \qquad d^2z\,ds - d^2s\,dz. \tag{30}$$

Заменяя в формулах (29) t_x, t_y, t_z на dx, dy, dz; n_x, n_y, n_z — разностями (30) и производя сокращения, убедимся в том, что направляющие косинусы бинормали пропорциональны выражениям

$$\left.\begin{aligned} A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \\ C = dx\,d^2y - dy\,d^2x, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

которые мы ввели выше [**136**]. Обозначая через (x, y, z) координаты переменной точки M кривой (L), можем написать уравнение соприкасающейся плоскости в виде

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

В тех точках, где длина $|\mathbf{N}| = 0$, т. е. $\rho = \infty$, все три величины (31) равны нулю, как это следует из (27), и соприкасающаяся плоскость не определена. Не определено и направление главной нормали и бинормали.

139. Винтовые линии. Пусть имеется цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, и пусть (l) есть его направляющая, лежащая в плоскости XOY (рис. 105). Введем в рассмотрение длину дуги σ кривой (l), отсчитываемую от точки A пересечения этой кривой с осью OX в определенном направлении, и положим, что уравнение направляющей будет

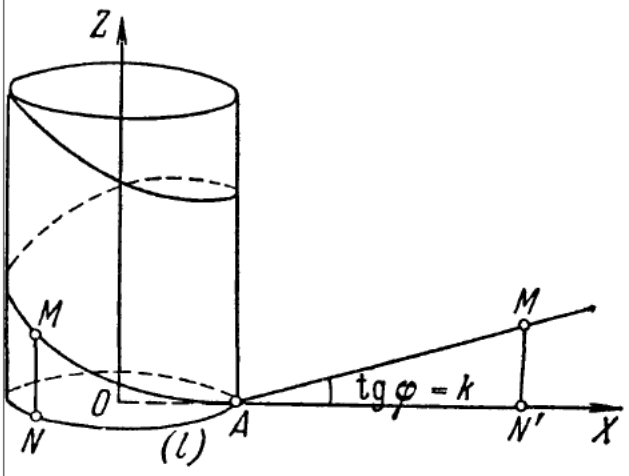


Рис. 105.

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma). \tag{32}$$

Откладываем на (l) некоторую дугу AN и строим отрезок $NM = k\sigma$, параллельный оси OZ, причем k есть определенный численный коэффициент (ход винта). Геометрическое место точек M дает винтовую линию (L), начерченную на нашем цилиндре. Параметрические уравнения этой линии будут очевидно

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad z = k\sigma. \tag{33}$$

Пусть s — длина дуги кривой (L), отсчитываемая от точки A. Имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + k^2]\,d\sigma^2.$$

Но $\varphi'(\sigma)$ и $\psi'(\sigma)$ равны косинусу и синусу угла, образованного касательной к кривой (l) с осью OX [**I, 70**], а потому $\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1$, и предыдущую формулу можно переписать в виде

$$ds = \sqrt{1 + k^2}\,d\sigma,$$

откуда

$$s = \sqrt{1 + k^2}\,\sigma.$$

Определим теперь косинус угла, образованного касательной к (L) с осью OZ:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$$

это дает *первое свойство винтовой линии: касательные к винтовой линии образуют постоянный угол с некоторым неизменным направлением.*

Обратимся к третьей из формул (28). В данном случае она дает

$$0 = \frac{\gamma_1}{\rho} \text{ или } \gamma_1 = 0,$$

и, следовательно, главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к оси OZ, т. е. к образующей цилиндра. Но она, с другой стороны, перпендикулярна к касательной к винтовой линии. Образующая цилиндра и касательная к винтовой линии определяют, как нетрудно видеть, касательную плоскость к цилиндру во взятой точке на винтовой линии, и из предыдущего вытекает, что главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к этой касательной плоскости. Мы получаем таким образом *второе свойство винтовой линии: главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру, на котором эта винтовая линия начертена.*

Теперь обратимся к косинусам γ, γ_1, γ_2 — углов, образованных осью OZ с направлениями подвижного триэдра винтовой линии. Принимая во внимание, что $\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ и что γ и γ_1 — постоянные, как мы видели уже, мы можем заключить, что и γ_2 есть величина постоянная. Третья из формул (28_2) дает, в нашем случае, $-\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma_2}{\tau} = 0$, откуда мы видим, что отношение $\frac{\rho}{\tau}$ есть величина постоянная; итак, имеем *третье свойство винтовой линии: вдоль винтовой линии отношение радиуса кривизны к радиусу кручения есть величина постоянная.* Обозначим буквой r радиус кривизны плоской кривой (l). Принимая во внимание, что квадрат кривизны равен сумме квадратов вторых производных от координат по длине дуги, мы можем написать

$$\frac{1}{r^2} = \varphi''^2(\sigma) + \psi''^2(\sigma)$$

и

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right] \frac{1}{(1+k^2)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} + \frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+k^2)^2 r^2},$$

или $\rho = (1+k^2) r$, т. е. радиус кривизны винтовой линии отличается от радиуса кривизны направляющей в соответствующей точке лишь постоянным множителем. Если цилиндр круговой, т. е. направляющая (l) есть окружность, то r — постоянно, следовательно, и ρ — постоянно, но тогда, согласно третьему свойству, и τ тоже есть постоянная величина, т. е. *винтовая линия на круговом цилиндре имеет постоянную кривизну и постоянное кручение.*

В заключение выясним еще одно важное свойство винтовых линий. Оно заключается в том, что если взять на цилиндре две точки, то кратчайшее

расстояние между этими двумя точками на цилиндре будет даваться винтовой линией, проходящей через эти две точки. В этом отношении винтовые линии на цилиндре совершенно аналогичны прямым линиям на плоскости. Указанное свойство обычно выражают, говоря, что *винтовые линии суть геодезические линии цилиндра. Вообще геодезическими линиями на заданной поверхности называют линии, дающие кратчайшее расстояние между двумя точками поверхности.*

Если мы развернем цилиндр на плоскость XOZ, поворачивая его вокруг образующей, проходящей через точку A, то, в силу того, что отношение дуги AN к отрезку NM сохраняет постоянное значение $\frac{1}{k}$, винтовая линия на плоскости окажется прямой линией. При указанной развертке цилиндра на плоскость длины сохраняются, и упомянутое выше свойство винтовой линии — давать кратчайшее расстояние на цилиндре — становится очевидным. Заметим, что это свойство стоит в непосредственной связи со вторым свойством винтовой линии, т. е. с тем фактом, что главные нормали винтовой линии совпадают с нормалями к цилиндру. В геометрии вообще доказывают, что *главные нормали к геодезической линии на любой поверхности совпадают с нормалями к этой поверхности.*

140. Поле единичных векторов. Пусть $\mathbf{t}$ — поле единичных векторов, т. е. в каждой точке пространства задан единичный вектор $\mathbf{t}$. Выведем простую и важную формулу для вектора кривизны $\mathbf{N}$ векторных линий этого поля. Вводя координаты (x, y, z) и длину дуги s векторной линии, мы можем написать

$$\frac{dx}{ds} = t_x, \quad \frac{dy}{ds} = t_y, \quad \frac{dz}{ds} = t_z.$$

Определим составляющую N_x вектора кривизны

$$N_x = \frac{dt_x}{ds} = \frac{\partial t_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

или

$$N_x = \frac{\partial t_x}{\partial x} t_x + \frac{\partial t_x}{\partial y} t_y + \frac{\partial t_x}{\partial z} t_z.$$

Дифференцируя тождество

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$$

по x, получим

$$t_x \frac{\partial t_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial t_y}{\partial x} + t_z \frac{\partial t_z}{\partial x} = 0.$$

Вычитая эту сумму из полученного выше выражения N_x, можем переписать его в виде

$$N_x = \left(\frac{\partial t_x}{\partial z} - \frac{\partial t_z}{\partial x}\right) t_z - \left(\frac{\partial t_y}{\partial x} - \frac{\partial t_x}{\partial y}\right) t_y,$$

т. е. $N_x = (\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t})_x$, и то же самое, очевидно, получится и для двух других составляющих, что и дает искомую формулу для вектора кривизны векторных линий:

$$\mathbf{N} = \operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t}. \tag{34}$$

Для того чтобы линии были прямыми, необходимо и достаточно, чтобы длина $\mathbf{N}$, т. е. кривизна $\frac{1}{\rho}$, была равна нулю [137]. Отсюда видно, что *для*

того чтобы векторные линии единичного поля $\mathbf{t}$ *были прямые, необходимо и достаточно,* чтобы

$$\operatorname{rot}\mathbf{t}\times\mathbf{t}=0. \tag{35}$$

Кроме того мы видели, что для существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям, необходимо и достаточно [122]

$$\operatorname{rot}\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}=0. \tag{36}$$

Совместное выполнение условий (35) и (36) возможно лишь в случае $\operatorname{rot}\mathbf{t}=0$, ибо если этот вектор отличен от нуля, то условие (35) равносильно параллельности векторов $\operatorname{rot}\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$, а условие (36) равносильно их перпендикулярности. Отсюда следует, что *векторные линии поля единичных векторов* $\mathbf{t}$ *будут нормалями к некоторому семейству поверхностей лишь в том случае, когда* $\operatorname{rot}\mathbf{t}=0$. Это предложение играет важную роль при изложении начал геометрической оптики.

§ 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

141. Параметрические уравнения поверхности. До сих пор мы рассматривали уравнение поверхности в пространстве с координатными осями X, Y, Z в явной форме $z=f(x, y)$ или в неявной форме

$$F(x, y, z)=0. \tag{37}$$

Можно написать уравнения поверхности в параметрической форме, выражая координаты ее точек в виде функций двух независимых переменных параметров u и v:

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v), \qquad z=\omega(u, v). \tag{38}$$

Мы будем предполагать, что эти функции однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные до второго порядка в некоторой области изменения параметров (u, v).

Если подставить эти выражения координат через u и v в левую часть уравнения (37), то мы должны получить тождество относительно u и v. Дифференцируя это тождество по независимым переменным u и v, будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=0.$$

Рассматривая эти уравнения как два однородных уравнения относительно $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ и применяя алгебраическую лемму, упомянутую в [116], получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=k\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Мы считаем, что множитель k и по крайней мере одна из разностей, стоящих в правых частях последних формул, отличны от нуля.

Обозначим для краткости написанные три разности следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{d(y,z)}{d(u,v)},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{d(z,x)}{d(u,v)},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d(x,y)}{d(u,v)}.$$

Как известно, уравнение касательной плоскости к нашей поверхности в некоторой ее точке (x, y, z) можно написать в виде **[I, 160]**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

или, заменяя $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ пропорциональными величинами, можем переписать уравнение касательной плоскости так:

$$\frac{d(y,z)}{d(u,v)}(X-x)+\frac{d(z,x)}{d(u,v)}(Y-y)+\frac{d(x,y)}{d(u,v)}(Z-z)=0. \qquad (39)$$

Коэффициенты в этом уравнении, как известно, пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности.

Положение переменной точки M на поверхности характеризуется значениями параметров u и v, и эти параметры называются обычно координатами точек поверхности или координатными параметрами.

Придавая параметрам u и v постоянные значения, получим два семейства линий на поверхности, которые мы назовем координатными линиями поверхности: координатные линии $u=C_1$, вдоль которых меняется только v, и координатные линии $v=C_2$, вдоль которых меняется только u. Эти два семейства координатных линий дают координатную сетку на поверхности.

В качестве примера рассмотрим сферу с центром в начале координат и радиусом R. Параметрические уравнения такой сферы могут быть написаны в виде

$$x=R\sin u\cos v,\qquad y=R\sin u\sin v,\qquad z=R\cos u.$$

Координатные линии $u=C_1$ и $v=C_2$ представляют собой в данном случае, очевидно, параллели и меридианы нашей сферы.

Отвлекаясь от координатных осей, мы можем охарактеризовать поверхность переменным радиусом-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, идущим из постоянной точки O в переменную точку M нашей поверхности. Частные производные от этого радиуса-вектора по параметрам $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ дадут, очевидно, векторы, направленные по касательным к координатным линиям. Составляющие этих векторов по осям OX, OY, OZ

будут, согласно (38), φ'_u, ψ'_u, ω'_u и φ'_v, ψ'_v, ω'_v, и отсюда видно, что коэффициенты в уравнении касательной плоскости (39) суть составляющие векторного произведения $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$. Это векторное произведение есть вектор, перпендикулярный к касательным $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$, т. е. вектор, направленный по нормали поверхности. Квадрат длины этого вектора выражается, очевидно, скалярным произведением вектора $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ на самого себя, т. е. проще говоря, квадратом этого вектора [1]). В дальнейшем будет играть существенную роль единичный вектор нормали к поверхности, который мы можем, очевидно, написать в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2}}. \tag{40}$$

Изменяя порядок сомножителей в написанном векторном произведении, мы получим для вектора (40) противоположное направление. Мы будем в дальнейшем определенным образом фиксировать порядок множителей, т. е. будем определенным образом фиксировать направление нормали к поверхности.

Возьмем на поверхности некоторую точку M и проведем через эту точку какую-либо кривую (L), лежащую на поверхности. Эта кривая, вообще говоря, не координатная линия, и вдоль нее будут меняться как u, так и v. Направление касательной к этой кривой будет определяться вектором $\mathbf{r}'_u + \mathbf{r}'_v \frac{dv}{du}$, если считать, что вдоль (L) в окрестности точки M параметр v есть функция от u, имеющая производную. Отсюда видно, что *направление касательной к кривой, проведенной на поверхности, в какой-либо точке M этой кривой, вполне характеризуется величиной $\frac{dv}{du}$ в этой точке.* При определении касательной плоскости и выводе ее уравнения (39) мы считали, что функции (38) в рассматриваемой точке и ее окрестности имеют непрерывные частные производные и что, по крайней мере, один из коэффициентов уравнения (39) отличен от нуля в рассматриваемой точке.

Если $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ при $u = u_0$, $v = v_0$, то то же будет иметь место и в некоторой окрестности указанных значений. Согласно первым двум из формул (38) эта окрестность перейдет в окрестность значений $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, и для значений (x, y), достаточно близких к (x_0, y_0), первые два из уравнений (38) могут быть решены относительно u и v [**I, 157**], т. е. (u, v) могут быть выражены через x и y. Подстановка этих выражений в третье из уравнений (38) дает в окрестности рассматриваемой точки уравнение поверхности в явной форме $z = f(x, y)$.

---

[1]) Вообще, если $\mathbf{A}$ есть некоторый вектор, то мы будем обозначать через $\mathbf{A}^2$ квадрат длины этого вектора, т. е. скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

142. Первая дифференциальная форма Гаусса. Рассмотрим теперь квадрат дифференциала дуги какой-нибудь кривой на нашей поверхности

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)^2.$$

Открывая скобки, будем иметь так называемую *первую дифференциальную форму Гаусса:*

$$ds^2 = E(u,\ v)\,du^2 + 2F(u,\ v)\,du\,dv + G(u,\ v)\,dv^2, \qquad (41)$$

где

$$\left.\begin{aligned} E(u,\ v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F(u,\ v) &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G(u,\ v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

или

$$E = \mathbf{r}_u'^2, \qquad F = \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v', \qquad G = \mathbf{r}_v'^2. \qquad (42_1)$$

Совершенно так же, как и в [131], можно показать, что равенство нулю коэффициента F является необходимым и достаточным условием того, чтобы координатные линии $u = C_1$ и $v = C_2$ были взаимно перпендикулярны. В этом частном случае криволинейные координаты u, v на поверхности называются *ортогональными координатами.*

Выведем теперь выражение для элемента площади поверхности через коэффициенты выражения (41). Рассмотрим на поверхности малую площадку, ограниченную двумя парами близких координатных линий (рис. 106). Пусть $(u,\ v)$ — координаты основной вершины A. Стороны AD и AB будут соответственно $\mathbf{r}_u'\,du$ и $\mathbf{r}_v'\,dv$. Принимая рассматриваемую малую площадку за параллелограмм [ср. **60**], мы можем написать выражение площади этого параллелограмма как длины вектора, получаемого при векторном перемножении упомянутых векторов, т. е.

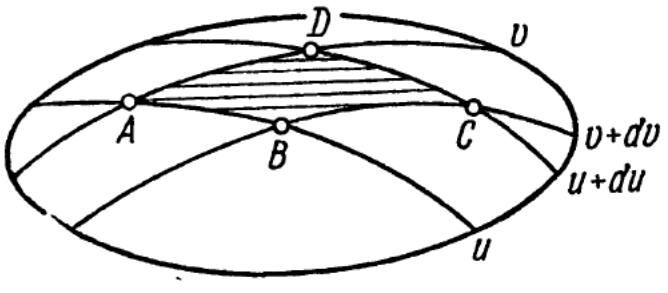


Рис. 106.

$$dS = |\mathbf{r}_u'\,du \times \mathbf{r}_v'\,dv| = |\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'|\,du\,dv.$$

Имеем для квадрата длины вектора

$$(\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v')^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

откуда, в силу тождества (26) из [136],

$$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2, \tag{43}$$

и для элемента площади поверхности будем окончательно иметь

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{44}$$

Точно так же, подставляя (43) в формулу (40), можем написать выражение единичного вектора нормали к поверхности в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{45}$$

Заметим, что, в силу (43), разность $EG - F^2$ положительна.

143. Вторая дифференциальная форма Гаусса. Рассмотрим какую-нибудь линию (L) на поверхности и пусть $\mathbf{t}$ — ее единичный вектор касательной. Он, очевидно, перпендикулярен к единичному вектору нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = 0$. Дифференцируя это соотношение по длине дуги s кривой (L), будем иметь

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0,$$

где ρ — радиус кривизны и $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали кривой (L). Предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{\cos\varphi}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m}}{ds^2},$$

где φ — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой (L). Выражая дифференциалы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ через координатные параметры u и v, можно написать

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{-(\mathbf{r}'_u\, du + \mathbf{r}'_v\, dv) \cdot (\mathbf{m}'_u\, du + \mathbf{m}'_v\, dv)}{ds^2}. \tag{46}$$

Раскрывая в числителе скобки, получим *вторую дифференциальную форму Гаусса:*

$$-(\mathbf{r}'_u\, du + \mathbf{r}'_v\, dv) \cdot (\mathbf{m}'_u\, du + \mathbf{m}'_v\, dv) = L(u, v)\, du^2 + 2M(u, v)\, du\, dv + N(u, v)\, dv^2,$$

где

$$L = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_u, \qquad M = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u), \qquad N = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_v, \tag{47}$$

и формула (46) окончательно примет вид

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}. \tag{48}$$

Укажем теперь другие выражения для коэффициентов L, M и N. Дифференцируя очевидные соотношения

$$\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m} = 0, \qquad \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m} = 0$$

по независимым переменным u и v, получим четыре соотношения

$$\mathbf{r}''_{u^2} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_u = 0, \qquad \mathbf{r}''_{uv} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0,$$
$$\mathbf{r}''_{vu} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u = 0, \qquad \mathbf{r}''_{v^2} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_v = 0,$$

и отсюда можем, вместо формул (47), написать следующие выражения для коэффициентов второй дифференциальной формы Гаусса:

$$L = \mathbf{r}''_{u^2} \cdot \mathbf{m}, \qquad N = \mathbf{r}''_{v^2} \cdot \mathbf{m},$$
$$M = \mathbf{r}''_{uv} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u. \tag{49}$$

Вспоминая выражение (45) для вектора $\mathbf{m}$, можем переписать равенства (49) в виде

$$L = \frac{\mathbf{r}''_{u^2} \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad M = \frac{\mathbf{r}''_{uv} \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$
$$N = \frac{\mathbf{r}''_{v^2} \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{50}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение поверхности дано в явном виде

$$z = f(x, y). \tag{51}$$

В данном случае роль параметров играют x и y, и мы будем иметь следующие выражения для составляющих радиуса-вектора и его производных по параметрам:

$$\mathbf{r}(x, y, z), \quad \mathbf{r}'_x(1, 0, p), \quad \mathbf{r}'_y(0, 1, q),$$
$$\mathbf{r}''_{x^2}(0, 0, r), \quad \mathbf{r}''_{xy}(0, 0, s), \quad \mathbf{r}''_{y^2}(0, 0, t),$$

где

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{52}$$

Применяя формулы (42_1) и (50), получим выражения коэффициентов в обеих формах Гаусса:

$$F = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$
$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{53}$$

Выберем теперь координатные оси определенным образом, а именно поместим начало координат в некоторую точку A_0 на поверхности,

оси OX и OY возьмем в касательной плоскости к поверхности в точке A_0 и ось OZ направим по нормали поверхности. Значком нуль будем обозначать тот факт, что соответствующая величина взята в точке A_0. При сделанном выборе координатных осей косинусы углов, образованных нормалью к поверхности с осями OX и OY, будут в точке A_0 равны нулю, мы получим [**65**] $p_0 = q_0 = 0$, и формулы (53) дадут в точке A_0:

$$L_0 = r_0, \qquad M_0 = s_0, \qquad N_0 = t_0. \tag{54}$$

144. О кривизне линий, начерченных на поверхности. Вернемся к рассмотрению формулы (48). Ее правая часть зависит от значений коэффициентов двух форм Гаусса и от отношения $\frac{dv}{du}$. Последнее обстоятельство станет непосредственно ясным, если разделить числитель и знаменатель на du^2. Упомянутые коэффициенты суть функции параметров (u, v) и в заданной точке поверхности имеют определенное численное значение. Что же касается отношения $\frac{dv}{du}$, то оно, как мы видели [**141**], характеризует направление касательной к кривой. Мы можем поэтому утверждать, что обе части формулы (48) имеют определенное значение, если фиксировать точку на поверхности и направление касательной к той кривой на поверхности, которую мы рассматриваем. Если же взять на поверхности в фиксированной точке две кривые, имеющие не только одинаковое направление касательных, но и одинаковое направление главной нормали, то у таких кривых и угол φ будет одинаковым, а потому, в силу упомянутой формулы, и величина ρ окажется одной и той же, т. е. мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. *Две кривые на поверхности с одинаковой касательной и главной нормалью в некоторой точке имеют в этой точке и одинаковый радиус кривизны.*

Если на поверхности имеется какая угодно кривая (L) и на ней некоторая точка M, то, проводя плоскость через касательную и главную нормаль к этой кривой в точке M, мы получим в сечении этой плоскости с поверхностью плоскую кривую (L_0), имеющую ту же касательную и главную нормаль, что и заданная кривая, а потому и тот же радиус кривизны. Таким образом доказанная теорема дает возможность сводить изучение кривизны любой кривой на поверхности к изучению кривизны плоских сечений поверхности.

Назовем *нормальным сечением* поверхности в заданной точке M сечение поверхности какой-нибудь плоскостью, проходящей через нормаль поверхности в точке M. Мы имеем, очевидно, бесчисленное множество нормальных сечений, причем мы можем фиксировать определенное нормальное сечение, задавая определенное направление касательной в касательной плоскости к поверхности, т. е. фиксируя

величину отношения $\frac{dv}{du}$. Заметим, что главная нормаль у нормального сечения или совпадает, или противоположна вектору $\mathbf{m}$, так что угол φ равен 0 или π, и, следовательно, $\cos\varphi = \pm 1$.

Рассмотрим какую-нибудь кривую (L) на поверхности и на ней определенную точку M. Назовем нормальным сечением, соответствующим кривой (L) в точке M, то нормальное сечение в точке M, которое имеет в этой точке общую касательную с кривой (L). Пусть ρ — радиус кривизны кривой (L) и R — радиус кривизны соответствующего нормального сечения. Так как обе кривые имеют одну и ту же касательную, то правые части в формуле (48) для них одинаковы, и мы можем написать

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\pm 1}{R}, \quad \text{т. е.} \quad \rho = R \cdot |\cos\varphi|, \tag{55}$$

где φ — угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности. Поскольку R и ρ положительны, знак в правой части надо брать совпадающим со знаком $\cos\varphi$. Последняя формула приводит к следующей теореме:

Теорема 2 (теорема Менье). *Радиус кривизны любой кривой на поверхности в заданной точке равен произведению радиуса кривизны соответствующего нормального сечения на абсолютное значение косинуса угла между нормалью к поверхности в этой точке и главной нормалью к кривой.*

Иначе говоря, радиус кривизны любой кривой на поверхности равен величине проекции радиуса кривизны соответствующего нормального сечения, отложенного на нормали к поверхности, на главную нормаль к этой кривой.

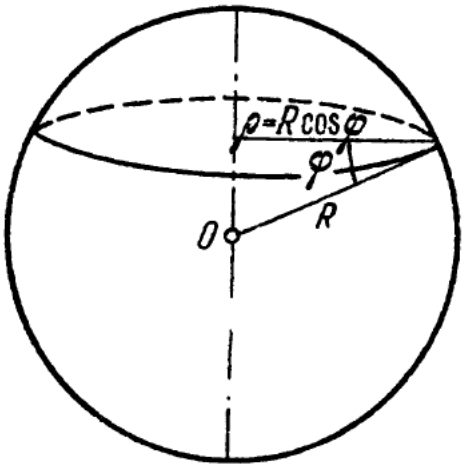


Рис. 107.

В случае сферы нормальное сечение есть окружность большого круга, и если мы за кривую (L) возьмем какую-либо окружность, начерченную на сфере, то формула (55) приводит к очевидному соотношению между радиусами двух упомянутых окружностей (рис. 107).

Согласно теореме второй, изучение кривизны кривых на поверхности сводится к изучению кривизны нормальных сечений в заданной точке поверхности. Как мы видели, для нормального сечения в формуле (48) надо считать $\cos\varphi = \pm 1$. Согласимся относить знак (—), когда он встретится, к величине ρ, т. е. согласимся считать радиус кривизны нормального сечения отрицательным, если главная нормаль нормального сечения противоположна направлению вектора $\mathbf{m}$, т. е. противоположна выбранному направлению нормали к поверхности. При

таком соглашении мы будем иметь для нормальных сечений формулу

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{56}$$

Напомним еще раз, что в правой части этой формулы коэффициенты дифференциальных форм имеют определенное значение, так как мы фиксировали некоторую точку на поверхности, и величина $\frac{1}{R}$ зависит лишь от значения отношения $\frac{dv}{du}$, т. е. от выбора направления касательной. Знаменатель в правой части формулы (56) имеет всегда положительные значения, так как выражает величину ds^2, а потому знак кривизны $\frac{1}{R}$ нормального сечения определяется знаком числителя, и могут представиться следующие три случая:

1. Если во взятой точке $M^2-LN<0$, то для всех нормальных сечений $\frac{1}{R}$ имеет один и тот же знак, т. е. главные нормали ко всем нормальным сечениям направлены в одну и ту же сторону. Такая точка поверхности называется *эллиптической.*

2. Если $M^2-LN>0$, то $\frac{1}{R}$ будет иметь различные знаки, т. е. во взятой точке поверхности имеются нормальные сечения с противоположным направлением главной нормали. Такая точка поверхности называется *гиперболической.*

3. Если $M^2-LN=0$, то при этом числитель в правой части формулы (56) представляет собой полный квадрат, и здесь $\frac{1}{R}$ не меняет знака, но при одном положении нормального сечения обращается в нуль. Такая точка поверхности называется *параболической.*

Заметим, что в гиперболическом случае трехчлен, стоящий в числителе правой части формулы (56), меняя знак, обращается в нуль, и будут два нормальных сечения с кривизной, равной нулю. В эллиптическом же случае таких сечений не будет.

Введем координатные оси, приняв взятую точку поверхности за начало и поместив оси OX и OY в касательной плоскости, как мы это делали в [**142**].

В силу формул (54) равенство (56) примет вид

$$\frac{1}{R}=\frac{r_0\,dx^2+2s_0\,dx\,dy+t_0\,dy^2}{ds^2}.$$

Касательная к нормальному сечению лежит в плоскости XOY, и отношения $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ равны соответственно $\cos\theta$ и $\sin\theta$, где θ — угол, образованный касательной с осью OX. Таким образом предыдущая

формула принимает вид

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\theta + 2s_0 \cos\theta \sin\theta + t_0 \sin^2\theta. \qquad (57)$$

В этой формуле мы имеем в явном виде зависимость кривизны $\frac{1}{R}$ от направления касательной, характеризуемого углом θ. При этом, если $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$, то точка будет эллиптической, в случае $s^2 - r_0 t_0 > 0$ — гиперболической, а в случае $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$ — параболической.

В случае $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$ функция $z = f(x, y)$ будет иметь в рассматриваемой точке максимум или минимум [**I, 163**], равный нулю, т. е. поверхность вблизи этой точки будет расположена по одну сторону от касательной плоскости. При $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$ не будет ни максимума, ни минимума, т. е. в любом соседстве с рассматриваемой точкой поверхность будет расположена по обе стороны от касательной плоскости. Наконец, в параболической точке, где $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$, ничего определенного о расположении поверхности относительно касательной плоскости сказать нельзя.

Из формул (53) непосредственно вытекает, что знак $(M^2 - LN)$ при любом выборе осей XYZ совпадает со знаком $(s^2 - rt)$ и, следовательно, при $s^2 - rt < 0$ точка будет эллиптической, при $s^2 - rt > 0$ — гиперболической и при $s^2 - rt = 0$ — параболической.

На одной и той же поверхности могут быть точки разных родов. Например, на торе, который получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в одной плоскости с окружностью и вне ее [**I, 107**], точки, лежащие с внешней стороны, будут эллиптическими, а с внутренней стороны — гиперболическими. Эти две области отделяются одна от другой крайними параллелями тора, все точки которых суть параболические точки.

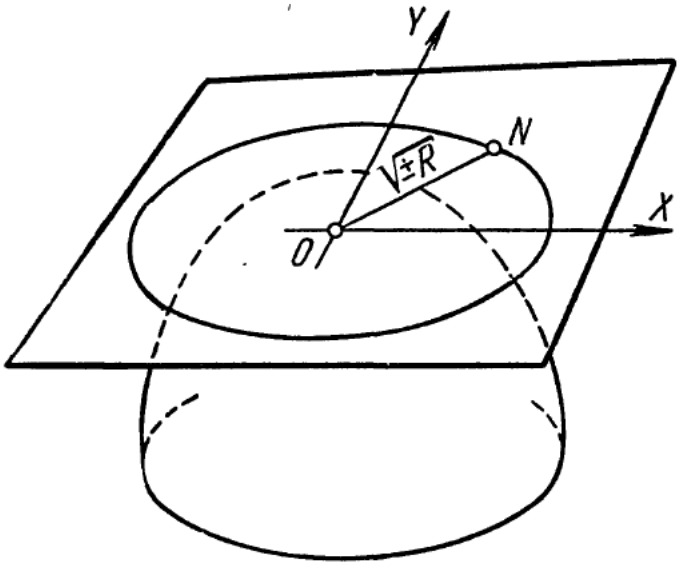


Рис. 108.

145. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера. Фиксируя координатные оси так, как это было указано в предыдущем номере, построим в касательной плоскости, т. е. в плоскости XOY, вспомогательную кривую следующим образом: на всяком радиусе-векторе из начала O отложим отрезок $ON = \sqrt{\pm R}$, где R — радиус кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной. Знак $(\pm)$ выбираем так, чтобы под радикалом оказалась положительная величина. Геометрическое место концов N построенных отрезков дает кривую, которая называется *индикатрисой Дюпена*. Свойство этой кри-

вой, согласно построению, следующее: квадрат любого ее радиуса-вектора дает абсолютное значение радиуса кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной (рис. 108).

Составим уравнение индикатрисы Дюпена. Пусть (ξ, η) — координаты переменной точки N на индикатрисе. Согласно построению

$$\xi = \sqrt{\pm R}\cos\theta,$$

$$\eta = \sqrt{\pm R}\sin\theta,$$

т. е.

$$\xi^2 = \pm R\cos^2\theta,$$

$$\eta^2 = \pm R\sin^2\theta,$$

причем при положительном R надо брать верхний знак, а при отрицательном — нижний. Умножая обе части равенства (57) на $\pm R$, получим, в силу (57):

$$r_0\xi^2 + 2s_0\xi\eta + t_0\eta^2 = \pm 1. \tag{58}$$

Это и есть уравнение индикатрисы Дюпена. Кривая эта дает геометрически наглядное представление об изменении величины радиуса кривизны при вращении нормального сечения вокруг нормали к поверхности. В эллиптическом случае кривая (58) есть эллипс, и в правой части надо брать определенный знак. В гиперболическом случае уравнению (58) соответствуют две сопряженные гиперболы. В параболическом же случае левая часть уравнения (58) есть полный квадрат, и его можно переписать в виде

$$k(a\xi + b\eta)^2 = \pm 1, \quad \text{т. е.} \quad (a\xi + b\eta)^2 = \pm\frac{1}{k} = l^2$$

или

$$a\xi + b\eta = \pm l,$$

и мы имеем совокупность двух параллельных прямых. Во всех трех случаях точка O является центром кривой, и кривая имеет две оси симметрии. Мы можем выбрать оси OX и OY совпадающими с этими осями симметрии; при этом, как известно, в левой части уравнения (58) пропадает член, содержащий произведение $\xi\eta$, т. е. при указанном выборе осей должно быть $s_0 = 0$, и формула (57) даст при таком выборе осей OX и OY

$$\frac{1}{R} = r_0\cos^2\theta + t_0\sin^2\theta. \tag{59}$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов r_0 и t_0. Полагая в формуле (59) $\theta = 0$, мы получим кривизну $\frac{1}{R_1}$ нормального сечения, касающегося оси OX, и, следовательно, $r_0 = \frac{1}{R_1}$. Точно так же,

полагая $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим, $t_0 = \frac{1}{R_2}$, где $\frac{1}{R_2}$ — кривизна нормального сечения, касающегося оси OY. Подставляя найденные значения r_0 и t_0 в формулу (59), получим *формулу Эйлера*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{60}$$

Заметим, что направления осей OX и OY совпадают с направлениями осей симметрии кривой (58). Положим, что $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$ и что, например, $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$. Из формулы (60) непосредственно следует, что $\frac{1}{R}$ достигает наибольшего значения при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ и наименьшего значения — при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Полученный результат формулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *В каждой точке поверхности существуют два взаимно перпендикулярных направления в касательной плоскости, для которых кривизна* $\frac{1}{R}$ *достигает максимума и минимума, и если* $\frac{1}{R_1}$ *и* $\frac{1}{R_2}$ *— соответствующие этим направлениям значения кривизны, то кривизна любого нормального сечения выражается по формуле* (60), *где* θ *— угол, образованный касательной к рассматриваемому нормальному сечению с тем направлением, которое дает кривизну* $\frac{1}{R_1}$.

Радиусы кривизны R_1 и R_2 называются *главными радиусами кривизны нормальных сечений* в рассматриваемой точке. Те два направления в касательной плоскости, которые их дают, называются *главными направлениями*. Кроме того в гиперболическом случае полезно отметить еще два направления в касательной плоскости, а именно — направления асимптот индикатрисы Дюпена. Для этих *асимптотических направлений* радиус-вектор индикатрисы равен бесконечности, и кривизна соответствующего нормального сечения в рассматриваемой точке равна нулю.

В эллиптическом случае R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки. В гиперболическом случае эти величины будут разных знаков. В параболическом же случае кривизна одного из главных нормальных сечений будет равна нулю, и, считая, например, $\frac{1}{R_2} = 0$, мы будем иметь в параболическом случае формулу

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1}.$$

Отметим еще один частный случай точек поверхности эллиптического типа, а именно тот случай, когда величины R_1 и R_2 одинаковы, т. е. $R_1 = R_2$. Формула (60) даст при этом $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}$, т. е. в данном случае все нормальные сечения имеют в рассматриваемой точке одинаковую кривизну. Такая точка поверхности называется *точкой закругления,* или *омбилической точкой.* Можно доказать, что сфера — единственная поверхность, все точки которой омбилические.

146. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений. Перепишем основную формулу (56) для кривизны нормального сечения в виде

$$(L - ER^{-1})\,du^2 + 2(M - FR^{-1})\,du\,dv + (N - GR^{-1})\,dv^2 = 0. \quad (61)$$

Деля на dv^2 и вводя вспомогательную величину $t = \frac{du}{dv}$, характеризующую направление касательной к нормальному сечению, получим уравнение:

$$\varphi(R^{-1}, t) = (L - ER^{-1})\,t^2 + 2(M - FR^{-1})\,t + (N - GR^{-1}) = 0,$$

из которого кривизна R^{-1} нормального сечения определяется в зависимости от t. Для главных направлений величина R^{-1} должна достигать максимума или минимума, а потому производная от R^{-1} по t должна обращаться в нуль. Но эта производная выражается, очевидно, формулой [I, 69]

$$\frac{dR^{-1}}{dt} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial R^{-1}}},$$

и, следовательно, для главных направлений производная $\frac{d\varphi}{dt}$ должна обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (L - ER^{-1})\,t + (M - FR^{-1}) = 0.$$

Заменяя $t = \frac{du}{dv}$ и умножая на dv, получим

$$(L - ER^{-1})\,du + (M - FR^{-1})\,dv = 0. \quad (62)$$

Если бы мы разделили уравнение (61) на du^2 и за переменную, характеризующую направление касательной, взяли бы $t_1 = \frac{dv}{du}$, то совершенно так же получили бы для главных направлений равенство

$$(M - FR^{-1})\,du + (N - GR^{-1})\,dv = 0. \quad (63)$$

Перенося в равенствах (62) и (63) члены с dv направо и почленно деля одно равенство на другое, мы получим квадратное уравнение для определения кривизны главных нормальных сечений, т. е. $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$:

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}+(2FM-EN-GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0. \qquad (64)$$

Выражение

$$K=\frac{1}{R_1R_2} \qquad (65)$$

называется *гауссовой кривизной поверхности* в заданной точке, а выражение

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (66)$$

называется *средней кривизной.* Из квадратного уравнения (64) получаем непосредственно выражение гауссовой и средней кривизны через коэффициенты первой и второй формы Гаусса:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \qquad H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}. \qquad (67)$$

Перепишем уравнения (62) и (63) в виде

$$(Ldu+Mdv)R=Edu+Fdv, \qquad (Mdu+Ndv)R=Fdu+Gdv.$$

Разделив почленно одно на другое, мы исключим букву R и после элементарных преобразований получим уравнение

$$(EM-FL)\,du^2+(EN-GL)\,du\,dv+(FN-GM)\,dv^2=0. \qquad (68)$$

Деля его на du^2, будем иметь квадратное уравнение относительно $\frac{dv}{du}$. Его два корня дадут нам величины, характеризующие главные направления в каждой точке поверхности:

$$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u,\ v),\ \ \frac{dv}{du}=\varphi_2(u,\ v). \qquad (69)$$

147. Линии кривизны. *Линией кривизны на поверхности* называется такая линия на поверхности, у которой в каждой ее точке касательная направлена по главному направлению. Так как в каждой точке поверхности имеются два главных направления, то мы будем иметь два семейства линий кривизны на поверхности, и эти семейства будут взаимно ортогональны. Таким образом совокупность всех линий кривизны даст некоторую ортогональную сетку на поверхности. Уравнение (68) или эквивалентные ему уравнения (69) суть дифференциальные уравнения линий кривизны. Интегрируя их, мы выразим v через u

и, подставляя это выражение в уравнения поверхности, получим уравнения линий кривизны.

Пусть нам дана некоторая координатная сетка на поверхности. Выясним условия, при которых эта сетка есть сетка линий кривизны. Прежде всего, раз эта сетка должна быть сеткой линий кривизны, то она должна быть ортогональной сеткой, т. е. мы должны иметь $F=0$. Кроме того, раз координатные линии $u=C_1$ и $v=C_2$ суть линии кривизны, то уравнение (68) должно удовлетворяться при подстановке вместо u или v постоянной. Принимая во внимание уже полученный результат $F=0$, будем иметь $GM=0$ и $EM=0$. Но мы видели, что разность $EG-F^2$ положительна и, следовательно, величины E и G не могут быть равны нулю, и из двух предыдущих формул вытекает $M=0$. Итак, необходимым условием того, что координатная сетка была сеткой линий кривизны, является условие $F=M=0$. Наоборот, если это условие выполнено, то дифференциальное уравнение линий кривизны (68) имеет решение $u=C_1$ и $v=C_2$, т. е. координатные линии суть линии кривизны, и мы получаем следующую теорему: *необходимое и достаточное условие того, чтобы координатная сетка была сеткой линий кривизны, заключается в том, что в двух дифференциальных формах Гаусса средние коэффициенты на всей поверхности равны нулю*, т. е. $F=M=0$.

Можно определить линии кривизны и иначе, чем мы это сделали выше. Рассмотрим на поверхности некоторую линию (L). Нормали к поверхности вдоль этой линии образуют семейство прямых с одним параметром, определяющим положение точки на (L), и это семейство не будет иметь огибающей, ибо вообще семейство прямых в пространстве, зависящее от одного параметра, не имеет огибающей [152], т. е. не является семейством касательных к некоторой линии в пространстве. Но если выбрать (L) определенным образом, то огибающая нормалей будет существовать. Выясним условия, при которых это имеет место.

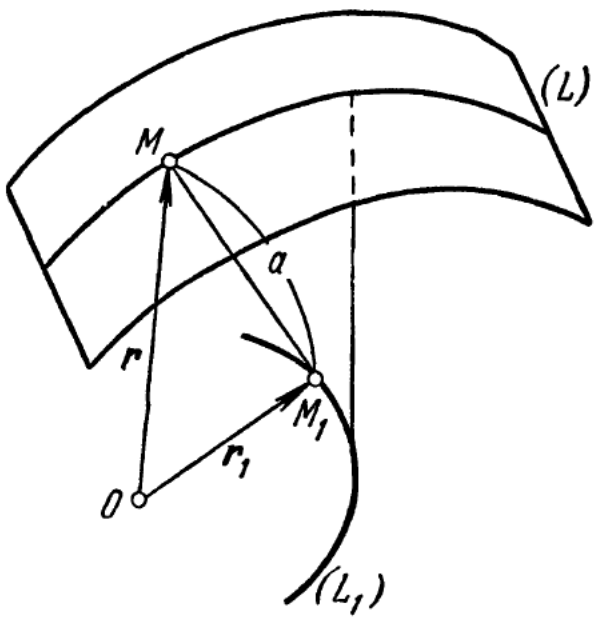


Рис. 109.

Положим, что линия (L) на поверхности выбрана так, что огибающая (L_1) нормалей к поверхности вдоль линии (L) существует (рис. 109). Обозначая через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек кривой (L), через $\mathbf{r}_1$ — соответствующий радиус-вектор (L_1) и через a — алгебраическую величину отрезка нормали к поверхности между (L) и (L_1), мы можем, очевидно, написать

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+a\mathbf{m}, \tag{70}$$

где, как всегда, $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали поверхности. Раз кривая (L_1) есть огибающая нормалей, то вектор $d\mathbf{r}_1$, направленный по касательной к ней, должен быть параллелен вектору $\mathbf{m}$, и мы можем написать $d\mathbf{r}_1 = b\mathbf{m}$, где b есть некоторый скаляр. Дифференцируя формулу (70), получим

$$b\mathbf{m} = d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} + da\,\mathbf{m}, \quad \text{то есть} \quad d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = c\mathbf{m}, \tag{71}$$

где c — некоторый скаляр. Покажем, что $c = 0$. Для этого умножим обе части (71) скалярно на $\mathbf{m}$:

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} + a\,d\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = c.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к (L), т. е. перпендикулярно к $\mathbf{m}$, и, следовательно, $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = 0$. Кроме того, из равенства $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$, как всегда, вытекает $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 0$ и, следовательно, предыдущее равенство действительно дает $c = 0$, и (71) может быть переписано в виде

$$d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = 0. \tag{72}$$

Эта формула обычно называется *формулой Родрига*. Мы вывели эту формулу из предположения, что нормали поверхности вдоль (L) имеют огибающую. Положим теперь, наоборот, что вдоль некоторой линии (L) на поверхности имеет место формула (72). При этом формула (70) определит некоторую кривую (L_1). Дифференцируя эту формулу и принимая во внимание (72), получим: $d\mathbf{r}_1 = da\,\mathbf{m}$, т. е. направления вектора $\mathbf{m}$ и касательной к (L_1) параллельны. Иными словами, нормаль к поверхности вдоль (L) касается (L_1). Итак, формула (72) дает необходимое и достаточное условие существования огибающей у нормалей к поверхности вдоль (L). Заметим, что огибающая может выродиться в точку, и тогда нормали образуют коническую (или цилиндрическую) поверхность, причем условие (72), как можно показать, также должно быть выполнено.

Напишем (72) в раскрытом виде

$$\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv + a(\mathbf{m}'_u\,du + \mathbf{m}'_v\,dv) = 0$$

и умножим скалярно на $\mathbf{r}'_u$. В силу формул (42_1), (47) и (49), получим

$$E\,du + F\,dv + a(-L\,du - M\,dv) = 0,$$

а это есть как раз равенство (62) при $a = R$. Совершенно так же умножая скалярно на $\mathbf{r}'_v$, получим равенство (63). Нетрудно показать и наоборот, что из равенств (62) и (63), которые определяют главные радиусы кривизны и главные направления, получается формула (72) при $a = R$. На этом мы не останавливаемся. Таким образом условие существования огибающей нормалей (72) равносильно (62) и (63), причем a есть величина одного из главных радиусов кривизны. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующим результатам: ***линии кривизны поверхности характеризуются тем свойством, что***

вдоль них нормали к поверхности имеют огибающую (или дают конус или цилиндр), причем величина отрезка нормали между поверхностью и огибающей равна одному из главных радиусов кривизны.

Если некоторая плоская кривая вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости, то линиями кривизны полученной поверхности вращения будут ее меридианы и параллели. Действительно, вдоль меридианов нормали к поверхности образуют плоскость, а вдоль параллелей — конус.

148. Теорема Дюпена. Пусть в пространстве имеются три семейства взаимно перпендикулярных поверхностей

$$\varphi(x,\ y,\ z)=q_1,\qquad \psi(x,\ y,\ z)=q_2,\qquad \omega(x,\ y,\ z)=q_3.$$

Они образуют сетку ортогональных криволинейных координат в пространстве [131]. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ из начала в переменную точку пространства M характеризуется криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 этой точки. Частные производные $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}'_{q_3}$ дают векторы, направленные по касательным к координатным линиям, и условия ортогональности координат можно написать в векторной форме

$$\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=0,\qquad \mathbf{r}'_{q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}=0,\qquad \mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}=0 \tag{73}$$

Дифференцируем первое из этих равенств по q_1, второе по q_2 и третье по q_3:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}+\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}''_{q_1q_3}&=0,\\
\mathbf{r}''_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}+\mathbf{r}'_{q_3}\cdot\mathbf{r}''_{q_1q_2}&=0,\\
\mathbf{r}''_{q_1q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}+\mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}''_{q_2q_3}&=0.
\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}''_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}=\mathbf{r}''_{q_3q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}=0.$$

Сопоставим три равенства

$$\mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=0.$$

Из них следует, что векторы $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}''_{q_1q_2}$ перпендикулярны к одному и тому же вектору $\mathbf{r}'_{q_3}$ и, следовательно, компланарны, откуда следует, что [117]

$$\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}'_{q_1}\times\mathbf{r}'_{q_2})=0. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь координатную поверхность $q_3=C$. На ней параметры q_1 и q_2 являются координатными параметрами, и координатные линии $q_1=C$ и $q_2=C$ суть линии пересечения взятой поверхности с двумя другими координатными поверхностями наших ортогональных координат в пространстве. Мы имели следующие

формулы:

$$F = \mathbf{r}'_{q_1} \cdot \mathbf{r}'_{q_2}, \qquad M = \frac{\mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot (\mathbf{r}'_{q_1} \times \mathbf{r}'_{q_2})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

и равенства (73) и (74) показывают, что в данном случае $F = M = 0$, т. е. координатные линии q_1 и q_2 суть линии кривизны на поверхности $q_3 = \text{const}$. Это приводит нас к следующей теореме Дюпена: *если в пространстве имеются три семейства взаимно ортогональных поверхностей, то любые две поверхности из разных семейств пересекаются по линии, которая является линией кривизны для обеих этих поверхностей.*

149. Примеры. 1. Уравнение сжатого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a^2 > c^2)$$

может быть написано в параметрической форме в следующем виде:

$$x = a \cos u \sin v, \qquad y = a \sin u \sin v, \qquad z = c \cos v.$$

Координатные линии $u = c_1$ суть, очевидно, линии пересечения эллипсоида с плоскостями $y = x \operatorname{tg} c_1$, проходящими через ось вращения, т. е. суть меридианы, а координатные линии $v = c_2$ — параллели, получаемые от пересечения эллипсоида плоскостями $z = c \cos c_2$, перпендикулярными оси вращения. Применяя формулы (42) и (50) и принимая во внимание, что x, y и z суть составляющие вектора $\mathbf{r}$, получим

$$E = a^2 \sin^2 v, \qquad F = 0, \qquad G = a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v,$$

$$L = \frac{ac \sin^2 v}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v}}.$$

Равенства $F = M = 0$ можно было предвидеть в силу того, что меридианы и параллели суть линии кривизны эллипсоида вращения. Остальные коэффициенты зависят только от параметра v, характеризующего положение точки на меридиане. Главные направления совпадают, очевидно, с касательными к меридиану и параллели. Выражение $(LN - M^2)$ в данном случае положительно на всей поверхности, т. е. все точки поверхности — эллиптические. Не вычисляя в отдельности главные радиусы кривизны, приведем лишь выражение гауссовой кривизны:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v)^2}.$$

2. Уравнение конуса второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

перепишем в явной форме

$$z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Непосредственно дифференцируя, нетрудно получить:

$$p = \frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad q = \frac{c^2 y}{b^2 z}, \qquad r = \frac{c^4 y^2}{a^2 b^2 z^3}, \qquad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \qquad t = \frac{c^4 x^2}{a^2 b^2 z^3}.$$

Пользуясь формулами (53), можно определить все коэффициенты форм Гаусса. Отметим лишь, что в данном случае $rt - s^2 = 0$, т. е. все точки поверхности суть параболические точки, и один из главных радиусов кривизны равен бесконечности. Соответствующее главное направление совпадет, очевидно, с прямолинейной образующей конуса.

3. Рассмотрим гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}.$$

В данном случае $r = \frac{1}{a^2}$, $s = 0$ и $t = -\frac{1}{b^2}$, так что $rt - s^2 < 0$, и, следовательно, всякая точка поверхности является гиперболической точкой. Две прямолинейные образующие поверхности дают в данном случае направление асимптот индикатрисы Дюпена, которая состоит из двух сопряженных гипербол. Аналогичное обстоятельство мы будем иметь и для однополого гиперболоида.

4. Обычные прямолинейные координаты, а также сферические и цилиндрические координаты дают простейшие примеры ортогональных координат в пространстве. Укажем еще один пример таких координат. Рассмотрим уравнение поверхности второго порядка, содержащее параметр ρ:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0, \tag{75}$$

где $a^2 > b^2 > c^2$. Фиксируя точку $M(x, y, z)$ и освобождаясь от знаменателей, мы будем иметь уравнение третьей степени относительно ρ. Нетрудно показать, что это уравнение имеет три вещественных корня u, v и w, которые заключаются соответственно в границах

$$+\infty > u > -c^2, \quad -c^2 > v > -b^2, \quad -b^2 > w > -a^2. \tag{76}$$

Действительно, при больших положительных значениях ρ левая часть уравнения (75) близка к (-1) и имеет знак $(-)$, а при значениях ρ, немного больших $(-c^2)$, слагаемое $\frac{z^2}{c^2+\rho^2}$ есть большая положительная величина, и левая часть уравнения (75) имеет знак $(+)$. Таким образом внутри промежутка $(-c^2, \infty)$ должно существовать такое значение ρ, при котором левая часть уравнения (75) обращается в нуль. Аналогичным образом можно убедиться в существовании корней внутри промежутков $(-b^2, -c^2)$ и $(-a^2, -b^2)$. Три числа (u, v, w) называются *эллиптическими координатами* взятой точки $M(x, y, z)$. В нашем рассуждении предполагается, что все три координаты точки (x, y, z) отличны от нуля. В противном случае для ρ получится уравнение ниже третьей степени. Если, например, $z = 0$, а x и y отличны от нуля, то уравнение (75) даст u и v, а w надо считать равным $(-c^2)$.

Исследуем теперь координатные поверхности в эллиптической системе координат. Подставляя в уравнение (75) $\rho = u$, где u — некоторое число из промежутка $(-c^2, \infty)$, получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \tag{77}$$

которая очевидно является эллипсоидом, так как, в силу первого из неравенств (76), все три знаменателя в уравнении (77) положительны. Полагая $\rho = v$, где v — из промежутка $(-b^2, -c^2)$, получим однополый гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2+v} + \frac{y^2}{b^2+v} + \frac{z^2}{c^2+v} = 1, \tag{78}$$

так как в данном случае $a^2+v>b^2+v>0$ и $c^2+v<0$. Наконец, при $\rho=w$, где w — из промежутка $(-a^2, -b^2)$, получим двуполый гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1. \tag{79}$$

Покажем, что полученные три координатные поверхности взаимно ортогональны. Вычитая почленно уравнения (77) и (78), получим

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=0. \tag{80}$$

Направляющие косинусы нормалей к поверхностям (77) и (78) соответственно пропорциональны [**I, 160**]:

$$\frac{x}{a^2+u},\ \frac{y}{b^2+u},\ \frac{z}{c^2+u} \text{ и } \frac{x}{a^2+v},\ \frac{y}{b^2+v},\ \frac{z}{c^2+v},$$

и равенство (80) выражает условие перпендикулярности этих нормалей, т. е. дает доказательство ортогональности поверхностей (77) и (78). Точно так же можно доказать взаимную ортогональность и других координатных поверхностей. Пользуясь теоремой Дюпена, мы можем утверждать, что *два семейства линий кривизны на эллипсоиде* (77) *(при фиксированном и) получатся в результате пересечения этого эллипсоида со всевозможными гиперболоидами из семейств* (78) *и* (79).

150. Гауссова кривизна. Выясним геометрический смысл понятия о гауссовой кривизне. Примем за координатные линии на поверхности — линии кривизны этой поверхности. Вдоль каждой из этих линий будет выполнено соотношение (72), причем коэффициент a есть, как мы видели, один из главных радиусов кривизны. Это дает нам следующие соотношения:

$$\mathbf{r}'_u+R_1\mathbf{m}'_u=0, \qquad \mathbf{r}'_v+R_2\mathbf{m}'_v=0. \tag{81}$$

Сопоставим всякой точке M поверхности — точку M_0 сферы единичного радиуса, которая получается в пересечении этой сферы с вектором $\mathbf{m}$, отложенным из центра сферы, причем $\mathbf{m}$ есть единичный вектор нормали к поверхности в точке M. Такое точечное соответствие между точками поверхности и точками сферы называется обычно *сферическим отображением поверхности*. Положение точки M_0 будем характеризовать теми же параметрами u и v, что и положение M. Ввиду того, что координатные линии суть линии кривизны, будем иметь

$$E=\mathbf{r}'^2_u, \qquad F=0, \qquad G=\mathbf{r}'^2_v. \tag{82}$$

Радиус-вектор сферического изображения M_0 есть по определению $\mathbf{m}$, и, в силу формул (81) и (82), коэффициенты первой формы Гаусса для сферического изображения будут:

$$E_0=\mathbf{m}'^2_u=\frac{1}{R_1^2}E, \qquad F_0=\mathbf{m}'_u\cdot\mathbf{m}'_v=0, \qquad G_0=\mathbf{m}'^2_v=\frac{1}{R_2^2}G. \tag{83}$$

Остановимся лишь на доказательстве среднего из равенств, ибо остальные два непосредственно вытекают из (81) и (82). Формулы (49) дают $M = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u$. Раз мы приняли за координатные линии линии кривизны, то $M = 0$, т. е. $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u = 0$. Умножая первое из равенств (81) на $\mathbf{m}'_v$ или второе на $\mathbf{m}'_u$, получим $\mathbf{m}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0$.

Элемент площади самой поверхности и соответствующий элемент сферического изображения будут

$$dS = \sqrt{EG}\, du\, dv, \qquad dS_0 = \sqrt{E_0 G_0}\, du\, dv,$$

или, в силу (83),

$$dS_0 = \frac{1}{|R_1 R_2|}\, dS,$$

откуда видно, что *гауссова кривизна в точке M по абсолютной величине есть предел отношения площади сферического отображения к соответствующей площади самой поверхности, когда эта последняя беспредельно сжимается к точке M.* Упомянутое отношение характеризует, очевидно, степень разбросанности пучка нормалей к поверхности в точках элемента dS.

В [146] мы вывели выражение гауссовой кривизны K через коэффициенты двух форм Гаусса. Самим Гауссом было дано выражение K только через коэффициенты E, F и G и их производные по u и v. Из этого обстоятельства вытекает одно важное следствие, на котором мы остановимся. Пусть между двумя поверхностями (S) и (S_1) установлено точечное соответствие, причем соответствующие точки характеризуются одинаковыми значениями параметров u и v. Каждая из поверхностей будет иметь свою первую форму Гаусса, выражающую квадрат элемента длины. Тождественность этих двух форм равносильна тому, что при упомянутом точечном соответствии длины сохраняются, или, иначе говоря, *поверхности наложимы друг на друга.* При этом коэффициенты E, F и G и их производные по u и v будут для обеих поверхностей одни и те же, а потому и кривизна K в соответствующих точках обеих поверхностей будет иметь одно и то же значение, т. е. *при отображении друг на друга двух поверхностей, сохраняющем длину, гауссова кривизна в соответствующих точках обеих поверхностей имеет одно и то же значение.*

В частности на плоскости гауссова кривизна равна нулю, и у поверхностей, которые могут быть наложены на плоскость без искажения длин, должно быть $LN - M^2 = 0$, т. е. все точки — параболические. В предыдущем мы имели пример таких поверхностей, а именно — конус и цилиндр.

151. Вариация элемента площади и средняя кривизна. Пусть (S) — некоторая поверхность, (u, v) — ее координатные параметры и $\mathbf{r}(u, v)$ — ее радиус-вектор. Откладывая в каждой точке $M(u, v)$

поверхности по нормали $\mathbf{m}$ отрезок $\overline{MM_1}$ алгебраической величины $n(u, v)$, где $n(u, v)$ — некоторая функция u и v, получим новую поверхность (S_1), образованную точками M_1. Точки M_1 мы будем характеризовать теми же параметрами (u, v), что и точки M, и будем говорить, что между точками (S) и (S_1) установлено соответствие по нормалям к (S). Радиус-вектор $\mathbf{r}^{(1)}(u, v)$ поверхности (S_1) по определению будет: $\mathbf{r}^{(1)}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + n(u, v)\,\mathbf{m}(u, v)$. Дифференцируя по u и v, получим:

$$\mathbf{r}_u^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u, \qquad \mathbf{r}_v^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_v + n'_v\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_v.$$

Вычислим коэффициенты E_1, F_1, G_1 первой формы Гаусса для поверхности (S_1), причем будем считать длину n и ее производные по u и v — малыми и будем пренебрегать членами второго измерения относительно этих величин

$$E_1 = (\mathbf{r}_u^{(1)\prime})^2 = (\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u)\cdot(\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u) = \\ = \mathbf{r}'^2_u + 2n'_u(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}) + 2n(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u).$$

Векторы $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{m}$ взаимно перпендикулярны и $\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m} = 0$, и формула (47) дает $E_1 = E - 2nL$. Точно так же нетрудно получить $F_1 = F - 2nM$ и $G_1 = G - 2nN$. Отсюда

$$E_1G_1 - F_1^2 = EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL),$$

или, в силу (67),

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)(1 - 4nH).$$

Извлекая корень, разлагая $(1 - 4nH)^{1/2}$ по биному Ньютона и откидывая члены со степенями n выше первой, будем иметь:

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}\,(1 - 2nH). \tag{84}$$

Умножая на $du\,dv$ и интегрируя, получим с точностью до малых величин второго порядка выражение разности δS площадей близких поверхностей (S) и (S_1):

$$\iint\limits_{(S_1)} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du\,dv - \iint\limits_{(S)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \\ = -\iint\limits_{(S)} 2nH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{85}$$

или

$$\delta S = -\iint\limits_{(S)} 2nH\,dS.$$

В непосредственной связи с этой формулой находится известная *задача Плато об определении поверхности с наименьшей площадью, натянутой на заданный контур* (L). Нетрудно видеть, что *на*

такой поверхности средняя кривизна H должна быть равна нулю. Действительно, если бы на некотором участке (σ) такой поверхности величина H оказалась, например, положительной, то, выбирая малую величину n также положительной на σ и равной нулю на остальной части поверхности и в частности на (L), мы получили бы, в силу (85), для δS отрицательное значение

$$\delta S = -\iint\limits_{(\sigma)} 2nH\,dS,$$

и поверхность (S_1), проходя через (L), имела бы площадь, меньшую, чем (S), что противоречит предположению. В силу указанного обстоятельства поверхности со средней кривизной, равной нулю, называются *минимальными поверхностями.*

Из формулы (84) вытекает также формула дифференцирования интеграла по переменной замкнутой поверхности по параметру. Допустим, что положение некоторой переменной замкнутой поверхности определяется значением параметра λ и что при $\lambda = \lambda_0$ поверхность занимает положение (S), а при λ, близких к λ_0, — положение (S_1), близкое к (S). Установим между точками M поверхности (S) и точками M_1 поверхности (S_1) соответствие по нормалям, как это описано выше. При этом n будет функцией u, v и λ, которая обращается тождественно относительно u и v в нуль при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$n(u, v, \lambda_0) \equiv 0. \tag{86}$$

Пусть далее $f(N)$ — некоторая функция точки в пространстве, не зависящая от параметра λ. Величина интеграла

$$I(\lambda) = \iint\limits_{(S_1)} f(M_1)\,dS_1 \tag{87}$$

будет зависеть от параметра λ, так как от этого параметра зависит вид поверхности. Найдём выражение для производной $I'(\lambda_0)$. Умножая обе части (84) на $du\,dv$, можем написать $dS_1 = (1 - 2nH)\,dS$, и выражение (87) перепишется так:

$$I(\lambda) = \iint\limits_{(S)} f(M_1)\,dS - \iint\limits_{(S)} f(M_1)\,2nH\,dS.$$

При этом область интегрирования — исходная поверхность (S) — уже не зависит от λ, и мы можем применить обычное правило дифференцирования под знаком интеграла [**83**]. Точка M_1 лежит на поверхности (S_1), и пусть M — соответствующая ей точка на поверхности (S), так что отрезок $\overline{MM_1} = n(u, v)$ нормален к (S), т. е. имеет направление $\mathbf{m}$. Множитель $f(M_1)$ при дифференцировании по λ при $\lambda = \lambda_0$ даст

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\overline{MM_1}} \cdot \frac{\overline{MM_1}}{\lambda - \lambda_0} = \frac{\partial f(M)}{\partial m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda = \lambda_0},$$

где m — направление нормали $\mathbf{m}$. Принимая во внимание, что множитель n обращается в нуль при $\lambda=\lambda_0$ и обозначая через $\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}$ значение производной при $\lambda=\lambda_0$, получим

$$I'(\lambda_0)=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f(M)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}\,dS-\iint\limits_{(S)}f(M)\,2H\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}\,dS. \tag{88}$$

Пусть уравнение переменной поверхности (S_1) написано в неявной форме

$$\varphi(M_1;\ \lambda)=0 \quad \text{или} \quad \varphi(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \tag{89}$$

Дифференцируя по λ как непосредственно, так и через посредство M_1, так же, как это мы делали с функцией $f(M_1)$, получим при $\lambda=\lambda_0$

$$\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial \lambda_0}+\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}=0.$$

Определяя отсюда $\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}$ и подставляя в формулу (88), получим следующее выражение для производной:

$$I'(\lambda_0)=-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial \lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS+2\iint\limits_{(S)}fH\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial \lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS. \tag{90}$$

Если в интеграле (87) и подынтегральная функция f содержит параметр λ, то так же, как и в [132], к правой части (90) надо добавить слагаемое вида

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial \lambda_0}\,dS.$$

152. Огибающая семейства поверхностей и кривых. В [13] при исследовании особых решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка мы ввели понятие об огибающей семейства плоских кривых. Точно так же исследование решений уравнений с частными производными приводит к понятию *огибающей* семейства поверхностей. Выясним в кратких чертах это понятие.

Пусть имеется семейство поверхностей с одним параметром

$$F(x,\ y,\ z,\ a)=0. \tag{91}$$

Фиксируя численное значение a, получим определенную поверхность семейства. Рассмотрим новую поверхность (S), которая имеет то же уравнение (91), но с переменным a, получаемым из уравнения

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a)}{\partial a}=0. \tag{92}$$

Можно сказать, что уравнение (S) получится исключением a из уравнений (91) и (92). Если фиксировать значение $a=a_0$, то, с одной стороны, получится определенная поверхность (S_0) из семейства (91), а с другой стороны, подставляя $a=a_0$ в уравнения (91) и (92), получим некоторую линию (l_0) на поверхности (S), так что поверхности (S) и (S_0) будут иметь общую линию (l_0). Покажем, что они будут иметь общую касательную плоскость вдоль (l_0).

Для поверхности (91), в силу постоянства a, проекции dx, dy, dz бесконечно малого перемещения вдоль поверхности должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

На поверхности (S) a — переменно, и мы должны написать

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial a}da=0.$$

Но в силу (92) это соотношение совпадает с предыдущим, т. е. на (S_0) и (S) в общих точках бесконечно малое перемещение перпендикулярно к одному и тому же направлению, у которого направляющие косинусы пропорциональны:

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

откуда и следует, что (S_0) и (S) касаются вдоль (l_0). Таким образом *исключая a из уравнений* (91) *и* (92), *получим*, вообще говоря, *уравнение огибающей поверхности семейства* (91), *причем касание имеет место вдоль некоторой линии.*

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на оси OZ и данным радиусом r

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2.$$

Дифференцируем по a:

$$-2(z-a)=0.$$

Исключая a, получим уравнение кругового цилиндра

$$x^2+y^2=r^2,$$

который касается каждой из вышеуказанных сфер вдоль окружности.

Рассмотрим теперь семейство поверхностей, содержащее два параметра:

$$F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0. \tag{93}$$

Исключая a и b из написанного уравнения и уравнений

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{\partial b}=0, \tag{94}$$

получим, как нетрудно показать, поверхность (S), которая касается поверхностей семейства (93). Но в данном случае касание будет иметь

место не вдоль линии, но лишь в некоторой точке. Действительно, фиксируя значения $a=a_0$ и $b=b_0$, мы, с одной стороны, получим определенную поверхность (S_0) из семейства (93), а с другой стороны, подставляя $a=a_0$ и $b=b_0$ в три уравнения (93) и (94), получим, вообще говоря, некоторую точку M_0 на поверхности (S). В этой точке, при соблюдении некоторых условий, (S) касается (S_0).

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на плоскости XOY и заданным радиусом r:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2.$$

Дифференцируем по a и b:

$$-2(x-a)=0, \qquad -2(y-b)=0;$$

исключая a и b, получим уравнение $z^2=r^2$, т. е. огибающая будет состоять из двух параллельных плоскостей $z=\pm r$, которые касаются каждой из вышеуказанных сфер в некоторой точке.

По поводу нахождения огибающей семейства поверхностей можно сделать то же замечание, что и по поводу нахождения огибающей семейства кривых [13], а именно, например исключение a из уравнений (91) и (92) может привести не только к огибающей поверхности, но и к геометрическому месту особых точек поверхностей семейства (91), т. е. таких точек, в которых поверхность не имеет касательной плоскости. Если левая часть уравнения (91) есть непрерывная функция с непрерывными производными первого порядка, то всякая поверхность, которая во всех своих точках касается различных поверхностей семейства (91), может быть получена указанным выше приемом исключения a из уравнений (91) и (92). Вообще в этом и следующем параграфах мы не приводим доказательств и не уточняем условий, ограничиваясь приведением в общих чертах основных фактов.

Рассмотрим теперь семейство линий в пространстве, зависящее от одного параметра:

$$F_1(x, y, z, a)=0, \qquad F_2(x, y, z, a)=0. \tag{95}$$

Будем искать огибающую этого семейства, т. е. такую линию Г, которая во всех своих точках касается различных кривых семейства (95). Мы можем считать, что Г также определяется уравнениями (95) [13], в которых только a есть не постоянная, но переменная. Проекции dx, dy, dz на оси бесконечно малого перемещения вдоль кривых (95) должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0.$$

Совершенно так же проекции δx, δy, δz бесконечно малого перемещения вдоль Γ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a = 0.$$

Условия касания сводятся к пропорциональности этих проекций, т. е.

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{\delta y}{dy} = \frac{\delta z}{dz},$$

а эти условия, в силу предыдущих соотношений, равносильны двум уравнениям: $\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a = 0$ и $\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a = 0$, или, считая $\delta a \neq 0$, т. е. a — не постоянной, получим два уравнения

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F_2(x, y, z, a)}{\partial a} = 0. \tag{96}$$

Четыре уравнения (95) и (96) не определяют, вообще говоря, линии, т. е. *семейство линий в пространстве не имеет*, как правило, *огибающей*. Но если эти четыре уравнения сводятся к трем, т. е. одно из них есть следствие остальных, то из этих трех уравнений координаты (x, y, z) определяются как функции параметра a, т. е. мы получаем линию в пространстве, которая и будет огибающей [или геометрическим местом особых точек линий (95)]. В следующем номере мы будем иметь пример семейства прямых в пространстве, имеющих огибающую.

153. Развертывающиеся поверхности. В качестве частного случая рассмотрим семейство плоскостей с одним параметром a:

$$A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) = 0. \tag{97}$$

Огибающая поверхность (S) получится исключением a из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) &= 0, \\ A'(a)x + B'(a)y + C'(a)z + D'(a) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

При фиксированном a эти два уравнения дают некоторую прямую (l_a), и поверхность (S) есть геометрическое место этих прямых, т. е. обязательно линейчатая поверхность. Дальше мы увидим, что

не всякая линейчатая поверхность может быть получена указанным выше путем. Вдоль прямой (l_a) поверхность (S) касается плоскости (97), т. е. *вдоль прямолинейной образующей* (l_a) *поверхность* (S) *имеет одну и ту же касательную плоскость.* Таким образом на (S) семейство касательных плоскостей зависит только от одного параметра a, характеризующего образующую (l_a). В общем случае семейство касательных плоскостей к поверхности зависит от двух параметров, определяющих положение точки на поверхности. Пусть уравнение (S) написано в явной форме: $z=f(x, y)$, причем частные производные функции $f(x, y)$ мы будем обозначать так же, как в [65]. Первые два направляющих косинуса нормали будут функциями одного параметра a:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_1(a),$$

$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_2(a).$$

Исключая из этих уравнений a, получим связь между p и q, которую можем написать в виде

$$q=\varphi(p).$$

Соотношение это должно быть выполнено на всей поверхности (S) и, дифференцируя его по независимым переменным x и y, получим

$$s=\varphi'(p)\,r,$$

$$t=\varphi'(p)\,s,$$

откуда

$$rt-s^2=0, \tag{99}$$

т. е. *у поверхности, которая огибает семейство плоскостей с одним параметром, все точки должны быть параболическими.*

Поверхность (S) образована семейством прямых (98). Нетрудно видеть, что это семейство прямых имеет огибающую. Действительно, дифференцируя уравнения (98) по a, получаем два уравнения

$$\left.\begin{aligned} A'(a)\,x+B'(a)\,y+C'(a)\,z+D'(a)=0,\\ A''(a)\,x+B''(a)\,y+C''(a)\,z+D''(a)=0,\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

и четыре уравнения (98) и (100) сводятся к трем. Таким образом мы можем утверждать, что поверхность (S) образована касательными к некоторой пространственной кривой Г. Если эта кривая Г вырождается в точку, то (S) есть коническая поверхность, а если эта

точка удаляется на бесконечность, то (S) есть цилиндрическая поверхность. Покажем, что и наоборот, если дана в пространстве кривая Γ,)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \omega(t), \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

то поверхность (S), *образованная касательными к кривой* Γ, *огибает семейство плоскостей с одним параметром, а именно семейство соприкасающихся для кривой* Γ *плоскостей.* Действительно, это семейство имеет уравнение

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{102}$$

где (x, y, z) определяются формулами (101) и A, B, C определяются формулами (31) из [**138**]. Дифференцируя (102) по параметру t и принимая во внимание, что в силу (31)

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \tag{103}$$

получим

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0, \tag{104}$$

где вместо производных по t мы пишем дифференциалы. Огибающая поверхность семейства (102) состоит из прямых линий, определяемых уравнениями (102) и (104), и нам остается показать, что эти два уравнения определяют касательную к Γ в точке (x, y, z). Дифференцируя соотношение (103) и принимая во внимание, что, в силу (31), $A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0$, получим

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0. \tag{105}$$

Соотношения (103) и (105) показывают, что нормали к плоскостям (102) и (104), проходящим через точку (x, y, z), перпендикулярны к касательной к кривой Γ, т. е. плоскости (102) и (104) проходят обе через эту касательную, что нам и надо было доказать.

Выше мы видели, что условие (99) является необходимым условием, того, что (S) есть огибающая семейства плоскостей с одним параметром. Можно показать, что оно и достаточно. Выше мы говорили также [**150**], что условие (99) (или ему равносильное $LN-M^2=0$) необходимо для того, чтобы (S) можно было отобразить на плоскость без искажения длин. Можно показать, что и наоборот, если это условие выполнено, то достаточно малый кусок поверхности можно отобразить указанным выше образом на плоскость. Поэтому огибающие семейства плоскостей с одним параметром называют *развертывающимися поверхностями.*

Не всякая линейчатая поверхность будет развертывающейся поверхностью. Например, если мы возьмем гиперболический параболоид или однополый гиперболоид, то для них соотношение (99) не выполнено [149], хотя они и являются линейчатыми поверхностями. Отсюда следует, что если переменная точка такой поверхности движется вдоль прямолинейной образующей, то соответствующая этой точке касательная плоскость вращается вокруг этой образующей.

Французский математик Лебег подробно исследовал поверхности, развертывающиеся на плоскость, при весьма малых предположениях о функциях, входящих в уравнения (38) таких поверхностей (мы предполагали наличие непрерывных производных до второго порядка). Он дал, между прочим, пример такой поверхности, причем эта поверхность есть нелинейчатая поверхность вращения.

ГЛАВА VI

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 14. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

154. Ортогональность тригонометрических функций. Гармоническое колебательное движение

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

представляет простейший пример периодической функции периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Мы ограничимся пока рассмотрением периодических функций периода 2π и обозначим независимую переменную через x, так что функция y обратится в

$$y = A \sin(x + \varphi).$$

Более сложные функции того же периода будут функции

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

равно как и сумма любого числа их:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

которая называется *тригонометрическим полиномом* n-го *порядка*; естественно при этом возникает вопрос *о приближенном представлении произвольной периодической функции* $f(x)$ *периода* 2π *в виде тригонометрического полинома* n-го *порядка*, а затем и вопрос *о разложении функции* $f(x)$ *в тригонометрический ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

подобно аналогичным задачам приближенного выражения функции в виде многочлена n-й степени или разложения ее в степенной ряд. Общий член этого ряда

$$A_k \sin(kx + \varphi_k)$$

называется k-й *гармоникой* функции $f(x)$. Его можно написать в виде

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = A_k \sin \varphi_k, \qquad b_k = A_k \cos \varphi_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Гармоника нулевого порядка $A_0 \sin \varphi_0$ есть просто постоянная, которую мы для упрощения дальнейших формул обозначим через $\frac{a_0}{2}$. Итак, наша задача заключается в том, чтобы *подобрать, если возможно, неизвестные постоянные*

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

так, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

был сходящимся и чтобы его сумма равнялась заданной периодической функции $f(x)$ периода 2π.

Для решения этого вопроса выясним одно простое свойство косинусов и синусов кратных дуг. Пусть c — любое вещественное число и $(c,\ c + 2\pi)$ — любой промежуток длины 2π. Нетрудно доказать, что

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx\, dx = 0, \qquad \int_c^{c+2\pi} \sin kx\, dx = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

Рассмотрим, например, первый из написанных интегралов. Первообразная функция для $\cos kx$ равна $\frac{\sin kx}{k}$ и, ввиду ее периодичности, ее значения при $x = c$ и $x = c + 2\pi$ будут одинаковы, и разность этих значений будет нуль, т. е., действительно,

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k}\Big|_{x=c}^{x=c+2\pi} = 0.$$

Совершенно так же, пользуясь известными формулами тригонометрии:

$$\sin kx \cos lx = \frac{\sin(k+l)x + \sin(k-l)x}{2},$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{\cos(k-l)x - \cos(k+l)x}{2},$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{\cos(k+l)x + \cos(k-l)x}{2},$$

можно доказать, что

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx \sin lx\, dx = 0, \tag{3}$$

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx \cos lx\, dx = 0, \quad \int_c^{c+2\pi} \sin kx \sin lx\, dx = 0 \qquad (k \neq l).$$

Рассмотрим семейство функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots, \tag{4}$$

причем первой из функций семейства является постоянная, равная единице. Формулы (2) и (3) выражают следующий факт: *интеграл от произведения любых двух различных функций семейства* (4) *по любому промежутку длины* 2π *равен нулю.* Такое свойство называется обычно *свойством ортогональности семейства* (4) *на указанном промежутке.* Вычислим теперь интеграл от квадрата функций семейства (4). Для первой из функций этот интеграл равен очевидно 2π, а для остальных, в силу формул

$$\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2}, \qquad \sin^2 kx = \frac{1-\cos 2kx}{2},$$

мы будем иметь

$$\int_c^{c+2\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi, \quad \int_c^{c+2\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

В дальнейшем для определенности мы будем брать $c = -\pi$, т. е. роль промежутка $(c,\ c+2\pi)$ будет у нас играть промежуток $(-\pi,\ \pi)$.

Вернемся теперь к поставленной выше задаче. Положим, что некоторая функция $f(x)$, определенная в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, а затем и при остальных значениях x по закону периодичности с периодом 2π, является суммою ряда (1):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{6}$$

Интегрируя обе части этого равенства по промежутку $(-\pi,\ \pi)$ и заменяя интеграл от бесконечной суммы суммою интегралов от отдельных слагаемых, получим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\, dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\, dx \right),$$

и, в силу (2), это приводится к равенству

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi,$$

откуда определяется постоянная a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Перейдем к определению остальных постоянных. Пусть n — некоторое целое положительное число. Умножим обе части (6) на $\cos nx$ и проинтегрируем, как и выше

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right). \tag{8}$$

В силу (2) и (3) все интегралы в правой части равенства будут равны нулю, кроме одного, а именно кроме интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx \qquad \text{при} \qquad k = n,$$

а этот последний интеграл, в силу (5), будет равен π.

Формула (8), таким образом, приводится к виду

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7$_1$}$$

Совершенно так же можно получить формулы

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7$_2$}$$

Заметим, что формула (7) совпадает с формулой (7_1) при $n=0$. Мы можем, таким образом, написать

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вышеприведенные вычисления не являются строгими и имеют значение лишь как наводящие. Действительно, мы сделали ряд неоправданных предположений: во-первых, мы с самого начала предположили, что заданная функция разлагается в ряд (6), затем мы заменяли интеграл от бесконечной суммы суммой интегралов от отдельных слагаемых, или, как говорят, интегрировали ряд почленно, что не всегда можно делать [ср. **I, 146**].

Строгая постановка задачи состоит в следующем. Пусть в промежутке $(-\pi,\ \pi)$ нам задана функция $f(x)$. По формулам (9) вычисляем постоянные a_k и b_k и подставляем значения этих постоянных в ряд (1). Спрашивается: будет ли полученный таким образом ряд сходящимся рядом в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, и если будет, то будет ли его сумма равна $f(x)$?

Коэффициенты a_k и b_k, вычисляемые по формулам (9), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а ряд, который получается из ряда (1) после подстановки вместо a_k и b_k их значений из формул (9), называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Операция разложения данной функции $f(x)$ в ряд Фурье называется *гармоническим анализом*.

В следующем номере мы формулируем решение поставленной выше задачи о сходимости ряда Фурье заданной функции.

Замечание. Указанные выше формулы (3) и (5) имеют место при интегрировании по любому промежутку длины 2π. Вообще, если функция $f(x)$, определенная при всех вещественных значениях x, имеет некоторый период a, т. е. $f(x+a)=f(x)$ при всяком x, то интеграл от $f(x)$ по любому промежутку длины a имеет определенное значение, не зависящее от начала этого промежутка, т. е. величина интеграла

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx$$

не зависит от c. Действительно, число c мы можем представить в виде $c=ma+h$, где m — целое и h принадлежит промежутку $(0,\ a)$:

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_{ma+h}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx = \int_{ma+h}^{(m+1)a} f(x)\,dx + \int_{(m+1)a}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле введем новую переменную интегрирования $t_1 = x - ma$, а во втором $t_2 = x - (m+1)a$:

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_h^a f(t_1 + ma)\,dt_1 + \int_0^h f[t_2 + (m+1)a]\,dt_2.$$

Принимая во внимание периодичность $f(x)$ и обозначая переменные интегрирования опять через x, получим

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_h^a f(x)\,dx + \int_0^h f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

откуда и следует независимость интеграла от c. Если $f(x)$ имеет период 2π, то мы можем вычислять ее коэффициенты Фурье a_k и b_k по формулам (9), интегрируя по любому промежутку длины 2π.

155. Теорема Дирихле. Ряд Фурье функции $f(x)$ будет сходиться и его сумма будет равна $f(x)$, если только сделать некоторые ограничительные предположения относительно функции $f(x)$. Мы предположим, во-первых, что функция $f(x)$, заданная в промежутке $(-\pi, \pi)$, или непрерывна, или имеет внутри этого промежутка лишь конечное число точек разрыва непрерывности. Мы предположим далее, что все эти точки разрыва непрерывности обладают следующим свойством: если $x = c$ есть точка разрыва непрерывности $f(x)$, то существуют конечные пределы $f(x)$ при стремлении x к c: как справа (от бóльших значений), так и слева (от меньших значений). Эти пределы обычно обозначают $f(c+0)$ и $f(c-0)$ [**I, 32**]. Такие точки разрыва непрерывности обычно называют *точками разрыва первого рода*. Предположим, наконец, что весь промежуток $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число частей таких, что в каждой части $f(x)$ меняется монотонно. Указанные выше условия называются обычно *условиями Дирихле*, т. е. говорят, что *функция удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке* $(-\pi, \pi)$, *если она или непрерывна в этом промежутке, или имеет конечное число разрывов первого рода, и если, кроме того, промежуток* $(-\pi, \pi)$ *можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых* $f(x)$ *меняется монотонно*. Заметим, далее, что на конце $x = -\pi$ нам важен лишь тот предел, к которому стремится $f(x)$ при стремлении x к $(-\pi)$ справа, а потому вместо $f(-\pi)$ мы будем писать $f(-\pi+0)$ и точно так же вместо $f(\pi)$ будем писать $f(\pi-0)$. Отметим, что пределы эти могут быть различными, но сумма ряда (1) должна быть, конечно, одинаковой при $x = -\pi$ и $x = \pi$, в силу периодичности функций (4).

Одной из основных теорем теории рядов Фурье является следующая:

Теорема Дирихле. *Если* $f(x)$, *заданная в промежутке* $(-\pi, \pi)$, *удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле,*

то ряд Фурье этой функции сходится во всем промежутке $(-\pi, \pi)$ *и сумма этого ряда:*

1) *равна* $f(x)$ *во всех точках непрерывности* $f(x)$, *лежащих внутри промежутка;*

2) *равна*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

во всех точках разрыва непрерывности;

3) *равна*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

на концах промежутка, т. е. *при* $x=-\pi$ и $x=+\pi$.

Доказательство этой теоремы будет дано в конце настоящей главы.

Сделаем некоторые замечания по поводу формулированной теоремы. Члены ряда (1) суть периодические функции с периодом 2π. Поэтому, если ряд сходится в промежутке $(-\pi, \pi)$, то он сходится и при всех вещественных значениях x, и сумма ряда периодически повторяет, с периодом 2π, те значения, которые она давала в промежутке $(-\pi, \pi)$. Таким образом, если мы пользуемся рядом Фурье вне промежутка $(-\pi, \pi)$, то мы должны считать, что функция $f(x)$ продолжена вовне этого промежутка периодически с периодом 2π. С этой точки зрения концы промежутка $x=\pm\pi$ явятся для продолженной таким образом функции точками разрыва непрерывности, если $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$.

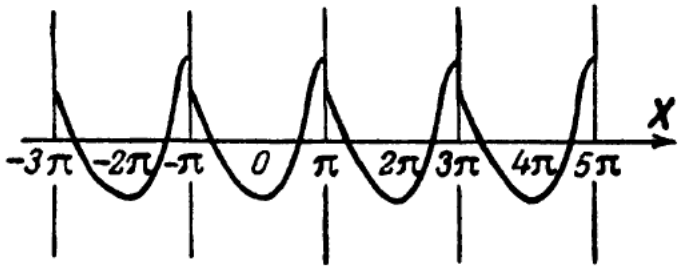


Рис. 110.

На рис. 110 изображена функция, непрерывная в промежутке $(-\pi, \pi)$, которая при периодическом продолжении дает разрывы непрерывности в силу несовпадения значений $f(x)$ на концах промежутка.

При вычислении коэффициентов Фурье часто бывает полезно пользоваться следующей леммой:

Лемма. *Если* $f(x)$ *есть четная функция в промежутке* $(-a, a)$, т. е. $f(-x)=f(x)$, *то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

и если $f(x)$ *— нечетная функция, т. е.* $f(-x)=-f(x)$, *то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство этой леммы было дано в **[1, 99]**.

156. Примеры. 1. Разложим $f(x)=x$ в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, \pi)$. Произведения $x\cos kx$ суть нечетные функции от x, а потому в силу формул (9) все коэффициенты a_k равны нулю. С другой стороны, произведения $x\sin kx$ суть четные функции, и коэффициенты b_k можно вычислять по формуле

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\}=\frac{2(-1)^{k-1}}{k}.$$

На рис. 111 график ряда Фурье изображен жирной линией, и из этого чертежа видно, что в точках $x=\pm\pi$ мы имеем разрыв непрерывности, причем среднее арифметическое пределов слева и справа равно очевидно нулю. Таким образом теорема Дирихле дает в рассматриваемом случае:

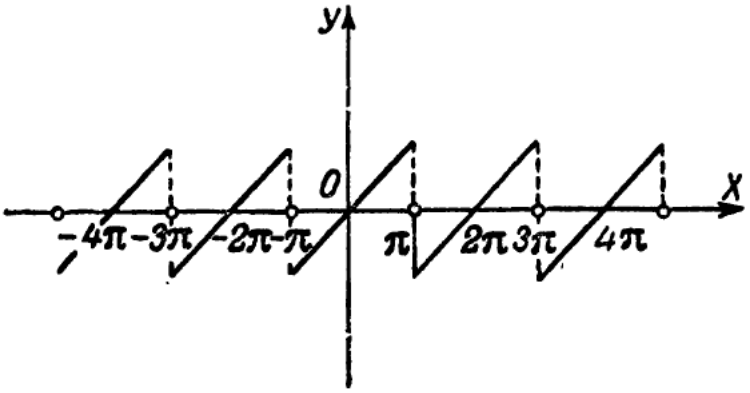


Рис. 111.

$$2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\ldots\right)=$$
$$=\begin{cases} x & \text{при } -\pi<x<\pi,\\ 0 & \text{при } x=\pm\pi.\end{cases} \qquad (10)$$

2. То же для функции x^2. В данном случае произведения $x^2\sin kx$ суть нечетные функции и все коэффициенты b_k равны нулю. Вычисляем a_k:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx\right\}=$$
$$=\frac{4}{\pi k}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\}=(-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

Из рис. 112 видно, что в данном случае график ряда Фурье не имеет

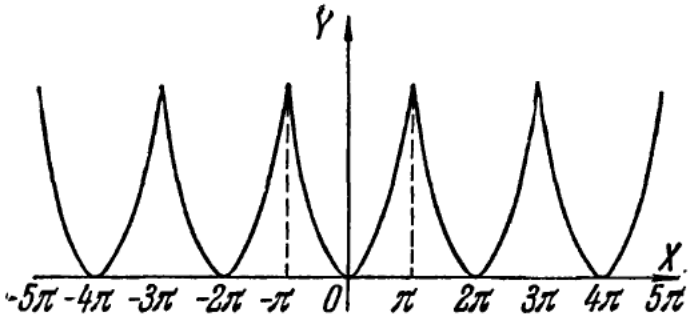


Рис. 112.

нигде разрывов, и сумма ряда равна x^2 во всем промежутке $(-\pi, \pi)$, включая концы:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \qquad (11)$$

Полагая $x=0$, получим

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ \dots\ +(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}+\ \dots\ =\frac{\pi^2}{12}. \tag{12}$$

Если положим

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ \dots\ =\sigma,$$

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ \dots\ =\sigma_1, \tag{13}$$

то имеем, очевидно,

$$\sigma=\sigma_1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ \dots\ =\sigma_1+\frac{1}{4}\sigma,\quad \sigma_1=\frac{3}{4}\sigma,$$

и равенство (12) дает

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ \dots\ =\sigma_1-\frac{1}{4}\sigma=\frac{1}{2}\sigma=\frac{\pi^2}{12},$$

т. е.

$$\sigma=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2}+\ \dots\ =\frac{\pi^2}{6}, \tag{14}$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n+1)^2}+\ \dots\ =\frac{\pi^2}{8}.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}c_1 & \text{при}\quad -\pi<x<0,\\ c_2 & \text{при}\quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Мы имеем здесь

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\,dx+\int_{0}^{\pi}c_2\,dx\right]=c_1+c_2,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\cos kx\,dx+\int_{0}^{+\pi}c_2\cos kx\,dx\right]=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}c_2\sin kx\,dx\right]=$$

$$=(c_1-c_2)\frac{(-1)^k-1}{\pi k},$$

т. е. $b_k = 0$ при четном k и $b_k = -\frac{2(c_1 - c_2)}{\pi k}$ при нечетном k, а потому по теореме Дирихле (рис. 113):

$$\frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right] = \begin{cases} c_1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ c_2 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ \frac{c_1 + c_2}{2} & \text{при } x = 0 \text{ и } \pm\pi. \end{cases} \tag{15}$$

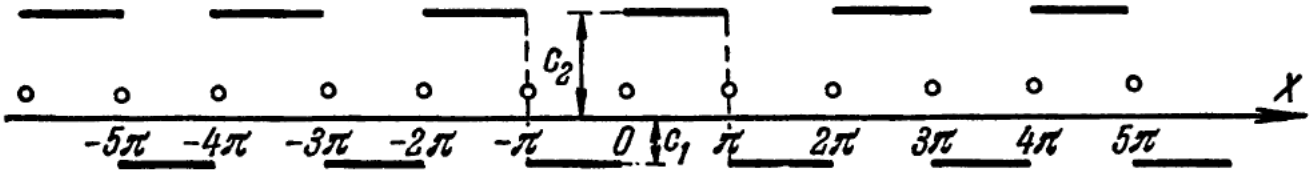


Рис. 113.

157. Разложение в промежутке (0, π). В предыдущих примерах мы упрощали вычисления коэффициентов Фурье, пользуясь четностью или нечетностью разлагаемой функции $f(x)$.

Вообще, применяя лемму из [155] к интегралам (9), определяющим коэффициенты Фурье, мы получаем

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = 0, \tag{16}$$

если $f(x)$ есть функция четная, и

$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \tag{17}$$

если $f(x)$ — функция нечетная. Самое же разложение функции будет вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{18}$$

если $f(x)$ — четная, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{19}$$

если $f(x)$ — нечетная функция.

Пусть теперь нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная в промежутке $(0, \pi)$. Эту функцию можно разложить в промежутке $(0, \pi)$ как в ряд вида (18), содержащий только косинусы, так и в ряд вида (19), содержащий только синусы. При этом в первом случае коэффициенты вычисляются по формулам (16), а во втором — по (17). Оба эти ряда внутри промежутка $(0, \pi)$ будут иметь суммой функ-

цию $f(x)$ или среднее арифметическое в точках разрыва. Но вне промежутка $(0, \pi)$ они будут представлять совершенно различные функции: ряд по косинусам даст функцию, получающуюся из $f(x)$ четным продолжением в соседний промежуток $(-\pi, 0)$, а затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $(-\pi, \pi)$. Ряд по синусам дает функцию, получающуюся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний промежуток $(-\pi, 0)$ и затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $(-\pi, \pi)$.

Таким образом, при разложении по косинусам

$$f(-0)=f(+0),$$
$$f(-\pi+0)=f(\pi-0),$$

а при разложении по синусам

$$f(-0)=-f(+0),$$
$$f(-\pi+0)=-f(\pi-0).$$

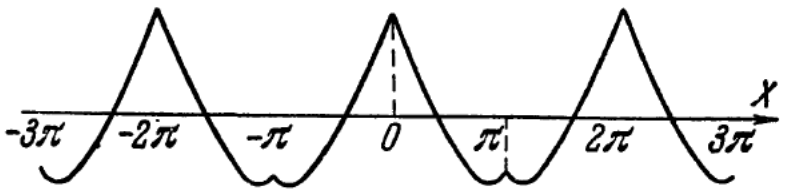


Рис. 114.

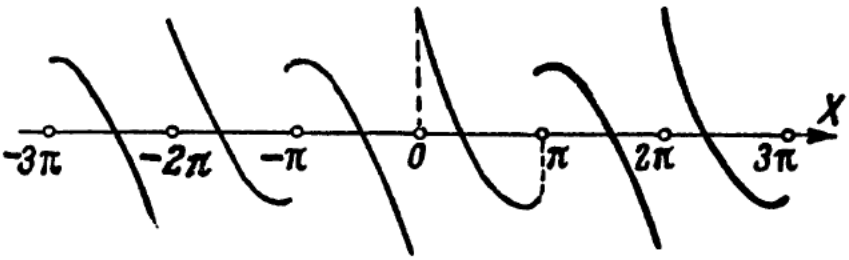


Рис. 115.

x	Ряд по cos	Ряд по sin
0	$f(+0)$	0
π	$f(\pi-0)$	0

Соответственно этому в концах промежутков мы получим указанные в таблице значения рядов (18) и (19).

На рис. 114 и 115 указаны графики функций, выражаемых рядами (18) и (19), составленными для одной и той же функции $f(x)$ в промежутке $(0, \pi)$.

Примеры. **1.** В примерах 1 и 2 **[156]** мы получили ряды для функции x по синусам и для функции x^2 по косинусам в промежутке $(0, \pi)$. Разлагая функцию x в ряд по косинусам в промежутке $(0, \pi)$, мы получим

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases} 0 & \text{при четном } k, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при нечетном } k. \end{cases}$$

Отсюда

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\ldots\right) \qquad (20)$$

$$(0<x<\pi).$$

В промежутке $(-\pi, 0)$ сумма ряда, стоящего в правой части, будет совпадать с $(-x)$, т. е. во всем промежутке $(-\pi, \pi)$ она совпадает с абсолютным значением $|x|$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \tag{21}$$

а затем вне промежутка $(-\pi, \pi)$ сумма ряда дает функцию, которая

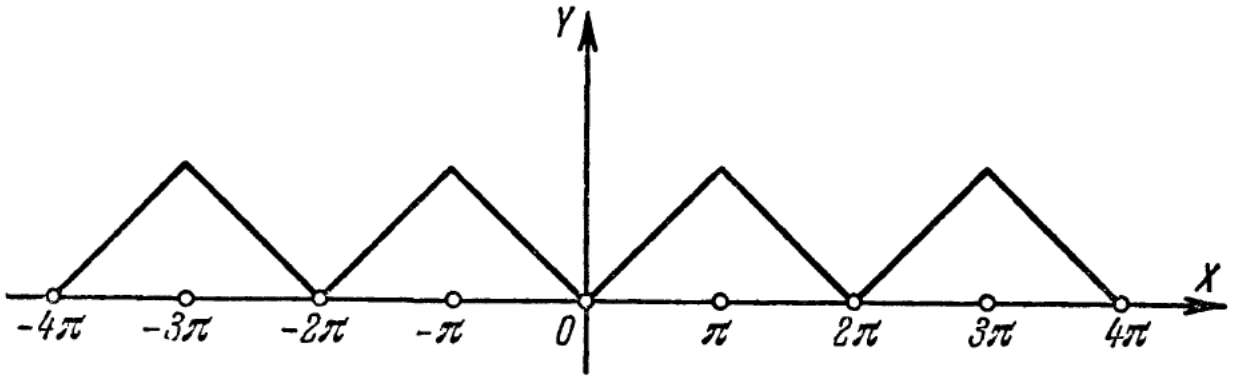


Рис. 116.

получается периодическим повторением $|x|$ из промежутка $(-\pi, \pi)$ (рис. 116). Разлагая функцию x^2 по синусам в промежутке $(0, \pi)$, мы получаем

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx\, dx = \frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k} + \frac{4[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}$$

и

$$x^2 = 2\pi\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] - \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right]$$

в промежутке $0 < x < \pi$ (рис. 117).

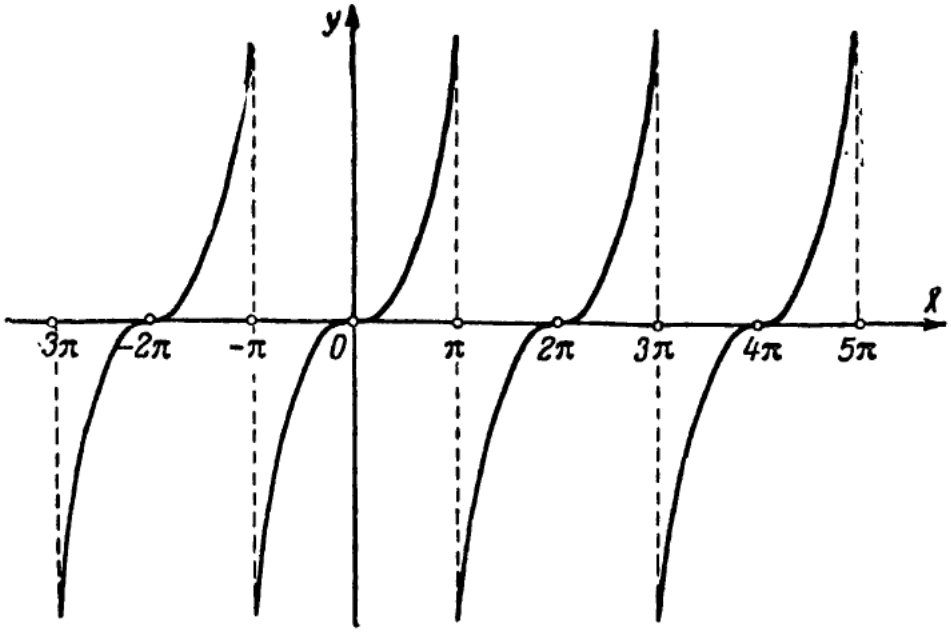


Рис. 117.

Предоставляем читателю доказать, что мы можем переставить члены ряда Фурье так, как мы это сделали выше.

2. Функции $\cos zx$ есть четная функция от x, а потому она может быть разложена в промежутке $(-\pi, \pi)$ по косинусам:

$$\cos zx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx; \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \cos kx \, dx.$$

Мы имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin zx}{z} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2 \sin \pi x}{\pi z};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos (z+k) x + \cos (z-k) x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (z+k) x}{z+k} + \frac{\sin (z-k) x}{z-k} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (\pi z + k\pi)}{z+k} + \frac{\sin (\pi z - k\pi)}{z-k} \right] =$$

$$= (-1)^k \frac{2z \sin \pi z}{\pi (z^2 - k^2)}.$$

Стало быть, в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left[\frac{1}{2z^2} + \frac{\cos x}{1^2 - z^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - z^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - z^2} - \dots \right].$$

Полагая $x = 0$ и $x = \pi$, приходим к следующим двум формулам:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2z}{\pi} \left[\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2} \right], \tag{22}$$

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right]. \tag{22_1}$$

Формулы эти называются *формулами разложения* $\dfrac{1}{\sin \pi z}$ *и* $\operatorname{ctg} \pi z$ *на простейшие дроби*. Дифференцируя (22_1) по z, разделив на π и изменив знак, получим разложение

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{z^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + z^2}{(k^2 - z^2)^2} \right]$$

или, замечая, что

$$2 \frac{k^2 + z^2}{(k^2 - z^2)^2} = \frac{1}{(z+k)^2} + \frac{1}{(z-k)^2},$$

получим

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2}. \tag{23}$$

Формула (22_1) приводит к замечательному *разложению функции* $\operatorname{ctg} z$ *в степенной ряд.* Умножив обе ее части на πz и заменив πz на z, т. е. z на $\frac{z}{\pi}$, мы получим

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2}.$$

Но

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)} =$$

$$= 2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2} + \frac{z^4}{k^4\pi^4} + \ldots + \frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}} + \ldots\right) (|z| < \pi).$$

Подставив это в предыдущую формулу и располагая по степеням z^2, имеем

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \ldots - 2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} - \ldots$$

Заменив z на $\frac{z}{2}$, получим

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right]z^{2n} \qquad (|z| < 2\pi).$$

Обозначим коэффициент при z^{2n} через $\frac{B_n}{(2n)!}$:

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 1 - \frac{B_1}{2!}z^2 - \frac{B_2}{4!}z^4 - \ldots - \frac{B_n}{(2n)!}z^{2n} - \ldots$$

$$B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}. \tag{24}$$

Первые числа B_n нетрудно определить, непосредственно разлагая в ряд $\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ — хотя бы как частное ряда $\cos\frac{z}{2}$ на ряд $\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}$ [I, 130]:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

и непосредственно ясно, что числа B_n рациональны. Они называются *числами Бернулли.* С другой стороны, зная их значение, мы можем определить суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Иногда вместо чисел Бернулли рассматривают *числа Эйлера*, определяемые по формулам:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}, \quad A_{2k+1} = 0 \ (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Если мы в равенстве (24) заменим z на $\frac{t}{i}$, то, так как

$$\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i} = \frac{t}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2i}}{\sin\frac{t}{2i}} = \frac{t}{2}\,\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2},$$

окажется

$$\frac{t}{e^t-1} = 1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_nt^{2n}}{(2n)!}+\ldots =$$

$$= A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + \ldots \quad (|t| < 2\pi)$$

Числа Бернулли и Эйлера встречаются часто в самых разнообразных отделах анализа.

158. Периодические функции периода $2l$. Часто бывает нужно разлагать в тригонометрический ряд по косинусам и синусам функцию $f(x)$, определяемую не в промежутке $(-\pi, \pi)$, а в промежутке $(-l, l)$, или же — в ряд только по косинусам или только по синусам функцию, определенную в промежутке $(0, l)$. Эта задача приводится к предыдущей с помощью изменения масштаба, т. е. введения вместо x вспомогательной переменной ξ по формуле

$$x = \frac{l\xi}{\pi}, \quad \xi = \frac{\pi x}{l}. \tag{26}$$

Положим

$$f(x) = f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \varphi(\xi).$$

Если функция $f(x)$ была определена в промежутке $(-l, l)$, то функция $\varphi(\xi)$ будет определена в промежутке $(-\pi, \pi)$ переменной ξ. Разлагая функцию $\varphi(\xi)$ в ряд Фурье, получаем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\xi + b_k\sin k\xi),$$

где, в силу (26):

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\xi)\cos k\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)\cos k\xi\,d\xi = \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Таким образом *теорема Дирихле остается верной и для промежутка* $(-l, l)$ *с тем, однако, что разложение* (6) *заменяется разложением*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (28)$$

причем коэффициенты a_k *и* b_k *определяются по формулам* (27).

То же относится и к разложениям функции $f(x)$, определенной в промежутке $(0, l)$, только по косинусам или только по синусам; для функции $f(x)$ получаются ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (29)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (30)$$

Пример. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{l} & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Мы имеем в данном случае

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

так как в промежутке $\left(\frac{l}{2}, l\right)$ подынтегральная функция обращается в 0. Простое вычисление, которое мы предоставляем сделать читателю, дает

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } k > 1, \\ -\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2k}{\pi(k^2-1)} & \text{при четном } k \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2},$$

так что

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{l} = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{l} & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{l}{2} < x < l, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x = \dfrac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } x = 0 \text{ или } l. \end{cases} \tag{31}$$

Промежуток $(-l, l)$ может быть заменен любым промежутком $(c, c+2l)$ длины $2l$, как это мы уже упоминали для промежутка длины 2π. При этом сумма ряда (28) дает $f(x)$ в промежутке $(c, c+2l)$, и при вычислении коэффициентов по формулам (27) промежуток интегрирования $(-l, l)$ надо заменить промежутком $(c, c+2l)$.

159. Средняя квадратичная погрешность. Укажем теперь другой подход к теории рядов Фурье. Пусть, как и выше, $f(x)$ — заданная функция в промежутке $(-\pi, \pi)$. Составим линейную комбинацию первых $(2n+1)$ функций семейства (4):

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{32}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ — некоторые численные коэффициенты. Написанное выражение называется обычно *тригонометрическим полиномом* n-го *порядка*. Рассмотрим погрешность, которая получится, если заменить $f(x)$ суммой (32), т. е. рассмотрим разность

$$\Delta_n(x) = f(x) - \left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}.$$

Наибольшим уклонением Δ_n суммы (32) от функции $f(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$ мы назовем наибольшее значение $|\Delta_n(x)|$ в этом промежутке: чем меньше будет Δ_n, тем точнее тригонометрический полином n-го порядка (32) представляет функцию $f(x)$. Однако величину Δ_n неудобно принять за меру приближения, и не только потому, что исследование этой величины затруднительно, но и потому, что при решении вопросов о приближенном представлении функции часто более важно добиться уменьшения погрешности в «среднем»

или «вероятной» погрешности, чем уменьшения «наибольшего уклонения». На рис. 118 изображены различные приближенные кривые (пунктирные) для данной функции $f(x)$ (сплошная). Наибольшее уклонение кривой (*1*) меньше, чем кривой (*2*), но в общем кривая (*1*) гораздо больше отличается от истинной, чем кривая (*2*); сколько-нибудь значительные уклонения этой последней встречаются в промежутке $(-\pi, \pi)$ гораздо реже, чем уклонения кривой (*1*).

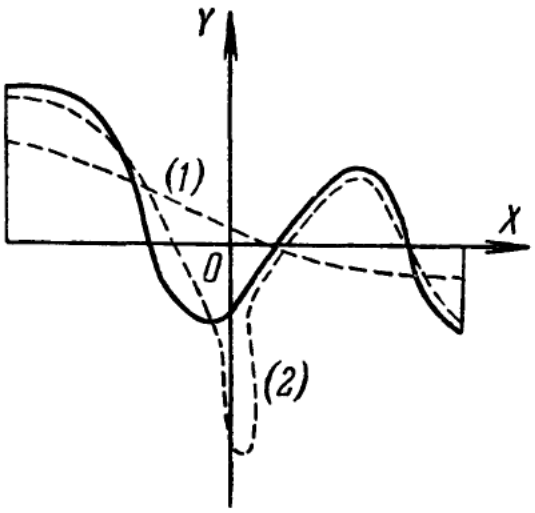


Рис. 118.

При применении способа наименьших квадратов для обработки наблюдений за меру точности наблюдений принимается «средняя квадратичная погрешность», которая определяется следующим образом: пусть при измерении величины z получены значения:

$$z_1, z_2, \ldots, z_N;$$

погрешность каждого измерения есть

$$z - z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N);$$

средняя же квадратичная погрешность δ_n определяется по формуле

$$\delta_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (z - z_k)^2,$$

т. е. δ_n *есть корень квадратный из среднего арифметического квадратов погрешностей.*

Именно эту среднюю квадратичную погрешность мы и примем за меру степени приближения суммы (32) к нашей функции $f(x)$. Здесь только нужно помнить, что мы имеем дело не с конечным числом значений, а с бесчисленным множеством их, и притом распределенных непрерывно по всему промежутку $(-\pi, \pi)$. Таким образом каждая отдельная погрешность будет не что иное, как $\Delta_n(x)$, и средняя арифметическая их квадратов будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta_n^2(x)\, dx,$$

а средняя квадратичная погрешность δ_n выражения (32) найдется из формулы

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta_n^2(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}^2 dx. \qquad (33)$$

Нам остается теперь подобрать постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ так, чтобы величина δ_n^2 была наименьшей, т. е. решить обыкновенную задачу на минимум функции δ_n^2 от $(2n+1)$ переменных.

Прежде всего упростим выражение (33) для δ_n^2. Произведя возвышение в квадрат, мы находим

$$\left\{f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}^2 =$$

$$= [f(x)]^2 - \alpha_0 f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) f(x) + \frac{\alpha_0^2}{4} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx) + \sigma_n, \quad (34)$$

где σ_n означает линейную комбинацию выражений вида:

$$\cos lx \cos mx, \qquad \sin lx \sin mx \qquad (l \neq m) \qquad \cos lx \sin mx.$$

В силу свойства ортогональности тригонометрических функций [154], интеграл от всех этих выражений по промежутку $(-\pi, \pi)$ равен нулю, а следовательно, будет равен нулю и интеграл от σ_n по этому промежутку. Интегралы от $\cos^2 kx$ и $\sin^2 kx$, как известно, равны π, и, подставляя выражение (34) в формулу (33), получим

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\, dx + \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\, dx\right] +$$

$$+ \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Принимая во внимание выражения (9) для коэффициентов Фурье функции $f(x)$, можем переписать выражение δ_n^2 в следующем виде:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) +$$

$$+ \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

или, вычитая и прибавляя сумму

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

можем написать

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{4}(\alpha_0-a_0)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]. \quad (35)$$

Наименьшее значение δ_n^2 будет, очевидно, в том случае, когда два последних неотрицательных слагаемых в правой части обратятся в нуль, т. е. это будет иметь место, если положить $\alpha_0=a_0$ и вообще $\alpha_k=a_k$ и $\beta_k=b_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Итак, *средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции* $f(x)$ *посредством тригонометрического полинома* n*-го порядка будет наименьшей, если коэффициенты полинома суть коэффициенты Фурье функции* $f(x)$.

Отметим при этом одно важное обстоятельство. Из полученного результата следует, что значения α_k и β_k, которые обращают в минимум δ_n^2, не зависят от значка n. Если мы увеличим n, то нам надо будет добавить новые коэффициенты α_k и β_k, но уже вычисленные коэффициенты останутся прежними.

Величину ε_n наименьшей погрешности мы получим по формуле (35), заменив там α_k и β_k соответственно на a_k и b_k, что дает

$$\varepsilon_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2), \quad (36)$$

или

$$2\varepsilon_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \quad (37)$$

При возрастании n, т. е. порядка тригонометрического полинома, в правой части (37) будут добавляться новые отрицательные (или, во всяком случае, не положительные) слагаемые: $-a_{n+1}^2,\ -b_{n+1}^2,\ \ldots$, и таким образом *погрешность* ε_n *может только уменьшаться при увеличении* n, т. е. *точность приближения увеличивается (не уменьшается) при возрастании* n.

Величина ε_n^2 выражается формулой (33), если в ней заменить α_k, β_k на a_k, b_k, т. е. выражается интегралом от квадрата некото-

рой функции, а потому ε_n^2 наверно положительна или, точнее говоря, не отрицательна. Принимая это во внимание, получим, в силу (37),

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx. \tag{38}$$

Пока мы явно не высказывали никаких предположений относительно свойств $f(x)$. Для предыдущих рассуждений необходимо, чтобы существовали все те интегралы, которыми мы пользовались, т. е. чтобы можно было вычислять коэффициенты Фурье по формулам (9) и чтобы существовал интеграл от квадрата функции. Для определенности будем считать, что $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода. При этом все упомянутые интегралы наверно имеют смысл [I, 116]. Можно сделать относительно $f(x)$ и гораздо более общие предположения, и во всяком случае во всех предыдущих и дальнейших рассуждениях не играют роли предположения, которые фигурировали в условиях Дирихле. Вернемся к неравенству (38). При увеличении n сумма положительных слагаемых, стоящая в левой части, будет увеличиваться (не уменьшаться), но при этом будет оставаться меньше определенного положительного числа, стоящего в правой части неравенства. Отсюда непосредственно вытекает, что бесконечный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

будет рядом сходящимся [I, 120]. Устремляя n к бесконечности и переходя в неравенстве (38) к пределу, получим:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx. \tag{39}$$

Принимая во внимание, что общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю при беспредельном удалении от начала, мы можем высказать следующую теорему:

Теорема. *При сделанных предположениях относительно $f(x)$ ее коэффициенты Фурье a_k и b_k стремятся к нулю при $k \to +\infty$.*

При нашей новой точке зрения основным является следующий вопрос: *будет ли погрешность ε_n стремиться к нулю при беспредельном возрастании n.* Если в правой части формулы (37) мы перейдем к пределу при беспредельном увеличении n, то вместо конечной суммы $\sum_{k=1}^{n}$ получим бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} 2\varepsilon_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

откуда вытекает, что стремление к нулю ε_n равносильно тому, что в формуле (39) мы имеем знак равенства, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \tag{40}$$

Уравнение это обычно называется *уравнением замкнутости*. В следующем параграфе настоящей главы мы докажем, что $\varepsilon_n\to 0$, т. е. что уравнение (40) действительно имеет место для всех функций $f(x)$ с указанными выше свойствами.

160. Общие ортогональные системы функций. Большинство проведенных рассуждений настоящей главы основывалось не на конкретных свойствах тригонометрических функций, но лишь на свойстве ортогональности функций семейства (4). Поэтому эти рассуждения применимы для любого семейства ортогональных функций. Такие семейства, как мы увидим, часто встречаются в задачах математической физики. Пусть у нас имеется семейство вещественных функций в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, для определенности будем считать эти функции непрерывными:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{41}$$

Мы предполагаем, что ни одна из этих функций не равна тождественно нулю.

Говорят, что функции семейства (41) *ортогональны*, если

$$\int_a^b\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx=0\ \text{ при }\ m\neq n. \tag{42}$$

Интеграл от квадрата каждой функции семейства (41) будет равняться некоторой положительной постоянной. Введем следующие обозначения для этих постоянных:

$$k_n=\int_a^b[\varphi_n(x)]^2\,dx. \tag{43}$$

Если к каждой функции $\varphi_n(x)$ семейства (41) добавим численный множитель $\frac{1}{\sqrt{k_n}}$, то новые функции

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{k_1}}\varphi_1(x),\quad \psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\varphi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x),\ \ldots,$$

в силу (42) и (43), будут удовлетворять не только условиям ортогональности, но и интеграл от квадрата каждой функции будет равен единице, т. е.

$$\int_a^b\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ 1 & \text{при } m=n.\end{cases} \tag{44}$$

При этом систему

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \tag{45}$$

называют обычно *ортонормированной.*

Пусть $f(x)$ — функция непрерывная или с конечным числом разрывов первого рода на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Числа

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx \tag{46}$$

называются *обобщенными коэффициентами Фурье* или просто *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы (45), а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \tag{46$_1$}$$

рядом Фурье функции $f(x)$.

Без дополнительных предположений относительно $f(x)$ и функций системы (45) ничего нельзя утверждать о сходимости этого ряда или о его сумме, если он сходится.

Напишем выражение для средней квадратичной погрешности при представлении заданной функции $f(x)$ конечной суммой вида

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x).$$

Квадрат ее выражается в виде

$$\delta_n^2 = \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x)\Big]^2 dx.$$

Мы не пишем множителя $(b-a)^{-1}$ перед знаком интеграла. Принимая во внимание (44) и (45), получим, как и в [159]:

$$\delta_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - c_k)^2,$$

откуда непосредственно следует, что δ_n^2 имеет наименьшее значение, которое мы обозначим ε_n^2, при $\gamma_k = c_k$:

$$\varepsilon_n^2 = \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)\Big]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{47}$$

Отсюда, как и выше, следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx, \tag{48}$$

которое называется обычно *неравенством Бесселя.* Основным является вопрос, будет ли ε_n стремиться к нулю при $n \to \infty$, причем стремление ε_n к нулю равносильно тому, что в (48) мы имеем знак равенства, т. е.

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{49}$$

Уравнение это называется *уравнением замкнутости для $f(x)$ по отношению к системе функций* (45). Эта система называется *замкнутой*, если уравнение (49) справедливо для любой непрерывной функции $f(x)$ и для любой функции с конечным числом разрывов первого рода. Заметим, что если это так, то можно доказать, что уравнение (49) справедливо и для гораздо более широкого класса функций.

Доказательство уравнения замкнутости для разнообразных систем ортогональных функций было дано в работах В. А. Стеклова. В этих же работах было выяснено важное значение уравнения замкнутости в теории ортогональных систем. Доказательство уравнения замкнутости для тригонометрических рядов впервые было дано А. М. Ляпуновым.

Вернемся к семейству функций

$$1\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

Эти функции обладают свойством ортогональности на промежутке $(-\pi, \pi)$, но они не нормированы, т. е. интегралы от квадратов их не равны единице. Из вышеизложенных вычислений [154] следует, что в данном случае ортонормированным будет семейство функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots$$

Положим, что ортонормированная система (45) замкнута, и покажем, что при этом не существует непрерывной функции (кроме равной тождественно нулю), которая была бы ортогональна по всем функциям семейства (45). Действительно, пусть $f(x)$ — такая функция:

$$\int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. все коэффициенты Фурье c_k функции $f(x)$ равны нулю. При этом из уравнения замкнутости (49) следует, что

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0,$$

и из этого равенства, поскольку $f(x)$ предположена непрерывной, следует, что $f(x)\equiv 0$. Обратное утверждение не имеет места, т. е. из того факта, что нет непрерывной функции (кроме тождественного нуля), ортогональной ко всем функциям системы (45), не следует, что эта система замкнута. Мы рассмотрим еще этот вопрос в следующем параграфе, когда будем излагать теорию ортонормированных систем для измеримых функций с использованием интеграла Лебега.

Вернемся к замкнутой ортонормированной системе (45), и пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции непрерывные или с конечным числом разрывов первого рода на (a, b). Через c_k и d_k обозначим коэффициенты Фурье этих функций. Для их суммы $f(x)+g(x)$ коэффициенты Фурье равны c_k+d_k:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\psi_k(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,\psi_k(x)\,dx=c_k+d_k.$$

Мы можем написать три уравнения замкнутости

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \qquad \int_a^b [g(x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2,$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k+d_k)^2.$$

Раскрывая в последней формуле скобки и принимая во внимание две первые формулы, получим

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k. \tag{50}$$

Из очевидного неравенства

$$|c_k d_k|\leqslant \frac{1}{2}(c_k^2+d_k^2)$$

непосредственно следует абсолютная сходимость ряда, входящего в формулу (50). Формула (50) называется *обобщенным уравнением замкнутости*. Если $g(x)\equiv f(x)$, то $d_k=c_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, и формула (50) переходит в формулу (49). Укажем одно интересное следствие формулы (50). Положим, что (α, β) есть какая-либо часть промежутка (a, b) или весь этот промежуток, и определим функцию $g(x)$ следующим образом: $g(x)=1$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и $g(x)=0$ во всех других точках промежутка (a, b). При этом имеем

$$d_k=\int_a^b g(x)\,\psi_k(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \psi_k(x)\,dx,$$

и формула (50) дает

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_\alpha^\beta \psi_k(x)\,dx. \tag{51}$$

Как мы уже упоминали, без дополнительных сведений о системе функций (45) и функции $f(x)$ ничего нельзя сказать о сходимости ряда Фурье (46_1) функции $f(x)$ и его сумме, если он сходится. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема 1. *Если ортонормированная система* (45) *замкнута, то ряд Фурье любой непрерывной функции* $f(x)$ *или функции с конечным числом разрывов первого рода на* (a, b), *почленно проинтегрированной по любому промежутку* (α, β), *содержащемуся в* (a, b), *сходится и его сумма равна интегралу от* $f(x)$ *по* (α, β).

Докажем еще следующую теорему:

Теорема 2. *Если ортонормированная система* (45) *замкнута и если ряд Фурье функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке* $a \leqslant x \leqslant b$, *равномерно сходится на этом промежутке, то его сумма равна* $f(x)$.

Пусть c_k — коэффициенты Фурье $f(x)$. По условию, ряд (46_1) равномерно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$, и его сумма $\omega(x)$ есть тем самым непрерывная функция на этом промежутке:

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x).$$

Нам надо доказать, что $f(x) - \omega(x) \equiv 0$. Умножим обе части последнего равенства на $\psi_n(x)$ и проинтегрируем их по промежутку (a, b). В силу равномерной сходимости мы можем интегрировать ряд почленно:

$$\int_a^b \omega(x)\,\psi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \psi_k(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

и из формул (44) следует

$$\int_a^b \omega(x)\,\psi_n(x)\,dx = c_n,$$

т. е. числа c_n являются коэффициентами Фурье не только $f(x)$, но и $\omega(x)$. Таким образом, все коэффициенты Фурье непрерывной функции $f(x) - \omega(x)$ равны нулю, и, в силу замкнутости системы, можно утверждать, как мы показали выше, что $f(x) - \omega(x) \equiv 0$.

Изложенная теория без изменения переносится на случай системы функций многих переменных, ортонормированных в какой-либо конечной области плоскости, трехмерного или вообще n-мерного пространства. Сказанное выше обобщается легко и на случай комплексных функций $\omega_1(x) + i\omega_2(x)$, где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — вещественные функции. В дальнейшем через $\bar{\alpha}$ мы будем обозначать величину, комплексно-сопряженную α. Система комплексных функций

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \qquad (52)$$

называется *ортонормированной*, если

$$\int_a^b \psi_k(x)\overline{\psi_l(x)}\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l, \\ 1 \text{ при } k = l, \end{cases} \tag{53}$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$ определяются формулой

$$c_k = \int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\,dx. \tag{54}$$

Формула (47), *неравенство Бесселя* (48), *уравнение замкнутости* (49) *и обобщенное уравнение замкнутости* имеют вид

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(x) \right|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2, \tag{55}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx, \tag{56}$$

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \tag{57}$$

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\bar{d}_k. \tag{58}$$

161. Класс L_2. Настоящий и следующий номера являются подготовительными для [**163**], в котором мы излагаем теорию ортонормированных систем измеримых функций, но результаты их имеют и большой самостоятельный интерес в теории Лебега.

Пусть E — какое-либо измеримое множество на прямой или вообще в n-мерном пространстве и $L_2(E)$ — класс вещественных функций $f(x)$, измеримых на E и таких, что функция $[f(x)]^2$ суммируема на E, т. е.

$$\int_E [f(x)]^2\,dx < +\infty. \tag{59}$$

Отметим, что отсюда следует, что $f(x)$ почти везде на E принимает конечные значения. В дальнейшем вместо $L_2(E)$ мы будем писать L_2 и не будем записывать аргумента x у функций. Докажем некоторые теоремы о классе L_2.

Теорема 1. *Если функции f и $g \in L_2$, то произведение fg суммируемо на E.*

Это следует из очевидного неравенства

$$|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2).$$

Замечание. *Если E — множество конечной меры и $f \in L_2$, то f суммируемо на E.*

Это следует из предыдущего неравенства при $g \equiv 1$.

Теорема 2. *Если f и $g \in L_2$, то и функции cf и $f+g \in L_2$, где c — постоянная.*

Утверждение относительно cf очевидно, а для $f+g$ следует из $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$, теоремы 1 и [108, 111].

Теорема 3. *Если f и $g \in L_2$, то имеет место неравенство*

$$\left(\int_E fg\,dx\right)^2 \leqslant \int_E f^2\,dx \int_E g^2\,dx \quad \text{(Буняковского — Шварца)}. \tag{60}$$

Если функция f или g эквивалентна нулю, то левая и правая части (60) равны нулю. Будем считать, что f и g не эквивалентны нулю на E. Заметим прежде всего, что если в квадратном трехчлене $at^2 + 2bt + c$ коэффициенты вещественны и $a > 0$, то из формулы

$$at^2 + 2bt + c = \frac{1}{a}\left[(at+b)^2 + (ac - b^2)\right]$$

следует, что если указанный трехчлен при всех вещественных t имеет неотрицательные значения, то $b^2 \leqslant ac$. Из очевидной формулы

$$\int_E (ft+g)^2 dx = t^2 \int_E f^2\,dx + 2t \int_E fg\,dx + \int_E g^2\,dx$$

и того факта, что правая часть последней формулы при всех t неотрицательна, и следует (60). Отметим, что коэффициент при t^2 положителен, так как функция $f(x)$ не эквивалентна нулю на E. Неравенство (60) справедливо, очевидно, и для интегралов Римана.

Теорема 4. *Если f и $g \in L_2$, то имеет место неравенство*

$$\sqrt{\int_E (f+g)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_E f^2\,dx} + \sqrt{\int_E g^2\,dx}. \tag{61}$$

Из (60) следует

$$\int_E fg\,dx \leqslant \sqrt{\int_E f^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_E g^2\,dx}.$$

Умножим обе части на 2 и добавим к обоим частям полученного неравенства интегралы от f^2 и g^2. Это приведет нас к неравенству

$$\int_E (f+g)^2\,dx \leqslant \left[\sqrt{\int_E f^2\,dx} + \sqrt{\int_E g^2\,dx}\right]^2,$$

из которого непосредственно следует (61).

162. Сходимость в среднем. Введем в классе L_2 сходимость в среднем.

Определение. *Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из L_2 сходится в среднем к $f(x)$ из L_2 или просто сходится в L_2 к функции $f(x)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f - f_n)^2\,dx = 0. \tag{62}$$

Мы будем записывать это кратко так:

$$f_n \Rightarrow f.$$

Если под знаком интеграла мы заменим $f(x)$ эквивалентной функцией, то интеграл не изменится, т. е. если $f_n(x)$ сходятся в L_2 к $f(x)$, то они сходятся и ко всякой функции, эквивалентной $f(x)$. В дальнейшем мы будем отождествлять эквивалентные функции, т. е. класс эквивалентных функций из L_2 будем считать за одну функцию. Докажем единственность предела в L_2 при такой точке зрения.

Теорема 5. *Если $f_n \Rightarrow f$ и $f_n \Rightarrow g$, то f и g эквивалентны.*

Применим к правой части очевидного равенства

$$f-g=(f-f_n)+(f_n-g)$$

формулу (61):

$$\sqrt{\int_E (f-g)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_E (f-f_n)^2\,dx} + \sqrt{\int_E (f_n-g)^2\,dx}.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю, а левая не зависит от n, и потому

$$\int_E (f-g)^2\,dx = 0,$$

откуда следует, что функция $f-g$ эквивалентна нулю на E, т. е. f и g эквивалентны. Установим необходимое и достаточное условие того, что последовательность функций из L_2 имеет предел в L_2. Это условие аналогично условию Коши существования предела для числовой последовательности. Предварительно введем определение.

Определение. *Говорят, что последовательность функций f_n из L_2 сходится в себе в L_2, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что*

$$\int_E (f_n-f_m)^2\,dx \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n \text{ и } m \geqslant N. \tag{63}$$

Теорема 6. *Для того чтобы последовательность $f_n(x)$ из L_2 сходилась в L_2 к некоторой функции $f(x)$ из L_2, необходимо, чтобы последовательность $f_n(x)$ сходилась в себе в L_2.*

Дано, что f_n сходится в L_2 к некоторой функции f. Применяя к правой части очевидной формулы

$$f_n-f_m=(f_n-f)+(f-f_m)$$

неравенство (61), получим

$$\sqrt{\int_E (f_n-f_m)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_E (f_n-f)^2\,dx} + \sqrt{\int_E (f-f_m)^2\,dx}. \tag{64}$$

При заданном $\varepsilon > 0$, в силу сходимости последовательности f_n, существует такое N, что при n и $m \geqslant N$ интегралы, стоящие под

радикалами в правой части неравенства $\leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$, и (63) получается непосредственно из (64). Большое принципиальное значение имеет обратная теорема, которую мы докажем в том случае, когда мера E конечна. Она может быть затем распространена и на случай множества E бесконечной меры.

Теорема 7. *Для того чтобы последовательность f_n из L_2 на множестве E конечной меры сходилась к некоторой функции из L_2, достаточно, чтобы последовательность f_n сходилась в себе в L_2.*

Дано, что f_n сходится в себе, и отсюда следует, что существует бесконечная возрастающая последовательность целых положительных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ такая, что

$$\int (f_{n_k+1} - f_{n_k})^2 \, dx \leqslant \frac{1}{2^{2k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{65}$$

Применяя неравенство (60) при $f = |f_{n_k+1} - f_{n_k}|$ и $g \equiv 1$, получим

$$\int\limits_E |f_{n_k+1} - f_{n_k}| \, dx \leqslant \sqrt{\int\limits_E [f_{n_k+1} - f_{n_k}]^2 \, dx} \sqrt{\int\limits_E dx}$$

или, в силу (65),

$$\int\limits_E |f_{n_k+1} - f_{n_k}| \, dx \leqslant \frac{1}{2^k} \sqrt{m(E)},$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |f_{n_k+1} - f_{n_k}| \, dx$$

и, в силу теоремы из [109], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k+1} - f_{n_k}|$$

сходится почти везде на E. Тем более почти везде сходится ряд

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k+1} - f_{n_k}),$$

сумма первых p членов которого равна $f_{n_p}(x)$, т. е. почти везде на E последовательность функций

$$f_{n_1}, \quad f_{n_2}, \quad f_{n_3}, \ldots$$

стремится к некоторой предельной функции $f(x)$, имеющей почти везде на E конечные значения. Покажем, что $f \in L_2$ и что $f_n \Rightarrow f$. В силу сходимости последовательности f_n в себе для любого задан-

ного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\int_E (f_{n_k} - f_n)^2 \, dx \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n_k \text{ и } n \geqslant N.$$

При $k \to \infty$, в силу теоремы из [**109**], получим

$$\int_E |f - f_n|^2 \, dx \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant N, \tag{66}$$

откуда следует, что $f - f_n \in L_2$. Но и $f_n \in L_2$, а потому, в силу теоремы из [**161**], $f \in L_2$. Неравенство (66) показывает, наконец, что $f_n \rightrightarrows f$. Из двух последних теорем следует, что *сходимость в себе в L_2 является необходимым и достаточным условием того, что последовательность сходится в L_2 к некоторой функции.*

Теорема 8. *Если f_n и $g_n \in L_2$ и $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$,* то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n g_n \, dx = \int_E fg \, dx. \tag{67}$$

Вводя для любых двух функций φ и ψ из L_2 обозначение

$$(\varphi, \psi) = \int_E \varphi\psi \, dx,$$

можем записать неравенство (60) в виде

$$(\varphi, \psi)^2 \leqslant (\varphi, \varphi)(\psi, \psi). \tag{68}$$

Положим

$$f_n - f = \varphi_n, \quad g_n - g = \psi_n.$$

По условию, $(\varphi_n, \varphi_n) \to 0$ и $(\psi_n, \psi_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Составим разность

$$(f, g) - (f_n, g_n) = (f, g) - (f + \varphi_n, g + \psi_n) =$$
$$= -(f, \psi_n) - (\varphi_n, g) - (\varphi_n, \psi_n),$$

откуда, применяя (68), получим

$$|(f, g) - (f_n, g_n)| \leqslant |(f, \psi_n)| + |(\varphi_n, g)| + |(\varphi_n, \psi_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(f, f)}\sqrt{(\psi_n, \psi_n)} + \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}\sqrt{(g, g)} + \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю, откуда $|(f, g) - (f_n, g_n)| \to 0$, т. е. $(f_n, g_n) \to (f, g)$, что совпадает с (67).

163. Ортонормированные системы в L_2. Теория ортонормированных систем в L_2 получает законченную форму. Первоначальные понятия и формулы те же, что и в [**160**]. Все функции считаются

вещественными. Пусть имеется ортонормированная система функций из L_2:

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots, \tag{69}$$

т. е.

$$\int_E \psi_k \psi_l\, dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l, \\ 1 \text{ при } k = l. \end{cases} \tag{70}$$

Для любой функции f из L_2 можем образовать ее *коэффициенты Фурье* относительно системы (69)

$$c_k = \int_E f\psi_k\, dx \tag{71}$$

и *ряд Фурье*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(x), \tag{72}$$

о сходимости которого мы утверждать ничего не можем.

Имеем формулу

$$\int_E (f - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k)^2\, dx = \Big[\int_E f^2\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\Big] + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2. \tag{73}$$

Наименьшее значение это выражение имеет при $a_k = c_k$, причем

$$\int_E (f - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k)^2\, dx = \int_E f^2\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \tag{73$_1$}$$

откуда следует *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_E f^2\, dx. \tag{74}$$

Если имеет место знак равенства, то соответствующая формула

$$\int_E f^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{75}$$

называется *уравнением замкнутости* для функции f относительно ортонормированной системы. Это уравнение равносильно тому, что отрезок ряда Фурье функции

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(x)$$

стремится в L_2 к f при $n \to \infty$. Докажем теперь основную в теории ортонормированных систем теорему.

Теорема 9 (Рисса — Фишера). *Если a_k — любая заданная последовательность вещественных чисел, квадраты которых*

образуют сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \tag{76}$$

то существует единственная функция из L_2, *для которой числа* a_k *суть коэффициенты Фурье относительно системы* (69) *и для которой имеет место уравнение замкнутости.*

Образуем функции из L_2:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x). \tag{77}$$

В силу ортонормированности системы (69), имеем

$$\int_E (S_q - S_p)^2 \, dx = a_{p+1}^2 + a_{p+2}^2 + \ldots + a_q^2 \qquad (q > p),$$

и из сходимости ряда (76) следует, что правая часть стремится к нулю при $p \to \infty$, т. е. последовательность (77) сходится в себе в L_2. В силу теоремы 7 эта последовательность сходится в L_2 к некоторой функции $f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f - S_n)^2 \, dx = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E \Big(f - \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k\Big)^2 dx = 0. \tag{78}$$

Пусть c_k — коэффициенты Фурье $f(x)$. Вернемся к формуле (73). Левая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, и разность, стоящая в квадратной скобке в правой части, неотрицательна в силу неравенства Бесселя, откуда следует, что $c_k = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, т. е. a_k суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а из (78) следует, что для этой функции имеет место уравнение замкнутости. Остается доказать, что функция $f(x)$ с указанными выше свойствами единственна. Пусть, кроме $f(x)$, имеется еще функция $g(x)$ с указанными свойствами. При этом (77) суть отрезки ряда Фурье как для $f(x)$, так и для $g(x)$, и последовательность $S_n(x)$ стремится в L_2 как к $f(x)$, так и к $g(x)$ и, в силу теоремы 5, $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны. Теорема полностью доказана.

Определение. *Ортонормированная система* (69) *называется замкнутой, если для любой функции* $f(x)$ *из* L_2 *имеет место уравнение замкнутости.*

При доказательстве теоремы 9 мы не предполагали, что система замкнута. Если это имеет место, то в теореме не надо оговаривать, что для $f(x)$ имеет место уравнение замкнутости, т. е. имеет место

Теорема 9′. *Если система* (69) *замкнута и* a_k *— любая заданная последовательность вещественных чисел, для которой ряд* (76) *сходится, то существует единственная функция из* L_2, *для которой число* a_k *суть ее коэффициенты Фурье.*

Мы знаем, что, наоборот, для любой функции из $f(x)$ ее коэффициенты Фурье образуют числовую последовательность a_k, для которой ряд (76) сходится. Таким образом, если система (69) замкнута, то существует биоднозначное соответствие между функциями $f(x)$ из L_2 и числовыми последовательностями a_k, для которых ряд (76) сходится, причем a_k суть коэффициенты Фурье $f(x)$ относительно системы (69). Введем еще одно

Определение. *Система* (69) *называется полной, если в* L_2 *не существует функции, отличной от нуля* (*т. е. не эквивалентной нулю*) *и ортогональной ко всем функциям системы* (69).

Мы докажем, что *понятия замкнутости и полноты равносильны*, т. е. из замкнутости вытекает полнота и из полноты — замкнутость.

Положим, что система замкнута, и пусть функция $\omega(x)$ из L_2 ортогональна ко всем функциям системы (69):

$$\int_E \omega\psi_k\,dx = 0, \tag{79}$$

т. е. все коэффициенты Фурье $\omega(x)$ равны нулю. Из уравнения замкнутости (75) получаем

$$\int_E \omega^2\,dx = 0,$$

откуда следует, что функция $\omega(x)$ эквивалентна нулю, т. е. система полная.

Положим теперь, что система (69) полная, и будем доказывать ее замкнутость от обратного. Пусть имеется функция $g(x)$ из L_2 с коэффициентами Фурье a_k такая, что для нее уравнение замкнутости не имеет места, т. е.

$$\int_E g^2\,dx > \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

С другой стороны, согласно теореме 9, существует такая функция из $f(x) \in L_2$ с теми же коэффициентами Фурье, для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\int_E f^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

откуда следует, что

$$\int_E g^2\,dx > \int_E f^2\,dx. \tag{80}$$

Но у разности $f(x) - g(x)$ все коэффициенты Фурье равны нулю, т. е. эта разность ортогональна ко всем $\psi_k(x)$, и из полноты следует,

что $f(x)-g(x)$ эквивалентна нулю, т. е. $f(x)$ эквивалентна $g(x)$, а потому и $f^2(x)$ эквивалентна $g^2(x)$, т. е. интегралы, входящие в (80), должны быть равны. Это противоречие и доказывает замкнутость системы (69).

§ 15. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

164. Разложение в ряд Фурье. Настоящий параграф мы посвятим более глубокому и строгому изложению теории рядов Фурье и начнем с изложения доказательства теоремы разложения $f(x)$ в ряд Фурье. При этом мы будем налагать на $f(x)$ условия, отличные от условий Дирихле [**155**], что приведет к упрощению доказательства. В дальнейшем мы дадим доказательство и теоремы Дирихле.

Обратимся к ряду Фурье функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin kt\,dt,$$

и переменная интегрирования обозначена нами буквою t, чтобы не путать ее при дальнейших вычислениях с переменной x формулы (1). Подставляя выражения a_k и b_k в формулу (1), найдем сумму первых $(2n+1)$ членов ряда Фурье функции $f(x)$, которую мы обозначим через $S_n(f)$:

$$S_n(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

Но имеет место формула [**I, 174**]

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos(n-1)\varphi=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Заменяя в этой формуле n на $(n+1)$ и вычитая из обеих частей половину, получим

$$\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}, \tag{2}$$

и предыдущее выражение для $S_n(f)$ можно переписать в виде

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Функцию $f(x)$, заданную в промежутке $(-\pi, \pi)$, мы периодически продолжаем с периодом 2π, так что мы можем считать ее определенной при всех вещественных x и с периодом 2π. Дробь, стоящая под знаком интеграла, в силу (2), также имеет относительно t период 2π. Принимая во внимание замечание из [154], мы можем в предыдущем интеграле заменить промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ любым промежутком длины 2π. Берем какое-нибудь значение x независимого переменного и принимаем за промежуток интегрирования $(x-\pi,\ x+\pi)$:

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Отметим еще раз, что во всем дальнейшем мы под $f(x)$ разумеем функцию, продолженную указанным выше образом из промежутка $(-\pi, \pi)$ на все вещественные значения x.

Разбиваем весь интеграл на два: один $\int_{x-\pi}^{x}$ и другой $\int_{x}^{x+\pi}$. В первом вводим вместо t новую переменную интегрирования z по формуле $t=x-2z$, а во втором — по формуле $t=x+2z$. Совершая замену переменных под знаком интеграла и вычисляя новые пределы

интегрирования, получим

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz. \tag{3}$$

Если мы положим, что $f(x)$ во всем промежутке $(-\pi, \pi)$ равна единице, то очевидно, что свободный член $\frac{a_0}{2}$ ее ряда Фурье будет равен единице, а остальные члены — нулю, т. е. $S_n(f)$ при всяком n будет равна единице, и мы имеем следующее равенство

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \quad (n=1,\ 2,\ 3\ldots). \tag{4}$$

Прежде чем переходить к доказательству основного предложения о разложении функции в ряд Фурье, докажем лемму:

Лемма. *Если (a, b) есть промежуток $(-\pi, \pi)$ или его часть и $\psi(z)$ — функция, непрерывная в (a, b) или имеющая в этом промежутке конечное число разрывов первого рода, то интегралы*

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\sin nz\,dz$$

стремятся к нулю при беспредельном возрастании целого числа n.

Если (a, b) есть промежуток $(-\pi, \pi)$, то эта лемма буквально совпадает с теоремой из [**159**]. Положим теперь, что (a, b) есть часть $(-\pi, \pi)$. Продолжим $\psi(z)$ из (a, b) во весь промежуток $(-\pi, \pi)$, полагая ее равной нулю в частях промежутка $(-\pi, \pi)$, лежащих вне (a, b), т. е. определим новую функцию $\psi_1(z)$ так, что $\psi_1(z) = \psi(z)$ при $a \leqslant z \leqslant b$ и $\psi_1(z) = 0$, если z принадлежит промежутку $(-\pi, \pi)$, но находится вне (a, b). При этом мы можем, например, написать

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi_1(z)\cos nz\,dz,$$

и этот интеграл стремится к нулю в силу упомянутой выше теоремы из [**159**]. Заметим, что $\psi_1(z)$ также или непрерывна в промежутке $(-\pi, \pi)$, или имеет конечное число разрывов первого рода. Нетрудно показать, что лемма остается справедливой, если (a, b) — любой конечный промежуток.

Обращаемся теперь к доказательству основной теоремы разложения $f(x)$ в ряд Фурье. Мы, как всегда, считаем, что $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число рызрывов первого рода в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$, вводя этот множитель под знак интеграла и вычитая полученное равенство из (3), будем иметь

$$S_n(f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x-2z) - f(x)] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2z) - f(x)] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz,$$

что можно переписать еще в виде

$$S_n(f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2z) - f(x)}{-2z} \frac{-2z}{\sin z} \sin(2n+1)z\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2z) - f(x)}{2z} \frac{2z}{\sin z} \sin(2n+1)z\, dz. \qquad (5)$$

Для того чтобы доказать, что ряд Фурье (1) функции $f(x)$ сходится и имеет суммою $f(x)$, надо показать, что разность $[S_n(f) - f(x)]$ стремится к нулю при беспредельном возрастании n.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{f(x-2z) - f(x)}{-2z} \frac{-2z}{\sin z}$$

в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Она может иметь точки разрыва первого рода, происходящие от точек разрыва $f(x-2z)$, и, кроме того, надо особо исследовать значение $z=0$. Положим, что во взятой точке x функция $f(z)$ не только непрерывна, но и имеет производную. Из определения производной и из очевидного равенства

$$\lim_{z \to 0} \frac{-2z}{\sin z} = -2$$

вытекает, что $\psi(z)$ стремится к определенному пределу, равному $-2f'(x)$, когда $z \to 0$. Отсюда вытекает, что к функции $\psi(z)$ применима вышеуказанная лемма, и первое слагаемое в правой части формулы (5) стремится к нулю при беспредельном возрастании n.

Точно так же доказывается, что и второе слагаемое стремится к нулю, а отсюда вытекает, что и разность $[S_n(f)-f(x)]$ стремится к нулю во взятой точке x. Мы получаем таким образом следующую теорему:

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода в промежутке $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится и имеет суммою $f(x)$ во всякой такой точке x, в которой $f(x)$ имеет производную.*

Нетрудно получить и более общие результаты. Положим, что в точке x функция непрерывна или даже имеет разрыв непрерывности первого рода, но существуют конечные пределы

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h} \quad \text{и} \quad \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}. \tag{6}$$

Геометрически существование этих пределов, т. е. производных слева и справа, равносильно существованию определенной касательной слева и справа. При этом имеет место следующее дополнение к доказанной теореме: *если существуют конечные пределы* (6), *то в этой точке ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ [*что равно $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна*].

Умножая (4) на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ и вычитая из (3), можем написать

$$S_n(f)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z}\frac{-2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}\frac{2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz. \tag{7}$$

Надо доказать, что правая часть стремится к нулю при беспредельном возрастании n.

Принимая во внимание существование пределов (6), мы можем утверждать, что при $z\to 0$ обе дроби

$$\frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z} \quad \text{и} \quad \frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}$$

имеют конечные пределы, и, рассуждая совершенно так же, как и выше, мы убедимся, что оба интеграла, стоящих в правой части (7), стремятся к нулю при беспредельном возрастании n. Таким образом приведенное выше дополнение к теореме доказано.

При значениях $x=\pi$ и $x=-\pi$ в силу периодического продолжения $f(x)$, пределы (6) сведутся к пределам

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-\pi+h)-f(-\pi+0)}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{h\to+0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi-0)}{-h},$$

и сумма ряда будет

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Заметим, что во всех примерах, рассмотренных нами в предыдущем параграфе, $f(x)$ удовлетворяет во всех точках условиям доказанной теоремы или дополнения к ней.

165. Вторая теорема о среднем. Для доказательства теоремы Дирихле и более подробного изучения ряда Фурье нам будет необходимо одно предложение интегрального исчисления, которое имеет некоторую аналогию с теоремой о среднем, изложенной в томе I [**I, 95**], и называется обычно *второй теоремой о среднем.* Это предложение формулируется следующим образом: *если $\varphi(x)$ — монотонная ограниченная функция в конечном промежутке $a\leqslant x\leqslant b$ с конечным числом точек разрыва, $f(x)$ — непрерывная функция, то*

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx, \tag{8}$$

где ξ — некоторое число из промежутка (a, b).

Нетрудно видеть, что достаточно доказать формулу (8) для случая возрастающей (неубывающей) функции $\varphi(x)$, ибо если $\varphi(x)$ — убывающая, то $[-\varphi(x)]$ есть возрастающая функция и, применяя формулу (8) к $[-\varphi(x)]$ и меняя в обеих частях знаки на обратные, получим равенство (8) и для самой $\varphi(x)$. Покажем еще, что достаточно доказать формулу (8) для того случая, когда $\varphi(a+0)=0$. Действительно, пусть для этого случая формула (8) доказана, и рассмотрим $\varphi(x)$, которая указанному условию не удовлетворяет. Введем новую монотонную функцию $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(a+0)$. У этой функции предельные значения на границах будут $\psi(a+0)=0$ и $\psi(b-0)=\varphi(b-0)-\varphi(a+0)$. По предположению, к функции $\psi(x)$ формула (8) применима, и в силу $\psi(a+0)=0$ она дает

$$\int_a^b \psi(x)f(x)\,dx=\psi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b [\varphi(x)-\varphi(a+0)]f(x)\,dx=[\varphi(b-0)-\varphi(a+0)]\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a+0)\Big[\int_a^b f(x)\,dx-\int_\xi^b f(x)\,dx\Big]+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

а из этого равенства непосредственно вытекает формула (8) для $\varphi(x)$. Итак, достаточно доказать формулу (8) для возрастающей или, лучше сказать, неубывающей функции $\varphi(x)$, у которой $\varphi(a+0)=0$. Значения такой функции в промежутке (a, b) будут, очевидно, неотрицательными.

Для доказательства разобьем промежуток (a, b) на части, отметив в нем точки

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{i-1},\ x_i, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b.$$

Как известно [I, 95],

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}),$$

где ξ_i — некоторое значение, лежащее внутри промежутка (x_{i-1}, x_i). Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\, f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

При беспредельном возрастании n и уменьшении наибольшей из длин промежутков (x_{i-1}, x_i) эта сумма стремится к определенному интегралу [I, 116], т. е. мы имеем

$$\int_a^b \varphi(x)\, f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

Займемся теперь исследованием суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Big[\int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{b} f(x)\,dx\Big] =$$

$$= \varphi(\xi_1) \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx. \qquad (9)$$

Интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_{x_1}^{b} f(x)\,dx,\ \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx, \ldots,\ \int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx, \ldots,\ \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \qquad (10)$$

являются частными значениями функции

$$\int_x^b f(x)\,dx = -\int_b^x f(x)\,dx, \qquad (11)$$

которая есть непрерывная функция от переменного предела интегрирования x [I, 96], а поэтому все значения (10) лежат между наименьшим и наибольшим значениями m и M функции (11).

Принимая во внимание, что в выражении (9) все множители

$$\varphi(\xi_1) \text{ и } \varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})$$

неотрицательны, и заменяя в этом выражении значения (10) справа на m, а затем на M, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \geqslant \Big\{\varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})]\Big\}\, m = \varphi(\xi_n)\, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant \Big\{\varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})]\Big\}\, M = \varphi(\xi_n)\, M,$$

то есть

$$\varphi(\xi_n)\, m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \leqslant \varphi(\xi_n)\, M,$$

или в пределе при $n \to \infty$ и беспредельном уменьшении наибольшей из длин промежутков (x_{i-1}, x_i) мы имеем

$$\xi_n \to b - 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_n) \to \varphi(b - 0),$$

и неравенство будет

$$\varphi(b-0)\, m \leqslant \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx \leqslant \varphi(b-0)\, M,$$

т. е.

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(b-0)\, P,$$

где P — некоторое число, лежащее в промежутке (m, M). Но непрерывная функция (11) принимает в промежутке (a, b) все значения, лежащие между ее наименьшим и наибольшим значениями m и M [**I, 43**], в том числе и P, а потому в промежутке (a, b) наверно найдется такое значение ξ, при котором

$$\int_{\xi}^{b} f(x)\, dx = P,$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^{b} f(x)\, dx,$$

а это совпадает с формулой (8) в силу условия $\varphi(a+0) = 0$. Заметим, что формулу (8) можно доказать, не предполагая непрерывности $f(x)$ и конечного числа разрывов у $\varphi(x)$, на чем мы, однако, останавливаться не будем. Отметим, наконец, что вместо формулы (8) можно доказать более общую формулу

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = A \int_a^{\xi} f(x)\, dx + B \int_{\xi}^{b} f(x)\, dx,$$

где числа A и B должны удовлетворять следующим условиям: $A \leqslant \varphi(a+0)$ и $B \geqslant \varphi(b-0)$.

Следствие. В [**159**] мы видели, что при некоторых условиях коэффициенты Фурье a_n и b_n функции $f(x)$ стремятся к нулю, при $n \to \infty$. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то можно доказать более точный результат, а именно, что a_n и b_n при больших n будут бесконечно малыми порядка не ниже $\frac{1}{n}$, т. е. для них будет иметь место оценка вида

$$|a_n| < \frac{M}{n}, \quad |b_n| < \frac{M}{n},$$

где M — определенное положительное число. По условию, промежуток $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых $f(x)$ монотонна и ограничена. Пусть (α, β) — одна из этих частей. Коэффи-

циент a_n будет суммой конечного числа слагаемых вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx\,dx,$$

которое можно преобразовать по теореме о среднем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}f(\alpha+0)\int_{\alpha}^{\xi}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}f(\beta-0)\int_{\xi}^{\beta}\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{f(\alpha+0)(\sin n\xi - \sin n\alpha) + f(\beta-0)(\sin n\beta - \sin n\xi)}{\pi n}.$$

Мы получим таким образом для отдельного слагаемого в выражении a_n оценку вида $\frac{M}{n}$, где $M = \frac{2}{\pi}|f(\alpha+0)| + \frac{2}{\pi}|f(\beta-0)|$. Оценка того же вида очевидно будет и для всей суммы конечного числа таких слагаемых, т. е. для $|a_n|$. Аналогичное рассуждение годится и для b_n.

Если $f(x)$ непрерывна, $f(-\pi)=f(\pi)$ и существует производная $f'(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что в силу $f(-\pi)=f(\pi)$ внеинтегральный член обратится в нуль, получим

$$nb_n = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,d\cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,dx.$$

Но последний интеграл, как коэффициент Фурье функции $f'(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, имеет вышеуказанную оценку, и для b_n получаем при сделанных предположениях оценку

$$|b_n| \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

Аналогичная оценка получится и для a_n. Более подробное рассмотрение оценок коэффициентов Фурье в зависимости от свойств функции $f(x)$ будет нами дано позже.

166. Интеграл Дирихле. Из формулы (3) видно, что вопрос о сходимости ряда Фурье, т. е. о существовании предела суммы $S_n(f)$, приводится к исследованию интеграла типа

$$\int_{a}^{b}\varphi(z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz.$$

Мы будем рассматривать более простой интеграл, а именно интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz, \tag{12}$$

который называется *интегралом Дирихле.* Мы докажем по поводу этого интеграла следующую лемму:

Лемма. *Если $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке (a, b), то:* 1) *если $a=0$ и $b>0$, то при беспредельном возрастании m*

интеграл (12) *имеет предел* $\frac{1}{2}\varphi(+0)$; 2) *если* $a=0$ *и* $b<0$, *то этот предел равен* $\frac{1}{2}\varphi(-0)$; 3) *если* $a<0$ *и* $b>0$, *то предел равен* $\frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}$; 4) *если* a *и* $b>0$ *или* a *и* $b<0$, *то упомянутый предел равен нулю.* Нетрудно видеть, что достаточно доказать одно первое утверждение. Считая его доказанным, мы можем легко получить из него остальные. Докажем, например, утверждения 3 и 4, считая первое доказанным:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz-\frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz.$$

Если a и $b>0$, то в силу утверждения 1 уменьшаемое и вычитаемое в правой части имеет предел $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, и, следовательно, разность стремится к нулю, что и доказывает утверждение 4. Если же $a<0$ и $b>0$, то, заменяя в вычитаемом переменную интегрирования z на $(-z)$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{-a} \varphi(-z)\frac{\sin mz}{z}\,dz.$$

Так как b и $(-a)>0$, то можем применить к обоим интегралам утверждение 1 и получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz\to\frac{1}{2}\varphi(+0)+\frac{1}{2}\varphi(-0)=\frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}.$$

Перейдем теперь к доказательству утверждения 1, т. е. покажем, что при $b>0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz\to\frac{1}{2}\varphi(+0). \tag{13}$$

При доказательстве будем пока считать, что $\varphi(z)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и монотонна в промежутке $(0, b)$.

Мы имели раньше следующий результат:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Это есть непрерывная функция c, равная нулю при $c=0$ и стремящаяся к $\frac{\pi}{2}$ при $c\to+\infty$. Мы можем отсюда заключить, что при всех положи-

тельных c написанный интеграл остается по абсолютной величине меньшим некоторого определенного положительного числа M. Рассмотрим теперь интеграл с двумя положительными пределами

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{15}$$

Мы имеем, очевидно,

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < M + M = 2M,$$

т. е. интеграл (15) при любых положительных a и b остается по абсолютной величине меньшим некоторого определенного положительного числа $2M$.

Прежде чем переходить к доказательству (13), рассмотрим более простой интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

Совершая замену переменных $t = mx$ и пользуясь (14), получим при беспредельном возрастании m:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{mb} \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},$$

и следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(+0)\,\frac{\sin mx}{x}\,dx \to \frac{1}{2}\,\varphi(+0).$$

Таким образом для доказательства (13) нам достаточно показать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b [\varphi(x) - \varphi(+0)]\,\frac{\sin mx}{x}\,dx \to 0,$$

т. е. что при достаточно больших m левая часть написанного по абсолютной величине меньше любого положительного числа ε. Разобьем промежуток интегрирования $(0, b)$ на два: $(0, \delta)$ и (δ, b), где δ — малое положительное число, которое будет фиксировано в дальнейшем. Покажем, что каждый из двух интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x) - \varphi(+0)]\,\frac{\sin mx}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^b [\varphi(x) - \varphi(+0)]\,\frac{\sin mx}{x}\,dx \tag{16}$$

при достаточно больших m меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ по абсолютной величине. Ввиду конечного числа разрывов функции $\varphi(x)$ можно взять δ настолько малым, чтобы

в промежутке $(0, \delta)$ функция $\varphi(x)$ не имела разрывов, так что $\varphi(x \pm 0) = \varphi(x)$. Принимая во внимание, что, по условию, $\varphi(x)$ монотонна, и применяя к первому из интегралов (16) теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}[\varphi(\delta)-\varphi(+0)]\int_0^{\delta}\frac{\sin mx}{x}\,dx,$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|<\frac{1}{\pi}\left|\varphi(\delta)-\varphi(+0)\right|\cdot M.$$

По определению символа $\varphi(+0)$, разность $\varphi(\delta)-\varphi(+0)\to 0$ при $\delta\to 0$ и, следовательно, мы можем приблизить δ настолько к нулю, чтобы правая часть написанного равенства была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. При этом первый из интегралов (16) будет по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при любом m. Фиксируя таким образом положительное число δ, обратимся ко второму из интегралов (16). Применяя к нему также теорему о среднем, можем написать его в виде

$$\frac{1}{\pi}[\varphi(\delta)-\varphi(+0)]\int_{\delta}^{\xi}\frac{\sin mx}{x}\,dx+\frac{1}{\pi}[\varphi(b-0)-\varphi(+0)]\int_{\xi}^{b}\frac{\sin mx}{x}\,dx. \quad (17)$$

Множители, стоящие перед интегралами, суть постоянные, и нам достаточно доказать, что оба интеграла стремятся к нулю при возрастании m. Рассмотрим, например, первый из интегралов и совершим в нем замену $t=mx$. Получим интеграл

$$\int_{m\delta}^{m\xi}\frac{\sin t}{t}\,dt. \quad (18)$$

При беспредельном возрастании m пределы $m\delta$ и $m\xi$ беспредельно возрастают, так как δ — фиксированное положительное число и ξ не меньше δ. Но раз интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

есть сходящийся интеграл, то интеграл (18) при беспредельном возрастании его обоих пределов должен стремиться к нулю [85]. Аналогично рассматривается и второй из интегралов в выражении (17), а поэтому все это выражение стремится к нулю, т. е. второй из интегралов (16) стремится к нулю и, следовательно, при достаточно больших m он по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Равенство (13) и, следовательно, все утверждения леммы доказаны нами в предположении, что $\varphi(z)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и монотонна. Остается показать, что (13) верно и в том случае, когда $\varphi(z)$ удовлетворяет только условиям Дирихле. В силу условий Дирихле, промежуток $(0, b)$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых $\varphi(z)$ монотонна. Пусть $(0, b)$ можно разбить хотя бы на три части $(0, b_1)$, (b_1, b_2) и (b_2, b), в каждой из которых $\varphi(z)$ монотонна. Интеграл (13)

разобьется на три:

$$\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz = \int_0^{b_1} \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz + \int_{b_1}^{b_2} \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz + \int_{b_2}^{b} \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz. \tag{19}$$

К каждому слагаемому правой части применима лемма, так как в промежутках $(0, b_1)$, (b_1, b_2) и (b_2, b) функция $\varphi(z)$ монотонна. Следовательно, первое слагаемое стремится к $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, остальные два — к нулю, и интеграл (19) стремится к $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в интеграле Дирихле (12) число m может беспредельно возрастать любым образом, не обязательно принимая только целые значения. Полученный результат имеет своим источником тот факт, что функция $\frac{\sin mz}{z}$ при больших значениях m очень часто меняет знак и, кроме того, принимает большие значения при z, близких к нулю.

167. Теорема Дирихле. Пользуясь леммой из предыдущего номера, мы докажем без труда теорему Дирихле [**155**]. Нам надо доказать, в силу (3) что выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \tag{20}$$

стремится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ при беспредельном возрастании n. Рассмотрим вместо (20) выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz. \tag{21}$$

Верхние пределы в обоих интегралах положительны, и функции $f(x-2z)$ и $f(x+2z)$ удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке интегрирования. Кроме того, $m = 2n+1 \to \infty$, и, по доказанной в предыдущем номере лемме, выражение (21) стремится к пределу $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Остается доказать, что разность выражений (20) и (21) стремится к нулю. Для этого достаточно показать, что интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz$$

стремятся к нулю. Докажем это для первого интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(z)\sin(2n+1)z\,dz, \quad (22)$$

где

$$\psi(z)=f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right).$$

Первый множитель $f(x-2z)$ имеет в промежутке интегрирования конечное число разрывов первого рода (или непрерывен). Второй

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{z-\sin z}{z\sin z}=\frac{z-\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}$$

при $z\to 0$ стремится к нулю и никаких разрывов в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет. Следовательно, к интегралу (22) применима лемма из [164], и этот интеграл стремится к нулю. Таким образом, утверждение теоремы Дирихле доказано.

Мы дополним доказанную теорему еще двумя предложениями, которые мы приведем без доказательства. Полученное нами предложение обнаруживает лишь то, что во всякой точке промежутка x ряд Фурье $S[f(x)]$ сходится и имеет суммой $f(x)$, но в этом предложении ничего не упоминается о характере сходимости в промежутке $(-\pi, \pi)$. Предложения, которые мы сейчас формулируем, восполняют этот пробел.

1. *Во всяком промежутке, в котором функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, кроме того, непрерывна, и который лежит внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, ряд $S[f(x)]$ сходится равномерно.*

2. *Если $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, непрерывна во всем промежутке $(-\pi, \pi)$, и сверх того*

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0),$$

то ряд $S[f(x)]$ сходится равномерно при всех значениях x.

Читатель покажет без труда, что предложения, аналогичные указанным выше, имеют место для рядов, расположенных только по косинусам или только по синусам в случае, если функция определена в промежутке $(0, \pi)$, со следующими изменениями:

При условиях теоремы Дирихле для промежутка $(0, \pi)$ сумма ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx; \qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (23)$$

равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad \text{при } 0<x<\pi \quad (24)$$

и

$$f(+0) - \text{при } x=0; \quad f(\pi-0) - \text{при } x=\pi;$$

сумма же ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx; \quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (25)$$

будет (24) при $0<x<\pi$ и нуль при $x=0$ и $x=\pi$.

Все эти результаты получаются очень просто, если продолжить функцию $f(x)$ в соседний промежуток $(-\pi, 0)$ четным образом в случае ряда (23) и нечетным в случае ряда (25), как это было сделано в [157].

168. Приближение к непрерывной функции полиномами. Нашей следующей задачей является доказательство формулы замкнутости (40) из [159]. Это доказательство будет основано на некоторых результатах из теории приближений функций полиномами. К изложению этих результатов, которые являются важными и сами по себе, мы сейчас и переходим. В основе всего здесь лежит следующая теорема:

Теорема I (Вейерштрасса). *Если $f(x)$ — любая непрерывная в замкнутом конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ функция, то существует последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$, которая стремится равномерно* [I, 144] *к $f(x)$ во всем замкнутом промежутке (a, b).*

Заметим прежде всего, что при помощи преобразования $x' = \frac{x-a}{b-a}$ можно промежуток (a, b) привести к промежутку $(0, 1)$, и полиномы от x будут полиномами от x' и обратно. Можно поэтому считать, что промежуток (a, b) есть $(0, 1)$. Докажем сначала два элементарных алгебраических тождества. Напишем формулу бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^m v^{n-m} = (u+v)^n. \tag{26}$$

Дифференцируя это тождество по u и умножая на u, а затем проделывая то же самое с полученным тождеством, будем иметь два новых тождества

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n} m C_n^m u^m v^{n-m} &= nu(u+v)^{n-1}, \\ \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m u^m v^{n-m} &= nu(nu+v)(u+v)^{n-2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Полагая в (26) $u = x$ и $v = 1 - x$, будем иметь

$$1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{28}$$

Умножая (26) на n^2x^2, первое из (27) — на $(-2nx)$, второе из (27) — на единицу и складывая, получим при $u = x$ и $v = 1 - x$:

$$\sum_{m=0}^{n} (m - nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = nx(1-x).$$

Нетрудно показать [I, 60], что правая часть этого равенства, положительна в промежутке (0, 1) и принимает наибольшее значение при $x=\frac{1}{2}$, откуда следует при $0\leqslant x\leqslant 1$

$$\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\leqslant \frac{1}{4}n. \tag{29}$$

Покажем теперь, что многочлены

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \tag{30}$$

равномерно стремятся к $f(x)$ в промежутке (0, 1). Умножая обе части (28) на $f(x)$ и вычитая из полученного равенства равенство (30), можем написать

$$f(x)-P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Нам надо доказать, что при любом заданном положительном ε существует такое N, не зависящее от x, что

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n>N.$$

Так как при $0\leqslant x\leqslant 1$ произведение $C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\geqslant 0$, то

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

и достаточно доказать неравенство

$$\sum_{m=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m}<\varepsilon \quad \text{при} \quad n>N. \tag{31}$$

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна в промежутке (0, 1) [I, 35], т. е. существует такое δ, что $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $|x_1-x_2|<\delta$. Пусть x — фиксированное значение из промежутка (0, 1). Разобьем сумму (31) на две части S_1 и S_2. К первой сумме отнесем те сла-

гаемые, у которых m удовлетворяют условию $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$. В силу выбора δ имеем для первой суммы, состоящей из положительных слагаемых, оценку

$$S_1<\sum_{(I)}\frac{\varepsilon}{2}C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

где (I) указывает, что суммирование ведется по значениям m, удовлетворяющим неравенству $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$. Если мы просуммируем по всем значениям m от 0 до n, то сумма может только увеличиться, т. е.

$$S_1<\sum_{m=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

т. е. в силу (28), $S_1<\frac{\varepsilon}{2}$ при любом n. Переходим ко второй сумме

$$S_2=\sum_{(II)}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

где суммирование распространяется на те значения m, которые удовлетворяют неравенству $\left|x-\frac{m}{n}\right|\geqslant\delta$ или $|nx-m|\geqslant n\delta$, и оценим эту сумму. Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке (0, 1), должна удовлетворять в этом промежутке неравенству вида: $|f(x)|\leqslant M$, где M — определенное положительное число [I, 35] и, следовательно, $\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|\leqslant|f(x)|+\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right|\leqslant 2M$. Кроме того, умножим слагаемые суммы S_2 на множители $\frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2}$, которые не меньше единицы. Вынося $2M$ и $\frac{1}{n^2\delta^2}$, не зависящие от переменной суммирования m, за знак суммы, получим

$$S_2\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{(II)}(m-nx)^2C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

Все слагаемые положительны, и если мы просуммируем по всем значениям m от $m=0$ до $m=n$, то значение суммы может только увеличиться. Принимая во внимание (29), получим

$$S_2\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}.$$

Числа M и δ — определенные положительные числа, и чтобы S_2

удовлетворяло неравенству $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, достаточно взять $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$. Мы получили то число $N = \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, которое нам надо было найти. Действительно, при $n > N$ обе суммы S_1 и $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, и неравенство (31) удовлетворено; теорема Вейерштрасса доказана.

Нетрудно видеть, что доказанную теорему можно формулировать следующим образом: *если $f(x)$ — непрерывная функция в замкнутом промежутке (a, b) и ε — любое заданное положительное число, то существует такой многочлен $P(x)$ от x, что во всем промежутке (a, b) выполняется неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{32}$$

Основываясь на теореме Вейерштрасса, докажем аналогичную теорему для периодических функций.

Теорема II. *Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция периода 2π и ε — любое заданное положительное число, то существует такой тригонометрический полином*

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \tag{33}$$

что при всяком x:

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{34}$$

Заметим прежде всего, что, в силу периодичности, достаточно удовлетворить неравенству (34) в основном промежутке $(-\pi, \pi)$. Положим сначала, что $f(x)$ — четная функция, и введем вместо x новую переменную $t = \cos x$, т. е. $x = \arccos t$, причем мы берем главное значение этой функции, т. е. при изменении t от 1 до (-1) функция $x = \arccos t$ непрерывно меняется от 0 до π. Функция $f(x) = f(\arccos t)$ будет непрерывной функцией t в промежутке $(-1, 1)$ и, по теореме Вейерштрасса, существует такой многочлен $P(t)$, что

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1),$$

и, возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

При замене x на $(-x)$ значения $f(x)$ не изменяются ввиду четности $f(x)$ и значения $P(\cos x)$ также не изменятся ввиду четности $\cos x$, т. е. написанное неравенство справедливо и при $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, т. е. во всем основном промежутке. Но, как известно [I, 176], целые

положительные степени $\sin x$ и $\cos x$ выражаются линейно через синусы и косинусы кратных дуг, так что многочлен от $\cos x$, т. е. $P(\cos x)$, можно представить в виде (33), и теорема доказана.

Рассмотрим теперь любую непрерывную периодическую функцию $f(x)$. Если мы положим

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$
$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)], \tag{35}$$

то $f(x)$ будет равно сумме $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем $\varphi(x)$ — функция четная и $\psi(x)$ — нечетная, и обе — периодические. При заданном ε существует, по доказанному, такой многочлен $P(t)$, что $|\varphi(x)-P(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Если мы докажем, что существует такой многочлен $Q(t)$, что

$$|\psi(x)-\sin x\,Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi), \tag{36}$$

то тригонометрический полином

$$T(x)=P(\cos x)+\sin x\,Q(\cos x)$$

будет удовлетворять условию (34). Введем по-прежнему новую переменную $t=\cos x$ и рассмотрим функцию $\psi(x)=\psi(\arccos t)$ в промежутке $-1\leqslant t\leqslant 1$. Функция $\psi(x)$, как всякая непрерывная, нечетная и периодическая функция, обращается в нуль при $x=0$ и $x=\pi$, и, следовательно, $\psi(\arccos t)$ обращается в нуль на концах промежутка, т. е. при $t=\pm 1$. Из формулы (30) вытекает, что если $f(x)$ обращается в нуль на концах промежутка $(0, 1)$, т. е. $f(0)=f(1)=0$, то и многочлен $P_n(x)$ обладает тем же свойством. Пользуясь преобразованием $y=2x-1$, можем свести промежуток $(0, 1)$ к промежутку $(-1, 1)$ и утверждать, что существует такой многочлен $R(t)$, равный нулю при $t=\pm 1$, что

$$|\psi(\arccos t)-R(t)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad -1\leqslant t\leqslant 1.$$

Мы можем при этом написать $R(t)=(1-t^2)R_1(t)$, где $R_1(t)$ — тоже многочлен, и предыдущее неравенство переписывается в виде

$$|\psi(x)-\sin^2 x\,R_1(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{37}$$

Для функции $\sin x\,R_1(\cos x)=\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)$, непрерывной в промежутке $-1\leqslant t\leqslant 1$, существует такой многочлен $Q(t)$, что

$$|\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)-Q(t)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad -1\leqslant t\leqslant 1,$$

то есть

$$|\sin x R_1(\cos x) - Q(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

и тем более

$$|\sin^2 x R_1(x) - \sin x Q(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{37$_1$}$$

ибо $|\sin x| \leqslant 1$. Из (37) и (37$_1$) следует:

$$|\psi(x) - \sin x Q(\cos x)| \leqslant |\psi(x) - \sin^2 x R_1(\cos x)| +$$

$$+ |\sin^2 x R_1(\cos x) - \sin x Q(\cos x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. неравенство (36) доказано в промежутке $(0, \pi)$. Но так как функции $\psi(x)$ и $\sin x Q(\cos x)$ — нечетны, то неравенство тем самым справедливо и во всем промежутке $(-\pi, \pi)$.

Приведенные выше доказательства теорем I и II принадлежат С. Н. Бернштейну.

169. Формула замкнутости. Из доказанной только что теоремы довольно просто вытекает справедливость формулы замкнутости из [159] для системы тригонометрических функций. Положим сначала, что заданная в промежутке $(-\pi, \pi)$ функция $f(x)$ непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$.

Продолжая $f(x)$ вовне этого промежутка по периодичности, получим непрерывную периодическую функцию, и при заданном ε будет существовать тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий неравенству (34).

Из этого неравенства вытекает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - T(x)]^2 \, dx < \varepsilon^2. \tag{38}$$

Пусть n — порядок тригонометрического полинома, т. е. значение числа m в формуле (33). Но при любом выборе тригонометрического полинома порядка не выше n величина интеграла (38) имеет наименьшее значение ε_n^2, когда за тригонометрический полином мы выбираем сумму первых $(2n+1)$ членов ряда Фурье функции $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, и ввиду того, что положительное ε можно выбирать сколь угодно малым, отсюда следует, что ε_n, которое не увеличивается при возрастании n, должно стремиться к нулю при $n \to \infty$, а это, как известно [159], и равносильно формуле замкнутости для $f(x)$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\pi, \pi)$, но ее значения $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ неодинаковы.

Как всегда, существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leqslant M$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Пусть η — произвольное заданное положительное число и пусть δ — положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta < \frac{\pi\eta}{8M^2}, \qquad \delta < \pi. \tag{39}$$

Построим новую функцию $f_1(x)$ по следующему правилу. В промежутке $(-\pi, \pi-\delta)$ функция $f_1(x)$ совпадает с $f(x)$, в промежутке $(\pi-\delta, \pi)$ график $f_1(x)$ есть отрезок прямой, соединяющий точку $x=\pi-\delta$, $y=f(\pi-\delta)$ с точкой $x=\pi$, $y=f(-\pi)$ (рис. 119). Функция $f_1(x)$ есть непрерывная функция в промежутке $(-\pi, \pi)$, имеющая одинаковые значения $f(-\pi)$ при $x=\pm\pi$, и мы имеем, очевидно, как и для $f(x)$, $|f_1(x)| \leqslant M$.

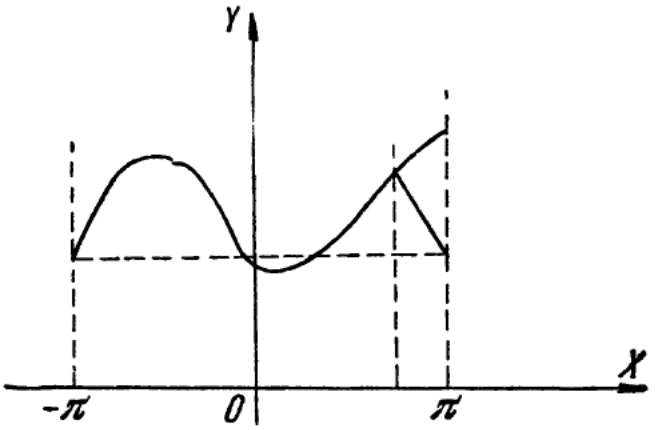


Рис. 119.

В силу доказанного выше, при любом заданном положительном η можно найти такой тригонометрический полином, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f_1(x) - T(x)]^2\,dx < \frac{\eta}{4}. \tag{40}$$

Принимая во внимание, что $f(x)=f_1(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi-\delta)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)-f_1(x)]^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi} [f(x)-f_1(x)]^2\,dx.$$

Откуда, принимая во внимание, что

$$|f(x)-f_1(x)| \leqslant |f(x)| + |f_1(x)| \leqslant 2M,$$

можем написать

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)-f_1(x)]^2\,dx \leqslant \frac{2M^2}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi} dx = \frac{2M^2\delta}{\pi},$$

или, в силу (39),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)-f_1(x)]^2\,dx < \frac{\eta}{4}. \tag{41}$$

Составим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{[f(x)-f_1(x)]+[f_1(x)-T(x)]\}^2\,dx.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\,dx,$$

а отсюда, в силу (40) и (41), следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\eta.$$

Обозначая через n порядок тригонометрического полинома $T(x)$ и рассуждая, как и выше, получим отсюда $\varepsilon_n^2\leqslant\eta$, и ввиду произвольной малости η имеем $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. формула замкнутости имеет место и для $f(x)$ с указанными выше свойствами. Совершенно так же можно доказать, что формула замкнутости имеет место в том случае, когда $f(x)$ ограничена в промежутке $(-\pi,\ \pi)$ и имеет конечное число точек разрыва. Если все точки разрыва суть точки разрыва первого рода, то не надо оговаривать ограниченности функции. Чтобы провести доказательство, можно выделить точки разрыва достаточно узенькими промежутками и построить новую функцию $f_1(x)$, непрерывную в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, совпадающую с $f(x)$ вне упомянутых промежутков и имеющую прямолинейные графики внутри этих промежутков. Для $f_1(x)$ можно по предыдущему построить тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий неравенству (40), а упомянутые промежутки можно выбрать настолько узенькими, чтобы гыполнялось неравенство (41). В остальном доказательство проводится, как и выше. Итак, формула замкнутости доказана нами для всех функций, имеющих конечное число разрывов первого рода (или непрерывных). Заметим, что она имеет место и для гораздо более широкого класса функций.

170. Характер сходимости рядов Фурье. Ряды, которые мы получили в [156], обладают тем недостатком, что они плохо сходятся. Некоторые из них не будут абсолютно и равномерно сходящимися, например, ряд (10) [156]

при $x=\frac{\pi}{2}$ обращается в ряд

$$2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right),$$

не абсолютно сходящийся; ряд (10), кроме того, не может быть и равномерно сходящимся, так как представляет прерывную функцию. Таким же недостатком обладает и ряд, представляющий прерывную функцию, имеющую значения c_1 и c_2. Существует зависимость между характером гладкости разлагаемой функции и ее рядом Фурье. Эту зависимость мы исследуем здесь более подробно. Относительно функции $f(x)$ мы предположим раз навсегда, что она сама и ее последовательные производные, о которых будет говориться, суть функции, удовлетворяющие условиям Дирихле, и периодически продолжаются вовне промежутка $(-\pi, \pi)$. Обозначим через

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_{\tau_0-1}^{(0)}$$

точки разрыва функции $f(x)$ внутри $(-\pi, \pi)$, через

$$x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_{\tau_1-1}'$$

точки разрыва ее производной $f'(x)$ внутри $(-\pi, \pi)$ и вообще через

$$x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_{\tau_k-1}^{(k)}$$

точки разрыва производной $f^{(k)}(x)$. К точкам же разрыва нужно будет присоединить и концы промежутка $(-\pi, \pi)$, если предельные значения

$$f(\mp\pi\pm 0),\quad f'(\mp\pi\pm 0),\ \ldots,\ f^{(k)}(\mp\pi\pm 0)$$

между собой не совпадают.

Обозначим для симметрии $x_0^{(0)}=-\pi$ и $x_{\tau_0}^{(0)}=\pi$ и аналогично для производных. Наше предыдущее условие для производных сводится к тому, что внутри всякого промежутка $(x_s^{(k)},\ x_{s+1}^{(k)})$ $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ \tau_k-1)$ существует непрерывная производная $f^{(k)}(x)$. В силу условий Дирихле эта производная будет иметь определенные предельные значения и на концах промежутка.

Преобразуем теперь выражения для коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Начнем с коэффициента

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Разобьем промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ на отдельные части

$$(-\pi,\ x_1^{(0)}),\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}),\ \ldots,\ (x_{\tau_0-1}^{(0)},\ \pi),$$

в каждой из которых функция $f(x)$ непрерывна. Интегрируя по частям, мы имеем

$$\int f(x)\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n}f(x)-\frac{1}{n}\int f'(x)\sin nx\,dx.$$

Так как, с другой стороны,

$$\int_{x_i^{(0)}-1}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx = \lim_{\varepsilon',\,\varepsilon''\to+0} \int_{x_i^{(0)}-1+\varepsilon'}^{x_i^{(0)}-\varepsilon''} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon',\,\varepsilon''\to+0} \frac{\sin nx}{n} f(x)\Big|_{x=x_i^{(0)}-1+\varepsilon'}^{x=x_i^{(0)}-\varepsilon''} - \frac{1}{n}\int_{x_i^{(0)}-1}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx,$$

то, принимая во внимание непрерывность функции $\sin nx$, мы получим

$$\int_{x_i^{(0)}-1}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\sin nx_i^{(0)}}{n} f(x_i^{(0)}-0) - \frac{\sin nx_i^{(0)}-1}{n} f(x_i^{(0)}-1+0) -$$

$$- \frac{1}{n}\int_{x_i^{(0)}-1}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Суммируя по i от 1 до τ_0, окончательно будем иметь

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\{\sin nx_1^{(0)}[f(x_1^{(0)}+0)-f(x_1^{(0)}-0)]+\ \ldots\ +\sin nx_{\tau_0}^{(0)}[f(x_{\tau_0}^{(0)}+0)-$$

$$-f(x_{\tau_0}^{(0)}-0)]\} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

причем $x_0^{(0)} = -\pi$, $x_{\tau_0}^{(0)} = +\pi$, и, в силу периодичности $f(x)$, $f(x_{\tau_0}^{(0)}+0) = f(x_0^{(0)}+0)$. В данном случае $\sin nx_{\tau_0}^{(0)} = 0$, но мы сохраняем соответствующее слагаемое для симметрии с дальнейшими формулами.

Обозначим для краткости скачки функции $f(x)$ в точках разрыва $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_{\tau_0}^{(0)}$ соответственно через

$$\delta_1^{(0)} = f(x_1^{(0)}+0) - f(x_1^{(0)}-0),\ \ldots,\ \delta_{\tau_0}^{(0)} = f(x_{\tau_0}^{(0)}+0) - f(x_{\tau_0}^{(0)}-0).$$

Предыдущая формула перепишется тогда в виде

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0}\delta_i^{(0)}\sin nx_i^{(0)} - \frac{b_n'}{n}, \tag{42}$$

где a_n' и b_n' обозначают коэффициенты Фурье производной $f'(x)$. Точно так же, исходя из формулы

$$\int f(x)\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n} f(x) + \int f'(x)\cos nx\,dx,$$

получим

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \cos n x_i^{(0)} + \frac{a'_n}{n}. \tag{43}$$

Формулы (42) и (43) важны сами по себе, так как они показывают, что *если периодическая функция* $f(x)$ *имеет скачки, то ее коэффициенты Фурье при* $n \to \infty$ *будут порядка* $\frac{1}{n}$ *и притом главные части коэффициентов* a_n *и* b_n *будут соответственно равны*

$$-\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \sin n x_i^{(0)}, \quad \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \cos n x_i^{(0)},$$

остаток же будет порядка выше, чем $\frac{1}{n}$.

В самом деле, остаток этот будет вида

$$-\frac{b'_n}{n}, \quad \frac{a'_n}{n};$$

величины же a'_n и b'_n, как коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, стремятся к 0 при $n \to \infty$, т. е. будут величинами бесконечно малыми при $n \to \infty$. Но формулы (42) и (43) важны еще и потому, что, пользуясь ими, мы сможем *выделить из коэффициентов Фурье* a_n и b_n, которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, *составляющие различных порядков малости по сравнению с* $\frac{1}{n}$.

Для этой цели обозначим вообще через $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ коэффициенты Фурье производной k-го порядка $f^{(k)}(x)$, а через $\delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_{\tau_k}^{(k)}$ — ее скачки в точках $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{\tau_k}^{(k)} = \pi$:

$$\delta_1^{(k)} = f^{(k)}(x_1^{(k)} + 0) - f^{(k)}(x_1^{(k)} - 0); \ \ldots; \ \delta_{\tau_k}^{(k)} = f^{(k)}(\pi + 0) - f^{(k)}(\pi - 0).$$

Применим формулы (42) и (43) к коэффициентам a'_n, b'_n, для чего нужно только заменить $f(x)$ на $f'(x)$, $\delta_i^{(0)}$ на $\delta_i^{(1)}$, $x_i^{(0)}$ на $x_i^{(1)}$, τ_0 на τ_1, мы получим

$$\left.\begin{aligned} a'_n &= -\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_1} \delta_i^{(1)} \sin n x_i^{(1)} - \frac{b''_n}{n}, \\ b'_n &= \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_1} \delta_i^{(1)} \cos n x_i^{(1)} + \frac{a''_n}{n}, \end{aligned}\right\}$$

где a''_n и b''_n — коэффициенты Фурье $f''(x)$.

Точно так же, продолжая эти рассуждения,

$$\left.\begin{aligned} a_n'' &= -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\sin nx_i^{(2)} - \frac{b_n'''}{n}, \\ b_n'' &= \frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\cos nx_i^{(2)} + \frac{a_n'''}{n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

Положив для краткости

$$A_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\sin nx_i^{(k)}, \quad B_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\cos nx_i^{(k)} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

мы из предыдущих формул будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -\frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} + \frac{A_2}{n^3} + \frac{B_3}{n^4} - \ \ldots\ + \frac{\rho_k'}{n^k}, \\ b_n &= \frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} - \frac{B_2}{n^3} + \frac{A_3}{n^4} + \ \ldots\ + \frac{\rho_k''}{n^k}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где ρ_k', ρ_k'' имеют различные выражения в зависимости от вида числа k; выражения эти приведены в следующей табличке:

k	$4m$	$4m+1$	$4m+2$	$4m+3$
ρ_k'	$a_n^{(k)}$	$-b_n^{(k)}$	$-a_n^{(k)}$	$b_n^{(k)}$
ρ_k''	$b_n^{(k)}$	$a_n^{(k)}$	$-b_n^{(k)}$	$-a_n^{(k)}$

Здесь $a_n^{(k)}$ и $b_n^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(x)$.

Из выражений A_k и B_k видно, что эти величины зависят от n, но величина n входит лишь под знак тригонометрической функции, а потому при беспредельном возрастании n величины A_s и B_s при фиксированном s остаются ограниченными. Коэффициентами при тригонометрических функциях в выражениях A_s и B_s стоят скачки производной $f^{(s)}(x)$. Если этих скачков нет, то $A_s = B_s = 0$. С другой стороны, если производная $f^{(k)}(x)$ есть функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, то множители ρ_k' и ρ_k'', которые с точностью до знака совпадают с одним из коэффициентов Фурье функции $f^{(k)}(x)$, будут порядка не ниже $\frac{1}{n}$ при большом n, так как в [165] мы видели, что коэффициенты Фурье функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, порядка не ниже $\frac{1}{n}$. Мы получаем таким образом следующую теорему:

Если периодическая непрерывная функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка включительно, а производная k-го порядка есть функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, то коэффи-

циенты Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ будут порядка не ниже $\frac{1}{n^{k+1}}$, т. е. будут иметь оценку

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}},$$

где M — некоторое положительное число.

Заметим, что при $k \geqslant 1$ ряд Фурье функции $f(x)$ будет равномерно сходящимся. Действительно, из доказанной теоремы следует, что в этом случае коэффициенты a_n и b_n будут удовлетворять неравенству

$$|a_n| < \frac{M}{n^2}, \qquad |b_n| < \frac{M}{n^2},$$

а общий член ряда будет иметь оценку

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \frac{2M}{n^2},$$

откуда и следует абсолютная и равномерная сходимость ряда, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ есть ряд сходящийся [1, 122].

Формулы (57) остаются в силе и для рядов Фурье в случае промежутка $(-l, l)$. Нужно только положить

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \sin \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l}, \\ B_k &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \cos \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l}, \end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

а выражения для ρ_k', ρ_k'', которые выписаны в табличке, умножить на $\left(\frac{l}{\pi}\right)^k$, причем здесь

$$\delta_{\tau_k}^{(k)} = f^{(k)}(l+0) - f^{(k)}(l-0) = f^{(k)}(-l+0) - f^{(k)}(-l-0) \ldots$$

171. Улучшение сходимости рядов Фурье. Как мы видели в предыдущем, присутствие в выражении для коэффициентов Фурье a_n и b_n функции $f(x)$ членов порядка $\frac{1}{n}$, которые делают ряд Фурье плохо сходящимся, обусловливается наличием скачков у функции $f(x)$. Функция может иметь сколько угодно производных внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, но достаточно одного скачка в конце промежутка, т. е., собственно говоря, несовпадения предельных значений $f(\mp \pi \pm 0)$, чтобы ряд Фурье этой функции стал практически негодным для вычисления. Далее, в приложениях очень часто важно исследовать не функцию $f(x)$, разложенную в ряд Фурье, а ее производные первого, второго и даже третьего порядка. Между тем, если коэффициенты Фурье самой функции $f(x)$ порядка $\frac{1}{n^{k+1}}$, то при дифференцировании ряда

коэффициенты будут уже порядка $\frac{1}{n^k}$, что ясно из равенств

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(-a_n\cos nx-b_n\sin nx).$$

Обратно, при каждом интегрировании порядок коэффициентов будет повышаться на единицу, ибо

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+a_n\sin nx}{n},$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом при дифференцировании сходимость ряда Фурье ухудшается; так, например, если коэффициенты Фурье функции $f(x)$ были порядка $\frac{1}{n^2}$, что будет в том случае, если эта функция непрерывна и периодична, а $f'(x)$ может иметь точки разрыва, то ряд, который получится почленным дифференцированием для вычисления $f'(x)$, будет иметь коэффициенты порядка $\frac{1}{n}$, а ряд для $f''(x)$ совсем потеряет смысл, так как его коэффициенты не будут даже стремиться к нулю. Таким образом может оказаться, что ряд Фурье функции $f(x)$ совершенно не годится для вычисления производных от функции $f(x)$ ни при каких значениях x, и это произойдет для такой функции, которая лишь *в одной точке* промежутка не имеет производной, а во всех остальных имеет таковые и любого порядка.

Поэтому возникает задача *улучшения сходимости ряда Фурье*, т. е. преобразование его к такому ряду, коэффициенты которого настолько высокого порядка малости, что ухудшение сходимости при дифференцировании не мешает вычислять производные; например, если мы желаем беспрепятственно вычислять почленным дифференцированием производные до третьего порядка включительно, то желательно, чтобы коэффициенты ряда были порядка не ниже $\frac{1}{n^5}$, ибо тогда для третьей производной получим ряд, коэффициенты которого будут иметь порядок $\frac{1}{n^2}$, и вычисление с этим равномерно сходящимся рядом будет практически удобно.

Улучшить сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ можно следующим образом. Пусть в формулах (44) имеются члены порядка $\frac{1}{n}$, т. е. функция $f(x)$ имеет скачки $\delta_i^{(0)}$.

Всегда можно построить простую вспомогательную функцию $\varphi_0(x)$, которая имеет те же скачки, что и $f(x)$. Тогда разность

$$f_1(x)=f(x)-\varphi_0(x)$$

не будет уже иметь скачков, и ряд Фурье $S(f_1)$ для функции $f_1(x)$ будет иметь коэффициенты порядка, по крайней мере $\frac{1}{n^2}$. За $\varphi_0(x)$ проще всего брать функцию, график которой есть «ступенчатая линия», т. е. состоит из отрезков, параллельных оси OX, или вообще из отрезков прямых, причем в первом случае

$$\varphi_0'(x)=0, \quad \text{то есть } f_1'(x)=f'(x),$$

а во втором, если мы будем считать угловые коэффициенты всех отрезков одинаковыми и равными m_0, то

$$f_1'(x)-f'(x)=-m_0,$$

и таким образом функция $f_1'(x)$ имеет те же самые скачки, что и $f'(x)$.

Определив так или иначе функцию $\varphi_0(x)$, мы получим

$$f(x)=\varphi_0(x)+f_1(x),$$

где $\varphi_0(x)$ — известная и весьма простая функция, состоящая из отрезков параллельных прямых, а $f_1(x)$ имеет ряд Фурье, коэффициенты которого имеют порядок не ниже $\frac{1}{n^2}$. Исправляем теперь функцию $f_1(x)$. Мы имеем

$$f'(x)=f_1'(x)+m_0.$$

Поступая с $f_1'(x)$ так же, как мы выше поступали с $f(x)$, мы можем написать

$$f_1'(x)=f_2(x)+\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ — функция, состоящая из отрезков параллельных прямых, и $f_2(x)$ разлагается в ряд Фурье, коэффициенты которого порядка не ниже $\frac{1}{n^2}$. Интегрируя последнее равенство, получим для $f_1(x)$ и тем самым для $f(x)$ выражение в виде суммы ряда Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^3}$ и кусков парабол второй степени. Если бы мы занялись дальше исправлением $f''(x)$, то получили бы для $f(x)$ выражение в виде суммы ряда Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^4}$ и кусков парабол третьей степени и т. д.

Изложенный способ применяется главным образом тогда, когда функция неизвестна, а дан только ее ряд Фурье, причем его коэффициенты имеют вид (44). При этом надо по виду коэффициентов определить точки разрывов и скачки функции $f(x)$ и ее производных, а затем применить указанный выше прием улучшения сходимости.

Можно поступить и иначе, а именно: если возможно просуммировать те части ряда Фурье, которые происходят от первых слагаемых выражений (44) для коэффициентов a_n и b_n. Именно эти слагаемые и создают плохую сходимость ряда Фурье. Оставшийся после суммирования ряд Фурье будет уже сходиться лучше, чем раньше.

При упомянутом выше суммировании надо пользоваться следующими формулами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \dfrac{-\pi - x}{2} & (-2\pi < x < 0), \\ \dfrac{\pi - x}{2} & (0 < x < 2\pi), \\ 0 & (x = 0 \text{ и } x = \pm 2\pi); \end{cases} \tag{45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2 + 6\pi x + 3x^2}{12} & (-2\pi \leqslant x \leqslant 0), \\ \dfrac{2\pi^2 - 6\pi x + 3x^2}{12} & (0 \leqslant x \leqslant 2\pi); \end{cases} \tag{46}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2 x + 3\pi x^2 + x^3}{12} & (-2\pi \leqslant x \leqslant 0), \\ \dfrac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12} & (0 \leqslant x \leqslant 2\pi). \end{cases} \tag{47}$$

Первая из написанных формул получается, если разложить функцию $\frac{\pi - x}{2}$ в промежутке $(0, \pi)$ по синусам. Вторая получается из первой путем интегрирования по x от 0 до x, причем надо пользоваться равенством [156]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Точно так же и третья формула получается из второй путем интегрирования. Дальнейшее интегрирование могло бы нам дать и дальнейшие формулы указанного выше типа. При этом мы считаем длину промежутка равной π. Этого всегда можно достигнуть простым преобразованием независимого переменного.

Указанная выше идея улучшения сходимости ряда Фурье путем постепенного исправления функции $f(x)$ и ее производных так же, как и приведенный ниже пример, принадлежат А. Н. Крылову.

172. Пример. Рассмотрим ряд Фурье

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} \sin nx \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{48}$$

Мы имеем здесь

$$b_n = -\frac{2n \cos \frac{n\pi}{2}}{\pi (n^2 - 1)}.$$

Для того чтобы представить b_n в виде (43), разложим дробь $\frac{n}{n^2 - 1}$ по

степеням $\frac{1}{n}$, доведя разложение до членов порядка $\frac{1}{n^4}$.

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$$

и

$$b_n=-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3(n^2-1)}. \tag{49}$$

Нам надо таким образом просуммировать два ряда:

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} \text{ и } -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n^3}. \tag{50}$$

Обозначая первую из сумм через $S_1(x)$, можем переписать ее в виде

$$S_1(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

К каждой из этих сумм можно применить формулу (45). Рассмотрим сначала первую сумму. При изменении x от 0 до π аргумент $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, и формула (45) дает

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{2x-\pi}{4\pi}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Обращаясь ко второй сумме, замечаем, что при изменении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ аргумент $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, при изменении x от $\frac{\pi}{2}$ до π аргумент $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Формула (45) дает в этом случае

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}=\begin{cases}\frac{2x+\pi}{4\pi} & \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right),\\ \frac{2x-3\pi}{4\pi} & \left(\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right),\\ 0 & \left(x=\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Складывая, получим для $S_1(x)$ следующее конечное выражение:

$$S_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{x-\pi}{\pi} & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right), \\ 0 & \left(x = \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{51}$$

Вторую из сумм (50) мы могли бы вычислить, пользуясь формулой (47), но можно поступать и иначе. Обозначим эту сумму через $S_2(x)$. Нетрудно видеть, что, интегрируя $S_1(x)$ дважды по x, мы получим $-S_2(x)$ с точностью до полинома первой степени. Интегрируя выражения (51) два раза, получим

$$\frac{x^3}{6\pi} \quad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{(x-\pi)^3}{6\pi} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right)$$

и, следовательно,

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi} + C_1'x + C_2' & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{(x-\pi)^3}{6\pi} + C_1''x + C_2'' & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right). \end{cases} \tag{52}$$

Для определения постоянных заметим, что ряд Фурье для $S_2(x)$ имеет коэффициенты порядка $\frac{1}{n^3}$, а ряд для $S_2'(x)$ имеет коэффициенты порядка $\frac{1}{n^2}$, и, следовательно, оба ряда сходятся равномерно и дают функцию, непрерывную при $x = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что оба выражения (52) и их производные должны совпадать при $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi^3}{48\pi} + C_1'\frac{\pi}{2} + C_2' = \frac{\pi^3}{48\pi} + C_1''\frac{\pi}{2} + C_2'',$$

$$-\frac{\pi^2}{8\pi} + C_1' = -\frac{\pi^2}{8\pi} + C_1''. \tag{53}$$

Кроме того, из вида второй из сумм (50) следует $S_2(0) = S_2(\pi) = 0$, что, в силу (52), дает

$$C_2' = 0; \quad C_1''\pi + C_2'' = 0. \tag{54}$$

Из этих уравнений можем определить все четыре постоянные:

$$C_1' = C_1'' = \frac{\pi}{24}, \qquad C_2' = 0, \qquad C_2'' = -\frac{\pi^2}{24};$$

подставляя в (52), получим выражение $S_2(x)$:

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi} + \frac{\pi}{24}x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{(x-\pi)^3}{6\pi} + \frac{\pi}{24}(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right). \end{cases}$$

Окончательно для ряда (48) получим выражение

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx,$$

что и решает нашу задачу. Функция $f(x)$ выражается через известные функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$, состоящие из кусков прямых и парабол, и ряда Фурье, коэффициенты которого порядка

$$\frac{1}{n^3(n^2-1)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{n^5}.$$

§ 16. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

173. Формула Фурье. Изложение теории рядов Фурье мы закончим исследованием предельного случая, когда промежуток $(-l, l)$, в котором изучается ряд Фурье, стремится к $(-\infty, +\infty)$, т. е. $l \to +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна во всяком конечном промежутке и сверх того абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = Q.$$

По теореме Дирихле внутри $(-l, l)$ мы имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Помня, что

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

мы получим отсюда

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt.$$

Что произойдет с этой формулой, когда $l \to +\infty$? Первое слагаемое очевидно стремится к нулю, ибо

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}|f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l} \to 0.$$

Вводя новую переменную α, которая принимает равноотстоящие значения в промежутке $(0, \infty)$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \ \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \ \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \ \ldots,$$

получая каждый раз приращения $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$, мы оставшуюся сумму можем написать в виде

$$\frac{1}{\pi}\sum_{(\alpha)}\Delta\alpha\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt.$$

При больших l интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

и можно думать, что вся сумма при $l\to+\infty$ будет стремиться к пределу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

и таким образом мы имеем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt. \qquad (1)$$

В точках разрыва непрерывности, если таковые имеются, надо только заменить $f(x)$ на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Формула эта, которая получается из ряда Фурье при $l\to+\infty$, называется *формулой Фурье*. Мы приходим таким образом к предложению: *если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном промежутке и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то при всех x имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (2)$$

Теорема эта называется обычно *теоремой Фурье*, а интеграл, стоящий в левой части этой формулы, *интегралом Фурье* функции $f(x)$. Предыдущее рассуждение не является строгим, его можно сделать таковым при помощи некоторых дополнительных рассуждений. Мы не будем этого делать, а приведем другое, строгое доказательство формулы Фурье, основанное на результатах из [166].

Формула (2) будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Обозначая интеграл, стоящий в левой части, через $J(\lambda, x)$, мы можем написать:

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_0^{\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha, \tag{3}$$

т. е. можем переставить порядок интегрирования по t и по λ.

Это вытекает из того, что в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt \tag{4}$$

сходится равномерно при всех значениях α. Действительно, интегралы

$$\int_N^{N'}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,\quad \int_{-N'}^{-N}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\quad (N<N')\ \ldots \tag{5}$$

по абсолютному значению не превосходят

$$\int_N^{N'}|f(t)|\,dt, \tag{6}$$

и, стало быть, при данном ε существует такое N_0, не зависящее от α, что при всех N и $N'>N_0$ интегралы (5) будут меньше ε по абсолютной величине, ибо этим свойством, в силу абсолютной интегрируемости $f(t)$, обладает интеграл (6).

Но тогда интеграл (4) можно интегрировать по параметру α под знаком интеграла, что и дает нам

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_0^{\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha.$$

Внутренний интеграл по α правой части формулы (3) можем вычислить непосредственно и получим

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt, \tag{7}$$

и нам остается найти

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt.$$

Разбив промежуток интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на два промежутка $(-\infty, x)$, $(x, +\infty)$ и введя вместо $(t-x)$ переменную $(-z)$ в первом и z во втором

промежутке, мы перепишем (7) в виде

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz.$$

Оба эти интеграла имеют вид интегралов Дирихле, но только с бесконечными пределами. Тем не менее нетрудно показать, что они обладают свойствами обычных интегралов Дирихле, т. е. при $\lambda\to\infty$ должно получиться

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz&\to\frac{1}{2}f(x-0),\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz&\to\frac{1}{2}f(x+0),\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

после чего окажется действительно

$$J(\lambda,\ x)\to\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

что и докажет теорему Фурье.

Остается доказать формулы (8). Ограничимся доказательством первой из этих формул. Пусть ε — любое заданное малое положительное число. При $z>1$ множитель $\frac{\sin\lambda z}{z}$ по абсолютной величине меньше единицы при любом вещественном λ, а функция $f(x-z)$ по условию абсолютно интегрируема в промежутке $(0,\infty)$ и, следовательно, существует такое число $N>1$, что при всяком λ

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_N^\infty|f(x-z)|\,dz<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассматривая интеграл Дирихле в конечном промежутке

$$\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz,$$

можем утверждать, что он стремится к $\frac{1}{2}f(x-0)$ при $\lambda\to\infty$, т. е. при всех достаточно больших λ

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем очевидно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz-\frac{1}{2}f(x-0)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right]+\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}\,dz,$$

откуда, в силу последних неравенств, при всех достаточно больших λ будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x-z)\frac{\sin \lambda z}{z}\,dz-\frac{1}{2}\,f(x-0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ввиду произвольной малости ε это и дает первую из формул (8). Вторая доказывается буквально так же.

Формула (2) может быть преобразована, если функция $f(x)$ четная или нечетная. В самом деле, раскрывая $\cos \alpha(t-x)$, имеем

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \alpha t\cos \alpha x\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \alpha t\sin \alpha x\,dt\right], \qquad (9)$$

причем оба интеграла по t имеют, очевидно, смысл ввиду абсолютной интегрируемости $f(t)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Если функция $f(t)$ — четная, то функция $f(t)\cos \alpha t$ — четная, а функция $f(t)\sin \alpha t$ — нечетная, и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \alpha t\,dt=2\int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \alpha t\,dt=0,$$

так что

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos \alpha x\,d\alpha\int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t\,dt.$$

Если же функция $f(x)$ — нечетная, то таким же образом получим

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin \alpha x\,d\alpha\int_0^{\infty} f(t)\sin \alpha t\,dt.$$

Если функция $f(x)$ определена только в промежутке $(0, \infty)$, ее можно продолжить в соседний промежуток $(-\infty, 0)$ четным или нечетным образом и тогда мы для одной и той же функции $f(x)$,

считая ее для простоты непрерывной, получим две формулы

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha x\, d\alpha \int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt \quad (x>0), \tag{10}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \alpha x\, d\alpha \int_0^\infty f(t)\sin \alpha t\, dt \quad (x>0). \tag{11}$$

Нужно только помнить, что для первой из них функция $f(x)$, продолжаясь четно, дает непрерывную функцию от x, так что первая формула верна и при $x=0$; во второй же формуле, если $f(0)\neq 0$, мы получим разрыв, и правая часть при $x=0$ равняется не $f(0)$, а нулю.

В формуле (9) первое интегрирование совершается по t, и, введя две функции

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \alpha t\, dt, \qquad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \alpha t\, dt,$$

мы можем переписать формулу (9) в виде

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha)\sin \alpha x]\, d\alpha,$$

считая для простоты $f(x)$ непрерывной. В этой формуле мы имеем разложение $f(x)$ в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ на гармонические колебания, причем частоты α этих колебаний непрерывно меняются от 0 до $+\infty$, а функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ дают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты α. Для конечного промежутка $(-l, l)$ мы имели частоты $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$ $(n=0, 1, \ldots)$, образующие арифметическую прогрессию.

Если в формуле (10) положить

$$f_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt, \tag{12_1}$$

то ее можно переписать в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\alpha)\cos \alpha x\, d\alpha. \tag{12_2}$$

В этих двух формулах $f(x)$ и $f_1(\alpha)$ совершенно одинаково выражаются одна через другую.

Если считать в формуле (12_2) $f(x)$ заданной и $f_1(\alpha)$ — искомой, то формула (12_2) представляет собою так называемое *интегральное уравнение* для $f_1(\alpha)$, поскольку эта функция входит под знак интеграла (*интегральное уравнение Фурье*). Формула (12_1) дает решение

этого интегрального уравнения. Совершенно так же формулу (11) мы можем представить в виде следующих формул:

$$f_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \alpha t \, dt, \tag{13_1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha. \tag{13_2}$$

Примеры. **1.** В формуле (10) положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Мы получим тогда для интеграла, стоящего в правой части равенства (10):

$$\int_0^\infty \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^\infty f(t) \cos \alpha t \, dt = \int_0^\infty \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^1 \cos \alpha t \, dt = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

и следовательно,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} \, d\alpha = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

2. Полагая в формуле (11)

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0),$$

мы в правой части имеем интеграл

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha x \, d\alpha \int_0^\infty e^{-\beta t} \sin \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \, d\alpha$$

и получаем таким образом

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-\beta x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

3. Точно так же, полагая в формуле (10)

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0),$$

найдем

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \, d\alpha = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta x}.$$

Часто формулу Фурье пишут в комплексной форме

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{\alpha(t-x)i} dt. \tag{14}$$

Нетрудно получить эту формулу из формулы (2). Заменяя под интегралом

$$e^{\alpha(t-x)i} = \cos\alpha(t-x) + i\sin\alpha(t-x),$$

получим два интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt.$$

Во втором из них переменная α входит под знак синуса, так что подынтегральная функция есть нечетная функция от α и, следовательно, интегрируя по α в промежутке $(-\infty, +\infty)$, мы получим 0. Наоборот, в первом интеграле стоит четная функция от α, и интегрирование по α в промежутке $(-\infty, +\infty)$ можно заменить интегрированием в промежутке $(0, \infty)$, приписав к интегралу множитель 2. Отсюда видно, что формула (14) равносильна формуле (2).

Считая $f(x)$ непрерывной, перепишем (14) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{\alpha t i} dt,$$

откуда видно, что, как и для формул (10) и (11), мы можем переписать ее в виде следующих двух формул

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{\alpha t i} dt, \tag{15_1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\alpha)\,e^{-\alpha x i} d\alpha. \tag{15_2}$$

Сделаем одно замечание по поводу интеграла Фурье в комплексной форме. Мы не можем утверждать, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt$$

с бесконечными пределами по отношению к переменной α имеет обычный смысл [85]. Мы можем лишь утверждать, что при любом конечном положительном значении M

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt = 0,$$

и, следовательно, строго говоря, формулу Фурье в комплексной форме мы должны записывать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{+M} e^{-\alpha x i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{\alpha t i}\,dt.$$

В данном случае нижний предел стремится к $(-\infty)$, а верхний — к $(+\infty)$, имея одинаковые абсолютные значения. Для существования несобственного интеграла в обычном смысле необходимо, чтобы предел существовал при любом законе стремления нижнего предела к $(-\infty)$ и верхнего к $(+\infty)$.

174. Ряды Фурье в комплексной форме. Ряд Фурье можно представить в комплексной форме так же, как это мы только что сделали с интегралом Фурье.

Напомним формулы из [158]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{16}$$

Покажем, что формулы эти равносильны следующим:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}},\qquad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)e^{-i\frac{n\pi\xi}{l}}\,d\xi. \tag{17}$$

Здесь значок n принимает не только целые положительные, но и отрицательные значения. Определим отдельно c_0, c_k и c_{-k}, где k — целое положительное число. Согласно (17) и (16) имеем

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\,d\xi=\frac{a_0}{2},$$

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}-i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k-ib_k}{2},$$

$$c_{-k}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}+i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k+ib_k}{2}.$$

Подставляя в ряд (17) и суммируя отдельно по положительным и отрицательным значкам, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}.$$

Слагаемые двух написанных сумм при одинаковых k суть мнимые сопряженные величины. Соединяя их в одно слагаемое, получим вещественную величину

$$\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}=a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

и предыдущее выражение для $f(x)$ совпадает с рядом Фурье (16), откуда и следует равносильность (17) и (16).

175. Кратные ряды Фурье. Ряды и интегралы Фурье могут служить и для представления функций от двух и большего числа независимых переменных. Рассмотрим, например, функцию $f(x, y)$ периодическую, периода $2l$ относительно x и периода $2m$ относительно y. Рассматривая функцию $f(x, y)$ как функцию от x, мы имеем

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} c_\sigma(y)\, e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}}, \tag{18}$$

где

$$c_\sigma(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi, y)\, e^{-i\frac{\sigma\pi\xi}{l}}\, d\xi.$$

Функция $c_\sigma(y)$, в свою очередь, может быть разложена в ряд вида

$$c_\sigma(y) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\frac{\tau\pi y}{m}},$$

где

$$c_{\sigma\tau} = \frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m} c_\sigma(\eta)\, e^{-i\frac{\tau\pi\eta}{m}}\, d\eta = \frac{1}{4lm}\int_{-l}^{+l}\int_{-m}^{+m} f(\xi, \eta)\, e^{-i\pi\left(\frac{\sigma\xi}{l}+\frac{\tau\eta}{m}\right)}\, d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

Подставив полученное выражение для $c_\sigma(y)$ в формулу (18), получим

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\frac{\tau\pi y}{m}}\right) e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}},$$

откуда, раскрывая скобки, имеем формулу

$$f(x, y) = \sum_{\sigma,\,\tau=-\infty}^{\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\pi\left(\frac{\sigma x}{l}+\frac{\tau y}{m}\right)}, \tag{20}$$

которая обобщает ряд Фурье на случай двух переменных.

Таким же образом для периодической функции $f(x_1, x_2, x_3)$ от трех независимых переменных периода $2\omega_1$ относительно x_1, периода

$2\omega_2$ относительно x_2 и периода $2\omega_3$ относительно x_3, мы имеем

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = -\infty}^{+\infty} c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} e^{i\pi\left(\frac{\sigma_1 x_1}{\omega_1} + \frac{\sigma_2 x_2}{\omega_2} + \frac{\sigma_3 x_3}{\omega_3}\right)}, \qquad (21)$$

где

$$c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{1}{8\omega_1\omega_2\omega_3} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} \int_{-\omega_3}^{\omega_3} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-i\pi\left(\frac{\sigma_1\xi_1}{\omega_1} + \frac{\sigma_2\xi_2}{\omega_2} + \frac{\sigma_3\xi_3}{\omega_3}\right)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3. \qquad (22)$$

Выделяя вещественную часть в формулах (20) и (21), получим разложение в ряд Фурье в вещественной форме. Ряд (20) при $l = m = \pi$ имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{\sigma, \tau = 0}^{\infty} (a^{(1)}_{\sigma,\tau} \cos\sigma x \cos\tau y + a^{(2)}_{\sigma,\tau} \cos\sigma x \sin\tau y + a^{(3)}_{\sigma,\tau} \sin\sigma x \cos\tau y + a^{(4)}_{\sigma,\tau} \sin\sigma x \sin\tau y). \qquad (23)$$

Мы не выписываем выражений для коэффициентов и не проводим исследования условий разложимости $f(x, y)$ в ряд Фурье. Укажем одно достаточное условие: если $f(x, y)$ имеет период 2π по x и y, непрерывна и имеет непрерывные частные производные при всех x и y, то она разлагается в ряд Фурье при всех x и y. Отметим, что в формуле (23) σ и τ могут независимо друг от друга стремиться к бесконечности:

$$\sum_{\sigma, \tau = 0}^{\infty} = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{\sigma=0}^{m} \sum_{\tau=0}^{n}.$$

Формула Фурье для функции двух переменных имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i[\alpha_1(\xi - x) + \alpha_2(\eta - y)]}\, d\eta, \qquad (24)$$

причем интегрирование по α_1 и α_2 надо понимать так, как это указано в конце [**173**]. В вещественной форме будем иметь

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{0}^{\infty} d\alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos\alpha_1(\xi - x) \cos\alpha_2(\eta - y)\, d\eta. \qquad (25)$$

Эта формула имеет место, если функция $f(x, y)$, определенная на всей плоскости, непрерывна, имеет частные производные первого

порядка, при любом фиксированном y абсолютно интегрируема по x на промежутке $-\infty < x < +\infty$ и при любом фиксированном x абсолютно интегрируема по y на промежутке $-\infty < y < +\infty$.

Если, например, функция $f(x, y)$ есть четная функция от x и y, то вместо формулы (25) можно писать

$$f(x, y) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \cos \alpha_1 x \, d\alpha_1 \int_0^\infty \cos \alpha_1 \xi \, d\xi \int_0^\infty \cos \alpha_2 y \, d\alpha_2 \int_0^\infty f(\xi, \eta) \cos \alpha_2 \eta \, d\eta. \quad (26)$$

Аналогичным образом может быть написана формула Фурье и для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ любого числа независимых переменных.

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 17. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

176. Уравнение колебаний струны. Вопрос об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными принадлежит к наиболее трудным и обширным отделам анализа, и здесь мы ограничимся рассмотрением основных задач из указанной области. Настоящий параграф мы посвятим задачам, связанным с так называемым *волновым уравнением*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

К этому уравнению мы пришли при рассмотрении звуковых и электромагнитных колебаний. Положим, что u не зависит от y и z, т. е. что u имеет одинаковое значение во всех точках любой плоскости, перпендикулярной оси OX. В этом случае волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и в таких случаях говорят обычно, что имеется *плоская волна*. Мы покажем сейчас, что такое же уравнение получается при рассмотрении малых поперечных колебаний натянутой однородной струны.

Под *струной* мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под действием сильного натяжения T_0 и в состоянии равновесия без внешних сил направлена по оси OX. Если мы выведем ее из положения равновесия и, кроме того, подвергнем действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться, причем точка струны, занимавшая при равновесии положение N с абсциссой x, к моменту t займет положение M. Мы ограничимся рассмотрением только *поперечных колебаний*, предполагая,

что все движение происходит в одной плоскости и что точки струны движутся перпендикулярно оси OX (рис. 120). Смещение $\overline{NM}$ точек струны мы обозначим через u. Это смещение и будет искомой функцией двух независимых переменных x и t.

Выделим элемент струны MM', который при равновесии занимал положение NN'. Считая деформации малыми, мы будем пренебрегать квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Пусть α — острый угол, образованный направлением касательной к струне с осью OX. Мы имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Обозначим через F силу, действующую на струну перпендикулярно к оси OX и рассчитанную на единицу длины. На рассматриваемый элемент MM' действуют следующие силы: натяжение в точке M', направленное по касательной в точке M', причем оно образует острый угол с осью OX, натяжение в точке M, направленное по касательной в точке M и образующее тупой угол с осью OX, и сила $F\,dx$, направленная по оси u. Ввиду сделанного предположения малости деформаций мы считаем оба упомянутых выше натяжения равными по величине натяжению T_0. Положим сначала, что мы имеем равновесие струны под действием упомянутой силы F. Проектируя на ось u, будем иметь следующее условие равновесия:

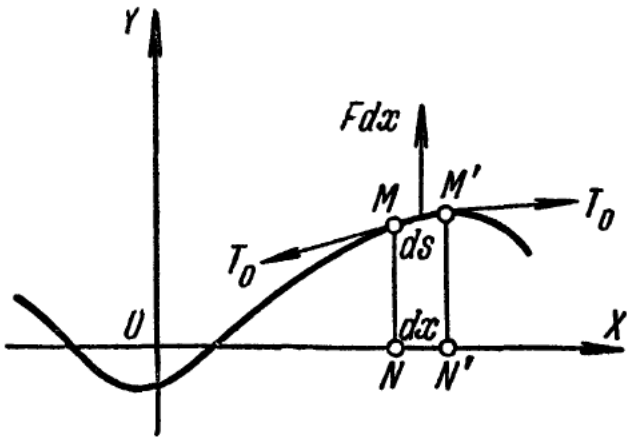


Рис. 120.

$$T_0 \sin\alpha' - T_0 \sin\alpha + F\,dx = 0, \tag{1}$$

где α' — значение упомянутого угла α в точке M', т. е.

$$\sin\alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}, \qquad \sin\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M},$$

и, следовательно,

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right] + F\,dx = 0. \tag{2}$$

Разность, стоящая в квадратных скобках, выражает приращение функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, вызванное изменением x на dx. Заменяя это приращение дифференциалом, получим [I, 50]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

Подставляя в (2) и сокращая на dx, будем иметь *уравнение равновесия струны*

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = 0. \tag{3}$$

Для получения *уравнения движения* нам достаточно, по принципу Даламбера, к внешней силе добавить еще *силу инерции*, которую мы получим следующим образом: скорость точки M есть очевидно $\frac{\partial u}{\partial t}$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, и поэтому сила инерции элемента $\overline{MM'}$, равная с обратным знаком взятому произведению ускорения на массу, будет

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho\, dx,$$

где ρ есть линейная плотность струны, т. е. масса единицы длины, а сила инерции, рассчитанная на единицу длины, будет

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

причем мы считаем ρ постоянной величиной.

Итак, уравнение движения мы получим, заменяя в уравнении (3) F на $F - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, что дает

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Разделив на ρ и положив

$$\frac{T_0}{\rho} = a^2, \quad \frac{F}{\rho} = f, \tag{4}$$

мы получаем *уравнение вынужденных поперечных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \tag{5}$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $f = 0$ и получаем *уравнение свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

В томе IV мы укажем другой вывод уравнения (5) на основе принципа Гамильтона.

Выше мы предполагали, что внешняя сила распределена по всей струне непрерывно; но иногда приходится иметь дело с силой P, сосредоточенной в одной точке C. Этот случай можно рассматривать либо как предельный случай предыдущего, считая, что сила действует на бесконечно малый элемент длины ε около точки C, но так что произведение ее величины на ε стремится к конечному

пределу, отличному от нуля, при $\varepsilon \to 0$, либо же непосредственно, прилагая уравнение (2) к элементу $\overline{MM'}$ около точки C и заменяя там $F\,dx$ на P. Заметим при этом, что мы не добавляем к $F\,dx$ силы инерции $\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,dx\right)$, так как считаем, что она стремится к нулю при $dx \to 0$.

Считая, что концы элемента приближаются к точке C, и обозначив предельные значения, к которым стремится $\frac{\partial u}{\partial x}$, когда мы приближаемся к точке C справа или слева, соответственно через

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-,$$

мы получаем в пределе из уравнения (2)

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right] = -P. \tag{7}$$

Мы видим, таким образом, что в точке C действия сосредоточенной силы струна имеет угловую точку, т. е. точку с различными направлениями касательной слева и справа.

Как и вообще в динамике, одного уравнения движения (5) недостаточно для полного определения движения струны: нужно еще задать ее состояние в начальный момент $t = 0$, т. е. положение ее точек u и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$, как известные функции от x:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{8}$$

Эти условия, которым должна удовлетворять искомая функция u при $t = 0$, называются *начальными условиями*.

Теоретически можно рассматривать бесконечную струну, и в этом случае для нахождения решения достаточно уравнения (5) и условий (8), причем $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть заданы во всем бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Этот случай может соответствовать рассмотрению плоских волн в безграничном пространстве. Как мы увидим в дальнейшем, полученные для бесконечной струны результаты дадут нам картину распространения возмущений и в ограниченной струне до того момента времени, когда в рассматриваемую точку придут возмущения, отраженные от концов струны.

Но если струна *ограничена с одной или с обеих сторон* в точках $x = 0$ и $x = l$, то нужно указать, что делается на ее концах. Пусть, например, конец струны $x = 0$ закреплен. В этом случае мы должны иметь

$$u|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

Если закреплен и конец $x=l$, то мы получаем еще

$$u|_{x=l}=0, \tag{9_1}$$

и эти условия должны быть выполнены при всяком t.

Но концы струны могут быть не закреплены, а двигаться заданным образом. Тогда ординаты этих точек струны нужно считать заданными функциями от времени, т. е. положить

$$u|_{x=0}=\chi_1(t), \quad u|_{x=l}=\chi_2(t). \tag{10}$$

Как бы то ни было, если струна ограничена с одной или с обеих сторон, то для каждого ее конца должно быть задано условие, которое называется *предельным условием*.

Итак, мы видим, что *для решения конкретной физической задачи не меньшее значение, чем само уравнение движения, имеют дополнительные начальные и предельные условия*, и что нас интересует не столько нахождение каких-нибудь решений или даже общего решения уравнения движения, сколько нахождений именно того решения, которое удовлетворяет поставленным начальным и предельным условиям.

177. Решение Даламбера. В случае свободных колебаний бесконечной струны искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворить уравнению (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях (8)

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

причем ввиду неограниченности струны функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Можно найти самое общее решение уравнения (6), и притом в такой форме, что легко можно будет удовлетворить и условиям (8).

Для этого преобразуем уравнение (6) к новым независимым переменным:

$$\xi=x-at, \qquad \eta=x+at$$

или

$$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi), \quad t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi).$$

Считая u зависящим от x и t через посредство ξ и η и применяя правило дифференцирования сложных функций, выразим производные по прежним переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

Применяя эти же формулы еще раз, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta},$$

и уравнение (6) оказывается равносильным следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \tag{11}$$

Переписав уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0,$$

заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ не зависит от η, т. е. является функцией только от ξ. Положив

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \theta(\xi),$$

получаем, интегрируя,

$$u = \int \theta(\xi)\, d\xi + \theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ есть произвольная функция от η («постоянная» при интегрировании по ξ может зависеть от η). Первое слагаемое можно считать здесь произвольной функцией от ξ, ибо $\theta(\xi)$ есть произвольная функция ξ, и, обозначив ее через $\theta_1(\xi)$ имеем

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta),$$

или, переходя к старым переменным $(x,\ t)$,

$$u(x,\ t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{12}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции своих аргументов. Это самое общее решение уравнения (6) называется *решением Даламбера*; оно содержит две произвольные функции θ_1 и θ_2. Для их определения мы воспользуемся начальными условиями (8), которые, ввиду равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left[-\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)\right]$$

и равенства (12), дают

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x), \quad -\theta_1'(x) + \theta_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{a} \tag{13}$$

или, интегрируя и меняя знак на обратный,

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C.$$

Положив $x=0$, определяем произвольную постоянную C:

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0).$$

Не ограничивая общности, можем считать $C=0$, т. е.

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0, \tag{14}$$

ибо, если бы оказалось $C\neq 0$, то, введя вместо функций $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ функции

$$\theta_1(x)-\frac{C}{2},\quad \theta_2(x)+\frac{C}{2},$$

мы, не меняя равенств (13), удовлетворили бы и (14).

Итак, мы имеем

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x),\quad \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz. \tag{15}$$

Отсюда мы без труда определяем функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$:

$$\theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz,\quad \theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz. \tag{16}$$

Подставив полученные выражения в формулу (12), находим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)\,dz+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)\,dz,$$

или, окончательно,

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz. \tag{17}$$

Формула (17) дает, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемое решение (так называемое классическое решение) задачи, если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывную производную $\varphi_1'(x)$ при $-\infty<x<+\infty$. Однако нередко приходится иметь дело с задачами, в которых начальное возмущение задается функциями, не удовлетворяющими этим условиям. Например, если струна в начальный момент имеет форму ломаной линии, то $\varphi(x)$ не имеет определенной производной в вершине ломаной. Тем не менее разумно считать, что формула (17) дает решение задачи, хотя функция $u(x,\ t)$ и не всюду имеет непрерывные производные до второго порядка. В этом случае говорят, что задача имеет так называемое *обобщенное решение*. Теория обобщенных решений будет изложена в томе IV.

178. Частные случаи. Формула (17) дает полное решение поставленной задачи. Для лучшего уяснения полученного решения разберем различные частные случаи.

1. *Начальный импульс равен нулю*, т. е. начальные скорости точек струны равны нулю. При этом условии $\varphi_1(x)=0$, и формула (17) дает

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \tag{18}$$

в то время как в начальный момент

$$u\,|_{t=0}=u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

Каков физический смысл решения (18)? Числитель выражения (18) состоит из двух слагаемых, и мы остановимся на первом: $\varphi(x-at)$.

Положим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t=0$ из точки $x=c$ струны, передвигается в положительном направлении оси OX со скоростью a, т. е. его абсцисса меняется по формуле: $x=c+at$ или $x-at=c$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемое формулой $u=\varphi(x-at)$, будет оставаться все время постоянным, а именно равным $\varphi(c)$. Самое явление, определяемое функцией $u=\varphi(x-at)$, называется *распространением прямой волны*. Возвратясь к формуле Даламбера (12), мы можем сказать, что слагаемое $\theta_1(x-at)$ дает прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси OX со скоростью a. Точно так же второе слагаемое $\theta_2(x+at)$ определяет такое колебание струны, при котором возмущение распространяется со скоростью a в отрицательном направлении оси OX в том смысле, что в момент t точка с абсциссой $c-at$ будет иметь то же отклонение u, которое имела точка $x=c$ при $t=0$. Соответствующее явление назовем *распространением обратной волны*.

Величина a есть скорость распространения возмущений или колебаний (поперечных). Формула (4) показывает, что

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{19}$$

т. е. *что скорость распространения поперечных колебаний обратно пропорциональна корню квадратному из плотности струны и прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения.*

Указанное выше решение (18), которое является средним арифметическим прямой волны $\varphi(x-at)$ и такой же обратной волны $\varphi(x+at)$, может быть получено следующим образом: строим два одинаковых экземпляра графика $u=\varphi(x)$ при $t=0$ и вообразим, что они налегают друг на друга, а затем раздвигаются в обе стороны со скоростью a. График u в момент t получится как средняя арифметическая раздвинутых таким образом графиков, т. е. этот график в момент t будет делить пополам отрезки ординат между раздвинутыми графиками.

Отметим, что в последующем примере не выполнено то условие малости tg α, которое предполагалось при выводе уравнения (6), и этот пример имеет качественный характер.

Пусть, например, график $\varphi(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 121:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 \text{ вне промежутка } (-\alpha,\ \alpha),\\ x+\alpha \text{ при } -\alpha\leqslant x\leqslant 0,\\ -x+\alpha \text{ при } 0\leqslant x\leqslant \alpha.\end{cases}$$

На рис. 122 изображены графики $u(x, t)$ в моменты

$$t=\frac{a}{4a},\ \frac{2a}{4a},\ \frac{3a}{4a},\ \frac{a}{a},\ \frac{5a}{4a},\ \frac{2a}{a}.$$

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси: одну для переменной x и другую для t. На рис. 123 нами отмечена одна ось X. Всякая точка нашей плоскости определяется двумя координатами (x, t), т. е. такая точка характеризует определенную точку струны x в определенный момент времени t.

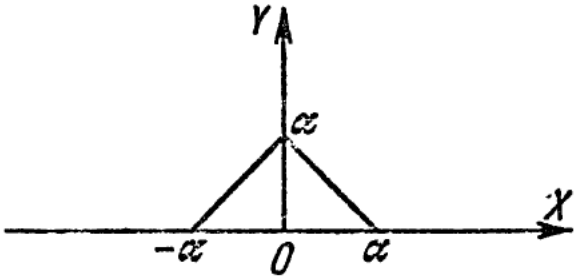


Рис. 121.

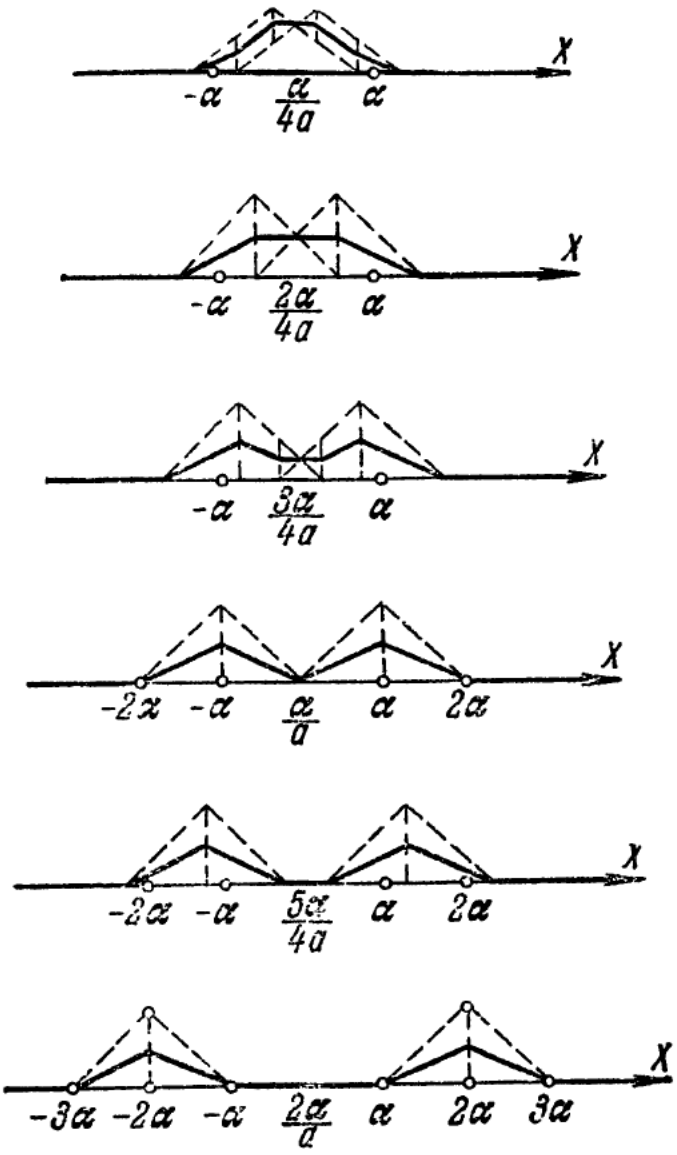


Рис. 122.

Нетрудно при этом определить графически те точки струны, начальные возмущения которых дошли в момент t_0 до точки x_0. Это будут,

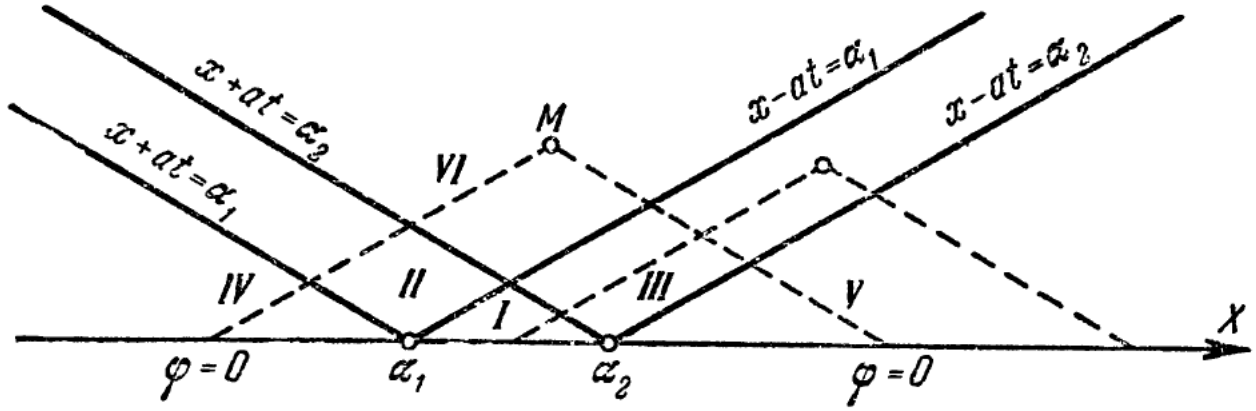


Рис. 123.

согласно предыдущему, точки с абсциссами $x_0 \pm at_0$, так как a есть скорость распространения колебаний. Для нахождения их на оси X

достаточно провести через точку (x_0, t_0) две прямые

$$\left.\begin{aligned} x - at &= x_0 - at_0, \\ x + at &= x_0 + at_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и в пересечении их с осью OX и получатся искомые точки. Прямые (20) называются *характеристиками* в *точке* (x_0, t_0). Вдоль первой из этих прямых $\varphi(x - at)$ сохраняет постоянное значение, т. е. эта прямая дает те значения (x, t), при которых прямая волна дает то же отклонение, что и при значениях (x_0, t_0). Вторая из прямых (20) играет ту же роль для обратной волны. Можно сказать коротко, что *возмущения распространяются по характеристикам.*

Применяя указанное построение, можем обнаружить следующие факты.

Пусть начальное возмущение имелось лишь в некотором промежутке (α_1, α_2) струны (рис. 123), т. е. $\varphi(x) = 0$ вне этого промежутка. Ограничиваясь лишь верхней полуплоскостью (x, t), т. е. $t > 0$, которая одна имеет физический смысл, проведем характеристики из точек α_1 и α_2 оси OX, начерченные сплошными линиями. Эти характеристики разобьют всю полуплоскость на *шесть* областей. Область (I) соответствует таким точкам, до которых в данный момент доходит как прямая, так и обратные волны. Область (II) соответствует тем точкам, до которых в данный момент доходит только обратная волна; в область же (III), наоборот, доходит только прямая волна. Точки областей (IV) и (V) таковы, что к данному моменту до них возмущение еще не дошло. Наконец, до точек области (VI) возмущение успело дойти и пройти через них, и в данный момент они находятся в состоянии покоя. Это ясно из того, что если через какую-нибудь из точек M этой области провести характеристики, то они пересекут ось OX в некоторой точке $x = c$ вне отрезка начального возмущения, и, следовательно, значения $\varphi(x \pm at) = \varphi(c)$ будут равны нулю. Кроме того, если провести через M прямую, перпендикулярную оси OX, то нижняя часть этой прямой, которой соответствуют при неизменном x более ранние моменты времени, пересечет по крайней мере одну из областей (I), (II), (III), а верхняя часть этой прямой, которой соответствуют более поздние моменты времени, будет вся находиться в области (VI). Этим замечательным свойством — приходить к первоначальному состоянию после прохождения волн — струна обладает не при всяком начальном возмущении, как будет видно ниже.

2. *Начальное смещение равно нулю* и имеется только начальный импульс. Мы получим тогда решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\, dz. \tag{21}$$

Если обозначим какой-нибудь неопределенный интеграл функции $\frac{1}{2a}\varphi_1(x)$ через $\Phi_1(x)$, то получим

$$u(x, t) = \Phi_1(x + at) - \Phi_1(x - at), \tag{22}$$

т. е. также будем иметь дело с распространением прямой и обратной волны. Если начальное возмущение ограничивалось лишь промежутком (α_1, α_2), мы получаем то же построение, что и в случае 1, с тем, однако, важным различием, что в области (VI) смещение будет уже отлично от нуля и будет выражаться интегралом

$$\frac{1}{2a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(z)\,dz. \tag{23}$$

Действительно, для точек области (VI), по самому построению этой области, мы имеем $x + ct > \alpha_2$ и $x - at < \alpha_1$, т. е. в формуле (21) интегрирование надо производить по промежутку, заключающему (α_1, α_2) внутри себя. Но по условию вне (α_1, α_2) функция $\varphi_1(z)$ равна нулю, так что остается интеграл лишь по (α_1, α_2), и мы получаем для $u(x, t)$ выражение (23), которое представляет собою некоторую постоянную.

Таким образом действие начального импульса приводится к тому, что с течением времени точки струны будут сдвигаться на отрезок, длина которого выражается интегралом (23), и оставаться без движения в этом новом положении.

Можно истолковать еще формулу (21) следующим образом. Пусть точка x лежит правее промежутка (α_1, α_2), т. е. $x > \alpha_2$. При $t = 0$ промежуток интегрирования $(x - at, x + at)$ вырождается в точку x, а затем, при увеличении t, он расширяется в обе стороны со скоростью a. При $t < \frac{x - \alpha_2}{a}$ он не будет иметь общих точек с (α_1, α_2), функция $\varphi_1(z)$ будет в нем равна нулю, и формула (21) даст $u(x, t) = 0$, т. е. покой в точке x. Начиная с момента $t = \frac{x - \alpha_2}{a}$, промежуток $(x - at, x + at)$ будет налегать на промежуток (α_1, α_2), в котором $\varphi_1(z)$ отлично от нуля, и точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, при $t > \frac{x - \alpha_1}{a}$ промежуток $(x - at, x + at)$ будет содержать целиком промежуток (α_1, α_2), интегрирование по промежутку $(x - at, x + at)$ будет сводиться к интегрированию по (α_1, α_2), так как вне этого последнего промежутка $\varphi_1(z)$ по условию обращается в нуль, т. е. при $t > \frac{x - \alpha_1}{a}$ мы имеем постоянное значение $u(x, t)$, определяемое выражением (23). Момент $t = \frac{x - \alpha_1}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x.

Сделаем некоторые замечания по поводу общего случая. Отметим, что в общем случае может оказаться, что прямая или обратная волна вовсе отсутствует. Действительно, положим, например, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, входящие в начальные условия, удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz=0. \tag{24}$$

При этом, в силу второй из формул (16), функция $\theta_2(x)$ будет тождественно равна нулю, и в общем решении (12) обратная волна будет отсутствовать. Если в правой части (24) мы вместо нуля поставим постоянную, то $\theta_2(x)$ обратится в постоянную, а в формуле (12) это постоянное слагаемое можно отнести к $\theta_1(x-at)$, т. е. обратная волна также будет отсутствовать. Вернемся к примеру, рассмотренному нами в случае 1. Рис. 121 дает график начального отклонения (начальная скорость равна повсюду нулю). Последний из рис. 122 дает график струны в некоторый момент $t=t_0$, состоящий из двух отдельных кусков. Правый кусок, соответствующий промежутку $(c,\ 3c)$, будет передвигаться направо, а левый кусок — налево со скоростью a. Но мы можем описывать дальнейшие явления при $t>t_0$, приняв момент $t=t_0$ за начальный момент, подсчитав для этого момента отклонения u и скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ и применяя общую формулу (17), в которой надо только в правой части заменить t на $(t-t_0)$, так как t_0 принято за начальный момент времени. В данном случае начальные условия будут отличны от нуля только на промежутках $(-3c,\ -c)$ и $(c,\ 3c)$. В общем случае возмущения на каждом из этих промежутков дали бы и прямую и обратную волны. Но в данном случае, как мы видели выше, возмущения, например на промежутке $(c,\ 3c)$, дают только прямую волну. Это происходит потому, что на этом промежутке, кроме начальных отклонений, изображенных на последнем из рис. 122, возникнут в результате колебаний такие скорости при $t=t_0$, что обратная волна будет отсутствовать. Совершенно так же возмущение на участке $(-3c,\ -c)$ не даст прямой волны. Это явление соответствует одной из формулировок принципа Гюйгенса.

179. Ограниченная струна. Пусть имеется конечная струна, закрепленная на концах, и пусть абсциссы концов струны будут $x=0$ и $x=l$.

Кроме начальных условий (8)

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы при $0 \leqslant x \leqslant l$ ($\varphi(0) = \varphi_1(0) = \varphi(l) = \varphi_1(l) = 0$), нужно удовлетворить еще предельным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0. \tag{25}$$

Решение Даламбера (12)

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{12}$$

конечно, годится в этом случае, но определение функций θ_1 и θ_2 по формулам (16)

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, а следовательно и $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, определены лишь в промежутке $(0, l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $(x \pm at)$ в формуле (12) могут лежать и вне этого промежутка.

Стало быть, для возможности применения способа характеристик нужно продолжить функции $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0, l)$. С точки зрения физической это продолжение сводится к определению такого начального возмущения *бесконечной* струны, чтобы движение ее участка $(0, l)$ было то же, как если бы он был закреплен в концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Подставляя в правую часть (12) $x = 0$ и $x = l$ и приравнивая результат нулю, выразим предельные условия в виде

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(-at) + \theta_2(at) &= 0, \\ \theta_1(l - at) + \theta_2(l + at) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

или, обозначив переменный аргумент at просто через x,

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(-x) &= -\theta_2(x), \\ \theta_2(l + x) &= -\theta_1(l - x). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Когда x изменяется в промежутке $(0, l)$, аргумент $(l - x)$ изменяется в этом же промежутке, и правые части равенств (28) нам известны. Но при этом аргументы $(-x)$ и $(l + x)$ изменяются соответственно в промежутках $(-l, 0)$ и $(l, 2l)$, и второе из уравнений (28) дает нам значения $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$, а первое дает $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$. Далее, при изменении x в промежутке $(l, 2l)$ аргумент $(l - x)$ изменяется в промежутке $(-l, 0)$, и правые части равенств (28) нам известны на основании предыдущего вычисления.

При этом аргументы $(-x)$ и $(l+x)$ изменяются в промежутках $(-2l, -l)$ и $(2l, 3l)$, так что формулы (28) дают нам $\theta_2(x)$ в промежутке $(2l, 3l)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(-2l, -l)$. Продолжая так и дальше, мы убедимся в том, что формулы (28) дают нам определенные значения для функции $\theta_1(x)$ при $x \leqslant 0$ и $\theta_2(x)$ при $x \geqslant l$, что нам и надо для применения формулы (12) при $t > 0$. Совершенно так же, если менять x в промежутке $(-l, 0)$, то левые части формул (28) известны, и мы получаем $\theta_2(x)$ в промежутке $(-l, 0)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Меняя затем x в промежутке $(-2l, -l)$, получим $\theta_2(x)$ в промежутке $(-2l, -l)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(2l, 3l)$ и т. д., т. е. формулы (28) дают нам определенные значения $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ при всех вещественных x.

Если мы заменим во втором из уравнений (28) x на $(l+x)$ и воспользуемся первым уравнением, то получим

$$\theta_2(x+2l) = -\theta_1(-x) = \theta_2(x),$$

т. е. оказывается, что функция $\theta_2(x)$ имеет период $2l$. После этого первое из уравнений (28) покажет нам, что и функция $\theta_1(x)$ имеет период $2l$. Из этого вытекает, что для фактического знания $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ при всех вещественных x нам достаточно провести только первую из описанных выше операций продолжения этих функций, т. е. достаточно изменять x только в промежутке $(0, l)$. Формулы (28) дадут нам $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$ и $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$, т. е. $\theta_1(x)$ будет известно в промежутке $(-l, +l)$, а $\theta_2(x)$ — в промежутке $(0, 2l)$. Остальные значения этих функций получаются из их периодичности.

Определив таким путем функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, нетрудно продолжить и функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, так как, в силу уравнений (26), мы имеем

$$\varphi(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \quad \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz = \theta_2(x) - \theta_1(x),$$

т. е.

$$\varphi_1(x) = a\,[\theta_2'(x) - \theta_1'(x)].$$

Заменяя в первом из уравнений (28) x на $(-x)$, а также дифференцируя, получим

$$\theta_1(x) = -\theta_2(-x), \quad \theta_1'(-x) = \theta_2'(x), \quad \theta_1'(x) = \theta_2'(-x).$$

Пользуясь этими соотношениями и первыми из уравнений (28), можем написать

$$\varphi(-x) = \theta_1(-x) + \theta_2(-x) = -\theta_2(x) - \theta_1(x) = -\varphi(x),$$
$$\varphi_1(-x) = a\,[\theta_2'(-x) - \theta_1'(-x)] = a\,[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = -\varphi_1(x),$$

т. е. для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ получаем чрезвычайно простой закон продолжения: они продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(-l, 0)$ по закону нечетности, а затем с периодом $2l$. Если при этом мы получим на всей оси x функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ такие, что $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывную производную $\varphi_1'(x)$, то, согласно формуле (17), мы будем иметь дважды непрерывно дифференцируемое решение нашей задачи.

Обращаемся вновь к плоскости xt. Ввиду ограниченности струны, надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t > 0$, заключающуюся между прямыми $x = 0$, $x = l$ (рис. 124). Выясним физический смысл решения (12), в котором функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены уже при всех значениях x, как указано выше. Проведя через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы, через полученные точки пересечения опять проводим характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д.

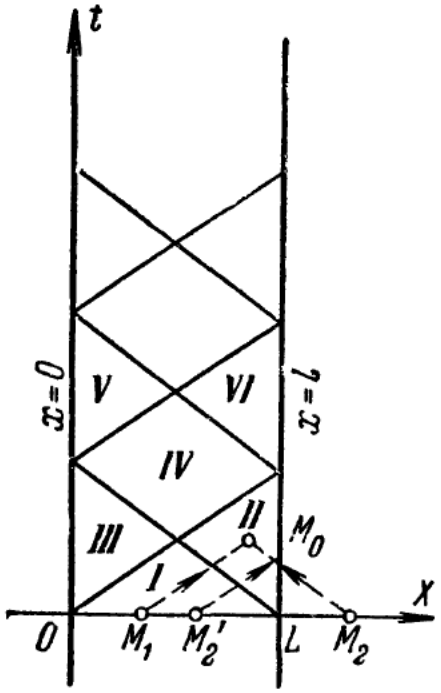


Рис. 124.

Мы разобьем таким образом полосу на области (I), (II), (III),... Точки области (I) соответствуют тем точкам струны, до которых успели дойти возмущения лишь от внутренних точек, а потому фиктивно добавленные бесконечные части струны здесь на движение не влияют. В точках вне области (II) мы имеем уже возмущение, дошедшее от фиктивной части струны; возьмем, например, точку $M_0(x_0, t_0)$ в области (II). Так как

$$u(x_0, t_0) = \theta_1(x_0 - at_0) + \theta_2(x_0 + at_0),$$

то в этой точке имеются две волны: одна — прямая, дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x = x_0 - at_0$, другая — обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_0 + at_0$, причем, в данном случае M_1 есть реальная точка из промежутка $(0, l)$, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что, в силу (28),

$$\theta_2(x_0 + at_0) = \theta_2(l + x_0 + at_0 - l) = -\theta_1(2l - x_0 - at_0),$$

и таким образом обратная волна $\theta_2(x_0 + at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\theta_1(2l - x_0 - at_0)$ от начально возмущенной точки $M_2'(2l - x_0 - at_0)$ (симметричной с M_2 относительно точки L), которая, дойдя до конца струны L в момент

$$t = \frac{l - (2l - x_0 - at_0)}{a} = \frac{x_0 + at_0 - l}{a},$$

изменила свое направление и знак на обратные и к моменту t_0 дошла в таком виде до точки M_0; другими словами, *действие закрепленного конца $x=l$ свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.*

То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца $x=0$; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x=0$. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны.

Если бы вместо предельного условия (25) мы, например, в конце $x=l$ имели бы условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,$$

то вместо второго из уравнений (27) мы получили бы

$$\theta_1'(l-at)+\theta_2'(l+at)=0,$$

или, заменяя опять at на x,

$$\theta_2'(l+x)=-\theta_1'(l-x).$$

Интегрируя это соотношение, имеем очевидно

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x)+C,$$

где C — некоторая постоянная, которую, не ограничивая общности, можно считать равной нулю, в чем предоставляем убедиться читателю. Таким образом мы имеем

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x). \qquad (29)$$

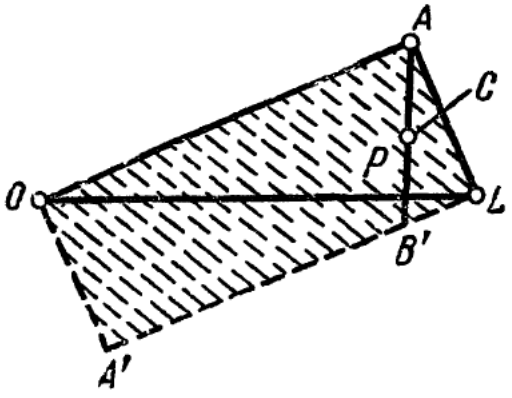
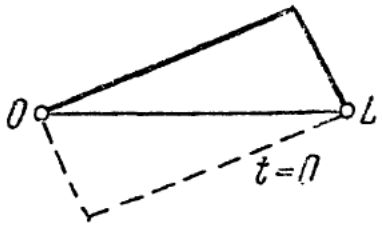


Рис. 125.

Физический смысл этого условия сводится также *к отражению от конца $x=l$, но с сохранением и знака и величины смещения.*

Особенно простой пример применения изложенного выше способа характеристик и отражений дает нам „защепленная струна“, которая в начальный момент была оттянута за одну из ее точек без начальной скорости. Читатель без труда докажет нижеследующий способ определения фигуры струны в любой момент t по ее начальной фигуре.

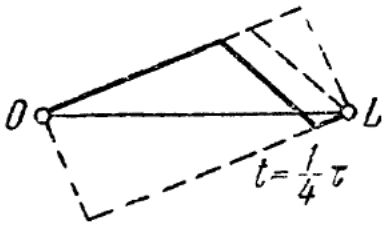
На рис. 125 линией OAL изображена начальная форма струны, пунктирной — симметричное ее изображение относительно середины струны $x=\frac{l}{2}$. Опустим на OL перпендикуляр AP до встречи его с прямой $A'L$ в точке B', находим середину C отрезка AB' и определяем таким образом направление LC.



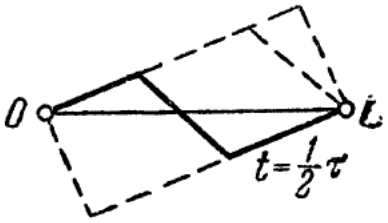
Фигура струны в любой момент получится, если мы будем передвигать секущую, параллельную направлению $\overline{LC}$, от точки A к точке A'; в частности в момент $\tau=\frac{l}{a}$ струна займет положение пунктирной ломаной $OA'L$.

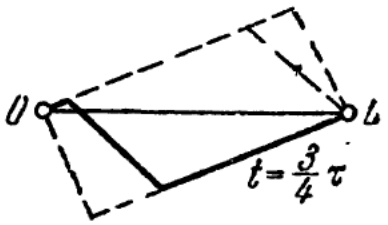
На рис. 126 изображены последовательные формы, принимаемые струной в моменты:

$$0,\quad \frac{1}{4}\tau,\quad \frac{1}{2}\tau,\quad \frac{3}{4}\tau,\quad \tau.$$



180. Способ Фурье. Поперечные колебания струны, закрепленной в концах, могут быть трактованы и с помощью рядов Фурье, и хотя в этом частном случае этот способ и не так прост, как предыдущий, мы его изложим, так как он применяется во многих других задачах, к которым способ характеристик не применяется. Напишем еще раз уравнения нашей задачи в другом порядке:





$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{30}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=l}=0, \tag{31}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{32}$$

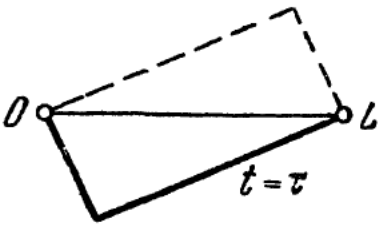


Рис. 126.

Вместо того, чтобы искать общее решение уравнения (30), *будем искать частное его решение в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от t, а другая только от x:*

$$u=T(t)\,X(x). \tag{33}$$

Подставив это в (30), имеем

$$X(x)\,T''(t)=a^2\,T(t)\,X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

В левой части полученного уравнения стоит функция, зависящая только от t, в правой же — только от x, и равенство возможно лишь

в том случае, если и левая и правая части не зависят ни от t, ни от x, т. е. представляют собой одну и ту же постоянную.

Обозначим эту постоянную через $(-k^2)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2; \tag{34}$$

откуда получаем два уравнения

$$X''(x)+k^2X(x)=0, \quad T''(t)+a^2k^2T(t)=0. \tag{35}$$

Общие интегралы этих уравнений при $k\neq 0$ будут [28]

$$X(x)=C\cos kx+D\sin kx, \quad T(t)=A\cos akt+B\sin akt,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Согласно (33) для u получим

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)(C\cos kx+D\sin kx). \tag{36}$$

Будем теперь подбирать постоянные так, чтобы удовлетворялись предельные условия (31), т. е. чтобы в выражении (36) множитель, содержащий x, сбращался в нуль при $x=0$ и $x=l$. Это дает

$$C\cdot 1+D\cdot 0=0, \quad C\cos kl+D\sin kl=0.$$

Из первого уравнения следует $C=0$, и второе дает $D\sin kl=0$. Если считать $D=0$, то, в силу $C=D=0$, решение (36) будет тождественный нуль. Такое решение не представляет для нас интереса. Поэтому мы должны считать $D\neq 0$, но $\sin kl=0$.

Мы получаем таким сбразом уравнение для спределения параметра k, который до сих пор оставался совершенно произвольным[1]):

т. е.
$$\sin kl=0,$$

$$k=\pm\frac{\pi}{l}, \ \pm\frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \ \pm\frac{n\pi}{l}, \ \ldots \tag{37}$$

Если мы подставим в (36) $k=\frac{n\pi}{l}$ или $k=-\frac{n\pi}{l}$, то разница будет лишь в знаке у синусов, и ввиду наличия произвольных постоянных множителей эти два решения будут по существу одинаковыми. Таким образом из значений (37) для k достаточно взять лишь положительные. Полагая в формуле (36) $C=0$ и обозначая произвольные постоянные AD и BD через A и B, получим

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)\sin kx.$$

---

[1]) Если бы мы в уравнении (34) обозначили постоянную через $(+k^2)$ вместо $(-k^2)$, то получили бы $X(x)=Ce^{kx}+De^{-kx}$ и не смогли бы удовлетворить предельным условиям (31).

Такое же обстоятельство будет иметь место и при $k=0$. Аналогичное замечание относится и к дальнейшим задачам, к которым мы будем применять способ Фурье.

Мы должны еще подставить вместо k одно из значений (37). Подставляя вместо k различные значения, мы можем и постоянные A и B считать различными. Мы получаем, таким образом, бесчисленное множество решений

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (38)$$

Эти решения удовлетворяют как уравнению (30), так и предельным условиям (31). Заметим теперь, что благодаря линейности и однородности уравнений (30) и (31), если мы имеем решения u_1, u_2, ..., им удовлетворяющие, то и их сумма будет также им удовлетворять (как и в аналогичном случае обыкновенных линейных однородных уравнений). Мы имеем таким образом следующее решение уравнений (30) и (31):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (39)$$

Остается подобрать постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (32). Продифференцируем решение (39) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi a}{l} A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{n\pi a}{l} B_n \cos \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (40)$$

Полагая в (39) и (40) $t = 0$, получим, в силу (32),

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (41)$$

Написанные ряды представляют собою разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ по синусам в промежутке $(0, l)$. Коэффициенты таких разложений определяются по известным нам формулам, и это дает нам следующие значения A_n и B_n:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz, \qquad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (42)$$

Подставляя эти значения в формулу (39), получим ряд, формально удовлетворяющий всем поставленным требованиям. Достаточные условия, налагаемые на $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, при которых его сумма действительно дает решение рассматриваемой задачи, будут даны ниже.

181. Гармоники и стоячие волны. Введем амплитуду N_n и начальную фазу φ_n гармонического колебания

$$A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} = N_n \sin \left(\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n\right).$$

Каждый член ряда (39), дающего решение задачи

$$\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = N_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (43)$$

представляет собою так называемую *стоячую волну*, при которой точки струны совершают гармоническое колебательное движение с одинаковой фазой и с амплитудой

$$N_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

зависящей от положения этой точки. При таком колебании струна издает звук, *высота* которого зависит от *частоты* колебаний

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad (44)$$

а сила — от наибольшей амплитуды N_n колебаний. Придавая n значения 1, 2, 3, ..., мы получаем *основной тон струны и ряд последовательных обертонов*, частоты которых или числа колебаний в секунду пропорциональны членам натурального ряда целых чисел 1, 2, 3, ... При некоторых значениях x амплитуда $N_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ может быть отрицательной. Можно ее взять по абсолютной величине, добавив к фазе π.

Решение (39), т. е. звук, издаваемый струной, складывается из этих отдельных *тонов*, или *гармоник*; амплитуды их, а потому и влияние их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники, и всё их действие сводится к созданию *тембра* звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих обертонов.

В точках

$$x = 0, \ \frac{l}{n}, \ \frac{2l}{n}, \ \ldots, \ \frac{(n-1)l}{n}, \ l \quad (45)$$

амплитуда колебаний n-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$, и точки (45) называются *узлами* n-й гармоники. В точках же

$$x = \frac{l}{2n}, \ \frac{3l}{2n}, \ \ldots, \ \frac{(2n-1)l}{2n} \quad (45_1)$$

амплитуда колебаний n-й гармоники достигает наибольшей величины, ибо функция $\sin\frac{n\pi x}{l}$ в этих точках имеет максимальное абсолютное значение, и точки (45_1) называются *пучностями* для n-й гармоники. Струна колеблется при этом так, как будто бы она состояла из n различных кусков, не связанных между собой, но закрепленных в ограничивающих узлах. Если мы прижмем нашу струну как

раз посередине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. 3-й, 5-й, ... гармоник, напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет, и струна будет издавать не свой основной звук, а его октаву, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое бо́льшим.

Изложенный способ в отличие от способа характеристик можно назвать *способом стоячих волн*; обычно же он называется *способом Фурье*.

Нетрудно обнаружить полное тождество решения, представляемого рядом (39), с тем, которое было найдено выше в [**179**]. В самом деле, заметим сначала, что в [**179**] мы показали, что применение формулы Даламбера (16) к ограниченной струне требует, чтобы функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, заданные в промежутке $(0, l)$, были продолжены в промежуток $(-l, 0)$ по закону нечетности, а затем с периодом $2l$. Но такой способ продолжения вполне равносилен разложению этих функций в ряд Фурье по синусам [**157**], т. е. вполне равносилен формулам (41) для любого x. Подставляя эти выражения $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ в формулу Даламбера (17), мы и придем, как нетрудно видеть, к решению (39)

$$u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l} + \sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right] + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz$$

или

$$u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l} + \sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\cos\frac{n\pi(x-at)}{l} - \cos\frac{n\pi(x+at)}{l}\right],$$

откуда и вытекает непосредственно (39).

Способ Фурье в данном случае имеет недостатки по сравнению со способом характеристик, а именно ряд (39) часто сходится очень медленно и не годится не только для вычисления, но даже для строгого доказательства того, что этот ряд есть действительно решение, так как при этом приходится его дифференцировать почленно два раза, что введет в n-м члене множитель n^2. Зависимость искомой функции от начальных данных $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, выражаемая рядом (39), гораздо сложнее по внешнему виду, чем зависимость, определяемая по способу характеристик. Зато способ Фурье обнаруживает весьма

важное обстоятельство, а именно — существование бесконечного множества различных собственных гармонических колебаний струны, из которых складывается самое общее ее колебание.

Принимая во внимание сказанное в [**179**], можно утверждать, что сумма ряда (39) будет давать решение нашей задачи с непрерывными производными до второго порядка, если функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ обладают указанными в [**179**] свойствами. Если же функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(l)=\varphi''(l)=0$, а $\varphi_1(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0$, то, как можно показать, ряд (39) можно дифференцировать по x и t дважды. Можно рассматривать решение волнового уравнения и при меньших предположениях о начальных данных, о чем мы будем говорить в четвертом томе. В дальнейшем при применении метода Фурье мы не будем оговаривать тех условий, при которых получаемые ряды действительно дают решение задачи. Общая точка зрения на метод Фурье будет нами изложена в четвертом томе. Цель настоящего изложения — указать метод решения и получаемый при этом аппарат. Отметим еще, что из рассуждений, приведенных в [**177**], и метода характеристик [**179**] непосредственно следует, что решение поставленной выше задачи как для бесконечной, так и для конечной струны, единственно. В дальнейшем мы займемся вопросом единственности решения для общего волнового уравнения.

182. Вынужденные колебания. В [**176**] было выведено уравнение вынужденных колебаний струны под действием силы $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \qquad \left[f(x, t)=\frac{1}{\rho}F(x, t)\right]. \tag{46}$$

К этому уравнению нужно присоединить предельные условия (берем случай закрепленной струны) и начальные условия

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0, \tag{47}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{48}$$

Эти вынужденные колебания общего типа можно представить себе как результат сложения двух колебательных движений, из которых одно есть чисто вынужденное колебание, т. е. такое, которое совершается под действием силы F, причем струна в начальный момент не выведена из состояния покоя, другое есть свободное колебание, которое струна совершает без действия силы, только вследствие начального возмущения. Аналитически это приводит к введению вместо u двух новых функций v и w, по формуле

$$u=v+w,$$

где функция v удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{49}$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \tag{50}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{51}$$

и дает чисто вынужденное колебание, а функция w удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0,$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

и дает свободное колебание. Составив сумму $u = v + w$, мы убедимся без труда, что она дает решение нашей задачи, т. е. уравнений (46), (47) и (48).

Методы нахождения свободных колебаний w были указаны в предыдущих номерах, так что здесь мы остановимся только на нахождении функции v. Как и в случае свободных колебаний, мы будем искать функцию v в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{52}$$

так что предельные условия (50) удовлетворяются сами собой, но функции $T_n(t)$, конечно, отличаются от тех, которые мы имели в [180], ибо уравнение (49) не однородно.

Подставив ряд (52) в уравнение (49), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T''(t) \sin \frac{n\pi x}{l} = -\, a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} + f(x, t),$$

откуда, заменяя $\frac{an\pi}{l}$ величиной ω_n (44) [181],

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)] \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{53}$$

Функция $f(x, t)$, рассматриваемая как функция от x, может быть разложена в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ в ряд Фурье в виде

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{54}$$

коэффициенты которого $f_n(t)$, определяемые по формулам

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(z,\ t)\ \sin\frac{n\pi z}{l}\ dz, \tag{55}$$

зависят от t. Сравнивая разложения (53) и (54) для одной и той же функции $f(x,\ t)$, мы получаем ряд уравнений

$$T_n''(t) + \omega_n^2\, T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,), \tag{56}$$

определяющих функции $T_1(t),\ T_2(t),\ \ldots$

При таком определении $T_n(t)$ функция (52) удовлетворяет дифференциальному уравнению (49) и предельным условиям (50). Для удовлетворения же оставшимся начальным условиям (51) достаточно подчинить функции $T_n(t)$ этим условиям, т. е. положить

$$T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0, \tag{57}$$

ибо тогда ясно, что

$$v\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\ \sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Решение уравнений (56) и (57) было указано в [29], откуда нетрудно вывести

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\ \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,$$

или, подставляя выражение (55) для $f_n(\tau)$:

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^t d\tau\int_0^l f(z,\ \tau)\ \sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi z}{l}\ dz. \tag{58}$$

Подставив это в (52), мы и получим выражение $v(x,\ t)$. Нетрудно показать, что если $f(x,\ t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $f(0,\ t) = f(l,\ t) = 0$, то сумма ряда (52) есть решение задачи (49) — (51).

До сих пор мы рассматривали неоднородность или в начальных условиях (у функции w), или в дифференциальном уравнении (у функции v). Естественно рассмотреть неоднородность и в предельных условиях. Считая уравнение и начальные условия однородными и обозначая искомую функцию опять буквою u, мы получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u\Big|_{x=0} = \omega(t), \quad u\Big|_{x=l} = \omega_1(t), \quad u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Мы рассмотрим этот случай неоднородности в предельных условиях в томе IV.

183. Сосредоточенная сила. Исследуем формулу (58) для силы, сосредоточенной в одной точке C $(x=c)$. Величину этой силы мы обозначим не через P, как это мы делали в [176], а через ρP. Как было указано [178], этот случай можно рассматривать как предельный того случая, когда сила F действует только на малом промежутке $(c-\delta,\ c+\delta)$ и тем самым равна нулю вне этого промежутка, причем полная величина силы

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} F(z, t)\, dz \to \rho P(t) \text{ при } \delta \to 0.$$

По формуле (4) имеем

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\, dz \to P(t) \text{ при } \delta \to 0.$$

Принимая во внимание, что по условию $f(z, t)$ равна нулю вне промежутка $c-\delta \leqslant z \leqslant c+\delta$, и пользуясь первой теоремой о среднем [I, 95], причем предполагается, что $f(z, t)$ знакопостоянна в промежутке

$$c-\delta \leqslant z \leqslant c+\delta,$$

получим

$$\int_0^l f(z, t) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz = \sin\frac{n\pi\zeta}{l} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\, dz,$$

где ζ есть некоторое значение из промежутка $(c-\delta,\ c+\delta)$.

В пределе, при $\delta \to 0$:

$$\int_0^l f(z, t) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz \to P(t) \sin\frac{n\pi c}{l},$$

и тогда функция $T_n(t)$, определяемая как предел выражения в правой части (58) при $\delta \to 0$, обратится в

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n} \sin\frac{n\pi c}{l} \int_0^t P(\tau) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau,$$

а вынужденное колебание определится по формуле

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\omega_n} \sin\frac{n\pi c}{l} \int_0^t P(\tau) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (59)$$

Эта формула показывает, что в вынужденных колебаниях могут отсутствовать некоторые обертоны, именно те, для коих

$$\sin\frac{n\pi c}{l} = 0,$$

т. е. те, которые имеют узел в точке C приложения силы.

Остановимся на случае гармонически колеблющейся вынуждающей силы, когда нужно будет положить

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

или, считая для простоты фазу $\varphi_0 = 0$,

$$P(t) = P_0 \sin \omega t.$$

Формула для $T_n(t)$ дает тогда

$$T_n(t) = \frac{P_0}{l\omega_n} \sin \frac{n\pi c}{l} \int_0^t 2 \sin \omega\tau \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{P_0}{l\omega_n} \sin \frac{n\pi c}{l} \int_0^t \{\cos[\omega_n t - (\omega_n - \omega)\tau] - \cos[\omega_n t - (\omega_n + \omega)\tau]\}\, d\tau =$$

$$= \frac{-2\omega P_0}{l\omega_n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \omega_n t + \frac{2P_0}{l(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \omega t.$$

Если частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из частот ω_n собственных колебаний, все знаменатели $(\omega_n^2 - \omega^2)$ отличны от нуля; но если ω приближается к одной из частот ω_n, соответствующий знаменатель уменьшается и член $T_n(t)$ становится весьма большим по сравнению с прочими, т. е. происходит явление *резонанса*. Наконец, если $\omega = \omega_n$, то предыдущее выражение для $T_n(t)$ теряет смысл и должно быть заменено другим.

Подставив полученные выражения $T_n(t)$ в формулу (52), имеем

$$v(x, t) = \frac{-2\omega P_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{2P_0}{l} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Первое слагаемое в правой части имеет вид свободных колебаний, второе же имеет ту же частоту, что и возмущающая сила. Отнеся первое слагаемое к свободным колебаниям $w(x, t)$, мы займемся только вторым слагаемым, обозначив его через $V(x, t)$:

$$V(x, t) = \frac{2P_0}{l} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

или, положив $\alpha^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2 \pi^2}$,

$$V(x, t) = \frac{2P_0 l}{a^2 \pi^2} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (60)$$

Сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 - a^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

может быть вычислена по способу, указанному в [172], но мы, не останавливаясь на этом, укажем другое решение той же задачи, рассматривая сосредоточенную силу не как предельный случай непрерывно распределенной, а непосредственно.

Точка C приложения силы разбивает струну на два участка $(0, c)$ и (c, l). Рассматривая оба эти куска отдельно, обозначим ординату первого участка через $u_1(x, t)$, второго же — через $u_2(x, t)$. Для этих функций u_1 и u_2 мы получаем следующие уравнения ... :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{при } 0 < x < c, \tag{61}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{при } c < x < l, \tag{61$_1$}$$

так как внешних сил внутри промежутков $(0, c)$ и (c, l) не имеется. Далее, мы имеем условия закрепления концов:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l} = 0, \tag{62}$$

условие непрерывности струны в точке $x = c$:

$$u_1|_{x=c} = u_2|_{x=c}, \tag{63}$$

и, наконец, условие равновесия сил, действующих в точке $x = c$ [176]:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=c} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=c} = -\frac{\rho}{T_0} P(t) = -\frac{1}{a^2} P(t)^{1}). \tag{64}$$

Мы ограничимся только случаем гармонической силы

$$P(t) = P_0 \sin \omega t$$

и из вынужденных колебаний, ею вызываемых, выделим колебания той же частоты ω. Эти колебания мы ищем в виде

$$u(x, t) = X(x) \sin \omega t,$$

где, однако, функция $X(x)$ должна иметь различные выражения в промежутках $(0, c)$ и (c, l), и в связи с этим мы положим:

$$u_1 = X_1(x) \sin \omega t, \quad u_2 = X_2(x) \sin \omega t. \tag{65}$$

Подставив это в уравнения (61) и (61$_1$), мы имеем

$$-\omega^2 \sin \omega t X_1(x) = a^2 X_1''(x) \sin \omega t,$$

то есть

$$X_1''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X_1(x) = 0,$$

---

[1]) В формуле (7) [176] при наших теперешних обозначениях нужно написать $\rho P(t)$ вместо P и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ вместо $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-$.

и аналогично

$$X_2''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X_2(x) = 0,$$

откуда

$$X_1(x) = C_1' \cos\frac{\omega}{a}x + C_2' \sin\frac{\omega}{a}x; \quad X_2(x) = C_1'' \cos\frac{\omega}{a}x + C_2'' \sin\frac{\omega}{a}x.$$

Условия (62) дают нам

$$C_1' = 0, \quad C_1'' \cos\frac{\omega l}{a} + C_2'' \sin\frac{\omega l}{a} = 0,$$

и можно положить

$$C_1'' = C_2 \sin\frac{\omega l}{a}, \quad C_2'' = -C_2 \cos\frac{\omega l}{a},$$

где C_2 — произвольная постоянная. Обозначая для симметрии произвольную постоянную C_2' через C_1, мы получаем

$$X_1(x) = C_1 \sin\frac{\omega x}{a}, \quad X_2(x) = C_2 \sin\frac{\omega(l-x)}{a}.$$

Условие непрерывности (63) дает тогда:

$$C_1 \sin\frac{\omega c}{a} \sin\omega t = C_2 \sin\frac{\omega(l-c)}{a} \sin\omega t.$$

Остается только удовлетворить последнему условию (64), из которого получается

$$-\frac{\omega}{a} C_2 \cos\frac{\omega(l-c)}{a} \sin\omega t - \frac{\omega}{a} C_1 \cos\frac{\omega c}{a} \sin\omega t = -\frac{P_0}{a^2} \sin\omega t.$$

Итак, постоянные C_1 и C_2 определяются из системы уравнений

$$C_1 \sin\frac{\omega c}{a} - C_2 \sin\frac{\omega(l-c)}{a} = 0; \quad C_1 \cos\frac{\omega c}{a} + C_2 \cos\frac{\omega(l-c)}{a} = \frac{P_0}{a\omega},$$

откуда

$$C_1 = \frac{P_0}{a\omega} \frac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}; \quad C_2 = \frac{P_0}{a\omega} \frac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}},$$

и формулы (65) дадут тогда решение задачи в виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{a\omega} \dfrac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega x}{a} \sin\omega t, & \text{при } 0 < x < c, \\ \dfrac{P_0}{a\omega} \dfrac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega(l-x)}{a} \sin\omega t, & \text{при } c < x < l. \end{cases} \tag{66}$$

Читатель проверит без труда тождественность решений (66) и (60) для $V(x, t)$, разлагая (66) в ряд Фурье по синусам.

184. Формула Пуассона. По аналогии с бесконечной струной займемся теперь решением общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{67}$$

в безграничном пространстве при заданных начальных условиях. Предварительно выведем одно вспомогательное предложение. Для удобства записи дальнейших формул обозначим координаты (x, y, z) через (x_1, x_2, x_3). Пусть $\omega(x_1, x_2, x_3)$ — любая функция, непрерывная со своими производными до второго порядка в некоторой области D или во всем пространстве. Все дальнейшие рассуждения будут относиться к этой области. Рассмотрим значения функции ω на поверхности $C_r(x_1, x_2, x_3)$ сферы с центром в точке (x_1, x_2, x_3) и радиусом r. Координаты точек этой сферы могут быть выражены по формулам

$$\xi_1 = x_1 + \alpha_1 r, \quad \xi_2 = x_2 + \alpha_2 r, \quad \xi_3 = x_3 + \alpha_3 r,$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — направляющие косинусы радиусов упомянутой сферы. Мы их можем записать в виде

$$\alpha_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \alpha_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \alpha_3 = \cos\theta,$$

причем угол θ меняется от 0 до π и угол φ — от 0 до 2π. Обозначим через $d_1\sigma$ элемент площади сферы единичного радиуса и через $d_r\sigma$ элемент площади сферы радиуса r:

$$d_1\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \quad d_r\sigma = r^2 d_1\sigma = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Рассмотрим среднее арифметическое значений функции ω по поверхности сферы $C_r(x_1, x_2, x_3)$, т. е. интеграл от функции $\omega(x_1, x_2, x_3)$ по поверхности упомянутой сферы, деленный на площадь этой поверхности. Величина этого интеграла зависит, очевидно, от выбора центра (x_1, x_2, x_3) и радиуса r сферы, т. е. упомянутое среднее арифметическое будет функцией четырех переменных (x_1, x_2, x_3, r). Мы можем записать это среднее арифметическое двояким образом:

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x_1 + \alpha_1 r;\ x_2 + \alpha_2 r;\ x_3 + \alpha_3 r)\, d_1\sigma \tag{68}$$

или

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{C_r}\omega(x_1 + \alpha_1 r;\ x_2 + \alpha_2 r;\ x_3 + \alpha_3 r)\, d_r\sigma.$$

Докажем, что при любом выборе функции ω функция v удовлетворяет одному и тому же уравнению с частными производными, а именно

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \frac{2}{r}v_r = 0, \tag{69}$$

где, как всегда,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}.$$

В формуле (68) интегрирование совершается по поверхности единичной сферы, и мы можем дифференцировать по x_i под знаком интеграла. Таким образом мы имеем

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta\omega\,(x_i + \alpha_i r)\, d_1\sigma$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \alpha_k\, d_1\sigma.$$

Последний интеграл мы можем преобразовать в интеграл по поверхности сферы $C_r(x_1, x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\int_{C_r} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \alpha_k\, d_r\sigma,$$

и, применяя формулу Остроградского, мы получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\int\int_{D_r} \Delta\omega\, dv, \tag{70}$$

где D_r есть сфера с центром (x_1, x_2, x_3) и радиусом r. Последнее выражение есть произведение двух функций от r: дроби $1 : 4\pi r^2$ и интеграла. Производная по r от тройного интеграла по сфере D_r равна интегралу от той же подынтегральной функции по поверхности C_r этой сферы. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, выразить интеграл по D_r через сферические координаты. Таким образом дифференцируя еще раз по r, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi r^3} \int\int\int_{D_r} \Delta\omega\, dv + \frac{1}{4\pi r^2} \int\int_{C_r} \Delta\omega\, d_r\sigma.$$

Подставляя все указанные выше выражения для производных в уравнение (69), мы убедимся непосредственно в том, что это уравнение действительно удовлетворено. Если $r \to 0$, то из формулы (68) непосредственно вытекает, что $v(x_1, x_2, x_3)$ стремится к $\omega(x_1, x_2, x_3)$, а из (70) вытекает, что $\frac{\partial v}{\partial r}$ стремится к нулю, так как тройной интеграл формулы (70), согласно теореме о среднем, имеет порядок r^3, а в знаменателе стоит r^2. Мы приходим таким образом к следующей теореме:

Теорема. *При любом выборе функции* ω, *допускающей непрерывные производные до второго порядка, функция* v, *определяемая равенством* (68), *удовлетворяет уравнению* (69) *и начальным данным*

$$v\Big|_{r=0} = \omega(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0. \tag{71}$$

Покажем, пользуясь этой теоремой, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tv(x_1, x_2, x_3, at) \tag{72}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) \tag{73}$$

и начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, x_3). \tag{74}$$

Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x_1, x_2, x_3, at) + at\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2a\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r} + a^2 t\,\frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r^2},$$

$$\Delta u = t\,\Delta v(x_1, x_2, x_3, at),$$

где, например, $\dfrac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r}$ есть значение производной $\dfrac{\partial v(x_1, x_2, x_3, r)}{\partial r}$ при $r = at$. Подставляя предыдущие выражения в уравнение (73), мы получаем для v уравнение (69) при $r = at$, которое, как доказано выше, действительно имеет место. Начальные условия (74) непосредственно получаются из (71). Поскольку уравнение (73) есть линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, мы можем утверждать, что функция $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ также удовлетворяет этому уравнению. Определим ее начальные данные при $t = 0$. Принимая во внимание начальные условия (74), мы получим непосредственно для функции $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$:

$$u_1\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, x_3).$$

Для производной $\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ мы имеем, в силу (73),

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = a^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)\Big|_{t=0},$$

или, дифференцируя первое из начальных условий (74) по координатам, мы получим отсюда

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Таким образом производная по t от построенного выше решения волнового уравнения (73), удовлетворяющего начальным условиям (74), является решением того же уравнения и удовлетворяет начальным условиям

$$\left.u_1\right|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, x_3), \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{74$_1$}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям координат и взяв в первом случае начальных условий (74) за $\omega(x, y, z)$ некоторую функцию $\varphi_1(x, y, z)$, и во втором случае начальных условий (74$_1$) взяв за $\omega(x, y, z)$ какую-либо другую функцию $\varphi(x, y, z)$ и сложив таким образом построенные решения, будем иметь решение уравнения (67), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.u\right|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z). \tag{75}$$

Обозначая для краткости письма через $T_r\{\omega(M)\}$ — среднее арифметическое от функции ω по сфере с центром $M(x, y, z)$ и радиусом r, мы можем написать, согласно сказанному выше, упомянутое решение уравнения (67), удовлетворяющее начальным условиям (75), в виде

$$u(M, t) = tT_{at}\{\varphi_1(M)\} + \frac{\partial}{\partial t}[tT_{at}\{\varphi(M)\}]. \tag{76}$$

Эта формула называется обычно *формулой Пуассона*. Ее можно, очевидно, записать в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma)\, d_1\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, d_1\sigma\right], \tag{76$_1$}$$

где $d_1\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и (α, β, γ) — координаты переменной точки вышеупомянутой сферы:

$$\alpha = x + at\sin\theta\cos\varphi, \quad \beta = y + at\sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma = z + at\cos\theta. \tag{77}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что функция u, определенная формулой (76), действительно удовлетворяет уравнению (67) и условиям (75), если $\varphi_1(x, y, z)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\varphi(x, y, z)$ до третьего порядка. Последнее обстоятельство связано с тем, что в формуле (76) второе слагаемое содержит дифференцирование по t.

Однако, если $\varphi(x, y, z)$ и $\varphi_1(x, y, z)$ обладают более плохими дифференциальными свойствами, как это бывает, например, в зада-

чах с сосредоточенными начальными возмущениями, то и тогда естественно считать, что формула (76_1) дает решение задачи. Только в этом случае решение будет не классическим, а обобщенным (см. том IV).

В дальнейшем мы увидим, что поставленная задача может иметь только одно решение.

Положим, что начальное возмущение сосредоточено в некотором ограниченном объеме (v) с поверхностью (σ), т. е. что $\varphi(N)$ и $\varphi_1(N)$ равны нулю вне (v), и пусть точка M находится вне (v). При $t < \frac{d}{a}$, где d — кратчайшее расстояние от M до (σ), сфера (S_{at}) находится вне (v), обе вышеупомянутые функции равны нулю на (S_{at}), и формула (76) дает $u(M, t) = 0$, т. е. покой в точке M. В момент $t = \frac{d}{a}$ поверхность (S_{at}) коснется (σ), и передний фронт волны пройдет через M. Наконец, при $t > \frac{D}{a}$, где D — наибольшее расстояние от M до точек поверхности (σ), сфера (S_{at}) будет опять находиться вне (v) [весь объем (v) будет внутри (S_{at})], и формула (76) опять дает $u(M, t) = 0$. Моменту $t = \frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M, после чего в этой точке $u(M, t)$ обращается в нуль, а не в постоянную, как это было для струны (т. е. для плоской волны). Передний фронт волны в заданный момент t представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от (σ), равное at. Нетрудно показать, что эта поверхность будет огибающей для семейства сфер, имеющих центры на поверхности (σ) и радиус at. Постоянная a является, как мы видим, *скоростью распространения фронта волны*.

185. Цилиндрические волны. Отнесем пространство к прямолинейным прямоугольным осям и предположим, что функции $\varphi(x, y, z)$ и $\varphi_1(x, y, z)$ зависят только от x и y, т. е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси OZ. Если передвигать точку $M(x, y, z)$ параллельно оси OZ, то, очевидно, правая часть формулы (76_1) не будет менять своего значения, т. е. функция $u(x, y, z, t)$ также не будет зависеть от z, и формула (76_1) даст нам решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{78}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \tag{79}$$

Мы можем рассматривать это решение, оставаясь исключительно на плоскости XOY. Для этого нам надо интегралы формулы (76_1), которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости XOY. Возьмем точку $M(x, y)$ на плоскости XOY. Точки с координатами (α, β, γ), определяемыми по формулам (77) при $z=0$, суть переменные точки сферы (S_{at}) с центром $M(x, y, 0)$ и радиусом at. Элемент площади поверхности этой сферы будет $dS_{at}=a^2t^2\,d_1\sigma$. Части этой сферы, находящиеся над и под плоскостью XOY, проектируются на плоскость XOY в виде круга (C_{at}) с центром M и радиусом at. Элемент площади проекции dC_{at} связан с элементом площади поверхности сферы dS_{at} формулой [66]:

$$dS_{at}=\frac{dC_{at}}{\cos(n,\ Z)},$$

где n — направление нормали к (S_{at}), т. е. радиуса этой сферы, образующее острый угол с осью OZ. Если N — переменная точка сферы, N_1 — ее проекция на плоскость XOY, то из элементарных геометрических соображений ясно, что

$$\cos(n,\ Z)=\frac{\overline{NN_1}}{\overline{MN}}=\frac{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}{at},$$

где (α, β) — координаты переменной точки круга (C_{at}). Подставляя все это в первый из интегралов формулы (76_1) и принимая во внимание, что круг (C_{at}) получится как от верхней, так и от нижней части сферы (C_{at}), мы получим следующее преобразование первого интеграла формулы (76_1):

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,d_1\sigma=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{(S_{at})}\varphi_1(\alpha,\ \beta)\,dS_{at}=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\,dC_{at}.$$

Применяя то же преобразование ко второму интегралу и обозначая элемент площади dC_{at} на плоскости XOY в виде $d\alpha\,d\beta$, мы получаем окончательно следующую формулу для искомой функции, удовлетворяющей уравнению (78) и условиям (79):

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\right]. \qquad (80)$$

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью (B) на плоскости XOY с контуром (l), т. е. $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю вне (B). Положим, что точка M лежит вне (B). Для моментов времени $t < \frac{d}{a}$, где d — кратчайшее расстояние от M до контура (l), круг (C_{at}) не имеет общих точек с (B), функции $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю во всем круге (C_{at}), и формула (80) дает $u(x, y, t) = 0$. В момент $t = \frac{d}{a}$ в точку M придет передний фронт волны. Для значений $t > \frac{D}{a}$, где D — наибольшее расстояние от M до точек (l), круг (C_{at}) будет содержать внутри себя всю область (B), и интегрирование в формуле (80) надо совершать просто по области (B), так как $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ обращаются в нуль вне (B), т. е.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)} \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)} \frac{\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}\right].$$

В данном случае, после прохождения заднего фронта волны в момент $t = \frac{D}{a}$ функция $u(x, y, t)$ не обращается ни в нуль, как в случае трехмерного пространства, ни в постоянную, как в случае струны. Но ввиду присутствия a^2t^2 в знаменателе мы можем все же утверждать, что $u(x, y, t)$ будет стремиться к нулю при беспредельном возрастании t.

Говорят, что в рассматриваемом случае имеет место явление *диффузии волн* после прохождения заднего фронта. Мы провели все рассуждение, оставаясь на плоскости XOY. В трехмерном пространстве уравнению (78) соответствуют так называемые цилиндрические волны.

186. Случай n-мерного пространства. Полученные в [184] результаты непосредственно обобщаются на случай любого числа измерений. Мы будем рассматривать n-мерное пространство с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Объем сферы радиуса r в таком пространстве определяется формулой [97]:

$$v_n(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-2) \cdot n} r^n \qquad (n \text{ — четно}),$$

$$v_n(r) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)\, n} r^n \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Дифференцируя эти выражения по r, мы получим величину площади поверхности сферы:

$$\sigma_n(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (n-2)} r^{n-1} \qquad (n \text{ — четно}),$$

$$\sigma_n(r) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\ \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (n-2)} r^{n-1} \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Направляющие косинусы α_k радиусов сферы выражаются через $(n-1)$ углов по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta_1,\\
\alpha_2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2,\\
\alpha_3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-2} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2},\\
\alpha_{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{n-2} \cos\varphi,\\
\alpha_n &= \sin\theta_1 \sin\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{n-2} \sin\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Элемент площади поверхности единичной сферы (σ_1) будет

$$d_1\sigma = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2\ \ldots\ d\theta_{n-2}\, d\varphi,$$

и для сферы (σ_r) радиуса r:

$$d_r\sigma = r^{n-1} d_1\sigma.$$

Положим, что в пространстве R_n задана функция ω с непрерывными производными до второго порядка. Ее среднее арифметическое по сфере с центром $(x_1, \ldots, x_n)$ и радиусом r будет определяться формулой

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = \frac{1}{\sigma_n(1)} \int_{(\sigma_1)} \ldots \int \omega(x_1 + \alpha_1 r, x_2 + \alpha_2 r, \ldots, x_n + \alpha_n r)\, d_1\sigma$$

или

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{(\sigma_r)} \ldots \int \omega(x_1 + \alpha_1 r, x_2 + \alpha_2 r, \ldots, x_n + \alpha_n r)\, d_r\sigma.$$

Совершенно так же, как и выше, мы можем показать, что функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

и начальным условиям

$$v\Big|_{r=0} = \omega(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0.$$

Пользуясь указанным результатом, можно получить окончательные формулы для волнового уравнения с любым числом независимых переменных. Мы приведем в общем случае лишь окончательные результаты.

Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \tag{81}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при нечетном n имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{2^{\frac{n-3}{2}}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} \cdot \frac{\partial^{\frac{n-3}{2}}}{\partial (t^2)^{\frac{n-3}{2}}} [t^{n-2} T_{at} \{\omega(x_i)\}] \tag{82$_1$}$$

и при четном n

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial^{\frac{n-2}{2}}}{\partial (r^2)^{\frac{n-2}{2}}} [r^{n-2} T_r \{\omega(x_i)\}] \, dr, \tag{82$_2$}$$

где $T_\rho \{\omega(x_i)\}$ — среднее арифметическое от функции $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по сфере с центром $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и радиусом ρ. Для проверки формул (82$_1$) и (82$_2$) нам достаточно потребовать, чтобы функция $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела при нечетном n непрерывные производные до порядка $\frac{n+1}{2}$ и при четном n до порядка $\frac{n+2}{2}$.

187. Неоднородное волновое уравнение. Рассмотрим *неоднородное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \tag{83}$$

в безграничном пространстве, и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{84}$$

Добавляя к этому решению решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (75), получим решение уравнения (83), удовлетворяющее условиям (75).

Для решения поставленной выше задачи рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \tag{85}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w\Big|_{t=\tau}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x, y, z, \tau), \tag{86}$$

причем в качестве начального момента взято не $t=0$, а $t=\tau$, где τ — некоторый параметр. Функция w будет выражаться формулой Пуассона, но только в этой формуле мы должны заменить t на $(t-\tau)$, поскольку начальным моментом времени является не $t=0$, а $t=\tau$. Мы будем иметь таким образом

$$w(x, y, z, t; \tau)=$$

$$=\frac{t-\tau}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau),\ y+\alpha_2 a(t-\tau),\ z+\alpha_3 a(t-\tau), \tau]\, d_1\sigma, \tag{87}$$

где

$$\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi, \quad \alpha_2=\sin\theta\sin\varphi, \quad \alpha_3=\cos\theta. \tag{88}$$

Отметим, что функция w, кроме обычных независимых переменных (x, y, z, t), зависит от параметра τ. Определим теперь функцию $u(x, y, z, t)$ формулой

$$u(x, y, z, t)=\int_0^t w(x, y, z, t; \tau)\, d\tau \tag{89}$$

и покажем, что она удовлетворяет неоднородному уравнению (83) и нулевым начальным условиям (84). Мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t}\, d\tau + w(x, y, z, t; \tau)\Big|_{\tau=t}. \tag{90}$$

Внеинтегральный член равен нулю в силу первого из условий (86). Дифференцируя еще раз по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2}\, d\tau + \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t}\Big|_{\tau=t},$$

причем полученный внеинтегральный член равен $f(x, y, z, t)$ в силу второго из условий (86), т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2}\, d\tau + f(x, y, z, t).$$

При дифференцировании выражения (89) по координатам достаточно дифференцировать подынтегральную функцию

$$\Delta u=\int_0^t \Delta w(x, y, z, t; \tau)\, d\tau.$$

Из двух последних формул и уравнения (85) непосредственно вытекает, что u удовлетворяет уравнению (83). Начальные условия (84) непосредственно следуют из формул (89) и (90), если принять во внимание, что в формуле (90) внеинтегральный член равен нулю, как было указано выше. Таким образом формула (89) дает решение уравнения (83) при начальных условиях (84). Подставляя в (89) вместо функции $w(x, y, z, t; \tau)$ ее выражение (87), получим

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) \Big[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau),\ y+\alpha_2 a(t-\tau),\ z+\alpha_3 a(t-\tau),\ \tau] d_1\sigma \Big] d\tau.$$

Это выражение для u преобразуем к другому виду. Вместо τ введем новую переменную интегрирования: $r = a(t-\tau)$. Совершая замену переменных, получим

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f\left(x+\alpha_1 r,\ y+\alpha_2 r,\ z+\alpha_3 r,\ t-\frac{r}{a}\right) r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

или, умножая и деля на r,

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f\left(x+\alpha_1 r,\ y+\alpha_2 r,\ z+\alpha_3 r,\ t-\frac{r}{a}\right)}{r} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Принимая во внимание формулы (88) для α_k и вспоминая выражение для элемента объема в сферических координатах, мы видим, что входящие в последнюю формулу три квадратуры равносильны тройному интегралу по сфере D_{at} с центром (x, y, z) и радиусом at. Вводя переменную точку

$$\xi = x + \alpha_1 r, \quad \eta = y + \alpha_2 r, \quad \zeta = z + \alpha_3 r,$$

и, принимая во внимание, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, получим

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

и выражение для u запишется окончательно в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int_{r \leqslant at} \int \frac{f\left(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ t-\frac{r}{a}\right)}{r} dv, \tag{91}$$

где неравенство $r \leqslant at$ характеризует упомянутую выше сферу D_{at}. Характерным в подынтегральной функции последнего выражения является тот факт, что функция f берется в момент времени $t - \frac{r}{a}$, предшествующий моменту t, для которого вычисляется u. Разница $\frac{r}{a}$ в моментах времени дает то время, которое нужно для перехода из точки (ξ, η, ζ) в точку (x, y, z) со скоростью a. Выражение (91) называется обычно *запаздывающим потенциалом*. Отметим еще, что основная формула (89) имеет простой физический смысл, а именно она показывает, что решение неоднородного уравнения (83), удовлетворяющее начальным условиям (84), является суммой импульсов $w(x, y, z, t; \tau)\,d\tau$, происходящих от наличия свободного члена и определяемых уравнениями (85) и (86).

Рассмотрим теперь неоднородное волновое уравнение для цилиндрических волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t) \tag{92}$$

при нулевых начальных условиях. Совершенно так же, как и выше, мы можем получить решение задачи в виде

$$u(x, y, t) = \int_0^t w(x, y, t; \tau)\,d\tau,$$

где $w(x, y, t; \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

и начальным условиям

$$w\Big|_{t=\tau} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x, y, \tau).$$

Принимая во внимание формулу (80), получим окончательно

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \left[\iint_{\rho \leqslant a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\,d\xi\,d\eta\right] d\tau \tag{93}$$

$$[\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

Отметим, что в последней формуле мы имеем интегрирование по времени, чего не было в формуле (91), где зависимость от времени сводилась лишь к зависимости от времени радиуса сферы, по которой призводилось интегрирование, и к зависимости от времени функции $f(x, y, z, t)$. В линейном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{94}$$

решение будет, очевидно,

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\right]d\tau. \tag{95}$$

188. Точечный источник. Если мы положим, что свободный член в уравнении (83) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$ и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

$$f(x, y, z,\ t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}>\varepsilon \tag{96}$$

и

$$\iiint_{C_\varepsilon} f(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz=4\pi\omega(t), \tag{97}$$

где C_ε — сфера с центром в начале и радиусом ε. Обратимся к формуле (91) и будем считать, что $at>\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу (96) достаточно произвести интегрирование по сфере C_ε. В пределе при $\varepsilon\to 0$ величина r будет равна расстоянию от точки $(x,\ y,\ z)$ до начала, т. е. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и мы получим, принимая во внимание (97),

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{r}\,\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) \tag{98}$$

$$\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Кроме того надо считать, что $u(x,\ y,\ z,\ t)=0$ при $r>at$, так как при $r>at$ область интегрирования в интеграле (91) не содержит внутри себя сферы C_ε при достаточно малых ε. Отметим, что функция (98) при любом выборе дважды непрерывно дифференцируемой функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению и имеет особенность в начале координат.

В случае уравнения (92) мы должны совершенно так же, как и выше, считать:

$$f(x,\ y, t)=0 \cdot \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2}>\varepsilon$$

и

$$\iint_{\gamma_\varepsilon} f(x,\ y,\ t)\,dx\,dy=2\pi\omega(t),$$

где γ_ε — круг с центром в начале и радиусом ε. Обращаясь к формуле (93) и переходя к пределу, получим решение для точечного

источника в случае цилиндрических волн:

$$u(x, y, t)=\frac{1}{a}\int_0^{t-\frac{\rho}{a}}\frac{\omega(\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}d\tau \qquad (at>\rho), \tag{99}$$

$$u(x, y, t)=0 \text{ при } at<\rho \qquad (\rho=\sqrt{x^2+y^2}).$$

Формулы (98) и (99) отличаются, аналогично тому, что мы указывали в предыдущем параграфе [(91) и (93)]. Воздействие точечного источника на точку (x, y, z) в момент времени t согласно формуле (98) зависит только от интенсивности источника в момент времени $t-\frac{r}{a}$. В случае формулы (90) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от момента $t=0$ до момента $t=\frac{\rho}{a}$.

В линейном случае (94), полагая, как всегда,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x, t)\,dx=\omega(t) \text{ и } f(x, t)=0 \text{ при } |x|>\varepsilon,$$

мы получаем, переходя к пределу в формуле (95):

$$u(x, t)=\int_0^{t-\frac{|x|}{a}}\omega(\tau)\,d\tau \text{ при } |x|<at, \tag{100}$$

$$u(x,t)=0 \text{ при } |x|>at.$$

189. Поперечные колебания мембран. До сих пор мы рассматривали волновые уравнения на плоскости и в пространстве при отсутствии границ, так что, кроме дифференциального уравнения, имели только начальные условия. Предельные задачи для волнового уравнения на плоскости и в пространстве представляются гораздо более трудными, чем в линейном случае. Рассмотрим предельную задачу на плоскости в двух частных случаях — когда основной областью, для которой решается задача, является прямоугольник или круг. Мы будем физически толковать волновое уравнение на плоскости, как *уравнение для поперечных колебаний мембраны.*

Под *мембраной* мы понимаем весьма тонкую пленку, которая, подобно струне, работает только на растяжение, но не на изгиб. Если мембрана находится под действием равномерного натяжения T_0 и в состоянии равновесия лежит в плоскости (x, y) и если мы ограничимся лишь тем случаем, когда движение происходит параллельно оси Oz, то смещение u точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению струны, а именно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t), \tag{101}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

ρ — поверхностная плотность мембраны, ρf — внешняя сила или нагрузка. На выводе уравнения (101) мы здесь останавливаться не будем.

Кроме дифференциального уравнения (101), нужно иметь в виду *предельное условие*, которому должна удовлетворять функция u на контуре (C) — границе мембраны. Мы остановимся лишь на том случае, когда на контуре (C) мембрана закреплена, т. е.

$$u=0 \quad \text{на} \quad (C). \tag{102}$$

Наконец, нужно задать *начальное условие*, т. е. смещение и скорость всех точек мембраны в начальный момент

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_1(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_2(x, y). \tag{103}$$

190. Прямоугольная мембрана. Рассмотрим *свободные колебания прямоугольной мембраны*, контур которой есть прямоугольник со сторонами

$$x=0,\ x=l,\ y=0,\ y=m \tag{104}$$

в плоскости (x, y). Внешнюю силу мы будем считать отсутствующей, т. е. $f=0$.

Нам нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{105}$$

удовлетворяющее условиям (102) и (103).

Применяя опять *способ стоячих волн* (*Фурье*), ищем частное решение уравнения (105) в виде

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)\,U(x, y), \tag{106}$$

что дает нам

$$-\omega^2(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)\,U(x, y)=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t),$$

откуда, полагая

$$\frac{\omega^2}{a^2}=k^2, \tag{107}$$

находим уравнение для U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0.$$

Ищем частное решение этого уравнения в виде

$$U(x, y)=X(x)\,Y(y), \tag{108}$$

что дает нам

$$X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)+k^2X(x)\,Y(y)=0,$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)+k^2Y(y)}{Y(y)}=-\lambda^2,$$

где λ^2 — пока неопределенная постоянная.

Итак, мы имеем два уравнения:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad Y''(y)+\mu^2Y(y)=0, \tag{109}$$

где

$$\mu^2=k^2-\lambda^2,\ \mu^2+\lambda^2=k^2.$$

Уравнения (109) дают нам общий вид функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x,\qquad Y(y)=C_3\sin\mu x+C_4\cos\mu x.$$

Из условия

$$u=0 \text{ на } (C)$$

получаем

$$U(x,\ y)=0 \text{ на } (C),$$

а это последнее условие, в свою очередь, распадается на следующие условия:

$$X(0)=0,\ X(l)=0,\ Y(0)=0,\ Y(m)=0,$$

откуда ясно, что $C_2=C_4=0$, и если мы отбросим постоянные множители C_1 и C_3, не равные нулю, то окажется:

$$X(x)=\sin\lambda x,\qquad Y(y)=\sin\mu y, \tag{110}$$

причем

$$\sin\lambda l=0,\qquad \sin\mu m=0. \tag{111}$$

Из уравнений (111) вытекает, что λ и μ имеют бесчисленное множество значений

$$\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_\sigma,\ \ldots;\ \mu=\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\tau,\ \ldots;\ \lambda_\sigma=\frac{\sigma\pi}{l},\ \mu_\tau=\frac{\tau\pi}{m}. \tag{112}$$

Взяв по произволу по одному значению λ и μ из рядов (112), получим соответствующее значение постоянной k^2:

$$k^2_{\sigma,\tau}=\lambda^2_\sigma+\mu^2_\tau=\pi^2\left(\frac{\sigma^2}{l^2}+\frac{\tau^2}{m^2}\right),$$

а по этому значению k^2 найдем и соответствующее значение частоты ω из (107):

$$\omega^2_{\sigma,\tau}=a^2k^2_{\sigma,\tau}=a^2\pi^2\left(\frac{\sigma^2}{l^2}+\frac{\tau^2}{m^2}\right). \tag{113}$$

Подставив в выражение (106) λ_σ вместо λ, μ_τ вместо μ и обозначив через $\alpha_{\sigma,\tau}, \beta_{\sigma,\tau}$ соответствующие значения α и β, мы получаем бесчисленное множество решений уравнения (105), удовлетворяющих предельному условию (102), в виде

$$(\alpha_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t+\beta_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

т. е. бесчисленное множество собственных (свободных) гармонических колебаний мембраны, соответствующих таковым же колебаниям струны.

Постоянные α, β определяются из начальных условий. Положив $t=0$ в формулах

$$u=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}(\alpha_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t+\beta_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}\omega_{\sigma,\tau}(\beta_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t-\alpha_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

получим на основании (103)

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x, y) = \sum_{\sigma, \tau=1}^{\infty} \alpha_{\sigma, \tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x, y) = \sum_{\sigma, \tau=1}^{\infty} \beta_{\sigma, \tau}\omega_{\sigma, \tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m}.$$

Эти формулы суть не что иное, как разложения функций φ_1 и φ_2 в двойные ряды Фурье, и коэффициенты α и β определяются, как нетрудно видеть, по формулам

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\sigma, \tau} &= \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_1(\xi, \zeta) \sin \frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \frac{\tau\pi\eta}{m} d\xi\, d\eta, \\ \omega_{\sigma, \tau}\beta_{\sigma,\tau} &= \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_2(\xi, \eta) \sin \frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \frac{\tau\pi\eta}{m} d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

что и дает решение поставленной задачи.

Случай мембраны отличается от случая струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. Для мембраны же может оказаться, что одной и той же частоте соответствует несколько фигур мембраны с различными положениями *узловых линий*, т. е. таких линий, на которых амплитуда колебаний приводится к нулю. Проще всего это можно исследовать на примере квадратной мембраны

$$l = m = r.$$

В этом случае частота $\omega_{\sigma, \tau}$ определяется по формуле

$$\omega_{\sigma, \tau} = \frac{a\pi}{r} \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \alpha \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (115)$$

где $\alpha = \frac{a\pi}{r}$ есть множитель, не зависящий от σ и τ. Полагая $\sigma = \tau = 1$, получаем основной тон u_{11} мембраны с частотой $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$:

$$u_{11} = N_1 \sin(\omega_{11}t + \varphi_{11}) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}.$$

Узловых линий внутри мембраны при этом не имеется совсем. Полагая затем

$$\sigma = 1, \ \tau = 2 \text{ или } \sigma = 2, \ \tau = 1,$$

имеем два других тона одинаковой частоты

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5},$$

именно

$$u_{12} = N_{12} \sin(\omega_{12}t + \varphi_{12}) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r},$$

$$u_{21} = N_{21} \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21}) \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}.$$

Узловые линии этих простейших колебаний суть соответственно

$$y=\frac{r}{2} \text{ или } x=\frac{r}{2}.$$

Но, кроме колебаний u_{12}, u_{21}, существует еще бесчисленное множество других колебаний той же частоты ω_{12}, которые получаются линейной комбинацией u_{12} и u_{21}. Полагая для простоты $\varphi_{12}=\varphi_{21}=0$, мы получаем колебание вида

$$\sin \omega t\left[N_1 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r}+N_2 \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}\right],$$

где $\omega=\omega_{12}=\omega_{21}$, $N_1=N_{12}$ и $N_2=N_{21}$.

При $N_1=N_2$ узловые линии определяются из уравнения

$$0=\sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r}+\sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}=2 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}\left(\cos \frac{\pi x}{r}+\cos \frac{\pi y}{r}\right),$$

что дает узловую линию

$$x+y=r.$$

При $N_2=-N_1$ точно таким же путем найдем узловую линию: $x-y=0$.

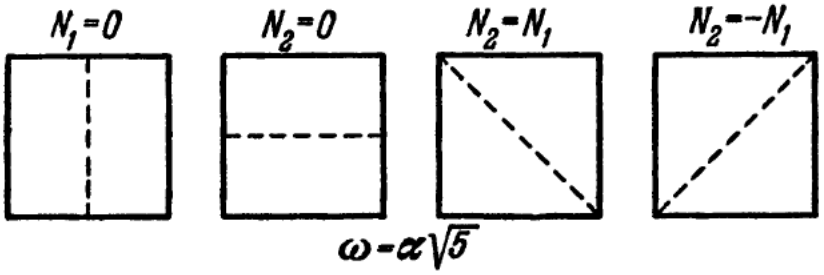


Рис. 127.

Эти простейшие случаи изображены на рис. 127. Более сложные узловые линии при той же частоте мы получим, когда $N_2 \neq \pm N_1$ и $N_1,\ N_2 \neq 0$. Все они имеют уравнения вида

$$N_2 \cos \frac{\pi x}{r}+N_1 \cos \frac{\pi y}{r}=0.$$

Полагая теперь

$$\sigma=2,\ \tau=2,$$

получаем единственный тон частоты

$$\omega_{22}=\alpha \sqrt{8},$$

узловые линии которого суть (рис. 128):

$$x=\frac{r}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{r}{2}.$$

Следующий случай

$$\sigma=1,\ \tau=3,\ \sigma=3,\ \tau=1$$

приводит опять к бесчисленному множеству колебаний одной и той же частоты $\omega_{13}=\omega_{31}=\alpha \sqrt{10}$. Их узловые линии в простейших случаях, аналогич-

ных случаю с частотой $\omega_{12}=\omega_{21}=a\sqrt{5}$, изображены на рис. 129. Все эти фигуры представляют собою не что иное, как известные из акустики *хладниевы фигуры*.

Вынужденные колебания мембраны исследуются совершенно так же, как и вынужденные колебания струны, с тою лишь разницей, что внешняя сила $f(x, y, t)$ разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье.

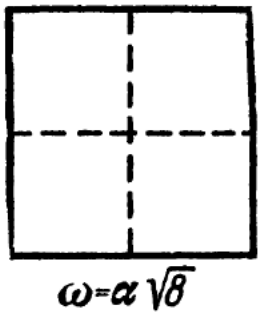


Рис. 128.

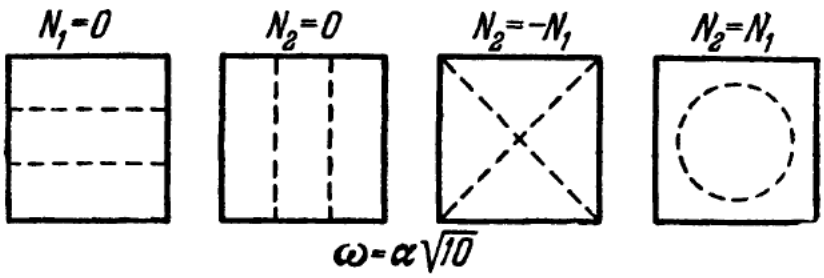


Рис. 129.

191. Круглая мембрана. Случай круглой мембраны дает нам пример разложения данной функции по функциям Бесселя, — пример, который важен и потому, что такие разложения встречаются в других весьма важных задачах математической физики.

Итак, мы исследуем *свободные* (*собственные*) *колебания круглой мембраны*, контур которой есть окружность радиуса l с центром в начале координат. По-прежнему мы считаем, что на контуре мембрана не смещается. Вводя вместо прямоугольных координат (x, y) полярные (r, θ), мы имеем тогда

$$u|_{r=l}=0.$$

Как и в случае прямоугольной мембраны, будем искать частные решения уравнения (105) вида

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)\,U,$$

но только будем считать, что функция U выражена через (r, θ), а не через (x, y). Для функции U мы получим то же дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+k^2U=0, \tag{116}$$

но только нужно преобразовать его к новым переменным (r, θ). Для этого достаточно выразить оператор Лапласа

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2} \tag{117}$$

в полярных координатах. Мы знаем, что оператор Лапласа от трех переменных

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$$

выражается в цилиндрических координатах в виде [131]:

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\rho\,\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right].$$

Считая U независящим от z, выразим (117) через полярные координаты. В дальнейшем длину радиуса-вектора мы будем обозначать буквой r

вместо ρ, а полярный угол — буквой θ вместо φ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

Уравнение (116) перепишется так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+k^2 U=0.$$

Ищем его частные решения в виде произведения

$$U(r,\ \theta)=T(\theta)\cdot R(r),$$

что дает

$$T(\theta)\left[R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+k^2 R(r)\right]+\frac{1}{r^2}T''(\theta)R(r)=0,$$

или

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-\frac{r^2 R''(r)+rR'(r)+k^2r^2R(r)}{R(r)}=-\lambda^2$$

и, наконец,

$$T''(\theta)+\lambda^2 T(\theta)=0, \tag{118}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(k^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0. \tag{119}$$

Уравнение (118) имеет общее решение вида

$$T(\theta)=C\cos\lambda\theta+D\sin\lambda\theta,$$

и так как функция U по самому смыслу задачи должна быть однозначной периодической функцией от θ с периодом 2π, то тем же свойством должна обладать и функция $T(\theta)$, что возможно лишь при условии, что λ есть число целое. Ограничившись только положительными значениями λ, мы должны считать $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ и соответствующие выражения для функций $T(\theta)$ и $R(r)$ обозначим через

$$T_0(\theta),\ T_1(\theta),\ T_2(\theta),\ \ldots,\ T_n(\theta),\ \ldots;\ R_0(r),\ R_1(r),\ R_2(r),\ \ldots,\ R_n(r),\ \ldots$$

Таким путем мы получаем бесчисленное множество решений уравнения (105) вида

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)(C\cos n\theta+D\sin n\theta)R_n(r)\quad(\omega=ak). \tag{120}$$

Функция $R_n(r)$ удовлетворяет уравнению (119), если там заменить λ на n:

$$R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n(r)=0. \tag{121}$$

Как мы видели в [49], общий интеграл этого уравнения будет

$$R_n(r)=C_1J_n(kr)+C_2K_n(kr), \tag{122}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя и $K_n(x)$ — второе решение уравнения Бесселя, которое обращается в бесконечность при $x=0$; так как по самому смыслу задачи искомые решения должны оставаться ограниченными во всех точках мембраны, в том числе и в начале координат $r=0$, то в предыдущей формуле для $R_n(r)$ член с $K_n(kr)$ должен отсутствовать, т. е. $C_2=0$. Не ограничивая общности, мы можем считать $C_1=1$, т. е. положить

$$R_n(r)=J_n(kr), \tag{123}$$

и тогда предельное условие

$$u|_{r=l}=0$$

дает

$$J_n(kl)=0. \tag{124}$$

Положив $kl=\mu$, мы получаем трансцендентное уравнение для определения μ

$$J_n(\mu)=0, \tag{125}$$

которое, как это доказывается в теории функций Бесселя, имеет бесчисленное множество положительных корней

$$\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots, \tag{126}$$

которым соответствуют значения

$$k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, k_3^{(n)}, \ldots, k_m^{(n)}=\frac{\mu_m^{(n)}}{l}, \ldots \tag{127}$$

параметра k и, в силу (107), значения

$$\omega_{m,n}=ak_m^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \ldots, m=1, 2, \ldots) \tag{128}$$

частоты ω. Первые девять корней первых шести функций Бесселя даны в прилагаемой таблице

1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,076	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813
9	27,494	29,047	30,571	32,050	33,512	34,983

Следующие корни могут быть вычислены по приближенной формуле:

$$\mu_m^{(n)}=\frac{1}{4}\pi(2n-1+4m)-\frac{4n^2-1}{\pi(2n-1+4m)}, \tag{129}$$

которая при данном n будет тем точнее, чем больше m. Мы не можем здесь входить в обоснование формулы (129).

Из формулы (120) вытекает, что полученные нами частные решения можно представить в виде

$$(\alpha_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\alpha_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)+$$
$$+(\beta_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\beta_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r) \tag{130}$$
$$(m, n=1, 2, \ldots).$$

Заметим еще, что при $\lambda=0$ уравнение (118) имеет решения — постоянное и θ. Второе решение не годится, как не периодическое. В первом

случае формула (120) дает решение

$$(\alpha^{(1)}_{m,0}\cos\omega_{m,0}t+\alpha^{(2)}_{m,0}\sin\omega_{m,0}t)\,J_0(k^{(0)}_m r).$$

Это решение также имеет вид (130) (при $n=0$).

Нам остается теперь только удовлетворить начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi_1(r,\theta),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(r,\theta). \tag{131}$$

С этой целью, приняв во внимание полученные частные решения, мы ищем u в виде двойного ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\alpha^{(1)}_{m,n}\cos\omega_{m,n}t+\alpha^{(2)}_{m,n}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k^{(n)}_m r)+$$
$$+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\beta^{(1)}_{m,n}\cos\omega_{m,n}t+\beta^{(2)}_{m,n}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k^{(n)}_m r).$$

Вычислив

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\alpha^{(2)}_{m,n}\cos\omega_{m,n}t-\alpha^{(1)}_{m,n}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k^{(n)}_m r)+$$
$$+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\beta^{(2)}_{m,n}\cos\omega_{m,n}t-\beta^{(1)}_{m,n}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k^{(n)}_m r)$$

и положив в этих формулах $t=0$, мы, в силу (131), приходим к разложению данных функций $\varphi_1(r,\theta)$ и $\varphi_2(r,\theta)$ в двойные ряды вида

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(r,\theta)&=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\alpha^{(1)}_{m,n}\cos n\theta+\beta^{(1)}_{m,n}\sin n\theta)J_n(k^{(n)}_m r),\\ \varphi_2(r,\theta)&=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\alpha^{(2)}_{m,n}\cos n\theta+\beta^{(2)}_{m,n}\sin n\theta)J_n(k^{(n)}_m r).\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Разлагая функцию $\varphi_1(r,\theta)$, как периодическую функцию от θ, в обыкновенный ряд Фурье, мы имеем

$$\varphi_1(r,\theta)=\frac{\varphi^{(1)}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi^{(1)}_n\cos n\theta+\psi^{(1)}_n\sin n\theta),$$

где

$$\varphi^{(1)}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad \psi^{(1)}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(r,\theta)\sin n\theta\,d\theta\quad(n=0,1,2,\ldots). \tag{133}$$

Сравнивая это разложение с первой из формул (132), находим без труда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0^{(1)} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,0}^{(1)} J_0(k_m^{(0)} r), \quad \varphi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,n}^{(1)} J_n(k_m^{(n)} r), \\ \psi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,n}^{(1)} J_n(k_m^{(n)} r). \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Коэффициенты $\varphi^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ очевидно зависят от r, как это показывают их выражения (133). Мы приходим таким образом к задаче о разложении данной функции от r в ряд по функциям $J_n(k_m^{(n)} r)$ — при фиксированном n. Имея эти разложения, мы определим коэффициенты α и β, и поставленная задача будет решена.

Итак, пусть требуется разложить данную функцию $f(r)$ в ряд вида

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(k_m^{(n)} r). \tag{135}$$

Допустив, что разложение это возможно и может быть интегрируемо почленно, мы покажем только, как определить коэффициенты A_m. Для этой цели мы докажем, что функции

$$J_n(k_1^{(n)} r), \quad J_n(k_2^{(n)} r), \ \ldots, \ J_n(k_m^{(n)} r), \ \ldots$$

обладают свойством *обобщенной ортогональности*, а именно:

$$\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr = 0 \text{ при } \sigma \neq \tau. \tag{136}$$

Действительно, уравнение (121), если в нем заменить k^2 на $k_\sigma^{(n)2}$ и $k_\tau^{(n)2}$ и соответственно $R_n(r)$ на $J_n(k_\sigma^{(n)} r)$ и $J_n(k_\tau^{(n)} r)$, дает нам

$$\frac{d^2 J_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} + \left(k_\sigma^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n(k_\sigma^{(n)} r) = 0,$$

$$\frac{d^2 J_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} + \left(k_\tau^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n(k_\tau^{(n)} r) = 0.$$

Умножив первое уравнение на $rJ_n(k_\tau^{(n)} r)$, второе на $rJ_n(k_\sigma^{(n)} r)$, вычитая и интегрируя по r от 0 до l, получим

$$(k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2}) \int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{d^2 J_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\sigma^{(n)} r) - \frac{d^2 J_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\tau^{(n)} r)\right] r\, dr +$$

$$+ \int_0^l \left[\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\sigma^{(n)} r) - \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\tau^{(n)} r)\right] dr.$$

Интегрируя по частям, мы имеем

$$\int \frac{d^2 J_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, r\, dr = \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\sigma^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} \frac{d\,[r J_n(k_\sigma^{(n)} r)]}{dr}\, dr = \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\sigma^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} r\, dr - \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, dr,$$

и точно так же

$$\int \frac{d^2 J_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr = \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\tau^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r\, dr - \int \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\tau^{(n)} r)\, dr.$$

Отсюда выводим без труда:

$$(k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2}) \int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr =$$

$$= r \left[\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\sigma^{(n)} r) - \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\tau^{(n)} r) \right] \Bigg|_{r=0}^{r=l}.$$

По самому определению чисел $k_\sigma^{(n)}$, $k_\tau^{(n)}$ мы имеем

$$J_n(k_\sigma^{(n)} l) = J_n(k_\tau^{(n)} l) = 0,$$

откуда следует, что правая часть написанного равенства обращается в нуль при $r = l$. Ввиду присутствия множителя r и конечности $J_n(x)$ и $J'_n(x)$ при $x = 0$ можно утверждать, что правая часть обращается в нуль и на нижнем пределе $r = 0$, но так как при $\sigma \neq \tau$ и $k_\sigma^{(n)} \neq k_\tau^{(n)}$, отсюда вытекает

$$\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr = 0,$$

что и требовалось доказать.

После того как доказана формула (136), определение коэффициентов A_m в разложении (135) не представляет труда: умножив обе части равенства (135) на $J_n(k_p^{(n)} r)$, интегрируя по r от 0 до l и пользуясь формулой (136), мы находим сразу

$$\int_0^l f(r)\, J_n(k_p^{(n)} r)\, r\, dr = A_p \int_0^l J_n^2(k_p^{(n)} r)\, r\, dr.$$

Итак, мы можем сказать, что если разложение (135) возможно и его можно почленно интегрировать, то коэффициенты A_m определяются по

формулам

$$A_m = \frac{\int_0^l f(r) J_n(k_m^{(n)} r) r\, dr}{\int_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r) r\, dr}.$$

Формулы (133) и (134) дают нам теперь следующие выражения для коэффициентов $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$:

$$\alpha_{m,0}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^l \varphi_0^{(1)} J_0(k_m^{(0)} r) r\, dr}{\int_0^l J_n^2(k_m^{(0)} r) r\, dr} = \frac{1}{2\pi \int_0^l J_0^2(k_m^{(0)} r) r\, dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r, \theta) J_0(k_m^{(0)} r) r\, dr,$$

$$\alpha_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r) r\, dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r, \theta) \cos n\theta\, J_n(k_m^{(n)} r) r\, dr,$$

$$\beta_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r) r\, dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r, \theta) \sin n\theta\, J_n(k_m^{(n)} r) r\, dr.$$

Пользуясь теми же соображениями, мы определим и коэффициенты $\alpha^{(2)}$, $\beta^{(2)}$—нужно только заменить в предыдущих формулах φ_1 на φ_2 и разделить соответствующие выражения на $\omega_{m,n}$. Как и в случае прямоугольной мембраны, общее движение круглой мембраны складывается из бесчисленного множества собственных гармонических колебаний, причем одной и той же частоте может соответствовать и бесчисленное множество различных случаев расположения узловых линий. На рис. 130 изображены некоторые случаи расположения узловых линий с указанием соответствующей частоты, причем за единицу принята частота основного тона; здесь же указаны и радиусы узловых линий, имеющих вид окружностей, и эти радиусы выражены в долях радиуса мембраны.

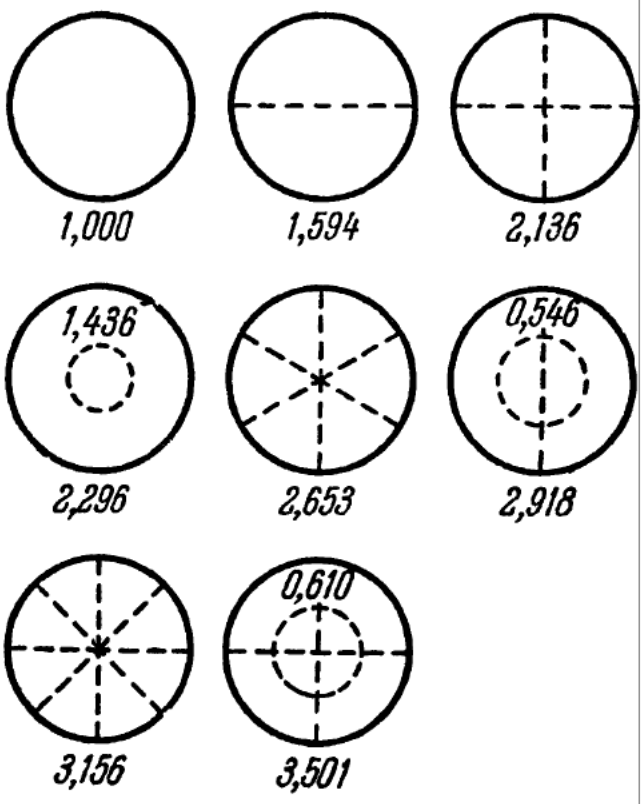


Рис. 130.

При применении метода Фурье в случае любого контура можно выделить лишь множитель, зависящий от t, согласно формуле (106), что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0, \qquad (137)$$

и надо определить те значения параметра k, при которых написанное уравнение имеет решения, отличные от нуля, удовлетворяющие предельному

условию (102), а также сами эти решения. В предыдущих примерах это нам удавалось сделать при помощи дальнейшего разделения переменных. В общем случае этот метод неприменим, и надо рассматривать непосредственно уравнение (137). Задача, естественно, не решается в явной форме. Теоретическое решение указанной задачи и некоторые качественные результаты, к ней относящиеся, будут даны в томе IV. Предельная задача для волнового уравнения в трехмерном пространстве в случае прямоугольного параллелепипеда решается совершенно так же, как и в [190], но только мы приходим к рядам Фурье по трем переменным x, y и z. Случай сферы опять приводит к функциям Бесселя. Мы будем говорить об этом в томе III, в связи с более подробным изложением теории функций Бесселя.

Подробное исследование сходимости рядов Фурье, получаемых при решении предельных задач для волнового уравнения в случае многих пространственных переменных будет дано в томе IV.

192. Теорема единственности. Докажем теперь единственность решения волнового уравнения как в случае безграничного пространства, при заданных начальных условиях, так и при наличии еще предельных условий. Для простоты письма будем считать скорость $a=1$, чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении t на $a^{-1}t$. Для определенности возьмем случай трех независимых переменных, т. е. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{138}$$

и начнем с рассмотрения задачи с одними начальными условиями, заданными на всей плоскости:

$$u|_{t=0}=\varphi(x,\ y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y). \tag{139}$$

Мы уже имели раньше решение этой задачи [185]. Из самого метода этого решения можно было бы получить и единственность. Мы дадим сейчас другое доказательство единственности, которое будет применимо и для задачи с предельным условием. Если уравнение (138) с начальными условиями (139) имеет два решения: u_1 и u_2, то разность u_2-u_1 должна удовлетворять уравнению (138) и однородным начальным условиям

$$u|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{140}$$

Надо показать, что при этом u должно тождественно равняться нулю при любых значениях (x, y) и при любом $t>0$. Рассмотрим трехмерное пространство (x, y, t) и возьмем в нем некоторую точку $N(x_0, y_0, t_0)$ такую, что $t_0>0$. Из этой точки, как вершины, проведем коническую поверхность

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(t-t_0)^2=0 \tag{141}$$

до ее пересечения с плоскостью $t=0$. Проведем еще плоскость $t=t_1$, где $0<t_1<t_0$, и пусть D — трехмерная область, ограничен-

ная боковой поверхностью Γ упомянутого конуса и частями плоскостей $t=0$ и $t=t_1$, находящимися внутри конуса (D — усеченный конус). Нетрудно проверить следующее элементарное тождество:

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-$$
$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (142)$$

Проинтегрируем его обе части по упомянутой области D. Интеграл от левой части должен обращаться в нуль, поскольку u является решением уравнения (138). Интеграл правой части мы можем преобразовать в интеграл по поверхности области D, пользуясь формулой Остроградского:

$$\int\int\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n,t)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right\}ds. \quad (143)$$

На нижнем основании усеченного конуса D функция u и все ее частные производные первого порядка, в силу (140), равны нулю, и интеграл (143) по нижнему основанию равен нулю. На верхнем основании (σ), лежащем в плоскости $t=t_1$, мы имеем

$$\cos(n,\ x)=\cos(n,\ y)=0 \text{ и } \cos(n,\ t)=1.$$

На боковой поверхности Γ конуса направляющие косинусы нормали удовлетворяют соотношению

$$\cos^2(n,\ t)-\cos^2(n,\ x)-\cos^2(n,\ y)=0,$$

и интеграл (143) по Γ может быть переписан в виде

$$J=\int_\Gamma\int\frac{1}{\cos(n,t)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,\ x)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,y)\right]^2\right\}ds,$$

и мы получим окончательно

$$J+\int_{(\sigma)}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0.$$

На поверхности Γ имеем $\cos(n,\ t)>0$, и, следовательно, $J\geqslant 0$, а потому

$$\int_{(\sigma)}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0,$$

откуда следует, что во всех точках внутри полного конуса с вершиной $N(x_0, y_0, t_0)$ частные производные первого порядка функции u равны нулю, и, следовательно, сама функция u — постоянна. На основании конуса она равна нулю в силу (140), а следовательно, u равно нулю и в точке N. Приведенное доказательство теоремы единственности без труда может быть распространено и на случай предельной задачи для уравнения (138). Положим, ищется решение уравнения (138) в некоторой области B плоскости (x, y) при заданных начальных и предельных условиях, причем предельные условия относятся к контуру l области B. Построим цилиндр с основанием B и с образующими, параллельными оси t. Каждой точке этого цилиндра соответствует определенная точка в области B и определенный момент времени t. Положим, что в области B мы имеем нулевые начальные данные (140) и пусть на контуре l области B мы имеем однородное предельное условие

$$u|_l = 0. \tag{144}$$

Докажем, что функция u равна нулю во всех точках упомянутого выше цилиндра. Возьмем такую точку N и проведем через нее конус (141). Пусть D — тело, ограниченное боковой поверхностью этого конуса, упомянутого выше цилиндра и плоскостями $t = 0$ и $t = t_1$. Проинтегрируем опять обе части тождества (142) по этой области. Все рассуждения останутся прежними, но только в правую часть войдет интеграл по боковой поверхности цилиндра. Если этот интеграл окажется равным нулю, то прежнее доказательство теоремы единственности сохранится полностью. В интеграле по боковой поверхности цилиндра подынтегральная функция совпадает с подынтегральной функцией интеграла (143). Но на боковой поверхности цилиндра мы имеем $\cos(n, t) = 0$, и, кроме того, на этой поверхности $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Последнее равенство непосредственно вытекает из того факта, что точки боковой поверхности цилиндра представляют собою точки контура l в различные моменты времени t, а на контуре l мы имеем при всяком t однородное предельное условие (144). Таким образом подынтегральная функция интеграла (143) обращается в нуль на всей боковой поверхности цилиндра, и приведенное выше доказательство теоремы единственности сохраняется полностью и для формулированной только что предельной задачи. При доказательстве теоремы единственности нам приходилось интегрировать правую часть выражения (142) по области D и применять формулу Остроградского. Эти операции являются вполне законными, если мы предположим, например, что функция u имеет непрерывные производные до второго порядка в D вплоть до границы.

Выше мы упоминали, что при исследовании практически интересных задач сталкиваются с необходимостью вводить в рассмотрение

так называемые обобщенные решения. В томе IV мы покажем, что теорема единственности имеет место и в этом более широком классе обобщенных решений.

193. Применение интеграла Фурье. Рассмотрим волновое уравнение в линейном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{145}$$

для полубесконечной области $x \geqslant 0$ с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{146}$$

и предельным условием

$$u|_{x=0} = 0. \tag{147}$$

Нетрудно решить эту задачу методом, указанным в [179]. Действительно, достаточно продолжить функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, заданные в промежутке $(0, +\infty)$, на промежуток $(-\infty, 0)$ по закону нечетности и затем применить формулу (17) для бесконечной струны. Полагая в этой формуле $x = 0$, мы получим

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} \varphi_1(z)\, dz,$$

и оба слагаемых обращаются в нуль в силу нечетности продолжения $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$, так что предельное условие наверно удовлетворено.

Если применим к поставленной задаче метод Фурье, то вместо ряда Фурье получим интеграл Фурье. Как мы видели в [180], применение метода Фурье с учетом предельного условия приводит к решениям вида

$$u = (A \cos akt + B \sin akt) \sin kx.$$

Второго предельного условия нет, а потому все значения параметра k являются допустимыми, т. е. мы приходим к сплошному спектру возможных частот k полубесконечной струны. Вместо суммирования по дискретным значениям k, которое мы применяли в [180], мы в рассматриваемом случае должны применить интегрирование по параметру k, считая, конечно, A и B функциями k. Таким образом мы получим:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(k) \cos akt + B(k) \sin akt] \sin kx\, dk. \tag{148}$$

Функции $A(k)$ и $B(k)$ должны определяться из начальных условий (146). Они дадут:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \sin kx\, dk, \qquad \varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ak\, B(k) \sin kx\, dk. \tag{149}$$

Сравнивая эти формулы с формулой Фурье для нечетной функции

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt\right] \sin \alpha x\, d\alpha,$$

мы определяем функции $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\sin k\xi\,d\xi, \qquad B(k)=\frac{1}{\pi ak}\int_0^{\infty}\varphi_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi,$$

и, подставляя в формулу (148), получаем решение задачи

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi\sin kx\,d\xi\right\}dk,$$

или, принимая во внимание четность подынтегральной функции, как функции от k:

$$u(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi\,d\xi\right\}\sin kx\,dk.$$

Нетрудно, пользуясь формулой Фурье, убедиться в том, что правая часть этой формулы совпадает с правой частью формулы (17) при условии нечетности $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Совершенно аналогично можно рассмотреть в случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

предельную задачу для полуплоскости $y\geqslant 0$ с предельным условием

$$u|_{y=0}=0 \tag{150}$$

и любыми начальными условиями

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,\ y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y) \tag{151}$$

$$(-\infty<x<+\infty;\quad y\geqslant 0).$$

Нетрудно проверить, что решение задачи будет давать формула (80) при условии нечетного продолжения функций $\varphi(x,\ y)$ и $\varphi_1(x,\ y)$ по аргументу y на промежуток $(-\infty,\ 0)$. Действительно, при $y=0$ первое слагаемое формулы (80) может быть написано в виде

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-\beta^2}}\,d\beta\right]d\alpha,$$

и внутренний интеграл равен нулю при любых x и t, ибо подынтегральная функция есть нечетная функция от β. Совершенно аналогично и второе слагаемое формулы (80) обращается в нуль, так что условие (150) действительно выполнено. Мы могли бы и для рассматриваемой задачи применить метод Фурье, используя представление функции двух переменных интегралом Фурье. Проверка тождества полученного таким образом решения с решением, определяемым формулой (80), представляет бо́льшие трудности, чем в линейном случае. Совершенно аналогично можно рассмотреть волновое уравнение в полупространстве $z\geqslant 0$ при предельном условии $u=0$ при

$z=0$. Метод Фурье применим и для решения волнового уравнения для безграничного случая, когда имеются только начальные условия. Но его применения приводят к более сложным вычислениям, чем те, которые мы применяли выше.

§ 18. ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ

194. Основные уравнения. Оба изложенных выше способа: характеристик (Даламбера) и стоячих волн (Фурье) с успехом применяются и при исследовании так называемого *телеграфного уравнения*, которое имеет основное значение в теории распространения квазистационарных электрических колебаний по кабелям.

Пусть имеем цепь, состоящую из прямого и обратного проводников длины l. Мы будем считать, что по всей этой цепи равномерно распределены рассчитанные на единицу длины омическое сопротивление R, самоиндукция L, емкость C и утечка изоляции A, чем этот случай отличается от разобранного в [I, 181], когда мы имели сопротивление, самоиндукцию и емкость сосредоточенными лишь в отдельных точках цепи, а остальными ее частями мы пренебрегали. Обозначим через v и i напряжение и силу тока в сечении цепи на расстоянии x от конца $x=0$. Эти функции от x и t связаны двумя дифференциальными уравнениями, которые мы сейчас выведем.

Применяя закон индукции к элементу dx цепи, мы должны написать, что падение напряжения в этом элементе

$$v-(v+dv)=-dv=-\frac{\partial v}{\partial x}\,dx$$

складывается из омического $R\,dx\cdot i$ и индуктивного $L\,dx\,\frac{\partial i}{\partial t}$, или, разделяя на dx:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0. \tag{1}$$

Далее, разность между токами, входящим и выходящим из элемента dx, т. е.

$$i-(i+di)=-di=-\frac{\partial i}{\partial x}dx,$$

складывается из токов заряжения $C\,dx\,\frac{\partial v}{\partial t}$ и утечки $A\,dx\cdot v$, что дает

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0. \tag{2}$$

Весьма важное значение имеют *предельные условия*, которые должны выполняться на концах цепи. Если конец цепи открыт, то в этом конце мы должны иметь

$$i=0 \quad (\text{при } x=0 \text{ или } x=l). \tag{3}$$

Вообще, если в конце цепи включена внешняя электродвижущая сила E, сопротивление r и самоиндукция λ, то в этом конце мы должны иметь

$$v = E + rl + \lambda \frac{dl}{dt} \quad \text{(при } x = 0 \text{ или } x = l\text{)}. \tag{4}$$

В частности, если, например, один конец $x = 0$ поддерживается под напряжением E, а другой $x = l$ замкнут накоротко, мы имеем

$$v|_{x=0} = E, \quad v|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

195. Установившиеся процессы. Скажем сперва несколько слов об установившихся процессах, когда внешние факторы, действующие на цепь, либо 1) постоянны, либо 2) являются синусоидальными величинами, причем в первом случае мы будем считать v и i независящими от t.

1. В первом случае уравнения (1) и (2) дают нам

$$\frac{dv}{dx} + Ri = 0; \quad \frac{di}{dx} + Av = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по x и принимая во внимание второе, получим

$$\frac{d^2v}{dx^2} - RAv = 0. \tag{7}$$

Функция v определяется сразу по способу, указанному в [28], и мы находим

$$v(x) = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}, \tag{8}$$

где

$$b = \sqrt{RA}.$$

Определив v, находим i из первого из уравнений (6)

$$i(x) = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dx} = -\frac{b}{R}(C_1 e^{bx} - C_2 e^{-bx}). \tag{9}$$

Примеры. 1. В случае цепи под постоянным напряжением E на одном конце и накоротко замкнутой на другом мы имеем условия (5), из которых определятся произвольные постоянные, входящие в формулу (8):

$$C_1 + C_2 = E, \quad C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{E}{e^{2bl} - 1} = -\frac{Ee^{-bl}}{e^{bl} - e^{-bl}}, \qquad C_2 = \frac{Ee^{bl}}{e^{bl} - e^{-bl}},$$

и, подставляя в формулу (8), получим

$$v(x) = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}} = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}, \tag{10_1}$$

и формула (9) дает

$$i(x)=E\sqrt{\frac{A}{R}}\,\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} lb}. \qquad (10_2)$$

2. Пусть теперь на нашу цепь действует синусоидальная внешняя электродвижущая сила определенной частоты ω; мы можем тогда перейти от действительных физических величин к векторам, как это было сделано в [I, 180], и под вынужденными колебаниями будем понимать синусоидальные колебания напряжения и тока цепи той же частоты ω. Вспомнив правила из [I, 180] и введя векторы тока $\mathbf{I}$ и напряжения $\mathbf{V}$, которые в рассматриваемом случае зависят от x, мы перепишем систему дифференциальных уравнений (1) и (2) в виде

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx}+(R+i\omega L)\,\mathbf{I}=0; \qquad \frac{d\mathbf{I}}{dx}+(A+i\omega C)\,\mathbf{V}=0. \qquad (11)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по x и пользуясь вторым, исключим $\mathbf{I}$ и получим

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2}-(R+i\omega L)(A+i\omega C)\,\mathbf{V}=0,$$

и совершенно такое же уравнение, как нетрудно показать, можно получить и для $\mathbf{I}$.

Стало быть, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{V}$ являются решениями одного и того же дифференциального уравнения 2-го порядка. Применяя способ [28] и положив

$$(R+i\omega L)(A+i\omega C)=\varkappa^2, \qquad (12)$$

имеем

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}_1e^{\varkappa x}+\mathbf{A}_2e^{-\varkappa x}, \qquad (13)$$

где $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — произвольные постоянные векторы. Подставив это в первое из уравнений (11), определим вектор

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{R+i\omega L}\frac{d\mathbf{V}}{dx}=\sqrt{\frac{A+i\omega C}{R+i\omega L}}\,(\mathbf{A}_2e^{-\varkappa x}-\mathbf{A}_1e^{\varkappa x}). \qquad (14)$$

Для окончательного решения задачи нужно определить постоянные векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, что можно сделать, воспользовавшись двумя предельными условиями (о начальных условиях здесь, конечно, говорить не приходится), причем вместо того, чтобы дать по одному условию для каждого конца в отдельности, можно задать два условия для одного и того же конца, например, задать там и вектор напряжения и вектор тока.

Как бы то ни было, формулы (13) и (14) определяют векторы вынужденных колебаний, которые зависят от x, т. е. меняются вдоль цепи как по амплитуде, так и по фазе. Изображая каждый вектор $(m+ni)$ точкой на плоскости комплексной переменной и меняя x от 0 до l, мы получим для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}$ две кривые — *векторные диаграммы напряжения и тока*. При определении вида этих кривых нужно помнить, что $\varkappa$ есть, вообще говоря, число комплексное; положив

$$\varkappa=a+ib,$$

мы имеем

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}_1e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+\mathbf{A}_2e^{-ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Каждое из слагаемых в правой части дает спираль [I, 183], и $\mathbf{V}$ получается путем „геометрического сложения“ этих двух спиралей; радиус-вектор точки кривой $\mathbf{V}$, соответствующий какому-нибудь значению x, равен геометрической сумме радиусов-векторов точек этих двух спиралей при том же

значении x. То же можно сказать и относительно вектора $\mathbf{I}$. Вводя множитель

$$\nu = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{A + i\omega C}}, \tag{15}$$

который называется *волновым сопротивлением*, можно написать выражение для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}$ в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x} + \mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x}, \quad \mathbf{I} = \frac{1}{\nu}(\mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x} - \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x}). \tag{16}$$

Если мы перейдем от векторной формы к обычной, то получим для искомых функций v и i выражения вида

$$v = V(x)\sin[\omega t + \psi(x)], \qquad i = I(x)\sin[\omega t + \chi(x)], \tag{17}$$

которые и дают гармонические колебания той же частоты ω, что и у внешней силы, и в которых амплитуды $V(x)$ и $I(x)$ и фазы $\psi(x)$ и $\chi(x)$ зависят от положения рассматриваемого сечения цепи.

3. *Цепь под синусоидальным напряжением на одном конце и открытая на другом.* Данный на конце $x = 0$ вектор напряжения обозначим через $\mathbf{V}_0$. Кроме уравнений (11), мы имеем еще предельные условия

$$\mathbf{V}|_{x=0} = \mathbf{V}_0, \qquad \mathbf{I}|_{x=l} = 0,$$

которые, в силу формул (16), дают нам

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{V}_0, \qquad \mathbf{A}_2 e^{-\varkappa l} - \mathbf{A}_1 e^{\varkappa l} = 0.$$

Решая эти уравнения и подставляя в (16), находим без труда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \frac{\operatorname{ch}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}, \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_0}{\nu}\frac{\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}.$$

При $x = 0$ мы получаем комплексное сопротивление в точке $x = 0$ в виде

$$\varphi_0 = \nu \frac{\operatorname{ch}\varkappa l}{\operatorname{sh}\varkappa l}.$$

196. Устанавливающиеся процессы. Сравним между собой два типа вынужденных колебаний в одной и той же цепи под действием различных внешних факторов. Эти колебания обозначим номерами (I) и (II). Напряжения и ток колебаний типа (I) обозначим через v_1, i_1, а те же величины типа (II) — через v_2, i_2.

Если мы внезапно заменим внешние условия, при которых имеют место колебания (I), на те, при коих должен получиться тип (II), то система не сразу перейдет от (I) к (II), а только по истечении более или менее продолжительного промежутка времени, который теоретически может быть равен бесконечности, но практически конечен; в цепи возникнут *свободные колебания* (или *устанавливающиеся*), которые характеризуются величинами напряжения v и тока i, причем мы будем считать, что во время переходного процесса состояние линии получается путем сложения состояния (II) со свободными затухающими колебаниями, т. е. напряжение и ток переходного процесса определяются суммами

$$v_2 + v, \quad i_2 + i. \tag{18}$$

При $t=0$, т. е. в начале переходного процесса, эти суммы должны обращаться в v_1 и i_1. Функции v и i должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (1) и (2) [194] и предельным условиям (3) или (4), в зависимости от условий на концах. Сверх того, они должны удовлетворять и начальным условиям вида:

$$\left.\begin{aligned} v\big|_{t=0} &= (v_1 - v_2)\big|_{t=0} = g(x), \\ i\big|_{t=0} &= (i_1 - i_2)\big|_{t=0} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, h(x). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

[1])

Функции v и i мы будем искать не непосредственно, а выразив их через одну новую неизвестную функцию w, для чего положим

$$v = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение (2) дает тогда

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(i + C\frac{\partial w}{\partial i} + Aw\right) = 0,$$

откуда

$$i + C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = c,$$

где c не зависит от x. Не ограничивая общности, мы можем, однако, считать $c=0$, ибо, не изменяя величины $v = \frac{\partial w}{\partial x}$, можем прибавлять к w произвольное слагаемое, не зависящее от x.

Итак, мы имеем

$$v = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad i = -C\frac{\partial w}{\partial t} - Aw, \tag{20}$$

и уравнение (2) удовлетворено. Подставив (20) в уравнение (1), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция $w(x, t)$, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw\right) - R\left(C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LA + RC)\frac{\partial w}{\partial t} - RAw = 0. \tag{21}$$

Это уравнение называется *телеграфным уравнением.*

Для упрощения его введем новую неизвестную функцию $u(x, t)$ по формуле

$$w(x, t) = e^{-\mu t}\, u(x, t) \tag{22}$$

и постараемся подобрать постоянный множитель μ так, чтобы в уравнении для u пропал член, содержащий $\frac{\partial u}{\partial t}$. Дифференцируя и

---

[1]) Множитель $\sqrt{\frac{C}{L}}$ введен для упрощения последующих выкладок.

сокращая на $e^{-\mu t}$, мы имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\left(\mu^2 u - 2\mu\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - (LA + RC)\left(-\mu u + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - RAu = 0,$$

и для указанной цели достаточно выбрать μ под условием

$$2\mu LC - (LA + RC) = 0,$$

т. е.

$$\mu = \frac{LA + RC}{2LC}. \tag{23}$$

Подставив это значение μ, мы после простых преобразований получим для u уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta^2 u, \tag{24}$$

где

$$\delta = \frac{LA - RC}{2LC}.$$

Разберем сначала тот случай, когда величиной δ можно пренебречь, или она в точности равна нулю, т. е.

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}. \tag{25}$$

В этом случае

$$\mu = \frac{R}{L}, \tag{26}$$

и, положив

$$\frac{1}{LC} = a^2, \tag{27}$$

для u получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{28}$$

изученное выше. Его общее решение есть [**177**]:

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{29}$$

и постоянная $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ *дает скорость распространения возмущения по кабелю.* Формула (22) дает

$$w(x, t) = e^{-\mu t}[\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)],$$

и, наконец, из формул (20) получаем

$$v(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} = e^{-\mu t}[\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)],$$

$$i(x, t) = -C\frac{\partial w}{\partial t} - Aw = -e^{-\mu t}[-aC\theta_1'(x - at) + aC\theta_2'(x + at) -$$
$$- \mu C\theta_1(x - at) - \mu C\theta_2(x + at) + A\theta_1(x - at) + A\theta_2(x + at)] =$$
$$= aCe^{-\mu t}[\theta_1'(x - at) - \theta_2'(x + at)],$$

ибо, в силу (26) и (25), $\mu C = A$, и остальные члены сокращаются. Вместо произвольных функций θ_1 и θ_2 удобнее ввести непосредственно функции

$$\varphi_1(x) = \theta_1'(x) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \theta_2'(x),$$

после чего получаем окончательное выражение для v и i в виде:

$$\left.\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\mu t}[\varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at)], \\ i(x, t) &= \frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x + at)], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где для краткости положено $\alpha = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Именно этими выражениями мы и будем пользоваться. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определяются по начальным условиям (19), которые дают нам

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = g(x), \qquad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = h(x),$$

откуда

$$\varphi_1(x) = \frac{g(x) + h(x)}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{g(x) - h(x)}{2}. \tag{31}$$

Задачу можно было бы считать решенной, если бы функции $g(x)$ и $h(x)$, или, что то же самое, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ были заданы во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$; на самом деле, однако, они известны лишь в промежутке $(0, l)$, и для того, чтобы воспользоваться полученным решением, нужно *продолжить их вне этого промежутка.* Это можно сделать с помощью предельных условий, как и в случае струны, и здесь *физический смысл этого продолжения есть не что иное, как отражение волны в том или ином виде от концов цепи.*

Явления, которые соответствуют полученному решению (30), аналогичны разобранным выше в случае струны. Мы имеем здесь две волны, прямую и обратную, которые, дойдя до концов, отражаются от них. Существенное различие со случаем струны заключается в наличии множителя $e^{-\mu t}$, который убывает с течением времени и вызывает *затухание колебаний,* тем более быстрое, чем больше показатель μ — *логарифмический декремент затухания.*

197. Примеры. Если конец $x = l$ открыт, то условие

$$i|_{x=l} = 0$$

дает нам в силу (30)

$$\varphi_2(l + at) = \varphi_1(l - at)$$

или, заменив at на x,

$$\varphi_2(l + x) = \varphi_1(l - x),$$

т. е. в этом конце *волна отражается, оставаясь неизменной и по величине и по знаку,* так как функция $\varphi_2(x)$ есть четное продолжение функции $\varphi_1(x)$. То же, понятно, получится, если открытый конец будет в точке $x = 0$.

Если конец $x=l$ накоротко замкнут, т. е.

$$v|_{x=l}=0,$$

то, принимая во внимание (30) и заменяя at на x, получим

$$\varphi_2(l+x)=-\varphi_1(l-x),$$

т. е. *волна отражается, сохраняя абсолютную величину, но меняя знак*, ибо функция $\varphi_2(x)$ есть нечетное продолжение функции $\varphi_1(x)$. Дальнейшее продолжение идет так же, как и в случае струны.

1. В открытую на конце цепь включается переменный гармонический ток частоты ω. Окончательно установившемуся состоянию (II) будут соответствовать гармонические колебания частоты ω, которые были выведены выше [195]:

$$v_2=V(x)\sin[\omega t+\psi(x)], \qquad i_2=I(x)\sin[\omega t+\chi(x)].$$

Если до включения цепь была пуста, то мы имеем

$$v_1=0, \qquad i_1=0.$$

Поэтому, в силу формул (19), начальные условия будут

$$v|_{t=0}=-V(x)\sin\psi(x)=g(x),$$
$$i|_{t=0}=-I(x)\sin\chi(x)=\frac{1}{\alpha}h(x).$$

Предельные условия будут следующие: на открытом конце $x=l$ должно быть

$$i|_{x=l}=0.$$

На конце $x=0$ мы можем считать

$$v|_{x=0}=0,$$

ибо в рассматриваемом устанавливающемся процессе нас интересуют только те колебания, которые происходят от различия начальных условий цепи с вынужденными колебаниями частоты ω. По формулам (31) определяем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а затем продолжаем их нечетным образом через конец $x=l$ и четным — через конец $x=0$.

2. Рассмотрим затухающий процесс, происходящий при начальных условиях

$$v|_{t=0}=-E, \qquad i|_{t=0}=0,$$

где E — постоянная, и при предельных условиях

$$v|_{x=0}=0, \qquad i|_{x=l}=0.$$

Формулы (31) дают

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=-\frac{E}{2} \qquad \text{при} \qquad 0<x<l,$$

а из предельных условий получаем

$$\varphi_1(-x)=-\varphi_2(x), \qquad \varphi_1(l-x)=\varphi_2(l+x), \tag{32}$$

откуда видно, что $\varphi_2(x)$ продолжает в промежуток $(l, 2l)$ функцию $\varphi_1(x)$ четным образом, а функция $\varphi_1(x)$ продолжает в промежуток $(-l, 0)$

функцию $\varphi_2(x)$ нечетным образом, т. е.

$$\varphi_2(x) = -\frac{E}{2} \text{ при } 0 < x < 2l$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{E}{2} \text{ при } -l < x < 0 \\ -\frac{E}{2} \text{ при } 0 < x < l. \end{cases}$$

Заменяя во втором из уравнений (32) x на $(l + x)$ и сравнивая полученное равенство с первым из равенств (32), будем иметь

$$\varphi_2(2l + x) = -\varphi_2(x),$$

и точно так же нетрудно получить

$$\varphi_1(2l - x) = -\varphi_1(-x),$$

т. е. функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при прибавлении к аргументу $2l$ меняют знак, и периодом для них будет только $4l$.

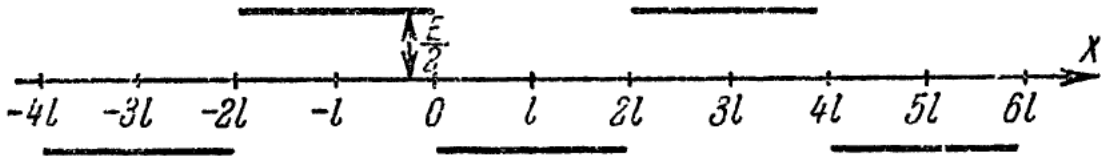


Рис. 131.

Сопоставляя все сказанное, нетрудно видеть, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают и имеют график, изображенный на рис. 131.

Для получения значений v и i мы двигаем этот график со скоростью a налево и направо и берем полусумму ординат, умноженную на $e^{-\mu t}$, для v и полуразность, умноженную на $\frac{1}{a} e^{-\mu t}$, для i.

На рис. 132 изображен график напряжения на конце $x = l$, причем к свободному колебанию v прибавлено установившееся $v_2 = E$. Буква $\tau = \frac{4l}{a}$ обозначает период свободного колебания.

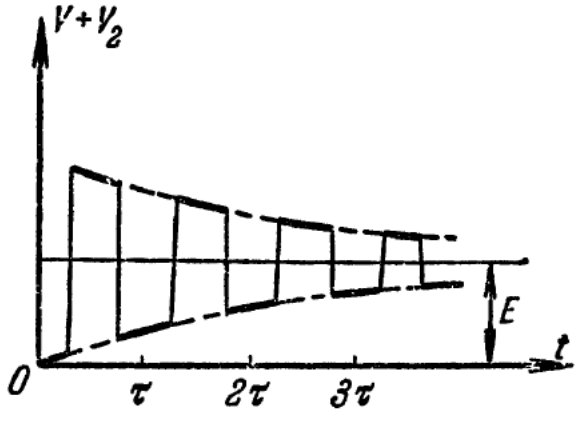


Рис. 132.

Если на конце $x = l$ включены омическое сопротивление r_l, самоиндукция λ_l и емкость γ_l, то условие (4) дает следующее соотношение для продолжения функции $\varphi_2(x)$ в промежуток $(l, 2l)$:

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l - at) + \varphi_2(l + at)] = \left[r_l + \lambda_l \frac{d}{dt}\right]\left\{\frac{e^{-\mu t}}{a}[\varphi_1(l - at) - \varphi_2(l + at)]\right\}. \quad (33)$$

Если заменить в нем аргумент at на x, то оно превращается в дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции

$$\Phi(x) = \varphi_2(l + x) \text{ при } 0 < x < l.$$

Аналогичный результат мы получаем, пользуясь предельным условием на конце $x = 0$, и для продолжения $\varphi_1(x)$ в промежуток $(-l, 0)$.

3. В конце $x=l$ включено только омическое сопротивление r_l. Равенство (33) заменяется тогда следующим:

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l-at)+\varphi_2(l+at)]=r_l\frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(l-at)-\varphi_2(l+at)],$$

откуда, вводя x вместо at, определяем $\varphi_2(l+x)$:

$$\varphi_2(l+x)=q\varphi_1(l-x), \quad \text{где } q=\frac{r_l-\alpha}{r_l+\alpha}. \tag{34}$$

Таким образом в данном случае при отражении в конце $x=l$ волна умножается на множитель q. Очевидно, что $|q|\leqslant 1$, т. е. волна уменьшается по абсолютному значению, и происходит *поглощение*. При $r_l=\alpha$ этот множитель обращается в нуль, и происходит *полное поглощение волны*; при $r_l=\infty$ множитель $q=1$, и мы получаем отражение волны без изменения, что и следовало ожидать, так как этот случай равносилен открытому (не замкнутому) контуру.

Продолжив таким путем $\varphi_2(x)$ в промежуток $(l, 2l)$ и соответственным образом $\varphi_1(x)$ в промежуток $(-l, 0)$, мы по формуле (34) продолжаем $\varphi_2(x)$ в промежуток $(2l, 3l)$ и т. д.

При этом, конечно, мы уже не получаем периодической функции, и если $|q|<1$, то при последовательных отражениях будет происходить все более и более сильное поглощение волны. Функция $\varphi_2(x)$ будет определена таким образом при $x>0$, функция же $\varphi_1(x)$ — при $x<l$; но это только нам и нужно, так как аргументы $(x-at)$ и $(x+at)$, от которых зависят $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, как раз удовлетворяют этим неравенствам.

198. Обобщенное уравнение колебаний струны. Мы рассмотрели телеграфное уравнение в частном случае $\delta=0$. Прежде чем переходить к общему случаю, исследуем теоретически обобщенное волновое уравнение пока в линейном случае

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial v}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial t}+a_3 v, \tag{35}$$

причем первый коэффициент a^2 мы считаем положительным, а остальные — любых знаков. Введем вместо v новую искомую функцию u по формуле

$$v=e^{\alpha t+\beta x}u \tag{36}$$

и покажем, как и выше, что всегда можно выбрать числа α и β так, чтобы в уравнении для u пропали члены, содержащие частные производные первого порядка. Подставляя выражение (36) в уравнение (35), сокращая на $e^{\alpha t+\beta x}$ и приводя подобные члены, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(a_1+2a^2\beta)\frac{\partial u}{\partial x}+(a_2-2\alpha)\frac{\partial u}{\partial t}+$$
$$+(a_3+a^2\beta^2+a_1\beta+a_2\alpha-\alpha^2)u$$

и, полагая $\alpha=a_2:2$; $\beta=-a_1:2a^2$, придем к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2 u, \tag{37}$$

причем коэффициент c^2 может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. мы должны считать c или положительным числом или чисто мнимым.

Будем решать уравнение (37) для бесконечной оси OX при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x). \tag{38}$$

Вместо поставленной задачи, определяемой формулами (37) и (38), будем решать другую задачу, определяемую следующим уравнением и начальными условиями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{39$_1$}$$

$$w\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w(x)\, e^{\frac{c}{a} y}. \tag{39$_2$}$$

Решение этой задачи мы можем непосредственно написать, согласно формуле (80) из [185]:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{at}} \frac{\omega(\alpha)\, e^{\frac{c}{a}\beta}\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}},$$

где C_{at} — круг с центром (x, y) и радиусом at. Вводя вместо α и β новые переменные $\alpha' = \alpha - x$ и $\beta' = \beta - y$, преобразуем написанный интеграл в интеграл по кругу C'_{at} с центром в начале и радиусом at:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C'_{at}} \frac{\omega(\alpha' + x)\, e^{\frac{c}{a}(\beta' + y)}\, d\alpha'\, d\beta'}{\sqrt{a^2t^2 - \alpha'^2 - \beta'^2}}$$

или, вынося $e^{\frac{c}{a} y}$ за знак интеграла, можем написать

$$w(x, y, t) = e^{\frac{c}{a} y}\, u(x, t), \tag{40}$$

где второй множитель

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C'_{at}} \frac{\omega(\alpha' + x)\, e^{\frac{c}{a}\beta'}\, d\alpha'\, d\beta'}{\sqrt{a^2t^2 - \alpha'^2 - \beta'^2}} \tag{41}$$

уже не зависит, очевидно, от y. Покажем, что выражение (41) и решает нашу основную задачу, т. е. удовлетворяет уравнению (37) и начальным условиям (38). Действительно, w удовлетворяет уравнению (39$_1$), и, подставляя выражение (40) в уравнение (39$_1$), получим

после сокращения на $e^{\frac{c}{a}y}$ уравнение (37) для u. Начальные условия для u получаются непосредственно из начальных условий (39_2) для w и формулы (40). Итак, решение уравнения (37) при начальных условиях (38) дается формулой (41). Преобразуем выражение, стоящее в правой части этой формулы, к другому виду.

Приводим двойной интеграл по кругу C'_{at} к двум квадратурам

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\int_{-at}^{+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}}\frac{e^{\frac{c}{a}\beta'}}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}}\,d\beta'\right]\omega(\alpha'+x)\,d\alpha'. \quad (42)$$

Вводя во внутреннем интеграле вместо β' новую переменную интегрирования φ по формуле: $\beta'=\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi$, приведем этот интеграл к виду

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi}\,d\varphi$$

или, вводя новую трансцендентную функцию $I(z)$, определяемую интегралом, зависящим от параметра z:

$$I(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{z\sin\varphi}\,d\varphi, \quad (43)$$

можем написать формулу (42) в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\right)\omega(\alpha'+x)\,d\alpha',$$

или, вводя переменную интегрирования $\alpha=\alpha'+x$:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\omega(\alpha)\,d\alpha.$$

Дифференцируя полученное решение по t, получим, как и в [184], новое решение $u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$ уравнения (37), удовлетворяющее уже не

начальным условиям (38), а условиям

$$u\Big|_{t=0} = \omega(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{44}$$

Для того чтобы получить решение уравнения (37), удовлетворяющее начальным условиям общего вида

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \tag{45}$$

достаточно в начальных условиях (38) взять $\omega(x) = \varphi_1(x)$, в начальных условиях (44) взять $\omega(x) = \varphi(x)$ и сложить соответствующие выражения для u, что приведет нас к формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha\right]. \tag{46}$$

Производя дифференцирование по t по верхнему и нижнему пределам, а также под знаком интеграла, и, принимая во внимание, что $I(0) = 1$ в силу (43), можем переписать формулу (46) в виде

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \\ + \frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}} I'\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha, \tag{47}$$

где через $I'(z)$ мы обозначили производную от $I(z)$ по аргументу z.

Установим теперь связь между функцией $I(z)$ и функцией Бесселя с нулевым значком [48]:

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{48}$$

Разлагая $e^{z\sin\varphi}$ в степенной ряд

$$e^{z\sin\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \sin^n\varphi}{n!}$$

и интегрируя этот ряд почленно по промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, что возможно ввиду равномерной сходимости ряда, получим

$$I(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi.$$

При нечетном n написанные интегралы обращаются, очевидно, в нуль, а при четном $n=2s$ мы имеем [**I, 100**]

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=\frac{(2s-1)(2s-3)\ldots1}{2s\cdot(2s-2)\ldots2}\,\pi,$$

откуда следует

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s}}{(2s)!}\cdot\frac{(2s-1)(2s-3)\ldots1}{2s\cdot(2s-2)\ldots2},$$

или

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(s!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}. \tag{49}$$

Сравнивая это разложение с (48), мы получаем

$$I(z)=J_0(iz). \tag{50}$$

199. Неограниченная цепь в общем случае. Переходим теперь к рассмотрению телеграфного уравнения для неограниченной цепи. Предварительно заметим, что уравнение (21), которое мы получили в [**196**] для вспомогательной функции w, будет также уравнением, которому должны удовлетворять в отдельности напряжение v и ток i.

Действительно, вернемся к основным уравнениям (1) и (2) и исключим i. Для этого продифференцируем уравнение (1) по x и подставим вместо $\frac{\partial i}{\partial x}$ его выражение, получаемое из уравнения (2)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x}+R\frac{\partial i}{\partial x}=0,$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)-R\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)=0.$$

Для v получаем уравнение (21)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (LA + RC)\frac{\partial v}{\partial t} - RAv = 0. \tag{51}$$

Если бы мы стали исключать из уравнений (1) и (2) напряжение v, то получили бы для i такое же уравнение. Определив v, мы можем найти i так, чтобы оно удовлетворяло уравнениям (1) и (2). Например, пользуясь уравнением (2), получим

$$i = -\int \left(C\frac{\partial v}{\partial t} + Av\right) dx + B(t), \tag{52}$$

где интегрирование совершается по x при постоянном t и $B(t)$ — произвольная пока функция от t. Подставляя это выражение i в уравнение (1) и дифференцируя по параметру t под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \int \left(LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + LA\frac{\partial v}{\partial t}\right) dx - \int \left(RC\frac{\partial v}{\partial t} + RAv\right) dx + \\ + LB'(t) + RB(t) = 0. \tag{53}$$

Дифференцируя сумму первых трех слагаемых по x, в силу (51) получим нуль, т. е. эта сумма есть некоторая известная функция одного t, и для определения $B(t)$ получаем линейное уравнение первого порядка. Произвольная постоянная, получаемая при его интегрировании, определяется обычно из начального условия.

Уравнение (51), как и выше [196], приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u \tag{54}$$

при помощи подстановки

$$v(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t), \tag{55}$$

где

$$\mu = \frac{LA + RC}{2LC}, \qquad c = \frac{|LA - RC|}{2LC}. \tag{56}$$

Если при $t = 0$ нам заданы вдоль цепи v и i, то тем самым мы знаем $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial i}{\partial x}$ при $t = 0$, а уравнения (1) и (2) дадут нам $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial i}{\partial t}$ при $t = 0$. Таким образом, мы можем считать, что наряду с уравнением (51) мы имеем обычные начальные условия

$$v\Big|_{t=0} = \Phi(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Psi(x). \tag{57}$$

Пользуясь (55), мы получаем следующие начальные условия для u:

$$u\Big|_{t=0} = \Phi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mu\Phi(x) + \Psi(x). \tag{58}$$

Применяя для u формулу (47) и принимая во внимание (55), получим окончательно

$$v(x, t) = \frac{1}{2} e^{-\mu t} \left\{ \Phi(x - at) + \Phi(x + at) + \right.$$
$$+ \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} [\mu\Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)] I\left(\frac{c}{a} \sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2}\right) d\alpha +$$
$$\left. + \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2}} I'\left(\frac{c}{a} \sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2}\right) \Phi(\alpha)\, d\alpha \right\}, \quad (59)$$

где μ и c указаны выше, и $a = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Здесь, как и в случае колебания струны, мы имеем определенную скорость a распространения возмущения, так что если функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, дающие начальное возмущение, отличны от нуля только в некотором конечном промежутке $p \leqslant x \leqslant q$, и мы применим формулу (57) к точке x, где $x > q$, то $v(x, t)$ будет равно нулю до момента времени $t = \dfrac{1}{a}(x - q)$. Существенной разницей по сравнению со струной будет тот факт, что после прохождения заднего фронта начального возмущения функция $v(x, t)$ не обратится ни в нуль, ни в постоянную, но будет функцией x и t. Действительно, если $t > \dfrac{1}{a}(x - p)$, то слагаемые формулы (59), стоящие вне знака интеграла, будут равны нулю, а интегралы останутся, и промежутком интегрирования будет постоянный промежуток (p, q). Но все же переменные x и t будут входить под знаки интегралов в качестве параметров.

Если, например, при $t = 0$ в цепи отсутствует ток, а потенциал v определяется функцией $\Phi(x)$, то, в силу уравнения (2), мы имеем

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{A}{C} \Phi(x). \quad (60)$$

Если считать $A = 0$, т. е. пренебречь утечкой, то справа будет нуль.

200. Способ Фурье для ограниченной цепи. Нетрудно применить способ Фурье для интегрирования уравнения (51) при заданных начальных и предельных условиях в случае ограниченной цепи. Положим, что один конец цепи $x = 0$ поддерживается при заданном постоянном напряжении E, а на другом конце $v = 0$, т. е. имеются предельные условия

$$v|_{x=0} = E \text{ и } v|_{x=l} = 0. \quad (61)$$

Положим, кроме того, что в начальный момент $t = 0$ в цепи нет ни напряжения, ни тока, т. е.

$$v|_{t=0} = 0 \text{ и } i|_{t=0} = 0 \quad (62)$$

при $0 < x < l$.

Уравнения (1) и (2) показывают нам, что при этом

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \quad (63)$$

Таким образом нам надо интегрировать уравнение (51) при предельных условиях (61) и при начальных условиях

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (0 < x < l). \quad (64)$$

Составим сначала решение уравнения (51) $v = F(x)$, зависящее только от x, которое бы удовлетворяло предельным условиям (61). Для $F(x)$ получаем уравнение

$$F''(x) - b^2 F(x) = 0 \qquad (b^2 = RA).$$

В примере из [195] мы нашли решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (61), а именно

$$F(x) = E \frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}. \tag{65}$$

Введем теперь вместо $v(x, t)$ новую искомую функцию $w(x, t)$ по формуле

$$w(x, t) = v(x, t) - F(x). \tag{66}$$

Для $w(x, t)$ мы имеем то же уравнение (51), однородные предельные условия

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \tag{67}$$

и начальные условия

$$w|_{t=0} = -F(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{68}$$

Для сокращения письма перепишем уравнение (51) для w в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial w}{\partial t} - b^2 w = 0, \tag{69}$$

где

$$a^2 = LC, \quad 2h = LA + RC, \quad b^2 = RA. \tag{70}$$

Дальше идет обычное применение метода Фурье. Ищем решение уравнения (69) в виде произведения функции только от x на функцию только от t:

$$w = XT.$$

Подставляя в уравнение (69) и отделяя переменные, получим

$$\frac{X''}{X} = \frac{a^2 T'' + 2hT' + b^2 T}{T} = -\frac{m^2\pi^2}{l^2},$$

где m^2 — пока произвольная постоянная. Имеем два линейных уравнения с постоянными коэффициентами

$$X'' + \frac{m^2\pi^2}{l^2} X = 0,$$

$$a^2 T'' + 2hT' + \left(b^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) T = 0.$$

Принимая во внимание предельные условия (67), берем решение первого уравнения

$$X_m = \sin \frac{m\pi x}{l} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

и считаем m целым положительным числом. Уравнение для T имеет общее решение

$$T_m = A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t},$$

где A_m и A'_m — произвольные постоянные, а α_m и α'_m — корни уравнения

$$a^2 l^2 \alpha^2 + 2hl^2 \alpha + (b^2 l^2 + m^2\pi^2) = 0, \tag{71}$$

причем мы считаем, что постоянные R, L, C и A у цепи таковы, что это уравнение при всяком целом m имеет различные корни. Таким образом получаем бесчисленное множество решений, удовлетворяющих предельным условиям

$$w_m = (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin \frac{m\pi x}{l}. \tag{72}$$

Берем сумму этих решений

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{73}$$

и подбираем постоянные A_m и A'_m так, чтобы удовлетворялись начальные условия (68). Это дает нам

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} (A_m + A'_m) \sin \frac{m\pi x}{l} = -F(x), \\ &\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m) \sin \frac{m\pi x}{l} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < l)$$

Определяя обычным образом коэффициенты Фурье, получим два уравнения для A_m и A'_m:

$$\left.\begin{aligned} &A_m + A'_m = -\frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx, \\ &\alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Вставляя под знак интеграла функцию (65), мы сможем выполнить квадратуру и получим

$$\frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = \frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2} E.$$

Решая систему двух уравнений (74), будем иметь

$$A_m = \frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2} E \frac{\alpha'_m}{\alpha_m - \alpha'_m}, \qquad A'_m = -\frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2} E \frac{\alpha_m}{\alpha_m - \alpha'_m}.$$

Подставив это в формулу (73), получим

$$w = E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2} \frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t} - \alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m - \alpha'_m} \sin \frac{m\pi x}{l}. \tag{75}$$

Корни уравнения (71) будут или вещественные отрицательные, или мнимые сопряженные с отрицательной вещественной частью. Во всяком случае решение (75) будет затухающим при возрастании t. Оно определяет переходный процесс от пустой цепи к установившемуся состоянию, определяемому функцией (65). Формула (66) дает нам окончательное выражение напряжения:

$$v = E \frac{\operatorname{sh} b(l - x)}{\operatorname{sh} bl} + E \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2} \frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t} - \alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m - \alpha'_m} \sin \frac{m\pi x}{l}. \tag{76}$$

Решая квадратное уравнение (71), получим для его корней выражения вида

$$\alpha_m = -\nu + k_m, \qquad \alpha'_m = -\nu - k_m, \tag{77}$$

где

$$\nu = \frac{h}{a^2}, \quad k_m = \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + m^2\pi^2)}. \tag{78}$$

Подставляя в (76), можем представить эту формулу в виде

$$v = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - Ee^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{79}$$

Определим теперь i по способу, указанному в [199]. Уравнение (2) дает нам

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -AE\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} + AEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\sin\frac{m\pi x}{l} + CEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2 l^2 + m^2\pi^2}\left(k_m - \frac{\nu^2}{k_m}\right)\operatorname{sh} k_m t \sin\frac{m\pi x}{l},$$

или, замечая, что, в силу (78),

$$\nu^2 - k_m^2 = \frac{b^2 l^2 + m^2\pi^2}{a^2 l^2},$$

получим, интегрируя по x и принимая во внимание, что $a^2 = LC$:

$$i = \frac{AE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2AELe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2 l^2 + m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\cos\frac{m\pi x}{l} + \frac{2E}{Ll}e^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\cos\frac{m\pi x}{l} + B(t). \tag{80}$$

Подставляя в уравнение (1), получаем уравнение для определения $B(t)$:

$$LB'(t) + RB(t) = 0,$$

откуда

$$B(t) = B_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{81}$$

где B_0 — произвольная постоянная, которую надо определить из того условия, что i при $t = 0$ равно нулю вдоль всей цепи. Подставляя выражение (81) в формулу (80) и полагая затем $t = 0$ и $i = 0$, получим

$$0 = \frac{AE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2AEL\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2 l^2 + m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{l} + B_0. \tag{82}$$

Но, разлагая первое слагаемое, стоящее справа, в ряд Фурье, в промежутке $0<x<l$ по косинусам, мы получаем

$$\frac{AE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}=\frac{AE}{lb^2}+2AEl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{l}\quad(0<x<l),$$

и условие (82) дает

$$B_0=-\frac{AE}{lb^2}=-\frac{E}{Rl},$$

так что

$$B(t)=-\frac{E}{Rl}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Подставляя это выражение $B(t)$ в формулу (80), получаем окончательное выражение силы тока.

Подробное исследование приведенного метода решения можно найти в статье акад. А. Н. Крылова «О распространении тока по кабелю» (Журнал прикладной физики, том VI, вып. 2, стр. 66, 1929).

201. Обобщенное волновое уравнение. В [198] мы рассмотрели обобщенное волновое уравнение в линейном случае, т. е. с двумя независимыми переменными. Пользуясь тем же методом, можно рассмотреть обобщенное волновое уравнение с тремя и четырьмя независимыми переменными. Для упрощения дальнейших формул мы будем считать, что в волновом уравнении скорость $a=1$. Чтобы из полученных ниже формул перейти к формулам с любым a, достаточно заменить в них t на at.

Рассмотрим для безграничной плоскости уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+c^2u \tag{83}$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x,\ y). \tag{84}$$

Поставим вместо этой задачи — новую, а именно задачу интегрирования волнового уравнения

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}$$

с начальными условиями

$$w\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x,\ y)\,e^{cz}.$$

Эта задача непосредственно решается формулой Пуассона:

$$w=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x+t\sin\theta\cos\varphi,\ y+t\sin\theta\sin\varphi)\,e^{c(z+t\cos\theta)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Мы можем переписать эту формулу в виде

$$w(x,\ y,\ z,\ t)=e^{cz}u(x,\ y,\ t),$$

где

$$u(x,\ y,\ t)=$$

$$=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x+t\sin\theta\cos\varphi,\ y+t\sin\theta\sin\varphi)\,e^{ct\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \quad (85)$$

и, совершенно так же, как и в [198], доказывается, что эта функция удовлетворяет уравнению (83) и начальным условиям (84). Преобразуем теперь формулу (85) к более простому виду. Введем вместо θ новую переменную интегрирования ρ по формуле: $t\cos\theta=\rho$, откуда

$$t\sin\theta\,d\theta=-d\rho \quad \text{и} \quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{t^2}}.$$

Интегрирование по θ в формуле (85) в новой переменной будет иметь вид

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{+t}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\,e^{c\rho}\,d\rho,$$

или, разбивая промежуток интегрирования на два: $(-t,\ 0)$ и $(0,\ t)$ и заменяя в первом промежутке ρ на $(-\rho)$, мы сможем записать последний интеграл в виде

$$\frac{2}{t}\int_0^{t}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\operatorname{ch}c\rho\,d\rho,$$

и таким образом формула (85) запишется в виде

$$u(x,\ y,\ t)=$$

$$=\int_0^{t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\,d\varphi\right]\operatorname{ch}c\rho\,d\rho.$$

Интегрирование по φ в этой формуле дает нам среднее арифметическое значений функций $\omega(x,\ y)$ по окружности на плоскости XOY с центром $(x,\ y)$ и радиусом $\sqrt{t^2-\rho^2}$. Обозначая это среднее арифметическое через $T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x,\ y)\}$, мы можем написать окончательно формулу (85) в виде

$$u(x,\ y,\ t)=\int_0^{t}T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x,\ y)\}\operatorname{ch}c\rho\,d\rho. \quad (86)$$

Заметим, что если c — чисто мнимое $c=c_1 i$, то $\operatorname{ch}c\rho=\cos c_1\rho$. Дифференцируя построенное решение по t, получим решение $u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$

уравнения (83), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_1 = \Big|_{t=0} = \omega(x, y), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Совершенно так же для интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c^2 u \tag{87}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x, y, z) \tag{88}$$

надо использовать формулу (82_2) из [186] при $n=4$, заменяя ω на $\omega(x_2, x_3, x_4)e^{cx_1}$. Проделывая некоторые простые преобразования, мы получим решение уравнения (87) при начальных условиях (88) в виде:

$$u = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \rho^2 J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})\, T_\rho\{\omega(x, y, z)\}\, d\rho,$$

где $T_\rho\{\omega(x, y, z)\}$ есть, как всегда, среднее от функции $\omega(x, y, z)$ по сфере с центром (x, y, z) и радиусом ρ.

§ 19. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

202. Гармонические функции. В настоящем параграфе мы рассмотрим уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где U есть функция от x, y и z. Уравнение (1), как мы уже упоминали, называется *уравнением Лапласа*. Левая часть уравнения (1) обозначается, как мы видели выше, символом ΔU и называется *оператором Лапласа* над функцией U. В [90] мы видели, что уравнению (1) должен удовлетворять потенциал сил тяготения или сил взаимодействия электрических зарядов во всех точках пространства, находящихся вне притягивающих масс или вне зарядов, создающих поле.

Уравнение вида (1) встречалось также в [126]. Этому уравнению должен удовлетворять потенциал скорости невихревого течения несжимаемой жидкости. В [129] мы показали, что уравнению (1) должна удовлетворять температура в однородном теле, если теплообмен является стационарным, т. е. температура U зависит только от места, но не от времени. Точно так же в [130] мы получили уравнение Лапласа при рассмотрении стационарного электромагнитного поля.

Если функция U не зависит от одной из координат, например, от z, то уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

В этом случае U сохраняет одно и то же значение на всякой прямой, параллельной оси Z, или, иначе говоря, картина значений U в плоскостях, параллельных плоскости XOY, одна и та же, так что достаточно рассмотреть лишь плоскость XOY.

Функция, непрерывная со своими производными до второго порядка в некотором объеме (трехмерной области) (D) и удовлетворяющая там уравнению (1), называется *гармонической в* (D) *функцией*. Такой термин применяется и в отношении уравнения (2) для области в плоскости XOY. В дальнейшем мы выясним некоторые свойства гармонических функций.

Обычно в задачах математической физики функция U, кроме уравнения (1), должна подчиняться некоторому предельному условию. Начальные условия в данном случае, конечно, отсутствуют. Основной предельной задачей для уравнения (1) является следующая задача: определить функцию, гармоническую в области (D), если заданы ее значения на поверхности (S) этой области. Задача эта называется обычно *задачей Дирихле*. В формулировке задачи под значениями U на поверхности (S) подразумеваются те предельные значения, которые получает U при приближении изнутри области (D) к точкам поверхности (S). Более точно можно формулировать задачу так: ищется функция U, гармоническая внутри (D) и непрерывная в области (D), включая ее границу (S), причем заданы значения U на (S). Эта заданная на (S) функция должна быть, конечно, непрерывной. Будем для простоты считать, что граница (D) есть одна замкнутая поверхность (S). Заметим, что область (D) может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае она лежит вне (S). В случае конечной области мы имеем *внутреннюю задачу Дирихле*, а в случае бесконечной — *внешнюю задачу Дирихле*. В последней задаче ставится еще то условие, чтобы функция стремилась к нулю при беспредельном удалении точки, или, как говорят, функция должна обращаться в нуль на бесконечности. Предельное условие в задаче Дирихле записывают в виде

$$U|_{(S)}=f(M), \tag{3}$$

где $f(M)$ — заданная непрерывная функция на поверхности (S) и M — переменная точка этой поверхности. Аналогично формулируется внутренняя задача Дирихле и применительно к уравнению (2) для плоской области, причем предельным условием является задание U на контуре области. В случае внешней задачи Дирихле на плоскости требуется, чтобы функция имела конечный предел при беспредельном удалении точки.

Укажем еще на один тип предельного условия, а именно на тот случай, когда на поверхности (S) задается значение нормальной производной

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(S)} = f(M). \tag{4}$$

Задача нахождения гармонической функции, удовлетворяющей такому предельному условию, называется *задачей Неймана*. Она встречается в гидродинамике при рассмотрении движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Предельное условие (4) выражает при этом совпадение нормальной составляющей скорости точки M поверхности (S) тела и жидкой частицы, прилегающей к точке M. Задача Неймана может быть формулирована и для уравнения (2).

Прежде чем переходить к выяснению свойств гармонических функций, мы приведем вывод некоторых формул, необходимых нам в дальнейшем.

203. Формула Грина. Пусть (D) — некоторое ограниченное тело, (S) — его поверхность, U и V — две функции, непрерывные и имеющие непрерывные производные до второго порядка в области (D) вплоть до его поверхности (S). Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(D)} \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V \, dv.$$

Применяя очевидное тождество

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

и два аналогичных тождества для $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, можем переписать интеграл в виде

$$I = \iiint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] dv -$$

$$- \iiint\limits_{(D)} U \Delta V \, dv.$$

Преобразуем первое из слагаемых в правой части по формуле Остроградского

$$I = \iint\limits_{(S)} \left[U\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, X) + U\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, Y) + \right.$$

$$\left. + U\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, Z)\right] dS - \iiint\limits_{(D)} U \Delta V \, dv$$

или [120]:

$$I=\iint\limits_{(S)} U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)} U\Delta V\,dv,$$

где (n) — направление нормали в точках поверхности (S), внешней по отношению к телу (D).

Таким образом мы приходим к так называемой *предварительной формуле Грина*

$$\iiint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv=$$

$$=\iiint\limits_{(D)}\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V\,dv=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V\,dv. \qquad (5)$$

Левая часть этого равенства не меняется при перестановке функций U и V, а потому то же относится и к правой части, т. е. мы можем написать

$$\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V\,dv=\iint\limits_{(S)}V\frac{\partial U}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}V\Delta U\,dv,$$

откуда и получается *формула Грина в окончательной форме*

$$\iiint\limits_{(D)}(U\Delta V-V\Delta U)\,dv=\iint\limits_{(S)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS. \qquad (6)$$

Иногда пользуются не внешней, а внутренней нормалью. При этом надо только изменить знаки у производных по нормали в правой части формулы, и для случая внутренней нормали формула Грина будет выглядеть так

$$\iiint\limits_{(D)}(U\Delta V-V\Delta U)\,dv=\iint\limits_{(S)}\left(V\frac{\partial U}{\partial n_i}-U\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)dS, \qquad (6_1)$$

где n_i — направление нормали внутрь (D).

Область (D) может быть ограничена и несколькими поверхностями (S). Формула Грина применима и в этом случае, но только поверхностный интеграл, стоящий в правой части этой формулы, надо брать по всем поверхностям, ограничивающим область (D). Заметим, что при этом нормаль (n), внешняя по отношению к объему (D), будет на поверхностях, ограничивающих этот объем изнутри, направлена внутрь поверхностей.

Как мы упоминали, при выводе формулы Грина (6) достаточно потребовать, чтобы функции U и V были непрерывны вместе с производными до второго порядка вплоть до (S). Необходимо, конечно,

предъявить некоторые требования и к поверхности (S). Можно при этом сослаться на те условия, при которых была выведена формула Остроградского [66]. Эти условия сводились к следующему: поверхность (S) может быть разбита на конечное число кусков так, что на каждом куске, вплоть до его границы, имеется непрерывно меняющаяся касательная плоскость. Такие поверхности называются обычно кусочно-гладкими. Ребра поверхности, являющиеся границами упомянутых кусков, должны быть кусочно-гладкими линиями. Это условие, налагаемое на поверхность, может быть выражено и в аналитической форме.

Следствием формулы Грина является важная в приложениях формула, дающая выражение значения функции в любой точке M_0 внутри (D) в виде суммы некоторого поверхностного и некоторого объемного интеграла. Пусть $U(M)$ — функция, определенная в области (D) и непрерывная с производными до второго порядка вплоть до (S).

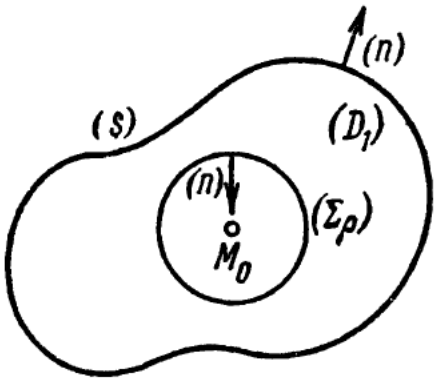


Рис. 133.

Применим формулу Грина к этой функции и к функции $V=\frac{1}{r}$, где r — расстояние от определенной точки M_0, лежащей внутри (D), до переменной точки M. Функция $V=\frac{1}{r}$ обращается в бесконечность, если точка M совпадает с M_0, и мы не можем применять формулу Грина ко всему телу (D). Выделим из этого тела малую сферу с центром M_0 и малым радиусом ρ и обозначим через (D_1) оставшуюся часть тела (D) и через (Σ_ρ) — поверхность выделенной сферы (рис. 133). В области (D_1) функции U и $V=\frac{1}{r}$ обладают требуемым свойством непрерывности, и, применяя к этой области формулу Грина, мы получим

$$\int\int\limits_{(D_1)}\int\left[U\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta U\right]dv=$$

$$=\int\int\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\int\int\limits_{(\Sigma_\rho)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS, \qquad (7)$$

причем интегрирование совершается по обеим поверхностям (S) и (Σ_ρ), ограничивающим тело (D_1). Но, как мы видели, функция $V=\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\Delta\frac{1}{r}=0$ [131]. Кроме того,

на сфере (Σ_ρ) нормаль n направлена внутрь сферы прямо противоположно направлению радиуса r, так что производная по нормали под знаком интеграла по (Σ_ρ) есть взятая с обратным знаком производная по r. Принимая во внимание все сказанное, мы можем переписать формулу (7) в виде

$$\iiint\limits_{(D_1)} \frac{\Delta U}{r}\, dv + \iint\limits_{(S)} \left[U \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right] dS + \iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U\, dS - \iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\, dS = 0. \qquad (8)$$

Будем теперь стремить радиус ρ выделенной сферы к нулю. При этом первое из слагаемых в написанной формуле будет стремиться к объемному интегралу по всему телу (D). Второе слагаемое от ρ не зависит. Покажем, что третье из написанных слагаемых стремится к пределу $4\pi U(M_0)$. Принимая во внимание, что на (Σ_ρ) величина r имеет постоянное значение ρ, можем написать

$$\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U(M)\, dS = \frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{(\Sigma_\rho)} U(M)\, dS.$$

Применяя теорему о среднем, будем иметь

$$\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U(M)\, dS = \frac{1}{\rho^2} U(M_\rho) \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi U(M_\rho),$$

где M_ρ — некоторая точка на поверхности сферы (Σ_ρ). Эта точка стремится к M_0 при $\rho \to 0$, откуда видно, что написанное выше выражение стремится к $4\pi U(M_0)$. Точно так же применение теоремы о среднем к последнему слагаемому дает

$$-\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{\rho}\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{M_\rho} 4\pi\rho^2 = -\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{M_\rho} 4\pi\rho.$$

Производные первого порядка функции U по любому направлению при стремлении M_ρ к M_0 остаются ограниченными, так как по предположению функция U везде внутри (D) имеет непрерывные производные до второго порядка. Множитель $4\pi\rho$ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Отсюда видно, что последнее слагаемое в формуле (8) стремится к нулю. Окончательно формула (8) в пределе даст нам

искомое следствие формулы Грина

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{dU}{r}\,\Delta v + \iint\limits_{(S)} \left[U \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right] dS + 4\pi U(M_0) = 0$$

или

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(D)} \frac{\Delta U}{r}\,dv. \quad (9)$$

Заметим еще раз, что эта формула справедлива для любой функции U, непрерывной в области (D) вплоть до S вместе со своими производными до второго порядка.

Совершенно аналогичные формулы имеют место и для случая плоскости. Мы приведем их, не останавливаясь на их доказательстве. Пусть (B) — некоторая область на плоскости, (l) — контур этой области и n — направление нормали к этому контуру, внешней по отношению к (B). *Оператор Лапласа* для случая плоскости имеет в декартовых координатах вид:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Аналогично формуле (6), мы будем иметь на плоскости формулу

$$\iint\limits_{(B)} (U\Delta V - V\Delta U)\,dS = \int\limits_{(l)} \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds. \quad (10)$$

В отношении формулы (9) аналогия не будет полной, а именно при выводе формулы (9) было существенным, что функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Для случая плоскости это не будет иметь места, и вместо функции $\frac{1}{r}$ решение уравнения Лапласа надо будет брать в виде $\lg r$ или $\lg\frac{1}{r} = -\lg r$, где r — расстояние от какой-либо постоянной точки плоскости до переменной точки M. Таким образом вместо формулы (9) мы на плоскости будем иметь формулу

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(l)} \left[U\frac{\partial(\lg r)}{\partial n} - \lg r\frac{\partial U}{\partial n}\right] ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(B)} \Delta U \cdot \lg r\,dS, \quad (11)$$

где M_0 — любая фиксированная точка внутри (B) и r — расстояние переменной точки M до точки M_0.

Заметим, что тройной интеграл в формуле (9) есть интеграл несобственный, так как подынтегральная функция обращается в бес-

конечность в точке M_0. Но этот интеграл, очевидно, сходится, так как подынтегральная функция по абсолютной величине меньше выражения $\frac{A}{r^p}$ при $p=1$. Аналогичное замечание имеет место и по отношению к формуле (11).

204. Основные свойства гармонических функций. Рассмотрим функцию U, гармоническую в ограниченной области (D) с поверхностью (S). Считая, что U непрерывна вместе с производными второго порядка вплоть до (S) и применяя формулу Грина (6) к этой функции U и к гармонической функции $V\equiv 1$, получим, в силу $\Delta V=\Delta(1)=0$ и $\frac{\partial(1)}{\partial n}=0$

$$\iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS=0, \tag{12}$$

т. е. имеем первое свойство гармонической функции: *интеграл от нормальной производной гармонической функции по поверхности области равен нулю.*

Если применим к гармонической функции U формулу (9), то, в силу $\Delta U=0$, получим

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(S)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS. \tag{13}$$

Это дает нам второе свойство гармонической функции: *значение гармонической функции в любой точке внутри области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на поверхности области формулой* (13).

Отметим, что интегралы в формулах (12) и (13) не содержат производных второго порядка функции U, и для применимости этих формул достаточно предположить, что гармоническая функция непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до (S). Чтобы убедиться в этом, достаточно несколько сжать поверхность (S), написать формулы (12) и (13) для сжатой области (D'), в которой имеется непрерывность и производных второго порядка вплоть до поверхности, и затем перейти к пределу, расширяя (D') до (D). Сжатие можно произвести, например, откладывая на внутренней нормали к (S) в каждой ее точке один и тот же малый отрезок длины δ. Концы этих отрезков образуют новую (сжатую) поверхность. При этом поверхность (S) должна быть такой, что описанное преобразование при всех достаточно малых δ приводит к поверхности, которая не пересекает сама себя и является кусочно-гладкой [**203**]. Этот вопрос будет подробно изложен в томе IV.

Применим формулу (13) к частному случаю области, а именно к сфере с центром в M_0 и радиусом R, считая, конечно, что

функция U гармоническая в этой сфере и непрерывна с производными первого порядка вплоть до ее поверхности (Σ_R).

В данном случае направление внешней нормали n совпадает с направлением радиуса сферы, так что мы будем иметь

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},$$

и формула (13) дает

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{1}{r^2}U\right)dS.$$

Но на поверхности сферы Σ_R величина r имеет постоянное значение R, так что

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(\Sigma_R)}U\,dS,$$

или, в силу (12), будем иметь окончательно

$$U(M_0)=\frac{\iint\limits_{(\Sigma_R)}U\,dS}{4\pi R^2}. \tag{14}$$

Формула эта выражает третье свойство гармонической функции: *значение гармонической функции в центре сферы равно среднему арифметическому значению этой функции на поверхности сферы*, т. е. *равно интегралу от значений функции по поверхности сферы, деленному на площадь этой поверхности.*

Из этого свойства почти с очевидностью вытекает следующее четвертое свойство гармонической функции:

Функция, гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная. Приведем подробное доказательство этого утверждения. Пусть $U(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке M_1 той области D, где $U(M)$ — гармоническая функция. Построим сферу Σ_ρ с центром M_1 и радиусом ρ, принадлежащую D, применим формулу (14) и заменим подынтегральную функцию U ее наибольшим значением $U_\rho^{(\max)}$ на сфере Σ_ρ. Таким образом получим

$$U(M_1)\leqslant U_\rho^{(\max)},$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда U на сфере Σ_ρ есть постоянная, равная $U(M_1)$. Поскольку по предположению $U(M_1)$ есть наибольшее значение $U(M)$ в D, мы можем утверждать, что имеет место знак равенства, и что, следовательно,

$U(M)$ равна постоянной внутри и на поверхности всякой сферы с центром M_1, принадлежащей D. Покажем, что отсюда следует, что $U(M)$ есть постоянная и во всей области D.

Пусть N — любая точка, лежащая внутри D. Нам надо показать, что $U(N)=U(M_1)$. Соединим M_1 с N линией l конечной длины, например ломаной линией, лежащей внутри D, и пусть d — кратчайшее расстояние l от границы S области D (d — положительное число). В силу доказанного выше $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ в шаре с центром M_1 и радиусом d. Пусть M_2 — последняя точка пересечения линии l с поверхностью упомянутого шара, если считать от M_1. Мы имеем $U(M_2)=U(M_1)$, и по доказанному выше $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ и в шаре с центром M_2 и радиусом d. Пусть M_3 — последняя точка пересечения l с поверхностью этого шара. Как и выше, функция $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ и в шаре с центром M_3 и радиусом d и т. д. Путем построения конечного числа таких шаров мы и убедимся в том, что $U(N)=U(M_1)$, что и требовалось доказать. Можно показать также, что $U(M)$ не может иметь внутри D ни максимумов, ни минимумов. Пользуясь доказанным свойством гармонических функций, очень легко показать, что *внутренняя задача Дирихле*, о которой мы упоминали в [202], *может иметь только одно решение*. Действительно, если предположить, что существуют две функции $U_1(M)$ и $U_2(M)$, гармонические внутри D и принимающие на поверхности S этой области одни и те же предельные значения $f(M)$, то разность $V(M)=U_1(M)-U_2(M)$ будет также удовлетворять внутри D уравнению Лапласа, т. е. будет гармонической функцией, и ее предельные значения на поверхности S везде равны нулю. Отсюда, в силу доказанного выше, непосредственно следует, что $V(M)$ обращается в нуль тождественно во всей области D, ибо в противном случае она должна была бы достигать внутри положительного наибольшего значения или отрицательного наименьшего значения, что невозможно. Таким образом два решения $U_1(M)$ и $U_2(M)$ задачи Дирихле должны совпадать во всей области D. Совершенно так же доказывается единственность внешней задачи Дирихле, если учесть, что по условию в бесконечно далекой точке гармоническая функция должна обращаться в нуль.

Совершенно аналогичные свойства получаются и для гармонических функций на плоскости. В данном случае вместо формулы (13) мы будем иметь формулу

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(l)}\left(U\frac{\partial \lg r}{\partial n}-\lg r\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds, \tag{15}$$

и теорема о среднем будет выражаться в виде

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\lambda_R} U\,ds, \tag{16}$$

где λ_R — окружность с центром M_0 и радиусом R. Для внешней задачи Дирихле в бесконечно далекой точке требуется не обращение в нуль, как в трехмерном случае, но лишь существование какого-либо конечного предела, и единственность задачи Дирихле надо доказывать иначе, чем в прежнем случае. Мы приведем это доказательство в томе IV, где рассмотрим задачи Дирихле и Неймана более подробно.

Отметим сейчас, что любая постоянная есть гармоническая функция, удовлетворяющая предельному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(S)} = 0,$$

откуда видно, что если к решению задачи Неймана добавить произвольную постоянную, то полученная сумма также будет решением задачи Неймана с теми же предельными значениями $\frac{\partial U}{\partial n}$, т. е. решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Из формулы (12) следует также, что функция $f(M)$, входящая в предельное условие внутренней задачи Неймана, не может быть произвольной, но должна удовлетворять условию

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\, dS = 0.$$

В заключение отметим еще, что формула (13) справедлива и в том случае, когда $U(M)$ есть гармоническая функция в *бесконечной области*, образованной частью пространства, находящейся вне поверхности S. При этом надо только сделать предположение о порядке малости $U(M)$ на бесконечности, т. е. при беспредельном удалении точки M. Достаточно (и необходимо) предположить, что при беспредельном удалении имеют место неравенства

$$R\,|U(M)| \leqslant A, \quad R^2 \left|\frac{\partial U(M)}{\partial l}\right| \leqslant A, \qquad (*)$$

где R — расстояние от M до начала или какой-либо другой определенной точки пространства, A — численная постоянная и l — произвольное направление в пространстве. Для доказательства формулы (13) для безграничной области при указанных условиях достаточно применить формулу (13) для конечной области, ограниченной поверхностью S и сферой с центром, например, в точке M_0 и достаточно большим радиусом. При стремлении этого радиуса к бесконечности интеграл по поверхности сферы будет стремиться к нулю в силу приведенных выше условий, и мы получим формулу (13) для любой точки M_0, лежащей вне S. Как мы увидим в томе IV, условия (*) наверно выполняются, если $U(M)$ стремится к нулю при беспредельном удалении точки M.

205. Решение задачи Дирихле для круга. В предыдущем параграфе мы видели, что задача Дирихле может иметь только одно решение, но мы еще не знаем, имеет ли она вообще решение. Не рассматривая этого вопроса в общем случае, мы ограничимся лишь частными случаями. При этом мы применим к решению задачи различные методы. Начнем с плоского случая.

Пусть требуется найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на окружности этого круга наперед заданные значения. Пусть R — радиус этого круга, и примем центр круга за начало координат. При этом заданные предельные значения на окружности круга будут представлять собою некоторую известную непрерывную функцию полярного угла на окружности $f(\theta)$. Берем внутри круга переменную точку M с полярными координатами (r, θ). Искомая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа [**131**]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0$$

или

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0. \tag{17}$$

Применим в данном случае метод Фурье и будем искать решение уравнения (17) в виде произведения функции только от θ на функцию только от r:

$$U=\chi(\theta)\ \omega(r). \tag{18}$$

Подставляем это выражение в уравнение (17):

$$r^2\omega''(r)\chi(\theta)+r\omega'(r)\chi(\theta)+\chi''(\theta)\omega(r)=0$$

или

$$\frac{\chi''(\theta)}{\chi(\theta)}=-\frac{r^2\omega''(r)+r\omega'(r)}{\omega(r)}. \tag{18$_1$}$$

Левая часть написанного уравнения содержит одну независимую переменную θ, а правая — независимую переменную r и, следовательно, обе части должны равняться одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $(-k^2)$. Таким образом получаем два уравнения

$$\chi''(\theta)+k^2\chi(\theta)=0 \quad \text{и} \quad r^2\omega''(r)+r\omega'(r)-k^2\omega(r)=0.$$

Первое из них при $k\neq 0$ дает

$$\chi(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta.$$

Второе — есть уравнение Эйлера [**42**]. Ищем его решение в виде $\omega(r)=r^m$:

$$r^2\cdot m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0,$$

откуда, сокращая на r^m, получаем $m^2-k^2=0$, т. е. $m=\pm k$, и общий интеграл уравнения будет

$$\omega(r)=Cr^k+Dr^{-k},$$

если только постоянная k отлична от нуля. Подставив в формулу (18), получим для U выражение

$$U=(A\cos k\theta+B\sin k\theta)(Cr^k+Dr^{-k}). \tag{19}$$

При $k=0$ будем иметь уравнения

$$\chi''(\theta)=0 \text{ и } r\omega''(r)+\omega'(r)=0,$$

и, как нетрудно показать, получим

$$U=(A+B\theta)(C+D\lg r). \tag{19_1}$$

В формулах (19) и (19_1) — A, B, C, D и k — постоянные, к определению которых мы сейчас и переходим. Заметим, что прибавление к углу θ величины 2π равносильно обходу вокруг начала координат. При этом однозначная функция $U(r, \theta)$ должна вернуться к исходному значению, т. е. в формуле (19) первый множитель, зависящий от θ, должен быть периодической функцией от θ с периодом 2π. Отсюда следует, что постоянная k может принимать только целые значения $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots$

Но если подставить в формулу (19) $k=n$ или $k=-n$, то ввиду произвольности коэффициента B результат получится по существу один и тот же, и поэтому мы можем ограничиться только целыми положительными значениями постоянной k (характеристические числа задачи), т. е. $k=n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Периодичность решения (19_1) требует, чтобы постоянная B была равна нулю. Таким образом мы приходим к следующим решениям

$$U_n(r, \theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_nr^n+D_nr^{-n}) \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$U_0(r, \theta)=A_0(C_0+D_0\lg r),$$

причем постоянные могут быть различными при различных значениях целого числа n, почему мы и снабдили их значками. Обращаясь теперь ко второму множителю, зависящему от r, заметим, что искомое решение должно быть конечным и непрерывным в центре круга, т. е. при $r=0$. Отсюда следует, что все постоянные D_n и D_0 необходимо положить равными нулю. Обозначая произвольные постоянные A_nC_n через A_n, B_nC_n — через B_n и A_0C_0 — через $\frac{A_0}{2}$, мы можем написать решения в виде

$$U_n(r, \theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$U_0(r, \theta)=\frac{A_0}{2}.$$

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма этих решений будет также решением, т. е. мы получаем решение

вида

$$U(r,\ \theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\,r^n. \tag{20}$$

Определим теперь произвольные постоянные A_n и B_n по заданному предельному условию

$$U(r,\ \theta)\big|_{r=R}=f(\theta), \tag{21}$$

где $f(\theta)$ — заданная в промежутке $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ непрерывная функция, причем $f(-\pi)=f(\pi)$. Это условие дает

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\,R^n. \tag{22}$$

Отсюда видно, что A_nR^n и B_nR^n суть коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$ в промежутке длины 2π, например в промежутке $(-\pi,\ \pi)$. Вычисляя их по известным формулам

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos nt\ dt,\quad B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin nt\,dt \tag{23}$$

и подставляя найденные отсюда значения в формулу (20), получим искомое решение задачи Дирихле.

Сравнивая ряд Фурье (22) с формулой (20), дающей решение задачи, можем формулировать полученный результат следующим образом: *чтобы получить решение задачи Дирихле для круга, надо написать ряд Фурье для предельных значений $f(\theta)$ и умножить $(n+1)$-й член этого ряда на множитель $\left(\frac{r}{R}\right)^n$.*

Вместо бесконечного ряда (20) решение можно представить в виде определенного интеграла. Подставляем в формулу (20) выражения коэффициентов (23):

$$U(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos n(t-\theta)\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^n dt$$

или

$$U(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\theta)\right]dt.$$

Формула (14) из [**I, 174**] дает непосредственно

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\varphi=\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\varphi+1}\quad(0\leqslant r<1). \tag{24}$$

Заменяя r на $\frac{r}{R}$ и φ на $(t-\theta)$, получим окончательно следующее выражение для $U(r, \theta)$:

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{25}$$

Заметим, что если бы обозначали обе части уравнения (18_1) не через $(-k^2)$, а через $(+k^2)$, то в выражении (19) вместо $(A\cos k\theta+B\sin k\theta)$ мы получили бы $(Ae^{k\theta}+Be^{-k\theta})$, а эта последняя функция не является периодической ни при каком вещественном k.

При выводе формулы (25) мы предполагали, что решение задачи Дирихле, т. е. искомая функция $U(r, \theta)$, существует. Кроме того, мы пользовались разложением $f(\theta)$ в ряд Фурье (22), что не обязательно имеет место, и в это разложение непосредственно подставляли $r=R$. Все это заставляет нас проверить формулу (25), т. е. мы должны показать, что интеграл, стоящий в правой части формулы (25), дает гармоническую функцию внутри круга $r<R$ и что $f(\theta)$ суть предельные значения этой функции на окружности этого круга. Отметим, что интеграл формулы (25) называется обычно *интегралом Пуассона.*

206. Интеграл Пуассона. Для простоты письма мы будем считать в этом номере радиус круга R равным единице, так что формулу (25) перепишем в виде

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{26}$$

Интеграл дает функцию от r и θ, так как второй множитель

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \tag{27}$$

его подынтегральной функции кроме переменной интегрирования t содержит параметры r и θ. При этом функция (27), а потому и (26), имеют период 2π по отношению к переменной θ. Из очевидного неравенства $1-2r\cos(t-\theta)+r^2\geqslant 1-2r+r^2=(1-r)^2$ следует, что выражение (27) и его производные любого порядка суть непрерывные функции r и θ при $0\leqslant r<1$. Отсюда следует, что интеграл (25) можно дифференцировать по r и θ под знаком интеграла [83], и это дифференцирование будет касаться только множителя (27). Но, пользуясь выражением оператора Лапласа в полярных координатах [131], нетрудно проверить, что функция (27) удовлетворяет уравнению Лапласа. Отсюда непосредственно следует, что формула (26) определяет функцию $U(r, \theta)$, гармоническую при $r<1$. Остается показать, что

ее предельные значения на окружности круга $r=1$ равны $f(\theta)$, что и составляет главную часть доказательства.

Заметим прежде всего, что если в формуле (26) положить $f(t)=1$, то и гармоническая функция $U(r,\theta)$ будет тождественно равна единице, т. е. надо ожидать, что справедлива формула

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{28}$$

Докажем эту формулу. Согласно (24)

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(t-\theta)\quad(0\leqslant r<1),$$

причем ряд, стоящий справа, сходится равномерно относительно t, так как члены этого ряда по абсолютной величине не превышают $2r^n$. Интегрируя ряд почленно по t, и получим (28).

Функция $f(t)$, определенная на окружности $r=1$, имеет период 2π, т. е. $f(-\pi)=f(\pi)$. Мы продолжаем ее вне промежутка $(-\pi,\pi)$ по закону периодичности, что дает нам непрерывную в промежутке $-\infty<t<+\infty$ функцию $f(t)$ с периодом 2π.

Введем вместо t новую переменную интегрирования $t-\theta=\varphi$, т. е. $t=\varphi+\theta$ и $dt=d\varphi$. Принимая во внимание периодичность $f(t)$ и $\cos(t-\theta)$, мы можем оставить прежний промежуток интегрирования $(-\pi,\ \pi)$ [154] и написать

$$U(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi+\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,d\varphi. \tag{29}$$

Пусть точка $(r,\ \theta)$ стремится к точке $(1,\ \theta_0)$ на окружности. Нам надо доказать, что при этом

$$\lim U(r,\ \theta)=f(\theta_0).$$

В интеграле (28) совершим такую же замену переменных, умножим обе части на $f(\theta_0)$ и вычтем полученное равенство почленно из (29):

$$U(r,\ \theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,d\varphi. \tag{30}$$

Нам надо доказать, что интеграл, стоящий справа, стремится к нулю при $r\to 1$ и $\theta\to\theta_0$, т. е. будет сколь угодно малым по абсолютной величине, если r достаточно близко к единице и θ к θ_0. При любом заданном положительном ε существует такое $\eta>0$, что

при условиях $|\varphi| \leqslant \eta$ и $|\theta - \theta_0| \leqslant \eta$

$$|f(\varphi+\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

В интеграле (30) разобьем весь промежуток интегрирования на три части

$$(-\pi, -\eta),\ (-\eta, \eta),\ (\eta, \pi). \tag{32}$$

Оценим абсолютное значение интеграла по второму промежутку:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta} [f(\varphi+\theta) - f(\theta_0)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}\,d\varphi.$$

Принимая во внимание, что дробь, стоящая под знаком интеграла, положительна, заменяя стоящую там разность ее абсолютным значением и применяя (31), получим

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}\,d\varphi$$

или, расширяя промежуток интегрирования

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}\,d\varphi,$$

и, следовательно, в силу (28),

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\quad (|\theta - \theta_0| \leqslant \eta). \tag{33}$$

Рассмотрим теперь интеграл по первому из промежутков (32). В этом промежутке $\cos\varphi \leqslant \cos\eta$ и, следовательно,

$$1 - 2r\cos\varphi + r^2 \geqslant 1 - 2r\cos\eta + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\eta)$$

или

$$1 - 2r\cos\varphi + r^2 \geqslant 4r\sin^2\frac{\eta}{2}.$$

Абсолютное значение разности $[f(\varphi+\theta) - f(\theta_0)]$ не превышает некоторого определенного положительного числа M, раз $f(t)$ — непрерывная периодическая функция. Таким образом для интеграла по первому из промежутков (32) получаем оценку

$$|I_1| < \frac{M}{8\pi r\sin^2\frac{\eta}{2}}(1-r^2)\ (\pi - \eta),$$

и такую же оценку получим и для интеграла по третьему из промежутков (32). При $r \to 1$ правая часть написанного неравенства стремится к нулю и, следовательно, сумма интегралов по первому и третьему из промежутков (32) будет при всех r, достаточно близких к единице, по абсолютному значению меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Принимая во внимание (33) и произвольную малость ε, мы можем утверждать, что правая часть равенства (30) действительно стремится к нулю при $r \to 1$ и $\theta \to \theta_0$.

Отметим связь интеграла (26) с рядом Фурье функции $f(\theta)$. Этот ряд Фурье имеет вид (22), причем мы полагаем сейчас $R = 1$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \tag{34}$$

где коэффициенты определяются по формулам (23) при $R = 1$. Если, например, $f(\theta)$ удовлетворяет условиям Дирихле [**155**], то ряд (34) сходится при всяком θ. Но в общем случае непрерывной функции мы этого утверждать не можем. Но во всяком случае A_n и $B_n \to 0$ при $n \to \infty$, так что ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n \tag{35}$$

сходится при $r < 1$, и, как это видно из [**205**], сумма этого ряда и дает функцию (26). Далее оказывается, что при $r \to 1$ сумма ряда (35) стремится к $f(\theta)$, т. е. к той функции, от которой произошел ряд Фурье (34), который может быть и расходящимся рядом.

Применим эту же идею к любому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{36}$$

Если этот ряд сходится и имеет сумму s, то теоремы Абеля из теории степенных рядов [**I, 148**] показывают, что при $0 \leqslant r < 1$ сходится ряд

$$\omega(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n \tag{37}$$

и, ввиду его равномерной сходимости в промежутке $0 \leqslant r \leqslant 1$ [**I, 149**], мы имеем

$$\lim_{r \to 1-0} \omega(r) = s. \tag{38}$$

Но может случиться, что ряд (36) расходится, а ряд (37) при $0 \leqslant r < 1$ сходится и $\omega(r)$ имеет предел при $r \to 1 - 0$, т. е. имеет место (38). В этом случае s называется обобщенной суммой расходя-

щегося ряда (36) в смысле Абеля, и говорят, что ряд (36) *суммируем по Абелю*. Из сказанного выше непосредственно вытекает, что для сходящегося ряда эта обобщенная сумма существует и совпадает с обычной суммой ряда.

Полученные выше результаты об интеграле Пуассона можно формулировать так: *ряд Фурье непрерывной периодической функции* $f(\theta)$ *при всяком* θ *суммируем по Абелю и имеет обобщенную сумму, равную* $f(\theta)$. Отметим еще, что при исследовании интеграла Пуассона мы стремили точку (r, θ) к предельной точке $(1, \theta_0)$ не обязательно по радиусу, а любым образом.

Положим, что в интеграле (26) $r > 1$. Совершенно так же как и выше, мы убеждаемся в том, что интеграл (26) дает гармоническую функцию вне окружности $r = 1$. Для исследования его предельных значений перепишем его в виде

$$U(r,\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^2}{1-2\frac{1}{r}\cos(t-\theta)+\left(\frac{1}{r}\right)^2}\,dt. \qquad (26_1)$$

Написанный интеграл совпадает с интегралом (26), если в этом последнем заменить r на $1:r$, причем, в силу $r > 1$, мы имеем $1:r < 1$. Таким образом, к интегралу, входящему в формулу (26_1), применимы все предыдущие рассуждения с заменой r на $1:r$, и функция (26_1) при стремлении точки (r, θ) к точке $(1, \theta_0)$ извне окружности стремится к $-f(\theta_0)$. Мы можем таким образом утверждать, что функция

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{r^2-1}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt$$

дает решение задачи Дирихле для части плоскости, находящейся вне окружности $r = 1$ с предельными значениями $f(\theta)$. При беспредельном удалении точки (r, θ) функция $V(r, \theta)$, как это видно из последней формулы, имеет конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt.$$

Как мы упоминали выше, решение задачи Дирихле $u(M)$ для бесконечной части плоскости, находящейся вне замкнутого контура l, единственно, если предположить, что искомая функция стремится к конечному пределу при беспредельном удалении точки M (см. том IV).

207. Задача Дирихле для сферы. Пусть R — радиус сферы (Σ) и $f(M')$ — заданные предельные значения гармонической функции на поверхности сферы, причем M' — переменная точка этой поверх-

ности. Мы предполагаем, что $f(M')$ — непрерывная на поверхности сферы функция.

Рассмотрим какую-либо, но определенную точку M_0 внутри (Σ) и обозначим через r расстояние переменной точки пространства M до M_0. Наряду с точкой M_0 рассмотрим точку M_1, лежащую на продолжении радиуса сферы $\overline{OM_0}$ и такую, что (рис. 134)

$$\overline{OM_0} \cdot \overline{OM_1} = R^2. \tag{39}$$

Точка M_1, лежащая вне сферы (Σ), называется иногда симметричной с M_0 относительно (Σ). Обозначим через r_1 расстояние переменной точки M до M_1. Если M находится на поверхности (Σ) в некоторой точке M', то величины r и r_1 связаны простой зависимостью, которую мы сейчас и выведем. Заметим, что треугольники OM_0M' и OM_1M' подобны, так как они имеют общий угол при вершине O и стороны, образующие эти углы, пропорциональны в силу (39). Из подобия вытекает

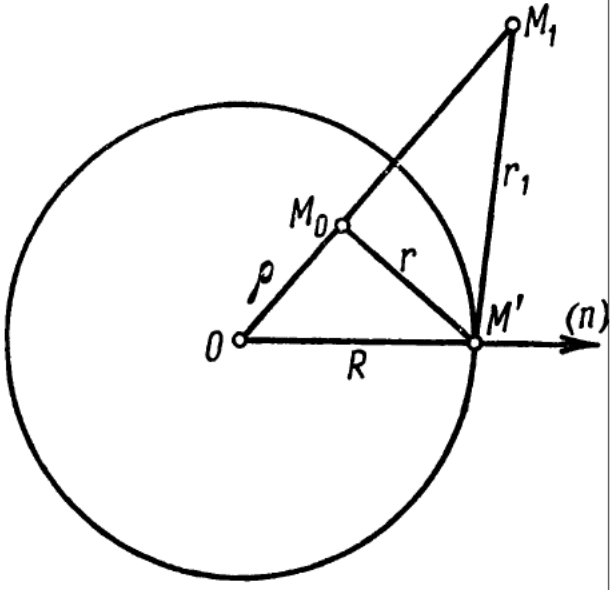


Рис. 134.

$$\frac{|M_0M'|}{|M_1M'|} = \frac{|OM_0|}{|OM'|} \text{ или } \frac{r}{r_1} = \frac{|OM_0|}{R},$$

откуда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\rho}{R}\frac{1}{r}, \tag{40}$$

где $\rho = |OM_0|$ есть длина радиуса-вектора из центра сферы в точку M_0. Функция $\frac{1}{r_1}$ внутри сферы в бесконечность не обращается, ибо M_1 лежит вне сферы, и есть, следовательно, функция, гармоническая внутри сферы [131]. Формула (40) дает предельные значения этой функции на поверхности сферы. Пусть $U(M)$ — искомое решение задачи Дирихле. Формула (13) дает

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS. \tag{41}$$

С другой стороны, применяя формулу (6) к гармоническим функциям U и $V = \frac{1}{r_1}$, получим

$$0 = \int_{(\Sigma)}\int\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right)dS. \tag{42}$$

Умножая обе части (42) на постоянное число $\frac{R}{4\pi\rho}$ и вычитая из (41), мы, в силу (40), исключим $\frac{\partial U}{\partial n}$:

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\int U\cdot\left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS.$$

Но значения U на (Σ) представляют собою заданную функцию $f(M')$, и мы можем написать

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\int f(M')\left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS. \qquad (43)$$

Формула эта и решает задачу Дирихле для сферы, так как под знаком интеграла стоят известные величины. Преобразуем разность, стоящую в квадратных скобках. Заметим прежде всего, что поверхности $r=\text{const}$ суть сферы с центром M_0, так что grad r есть вектор длины единица, имеющий направление $\overline{M_0M}$, и, следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial n}=\operatorname{grad}_n r=\cos(r,\ n)$$

и

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\ \frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\cos(r,\ n).$$

Точно так же

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}=-\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1,\ n),$$

где r и r_1 под знаком косинуса обозначают направления $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_1M}$. Это дает

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{1}{r^2}\cos(r,n)-\frac{R}{\rho r_1^2}\cos(r_1,\ n). \qquad (44)$$

Вводя величину $\rho_1=|OM_1|=\frac{R^2}{\rho}$, можем написать из треугольников $OM'M_0$ и $OM'M_1$:

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos(r,\ n),\quad \rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos(r_1,\ n).$$

Определяя отсюда $\cos(r,\ n)$, $\cos(r_1,\ n)$ и подставляя в выражение (44), будем иметь, в силу (40) и определения ρ_1:

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3},$$

и формула (43) может быть переписана в виде

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(\Sigma)}\int f(M')\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS, \tag{45}$$

или, если ввести угол γ, образованный радиусом-вектором $\overline{OM_0}$ с переменным радиусом-вектором $\overline{OM'}$, угловые сферические координаты (θ', φ') точки M' и сферические координаты $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ точки M_0 с началом в точке O:

$$U(\rho,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\,\frac{R^2-\rho^2}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'. \tag{46}$$

Полученное интегральное представление $U(M_0)$ аналогично интегралу Пуассона в случае плоскости. Для того чтобы показать, что интеграл, входящий в формулу (45), дает гармоническую функцию, достаточно показать, что при фиксированной точке M' дробь $(R^2-\rho^2):r^3$ есть гармоническая функция от M_0. Введем сферическую систему координат с началом в точке M' и с осью Z, направленной от M' к O, и обозначим, как всегда в сферической системе, $\theta=\angle OM'M_0$. При этом $\rho^2=R^2-2Rr\cos\theta+r^2$ и

$$\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\frac{2R\cos\theta}{r^2}-\frac{1}{r}.$$

Подставляя эту разность в уравнение Лапласа, выраженное в сферических координатах, убедимся в том, что упомянутая дробь есть гармоническая функция точки M_0. Докажем теперь, что при любом положении M_0 внутри сферы имеет место формула

$$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{\Sigma}\int\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS=1. \tag{*}$$

Введем сферическую систему координат с началом в точке O и с осью Z, направленной из O в M_0, причем в данном случае $\theta=\angle M_0OM'$ и $r^2=R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2$. Интеграл, входящий в формулу (*), будет

$$\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{(R^2-\rho^2)\,R}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(R^2-2\rho R\cos\theta+\rho^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{R^2-\rho^2}{2\rho}(R^2-2\rho R\cos\theta+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

или, принимая во внимание, что $\rho < R$, получим формулу (*):

$$\frac{1}{4\pi R}\int_{\Sigma}\int \frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS = \frac{R^2-\rho^2}{2\rho}\left(\frac{1}{R-\rho}-\frac{1}{R+\rho}\right)=1.$$

Дальнейшее доказательство того, что интеграл (45) имеет на сфере предельные значения $f(M)$, проводится так же, как и в случае интеграла Пуассона.

Решение внешней задачи Дирихле с предельными значениями $f(M')$ дается формулой

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\int_{\Sigma'}\int f(M')\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\,dS \qquad (45_1)$$

или

$$U(\rho,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{\rho^2-R^2}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (46_1)$$

где $\rho=|\overline{OM_0}|$, $r=|\overline{M_0M'}|$ и $\gamma=\angle M_0OM'$, но в данном случае $\rho > R$. Как и выше, мы убедимся в том, что интеграл формулы (45_1) дает гармоническую функцию вне сферы. Для того чтобы убедиться, что предельные значения $U(M_0)$ равны $f(M)$, перепишем (46_1) в виде

$$U(\rho,\theta_0,\varphi_0)=$$

$$=\frac{\rho'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho'R'\cos\lambda+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (46_2)$$

где $\rho'=\rho^{-1}$ и $R'=R^{-1}$. При этом $\rho' < R'$, и когда точка $(\rho,\theta_0,\varphi_0)$ стремится к точке $M(R,\theta,\varphi)$, лежащей на сфере Σ, то $(\rho',\theta_0,\varphi_0)$ стремится к (R',ϑ,φ). В силу результата, полученного для внутренности сферы, мы имеем

$$\frac{R'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho'R'\cos\gamma+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\to f(M),$$

и, принимая во внимание, что $\rho'\to R'$, можем утверждать, что и правая часть формулы (46_2) стремится к $f(M)$, что мы и хотели доказать. Отметим еще, что в силу (46_1) $U(\rho,\theta_0,\varphi_0)$ стремится к нулю, когда M_0 удаляется на бесконечность, т. е. когда $\rho\to\infty$. Это следует из того, что под знаком интеграла формулы (46_1) числитель содержит ρ^2, а знаменатель имеет, очевидно, порядок ρ^3.

208. Функция Грина. Из приведенного решения задачи Дирихле для сферы можно вывести указания и для общего случая внутренней задачи Дирихле для любой поверхности (S). Формула (13) непосредственно не дает

решения задачи, так как под знак двойного интеграла входит не только само U, для которого значения на поверхности заданы, но и $\frac{\partial U}{\partial n}$. Надо исключить последнюю величину, чтобы получить решение задачи. Пусть M_0 — фиксированная точка внутри (S). Пусть нам известна функция $G_1(M; M_0)$, обладающая следующими двумя свойствами: 1) как функция переменной точки M, это есть гармоническая функция внутри (S); 2) на поверхности (S) ее предельные значения равны $\frac{1}{r}$, где r — расстояние переменной точки (S) до M_0. Пусть $U(M)$ — искомое решение задачи Дирихле. Применяя формулу (6) к гармоническим функциям $U(M)$ и $G_1(M; M_0)$, можем написать

$$0 = \iint\limits_{(S)} \left[U(M) \frac{\partial G_1(M; M_0)}{\partial n} - G_1(M; M_0) \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right] dS,$$

или в силу предельных условий для $G_1(M; M_0)$:

$$0 = \iint\limits_{(S)} \left[U(M) \frac{\partial G_1(M; M_0)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right] dS.$$

Умножая это равенство на $\frac{1}{4\pi}$ и складывая с (13), получим

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} U(M) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r} - G_1(M; M_0) \right] dS. \tag{47}$$

Эта формула и дает решение задачи Дирихле, если известна функция $G_1(M; M_0)$. Разность, стоящая в квадратных скобках:

$$G(M; M_0) = \frac{1}{r} - G_1(M; M_0), \tag{48}$$

называется *функцией Грина для области, ограниченной поверхностью* (S) *с полюсом в точке* M_0. Из определения $G_1(M; M_0)$ вытекают два основных свойства функции Грина:

1. $G(M; M_0)$ есть гармоническая функция внутри (S), кроме точки M_0, где она обращается в бесконечность, причем разность $G(M; M_0) - \frac{1}{r}$ остается конечной и является везде внутри (S) гармонической функцией.

2. Предельные значения $G(M; M_0)$ на поверхности (S) равны нулю.

В случае сферы, в силу формулы (26), функция $G_1(M; M_0)$ будет равна $\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1}$ и функция Грина будет

$$G(M; M_0) = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1}. \tag{49}$$

Мы получили формулу (47), пользуясь формулой (13) и применяя интегральную формулу Грина к $U(M)$ и $G_1(M; M_0)$. Возможность применения этих интегральных формул требует особых доказательств, которые основаны на изучении поведения производных при приближении к поверхности (S).

Строгое доказательство формулы (47) при широких предположениях относительно поверхности (S) и функции $U(M)$ на (S) было впервые дано А. М. Ляпуновым.

Совершенно аналогично для случая плоскости мы имеем формулу для решения внутренней задачи Дирихле:

$$U(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(l)} U(M)\frac{\partial G(M; M_0)}{\partial n}\,ds, \qquad (47_1)$$

где функция Грина $G(M; M_0)$ для области с контуром (l) и с полюсом M_0 должна обладать следующими двумя свойствами:

1. $G(M; M_0)$ есть гармоническая функция внутри (l), кроме точки M_0, где она обращается в бесконечность, причем разность $G(M; M_0) - \lg\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция и в точке M_0.

2. Предельные значения $G(M; M_0)$ на контуре (l) равны нулю.

Нетрудно видеть, что может существовать только одна функция с указанными двумя свойствами. Действительно, если бы их было две: $G^{(2)}(M; M_0)$ и $G^{(1)}(M; M_0)$, то их разность $G^{(2)}(M; M_0) - G^{(1)}(M; M_0)$ была бы гармонической везде внутри (S) или (l) и имела бы нулевые предельные значения на (S) или (l), т. е. была бы тождественно равной нулю внутри (S) или (l).

209. Случай полупространства. В качестве примера применения формулы (47) рассмотрим задачу Дирихле для полупространства. Требуется найти функцию $U(x, y, z)$, гармоническую в полупространстве $z > 0$, если известны ее предельные значения $f(x, y)$ на плоскости $z = 0$:

$$U|_{z=0} = f(x, y). \qquad (50)$$

Пусть r — расстояние от переменной точки M до точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причем $z_0 > 0$, и r_1 — расстояние от переменной точки M до точки $M_0'(x_0, y_0, -z_0)$, симметричной с M_0 относительно плоскости $z = 0$. Дробь $\frac{1}{r_1}$ есть гармоническая функция точки M в полупространстве $z > 0$, ибо M_0' лежит вне этого полупространства. Если M находится на плоскости $z = 0$, то, очевидно, $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}$. Таким образом функция Грина в рассматриваемом случае имеет вид

$$G(M; M_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}.$$

Направление нормали к плоскости $z = 0$, внешней по отношению к полупространству $z > 0$, есть направление, противоположное оси OZ, т. е. $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$, и формула (47) дает

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}\right]_{z=0} dx\,dy.$$

После дифференцирования квадратной скобки надо положить $z=0$. Производя несложные выкладки, получим окончательно

$$U(x_0, y_0, z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x, y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,dx\,dy. \tag{51}$$

Мы не будем проверять, что правая часть представляет гармоническую функцию и имеет предельные значения $f(x, y)$, когда (x_0, y_0, z_0) стремится к $(x, y, 0)$. В данном случае бесконечно далекая точка лежит на поверхности области, и нетрудно проверить, что построенное решение обладает следующим свойством: если $f(x, y)$ непрерывна и на бесконечности, т. е. если $f(x, y)$ имеет конечный определенный предел a при беспредельном удалении точки (x, y) на плоскости $z=0$, то и $U(x_0, y_0, z_0)$ имеет тот же предел a при любом беспредельном удалении точки (x_0, y_0, z_0) в полупространстве $z>0$.

Иначе говоря, построенное решение имеет требуемое предельное значение и в бесконечно далекой точке плоскости, если $f(x, y)$ непрерывна в этой точке.

Совершенно аналогично при решении задачи Дирихле для полуплоскости $y>0$ функция Грина имеет вид

$$\lg\frac{1}{r}-\lg\frac{1}{r_1}=\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}},$$

и формула (47_1) при предельных значениях

$$U|_{y=0}=f(x) \tag{52}$$

дает решение задачи

$$U(x_0, y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx. \tag{53}$$

Подробное рассмотрение задачи Неймана мы относим к тому IV.

210. Потенциал объемных масс. Рассмотрим неоднородное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z) \tag{54}$$

в конечной области (D) с поверхностью (S). Общее решение этого уравнения есть сумма какого-либо частного его решения и гармонической в D функции. Пусть имеется решение уравнения (54), к которому применима формула (9). Поскольку производная от $\frac{1}{r}$ по любому фиксированному направлению удовлетворяет уравнению Лапласа, то подынтегральная функция в поверхностном интеграле формулы (9) и сам этот интеграл суть гармонические функции в D. Таким образом тройной интеграл должен удовлетворять уравнению (54). Но в силу (54) в этом интеграле ΔU можно заменить на $\varphi(x, y, z)$, и таким образом мы получаем частное решение

уравнения (54) вида

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{(D)}\int \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,dv \tag{55}$$

$$\left(r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}\right).$$

Мы получили этот результат, предполагая, что уравнение (54) имеет решение, к которому применима формула (9). Для полного решения задачи нам надо более подробно исследовать объемный потенциал (55) при определенных предположениях относительно функции $\varphi(N)$. Мы положим $\mu(N) = -\varphi(N) : 4\pi$ и будем исследовать следующий *потенциал объемных масс*

$$V(M) = \int\int_{(D)}\int \frac{\mu(N)}{r}\,dv \tag{56}$$

или

$$V(x, y, z) = \int\int_{(D)}\int \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,dv. \tag{56_1}$$

Положим, что $\mu(N)$ непрерывна в (D) вплоть до (S). Как мы уже упоминали, интеграл (56) является собственным интегралом, если M лежит вне (D). В этом случае функция $V(M)$ имеет частные производные всех порядков. Эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, и $V(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V = 0$. Если M принадлежит (D), то существует несобственный интеграл (56) и существует также интеграл, полученный путем дифференцирования подынтегральной функции, например, по x [**90**]. Но не было доказано, что он дает частную производную от V по x. Докажем по поводу интеграла (56) две теоремы:

Теорема 1. *Если $\mu(N)$ непрерывна в области (D) вплоть до (S), то $V(M)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны во всем пространстве, и упомянутые частные производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство будем проводить при любом положении M относительно области (D). Вместо $\frac{1}{r}$ введем новую функцию, которая отличается от $\frac{1}{r}$ лишь при $r < \varepsilon$, где ε — заданное положительное число, но которая сама непрерывна и имеет непрерывные производные по координатам вплоть до $r = 0$. Для этого заменим $\frac{1}{r}$ при $r < \varepsilon$ полиномом: $\alpha + \beta r^2 = \alpha + \beta[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]$, выбрав α и β так, чтобы при $r = \varepsilon$ иметь

$$\alpha + \beta\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad 2\beta\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

что дает непрерывность производных на стыке функции $\frac{1}{r}$ и $\alpha+\beta r^2$, т. е. при $r=\varepsilon$. Написанные формулы дают $\alpha=\frac{3}{2\varepsilon}$, $\beta=-\frac{1}{2\varepsilon^3}$, и мы приходим к функции $g_\varepsilon(r)$, определенной равенствами

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(r)&=\frac{1}{r} && \text{при } r\geqslant\varepsilon,\\ g_\varepsilon(r)&=\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon^3}r^2 && \text{при } r<\varepsilon. \end{aligned} \tag{57}$$

Подставляя эту функцию вместо $\frac{1}{r}$ в интеграл (56), получим вместо $V(M)$ новую функцию

$$V_\varepsilon(M)=\iiint\limits_{(D)}\mu(N)\,g_\varepsilon(r)\,dv, \tag{58}$$

непрерывную во всем пространстве и с непрерывными частными производными, которые могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, поскольку подынтегральная функция интеграла формулы (58) сама непрерывна и имеет непрерывные производные при $r\geqslant 0$. Мы можем, например, написать

$$\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint\limits_{(D)}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\,dv. \tag{59}$$

Составим разность

$$V(M)-V_\varepsilon(M)=\iiint\limits_{(D)}\mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]dv. \tag{60}$$

Поскольку $\frac{1}{r}$ и $g_\varepsilon(r)$ совпадают при $r\geqslant\varepsilon$, разность, стоящая справа, равна нулю для всех точек N, лежащих вне сферы (σ_ε) с центром M и радиусом ε. Если, например, M лежит вне (D) и ε меньше расстояния от M до (D), то интеграл, стоящий в правой части (60), равен нулю.

В других случаях сфера (σ_ε) может частично или целиком попадать в (D). Обозначая через m наибольшее абсолютное значение $\mu(N)$ в (D) и принимая во внимание, что $g_\varepsilon(r)$ положительная функция, мы получим для подынтегральной функции правой части оценку

$$\left|\mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]\right|<m\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right], \tag{61}$$

и вне сферы (σ_ε) подынтегральная функция, как указано выше, обращается в нуль. Если мы проинтегрируем положительную функцию, стоящую в правой части (61), по всей сфере (σ_ε), то получим

очевидно, следующую оценку:

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)|\leqslant m\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Подставляя вместо $g_\varepsilon(r)$ вторую из формул (57) и выполняя квадратуры, получим

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)|<\frac{18\pi}{5}m\varepsilon^2.$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon\to 0$ непрерывные функции $V_\varepsilon(M)$ равномерно по отношению к положению точки M стремятся к $V(M)$, а потому $V(M)$ есть также непрерывная функция [**I, 144**]. Для исследования частных производных функции $V(M)$ составим интеграл, который получается дифференцированием интеграла формулы (56) по x под знаком интеграла, и обозначим полученную функцию через $W(M)$:

$$W(M)=\iiint_{(D)}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv. \tag{62}$$

Составим, как и выше, разность

$$W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint_{(D)}\mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]dv.$$

Принимая во внимание, что для любой функции $h(r)$ мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}h(r)=\frac{dh(r)}{dr}\,\frac{x-\xi}{r}$$

и что $\left|\frac{x-\xi}{r}\right|\leqslant 1$, можем для подынтегральной функции последнего интеграла написать неравенство

$$\left|\mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]\right|\leqslant m\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right],$$

и, совершенно так же, как и выше

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right|\leqslant m\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Принимая во внимание, что, в силу (57),

$$\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|=\frac{r}{\varepsilon^3}\quad\text{при}\quad r\leqslant\varepsilon,$$

и выполняя квадратуры, получим

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right|\leqslant 5\pi m\varepsilon,$$

откуда следует, что при $\varepsilon\to 0$ производная $\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}$ равномерно относительно M стремится к $W(M)$. Выше было доказано, что $V_\varepsilon(M)$

равномерно стремится к $V(M)$. Принимая во внимание теорему из [I, 144], мы видим, что $W(M)$ есть частная производная от $V(M)$ по x, т. е., в силу (62),

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_{(D)}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv=\iiint\limits_{(D)}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv.$$

Непрерывность $W(M)$ вытекает из непрерывности частных производных (59) и равномерного стремления их к пределу $W(M)$, и теорема доказана полностью. Производные по y и z исследуются точно так же. Отметим, что при доказательстве теоремы мы использовали лишь ограниченность $\mu(N)$ и ее интегрируемость.

211. Уравнение Пуассона. Для построения производных второго порядка от функции $V(M)$ мы должны усилить наши предположения относительно $\mu(N)$.

Теорема 2. *Если непрерывная функция $\mu(N)$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри (D), то $V(M)$ имеет непрерывные производные второго порядка внутри (D) и удовлетворяет внутри D уравнению*

$$\Delta V(M)=-4\pi\mu(M). \tag{63}$$

Фиксируем внутри (D) какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть (σ_ε) — шар с центром M_0 и радиусом ε, лежащий внутри (D), и (D_1) — часть (D), лежащая вне (σ_ε). Разобьем потенциал (56) на два слагаемых

$$V(M)=\iiint\limits_{(D_1)}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv+$$

$$+\iiint\limits_{(\sigma_\varepsilon)}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv=V_1(M)+V_0(M), \tag{64}$$

и, в силу теоремы 1,

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x}=\iiint\limits_{(D_1)}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv+$$

$$+\iiint\limits_{(\sigma_\varepsilon)}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv=\frac{\partial V_1(M)}{\partial x}+\frac{\partial V_0(M)}{\partial x}. \tag{65}$$

Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\quad\left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\right),$$

и, следовательно, можем написать

$$\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu(N)\frac{1}{r}\right]+\frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{r}.$$

Подставляя это выражение вместо подынтегральной функции в интеграле по σ_ε формулы (65) и применяя формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x}=\int\int_{(D_1)}\int \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv+$$

$$+\int\int_{(\sigma_\varepsilon)}\int \frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{r}\,dv-\int\int_{(S_\varepsilon)}\mu(N)\cos(n,\ x)\frac{1}{r}\,dS, \quad (66)$$

где (S_ε) есть поверхность шара (σ_ε) и n — направление внешней нормали к (S_ε) в точке N. Первое слагаемое правой части есть собственный интеграл для точек M, лежащих внутри (σ_ε), и он имеет внутри (σ_ε) производные всех порядков. То же можно утверждать относительно третьего слагаемого, которое является интегралом по поверхности шара (σ_ε). Второе слагаемое есть объемный интеграл по (σ_ε) с непрерывной плотностью $\frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi}$, и, в силу теоремы 1, он имеет непрерывные производные первого порядка во всем пространстве. Таким образом можно утверждать, что $\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри (σ_ε). Принимая во внимание произвольность выбора точки M_0 внутри (D), можем утверждать, что $\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка везде внутри (D). Применяя те же рассуждения к $\frac{\partial V(M)}{\partial y}$ и $\frac{\partial V(M)}{\partial z}$, можем утверждать, что $V(M)$ имеет внутри (D) непрерывные производные второго порядка. Остается доказать формулу (63) для любой точки M_0 внутри (D).

Вернемся к формулам (64) и (66). Потенциал $V_1(M)$ объемных масс по области (D_1), как мы знаем, есть гармоническая функция внутри (σ_ε), ибо (σ_ε) лежит вне (D_1), т. е. $\Delta V_1(M)=0$ внутри (σ_ε), и тем самым $\Delta V(M)=\Delta V_0(M)$ внутри (σ_ε). Таким образом для составления $\Delta V(M)$ достаточно продифференцировать по x под знаком интеграла (пользуемся теоремой 1) те члены в (66), в которых интегрирование совершается по (σ_ε) и (S_ε), составить аналогичные выражения для производных второго порядка по y и z и сложить все три производные. При этом надо помнить, что под знаком интеграла только множитель $\frac{1}{r}$ зависит от (x, y, z). Составив таким образом $\Delta V(M)$ внутри (σ_ε), мы возьмем его значение в центре M_0 сферы (σ_ε). Обозначая через $\Delta V(M_0)$ это значение и через r_0 расстояние от M_0 до

переменной точки интегрирования, мы получим

$$\Delta V(M_0) = \iiint\limits_{(\sigma_\varepsilon)} \left[\frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} + \frac{\partial \mu(N)}{\partial \eta} \frac{\eta - y_0}{r_0^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mu(N)}{\partial \zeta} \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \right] dv - \iint\limits_{(S_\varepsilon)} \mu(N) \left| \frac{\xi - x_0}{r_0^3} \cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta - y_0}{r_0^3} \cos(n, y) + \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \cos(n, z) \right| dS. \qquad (67)$$

Эта формула справедлива при любом выборе радиуса ε, лишь бы шар (σ_ε) лежал внутри D, и величина $\Delta V(M_0)$ не зависит, очевидно, от выбора ε. Будем стремить ε к нулю. Докажем, что при этом тройной интеграл будет стремиться к нулю. Достаточно рассмотреть интеграл от одного из слагаемых. Пусть m — наибольшее абсолютное значение непрерывной функции $\frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi}$ в некотором фиксированном достаточно малом шаре σ_{ε_0}. При $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ мы имеем, принимая во внимание, что $\left| \frac{\xi - x_0}{r_0} \right| \leqslant 1$:

$$\left| \iiint\limits_{(\sigma_\varepsilon)} \frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi} \cdot \frac{\xi - x_0}{r_0^3} dv \right| \leqslant m \iiint\limits_{(\sigma_\varepsilon)} \frac{dv}{r_0^2}.$$

Вводя сферические координаты с началом в M_0 и заменяя $dv = r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr_0$, мы убедимся в том, что выражение, стоящее в правой части, равно $m \cdot 4\pi\varepsilon$, откуда и следует, что тройной интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Займемся теперь поверхностным интегралом формулы (67). Мы имеем, принимая во внимание, что внешняя нормаль n направлена по радиусу сферы:

$$\frac{\xi - x_0}{r^3} \cos(n, x) + \frac{\eta - y_0}{r_0^3} \cos(n, y) + \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \cos(n, z) =$$

$$= \frac{1}{r_0^2} [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z)] = \frac{1}{r_0^2},$$

и следовательно, поверхностный интеграл может быть записан в виде

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{(S_\varepsilon)} \mu(N) \, dS,$$

или, применяя теорему о среднем,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{(S_\varepsilon)} \mu(N) \, dS = 4\pi\mu(N_\varepsilon),$$

где N_ε — некоторая точка на (S_ε). При $\varepsilon \to 0$ точка N_ε стремится

к точке M_0 и $\mu(N_\varepsilon)\to\mu(M_0)$, и в пределе поверхностный интеграл формулы (67) дает $4\pi\mu(M_0)$, что и приводит к формуле (63). Эта формула называется обычно *формулой Пуассона* или *уравнением Пуассона.*

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $\varphi(x, y, z)$ непрерывна в области (D) вплоть до поверхности S и имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри (D), то формула (55) дает решение уравнения (54). Заметим, что если $\varphi(N)$ определена во всем пространстве и достаточно быстро убывает при беспредельном удалении точки N, то за (D) мы можем взять всё пространство.

Совершенно аналогичные теоремы могут быть доказаны и для интеграла по плоской области

$$V(M)=\int\limits_{(B)}\int \mu(N)\lg\frac{1}{r}\,d\sigma$$

или

$$V(x,\ y)=\int\limits_{(B)}\int \mu(\xi,\eta)\lg\frac{1}{r}\,d\sigma \qquad \left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right).$$

Если $\mu(N)$ непрерывна в (B) вплоть до контура этой области, то $V(M)$ сама непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка на всей плоскости, причем эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла. Если, кроме того, $\mu(N)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри (B), то $V(M)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка внутри (B) и в каждой точке внутри (B) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V(M)=-2\pi\mu(M).$$

Составим наряду с интегралом (55) интеграл

$$U_1(M)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)}\int\int \varphi(N)\,G(M;\ N)\,dv, \tag{55_1}$$

где $G(M; N)$ — функция Грина области D с полюсом N. В интеграле (55_1) интегрирование совершается по точке N. Принимая во внимание формулу (48), можем написать

$$U_1(M)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)}\int\int \frac{\varphi(N)}{r}\,dv+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)}\int\int \varphi(N)\,G_1(M;\ N)\,dv,$$

где $G_1(M; N)$ — гармоническая функция M везде внутри (D) и имеющая предельные значения $\frac{1}{\rho}$ на (S), где ρ — расстояние от переменной точки на (S) до точки N. Второй интеграл справа есть функция точки M, входящей под знак интеграла в виде параметра, и поскольку $G_1(M; N)$ — гармоническая функция везде внутри (D), то и второй интеграл справа есть гармоническая функция M внутри (D). Оператор Лапласа от первого слагаемого справа по доказанному равен $\varphi(M)$, и таким образом функция $U_1(M)$, определенная формулой (55_1), удовлетворяет уравнению (54). Далее, принимая во внима-

ние, что $G(M; N)$ имеет на (S) нулевые предельные значения, мы видим на основании (55_1), что $U_1(M)$ удовлетворяет на (S) предельному условию

$$U_1(M)|_S = 0.$$

Итак, *формула* (55_1) *определяет решение уравнения* (54), *удовлетворяющее написанному предельному условию.* Предельные значения решения (55), которые получаются, как значения интеграла, стоящего в правой части, когда точка (x, y, z) находится на (S), зависят от $\varphi(x, y, z)$. Заметим, что проведенное выше исследование функции (55_1) не является вполне строгим. Оно требует дополнительного исследования зависимости $G(M; N)$ от точки N, доказательства возможности дифференцирования под знаком интеграла и предельного перехода под знаком интеграла, когда M стремится к точке поверхности (S) (см. том IV).

212. Формула Кирхгофа. Формула (13) дает для гармонической внутри поверхности (S) функции значение во всякой внутренней точке в виде интеграла по поверхности (S). Можно получить аналогичную формулу и для функции $V(x, y, z, t) = V(M; t)$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V. \tag{68}$$

Положим, что функция $V(M; t)$ непрерывна со своими производными до второго порядка в области (D), ограниченной поверхностью (S), при всех $t > 0$. Пусть M_0 — некоторая фиксированная точка внутри (D). Обозначим через r — расстояние $r = M_0M$ от M_0 до переменной точки M. Применим общую формулу (9) к функции

$$U(x, y, z, t) = V\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right), \tag{69}$$

или, короче,

$$U(M, t) = V\left(M; t - \frac{r}{a}\right). \tag{70}$$

Если $\omega(t)$ есть некоторая функция от t, то обозначим символом $[\omega]$ ту функцию, которая получится из $\omega(t)$ заменой t на $t - \frac{r}{a}$, т. е. $[\omega] = \omega\left(t - \frac{r}{a}\right)$.

Обычно называют $[\omega]$ *запаздывающим значением функции* $\omega(t)$. Смысл этого станет понятным, если считать, что a есть скорость распространения некоторого процесса.

При таком обозначении мы можем формулу (69) или (70) записать в виде: $U = [V]$. При дифференцировании функции (69) по координатам надо принимать во внимание, что $[V]$ зависит от координат как непосредственно, так и через посредство r, которое входит в четвертый аргумент. Таким образом мы будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{71}$$

Точно так же, пользуясь выражением оператора Лапласа в полярных координатах с центром M_0 [131]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right], \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right], \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left[\frac{\partial V}{\partial r}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right], \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right] - \frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial r}\right] + \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right],$$

получим

$$\Delta U=[\Delta V]-\frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]+\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\frac{2}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right].$$

Но, в силу (68), мы имеем $[\Delta V]=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]$, и следовательно,

$$\Delta U=\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\}.$$

Нетрудно показать, что

$$-\frac{\Delta U}{r}=-\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\} \tag{72}$$

есть расходимость некоторого вектора:

$$-\frac{\Delta U}{r}=\operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}(\lg r)\right\}. \tag{73}$$

Действительно, мы имеем формулу [112]:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A})=f\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{grad}f\cdot\mathbf{A}.$$

В данном случае $f=\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$, и $\mathbf{A}=\operatorname{grad}(\lg r)$ есть вектор длины $\frac{1}{r}$, направленный по радиусу-вектору из M_0. Скалярное произведение $\operatorname{grad}f\cdot\mathbf{A}$ есть произведение $|\mathbf{A}|$ на проекцию $\operatorname{grad}f$ на направление $\mathbf{A}$, т. е. на производную от f по направлению вектора $\mathbf{A}$. Итак, в данном случае будем иметь

$$\operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}\lg r\right\}=\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\Delta\lg r+\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right].$$

Применяя (72) и дифференцируя $\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$ по правилу дифференцирования сложных функций, мы и докажем справедливость формулы (73). Применяя затем формулу Остроградского и принимая во внимание, что $\operatorname{grad}_n(\lg r)=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}$, получим

$$-\iiint\limits_{(D)}\frac{\Delta U}{r}\,dv=\frac{2}{a}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,dS.$$

Подставляя это выражение и выражение (71) в правую часть формулы (9) и принимая во внимание, что $U(M_0, t)=V(M_0, t)$, так как в точке M_0 мы имеем $r=0$, получим *формулу Кирхгофа*

$$V(M_0, t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}-[V]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right\}dS. \tag{74}$$

Формула эта выражает $V(M_0, t)$ через запаздывающие значения V, $\frac{\partial V}{\partial t}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ на поверхности (S). В данном случае, как и в формуле (9) для гармо-

нических функций, присутствие $\frac{\partial V}{\partial n}$ не дает возможности применять формулу (74) непосредственно для решения задач, связанных с волновым уравнением. Формула (74), данная Кирхгофом, тесно связана с принципом Гюйгенса.

Положим, что (S) есть сфера с центром M_0 и радиусом r. В этом случае $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, и формула (74) переписывается в виде

$$V(M_0, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{(S)} \int \left\{ r \left[\frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{r}{a} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] + [V] \right\} dS,$$

или, полагая $dS = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^2 \, d\omega$:

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \int \left[\frac{\partial (rV)}{\partial r} \right] d\omega + \frac{r}{4\pi a} \int_{(S)} \int \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] d\omega. \tag{75}$$

Если взять радиус сферы равным $r = at$, то $t - \frac{r}{a} = 0$, т. е. запаздывающее значение сводится к значению функции при $t = 0$, и формула (75) дает формулу Пуассона (81) из [184], решающую задачу о распространении колебаний в безграничном пространстве при заданных начальных условиях

$$V(M_0, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{(S_{at})} \int \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_0 d\omega + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t \int_{(S_{at})} \int (V)_0 \, d\omega \right\}, \tag{76}$$

причем значок нуль указывает, что надо брать $\frac{\partial V}{\partial t}$ и V при $t = 0$, и интегрирование производится по сфере с центром M_0 и радиусом at. Вид формулы Кирхгофа (74) тесно связан с понятием *запаздывающего потенциала*. Выше мы видели, что при любом выборе функции $\omega(t)$, имеющей непрерывные производные до второго порядка, функция

$$\frac{1}{r} \omega \left(t - \frac{r}{a} \right) = \frac{[\omega]}{r} \tag{77}$$

есть решение уравнения (68). При этом r есть расстояние от любой фиксированной точки пространства до переменной точки [188].

Совершенно аналогично предыдущему можно построить формулу Кирхгофа и для любого решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V + f(x, y, z, t) \tag{78}$$

в области D, и эта формула, кроме поверхностного интеграла, будет содержать и тройной

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \int \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right] + \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - [V] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D)} \int \int \frac{[f]}{r} \, dv. \tag{79}$$

Применяя эту формулу к сфере с центром M_0 и радиусом at для решения, удовлетворяющего нулевым начальным данным при $t = 0$, получим формулу (91) из [187].

§ 20. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

213. Основные уравнения. *Уравнение теплопроводности* в однородной среде, как мы видели, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, \tag{2}$$

k — коэффициент внутренней теплопроводности, c — теплоемкость вещества и ρ — плотность. Кроме уравнения (1), нужно иметь в виду *начальное условие*, дающее начальное распределение температуры и при $t = 0$

$$u|_{t=0} = f(x, y, z). \tag{3}$$

Если тело ограничено поверхностью (S), то на этой поверхности мы будем иметь и *предельное условие*, которое может быть различным, смотря по физическим обстоятельствам. Так, например, поверхность (S) может поддерживаться при определенной температуре, которая может и меняться *с течением времени*. В этом случае предельное условие сводится к заданию функции U на поверхности (S), причем эта заданная функция может зависеть и от времени t. Если температура поверхности не фиксирована, но имеется лучеиспускание в окружающую среду данной температуры U_0, то по закону Ньютона, правда, далеко не точному, поток тепла через поверхность (S) пропорционален разности температур окружающего пространства и поверхности тела (S). Это дает предельное условие вида

$$\frac{\partial U}{\partial n} + h(U - U_0) = 0 \quad (\text{на } S), \tag{4}$$

где коэффициент пропорциональности h называется *коэффициентом внешней теплопроводности*.

В случае распространения тепла в теле линейных размеров, т. е. в однородном стержне, который мы считаем расположенным вдоль оси X, вместо уравнения (1) мы будем иметь уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{5}$$

При такой форме уравнения не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью стержня и окружающим пространством.

Уравнение (5) можно получить также из уравнения (1), предполагая U не зависящей от y и z. Начальное условие в случае стержня

будет

$$U|_{t=0} = f(x). \tag{6}$$

Если стержень ограничен, то на обоих концах мы имеем предельное условие. Как и выше, конец может поддерживаться при определенной температуре. В случае лучеиспускания предельное условие (4) будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} \mp h(U - U_0) = 0 \quad \text{(на конце)}, \tag{7}$$

причем знак $(-)$ имеет место для левого конца, с наименьшей абсциссой x, а знак $(+)$ — для правого конца, и h есть положительная постоянная.

214. Неограниченный стержень. Мы начнем с *неограниченного стержня*, для которого, кроме уравнения (5), нужно только удовлетворить начальному условию (6). По способу Фурье мы ищем прежде всего частное решение уравнения (5) в виде

$$T(t) X(x),$$

что дает нам

$$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — постоянная. Мы получаем таким путем

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{8}$$

откуда, отбрасывая постоянный множитель в выражении $T(t)$:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

постоянные A и B могут зависеть от λ.

Так как никаких предельных условий мы здесь не имеем, то параметр λ остается совершенно произвольным, и при составлении функции $u(x, t)$ в виде суммы

$$\sum_{(\lambda)} e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x]$$

все значения λ для нас равноценны. Естественно поэтому заменить *сумму* по отдельным значениям λ — *интегралом*, взятым по параметру λ от $(-\infty)$ до $(+\infty)$, т. е. положить

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)]\, d\lambda. \tag{9}$$

Применяя формулу дифференцирования под знаком определенного интеграла, убедимся без труда, что написанная функция дает действительно решение уравнения (5). Переходим теперь к начальному условию (6), которое дает нам

$$u|_{t=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda. \qquad (10)$$

Сравнивая интеграл в правой части с формулой Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi\right] d\lambda,$$

мы видим, что можно удовлетворить условию (10), положив

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi.$$

Подставляя полученные выражения для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (9), получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}[\cos\lambda\xi\cos\lambda x + \sin\lambda\xi\sin\lambda x]\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda, \qquad (11)$$

причем мы использовали тот факт, что подынтегральная функция есть четная функция от λ.

Формула (11) дает решение нашей задачи, но может быть упрощена. Для этого достаточно заметить, что [84]

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

а потому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},$$

после чего формула (11) принимает вид

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi. \tag{12}$$

Во всех предыдущих вычислениях и дальше мы считаем, конечно, t положительным. Представленное в такой форме решение получает важный физический смысл. Заметим прежде всего, что функция

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \tag{13}$$

рассматриваемая как функция от $(x,\ t)$, есть также решение уравнения (5), как это ясно и из самого способа ее получения и может быть проверено непосредственным дифференцированием. Каков же физический смысл этого решения?

Выделим малый элемент стержня $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ около точки x_0, и пусть функция $f(x)$ равна нулю вне промежутка $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ и имеет постоянное значение U_0 внутри него. Физически можно представить себе дело так, что мы в начальный момент сообщили этому элементу количество тепла $Q=2\delta c\rho U_0$, которое вызвало повышение температуры на U_0 в этом участке. В последующие моменты распределение температуры в стержне дается формулой (12), которая в нашем случае принимает вид

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U_0\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi=\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Если мы будем теперь приближать δ к 0, т. е. будем считать, что то же количество тепла Q распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке x_0, то будем иметь дело с *мгновенным источником тепла в точке $x=x_0$ напряжения Q*. От наличия такого источника тепла в стержне получится распределение температур по формуле

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Так как по теореме о среднем

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi=e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}},\ \text{где}\ x_0-\delta<\xi_0<x_0+\delta,$$

то $\xi_0 \to x_0$ при $\delta \to 0$, и предыдущее выражение обратится в

$$\frac{Q}{c\rho} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}.$$

Стало быть, *функция* (13) *дает распределение температуры, которое вызывается мгновенным источником тепла напряжения* $Q = c\rho$, *помещенным в начальный момент* $t = 0$ *в точке* $x = \xi$ *стержня* (замена x_0 на ξ). Решение (12) становится теперь очевидным. Для того чтобы придать сечению ξ стержня температуру $f(\xi)$ в начальный момент, мы должны распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла

$$dQ = c\rho f(\xi)\, d\xi,$$

или, что то же самое, поместить в точке ξ мгновенный источник тепла напряжения dQ; распределение температуры, вызываемое этим источником, согласно формуле (13), будет

$$f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Общее же действие от начальной температуры $f(\xi)$ во всех точках стержня суммируется из этих отдельных элементов, что и даст нам полученное выше решение (12)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Положим, что температура $f(x)$ в начальный момент $t = 0$ равна нулю везде, кроме некоторого промежутка (α_1, α_2), в котором она положительна. Решение (12) в данном случае будет

$$u(x, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi. \qquad (14)$$

Если взять t сколь угодно близким к нулю и x сколь угодно большим, т. е. если взять сколь угодно далекую точку стержня в момент, сколь угодно близкий к начальному, то формула (14) даст для $u(x, t)$ положительное значение, так как подынтегральная функция положительна. Таким образом из формулы (12) вытекает то обстоятельство, что тепло распространяется не с какой-либо конечной скоростью, но мгновенно. Это существенно отличает уравнение теплопроводности от волнового уравнения, которое мы получили при рассмотрении колебаний струны.

В случае распространения тепла в неограниченной трехмерной среде мы имеем дифференциальное уравнение (1) и начальное

условие (3), и вместо формулы (12) решение будет

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (15)$$

Проверим тот факт, что функция, определяемая формулой (12), удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию (6). Первое утверждение непосредственно вытекает из того, что функция (12) удовлетворяет уравнению (5), и из возможности дифференцировать интеграл формулы (12) по t и x под знаком интеграла, если, например, $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема по промежутку $(-\infty, +\infty)$. Для проверки начального условия (6) введем вместо ξ новую переменную α по формуле

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}.$$

Формула (12) после этого переписывается в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \alpha 2a\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha. \quad (16)$$

Напомним еще формулу [81]:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha. \quad (17)$$

Умножим ее почленно на $f(x)$ и вычтем из (16)

$$u(x, t) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x + \alpha 2a\sqrt{t}) - f(x)]\, e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

откуда

$$|u(x, t) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha 2a\sqrt{t}) - f(x)|\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha. \quad (18)$$

Кроме непрерывности и абсолютной интегрируемости, будем еще считать $f(x)$ ограниченной, т. е. $|f(x)| \leqslant c$, и таким образом при любых x, t и α мы имеем: $|f(x + \alpha 2a\sqrt{t}) - f(x)| \leqslant 2c$. Пусть ε — заданное положительное число. Можно фиксировать столь большое положительное N, что

$$\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

При этом из (18) будет следовать

$$|u(x, t)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} |f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

В силу непрерывности $f(x)$, можем утверждать, что при всех t достаточно близких к нулю, и при $|\alpha| \leqslant N$ мы имеем

$$|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon,$$

и последнее неравенство дает

$$|u(x, t)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

и тем более

$$|u(x, t)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

т. е., в силу (17), мы имеем $|u(x, t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех t, достаточно близких к нулю, откуда, ввиду произвольности ε, и следует

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = f(x),$$

что и представляет собой начальное условие (6). Отметим, что t стремится к нулю от положительных значений. Если m и M — границы значений $f(x)$, т. е. $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то из (16) следует

$$\frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \leqslant u(x, t) \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

и, в силу (17), имеем $m \leqslant u(x, t) \leqslant M$, т. е. температура $u(x, t)$ при всех положительных t лежит в тех же границах, что и начальная температура. Совершенно так же, как и выше, может быть проверена и формула (15).

215. Стержень, ограниченный с одного конца. Пусть это будет конец $x=0$ стержня $x \geqslant 0$; мы допустим, что на этом конце имеется лучеиспускание в окружающую среду с температурой 0°.

В этом случае мы имеем, кроме начального условия (6), предельное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = hu\Big|_{x=0}, \tag{19}$$

и, с другой стороны, решение (12) непосредственно не годится, так как в силу начального условия подынтегральная функция $f(x)$ определена только

в промежутке $(0, \infty)$. Стало быть, для применения формулы (12) надлежит продолжить функцию $f(x)$ в промежуток $(-\infty, 0)$.

Для этой цели перепишем формулу (12) в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + f(-\xi)\, e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi, \qquad (20)$$

что можно легко показать, разбив $\int_{-\infty}^{+\infty}$ на два: $\int_{-\infty}^{0}$ и $\int_0^{+\infty}$ и заменив в первом ξ на $(-\xi)$. Для подстановки в формулу (19) вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[f(\xi) \frac{\xi - x}{2a^2t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - f(-\xi) \frac{\xi + x}{2a^2t} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi.$$

При $x = 0$ отсюда выводим

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f(\xi) + f(-\xi)]\, d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f(\xi) - f(-\xi)] \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t}.$$

Интегрируя по частям, мы имеем [1])

$$\int_0^\infty f(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t} = -\int_0^\infty f(\xi)\, d\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right) = -e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} f(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} +$$

$$+ \int_0^\infty f'(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi = f(+0) + \int_0^\infty f'(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi,$$

точно так же

$$\int_0^\infty f(-\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t} = f(-0) - \int_0^\infty f'(-\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Мы предположим, что $f(x)$ продолжена непрерывно в промежуток $(-\infty, 0)$. Тогда очевидно

$$f(+0) = f(-0) = f(0),$$

и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f'(\xi) + f'(-\xi)]\, d\xi.$$

---

[1]) Предполагается, что $e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} f(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Условие (19) превращается в

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\{[f'(\xi)+f'(-\xi)]-h[f(\xi)+f(-\xi)]\}\,d\xi=0,$$

которое наверно удовлетворяется, если положить

$$f'(-\xi)+f'(\xi)=h[f(-\xi)+f(\xi)],$$

или, обозначив пока

$$\Phi(\xi)=f(-\xi),\qquad \Phi'(\xi)=-f'(-\xi),$$

определить неизвестную функцию $\Phi(\xi)$ из дифференциального уравнения

$$\Phi'(\xi)+h\Phi(\xi)=f'(\xi)-hf(\xi)\qquad(\xi\geqslant 0).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\Phi(\xi)=e^{-h\xi}\left\{C+\int_0^\xi e^{h\xi}[f'(\xi)-hf(\xi)]\,d\xi\right\}.$$

Полагая $\xi=0$, определяем постоянную C:

$$C=\Phi(0)=f(0),$$

и так как

$$\int_0^\xi e^{h\xi}f'(\xi)\,d\xi=f(\xi)\,e^{h\xi}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\xi}-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi=e^{h\xi}f(\xi)-f(0)-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi,$$

то

$$f(-\xi)=\Phi(\xi)=f(\xi)-2he^{-h\xi}\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi.$$

Подставляя это выражение для $f(-\xi)$ в формулу (20), мы и получаем окончательное решение нашей задачи. Заметим, что из последней формулы при $\xi\to+0$ вытекает $f(-0)=f(+0)$, т. е. непрерывное продолжение $f(x)$ в промежуток $(-\infty, 0)$, что мы предполагали выше.

Если, например, начальная температура постоянна:

$$f(x)=u_0\quad\text{при}\quad x\geqslant 0,$$

то мы имеем

$$f(-x)=u_0-2he^{-hx}\int_0^x u_0\,e^{hx}\,dx=u_0(2e^{-hx}-1),$$

и формула (20) дает

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi-\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\,d\xi+2\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}-h\xi}\,d\xi\right\}. \tag{21}$$

Читатель без труда покажет, что это решение может быть выражено через функцию

$$\Theta(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

следующим образом:

$$u(x,\ t)=u_0\,\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+u_0e^{a^2h^2t+hx}\left[1-\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right]. \tag{22}$$

Более простой результат получается, если на конце $x=0$ отсутствует лучеиспускание, и этот конец поддерживается при температуре 0°. Мы имеем тогда предельное условие

$$u|_{x=0}=0, \tag{23}$$

которое можно получить и из (19), разделив на h и затем переходя к пределу при $h\to\infty$. Решение можно найти из формулы (22) при $h\to\infty$, но проще поступать, непосредственно продолжая функцию $f(x)$ в промежуток $(-\infty,\ 0)$ так, чтобы выполнялось условие

$$u|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\left[f(\xi)+f(-\xi)\right]d\xi=0,$$

для чего достаточно положить

$$f(-\xi)=-f(\xi),$$

т. е. надо продолжить $f(x)$ нечетным образом.

Формула (20) примет тогда вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi, \tag{24}$$

и если

$$u|_{t=0}=f(x)=u_0,$$

она обратится в

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}d\xi=u_0\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{25}$$

Рассмотрим теперь стержень, ограниченный с одного конца $x=0$, который поддерживается при заданной температуре $u=\varphi(t)$.

Допустим сперва, что начальная температура есть 0°, т. е.

$$u|_{t=0}=0, \tag{26}$$

и начнем с частного случая $\varphi(t)=1$, т. е.

$$u|_{x=0}=1. \tag{27}$$

Нетрудно получить решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (26) и (27). Для этого мы положим

$$u = v + 1;$$

функция v будет также решением уравнения (5), но должна удовлетворять условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{t=0} = -1,$$

так что получится сразу по формуле (25), если положить там $u_0 = -1$,

$$v(x, t) = -\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad \text{и} \quad u(x, t) = 1 - \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{28}$$

Определим теперь распределение температур, если на конце $x = 0$ температура поддерживалась равной 0° до момента τ, а затем поддерживалась равной 1°. Это распределение мы обозначим через $u_\tau(x, t)$. Очевидно, что до момента $t = \tau$ мы будем иметь $u_\tau = 0$; после же этого момента u_τ совпадает с решением, полученным выше, если начать отсчитывать t не от 0, а от τ, т. е. заменить в выражении (28) t на $t - \tau$, что даст нам

$$u_\tau(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \tau, \\ 1 - \Theta\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) & \text{при } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Но тогда очевидно, что если на конце $x = 0$ температура 1° поддерживалась только в течение промежутка $(\tau, \tau + d\tau)$, а все остальное время она была 0°, то соответствующее распределение температур будет

$$u_\tau(x, t) - u_{\tau+d\tau}(x, t) = -\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}\, d\tau;$$

если же она поддерживалась в течение промежутка $(\tau, \tau + d\tau)$ на температуре $\varphi(\tau)$, а не 1°, то получим решение

$$-\varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}\, d\tau,$$

откуда ясно, что если поддерживать конец $x = 0$ на температуре $\varphi(\tau)$ при всех $\tau > 0$, то при изменении τ от 0 до t мы получим полный эффект, сложив все элементарные эффекты, что дает нам искомое решение задачи в виде

$$u(x, t) = -\int_0^t \varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}\, d\tau,$$

или, так как при $t \geqslant \tau$:

$$-\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

то окончательно

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau. \tag{29}$$

Для того чтобы получить решение, которое сверх предельного условия

$$u|_{x=0}=\varphi(t)$$

удовлетворяет не (26), а начальному условию общего вида

$$u|_{t=0}=f(x),$$

очевидно, достаточно прибавить к решению (29) полученное выше решение (24).

216. Стержень, ограниченный с обоих концов. Мы исследуем один из наиболее типичных случаев, когда на конце $x=0$ поддерживается температура 0°:

$$u|_{x=0}=0; \tag{30}$$

на конце $x=l$ тепло излучается в окружающую среду с температурой нуль:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-\left.hu\right|_{x=l}; \tag{31}$$

начальная температура:

$$u|_{t=0}=f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{32}$$

Задача эта решается весьма просто по способу Фурье.

Так как здесь имеются предельные условия, то мы подчиним найденное выше решение

$$e^{-\lambda^2a^2t}X(x)=e^{-\lambda^2a^2t}[A\cos\lambda x+B\sin\lambda x] \tag{33}$$

условиям (30) и (31), что дает нам

$$X(0)=0, \text{ т. е. } A=0, \quad X'(l)=-hX(l),$$

откуда имеем, отбрасывая постоянный множитель B,

$$X(x)=\sin\lambda x \tag{34}$$

и

$$\lambda\cos\lambda l=-h\sin\lambda l. \tag{35}$$

Полагая $\lambda l=v$, получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg}v=\alpha v, \quad \text{где} \quad \alpha=-\frac{1}{hl}. \tag{36}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней [37], из которых мы обратим внимание только на положительные:

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots \tag{37}$$

Этим корням соответствует бесчисленное множество значений λ:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots, \text{ где } \lambda_n=\frac{v_n}{l}. \tag{38}$$

а им, в свою очередь, — бесчисленное множество частных решений уравнения (5)

$$B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

удовлетворяющих предельным условиям.

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям, ищем u в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x, \tag{39}$$

и при $t = 0$ получаем

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \tag{40}$$

где мы обозначили $X_n(x) = \sin \lambda_n x$. Докажем, что функции $X_n(x)$ ортогональны.

Напишем для двух из них соответствующие дифференциальные уравнения (8)

$$X_m''(x) + \lambda_m^2 X_m(x) = 0, \quad X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0.$$

Умножая первое почленно на $X_n(x)$, второе на $X_m(x)$, вычитаем почленно полученные уравнения и интегрируем по промежутку $(0, l)$:

$$\int_0^l [X_m''(x) X_n(x) - X_n''(x) X_m(x)]\, dx + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x)\, dx = 0.$$

Интегрируя в первом интеграле по частям, получим

$$X_m'(l) X_n(l) - X_n'(l) X_m(l) + X_n'(0) X_m(0) - X_m'(0) X_n(0) + \\ + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x)\, dx = 0. \tag{41}$$

Но $X_m(x)$ и $X_n(x)$ удовлетворяют предельным условиям (30) и (31), т. е.

$$X_m(0) = X_n(0) = 0, \quad X_m'(l) = -hX_m(l),$$
$$X_n'(l) = -hX_n(l).$$

В силу этих равенств внеинтегральный член формулы (41) обращается в нуль, и, принимая во внимание, что $\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \neq 0$ при различных m и n, мы получаем

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Установив ортогональность, мы обычным приемом убеждаемся в том, что в разложении (40) коэффициенты B_n должны определяться формулой

$$B_n = \int_0^l f(x) X_n(x)\, dx \Big/ \int_0^l X_n^2(x)\, dx.$$

Это решает задачу разложения функции $f(x)$ по функциям $X_n(x)$ и вместе с тем дает решение поставленной выше задачи в виде ряда (39). В томе IV мы покажем, что система функций $X_n(x)$, которые получаются, как выше, в результате применения метода Фурье к основным задачам математической физики, есть замкнутая система, и что при некоторых предположениях относительно $f(x)$ эта функция разлагается в основном промежутке в равномерно сходящийся ряд по функциям $X_n(x)$. Отметим, что если бы вместо предельных условий (30) и (31) мы взяли предельные условия $u = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$, то получили бы $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$, и пришли к обычному ряду Фурье по синусам.

При исследовании распространения тепла в кольце мы, вместо предельных условий, должны поставить условие периодичности температуры. Считая радиус кольца равным единице, так что длина всего кольца есть 2π, и обозначая через x длину кольца, отсчитываемую от некоторой точки, мы приходим к решению вида

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, e^{-a^2 n t},$$

где

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{a} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

— ряд Фурье начального распределения температуры $f(x)$ в кольце.

Достаточные условия для того, чтобы полученный здесь для $u(x, t)$ ряд действительно решал рассматриваемую задачу, будут даны в томе IV.

217. Дополнительные замечания. Возьмем *обобщенное уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - cv, \tag{42}$$

которое получается, если учесть лучеиспускание со всей поверхности стержня в окружающее пространство, температура которого принимается равной нулю.

Легко проверить, что уравнение (42) простой подстановкой

$$v = e^{-ct} u$$

приводится к уравнению (5) для u.

Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \tag{43}$$

в случае неограниченного стержня при нулевой начальной температуре, т. е. при условии $u = 0$ для $t = 0$, имеет решение вида

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\, d\tau. \tag{44}$$

Оно может быть получено или тем же методом, который мы применяем в [187] к неоднородному волновому уравнению, или суперпозицией основного сингулярного решения (13), в котором мы заменяем t на $(t - \tau)$ и после умножения на $F(\xi, \tau)$ интегрируем по ξ от $-\infty$ до $+\infty$ и по τ от $\tau = 0$ до $\tau = t$. Физический смысл этих операций очевиден. Решение уравнения (43) получается путем суперпозиции источников, которые размещены по всему стержню с интенсивностью $F(\xi, \tau)$, причем такой источник начинает действовать с момента времени τ. Производится суперпозиция таких источников и по времени.

Применение метода Фурье в двумерном и трехмерном случае проводится совершенно так же, как и для волнового уравнения, но только множитель, зависящий от времени, в рассматриваемом случае есть показательная функция.

Так, например, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

в случае прямоугольной пластинки мы имеем решение в виде

$$u = e^{-\omega^2 t} U(x, y), \tag{45}$$

причем мы поставили в показателе ω^2 с тем, чтобы пользоваться формулами из [190]. Пусть имеется предельное условие $u = 0$ на (C) и начальное условие $u = \varphi_1(x, y)$ при $t = 0$. Решение представляется рядом

$$u = \sum_{\sigma, \tau = 1}^{\infty} a_{\sigma, \tau} e^{-\omega_{\sigma, \tau}^2 t} \sin \frac{\sigma \pi x}{l} \sin \frac{\tau \pi y}{m},$$

где $\omega_{\sigma, \tau}^2$ определяется формулой (113) из [190] и $a_{\sigma, \tau}$ — первой из формул (114).

В случае круглой пластинки [ср. 191] та же подстановка (45) приводит к следующему решению:

$$u = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} \alpha_{m,n} e^{-\omega_{m,n}^2 t} \cos n\theta J_n(k_m^{(n)} r) + \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} \beta_{m,n} e^{-\omega_{m,n}^2 t} \sin n\theta J_n(k_m^{(n)} r),$$

причем $\alpha_{m,n}$ и $\beta_{m,n}$ определяются по тем же формулам, что и $\alpha_{m,n}^{(1)}$ и $\beta_{m,n}^{(1)}$ из [191], $\omega_{m,n}$ — по формуле (128).

218. Случай сферы. Рассмотрим параллельно волновое уравнение и уравнение теплопроводности в случае сферы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \tag{46}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v, \tag{47}$$

считая, что начальные данные зависят только от расстояния r точки до центра сферы

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(r); \tag{48}$$

$$v|_{t=0} = \psi(r). \tag{49}$$

Предельные условия мы возьмем вида

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \tag{50}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0 \text{ при } r = R, \tag{51}$$

где R — радиус сферы и $h > 0$. В силу центральной симметрии решения также не будут зависеть от полярных углов и будут, таким образом, функциями только от r и t. Полагая

$$u = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,U(r), \tag{52}$$

$$v = Ae^{-\omega^2 t}V(r), \tag{53}$$

получим для $U(r)$ и $V(r)$ одно и то же уравнение $\Delta W + k^2 W = 0$, где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. Выражая оператор Лапласа в сферических координатах и принимая во внимание, что W зависит только от r, получим уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dW}{dr}\right) + k^2 W = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dW}{dr} + k^2 W = 0.$$

Вместо W введем новую искомую функцию

$$R(r) = rW(r).$$

Подставляя $W(r) = \frac{R(r)}{r}$ в уравнение для W, получим для $R(r)$ уравнение: $R''(r) + k^2 R(r) = 0$, откуда $R(r) = C_1\cos kr + C_2\sin kr$, и, следовательно,

$$W(r) = C_1\frac{\cos kr}{r} + C_2\frac{\sin kr}{r}.$$

Принимая во внимание, что решение должно оставаться конечным в центре сферы, т. е. при $r = 0$, мы должны считать $C_1 = 0$, и, подставляя в (52) и (53), получаем решения вида

$$u = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\frac{\sin kr}{r}, \tag{54}$$

$$v = Ae^{-\omega^2 t}\frac{\sin kr}{r}. \tag{55}$$

Постоянная k и, тем самым, $\omega = ak$ определяются из предельных условий (50) и (51).

Второе из них в применении к $\frac{\sin kr}{r}$ дает следующее уравнение для k:

$$kR\operatorname{ctg} kR = 1 - hR. \tag{56}$$

При $h = 0$ приходим к уравнению, получаемому из предельного условия (50):

$$\operatorname{tg} kR = kR. \tag{57}$$

Полагая $kR = v$, мы видим, что уравнения (56) и (57) совершенно аналогичны уравнению (36). Пусть: $k_1, k_2, \ldots$ — положительные корни уравнения (56). Принимая во внимание (55), получаем для $v(r, t)$:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 k_n^2 t} \frac{\sin k_n r}{r}. \tag{58}$$

Начальное условие (49) дает

$$r\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n r. \tag{59}$$

Совершенно так же, как и в [216], функции $\sin k_n r$ ортогональны на промежутке $(0, R)$ и, следовательно, коэффициенты разложения (59) определяются формулами

$$a_n = \int_0^R r\psi(r) \sin k_n r \, dr \Big/ \int_0^R \sin^2 k_n r \, dr.$$

Переходя к уравнению для u, мы по-прежнему обозначим через k_n ($n = 1, 2, \ldots$) положительные корни уравнения (57). Здесь мы должны еще учесть и корень $k = 0$, который соответствует частоте ω, равной нулю. При этом вместо $(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ мы должны написать $A + Bt$, уравнение для $R(r)$ будет $R''(r) = 0$, и $W(r) = R(r) : r$ есть постоянная, так что соответствующее решение уравнения (46) будет $a_0 + b_0 t$. Оно удовлетворяет, очевидно, при любых значениях постоянных a_0 и b_0, предельному условию (50).

Окончательно для u получим

$$u(r, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t) \frac{\sin k_n r}{r}.$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получим разложение функций, входящих в начальные условия (48)

$$r\varphi_1(r) = a_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n r, \quad r\varphi_2(r) = b_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} k_n b_n \sin k_n r.$$

Принимая во внимание уравнение (57), нетрудно проверить, что $\sin k_n r$ ортогональны не только между собой, но и с функцией r на промежутке $(0, R)$, т. е.

$$\int_0^R r \sin k_n r \, dr = 0 \text{ и } \int_0^R \sin k_m r \sin k_n r \, dr = 0, \text{ при } m \neq n,$$

и коэффициенты в последних разложениях определяются по обычному правилу:

$$a_0 = \int_0^R r^2 \varphi_1(r) \, dr \Big/ \int_0^R r^2 \, dr = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 \varphi_1(r) \, dr,$$

$$a_n = \int_0^R r\varphi_1(r) \sin k_n r \, dr \Big/ \int_0^R \sin^2 k_n r \, dr.$$

Аналогичные формулы получаются и для коэффициентов b_n. Отметим, что для уравнения (47) при $\omega = 0$, мы получаем решение $v = \text{const}$, но это решение не удовлетворяет предельному условию (51), ибо по условию $h > 0$.

Уравнение (46) мы можем толковать как уравнение для потенциала скорости u при колебании газа. При этом предельное условие (50) выражает тот факт, что скорость газовых частиц, находящихся на поверхности сферы, имеет составляющую, направленную по нормали к сфере, равную нулю.

Предельное условие (51) для уравнения теплопроводности (47) выражает тот факт, что поверхность сферы лучеиспускает в окружающее пространство, температура которого принимается равной нулю.

219. Теорема единственности. Перейдем теперь к вопросу об единственности решения уравнения теплопроводности при заданных начальном и предельных условиях [ср. **192**]. Возьмем одномерную задачу, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{60}$$

для ограниченного стержня $0 \leqslant x \leqslant l$. Построим на плоскости xt область G, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = l$ и находящуюся сверху отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ оси x (рис. 135). Проведем еще какой-либо прямолинейный отрезок $t = t_0$, $t_0 > 0$, параллельный оси x. Он отсечет от области G конечный прямоугольник $OAQP$, который мы обозначим одной буквой H. Докажем следующую теорему:

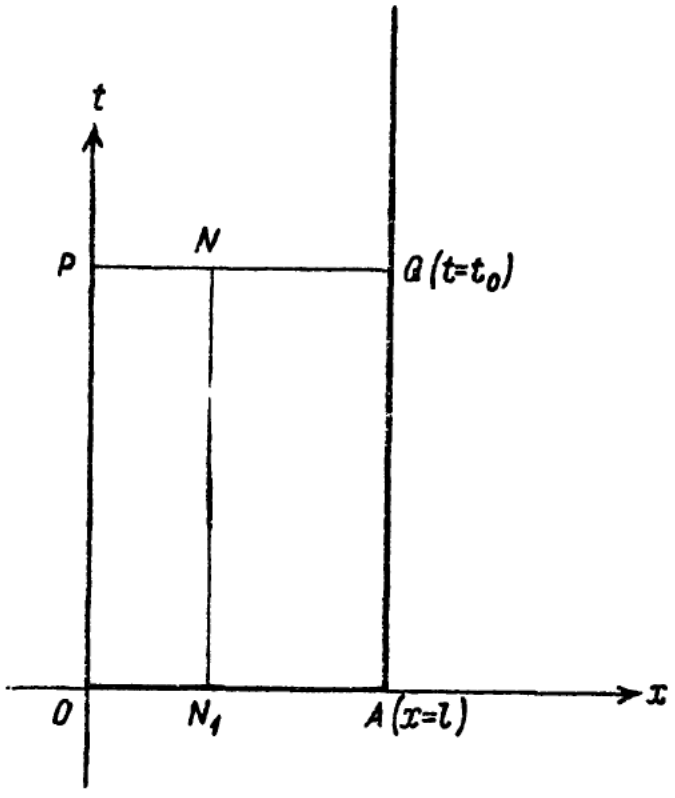


Рис. 135.

Теорема. *Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению* (60) *внутри G и непрерывна вплоть до контура G. При этом наибольшее и наименьшее значение $u(x, t)$ в H достигается на части J контура H, образуемой сторонами OP, OA и AQ.*

При доказательстве ограничимся рассмотрением случая наибольшего значения и будем доказывать от обратного. Положим, что наибольшее значение $u(x, t)$ достигается не на J, а внутри H или внутри стороны PQ, и приведем это к противоречию. Пусть это наибольшее значение достигается в точке (x', y') и равно M. Тем самым наибольшее значение функции $u(x, t)$ на J меньше, чем M. Построим новую функцию $v(x, t)$ следующим образом:

$$v(x, t) = u(x, t) - k(t - t_0), \tag{61}$$

где k — положительное число, которое мы сейчас фиксируем. Мы имеем в прямоугольнике H:

$$u(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant u(x, t) + kt_0,$$

и можно фиксировать число k настолько близким к нулю, чтобы наибольшее значение $v(x, t)$ на J было, как и для $u(x, t)$, меньше, чем значение $v(x, t)$ в точке (x', t'). При таком выборе k функция $v(x, t)$ будет принимать наибольшее в H значение не на J, а внутри H или внутри стороны PQ. Рассмотрим эти случаи отдельно и приведем оба эти случая к противоречию.

Пусть $v(x, t)$ принимает наибольшее значение в некоторой точке $C(x_1, t_1)$, находящейся внутри H. Тем самым в этой точке C будет иметь место максимум функции $v(x, t)$, и мы должны иметь в этой точке **[I, 58]**:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0,$$

или, в силу (61),

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - k \geqslant 0.$$

Но внутри G функция u удовлетворяет уравнению (60), и написанное неравенство приводит к нелепому неравенству: $-k \geqslant 0$. Положим теперь, что $v(x, t)$ достигает наибольшего в H значения в точке $N(x_1, t_0)$, находящейся внутри стороны PQ. Рассматривая изменение $v(x, t)$ вдоль отрезка $N_1 N$, параллельного оси t, мы приходим к неравенству $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ в точке N, поскольку значения функции $v(x, t)$ в точке N не меньше ее значений на всем отрезке $N_1 N$. Рассматривая теперь изменение $v(x, t)$ вдоль PQ, приходим к неравенству $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$ в точке N, ибо $v(x, t_0)$ имеет в точке $N(x = x_1)$ максимум. Таким образом $\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0$ в точке N, и мы приходим к противоречию совершенно так же, как и выше, и теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $u(x, t)$ обращается в нуль на всем контуре l, то $u(x, t)$ равно нулю и во всем прямоугольнике H, а это очень просто приводит к теореме единственности.

Положим, что кроме уравнения (1) имеются начальные условия и предельные условия (задание температуры на концах):

$$u|_{t=0} = f(x) \ (0 \leqslant x \leqslant l), \quad u|_{x=0} = \omega(t), \quad u|_{x=l} = \omega_1(t). \quad (62)$$

Эти условия сводятся к заданию функции $u(x, t)$ на части J контура G. Мы считаем, что эти граничные значения представляют собой непрерывную функцию на всем контуре G, включая и точки O и A, т. е. $\omega(0)=f(0)$ и $\omega_1(0)=f(l)$. Пусть при условиях (62) существуют внутри G два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ уравнения (60), непрерывных вплоть до контура G. При этом их разность $u(x, t)=$ $=u_1(x, t)-u_2(x, t)$ есть решение уравнения (60), равное нулю на J. Из доказанной выше теоремы непосредственно следует, что u

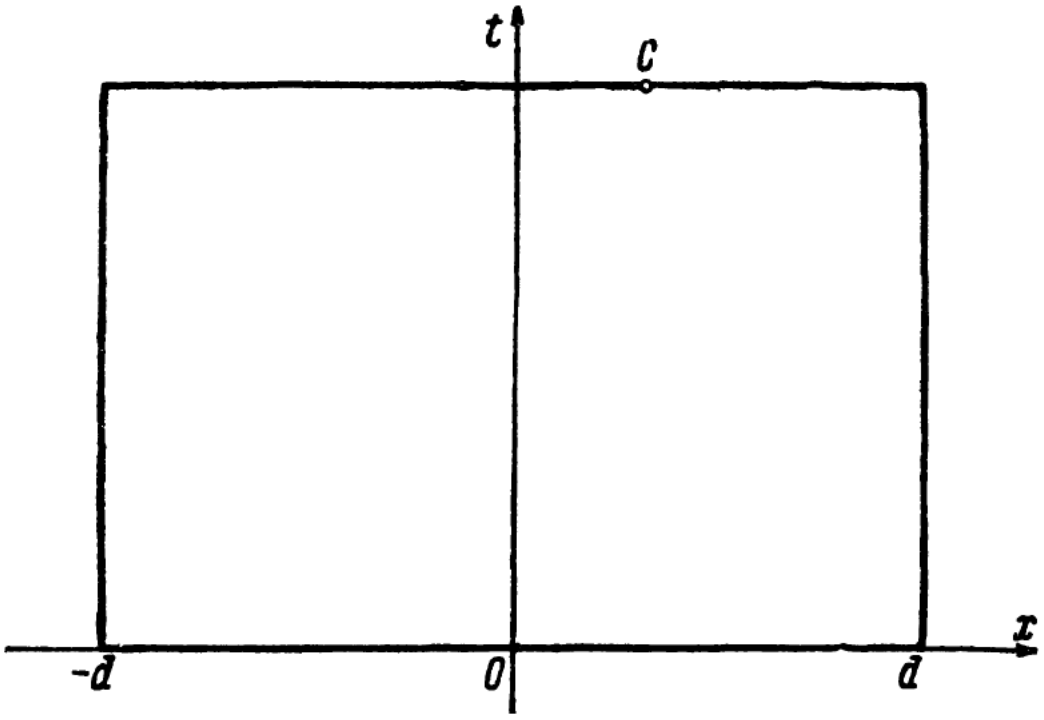


Рис. 136.

равно нулю везде внутри G, т. е. $u_1(x, t)$ совпадает с $u_2(x, t)$. Отметим, что теорема единственности сохраняется, если не требовать непрерывности $u(x, t)$ в точках O и A, но потребовать ограниченности этой функции в окрестности указанных точек. При этом и граничные значения не должны быть непрерывными в этих точках.

Для безграничного стержня решение дается формулой (12). Предположим, что заданная функция $f(x)$ непрерывна и обращается в нуль вне некоторого отрезка $(-b, +b)$, так что

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-b}^{+b} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\, d\xi.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно показать, что $u(x, t)\to 0$ равномерно относительно t при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, т. е. при любом заданном положительном ε существует такое положительное число N, что $|u(x, t)|\leqslant\varepsilon$ при $|x|\geqslant N$ и любом положительном t. Докажем, что существует только одно решение с таким свойством при заданном начальном условии (6). Как и выше, достаточно показать, что $u(x, t)$ принимает наибольшее и наименьшее

значение на оси x. Доказываем от обратного. Пусть $u(x, t)$ принимает наибольшее значение M в некоторой точке $C(x_1, t_1)$, причем $t_1 > 0$, т. е. $f(x) < M$ в промежутке $-\infty < x < +\infty$. Принимая во внимание, что $f(x) = 0$ вне промежутка $(-b, b)$, можем утверждать, что $M > 0$. Проведем две прямые $x = d$ и $x = -d$, выбрав d настолько большим, чтобы на указанных прямых имело место неравенство $|u(x, t)| < M$, и построим прямоугольник H, образованный указанными прямыми, осью x и прямой, параллельной этой оси и проходящей через точку C (рис. 136). Значение функции $u(x, t)$ в точке C больше, чем ее значение на части J контура H, образованной тремя сторонами: $x = d$, $x = -d$ и $t = 0$. Таким образом функция $u(x, t)$ достигает в прямоугольнике H наибольшего значения или внутри H, или внутри стороны, проходящей через точку C, а это, как и выше, приводит к противоречию. Таким образом единственность решения задачи с указанным выше свойством при сделанных относительно $f(x)$ предположениях доказана.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелева суммируемость рядов 610
Абеля задача 249, 273
Абсолютная непрерывность интеграла 324
— сходимость несобственных интегралов 263, 275, 277
Автономная система 165
Аддитивность интеграла полная 324
— меры 294
— — полная 313
Асимптотическое направление 416

Бесселя неравенство 458, 461, 466
— уравнение 131, 134
— функции 132 — 134, 560 — 566
Бернулли уравнение 27
— числа 448
Бесконечное множество 284
Бинормаль 397
Буняковского неравенство 462

Вариация элемента площади 425
Вейерштрасса теорема 483
Вектора дифференцирование 351
Векторная величина 339
— диаграмма 573
— линия 357
Векторное поле 353, 357
— произведение 345, 347
Величина векторная 334
— скалярная 339
Винтовая линия 402
Вихрь вектора 359
Внешняя задача Дирихле 593
— мера 292, 308
Внутренняя задача Дирихле 593
— мера 292
— точка множества 284
Волна плоская 513
— прямая и обратная 520
— стоячая 532
— цилиндрическая 545
Волновое уравнение 372, 513
— — неоднородное 549
Волновое уравнение, решение в случае струны 518
— —, — в плоском случае 545
— —, — для трехмерного случая 541
— —, — — n-мерного случая 549
— — обобщенное 590
Вронского определитель 76, 82
Вторая теорема о среднем 474
Вынужденные колебания мембраны 559
— — системы с одной степенью свободы 98 — 102
— — струны 515, 534

Гармоника 436, 532
Гармонические функции 593, 599
Гармонический анализ 439
Гармоническое колебание 96
Гаусса дифференциальная форма вторая 409
— — — первая 408
— кривизна поверхности 418, 425
Геодезические линии 404
Гидродинамики уравнения для идеальной жидкости 371
Гиперболическая точка поверхности 413
Главная нормаль 397
Главные направления 416
— радиусы кривизны 416
Градиент скалярного поля 355
Граница множества 285, 286
Граничное условие 103
Графическое интегрирование дифференциальных уравнений 28, 48 — 50
Грина формула 223, 594
— функция 614 — 616
Гюйгенса принцип 524

Даламбера решение уравнения колебаний струны 517 — 519
Двойной интеграл 177
Двукратный интеграл 177
Диаграмма векторная 573

Диаметр множества 288
Дивергенция 358
Дирихле задача 593
— —, решение для круга 603 — 606
— —, — — полупространства 616, 617
— —, — — сферы 610 — 614
— интеграл 477
— теорема 441, 450, 481
— условие 440
— формула 249
Дифференциальная форма вторая 409
— — первая 408
Дифференциальное уравнение 9
— — Бернулли 27
— — Бесселя 131, 134
— — в полных дифференциалах 238, 243
— — высшего порядка 46 — 56
— — — —, допускающее понижение 52
— —, графический метод решения 28, 48 — 50
— —, интеграл 32
— —, интегрирование 10, 46
— —, — с помощью рядов 124 — 136
— — Клеро 37
— — Лагранжа 39
— — линейное высшего порядка 81
— — — — — — с постоянными коэффициентами 92, 93, 109 — 117
— — — неоднородное второго порядка 79
— — — — — — — с постоянными коэффициентами 85 — 88
— — — однородное второго порядка 75
— — — — — — — с постоянными коэффициентами 82 — 85
— — — первого порядка 23
— —, не решенное относительно производной 34
— —, общий интеграл 10, 32
— — обыкновенное 9
— — однородное 19
— —, особое решение 34, 48
— — первого порядка 9 — 46
— —, порядок 9
— —, приближенный метод решения с помощью рядов 30
— —, — — — Эйлера — Коши 28, 153 — 156
— —, решение 10, 46
— — Риккати 27
— — с отделяющимися переменными 13
Дифференциальное уравнение с частными производными 9, 66 — 74
— —, символический метод решения 106 — 121
— —, теорема существования и единственности решения 13, 47, 136 — 153, 566, 645
— —, частное решение 10
— — Эйлера 115
Дифференциальных уравнений системы линейных с постоянными коэффициентами 117 — 121
— — — обыкновенных 56 — 66
Дифференцирование вектора 351
— по параметру интеграла 252
Диффракции интегралы 267
Диффузия волн 547
Дополнительное множество 285, 289
Дюпена индикатриса 414
— теорема 422

Егорова теорема 319
Единичные векторы 343
Естественное уравнение кривой 396

Жордана мера 283, 291 — 293

Закругления точка 417
Замена переменных в двукратном интеграле 184, 246
— в трехкратном интеграле 192, 194, 196
— — в n-кратном интеграле 305
Замкнутая область 285
Замкнутое множество 284
Замкнутости уравнения 456, 458, 459, 461, 466
Замкнутые системы функций 458, 461, 467
Замыкание множества 285
Запаздывающее значение функции 625
Запаздывающий потенциал 552
Затухающие колебания 96
Звука распространения уравнение 371

Изменения произвольной постоянной Лагранжа 23, 80
Измеримая функция 315
Измеримое множество 309
Изогональные траектории 44
Изоклины 36
Изолированная точка множества 285
Индикатриса Дюпена 414

Интеграл двукратный (двойной) 177—186, 197, 198, 299
— Дирихле 477
—, зависящий от параметра 247 — 260
— кратный 304
— криволинейный 211 — 236
— Лапласа 248
— Лебега 284, 320, 323 — 327, 337
— несобственный 260 — 274
— — кратный 274
— — от разрывной функции 260
— — с бесконечным пределом интегрирования 263
— общий 10, 32, 47, 57
— первый 57
— повторный 175
— по поверхности 201, 205
— Пуассона 606
— равномерно сходящийся 267
— Римана 176, 284
— системы дифференциальных уравнений 57, 66
— трехкратный (тройной) 186 — 198
— Френеля 267
— Фурье 502, 569
Интегральная кривая 10
Интегральное уравнение Абеля 250
— — Фурье 506
Интегрирование по параметру под знаком интеграла 247
— с помощью степенных рядов линейных дифференциальных уравнений 124—136
Интегрируемые функции 299
Интегрирующий множитель 238, 243
Источник точечный 553

Касательная к кривой на поверхности 407
— плоскость к поверхности 406
Касательной единичный вектор 389, 397
Квадратичная погрешность средняя 451
Квадрируемое множество 293
Квазипотенциальное поле 361
Кирхгофа формула 626
Класс L_2 461, 465
Клеро уравнение 37
Колебания мембраны 554—566
— системы с одной степенью свободы, вынужденные 98
— —, вызванные синусоидальной внешней силой 98
— — собственные 96
— струны свободные 513—534
Колебания струны, вызванные сосредоточенной силой 537—540
— — вынужденные 534—536
— тока в цепи, свободные 584—590
Колеблющееся решение 90
Компланарность векторов 342
Конечное множество 284
Координатные линии 183, 379, 406
— поверхности 378
Координаты криволинейные 183, 191, 193
— — ортогональные 408
Коши признак абсолютной сходимости интегралов 261, 263
Коши — Римана уравнение 237
Кратный интеграл 304
Кривая плоская 380
— простая 295
— пространственная 396
Кривизна вторая 398
— Гаусса 418, 425
— кривой 389, 397
— линии на поверхности 411
— средняя 418, 425
Кривизны вектор 389, 397
— линии 418
— радиус 389, 397
— — главный 416
— центр 390
Криволинейные координаты 182, 195, 379
Криволинейный интеграл 211—236
Круглая мембрана 559
Кручение кривой 397, 398

Лагранжа способ изменения произвольных постоянных 23, 80
— тождество 346
— уравнение 39
Лапласа оператор 365, 592, 598
— — в ортогональных координатах 381
— — — сферических координатах 381
— — — цилиндрических координатах 382
— уравнение 281, 370, 374, 381, 592—628
Лебега интеграл 284, 320, 323—327
— мера 284, 309
— подразделение 322
— сумма 322
Линейная зависимость решений 77, 81
Линейное дифференциальное уравнение второго порядка 75, 79
— — — — — — с постоянными коэффициентами 82 — 88

Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка 81
— — — — — — с постоянными коэффициентами 92, 93, 109 — 117
— — — первого порядка 23
Липшица неравенство (условие) 145
Логарифмический декремент затухания 577
Лозинского теорема 152
Локальная производная 383
Лузина теорема 319

Максвелла уравнения 376
Мембраны колебания 554 — 566
Менье теорема 412
Мера внешняя 292, 308
— внутренняя 292
— Жордана 283, 291 — 293
— Лебега 284, 309, 327, 337
— множества 293, 309
Меры теория для плоскости 283
— — — n-мерного пространства 298
Минимальная поверхность 427
Многосвязная область 234
Множества граница 285
— диаметр 288
Множество бесконечное 284
— дополнительное 285, 289
— замкнутое 284
— измеримое 309
— квадрируемое 293
— конечное 284
— меры нуль 293, 310
— ограниченное 284
— открытое 284
— предельное 314
— производное 285
— пустое 289
— счетное 288
Момент вектора 350, 351
Моменты системы точек относительно плоскости, оси и точки 207, 208

Направление асимптотическое 416
— главное 416
— обхода кривой 222, 226
Направлений поле 12
Направленный элемент поверхности 363
Напряжение векторной трубки 362
Начальная амплитуда 96
— фаза 96
Начальное условие 11, 47, 56, 517, 555, 628
Независимость криволинейного интеграла по пути 227, 234
Независимые интегралы системы дифференциальных уравнений 59
Неймана задача 594
Неколеблющееся решение 90
Неоднородное линейное дифференциальное уравнение 79, 81, 85, 92, 112
Непрерывности уравнение 369
Несжимаемости условие 237, 370
Несобственный интеграл 260 — 283
Нормаль главная 397
— к поверхности 407
Нормальное сечение поверхности 411

Область 284
— замкнутая 285
— квадрируемая 293
— многосвязная 234
— открытая 151, 284
— связная 285
Обобщенная сумма расходящегося ряда 609
Обобщенное решение 519
Общий интеграл дифференциального уравнения 10, 32, 47, 57
Объем 173
Обыкновенное дифференциальное уравнение 9
Огибающая семейства кривых 41
— — — в пространстве 428
— — нормалей 391
— — поверхностей 428
Ограниченная функция 315
Ограниченное множество 284
Однородная функция 19
Однородное дифференциальное уравнение 19
— — — линейное второго порядка 75, 82, 85
— — — — высшего порядка 81, 92, 109 — 112
Омбилическая точка 417
Оператор Лапласа 365, 377, 592, 599
Определитель Вронского 76, 82
— функциональный 84, 305
Определяющее уравнение 130
Ортогональность системы тригонометрических функций 437
Ортогональные координаты 379, 408
— системы функций 456, 563
— траектории 44

Ортонормированная система функций 457, 461, 465
Орты 343
Особая точка 157
— — регулярная 129
Особое решение дифференциального уравнения 34, 48
Остроградского формула 204
Открытая область 151, 284
Открытое множество 284

Параболическая точка поверхности 413
Первый интеграл системы дифференциальных уравнений 57
Период колебаний 96
Плато задача 426
Плоская волна 513
Площадь, вычисление криволинейным интегралом 219
—, определение 291
— поверхности 198
Поверхности координатные линии 406
— минимальные 427
— параметрическое уравнение 405
— развертывающиеся 433
— уровня 355
Поглощение волны 580
Погрешность средняя квадратичная 451
Подразделение 320
— Лебега 322
Покоя точка 165
Поле векторное 353, 357
— квазипотенциальное 361
— направлений 12
— потенциальное 360
— скалярное 340, 353
— соленоидальное 362
Полнота системы функций 468
Поля теория 351—387
Поперечные колебания 513
Порядок дифференциального уравнения 9
Последовательных приближений метод 136, 144
Потенциал 280, 356
— запаздывающий 552
— объемных масс 280, 617—621
— простого слоя 283
— сил 61
— скорости течения 237, 370
Потенциальное поле 360
Поток поля 358
Предельная задача 103
— точка множества 284
Предельное множество 314
— условие 103, 517, 555, 571, 628
Предельный цикл 166
Продолжение подразделений 321
Произведение множеств 289
— подразделений 321
Производная локальная 383
— по направлению 354
— субстанциональная 383
Производное множество 285
Простая кривая 295
Прямоугольная мембрана 555
Псевдоскаляр 348
Пуассона интеграл 606
— уравнение 283, 621 — 625
— формула 544, 624
Пустое множество 289
Пучность 532

Работа силового поля 215
Равного уклона линии 36
Равномерная сходимость несобственного интеграла 267, 278
Радиус кривизны 389, 397
— — главный 416
— кручения 398
Развертывающаяся поверхность 433
Разность множеств 289
Расстояние между множествами 286
Расходимость 358
Регулярная особая точка 129
Резонанс 102, 538
Риккати уравнение 27
Римана интеграл 176, 284
Рисса — Фишера теорема 466
Родрига формула 420
Ротор 359

Свободные колебания мембраны 555, 559
— — струны 515
Свободный вектор 340
Связная область 285
Седло 160
Символического множителя метод 106 — 121
Скаляр 339
Скалярная величина 339
Скалярное поле 340, 353
— произведение 343, 347
Собственные значения 104
— колебания системы с одной степенью свободы 96
— функции 104

Соленоидальное поле 362
Соприкасающаяся плоскость 401
Средняя квадратичная погрешность 451
— кривизна 418, 425
Стокса формула 226
Стоячая волна 532
Стоячих волн способ 533
Струна, вывод уравнения колебаний 513
— неограниченная 516 — 524
—, обобщенное уравнение колебаний 580
— ограниченная 524 — 540
Субстанциональная производная 383
Сумма Лебега 322
— множеств 289
Суммируемая функция 329 — 331, 337
Суммируемость рядов по Абелю 610
Существования решения теорема 13, 46, 126 — 153
Сферические координаты 193, 381
Сходимость в себе 463
Счетное множество 288

Таутохронная кривая 251
Телеграфное уравнение 377, 571—592
— — для неограниченной цепи 584
— — — ограниченной цепи 586
Телесный угол 195
Теплопроводности уравнение 373, 628 — 648
— — для неограниченного стержня 629
— — — стержня, ограниченного с одного конца 634
— — — —, — — обоих концов 639
— — обобщенное 641
Тон 532
Точечный источник 553
Траектории изогональные 44
— ортогональные 44
Трехкратный интеграл 188
Тригонометрический полином 435, 451
Триэдр 397
Трубки векторные 358, 362
Тяготения поле 279, 356

Угловая мгновенная скорость 350, 366
Узел 159, 162
— гармоники 532
Узловая точка 15
Уклонение наибольшее 451
Уровня поверхности 355
Условие граничное 103
— начальное 11, 47, 56, 516, 555, 628
— предельное 103, 517, 555, 571, 628
Устанавливающиеся процессы 574
Установившиеся процессы 572
Устойчивое решение 63

Фокус 161
Френе формулы 400
Френеля интеграл 267
Фубини теорема 334
Функциональный определитель 184, 305
Фурье интеграл 502, 569
— интегральное уравнение 506
— коэффициенты 439, 457, 461, 466
— ряды 439, 466
— — в комплексной форме 509
— — кратные 510
— — обобщенные 457
— —, характер сходимости 490, 495
— способ 529, 555, 559, 586, 603, 629, 639, 643
— теорема 502
— формула 502, 507

Характеристики 522
Характеристическое уравнение 83
Хладниевы фигуры 559

Центр 162
— кривизны 390
Цикл 166
— предельный 166
Циклические постоянные функции 234
Цилиндрическая функция 132, 133
Цилиндрические волны 545
— координаты 191, 382
Циркуляция 234, 360

Частное решение дифференциального уравнения 10, 47
Частота колебаний 532
Чисто гармоническое колебание 96

Штурма теорема 90

Эвольвента 394
Эволюта 390, 392
Эйлера дифференциальное уравнение 115

Эйлера форма уравнений гидродинамики 371
— формула 416
— числа 449
Эйлера—Коши способ приближенного построения интегральных кривых 28, 153—156
Элемент объема в криволинейных координатах 195
— — — прямоугольных координатах 190
— — — сферических координатах 194
Элемент объема в цилиндрических координатах 192
— площади в криволинейных координатах 183
— — — полярных координатах 181
— — — прямоугольных координатах 180
— — направленный 363
— — поверхности 200
— — — сферы 195
Эллиптическая точка поверхности 413
Эллиптические координаты 423

Владимир Иванович Смирнов

Курс высшей математики

том второй

М., 1974 г., 656 стр. с илл.

Редактор *Ю. А. Горьков*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *З. В. Автонеева*

Печать с матриц. Подписано к печати 14/II 1974 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 2. Физ. печ. л. 41. Условн. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 39,2. Тираж 63 000 экз. Цена книги 1 р. 26 к. Заказ № 1276.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы,
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.